Современная математика. Фундаментальные направления. Том 65, № 4 (2019). С. 605–612

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-4-605-612 УДК 517.956.25

ОТСУТСТВИЕ РЕШЕНИЙ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

© 2019 г. **Е. И. ГАЛАХОВ, О. А. САЛИЕВА**

Аннотация. С помощью модифицированного метода пробных функций получены достаточные условия отсутствия нетривиальных решений ряда классов полулинейных эллиптических неравенств высокого порядка и квазилинейных эллиптических неравенств, содержащих неоднородные слагаемые (не зависящие от искомой функции).

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

В последние десятилетия многими математиками рассматриваются достаточные условия отсутствия нетривиальных (отличных от тождественного нуля или другой константы п.в.) решений нелинейных неравенств в соответствующих функциональных классах. Метод исследования этой проблемы, основанный на использовании пробных функций специального вида, был предложен С. И. Похожаевым [2] и развит в его совместных работах с Э. Митидиери, В. Галактионовым и другими авторами (см., в частности, монографии [1, 3]), а также в статьях авторов настоящей работы (см. [4, 5] и библиографию там). При этом до сих пор, как правило, рассматривались неравенства, не содержащие неоднородных (не зависящих от искомой функции) слагаемых. Здесь мы модифицируем метод пробных функций для получения достаточных условий отсутствия нетривиальных решений ряда классов полулинейных эллиптических неравенств высокого порядка и квазилинейных эллиптических неравенств, содержащих такие слагаемые.

Основные результаты статьи сформулированы в разделе 1. В разделе 2 доказано отсутствие нетривиальных решений для некоторых полулинейных эллиптических неравенств высокого порядка, в которых нелинейные слагаемые зависят от значений искомой функции, а в разделе 3 — для их квазилинейных аналогов с нелинейным слагаемым, зависящим от модуля градиента. В разделах 4 и 5 аналогичные результаты получены для неравенств, содержащих оператор p-Лапласа, определенный по формуле $\Delta_p u = \operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du)$, и нелинейные слагаемые того же вида, как в разделах 2 и 3 соответственно.

Публикация подготовлена при поддержке программы РУДН «5–100».

1. Формулировка основных результатов

Будем рассматривать полулинейное эллиптическое неравенство высокого порядка

$$\sum_{|\alpha|\leqslant k} D^\alpha(A^\alpha(x,u)) \geqslant a(x)|u|^q + b(x) \quad (x\in\mathbb{R}^n), \tag{1.1}$$

где $a(x) \geqslant c(1+|x|)^\beta$ с некоторыми константами $c > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ при всех $x \in \mathbb{R}^n$, а $b \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Определение 1.1. Будем называть функцию $u \in L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ *слабым решением* неравенства (1.1), если для любой неотрицательной пробной функции $\varphi \in C^k_0(\mathbb{R}^n)$ выполняется неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} u \cdot \sum_{|\alpha|\leqslant k} (-1)^{|\alpha|} A^\alpha(x,u) D^\alpha \varphi \, dx \geqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} (a(x)|u|^q + b(x))\varphi \, dx. \tag{1.2}$$

Теорема 1.1. *Пусть* $q > 0$ *и* $A^\alpha : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — *функции Каратеодори, причем для всех* $\alpha : |\alpha| \leqslant k$ *существуют функции*

$$a_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+,\ a_\alpha \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n_+),$$

такие, что

$$|A^\alpha(x,t)| \leqslant a_\alpha(x)|t|^p \text{ для п. в. } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+,\ p \in (0,q)$$

и

$$n - \frac{\beta p - kq}{q-p} \leqslant 0. \tag{1.3}$$

Пусть, кроме того,

$$\limsup_{R\to\infty} \int\limits_{B_R(0)} b(x)\, dx \geqslant 0. \tag{1.4}$$

Тогда неравенство (1.1) *не имеет слабых* (*в смысле определения* 1.1) *решений* $u \in L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, *отличных от тождественного нуля п.в.*

Далее рассмотрим квазилинейное эллиптическое неравенство

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{|\alpha|\leqslant k} D^\alpha \left(A^\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \geqslant a(x)|Du|^q + b(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n), \tag{1.5}$$

