Современная математика. Фундаментальные направления. Том 64, № 1 (2018). С. 131–147

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-1-131-147 УДК 517.9

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДЕНИЕМ

© 2018 г. **В. А. ПОПОВ**

Аннотация. Рассматривается дифференциально-разностное уравнения второго порядка в ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^n$. Предполагается, что дифференциально-разностный оператор содержит несколько разностных операторов с вырождением, соответствующих операторам дифференцирования. Кроме того, рассматриваемый дифференциально-разностный оператор нельзя представить в виде композиции разностного оператора и сильно эллиптического дифференциального оператора. Наличие вырожденных разностных операторов не позволяет получить неравенство Гординга.

В работе получены априорные оценки, из которых следует секториальность, а также существование фридрихсова расширения рассматриваемого дифференциально-разностного оператора. Полученные оценки могут быть применены для исследования спектра фридрихсова расширения.

Известно, что эллиптические дифференциально-разностные уравнения могут иметь решения, не принадлежащие даже пространству Соболева $W_2^1(Q)$. Однако, опираясь на полученные оценки, можно доказать определенную гладкость решений, но не во всей области Q, а в некоторых подобластях Q_r, порожденных сдвигами границы, где $\bigcup\limits_r \overline{Q_r} = \overline{Q}$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Настоящая работа посвящена априорным оценкам решений для эллиптических дифференциально-разностных уравнений с вырождением с переменными коэффициентами. Г. А. Каменский и А. Д. Мышкис сформулировали вопрос о построении теории краевых задач для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений. Обзор литературы в области эллиптических функционально-дифференциальных уравнений можно найти в работе [29]. Основы общей теории эллиптических и параболических дифференциально-разностных уравнений были построены в работах А. Л. Скубачевского и его учеников. Современное состояние теории эллиптических функционально-дифференциальных уравнений можно найти в обзоре [22], который включает в себя ряд важных направлений: эллиптические функционально-дифференциальные уравнения с растяжениями—сжатиями переменных, нелинейные функционально-дифференциальные уравнения, приложения к проблеме Т. Като о корне квадратном из оператора, приложения к исследованию автоколебаний нелинейных лазерных систем и другие [2, 5, 13, 18, 19, 23, 24, 30–32].

Помимо приложений, интерес к краевым задачам для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений связан с появлением ряда интересных свойств. Например, гладкость обобщенных решений может нарушаться внутри области и сохраняться в некоторых подобластях, порожденных сдвигами границы области.

В 1951 г. после работы М. В. Келдыша [9] возник интерес к эллиптическим уравнениям с вырождением. Эта статья повлекла за собой целый ряд исследований многих известных математиков

Публикация подготовлена при поддержке Программы РУДН «5-100» и при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-01-00450.

и сыграла важную роль в развитии теории вырождающихся дифференциальных уравнений. В дальнейшем подобными задачами занимались такие математики, как О. А. Олейник и Е. В. Радкевич [14], М. И. Вишик [3], Г. Фикера [25] и многие другие. В своей работе М. В. Келдыш впервые показал, что при определенных условиях часть границы (многообразие вырождения) свободна от краевых условий.

Подобное явление возникает и в случае эллиптических дифференциально-разностных уравнений с вырождением. Но стоит отметить, что, в отличие от эллиптических уравнений с вырождением, причиной такого явления служит не вырождение коэффициентов дифференциального оператора на многообразии вырождения, а присутствие в дифференциально-разностном операторе разностного оператора с вырождением, которое носит нелокальный характер. В работах А. Л. Скубачевского [21, 29] изучены дифференциально-разностные операторы порядка $2m$, которые представляются в виде композиции сильно эллиптического дифференциального оператора и вырожденного разностного оператора, т. е. в виде $L_R u = LRu$, где L — сильно эллиптический дифференциальный оператор, а R — разностный оператор, эрмитова часть которого является неотрицательным вырожденным оператором.

Интерес к таким операторам вызван появлением ряда принципиально новых свойств даже по сравнению с сильно эллиптическими дифференциально-разностными операторами (см. [28]), а также приложениями полученных результатов к некоторым нелокальным эллиптическим задачам, возникающим в теории плазмы (см. [1]). В частности, А. Л. Скубачевским было показано, что нелокальные эллиптические задачи, связывающие значения неизвестной функции на различных компактах, можно свести к эллиптическим дифференциально-разностным уравнениям с вырождением. В работе [16] получены априорные оценки и построено фридрихсово расширение дифференциально-разностного оператора с постоянными коэффициентами и несколькими вырожденными разностными операторами, а также исследованы его спектральные свойства. Локальная гладкость обобщенных решений для данных уравнений и гладкость вблизи границы доказаны в работах [17, 27]. Необходимые и достаточные условия существования следов обобщенных решений на частях границы области были получены в работе [15].

В настоящей работе мы рассмотрим дифференциально-разностный оператор с переменными коэффициентами, содержащий несколько вырожденных операторов, действующий в пространстве $L_2(Q)$. А именно, рассмотрим следующее уравнение:

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} b_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} R_{ij} u(x) = f(x) \qquad (x \in Q \subset \mathbb{R}^n), \tag{1.1}$$

где $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с кусочно-гладкой границей ∂Q, R_{ij} — разностные операторы, действующие в пространстве $L_2(Q)$ и определенные по формуле $R_{ij}u(x) = \sum\limits_{h \in \mathcal{M}} a_{ijh} u(x+h)$, $\mathcal{M}$ — конечное множество векторов h из $\mathbb{R}^n$ с целочисленными координатами, $a_{ijh} \in \mathbb{C}$, $b_{ij}(x) = b_{ji}(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — вещественнозначные M-периодические функции.

Мы будем рассматривать первую краевую задачу для уравнения (1.1). Так как сдвиг на вектор h может отобразить точки $x \in Q$ в точки $x \in \mathbb{R}^n \backslash Q$, то мы должны задать значения искомой функции не только на границе ∂Q, но и всюду вне области. Таким образом, мы будем рассматривать однородное краевое условие

$$u(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}^n \setminus Q). \tag{1.2}$$

Мы докажем априорные оценки обобщенных решений первой краевой задачи, из которых будет следовать, что рассматриваемый дифференциально-разностный оператор с вырождением является секториальным. В дальнейшем на основе полученных априорных оценок можно построить фридрихсово расширение оператора и применить теоремы о представлении для изучения разрешимости рассматриваемой задачи. Кроме того, оценки позволят изучить гладкость решений.

2. Геометрические построения и разностные операторы

Сначала приведем ряд вспомогательных результатов, необходимых для формулировки и доказательства основного результата. Доказательства приводимых ниже утверждений можно найти в [21,22,29]. В данных работах было показано, что свойства разностных операторов можно охарактеризовать с помощью свойств матриц, элементами которых являются коэффициенты разностного оператора и нули. Для этого нам понадобятся следующие геометрические построения.

Для простоты будем рассматривать ограниченную область $Q \subset \mathbb{R}^n$ с границей $\partial Q \in C^\infty$, цилиндр $(0,d)\times G$ или прямоугольник, где $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ — ограниченная область (с границей $\partial G \in C^\infty$, если $n \geqslant 3$). Но все результаты верны и для более общих областей, удовлетворяющих следующему условию.

Условие 2.1. *Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\partial Q = \bigcup\limits_i \overline{X}_i$ ($i = 1,\ldots,N_1$), где X_i — открытые связные в топологии ∂Q $(n-1)$-мерные многообразия класса C^∞, $n \geqslant 2$. Пусть, кроме того, в некоторой окрестности каждой точки $x^0 \in K = \partial Q \setminus \bigcup\limits_i X_i$ область Q диффеоморфна n-мерному углу раствора меньше 2π и больше 0.*

Обозначим через $\dot{C}^\infty(Q)$ множество бесконечно дифференцируемых в Q функций с компактными носителями.

Пусть $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$—множество, состоящее из конечного числа векторов h с целочисленными координатами. Обозначим через M аддитивную абелеву группу, порожденную множеством $\mathcal{M}$, а через Q_r — открытые связные компоненты множества $Q \setminus \bigcup\limits_{h\in M} (\partial Q + h)$.

Определение 2.1. Множества Q_r мы будем называть *подобластями*, а совокупность $\mathcal{R}$ всевозможных подобластей Q_r $(r = 1,2,\ldots)$ назовем *разбиением* области Q.

Легко убедиться, что множество $\mathcal{R}$ не более чем счетно.

Лемма 2.1. $\bigcup\limits_r \partial Q_r = \Big(\bigcup\limits_{h\in M} (\partial Q + h)\Big) \bigcap \overline{Q}$.

Лемма 2.2.
1. $\bigcup\limits_r \overline{Q}_r = \overline{Q}$.
2. *Для любых Q_{r_1} и $h \in M$ либо найдется такое Q_{r_2}, что $Q_{r_2} = Q_{r_1}+h$, либо $Q_{r_1}+h \subset \mathbb{R}^n\setminus\overline{Q}$.*

Разбиение $\mathcal{R}$ естественным образом распадается на классы. Мы будем считать, что подобласти $Q_{r_1}, Q_{r_2} \in \mathcal{R}$ принадлежат одному и тому же классу, если существует вектор $h \in M$, для которого $Q_{r_2} = Q_{r_1}+h$. Будем обозначать подобласти Q_r через Q_{sl}, где s — номер класса $(s = 1,2,\ldots)$, а l — порядковый номер данной подобласти в s-м классе. Очевидно, каждый класс состоит из конечного числа $N = N(s)$ подобластей Q_{sl} и $N(s) \leqslant ([\mathrm{diam} Q]+1)^n$.

