УДК 517.977

Исследование управляемости дифференциальных систем с управляющими воздействиями специального вида

И. С. Максимова, В. Н. Розова

Кафедра нелинейного анализа и оптимизации
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо–Маклая, д.6, Москва, 117198, Россия

Настоящая работа посвящена изучению управляемости систем

$$\dot{x} = f(x) + B(t)u,$$

где $B(t) = B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t$. Управляющее воздействие имеет специальную структуру, обусловленную физическими приложениями. Например, подобные управляющие воздействия возникают в задачах о посадке самолёта в условиях ветрового возмущения, об изменении угла наклона плоскости круговой орбиты спутника. В работе получены условия управляемости для поставленной задачи, сформулированные в виде соответствующих теорем.

Ключевые слова: локальная управляемость, полная управляемость.

1. Случай нелинейной системы. Постановка задачи

Рассмотрим управляемую систему[1]:

$$\dot{x} = f(x) + B(t)u, \tag{1}$$

где $f(x) \in C^1(R^n)$, $f(0) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0) \neq 0$, $x \in R^n$, $u(\cdot) \in V = \{u(t) \in R^r | u(\cdot) \in L_\infty[0,T]; u(t) \in \Omega \subset R^r\}$, $0 \in \operatorname{int} \Omega$, $t \in [0,T]$, $B(t)$ — матрица размера $n \times r$ специального вида: $B(t) = B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t$, ω — заданное действительное число.

Задача: Найти условия локальной нуль-управляемости системы (1) на $[0,T]$ и выразить их через элементы матриц A, B_1 и B_2, где $A = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0) \neq 0$.

Определение 1. Пусть задано конечное множество M_1. Управляемый объект, описываемый системой (1), называется локально управляемым на множество M_1 на отрезке времени $[0,T]$, если существует $\epsilon > 0$ такое, что для любой точки $x_0 \in M_1 + S_\epsilon(0)$ объект является управляемым на отрезке $[0,T]$ из начального положения x_0 на конечное множество M_1. Это означает, что для любой точки $x_0 \in M_1 + S_\epsilon(0)$ существует допустимое управление $u(t)$ такое, что соответствующее этому управлению решение $x(t)$ системы (1) перейдёт из точки x_0 в некоторую точку множества M_1 на отрезке времени $[0,T]$ [2].

Теорема 1. *Пусть выполнены все предположения на $f(x)$, $B(t)$ и $u(t)$ и на отрезке $[0,T]$ существует точка t^*, в которой ранг матрицы $K(t)$ равен n, где*

$$K(t) = (B(t), AB(t) - B'(t), A^2B(t) - 2AB(t) + B''(t), \ldots,$$
$$C^0_{n-1}A^{n-2}B(t) - C^1_{n-1}A^{n-2}B'(t) + \ldots + (-1)^{n+1}C^{n-1}_{n-1}A^0B^{(n-1)}(t)).$$

Тогда система (1) локально нуль-управляема на отрезке $[0,T]$.

Статья поступила в редакцию 13 октября 2010 г.

[1]Настоящая работа является развитием результатов, полученных в [1].

Замечание. Для удобства вычисления коэффициентов матрицы $K(t)$ её можно записать в виде $K(t) = \{B(t), AB(t) - B'(t), \cdots, (A - B(t))^n\}$, $n \geqslant 2$. Здесь A^k понимается как k-ая степень матрицы A, B^k — как k–ая производная матрицы $B(t)$, причём

$$B^{(2k)}(t) = (-1)^k \omega^{2k}(B_1 \cos\omega t + B_2 \sin\omega t),$$
$$B^{(2k+1)}(t) = (-1)^k \omega^{2k+1}(-B_1 \sin\omega t + B_2 \cos\omega t), k = 0, 1, \cdots$$

Сформулируем следующие утверждения, необходимые для доказательства теоремы [3, 4].