где $a(x) \geqslant c(1+|x|)^\beta$ с некоторыми константами $c > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ при всех $x \in \mathbb{R}^n$, а $b \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Определение 1.2. Будем называть функцию $u \in W^{1,q}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ *слабым решением* неравенства (1.5), если для любой неотрицательной пробной функции $\varphi \in C^k_0(\mathbb{R}^n)$ выполняется неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} \sum_{|\alpha|\leqslant k} (-1)^{|\alpha|} \left(A^\alpha(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) \varphi \, dx \geqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} (a(x)|Du|^q + b(x))\varphi \, dx. \tag{1.6}$$

Теорема 1.2. *Пусть* $q > 1$, $A^\alpha : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — *функции Каратеодори, причем для всех* $\alpha : |\alpha| \leqslant k$ *существуют функции*

$$a_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+,\ a_\alpha \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n_+),$$

такие, что

$$|A^\alpha(x,t)| \leqslant a_\alpha(x)|t| \text{ для п. в. } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$$

и

$$n - \frac{\beta - (k+1)q}{q-1} \leqslant 0, \tag{1.7}$$

а $b(x)$ *удовлетворяет условию* (1.4).

Тогда неравенство (1.5) *не имеет слабых решений* $u \in W^{1,q}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, *отличных от константы п.в.*

В качестве примера квазилинейных неравенств с противоположным знаком в главной части рассмотрим

$$\Delta_p u \geqslant a(x)u^q + b(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n), \tag{1.8}$$

где $a(x) \geqslant c(1+|x|)^\beta$ с некоторыми константами $c > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ при всех $x \in \mathbb{R}^n$, а $b \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Определение 1.3. Будем говорить, что функция $u \in L^q(\mathbb{R}^n_{\mathrm{loc}}) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n_{\mathrm{loc}})$ удовлетворяет неравенству (1.8) *в слабом смысле* (*распределений*), если для любой неотрицательной пробной функции $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ выполняется следующее неравенство:

$$-\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^{p-2}(Du, D\varphi)\,dx \geqslant \int_{\mathbb{R}^n} (a(x)u^q + b(x))\varphi\,dx. \tag{1.9}$$

Теорема 1.3. *Пусть* $q > p-1$ *и*

$$n - \frac{\beta(p-1) - pq}{q-p+1} \leqslant 0, \tag{1.10}$$

$$\limsup_{R\to\infty} \int_{B_R(0)} b(x)\,dx < 0. \tag{1.11}$$

Тогда неравенство (1.9) *не имеет неотрицательных слабых решений, отличных от тождественного нуля п.в.*

В заключение рассмотрим неравенство

$$\Delta_p u \geqslant a(x)|Du|^q + b(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n). \tag{1.12}$$

Определение 1.4. Будем говорить, что функция $u \in W^{1,\max(p,q)}(\mathbb{R}^n_{\mathrm{loc}})$ удовлетворяет неравенству (1.12) *в слабом смысле* (*распределений*), если для любой неотрицательной пробной функции $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ выполняется следующее неравенство:

$$-\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^{p-2}(Du, D\varphi)\,dx \geqslant \int_{\mathbb{R}^n} (a(x)u^q + b(x))\varphi\,dx. \tag{1.13}$$

Теорема 1.4. *Пусть* $q > p-1$ *и*

$$n - \frac{\beta(p-1)}{q-p+1} \leqslant 0, \tag{1.14}$$

а b *удовлетворяет условию* (1.4).

Тогда неравенство (1.12) *не имеет слабых решений* $u \in W^{1,\max(p,q)}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, *отличных от константы п.в.*

2. Доказательство теоремы 1.1

Введем семейство пробных функций $\varphi = \varphi_R \in C_0^k(\mathbb{R}^n; [0,1])$ вида

$$\varphi_R(x) = \psi_R^{\varkappa}(x)$$

с $\varkappa > \dfrac{kq}{q-p}$ и $\psi_R \in C_0^k(\mathbb{R}^n; [0,1])$ такими, что

$$\psi_R(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \leqslant R), \\ 0 & (|x| \geqslant 2R), \end{cases} \tag{2.1}$$

причем существует константа $c > 0$ такая, что

$$|D^\alpha \psi_R(x)| \leqslant cR^{-|\alpha|} \qquad (x \in \mathbb{R}^n) \tag{2.2}$$

для всех мультииндексов α с $0 \leqslant |\alpha| \leqslant k$.