Пример 2.1. Пусть область $Q = (0,2)\times(0,1) \subset \mathbb{R}^2$, $\mathcal{M} = \{(1,0)\}$. Тогда разбиение $\mathcal{R}$ состоит из одного класса подобластей $Q_{11} = (0,1)\times(0,1)$, $Q_{12} = (1,2)\times(0,1)$ (см. рис. 2.1).

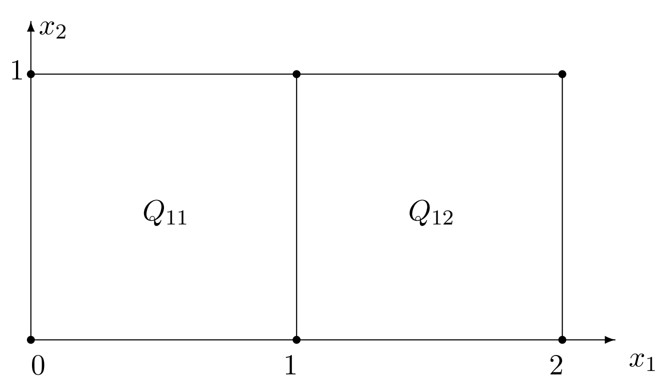

Рис. 2.1

Пример 2.2. Пусть область $Q = (0,\pi) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$, $\mathcal{M} = \{(1,0)\}$. Тогда разбиение $\mathcal{R}$ состоит из двух классов $Q_{1l} = (l-1, \pi-4+l) \times (0,1)$ $(l=1,2,3)$ и $Q_{2,l} = (\pi-4+l, l)$ $(l=1,2,3)$ (см. рис. 2.2).

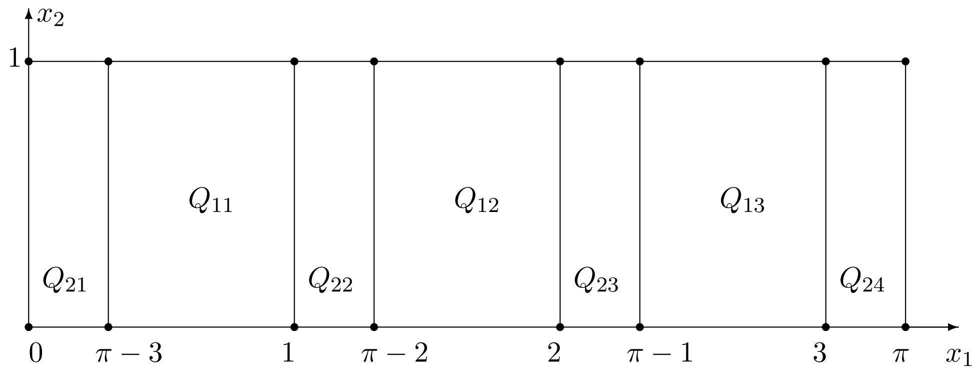

Рис. 2.2

Пример 2.3. Пусть область $Q = (0,2) \times (0,2)$, $\mathcal{M} = \{(1,0)\} \cup \{(0,1)\}$ (см. рис. 2.3).

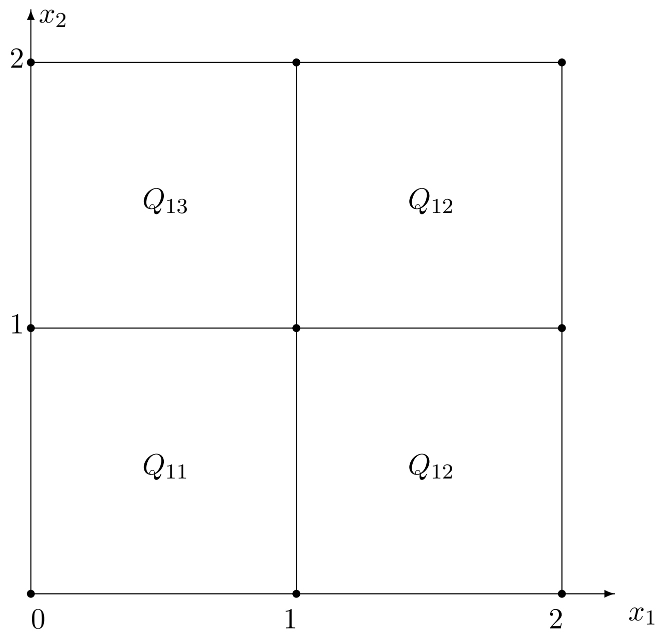

Рис. 2.3

Рассмотрим разностный оператор $R\colon L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$, определенный по формуле
$$Ru(x) = \sum_{h\in\mathcal{M}} a_h u(x+h), \tag{2.1}$$
где a_h — комплексные числа, множество $\mathcal{M}$ состоит из конечного числа векторов $h \in \mathbb{R}^n$ с целочисленными координатами, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Введем операторы I_Q, P_Q, R_Q следующим образом: $I_Q\colon\ L_2(Q) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ — оператор продолжения функции из $L_2(Q)$ нулем в $\mathbb{R}^n \setminus Q$, $P_Q\colon L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(Q)$ — оператор сужения функции из $L_2(\mathbb{R}^n)$ на Q, а $R_Q = P_Q R I_Q\colon\ L_2(Q) \to L_2(Q)$.

Сдвиги $x \to x+h$, вообще говоря, могут отобразить точку $x \in Q$ в точку $x+h \notin Q$. Поэтому краевое условие (1.2) задается не только на ∂Q, но всюду в $\mathbb{R}^n \setminus Q$. Для того, чтобы формально записать это условие, мы вводим оператор I_Q. С другой стороны, функция $(RI_Qu)(x)$ задана в $\mathbb{R}^n$. Для рассмотрения этой функции только в области Q вводится оператор сужения P_Q.

Лемма 2.3. *Операторы* $I_Q:\ L_2(Q)\to L_2(\mathbb{R}^n)$ *и* $P_Q:\ L_2(\mathbb{R}^n)\to L_2(Q)$ *ограничены; при этом* $I_Q^* = P_Q$, *т. е.* $(I_Qu,v)_{L_2(\mathbb{R}^n)} = (u,P_Qv)_{L_2(Q)}$ *для любых* $u\in L_2(Q)$, $v\in L_2(\mathbb{R}^n)$.

Лемма 2.4. *Операторы* $R:\ L_2(\mathbb{R}^n)\to L_2(\mathbb{R}^n)$ *и* $R_Q:\ L_2(Q)\to L_2(Q)$ *ограничены;*

$$R_Q^* = P_QR^*I_Q,\quad R^*u(x) = \sum_{h\in\mathcal{M}} \overline{a}_h u(x-h).$$

Теперь приведем некоторые свойства разностных операторов R_Q в пространстве $L_2(Q)$. Оказывается, эти свойства тесно связаны со свойствами конечного числа матриц, состоящих из нулей и коэффициентов разностного оператора R.

Обозначим через $L_2\Big(\bigcup\limits_l Q_{sl}\Big)$ подпространство функций в $L_2(Q)$, равных нулю вне $\bigcup\limits_l Q_{sl}$, а через $P_s\colon L_2(Q)\to L_2\Big(\bigcup\limits_l Q_{sl}\Big)$ — оператор ортогонального проектирования функций из $L_2(Q)$ на $L_2\Big(\bigcup\limits_l Q_{sl}\Big)$ $(l=1,\dots,N(s))$. Так как $\mu_n(\partial Q_{sl})=0$, из абсолютной непрерывности интеграла Лебега следует, что

$$L_2(Q) = \bigoplus_s L_2\Big(\bigcup_l Q_{sl}\Big), \tag{2.2}$$

где $\mu_n(\cdot)$ — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Лемма 2.5. $L_2\Big(\bigcup\limits_l Q_{sl}\Big)$ *— инвариантное подпространство оператора* R_Q.

Введем изометрический изоморфизм гильбертовых пространств

$$U_s\colon L_2\Big(\bigcup_l Q_{sl}\Big)\to L_2^N(Q_{s1}), \tag{2.3}$$

определив вектор-функцию $(U_su)(x)$ равенством

$$(U_su)_l(x) = u(x+h_{sl})\quad (x\in Q_{s1}), \tag{2.4}$$

где $l=1,\dots,N=N(s)$, h_{sl} таково, что $Q_{s1}+h_{sl}=Q_{sl}$ $(h_{s1}=0)$, $L_2^N(Q_{s1}) = \prod\limits_l L_2(Q_{s1})$.

Лемма 2.6. *Оператор* $R_{Qs}\colon L_2^N(Q_{s1})\to L_2^N(Q_{s1})$, *определенный по формуле*

$$R_{Qs} = U_sR_QU_s^{-1}, \tag{2.5}$$

является оператором умножения на квадратную матрицу R_s *порядка* $N(s)\times N(s)$ *с элементами*

$$r_{kl}^s = \begin{cases} a_h, & \text{если } h=h_{sl}-h_{sk}\in\mathcal{M},\\ 0, & \text{если } h=h_{sl}-h_{sk}\notin\mathcal{M}.\end{cases} \tag{2.6}$$

Замечание 2.1. Поскольку область Q является ограниченной, а матрицы R_s состоят из конечного множества чисел a_h и нулей, то множество различных матриц $\{R_{s_\nu}\}$ $(\nu=1,\dots,n_1)$ конечно.