Лемма 1. *Рассмотрим систему*

$$\dot{x} = Ax + B(t)u, \tag{2}$$

Система (2) полностью управляема на $[0, T]$, *если на отрезке* $[0, T]$ *существует точка* t^*, *в которой ранг матрицы* $K(t)$ *равен* n, *где*

$$K(t) = (B(t), AB(t) - B'(t), A^2B(t) - 2AB(t) + B''(t), \ldots,$$
$$C^0_{n-1}A^{n-2}B(t) - C^1_{n-1}A^{n-2}B'(t) + \ldots + (-1)^{n+1}C^{n-1}_{n-1}A^0B^{(n-1)}(t)).$$

Лемма 2. *Пусть система (2) полностью управляема, и пусть* $e_1, \cdots, e_n$ — *точки на осях координат. Тогда существуют* $\epsilon > 0$, *дифференцируемые функции* $u^i(t)$, $\|u^i(t)\| < \epsilon$ *и окрестность нуля* $S_\delta(0)$ *такие, что* $\forall e_i \in S_\delta(0)$ *функции* $u^i(t)$ *переводят систему (2) из* e_i *в ноль.*

Определение 2. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(t, x, u). \tag{3}$$

Система (3) называется полностью управляемой на отрезке $[0, T]$, если для любых точек $x_0, x_1 \in R^n$ найдётся допустимое управление $u(t)$, переводящее систему (3) из состояния x_0 в момент времени $t = 0$ в состояние x_1 в момент времени $t = T$. Система (3) называется полностью нуль-управляемой при $x_1 = 0$.

Доказательство (теоремы 1). Рассмотрим систему (1) и систему (2) в обратном времени. Для этого сделаем замену $\tau = -t$, получим

$$\dot{x} = -f(x) + (\tilde{B}_1 \cos\omega t + B_2 \sin\omega t)u, \tag{4}$$

$$\dot{x} = -Ax + (\tilde{B}_1 \cos\omega t + B_2 \sin\omega t)u, \tag{5}$$

где $\tilde{B}_1 = -B_1, A = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0)$.

Известно, что для данной системы (1) при сделанных предположениях существует $\epsilon > 0$ такое, что при $\|u\| < \epsilon$ все траектории системы (4) с начальным условием $x(0) = 0$ продолжаемы на $[0, 1]$. Таким образом, решения $x(t, 0, 0, u)$ системы (4) определены на отрезке $[0, 1]$ для допустимых управлений u: $\|u\| < \epsilon$.

По условию теоремы 1 получаем, что лемма 1 выполнена и система (5) полностью управляема на отрезке $[0, T]$. Тогда, по лемме 2 для системы (5) существуют $\epsilon > 0$ и $u^i(t)$, $\|u^i(t)\| < \epsilon$, переводящие систему из нуля на e_i, $\|e_i\| < \delta(\epsilon)$, принадлежащие осям координат. Кроме того, $u^i(t)$ можно выбрать дифференцируемыми.

Рассмотрим управление $u(t, \xi) = \xi_1 u^1(t) + \cdots + \xi_n u^n(t)$, где $\xi \in R^n$, $\|\xi\| = \max\limits_i |\xi_i| \leqslant 1$. Тогда $\|u\| < \epsilon$, так как $\|u^i(t)\| < \epsilon$. Применим данное управление

$u(t,\xi)$ к системе (4). Имеем

$$\dot{x} = -f(x) + (\tilde{B}_1 \cos\omega t + B_2 \sin\omega t)u(t,\xi), \tag{6}$$

$x(0) = 0$ — начальное условие. Решение системы (6): $x(t,\xi) = x(t,0,0,u(t,\xi))$. Заметим, что $u(t,0) = 0$ и $x(t,0) = 0$ и полученное решение $x(t,\xi)$ определено на $[0,1]$.

Покажем, что образы $x(1,\xi)$ покрывают некоторую окрестность начала координат при $\|\xi\| \leqslant 1$, т.е. $x(1,\xi) = x_0$ для любой точки $x_0 \in S_\delta(0)$.