Теперь предположим, что решение u неравенства (1.1) существует. Подставляя $\varphi = \varphi_R$ в (1.2), получаем

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\operatorname{supp}\varphi_R} u^q(1+|x|)^\beta \varphi_R\,dx \leqslant c \int\limits_{\operatorname{supp}\varphi_R} u \sum_{|\alpha|\leqslant k} A^\alpha(x,u) D^\alpha \varphi_R\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} b(x)\varphi_R\,dx \leqslant \\
&\leqslant c \int\limits_{\operatorname{supp}\varphi_R} u^p \sum_{|\alpha|\leqslant k} |D^\alpha \varphi_R|\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} b(x)\varphi_R\,dx \leqslant \\
&\leqslant \frac{1}{2} \int\limits_{\operatorname{supp}\varphi_R} u^q(1+|x|)^\beta \varphi_R\,dx + c \int\limits_{\operatorname{supp}\varphi_R} \left((1+|x|)^{-\frac{\beta p}{q-p}} \sum_{|\alpha|\leqslant k} |D^\alpha \varphi_R|^{\frac{q}{q-p}} \varphi_R^{-\frac{p}{q-p}} + b(x)\varphi_R \right) dx,
\end{aligned} \tag{2.3}$$

откуда

$$\int\limits_{\operatorname{supp}\varphi_R} u^q(1+|x|)^\beta \varphi_R\,dx \leqslant c \int\limits_{\operatorname{supp}\varphi_R} \left((1+|x|)^{-\frac{\beta p}{q-p}} \sum_{|\alpha|\leqslant k} |D^\alpha \varphi_R|^{\frac{q}{q-p}} \varphi_R^{-\frac{p}{q-p}} + b(x)\varphi_R \right) dx.$$

В силу выбора φ_R мы можем изменить области интегрирования в обеих частях неравенства следующим образом:

$$\int\limits_{B_R(0)} u^q(1+|x|)^\beta \varphi_R\,dx \leqslant \int\limits_{B_{2R}(0)} \left((1+|x|)^{-\frac{\beta p}{q-p}} \sum_{|\alpha|\leqslant k} |D^\alpha \varphi_R|^{\frac{q}{q-p}} \varphi_R^{-\frac{p}{q-p}} - b(x)\varphi_R \right) dx.$$

Заметим, что $\varphi_R \equiv 1$ во всей области интегрирования в левой части неравенства. Используя условия (1.4)–(2.2), получим

$$\int\limits_{B_R(0)} u^q(1+|x|)^\beta\,dx \leqslant cR^{n-\frac{\beta p - kq}{q-p}},$$

что приводит к противоречию при $R \to \infty$, если показатель степени в правой части неравенства отрицателен, т. е. при строгом неравенстве в (1.3).

В случае показателя, равного нулю, имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} u^q(1+|x|)^\beta\,dx < \infty,$$

откуда

$$\int\limits_{\operatorname{supp}|D\varphi_R|} u^q(1+|x|)^\beta\,dx \to 0 \text{ при } R \to \infty.$$

Но из (2.3) вследствие неравенства Гельдера имеем

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}^n} u^q(1+|x|)^\beta\,dx \leqslant \\
&\leqslant \left(\int\limits_{\operatorname{supp}|D\varphi_R|} \left(\sum_{|\alpha|\leqslant k} |D^\alpha \varphi_R|^{\frac{q}{q-p}} ((1+|x|)^{-\beta})^{\frac{p}{q-p}} \varphi^{-\frac{p}{q-p}} + b(x)\varphi_R \right) dx \right)^{\frac{p}{q}} \times \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} u^q(1+|x|)^\beta dx \right)^{\frac{q-p}{q}},
\end{aligned}$$

где при $R \to \infty$ первый множитель стремится к 0 по доказанному, а второй ограничен, что вновь приводит к противоречию, завершающему доказательство теоремы.