Лемма 2.7. *Спектр оператора* R_Q *совпадает с объединением спектров конечного числа матриц* R_{s_ν} $(\nu=1,\dots,n_1)$. *Каждая точка спектра* $\sigma(R_Q)$ *является собственным значением бесконечной кратности.*

Лемма 2.8. *Если оператор* $R:\ L_2(\mathbb{R}^n)\to L_2(\mathbb{R}^n)$ *является самосопряженным, то оператор* $R_Q:\ L_2(Q)\to L_2(Q)$ *— также самосопряженный.*

Лемма 2.9. *Для самосопряженности оператора* $R_Q:\ L_2(Q)\to L_2(Q)$ *необходимо и достаточно, чтобы все матрицы* R_{s_ν} $(\nu=1,\dots,n_1)$ *были эрмитовы.*

Определение 2.2. Непрерывную в $\overline{Q}$ функцию $\varphi(x)$ назовем *M-периодической в $\overline{Q}$*, если $\varphi(x)=\varphi(x+h)$ для любых $x, x+h\in\overline{Q}$ и $h\in M$.

Лемма 2.10. *Пусть функция $\varphi(x)$ — M-периодическая в $\overline{Q}$. Тогда $R_Q(\varphi u) = \varphi R_Q u$ для всех $u \in L_2(Q)$.*

Рассмотрим свойства разностных операторов $R_Q\colon L_2(Q) \to L_2(Q)$, имеющих нетривиальное ядро. Обозначим через $\mathcal{N}(\cdot)$ и $\mathcal{R}(\cdot)$ соответственно ядро и образ некоторого оператора.

Лемма 2.11. $L_2^N(Q_{s1}) = \mathcal{N}(R_{Qs}) \oplus \mathcal{R}(R^*_{Qs})$, $L_2^N(Q_{s1}) = \mathcal{N}(R^*_{Qs}) \oplus \mathcal{R}(R_{Qs})$.

Введем обозначения $A_Q = (R_Q + R_Q^*)/2$, $B_Q = (R_Q - R_Q^*)/2i$. Очевидно, что $R_Q = A_Q + iB_Q$. Операторы A_Q и B_Q называются соответственно *вещественной* и *мнимой частями* оператора R_Q. Положим $A_{Qs} = U_s A_Q U_s^{-1}$ и $B_{Qs} = U_s B_Q U_s^{-1}$. В силу леммы 2.6 операторы $A_{Qs}, B_{Qs}\colon L_2^N(Q_{s1}) \to L_2^N(Q_{s1})$ являются операторами умножения на матрицы $A_s = (R_s + R_s^*)/2$, $B_s = (R_s - R_s^*)/2i$, соответственно. Обозначим через P^R, P^{R^*}, P^A, $P^B\colon L_2(Q) \to L_2(Q)$ и P_s^R, $P_s^{R^*}$, P_s^A, $P_s^B\colon L_2^N(Q_{s1}) \to L_2^N(Q_{s1})$ операторы ортогонального проектирования на подпространства $\mathcal{R}(R_Q)$, $\mathcal{R}(R_Q^*)$, $\mathcal{R}(A_Q)$, $\mathcal{R}(B_Q)$ и $\mathcal{R}(R_{Qs})$, $\mathcal{R}(R^*_{Qs})$, $\mathcal{R}(A_{Qs})$, $\mathcal{R}(B_{Qs})$, соответственно.

Операторы P_s^R, $P_s^{R^*}$, P_s^A, P_s^B суть операторы умножения на некоторые матрицы, которые мы также обозначим P_s^R, $P_s^{R^*}$, P_s^A, P_s^B, соответственно.

Лемма 2.12. $L_2(Q) = \mathcal{N}(R_Q) \oplus \mathcal{R}(R_Q^*)$, $L_2(Q) = \mathcal{N}(R_Q^*) \oplus \mathcal{R}(R_Q)$, *при этом*

$$\|P^{R^*}u\|_{L_2(Q)} \leqslant c\|R_Q u\|_{L_2(Q)}, \tag{2.7}$$

$$\|P^{R}u\|_{L_2(Q)} \leqslant c\|R^*_Q u\|_{L_2(Q)} \tag{2.8}$$

для любой функции $u \in L_2(Q)$, где $c > 0$ — постоянная, не зависящая от u.

Ограниченный самосопряженный оператор A в гильбертовом пространстве H назовем *положительным*, если $(Au, u)_H > 0$ для любого $0 \neq u \in H$, и *неотрицательным*, если $(Au, u)_H \geqslant 0$ для любого $u \in H$. Назовем оператор A *положительно определенным*, если $(Au, u)_H \geqslant c\|u\|_H^2$ для любого $u \in H$, где $c > 0$.

Рассмотрим разностные операторы R_i ($i = 1, 2$) вида (2.1) с коэффициентами a_{ih} вместо a_h ($h \in \mathcal{M}$). Положим $R_{iQ} = P_Q R_i I_Q$. Определим матрицы R_{is} порядка $N(s) \times N(s)$ с элементами r_{kl}^{is} ($k, l = 1, \ldots, N(s)$) по формуле (2.6) с коэффициентами a_{ih} вместо a_h.

Лемма 2.13.

1. *Пусть $\mathcal{N}(R_{1s}) \subset \mathcal{N}(R_{2s})$ ($s = 1, 2, \ldots$). Тогда $\mathcal{N}(R_{1Q}) \subset \mathcal{N}(R_{2Q})$, и для любой функции $u \in L_2(Q)$ справедливо неравенство*

$$\|R_{2Q}u\|_{L_2(Q)} \leqslant c_1\|R_{1Q}u\|_{L_2(Q)}, \tag{2.9}$$

где $c_1 > 0$ — постоянная, не зависящая от u.

2. *Если, кроме того, $R_{1Q} = A_Q$, $R_{2Q} = B_Q$, а матрицы A_s ($s = 1, 2, \ldots$) неотрицательны, то оператор A_Q — неотрицательный, при этом $\mathcal{N}(R_Q) = \mathcal{N}(R_Q^*) = \mathcal{N}(A_Q)$ и $\mathcal{R}(R_Q) = \mathcal{R}(R_Q^*) = \mathcal{R}(A_Q)$.*

Лемма 2.14. *Для любой $u \in L_2(Q)$ справедливо равенство*

$$P^R u = \sum_s U_s^{-1} P_s^R U_s P_s u, \tag{2.10}$$

$$P^{R^*} u = \sum_s U_s^{-1} P_s^{R^*} U_s P_s u. \tag{2.11}$$

Обозначим через $W_2^k(Q)$, $k \in \mathbb{N}$, пространство Соболева комплекснозначных функций с нормой

$$\|u\|_{W_2^k(Q)} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant k} \int_Q |\mathcal{D}^\alpha u(x)|^2\,dx\right)^{1/2},$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $\mathcal{D}^\alpha = \mathcal{D}_1^{\alpha_1} \ldots \mathcal{D}_n^{\alpha_n}$, $\mathcal{D}_j = -i\dfrac{\partial}{\partial x_j}$.

Лемма 2.15. *Оператор R_Q непрерывно отображает $\mathring{W}_2^k(Q)$ в $W_2^k(Q)$, при этом для всех $u \in \mathring{W}_2^k(Q)$ справедливо равенство $\mathcal{D}^\alpha R_Q u = R_Q \mathcal{D}^\alpha u$ $(|\alpha| \leqslant k)$, где $\mathring{W}_2^k(Q)$ — замыкание множества $\dot{C}^\infty(Q)$ в $W_2^k(Q)$.*

3. Априорные оценки решений

В данном разделе мы приведем основной результат настоящей работы. В первой теореме мы докажем оценку снизу действительной части скалярного произведения $(L_R u, u)_{L_2(Q)}$. Из второй теоремы следует оценка модуля мнимой части скалярного произведения $(L_R u, u)_{L_2(Q)}$ сверху. Таким образом, рассматриваемый оператор L_R является секториальным, для которого существует фридрихсово расширение.

1. Введем неограниченный дифференциально-разностный оператор $L_R : D(L_R) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$, действующий по формуле

$$L_R\, u(x) = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} b_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}\, R_{ijQ} u(x), \tag{3.1}$$

с областью определения $D(L_R) = \dot{C}^\infty(Q)$, где $b_{ij}(x) = b_{ji}(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — вещественнозначные M-периодические функции,

$$R_{ijQ} = P_Q R_{ij} I_Q, \qquad R_{ij} = \sum_{h \in \mathcal{M}} a_{ijh}\, u(x+h) \qquad (i,j = 1, \ldots, n). \tag{3.2}$$

Введем матрицы R_{ijs} порядка $N(s) \times N(s)$ с элементами

$$r_{kl}^{ijs} = \begin{cases} a_{ijh}, \text{ если } h = h_{sl} - h_{sk} \in \mathcal{M}, \\ \quad 0, \text{ если } h = h_{sl} - h_{sk} \notin \mathcal{M}. \end{cases} \tag{3.3}$$

Наряду с матрицами R_{ijs}, введем матрицы $\widehat{R}_{ijs}$ следующим образом. Пусть $x \in \overline{Q}_{s1}$ — произвольная точка. Рассмотрим все точки $x^i \in \overline{Q}$ такие, что $x^i - x \in M$. Поскольку область Q — ограниченная, множество $\{x^i\}$ состоит из конечного числа точек $I = I(s,x)$ $(I \geqslant N(s))$. Занумеруем точки x^i так, что $x^i = x + h_{si}$ для $i = 1, \ldots, N = N(s)$, $x^1 = x$. Введем матрицы $\widehat{R}_{ijs} = \widehat{R}_{ijs}(x)$ порядка $I \times I$ $(I = I(s,x))$ с элементами

$$\widehat{r}_{kl}^{ijs} = \begin{cases} a_{ijh}, \text{ если } h = x^l - x^k \in \mathcal{M}, \\ \quad 0, \text{ если } h = x^l - x^k \notin \mathcal{M}. \end{cases} \tag{3.4}$$

Отметим, что, хотя элементы матриц $\widehat{R}_{ijs}$ являются константами, порядок этих матриц зависит от выбора точки x.