Применим теорему о неявной функции к уравнению $x(1,\xi) = x_0$. Рассмотрим матрицу

$$Z(t,\xi) = \frac{\partial x(t,\xi)}{\partial \xi}.$$

Докажем, что $Z(1,\xi)$ невырождена. Из теории дифференциальных уравнений, имеем

$$\frac{\partial x(t,\xi)}{\partial t} = -f(x(t,\xi)) + (\tilde{B}_1 \cos\omega t + B_2 \sin\omega t)u(t,\xi),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial x(t,\xi)}{\partial \xi} = -\left.\frac{\partial f(x(t,\xi))}{\partial x}\right|_0 \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} + (\tilde{B}_1 \cos\omega t + B_2 \sin\omega t)\frac{\partial u(t,\xi)}{\partial \xi},$$

т.е. $\dot{Z} = -AZ + (\tilde{B}_1 \cos\omega t + B_2 \sin\omega t)\dfrac{\partial u(t,\xi)}{\partial \xi}$, где $\dfrac{\partial u}{\partial \xi} = (u^1, \cdots, u^n)$.

Пусть $z_1, \cdots, z_n$ — столбцы матрицы $Z(t,\xi)$, тогда $\dot{z}_j = -Az_j + (\tilde{B}_1 \cos\omega t + B_2 \sin\omega t)u^j$, $j = \overline{1,n}$.

По свойству управления u^j, $z_j(1) = e_j$ и e_j являются линейно независимыми по условию. Таким образом, $\det Z(1,\xi) \neq 0$. Тогда, по теореме о неявной функции, имеем, что если $\|\xi\| \leqslant 1$, то концы траектории системы (4) покрывают некоторую окрестность нуля. Таким образом, система (1) локально нуль-управляема на $[0,T]$. Теорема доказана. □

2. Специальный случай

Рассмотрим линейную систему

$$\dot{x} = Ax + B(t)u, \tag{7}$$

где $B_1 = kB_2$ и k — число, удовлетворяющее некоторым условиям. Здесь A – матрица размера $n \times n$, $x \in R^n$, $t \in [0,T]$, $u(\cdot) \in V = \{u(t) \in R^r | u(\cdot) \in L_\infty[0,T]\}$, $B(t)$ — матрица размера $n \times r$ специального вида

$$B(t) = B_1 \cos\omega t + B_2 \sin\omega t, \tag{8}$$

ω — заданное действительное число.

Задача: Выразить условия полной управляемости системы (7) на $[0,T]$ через элементы матриц A, B_1 и B_2.

Далее рассмотрим функцию $\psi^T(t) \neq 0$, являющуюся решением системы

$$\dot{\psi}^T(t) = -\psi^T(t)A.$$

Известно [5], что система (7) неуправляема тогда и только тогда, когда существуют $\psi^T(t) \neq 0$ — решение системы

$$\dot{\psi}^T(t) = -\psi^T(t)A$$

и интервал $\Delta \subset [0,T]$ такие, что $\psi^T(t)B(t) = 0$ на $\Delta \subset [0,T]$.

Теорема 2. *Пусть выполнены все предположения на* A, $B(t)$ *и* $u(t)$. *Если система (7) неуправляема на отрезке* $[0,T], T < \infty$ *и существует точка* $t^* \in \Delta \subset [0,T]$ *такая, что* $B(t^*) = 0$, *тогда столбцы матриц* B_1 *и* B_2 *принадлежат собственному инвариантному подпространству матрицы* A.

Доказательство. Пусть существуют $\psi^T(t) \neq 0$ — решение сопряжённой системы и интервал $\Delta \subset [0,T]$ такие, что $\psi^T(t)B(t) = 0$ на Δ. Обозначим $\Phi(t) = \psi^T(t)B(t)$, где $B(t)$ — матрица вида (8). Продифференцируем выражение $\Phi(t) = 0$ $(n-1)$ раз.

$$\Phi'(t) = -\psi^T(t)AB(t) + \psi^T(t)\dot{B}(t) = 0,$$

$$\Phi''(t) = \psi^T(t)A^2B(t) - 2\psi^T(t)A\dot{B}(t) + \psi^T(t)\ddot{B}(t) = 0,$$

$$\ldots$$

Пусть точка $t^* \in \Delta$ такая, что $B(t^*) = 0$, тогда $\psi^T(t^*)B(t^*) = 0$. Откуда получаем

$$B_1 = -\frac{\beta}{\alpha}B_2; \quad \alpha = \cos\omega t^*, \quad \beta = \sin\omega t^*, \quad k = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Подставим последнее равенство в выражения для производных. После преобразований получим

$$B_1 = -\frac{\beta}{\alpha}B_2; \quad \psi^T(t^*)B_2 = 0; \quad \psi^T(t^*)AB_2 = 0; \ldots .$$