3. Доказательство теоремы 1.2

Для доказательства этой теоремы возьмем $\varphi = \varphi_R \in C_0^{k+1}(\mathbb{R}^n;[0,1])$ вида

$$\varphi_R(x) = \psi_R^{\varkappa}(x)$$

с $\varkappa > (k+1)q'$ и $\psi_R \in C_0^{k+1}(\mathbb{R}^n;[0,1])$, удовлетворяющими условиям (2.1) и (2.2). Достаточно, чтобы условия (2.2) выполнялись при

$$0 \leqslant |\alpha| \leqslant k+1.$$

Как и выше, предположим, что решение u задачи (1.5) существует. Подставляя $\varphi = \varphi_R$ в (1.6), получаем

$$\int\limits_{\operatorname{supp}\varphi_R} |Du|^q |x|^\beta \varphi_R\,dx \leqslant c \int\limits_{\operatorname{supp}\varphi_R} |Du| \cdot |D(\sum_{|\alpha|\leqslant k} D^\alpha \varphi_R)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \int\limits_{\operatorname{supp}\varphi_R} |Du|^q (1+|x|)^\beta \varphi_R\,dx + c \int\limits_{\operatorname{supp}\varphi_R} \left((1+|x|)^{-\frac{\beta q'}{q}} |D(\sum_{|\alpha|\leqslant k} D^\alpha \varphi_R)|^{q'} \varphi_R^{1-q'} + b(x)\varphi_R \right) dx,$$

откуда

$$\int\limits_{\operatorname{supp}\varphi_R} |Du|^q (1+|x|)^\beta \varphi_R\,dx \leqslant c \int\limits_{\operatorname{supp}\varphi_R} \left((1+|x|)^{-\frac{\beta q'}{q}} |D(\sum_{|\alpha|\leqslant k} D^\alpha \varphi_R)|^{q'} \varphi_R^{1-q'} + b(x)\varphi_R \right) dx.$$

В силу выбора φ_R мы можем изменить области интегрирования в обеих частях неравенства следующим образом:

$$\int\limits_{B_R(0)} |Du|^q (1+|x|)^\beta \varphi_R\,dx \leqslant c \int\limits_{B_{2R}(0)} \left((1+|x|)^{-\frac{\beta q'}{q}} |D(\sum_{|\alpha|\leqslant k} D^\alpha \varphi_R)|^{q'} \varphi_R^{1-q'} + b(x)\varphi_R \right) dx.$$

Заметим, что $\varphi_R \equiv 1$ во всей области интегрирования в левой части неравенства. Используя условия (1.4)–(2.2), получим

$$\int\limits_{B_R(0)} |Du|^q (1+|x|)^\beta\,dx \leqslant cR^{n-\frac{\beta-(k+1)q}{q-1}},$$

что приводит к противоречию при $R \to \infty$, если показатель степени в правой части неравенства отрицателен, т. е. при строгом неравенстве в (1.7). Случай показателя, равного нулю, рассматривается аналогично предыдущей теореме.

4. Доказательство теоремы 1.3

Предположим, что искомое решение существует. Обозначим $u_\varepsilon = u + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Подставляя в (1.9) $\varphi(x) = u_\varepsilon^\lambda(x)\varphi_R(x)$ с $\lambda > 0$, где φ_R — функции из предыдущего раздела с $k=1$, получаем

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n} u^q u_\varepsilon^\lambda (1+|x|)^\beta \varphi_R\,dx &\leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} (|Du|^{p-2}Du, D(u^\lambda\varphi_R))\,dx = \\
&= \lambda \int\limits_{\mathbb{R}^n} u^{\lambda-1}|Du|^p\varphi_R\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} (|Du|^{p-2}(Du, D\varphi_R) + u^\lambda b(x))\,dx \leqslant \\
&\leqslant \lambda \int\limits_{\mathbb{R}^n} u^{\lambda-1}|Du|^p\varphi_R\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} (|Du|^{p-1}|D\varphi_R| + u_\varepsilon^\lambda b(x)\varphi_R)\,dx
\end{aligned}$$

и в силу неравенства Юнга

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}^n} u^q u_\varepsilon^\lambda (1+|x|)^\beta \varphi_R\,dx + |\lambda| \int\limits_{\mathbb{R}^n} u^{\lambda-1}|Du|^p\varphi_R\,dx \leqslant \\
&\leqslant |\lambda| \int\limits_{\mathbb{R}^n} u^{\lambda-1}|Du|^p\varphi_R\,dx + c(\lambda) \int\limits_{\mathbb{R}^n} (u^{\lambda+p-1}|D\varphi_R|^p\varphi_R^{1-p} + \varepsilon^\lambda b(x)\varphi_R)dx,
\end{aligned}$$