Замечание 3.1. Если $I(s,x) = N(s)$, то $\widehat{R}_{ijs}(x) = R_{ijs}$. Если $I(s,x) > N(s)$, то матрица R_{ijs} получается из матрицы $\widehat{R}_{ijs}(x)$ вычеркиванием последних $I(s,x) - N(s)$ строк и столбцов.

Обозначим через $A_{ijs} = (R_{ijs} + R_{jis}^*)/2$, $\widehat{A}_{ijs}(x) = (\widehat{R}_{ijs}(x) + \widehat{R}_{jis}^*(x))/2$, $B_{ijs} = (R_{ijs} - R_{jis}^*)/2i$, $\widehat{B}_{ijs}(x) = (\widehat{R}_{ijs}(x) - \widehat{R}_{jis}^*(x))/2i$ $(i,j = 1, \ldots, n)$. Пусть $A_{ijQ} = (R_{ijQ} + R_{jiQ}^*)/2$ и $B_{ijQ} = (R_{ijQ} - R_{jiQ}^*)/2i$.

Перед получением априорных оценок продемонстрируем на примере разницу между матрицами R_{ijs} и $\widehat{R}_{ijs}(x)$.

Пример 3.1. Пусть $Q = (0,2) \times (0,1)$ и $Ru(x) = a_0 u(x) + a_1(u(x_1+1, x_2) + u(x_1-1, x_2))$, где числа a_0, $a_1 \in \mathbb{C}$. Разбиение $\mathcal{R}$ области Q состоит из одного класса подобластей: Q_{11} и Q_{12} (см. пример 2.1). Тогда $R_1 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix}$, $\widehat{R}_1(x) = R_1$, если $x \in \overline{Q}_{11} \setminus \{\{0\} \times (0,1)\}$, $\widehat{R}(x) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & 0 \\ a_1 & a_0 & a_1 \\ 0 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$, если $x \in \{\{0\} \times (0,1)\}$.

Будем предполагать, что выполнены следующие условия:

Условие 3.1 (эллиптичности).*Существуют нетривиальные самосопряженные неотрицательные разностные операторы R_{iQ} такие, что справедливо неравенство*

$$\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x)\widehat{A}_{ijs}(x)\,\xi_i\,\xi_j \geqslant \sum_{i=1}^{n} \widehat{R}_{is}(x)\,\xi_i^2$$

для любых $x \in \overline{Q}_{s1}$ $(s = 1, 2, \dots)$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$, где $\widehat{R}_{is}$—матрицы, соответствующие разностному оператору R_{iQ}.

Условие 3.2 (вырождения). *Множество $S = \{s : \det A_{iis} = 0,\ i = 1, \dots,\ n\}$ непусто.*

Условие 3.3 (подчиненности). $\mathcal{N}(A_{ijs}) \subset \mathcal{N}(B_{ijs})$, $\mathcal{N}(A_{iis}) = \mathcal{N}(R_{is})$, $\mathcal{N}(A_{iis}) \subset \mathcal{N}(A_{ijs}) \cap \mathcal{N}(A_{jis})$, $i, j = 1, \dots n$, *где $\mathcal{N}(\cdot)$—ядро матрицы.*

Очевидно, $\overline{Q} \subset \bigcup\limits_{x\in\overline{Q}} B_{\delta/2}(x)$, где $B_{\delta/2}(x)$ — открытые шары радиуса $\delta/2$ с центром в точке x, $\delta = \delta(x)$. Для каждого $x \in \overline{Q}$ выберем $\delta = \delta(x)$ так, что $2\delta(x) < \min\{1/2, r, a\}$. Здесь, поскольку Q — ограниченная область, $\delta = \delta(x)$ можно выбрать так, что $r = r(x) = \inf \rho(x + h, Q) > 0$ $(h : x+h \notin \overline{Q})$. Число a не зависит от x и будет выбрано позднее. Так как $\overline{Q}$ компактно, существует конечное подпокрытие $\overline{Q}$ шарами $B_{\delta/2}(y^k)$ $(y^k \in \overline{Q},\ k = 1, \dots, J)$. Обозначим $G = \bigcup\limits_k B_{\delta/2}(y^k)$.

Лемма 3.1. *Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — область, удовлетворяющая условию* 2.1. *Тогда существуют неотрицательные M-периодические в $\overline{G}$ функции $\varphi_k \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ $(k = 1, \dots, J)$ такие, что*:

1. $\sum\limits_{k=1}^{J} \varphi_k^2(x) \leqslant 1$ *при* $x \in \mathbb{R}^n$;
2. $\sum\limits_{k}^{J} \varphi_k^2(x) = 1$ *при* $x \in \overline{G}$;
3. $\varphi_k(x) = 0$ *при* $x \notin \Omega_k$, *где* $\Omega_k = \bigcup\limits_h \big(B_\delta(y^k) + h\big)$ $(h \in M : (B_\delta(y^k) + h) \bigcap \overline{G} \neq \varnothing)$.

Доказательство можно найти в [29, гл. 2, лемма 9.1].

2. Получим оценку снизу для квадратичной формы $\mathrm{Re}(L_R u, u)_{L_2(Q)}$.

Теорема 3.1. *Пусть область Q удовлетворяет условию* 2.1 *и выполнены условия* 3.1–3.3. *Тогда существуют такие константы $c_0 \geqslant 0$, $c_1 > 0$, что для любой функции $u \in \dot{C}^\infty(Q)$ выполнено неравенство*

$$\mathrm{Re}(L_R u,\ u)_{L_2(Q)} + c_0 \sum_{i=1}^{n} (A_{iiQ} u,\ u)_{L_2(Q)} \geqslant c_1 \sum_{i=1}^{n} \|R_{iQ} u_{x_i}\|^2_{L_2(Q)}. \tag{3.5}$$

Доказательство. I. Используя леммы 2.4, 2.10 и 3.1, формулу интегрирования по частям и формулу Лейбница, имеем

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}(L_R u, u)_{L_2(Q)} = \sum_{i,j=1}^{n} \big(b_{ij}(x) A_{ijQ} u_{x_j}, u_{x_i}\big)_{L_2(Q)} = \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{J} \Big(b_{ij}(x) A_{ijQ}\,(\varphi_k u)_{x_j}, (\varphi_k u)_{x_i}\Big)_{L_2(Q)} - \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{J} \big(b_{ij}(x) A_{ijQ}\,((\varphi_k)_{x_j} u), (\varphi_k)_{x_i} u\big)_{L_2(Q)} - \\
&- \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{J} \big(b_{ij}(x) A_{ijQ}\,((\varphi_k)_{x_j} u), \varphi_k u_{x_i}\big)_{L_2(Q)} - \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{J} \big(b_{ij}(x) A_{ijQ}\,(\varphi_k u_{x_j}), (\varphi_k)_{x_i} u\big)_{L_2(Q)}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Так как $\varphi_k \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, то верны следующие оценки:

$$\|\varphi_k v\|_{L_2(Q)} \leqslant \|v\|_{L_2(Q)}, \tag{3.7}$$

$$\|(\varphi_k)_{x_i} v\|_{L_2(Q)} \leqslant k_1 \|v\|_{L_2(Q)}, \tag{3.8}$$

$$\|\varphi_k b_{ij} v\|_{L_2(Q)} \leqslant k_2 \|v\|_{L_2(Q)}, \tag{3.9}$$

$$\|(\varphi_k)_{x_i} b_{ij} v\|_{L_2(Q)} \leqslant k_3 \|v\|_{L_2(Q)} \tag{3.10}$$

для любой функции $v \in L_2(Q)$, где $k_1, k_2, \ldots > 0$ — константы, не зависящие от функций, входящих в неравенства. Из леммы 2.12 следует, что

$$\left\|P^{A_{ij}} v\right\|_{L_2(Q)} \leqslant k_4 \left\|A^*_{ijQ} v\right\|_{L_2(Q)} \tag{3.11}$$

для любой $v \in L_2(Q)$.