Это по определению означает линейную зависимость строк (или столбцов) матриц

$$B_2;\ AB_2;\ A^2B_2; \ldots;\ A^{n-1}B_2. \tag{9}$$

Выразив в равенстве $B(t^*) = 0$ B_2 через B_1, получим аналогичную цепочку равенств для матрицы B_1, откуда вытекает, что строки (или столбцы) матриц

$$B_1;\ AB_1;\ A^2B_1; \ldots;\ A^{n-1}B_1. \tag{10}$$

линейно зависимы. Отсюда имеем, что столбцы матриц B_1 и B_2 принадлежат собственному инвариантному подпространству матрицы A, что и доказывает теорему. □

3. Случай перестановочной матрицы

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \tag{11}$$

где $x \in R^n$, $u(\cdot) \in V = \{u(t) \in R^r | u(\cdot) \in L_\infty[0,T]\}$, $t \in [0,T]$, матрица $A(t)$ размера $n \times n$ является n раз дифференцируемой и перестановочной со всеми своими производными, $B(t)$ — матрица размера $n \times r$ вида (8).

Задача: Выразить условия полной управляемости системы (11) на $[0,T]$ через элементы матриц $A(t)$, B_1 и B_2.

Далее рассмотрим функцию $\psi^T(t) \neq 0$, являющуюся решением системы

$$\dot{\psi}^T(t) = -\psi^T(t)A(t).$$

Известно [5], что система (11) неуправляема тогда и только тогда, когда существуют $\psi^T(t) \neq 0$ — решение системы

$$\dot{\psi}^T(t) = -\psi^T(t)A(t)$$

и интервал $\Delta \subset [0, T]$ такие, что $\psi^T(t)B(t) = 0$ на $\Delta \subset [0, T]$.

Теорема 3. *Пусть выполнены все сделанные предположения на $A(t)$, $B(t)$ и $u(t)$. Если система (11) неуправляема на $[0, T]$ и существует точка $t^* \in \Delta \subset [0, T]$ такая, что $B(t^*) = 0$, тогда*

$$F^{(k)}(t) = \Big[F^{(k-1)}(t)A(t) + kF^{(k-2)}(t)\dot{A}(t) + \frac{k(k-1)}{1\cdot 2}F^{(k-3)}(t)\ddot{A}(t) + \cdots + \\ + \psi^T(t)A^{(k)}(t)\Big]B_2 = 0,$$

при $t = t^* \in \Delta \subset [0, T], k = 0, \cdots, n$. Здесь $F(t) = \psi^T(t)A(t)$.

Доказательство (теоремы 3). На интервале $\Delta \subset [0, T]$ рассмотрим $\Phi(t) = \psi^T(t)B(t)$, где $B(t)$ — матрица вида (8), $\psi^T(t) \neq 0$ — решение системы $\dot{\psi}^T(t) = -\psi^T(t)A(t)$. Из неуправляемости системы (11) следует, что $\psi^T(t)B(t) = 0$ на интервале $\Delta \subset [0, T]$. Продифференцируем выражение

$$\Phi(t) = \psi^T(t)B(t) = 0$$

$n - 1$ раз и получим:

$$\Phi'(t) = -\psi^T(t)A(t)B(t) + \psi^T(t)\dot{B}(t) = 0,$$
$$\Phi''(t) = \psi^T(t)A^2(t)B(t) - \psi^T(t)\dot{A}(t)B(t) - 2\psi^T(t)A(t)\dot{B}(t) - \psi^T(t)B(t) = 0,$$
$$\cdots$$

Пусть $t^* \in \Delta \subset [0, T] : B(t^*) = 0$. Тогда $\Phi(t^*) = \psi^T(t^*)B(t^*) = 0$. Из $B(t^*) = 0$ имеем

$$B_1 = -\frac{\beta}{\alpha}B_2; \quad \alpha = \cos\omega t^*, \quad \beta = \sin\omega t^*, \quad k = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Подставив первое равенство в выражения для производных и проведя некоторые преобразования, получим:

$$\begin{gathered} \psi^T(t^*)B_2 = 0, \\ \psi^T(t^*)A(t^*)B_2 = 0, \\ \psi^T(t^*)A^2(t^*)B_2 - \psi^T(t^*)\dot{A}(t^*)B_2 = 0, \\ \cdots \end{gathered} \tag{12}$$