т. е.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} u^q u_\varepsilon^\lambda (1+|x|)^\beta \varphi_R\,dx \leqslant c(\lambda) \int\limits_{\mathbb{R}^n} (u^{\lambda+p-1}|D\varphi_R|^p\varphi_R^{1-p} + \varepsilon^\lambda b(x)\varphi_R)dx. \tag{4.1}$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0_+$ и повторно применяя неравенство Юнга, приходим к

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} u^{q+\lambda}(1+|x|)^{\beta}\varphi_R\,dx \leqslant c(\lambda)\int\limits_{\mathbb{R}^n}(|D\varphi_R|^{\frac{p(q+\lambda)}{q-p+1}}(1+|x|)^{-\frac{\beta(\lambda+p-1)}{q-p+1}}\varphi_R^{1-\frac{p(q+\lambda)}{q-p+1}})dx.$$

Сужая область интегрирования, получим в левой части этого неравенства

$$\frac{1}{2}\int\limits_{B_R(0)} u^{q+\lambda}(1+|x|)^{\beta}\varphi_R\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{B_R(0)} u^{q+\lambda}(1+|x|)^{\beta}\,dx,$$

а в правой части будем иметь

$$\int\limits_{B_{2R}(0)} |D\varphi_R|^{\frac{p(q+\lambda)}{q-p+1}}(1+|x|)^{-\frac{\beta(\lambda+p-1)}{q-p+1}}\varphi_R^{1-\frac{p(q+\lambda)}{q-p+1}}\,dx.$$

Аналогично предыдущему разделу, получим

$$\int\limits_{B_R(0)} u^{q+\lambda}(1+|x|)^{\beta}\,dx \leqslant cR^{n-\frac{\beta(p-1)}{q-p+1}},$$

что приводит к противоречию при $R\to\infty$, если в (1.10) выполнено строгое неравенство. Если же в (1.10) имеет место равенство, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} u^{q+\lambda}(1+|x|)^{\beta}\,dx < \infty,$$

откуда

$$\int\limits_{\operatorname{supp}|D\varphi_R|} u^{q+\lambda}(1+|x|)^{\beta}\,dx \to 0 \text{ при } R\to\infty.$$

Но из (4.1) с учетом знака $\lambda<0$ и неравенства Гельдера имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} u^{q+\lambda}(1+|x|)^{\beta}\,dx \leqslant c(\lambda)\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} u^{\lambda+p-1}(1+|x|)^{\beta}dx\right)^{\frac{q-p+1}{q+\lambda}}\times$$
$$\times\left(\int\limits_{\operatorname{supp}|D\varphi_R|} |D\varphi_R|^{\frac{p(q+\lambda)}{q-p+1}}(\rho^{\gamma}|x|^{-\beta})^{\frac{\lambda+p-1}{q-p+1}}\varphi_R^{1-\frac{p(q+\lambda)}{q-p+1}}dx\right)^{\frac{\lambda+p-1}{q+\lambda}}$$

где при $R\to\infty$ первый множитель ограничен, а второй стремится к 0 по доказанному, что вновь приводит к противоречию, завершающему доказательство теоремы.

5. Доказательство теоремы 1.4

Подставляя $\varphi(x)=\varphi_R(x)$ в (1.9), получаем

$$\int\limits_{\operatorname{supp}\varphi_R} |Du|^q(1+|x|)^{\beta}\varphi_R\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{\operatorname{supp}\varphi_R}(|Du|^{p-2}(Du,D\varphi_R)+b(x)\varphi_R)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{\operatorname{supp}\varphi_R}(|Du|^{p-1}\cdot|D\varphi_R|+b(x)\varphi_R)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\operatorname{supp}\varphi_R}|Du|^q(1+|x|)^{\beta}\varphi_R\,dx + c\int\limits_{\operatorname{supp}\varphi_R}((1+|x|)^{-\frac{\beta(p-1)}{q-p+1}}|D\varphi_R|^{\frac{q}{q-p+1}}\varphi_R^{-\frac{p-1}{q-p+1}}+b(x)\varphi_R)\,dx,$$