Из лемм 2.10, 2.12, неравенства Коши—Буняковского, неравенств (3.7)–(3.11), а также неравенства $ab \leqslant \varepsilon a^2 + \varepsilon^{-1} b^2$ $(a, b \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0)$ получаем

$$\begin{gathered}
\left| \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{J} \left(b_{ij} A_{ijQ} \left(\varphi_k u_{x_j}\right),\ (\varphi_k)_{x_i} u\right)_{L_2(Q)} \right| = \left| \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k} \left(A_{ijQ} \left(\varphi_k b_{ij} u_{x_j}\right),\ P^{A_{ij}} \left((\varphi_k)_{x_i} u\right)\right)_{L_2(Q)} \right| \leqslant \\
\leqslant \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k} \|A_{ijQ} \left(\varphi_k b_{ij} u_{x_j}\right)\|_{L_2(Q)} \cdot \|P^{A_{ij}} \left((\varphi_k)_{x_i} u\right)\|_{L_2(Q)} \leqslant \\
\leqslant k_4 \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k} \|A_{ijQ} \left(\varphi_k b_{ij} u_{x_j}\right)\|_{L_2(Q)} \cdot \|A^*_{ijQ} \left((\varphi_k)_{x_i} u\right)\|_{L_2(Q)} = \\
= k_4 \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k} \|\varphi_k b_{ij} A_{ijQ} u_{x_j}\|_{L_2(Q)} \cdot \|(\varphi_k)_{x_i} A^*_{ijQ} u\|_{L_2(Q)} \leqslant \\
\leqslant k_1 k_2 k_4 J \sum_{i,j=1}^{n} \|A^*_{ijQ} u\|_{L_2(Q)} \cdot \|A_{ijQ} u_{x_j}\|_{L_2(Q)} \leqslant \\
\leqslant k_1 k_2 k_4 J \left(\varepsilon^{-1} \sum_{i,j=1}^{n} \|A^*_{ijQ} u\|^2_{L_2(Q)} + \varepsilon \sum_{i,j=1}^{n} \|A_{jiQ} u_{x_i}\|^2_{L_2(Q)} \right).
\end{gathered} \tag{3.12}$$

Из определений матриц A_{ijs} и операторов A_{ijQ} следует, что $A^*_{ijs} = A_{jis}$ и $A^*_{ijQ} = A_{jiQ}$. Поэтому из условия 3.3 и леммы 2.13 (1) имеем

$$\begin{gathered}
\|A_{jiQ} v\|_{L_2(Q)} \leqslant k_5 \|A_{iiQ} v\|_{L_2(Q)}, \\
\|A^*_{ijQ} v\|_{L_2(Q)} = \|A_{jiQ} v\|_{L_2(Q)} \leqslant k_5 \|A_{iiQ} v\|_{L_2(Q)}
\end{gathered} \tag{3.13}$$

для любой функции $v \in L_2(Q)$. Тогда верно неравенство

$$\left| \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k} \left(b_{ij} A_{ijQ} \left(\varphi_k u_{x_j}\right),\ (\varphi_k)_{x_i} u\right)_{L_2(Q)} \right| \leqslant k_6 \left(\varepsilon^{-1} \sum_{i=1}^{n} \|A_{iiQ} u\|^2_{L_2(Q)} + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \|A_{iiQ} u_{x_i}\|_{L_2(Q)} \right). \tag{3.14}$$

Аналогично получаем

$$\left| \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k} \left(b_{ij} A_{ijQ} \left((\varphi_k)_{x_j} u\right),\ \varphi_k u_{x_i}\right)_{L_2(Q)} \right| \leqslant k_6 \left(\varepsilon^{-1} \sum_{i=1}^{n} \|A_{iiQ} u\|^2_{L_2(Q)} + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \|A_{iiQ} u_{x_i}\|^2_{L_2(Q)} \right). \tag{3.15}$$

Вновь используя леммы 2.10, 2.12, неравенство Коши—Буняковского и неравенства (3.8), (3.11), (3.13), имеем

$$\left| \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k} \left(b_{ij} A_{ijQ} \left((\varphi_k)_{x_j} u\right),\ (\varphi_k)_{x_i} u\right)_{L_2(Q)} \right| \leqslant k_7 \sum_{i=1}^{n} \|A_{iiQ} u\|^2_{L_2(Q)}. \tag{3.16}$$

Из (3.6), (3.14), (3.15), (3.16) имеем

$$\operatorname{Re}(L_R u, u)_{L_2(Q)} \geqslant \sum_{k=1}^{J} \sum_{i,j=1}^{n} \Big(b_{ij} A_{ijQ} \left(\varphi_k u\right)_{x_j}, (\varphi_k u)_{x_i}\Big)_{L_2(Q)} -$$

$$-\left(k_7+2k_6\varepsilon^{-1}\right)\sum_{i=1}^{n}\|A_{iiQ}u\|^2_{L_2(Q)}-2k_6\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\|A_{iiQ}u_{x_i}\|^2_{L_2(Q)}. \quad (3.17)$$

Теперь оценим снизу второе слагаемое левой части неравенства (3.5). Из леммы 2.12 и условия 3.1 получим

$$\sum_{i=1}^{n}(A_{iiQ}u,\ u)_{L_2(Q)}=\sum_{i=1}^{n}(A_{iiQ}P^{A_{ii}}u,\ P^{A_{ii}}u)_{L_2(Q)}\geqslant k_8\sum_{i=1}^{n}\|P^{A_{ii}}u\|^2_{L_2(Q)}\geqslant k_9\sum_{i=1}^{n}\|A_{iiQ}u\|^2_{L_2(Q)}. \quad (3.18)$$

Таким образом из (3.17), (3.18) получаем

$$\mathrm{Re}(L_Ru,u)_{L_2(Q)}+c_0\sum_{i=1}^{n}(A_{iiQ}u,\ u)_{L_2(Q)}\geqslant\sum_{k=1}^{J}\sum_{i,j=1}^{n}\Big(b_{ij}A_{ijQ}\left(\varphi_ku\right)_{x_j},\left(\varphi_ku\right)_{x_i}\Big)_{L_2(Q)}+$$

$$+\left(c_0k_9-k_7-2k_6\varepsilon^{-1}\right)\sum_{i=1}^{n}\|A_{iiQ}u\|^2_{L_2(Q)}-2k_6\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\|A_{iiQ}u_{x_i}\|^2_{L_2(Q)}. \quad (3.19)$$

II. Рассмотрим теперь скалярное произведение $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(R_{iQ}u_{x_i},u_{x_i}\right)_{L_2(Q)}$. Используя лемму 3.1 и формулу Лейбница, имеем

$$\sum_{i=1}^{n}\left(R_{iQ}u_{x_i},u_{x_i}\right)_{L_2(Q)}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{J}\left(R_{iQ}\left(\varphi_ku_{x_i}\right),\varphi_ku_{x_i}\right)_{L_2(Q)}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{J}\Big(R_{iQ}\left(\varphi_ku\right)_{x_i},\left(\varphi_ku\right)_{x_i}\Big)_{L_2(Q)}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{J}\Big(R_{iQ}\left(\left(\varphi_k\right)_{x_i}u\right),\left(\varphi_k\right)_{x_i}u\Big)_{L_2(Q)}-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{J}\Big(R_{iQ}\left(\left(\varphi_k\right)_{x_i}u\right),\varphi_ku_{x_i}\Big)_{L_2(Q)}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{J}\Big(R_{iQ}\left(\varphi_ku_{x_i}\right),\left(\varphi_k\right)_{x_i}u\Big)_{L_2(Q)}.$$

Далее оценим модули последних трех слагаемых в правой части последнего равенства. Используя леммы 2.10, 2.12, неравенство Коши—Буняковского, а также неравенства (3.8), (3.11), получим

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{J}\Big(R_{iQ}\left(\left(\varphi_k\right)_{x_i}u\right),\left(\varphi_k\right)_{x_i}u\Big)_{L_2(Q)}\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{J}\Big(R_{iQ}\left(\left(\varphi_k\right)_{x_i}u\right),P^{R_i}\left(\left(\varphi_k\right)_{x_i}u\right)\Big)_{L_2(Q)}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{J}\|R_{iQ}\left(\left(\varphi_k\right)_{x_i}u\right)\|_{L_2(Q)}\cdot\|P^{R_i}\left(\left(\varphi_k\right)_{x_i}u\right)\|_{L_2(Q)}\leqslant$$

$$\leqslant k_{10}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{J}\|R_{iQ}\left(\left(\varphi_k\right)_{x_i}u\right)\|_{L_2(Q)}\cdot\|R_{iQ}\left(\left(\varphi_k\right)_{x_i}u\right)\|_{L_2(Q)}=$$

$$=k_{10}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{J}\|\left(\varphi_k\right)_{x_i}R_{iQ}u\|_{L_2(Q)}\cdot\|\left(\varphi_k\right)_{x_i}R_{iQ}u\|_{L_2(Q)}\leqslant k_{11}\sum_{i=1}^{n}\|R_{iQ}u\|^2_{L_2(Q)}, \quad (3.20)$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{J}\Big(R_{iQ}\left(\left(\varphi_k\right)_{x_i}u\right),\varphi_ku_{x_i}\Big)_{L_2(Q)}\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{J}\Big(R_{iQ}\left(\left(\varphi_k\right)_{x_i}u\right),P^{R_i}\left(\varphi_ku_{x_i}\right)\Big)_{L_2(Q)}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{J}\|R_{iQ}\left(\left(\varphi_k\right)_{x_i}u\right)\|_{L_2(Q)}\cdot\|P^{R_i}\left(\varphi_ku_{x_i}\right)\|_{L_2(Q)}\leqslant$$

$$\leqslant k_{10}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{J}\|R_{iQ}\left(\left(\varphi_k\right)_{x_i}u\right)\|_{L_2(Q)}\cdot\|R_{iQ}\left(\varphi_ku_{x_i}\right)\|_{L_2(Q)}=$$

$$= k_{10} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{J} \|(\varphi_k)_{x_i} R_{iQ} u\|_{L_2(Q)} \cdot \|\varphi_k R_{iQ} u_{x_i}\|_{L_2(Q)} \leqslant$$

$$\leqslant k_1 k_{10} J \sum_{i=1}^{n} \|R_{iQ} u\|_{L_2(Q)} \cdot \|R_{iQ} u_{x_i}\|_{L_2(Q)} \leqslant$$

$$\leqslant k_{12} \left(\varepsilon^{-1} \sum_{i=1}^{n} \|R_{iQ} u\|^2_{L_2(Q)} + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \|R_{iQ} u_{x_i}\|^2_{L_2(Q)} \right). \quad (3.21)$$

Аналогично имеем

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{J} \left(R_{iQ} \left(\varphi_k u_{x_i} \right), (\varphi_k)_{x_i} u \right)_{L_2(Q)} \right| \leqslant k_{12} \left(\varepsilon^{-1} \sum_{i=1}^{n} \|R_{iQ} u\|^2_{L_2(Q)} + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \|R_{iQ} u_{x_i}\|^2_{L_2(Q)} \right). \quad (3.22)$$