Выведем общую формулу для полученных равенств. Обозначим $F(t) = \psi^T(t)A(t)$. Для $F(t)$ воспользуемся формулой n – ой производной:

$$F^{(k)}(t) = \Big[\psi^{T(k)}(t)A(t) + k\psi^{T(k-1)}(t)\dot{A}(t) + \frac{k(k-1)}{1\cdot 2}\psi^{T(k-2)}(t)\ddot{A}(t) + \cdots + \\ + \psi^T(t)A^{(k)}(t)\Big]B_2. \tag{13}$$

Нетрудно проверить, что производные функций $\psi^T(t)$ и $F(t)$ связаны следующими соотношениями:

$$F^{(i)}(t) = -\psi^{T(i+1)}(t), \quad i = \overline{1, n}.$$

Подставив данные равенства в формулу (13) и учитывая (12), получим

$$F^{(k)}(t) = \Big[\psi^{T(k)}(t)A(t) + k\psi^{T(k-1)}(t)\dot{A}(t) + \frac{k(k-1)}{1\cdot 2}\psi^{T(k-2)}(t)\ddot{A}(t) + \cdots + \\ + \psi^T(t)A^{(k)}(t)\Big] B_2 = 0,$$

$$F^{(k)}(t) = -\Big[F^{(k-1)}(t)A(t) + kF^{(k-2)}(t)\dot{A}(t) + \frac{k(k-1)}{1\cdot 2}F^{(k-3)}(t)\ddot{A}(t) + \cdots + \\ + \psi^T(t)A^{(k)}(t)\Big] B_2 = 0,$$

при $t = t^* \in [0, T] : B(t^*) = 0,\ k = 0, \cdots, n$. Что и доказывает теорему. □

Литература

1. *Максимова И. С., Розова В. Н.* Исследование управляемости линейных систем с управляющими воздействиями специального вида // Вестник ВГУ, Серия: физика, математика. — 2007. — Т. 1. — С. 100–104. [*Maksimova I. S., Rozova V. N.* Issledovanie upravlyaemosti lineyjnihkh sistem s upravlyayuthimi vozdeyjstviyami specialjnogo vida // Vestnik VGU, Seriya: fizika, matematika. — 2007. — T. 1. — S. 100–104.]
2. *Благодатских В. И.* Введение в оптимальное управление (линейная теория). — М.: Высшая школа, 2001. [*Blagodatskikh V. I.* Vvedenie v optimaljnoe upravlenie (lineyjnaya teoriya). — M.: Vihsshaya shkola, 2001.]
3. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. — М.: Наука, 1968. [*Krasovskiyj N. N.* Teoriya upravleniya dvizheniem. — M.: Nauka, 1968.]
4. *Ли Э. В., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. — М.: Наука, 1972. [*Li Eh. V., Markus L.* Osnovih teorii optimaljnogo upravleniya. — M.: Nauka, 1972.]
5. *Гирсанов И. В.* Лекции по математической теории экстремальных задач. — М.: Издательство МГУ, 1969. [*Girsanov I. V.* Lekcii po matematicheskoyj teorii ehkstremaljnihkh zadach. — M.: Izdateljstvo MGU, 1969.]

UDC 517.977

Investigation of Controllability of Differential Systems with Special Type Control Effects

I. S. Maksimova, V. N. Rozova

Department of Optimization and Nonlinear Analysis
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., 117198, Moscow, Russia

The work is initiated by the physical applications. We investigate the controllability of the system

$$\dot{x} = f(x) + B(t)u,$$

where $B(t) = B_1 \cos\omega t + B_2 \sin\omega t$. The control action has the special structure set by the physical application. For example, the similar control actions exist in the problems of the aircraft landing in the conditions of wind disturbance, or changing the incline of the orbit plane of the space satellite. The article describes the controllability specifications for the problem in the form of the corresponding theorems.

Key words and phrases: local controllability.