откуда

$$\int\limits_{\operatorname{supp}\varphi_R} |Du|^q(1+|x|)^\beta \varphi_R\,dx \leqslant c \int\limits_{\operatorname{supp}\varphi_R} \left((1+|x|)^{-\frac{\beta(p-1)}{q-p+1}} |D\varphi_R|^{\frac{q}{q-p+1}} \varphi_R^{-\frac{p-1}{q-p+1}} + b(x)\varphi_R\right) dx.$$

В силу выбора φ_R мы можем изменить области интегрирования в обеих частях неравенства аналогично предыдущему разделу:

$$\int\limits_{B_R(0)} |Du|^q(1+|x|)^\beta \varphi_R\,dx \leqslant \int\limits_{B_{2R}(0)} \left((1+|x|)^{-\frac{\beta(p-1)}{q-p+1}} |D\varphi_R|^{\frac{q}{q-p+1}} \varphi_R^{-\frac{p-1}{q-p+1}} + b(x)\varphi_R\right) dx.$$

Заметим, что $\varphi_R \equiv 1$ во всей области интегрирования в левой части неравенства. Аналогично доказательствам предыдущих теорем, получим

$$\int\limits_{B_R(0)} |Du|^q(1+|x|)^\beta\,dx \leqslant cR^{n-\frac{\beta(p-1)}{q-p+1}},$$

что приводит к противоречию при $R\to\infty$, если показатель степени в правой части неравенства отрицателен. Случай показателя, равного нулю, рассматривается аналогично предыдущей теореме.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Митидиери Э., Похожаев С. И.* Теоремы Лиувилля для некоторых классов нелинейных нелокальных задач// Тр. МИАН. — 2005. — *248*. — С. 158–178.
2. *Похожаев С. И.* Существенно нелинейные емкости, порожденные дифференциальными операторами// Докл. РАН. — 1997. — *357*. — С. 592–594.
3. *Galaktionov V., Mitidieri E., Pohozaev S.* Blow-up for higher-order parabolic, hyperbolic, dispersion and Schrödinger equations. — Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2014.
4. *Galakhov E., Salieva O.* On blow-up of solutions to differential inequalities with singularities on unbounded sets// J. Math. Anal. Appl. — 2013. — *408*. — C. 102–113.
5. *Salieva O.* On nonexistence of solutions to some nonlinear parabolic inequalities// Commun. Pure Appl. Anal. — 2017. — *16*, № 3. — C. 843–853.

Е. И. Галахов
Российский университет дружбы народов,
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6
E-mail: galakhov@rambler.ru

О. А. Салиева
Московский государственный технологический университет «Станкин»,
127055, Москва, Вадковский пер., д. 1
E-mail: olga.a.salieva@gmail.com

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-4-605-612 UDC 517.956.25

Absence of Solutions for Some Nonhomogeneous Elliptic Inequalities

© 2019 **E. I. Galakhov, O. A. Salieva**

Abstract. By means of the modified method of test functions, we obtain sufficient conditions of absence of nontrivial solutions for some classes of semilinear elliptic inequalities of higher order and quasilinear elliptic inequalities containing nonhomogeneous terms (independent of the unknown function).

REFERENCES

1. E. Mitidieri and S. I. Pohozaev, “Teoremy Liuvillya dlya nekotorykh klassov nelineynykh nelokal’nykh zadach” [Liouville theorems for some classes of nonlinear nonlocal problems], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2005, **248**, 158–178 (in Russian).
2. S. I. Pohozaev, “Sushchestvenno nelineynye emkosti, porozhdennye differentsial’nymi operatorami” [Essentially nonlinear capacities generated by differential operators], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1997, **357**, 592–594 (in Russian).
3. V. Galaktionov, E. Mitidieri, and S. Pohozaev, *Blow-up for Higher-Order Parabolic, Hyperbolic, Dispersion and Schrödinger Equations*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 2014.
4. E. Galakhov and O. Salieva, “On blow-up of solutions to differential inequalities with singularities on unbounded sets,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2013, **408**, 102–113.
5. O. Salieva, “On nonexistence of solutions to some nonlinear parabolic inequalities,” *Commun. Pure Appl. Anal.*, 2017, **16**, No. 3, 843–853.

E. I. Galakhov
Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
E-mail: galakhov@rambler.ru

O. A. Salieva
Moscow State Technological University “Stankin,” Moscow, Russia
E-mail: olga.a.salieva@gmail.com