Из (3.20)–(3.22) получаем неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} (R_{iQ} u_{x_i}, u_{x_i})_{L_2(Q)} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{J} \left(R_{iQ} \left(\varphi_k u \right)_{x_i}, (\varphi_k u)_{x_i} \right)_{L_2(Q)} +$$

$$+ 2k_{12}\varepsilon \sum_{i=1}^{n} \|R_{iQ} u_{x_i}\|^2_{L_2(Q)} + (k_{11} + 2k_{12}\varepsilon^{-1}) \sum_{i=1}^{n} \|R_{iQ} u\|^2_{L_2(Q)}. \quad (3.23)$$

С другой стороны, мы имеем

$$\sum_{i=1}^{n} (R_{iQ} u_{x_i}, u_{x_i})_{L_2(Q)} = \sum_{i=1}^{n} \left(R_{iQ} P^{R_i} u_{x_i}, P^{R_i} u_{x_i} \right)_{L_2(Q)} \geqslant$$

$$\geqslant k_{13} \sum_{i=1}^{n} \|P^{R_i} u_{x_i}\|^2_{L_2(Q)} \geqslant k_{14} \sum_{i=1}^{n} \|R_{iQ} P^{R_i} u_{x_i}\|^2_{L_2(Q)} = k_{14} \sum_{i=1}^{n} \|R_{iQ} u_{x_i}\|^2_{L_2(Q)}. \quad (3.24)$$

Объединяя (3.23) и (3.24), получаем

$$k_{14} \sum_{i=1}^{n} \|R_{iQ} u_{x_i}\|^2_{L_2(Q)} \leqslant \sum_{i=1}^{n} (R_{iQ} u_{x_i}, u_{x_i})_{L_2(Q)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{J} \sum_{i=1}^{n} \left(R_{iQ} \left(\varphi_k u \right)_{x_i}, (\varphi_k u)_{x_i} \right)_{L_2(Q)} + 2k_{12}\varepsilon \sum_{i=1}^{n} \|R_{iQ} u_{x_i}\|^2_{L_2(Q)} + \left(k_{11} + 2k_{12}\varepsilon^{-1} \right) \sum_{i=1}^{n} \|R_{iQ} u\|^2_{L_2(Q)}. \quad (3.25)$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{J} \sum_{i=1}^{n} \left(R_{iQ} \left(\varphi_k u \right)_{x_i}, (\varphi_k u)_{x_i} \right)_{L_2(Q)} \geqslant$$

$$\geqslant (k_{14} - 2k_{12}\varepsilon) \sum_{i=1}^{n} \|R_{iQ} u_{x_i}\|^2_{L_2(Q)} - (k_{11} + 2k_{12}\varepsilon^{-1}) \sum_{i=1}^{n} \|R_{iQ} u\|^2_{L_2(Q)}. \quad (3.26)$$

III. Рассмотрим произвольную точку $y^k \in \overline{Q}$ из леммы 3.1. Существует подобласть Q_{sl} такая, что $y^k \in \overline{Q}_{sl}$. Обозначим $z^k = y^k - h_{sl}$. Тогда $z^k \in \overline{Q}_{s1}$. Определим вектор-функцию $W^k \in \dot{C}^{\infty, I}(B_\delta(z^k))$ с координатами

$$W_i^k(x) = (\varphi_k u)(x + z^{ki} - z^k) \qquad (x \in B_\delta(z^k)), \quad (3.27)$$

где $i = 1, \ldots, I = I(s, z^k)$, а точки z^{ki}, соответствующие точке z^k, определяются по правилу, описанному в начале параграфа. Матрицы $\widehat{A}_{ijs}(x)$ могут иметь различный порядок в различных точках $x \in B_\delta(z^k)$. Поэтому мы рассмотрим вспомогательные матрицы $\widehat{A}^k_{ijs}$ порядка $I(s, z^k) \times I(s, z^k)$, определенные по формуле $\widehat{A}^k_{ijs} = \widehat{A}_{ijs}(z^k)$. Введем преобразование Фурье вектор-функции W по формуле $\widehat{W}(\xi)=(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,\xi)}W(x)\,dx$. Теперь, используя теорему Планшереля, условие 3.1 и лемму 2.10, мы имеем

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{J}\left(R_{iQ}\,(\varphi_k u)_{x_i},(\varphi_k u)_{x_i}\right)_{L_2(Q)}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{J}\left(\widehat{R}^k_{is}(W^k)_{x_i},(W^k)_{x_i}\right)_{L_2^I(\mathbb{R}^n)}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{J}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(\widehat{R}^k_{is}\xi_i^2\widehat{W}^k,\widehat{W}^k\right)_{\mathbb{C}^I}\,d\xi\leqslant\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{J}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(b_{ij}(z^k)\widehat{A}^k_{ijs}\xi_i\xi_j\widehat{W}^k,\widehat{W}^k\right)_{\mathbb{C}^I}\,d\xi=$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{J}\left(b_{ij}(z^k)\widehat{A}^k_{ijs}(W^k)_{x_j},(W^k)_{x_i}\right)_{L_2^I(\mathbb{R}^n)}=\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{J}\left(b_{ij}(z^k)A_{ijQ}\,(\varphi_k u)_{x_j},(\varphi_k u)_{x_i}\right)_{L_2(Q)}=$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{J}\left(b_{ij}(x)A_{ijQ}\,(\varphi_k u)_{x_j},(\varphi_k u)_{x_i}\right)_{L_2(Q)}-$$

$$-\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{J}\left((b_{ij}(z^k)-b_{ij}(x))A_{ijQ}\,(\varphi_k u)_{x_j},(\varphi_k u)_{x_i}\right)_{L_2(Q)},\qquad(3.28)$$

где $\widehat{R}^k_{is}$ — матрицы порядка $I(s,z^k)\times I(s,z^k)$, определенные по формуле $\widehat{R}^k_{is}=\widehat{R}_{is}(z^k)$.

В силу равномерной непрерывности функций $b_{ij}(x)$ на множестве $\overline{Q}_{s1}$ и M-периодичности на $\overline{Q}$, мы получим

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{J}&\left((b_{ij}(z^k)-b_{ij}(x))A_{ijQ}\,(\varphi_k u)_{x_j},(\varphi_k u)_{x_i}\right)_{L_2(Q)}\leqslant\\ &\leqslant\varepsilon_1(a)\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k}\|A_{ijQ}(\varphi_k u)_{x_j}\|_{L_2(Q)}\cdot\|P^{A_{ij}}(\varphi_k u)_{x_i}\|_{L_2(Q)}\leqslant\\ &\leqslant\varepsilon_1(a)k_{15}\sum_{i,j=1}^{n}\|A_{ijQ}u_{x_j}\|^2_{L_2(Q)}+\|A^*_{ijQ}u_{x_i}\|^2_{L_2(Q)}\leqslant\end{aligned}\qquad(3.29)$$

$$\leqslant\varepsilon_1(a)k_{16}\sum_{i,j=1}^{n}\|A_{ijQ}(\varphi_k u)_{x_j}\|^2_{L_2(Q)}+\|A_{jiQ}u_{x_i}\|^2_{L_2(Q)}\varepsilon_1(a)k_5k_{17}\sum_{i}^{n}\|A_{iiQ}u_{x_j}\|^2_{L_2(Q)},$$

где $\varepsilon_1(a)\to 0$ при $a\to 0$. Из (3.28) имеем

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{J}&\left(b_{ij}(x)A_{ijQ}\,(\varphi_k u)_{x_j},(\varphi_k u)_{x_i}\right)_{L_2(Q)}\geqslant\\ \geqslant\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{J}&\left(R_{iQ}\,(\varphi_k u)_{x_j},(\varphi_k u)_{x_i}\right)_{L_2(Q)}+\varepsilon_1(a)k_5k_{17}\sum_{i,j=1}^{n}\|A_{ijQ}u_{x_j}\|_{L_2(Q)}.\end{aligned}\qquad(3.30)$$

Из условия 3.3 и леммы 2.13 следует, что

$$\|A_{iiQ}v\|_{L_2(Q)}\leqslant k_{18}\|R_{iQ}v\|_{L_2(Q)},\qquad(3.31)$$

$$\|A_{iiQ}v\|_{L_2(Q)}\geqslant k_{19}\|R_{iQ}v\|_{L_2(Q)}\qquad(3.32)$$

для любой функции $v\in L_2(Q)$.

Используя неравенства (3.19), (3.26) и (3.28)–(3.32), получим

$$\operatorname{Re}(L_Ru,u)_{L_2(Q)}+c_0\sum_{i=1}^{n}(A_{iiQ}u,\ u)_{L_2(Q)}\geqslant\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{J}\left(b_{ij}A_{ijQ}\,(\varphi_k u)_{x_j},(\varphi_k u)_{x_i}\right)_{L_2(Q)}+$$

$$+k_{19}(c_0k_9-k_7-2k_6\varepsilon^{-1})\sum_{i=1}^{n}\|R_{iQ}u\|^2_{L_2(Q)}-2k_6k_{18}\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\|R_{iQ}u_{x_i}\|^2_{L_2(Q)}\geqslant$$

$$\geqslant \left[k_{19}\left(c_0k_9 - k_7 - 2k_6\varepsilon^{-1}\right) - \left(k_{11} + 2k_{12}\varepsilon^{-1}\right)\right]\sum_{i=1}^{n}\|R_{iQ}u\|^2_{L_2(Q)} +$$
$$+ \left[(k_{14} - 2k_{12}\varepsilon) + \varepsilon_1(a)k_5k_{17}k_{19} - 2k_6k_{18}\varepsilon\right]\sum_{i=1}^{n}\|R_{iQ}u_{x_i}\|^2_{L_2(Q)}. \quad (3.33)$$

Выберем константы $\varepsilon > 0$, $a > 0$ так, что выполнено условие

$$(k_{14} - 2k_{12}\varepsilon) + \varepsilon_1(a)k_5k_{17}k_{19} - 2k_6k_{18}\varepsilon > 0. \quad (3.34)$$

Затем выберем $c_0 > 0$ так, что

$$k_{19}\left(c_0k_9 - k_7 - 2k_6\varepsilon^{-1}\right) - \left(k_{11} + 2k_{12}\varepsilon^{-1}\right) > 0. \quad (3.35)$$

Из (3.33)–(3.35) получаем заключение теоремы. □

3. Введем неограниченный дифференциально-разностный оператор $L_R^+ : D(L_R^+) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$, действующий по формуле $L_R^+u = -\sum\limits_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}b_{ij}(x)\dfrac{\partial}{\partial x_j}R^*_{jiQ}\,u(x)$, $u \in D(L_R^+) = \dot{C}^\infty(Q)$.

Теорема 3.2. *Пусть область Q удовлетворяет условию* 2.1 *и выполнены условия* 3.1–3.3. *Тогда существуют такая постоянная $c_2 > 0$, что для всех $u, v \in \dot{C}^\infty(Q)$*

$$\left|\left(\frac{L_R + L_R^+}{2}u, v\right)_{L_2(Q)} + c_0\sum_{i=1}^{n}(A_{iiQ}u, v)_{L_2(Q)}\right| \leqslant$$
$$\leqslant c_2\left[\sum_{i,j=1}^{n}\|R_{iQ}u_{x_i}\|_{L_2(Q)}\cdot\left\|R_{jQ}v_{x_j}\right\|_{L_2(Q)} + \sum_{i=1}^{n}\|R_{iQ}u\|_{L_2(Q)}\cdot\|R_{iQ}v\|_{L_2(Q)}\right], \quad (3.36)$$
$$\left|\left(\frac{L_R - L_R^+}{2i}u, v\right)_{L_2(Q)}\right| \leqslant c_2\sum_{i,j=1}^{n}\|R_{iQ}u_{x_i}\|_{L_2(Q)}\cdot\left\|R_{jQ}v_{x_j}\right\|_{L_2(Q)}. \quad (3.37)$$

Доказательство. Интегрируя по частям и используя неравенство Коши—Буняковского, а также леммы 2.12, 2.13 (1), из условий 3.3 получим

$$\left|\left(\frac{L_R + L_R^+}{2}u, v\right)_{L_2(Q)}\right| = \left|\sum_{i,j=1}^{n}(A_{ijQ}u_{x_j}, b_{ij}v_{x_i})_{L_2(Q)}\right| =$$
$$= \left|\sum_{i,j=1}^{n}(A_{ijQ}u_{x_j}, b_{ij}P^{A_{ij}}v_{x_i})_{L_2(Q)}\right| \leqslant \sum_{i,j=1}^{n}\left\|A_{ijQ}u_{x_j}\right\|_{L_2(Q)}\cdot\left\|b_{ij}P^{A_{ij}}v_{x_i}\right\|_{L_2(Q)} \leqslant$$
$$\leqslant k_1\sum_{i,j=1}^{n}\left\|A_{ijQ}u_{x_j}\right\|_{L_2(Q)}\cdot\left\|A^*_{ijQ}v_{x_i}\right\|_{L_2(Q)} \leqslant k_2\sum_{i,j=1}^{n}\left\|R_{jQ}u_{x_j}\right\|_{L_2(Q)}\cdot\|R_{iQ}v_{x_i}\|_{L_2(Q)}. \quad (3.38)$$

Аналогично, повторяя эти рассуждения, имеем

$$\left|\left(\frac{L_R - L_R^+}{2i}u, v\right)_{L_2(Q)}\right| \leqslant k_1\sum_{i,j=1}^{n}\left\|R_{jQ}u_{x_j}\right\|_{L_2(Q)}\cdot\|R_{iQ}v_{x_i}\|_{L_2(Q)}, \quad (3.39)$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n}(A_{iiQ}u, v)_{L_2(Q)}\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}(A_{iiQ}u, P^{A_{ii}}v)_{L_2(Q)}\right| \leqslant$$
$$\leqslant k_3\sum_{i=1}^{n}\|A_{iiQ}u\|_{L_2(Q)}\cdot\|A_{iiQ}v\| \leqslant k_4\sum_{i=1}^{n}\|R_{iQ}u\|_{L_2(Q)}\cdot\|R_{iQ}v\|. \quad (3.40)$$

Из (3.38)–(3.40) следует утверждение теоремы. □

Если в теореме 3.2 в качестве функции v взять функцию u, то мы получим оценку для мнимой части скалярного произведения $\mathrm{Im}(L_R u, u)_{L_2(Q)}$. Таким образом, рассматриваемый дифференциально-разностный оператор является секториальным и для него существует фридрихсово расширение.

Автор благодарен профессору А. Л. Скубачевскому за постановку задачи, ценные замечания и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бицадзе А. В., Самарский А. А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач// Докл. АН СССР. — 1969. — *185*, № 4. — С. 739-740.
2. *Варфоломеев Е. М.* О некоторых свойствах эллиптических и параболических функционально-дифференциальных операторов, возникающих в нелинейной оптике// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2007. — *21*. — С. 5–36.
3. *Вишик М. И.* Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области// Мат. сб. — 1954. — *35*, № 3. — С. 513–568.
4. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Т. 2. — М.: Мир, 1966.
5. *Иванова Е. П.* Непрерывная зависимость решений краевых задач для дифференциально-разностных уравнений от сдвигов аргумента// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2016. — *59*. — С. 74–96.
6. *Каменский А. Г.* Краевые задачи для уравнений с формально симметричными дифференциально-разностными операторами// Дифф. уравн. — 1976. — *12*, № 12. — С. 815–824.
7. *Каменский Г. А., Мышкис А. Д.* К постановке краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом// Дифф. уравн. — 1974. — *10*, No 3. — С. 409–418.
8. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
9. *Келдыш М. В.* О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области// Докл. АН СССР. — 1951. — *77*. — С. 181–183.
10. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1971.
11. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.
12. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1976.
13. *Муравник А. Б.* Асимптотические свойства решений задачи Дирихле в полуплоскости для некоторых дифференциально-разностных эллиптических уравнений// Мат. заметки. — 2016. — *100*, № 4. — С. 566–576.
14. *Олейник О. А., Радкевич Е. В.* Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой// Итоги науки. Сер. Мат. Мат. анал. — 1971. — *1969*. — С. 7–252.
15. *Попов В. А.* Следы обобщенных решений эллиптических дифференциально-разностных уравнений с вырождением// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2016. — *62*. — С. 124—139.
16. *Попов В. А., Скубачевский А. Л.* Априорные оценки для эллиптических дифференциально-разностных операторов с вырождением// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2010. — *36*. — С. 125–142.
17. *Попов В. А., Скубачевский А. Л.* Гладкость обобщенных решений эллиптических дифференциально-разностных уравнений с вырождением// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2011. — *39*. — С. 130–140.
18. *Россовский Л. Е.* Коэрцитивность функционально-дифференциальных уравнений// Мат. заметки. — 1996. — *59*, № 1. — С. 103–113.
19. *Россовский Л. Е.* Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2014. — *36*. — С. 125–142.
20. *Скубачевский А. Л.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения// Дифф. уравн. — 1983. — *19*, № 3. — С. 457–470.
21. *Скубачевский А. Л.* Эллиптические дифференциально-разностные уравнения с вырождением// Тр. Моск. мат. об-ва. — 1997. — *59*. — С. 240–285.
22. *Скубачевский А. Л.* Нелокальные эллиптические краевые задачи с вырождением// Усп. мат. наук. — 2016. — *71*, № 5. — С. 3–112.
23. *Солонуха О. В.* Об одном классе существенно нелинейных эллиптических дифференциально-разностных уравнений// Тр. МИАН. — 2013. — *283*. — С. 233–251.
24. *Тасевич А. Л.* Гладкость обобщенных решений задачи Дирихле для сильно эллиптических функционально-дифференциальных уравнений с ортотропными сжатиями// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2015. — *58*. — С. 153–165.
25. *Фикера Г.* К единой теории краевых задач для эллиптико-параболических уравнений второго порядка// Математика. — 1963. — *7*, № 6. — С. 99–121.

26. *Kamenskii G. A., Myshkis A. D.* Formulation of boundary-value problems for differential equations with deviating arguments containing several highest-order terms// Differ. Equ. — 1975. — *10.* — C. 302–309.
27. *Popov V. A., Skubachevskii A. L.* On smoothness of solutions of some elliptic functional-differential equations with degenerations// Russ. J. Math. Phys. — 2013. — *20*, № 4. — C. 492–507.
28. *Skubachevskii A. L.* The first boundary-value problem for strongly elliptic differential-difference equations// J. Differ. Equ. — 1986. — *63*, № 3. — C. 332–361.
29. *Skubachevskii A. L.* Elliptic functional differential equations and applications. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 1997.
30. *Solonukha O. V.* On a class of essentially nonlinear elliptic differential-difference equations// Proc. Steklov Inst. Math. — 2013. — *283.* — C. 226–244.
31. *Solonukha O. V.* On nonlinear and quasiliniear elliptic functional differential equations// Discrete Contin. Dyn. Syst. — 2016. — *9* (3). — C. 869–893. — doi: 10.3934/dcdss.2016033.
32. *Varfolomeev E. M.* On some properties of elliptic and parabolic functional differential operators arising in nonlinear optics// J. Math. Sci. — 2008. — *153*, № 5. — C. 649–682.

Владимир Алексеевич Попов
Российский университет дружбы народов, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6
E-mail: `volodimir.a@gmail.com, popovvladimir.a@gmail.com`

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-1-131-147 UDC 517.9

Estimates of Solutions of Elliptic Differential-Difference Equations with Degeneration

© 2018 **V. A. Popov**

Abstract. We consider a second-order differential-difference equation in a bounded domain $Q \subset \mathbb{R}^n$. We assume that the differential-difference operator contains some difference operators with degeneration corresponding to differentiation operators. Moreover, the differential-difference operator under consideration cannot be expressed as a composition of a difference operator and a strongly elliptic differential operator. Degenerated difference operators do not allow us to obtain the Gårding inequality.

We prove a priori estimates from which it follows that the differential-difference operator under consideration is sectorial and its Friedrichs extension exists. These estimates can be applied to study the spectrum of the Friedrichs extension as well.

It is well known that elliptic differential-difference equations may have solutions that do not belong even to the Sobolev space $W_2^1(Q)$. However, using the obtained estimates, we can prove some smoothness of solutions, though not in the whole domain Q, but inside some subdomains Q_r generated by the shifts of the boundary, where $\bigcup\limits_r \overline{Q_r} = \overline{Q}$.

REFERENCES

1. A. V. Bitsadze and A. A. Samarskii, “O nekotorykh prosteyshikh obobshcheniyakh lineynykh ellipticheskikh kraevykh zadach” [On some simplest generalizations of linear elliptic boundary-value problems], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1969, **185**, No. 4, 739-740 (in Russian).
2. E. M. Varfolomeev, “O nekotorykh svoystvakh ellipticheskikh i parabolicheskikh funktsional’no-differentsial’nykh operatorov, voznikayushchikh v nelineynoy optike” [On some properties of elliptic and parabolic functional differential operators arising in nonlinear optics], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2007, **21**, 5–36 (in Russian).
3. M. I. Vishik, “Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh uravneniy, vyrozhdayushchikhsya na granitse oblasti” [Boundary-value problems for elliptic equations degenerating on the boundary of the domain], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1954, **35**, No. 3, 513–568 (in Russian).
4. N. Dunford and J. Schwartz, *Lineynye operatory. T. 2* [Linear Operators. Vol. 2], Mir, Moscow, 1966 (Russian translation).
5. E. P. Ivanova, “Nepreryvnaya zavisimost’ resheniy kraevykh zadach dlya differentsial’no-raznostnykh uravneniy ot sdvigov argumenta” [Continuous dependence of solutions of boundary-value problems for

differential-difference equations on shifts of the argument], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2016, **59**, 74–96 (in Russian).

6. A. G. Kamenskiy, "Kraevye zadachi dlya uravneniy s formal'no simmetrichnymi differentsial'no-raznostnymi operatorami" [Boundary-value problems for equations with formally symmetric differential-difference operators], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1976, **12**, No. 12, 815–824 (in Russian).
7. G. A. Kamenskii and A. D. Myshkis, "K postanovke kraevykh zadach dlya differentsial'nykh uravneniy s otklonyayushchimsya argumentom" [To the setting of boundary-value problems for differential equations with deviating argument], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1974, **10**, No 3, 409–418 (in Russian).
8. T. Kato, *Teoriya vozmushcheniy lineynykh operatorov* [Perturbation Theory for Linear Operators], Mir, Moscow, 1972 (Russian translation).
9. M. V. Keldysh, "O nekotorykh sluchayakh vyrozhdeniya uravneniy ellipticheskogo tipa na granitse oblasti" [On some cases of degeneration of elliptic equations on the boundary of the domain], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1951, **77**, 181–183 (in Russian).
10. S. G. Kreyn, *Lineynye uravneniya v banakhovom prostranstve* [Linear Equations in Banach Space], Nauka, Moscow, 1971 (in Russian).
11. J.-L. Lions and E. Magenes, *Neodnorodnye granichnye zadachi i ikh prilozheniya* [Nonhomogeneous Boundary-Value Problems and Their Applications], Mir, Moscow, 1971 (Russian translation).
12. V. P. Mikhaylov, *Differentsial'nye uravneniya v chastnykh proizvodnykh* [Differential Equations with Partial Derivatives], Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).
13. A. B. Muravnik, "Asimptoticheskie svoystva resheniy zadachi Dirikhle v poluploskosti dlya nekotorykh differentsial'no-raznostnykh ellipticheskikh uravneniy" [Asymptotic properties of solutions of the Dirichlet problem in a half-plane for some differential-difference elliptic equations], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2016, **100**, No. 4, 566–576 (in Russian).
14. O. A. Oleynik and E. V. Radkevich, "Uravneniya vtorogo poryadka s neotritsatel'noy kharakteristicheskoy formoy" [Second-order equations with nonnegative characteristic form], *Itogi nauki. Ser. Mat. Mat. anal.* [Totals Sci. Ser. Math. Math. Anal.], 1971, **1969**, 7–252 (in Russian).
15. V. A. Popov, "Sledy obobshchennykh resheniy ellipticheskikh differentsial'no-raznostnykh uravneniy s vyrozhdeniem" [Traces of generalized solutions of elliptic differential-difference equations with degeneration], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2016, **62**, 124—139 (in Russian).
16. V. A. Popov and A. L. Skubachevskii, "Apriornye otsenki dlya ellipticheskikh differentsial'no-raznostnykh operatorov s vyrozhdeniem" [A priori estimates for elliptic differential-difference operators with degeneration], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2010, **36**, 125–142 (in Russian).
17. V. A. Popov and A. L. Skubachevskii, "Gladkost' obobshchennykh resheniy ellipticheskikh differentsial'no-raznostnykh uravneniy s vyrozhdeniem" [Smoothness of generalized solutions of elliptic differential-difference equations with degeneration], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2011, **39**, 130–140 (in Russian).
18. L. E. Rossovskii, "Koertsitivnost' funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy" [Coercivity of functional differential equations], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1996, **59**, No. 1, 103–113 (in Russian).
19. L. E. Rossovskii, "Ellipticheskie funktsional'no-differentsial'nye uravneniya so szhatiem i rastyazheniem argumentov neizvestnoy funktsii" [Elliptic functional differential equations with contraction and dilatation of arguments of the unknown function], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2014, **36**, 125–142 (in Russian).
20. A. L. Skubachevskii, "Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy i ikh prilozheniya" [Boundary-value problems for elliptic functional differential equations and their applications], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1983, **19**, No. 3, 457–470 (in Russian).
21. A. L. Skubachevskii, "Ellipticheskie differentsial'no-raznostnye uravneniya s vyrozhdeniem" [Ellipticheskie differentsial'no-raznostnye uravneniya s vyrozhdeniem], *Tr. Mosk. mat. ob-va.* [Tr. Mosk. mat. ob-va.], 1997, **59**, 240–285 (in Russian).
22. A. L. Skubachevskii, "Nelokal'nye ellipticheskie kraevye zadachi s vyrozhdeniem" [Nonlocal elliptic boundary-value problems with degeneration], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2016, **71**, No. 5, 3–112 (in Russian).
23. O. V. Solonukha, "Ob odnom klasse sushchestvenno nelineynykh ellipticheskikh differentsial'no-raznostnykh uravneniy" [On one class of essentially nonlinear elliptic differential-difference equations], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2013, **283**, 233–251 (in Russian).
24. A. L. Tasevich, "Gladkost' obobshchennykh resheniy zadachi Dirikhle dlya sil'no ellipticheskikh funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy s ortotropnymi szhatiyami" [Smoothness of generalized solutions of

the Dirichlet problem for strongly elliptic functional differential equations with orthotropic contractions], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2015, **58**, 153–165 (in Russian).
25. G. Fichera, "K edinoy teorii kraevykh zadach dlya elliptiko-parabolicheskikh uravneniy vtorogo poryadka" [Boundary problems in differential equations], *Matematika* [Mathematics], 1963, **7**, No. 6, 99–121 (Russian translation).
26. G. A. Kamenskii and A. D. Myshkis, "Formulation of boundary-value problems for differential equations with deviating arguments containing several highest-order terms," *Differ. Equ.*, 1975, **10**, 302–309.
27. V. A. Popov and A. L. Skubachevskii, "On smoothness of solutions of some elliptic functional-differential equations with degenerations," *Russ. J. Math. Phys.*, 2013, **20**, No. 4, 492–507.
28. A. L. Skubachevskii, "The first boundary-value problem for strongly elliptic differential-difference equations," *J. Differ. Equ.*, 1986, **63**, No. 3, 332–361.
29. A. L. Skubachevskii, *Elliptic functional differential equations and applications*, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 1997.
30. O. V. Solonukha, "On a class of essentially nonlinear elliptic differential-difference equations," *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2013, **283**, 226–244.
31. O. V. Solonukha, "On nonlinear and quasiliniear elliptic functional differential equations," *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2016, **9** (3), 869–893, doi: 10.3934/dcdss.2016033.
32. E. M. Varfolomeev, "On some properties of elliptic and parabolic functional differential operators arising in nonlinear optics," *J. Math. Sci.*, 2008, **153**, No. 5, 649–682.

Vladimir A. Popov
RUDN University, Moscow, Russia
E-mail: volodimir.a@gmail.com, popovvladimir.a@gmail.com