
УДК 004.021:519.2:519.6

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-3-234-252

Применение метода гармонической линеаризации к исследованию автоколебательного режима систем с управлением

Д. С. Кулябов^{*†}, А. В. Королькова^{*}, Т. Р. Велиева^{*}

^{*} Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей,
Российский университет дружбы народов,
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198

[†] Лаборатория информационных технологий,
Объединённый институт ядерных исследований,
ул. Жолио-Кюри 6, Дубна, Московская область, Россия, 141980

В сетях передачи данных, реализуемых как системы с управлением, может возникать явление глобальной синхронизации. Внешне это явление проявляется как автоколебательный режим в системе, который негативным образом влияет на такие характеристики системы как пропускная способность и задержки передачи. Ранее авторами исследовалась задача нахождения зон возникновения автоколебаний для системы в целом. Авторам представляется актуальной задача выделения элементов системы, ответственных за возникновение автоколебательного режима. Сложность этой задачи вызвана существенно нелинейным характером системы и её элементов. Зачастую для декомпозиции системы применяют метод линеаризации. Но в этом случае пропадает автоколебательный режим. Таким образом возникает необходимость поиска метода декомпозиции, не разрушающего автоколебательный режим системы. В качестве такого метода авторы предлагают использовать метод гармонической линеаризации, применяемый в теории автоматического управления. Однако приходится признать, что данный математический аппарат мало знаком исследователям, специализирующимся на исследовании систем и сетей передачи данных. Авторы постарались как можно более подробно описать применение метода гармонической линеаризации к исследованию влияния функции сброса пакетов по алгоритму RED в системе с управлением на процесс возникновения автоколебательного режима. Таким образом, данный материал носит скорее методический, чем исследовательский характер.

Ключевые слова: активное управление трафиком, теория управления, автоколебательный режим, метод гармонической линеаризации, RED

1. Введение

В статье рассматривается техническая система, представляющая собой сеть передачи данных, передаваемых по протоколу TCP (Transmission Control Protocol). В этой системе выделяется источник пакетов TCP и элемент управления в виде маршрутизатора с модулем управления, работающим по алгоритму типа RED (Random Early Detection) [1–3]. Внутренними параметрами системы являются размер окна TCP и значение мгновенной длины очереди на маршрутизаторе.

По своей природе протокол TCP вызывает такое явление, как глобальная синхронизация. Глобальная синхронизация проявляется в том, что одновременно несколько TCP-хостов уменьшают скорости передачи при возникновении вследствие перегрузки сброса пакетов, а затем снова увеличивают скорость передачи, когда перегрузка системы уменьшается. Внешне это проявляется в виде возникновения в системе автоколебательного режима параметров системы — размера окна и мгновенной длины очереди.

Статья поступила в редакцию 5 апреля 2017 г.

Работа частично поддержана грантами РФФИ № 15-07-08795, 16-07-00556. Также публикация подготовлена при финансовой поддержке Минобрнауки России (соглашение № 02.А03.21.0008).

Ранее нами проводились исследования по определению области возникновения автоколебаний [4–6] в системе с управлением. В этих работах была исследована зависимость области возникновения автоколебаний размера окна TCP и размера мгновенной длины очереди от пороговых значений и типов алгоритма RED. Для этого проводилось численное исследование нелинейной модели такой системы. Однако вопрос о причинах возникновения автоколебательного режима не рассматривался, также как и не исследовались значения параметров этих автоколебаний (частотно-амплитудные характеристики). Предполагается, что одной из причин возникновения автоколебательного режима является вид функции сброса пакетов в алгоритме управления.

В данной работе авторы предлагают применить метод гармонической линеаризации к исследованию причин возникновения автоколебательного режима в модели системы с управлением, а также для нахождения частотно-амплитудных характеристик параметров автоколебаний.

В разделе 2 даны необходимые для дальнейшего исследования сведения о блочно-линейном подходе моделирования в теории управления. Затем в разделе 3 приведено описание метода гармонической линеаризации и рассмотрены критерии Найквиста–Михайлова, Рауса–Гурвица и Михайлова определения наличия автоколебательного режима в системе. В разделе 4 приведено формальное описание моделируемой системы. В следующем разделе 5 проводится линеаризация модели исследуемой системы с управлением для получения блочной формы модели, к которой уже в разделе 6 применяется метод гармонической линеаризации и выписываются выражения для нахождения частотно-амплитудных характеристик модели. В том же разделе приведён пример применения метода гармонической линеаризации для конкретных значений параметров модели системы с управлением.

2. Элементы теории управления

В теории управления для моделирования и исследования нелинейных систем применяют так называемый блочно-линейный подход [7]. В таком подходе исходную нелинейную систему линеаризуют и разбивают на блоки, характеризующиеся передаточной функцией, связывающей входные и выходные значения системы. Связь входной x_1 и выходной x_2 функций посредством передаточной функции $H(s)$ записывается следующим образом:

$$x_2(s) = H(s)x_1(s). \quad (1)$$

В графической нотации эта связь приведена на рис. 1.

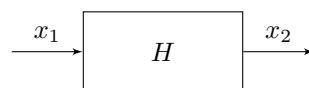


Рис. 1. Передаточная функция

В теории управления при исследовании нелинейных систем для перехода от дифференциальных уравнений к степенным используют преобразования Лапласа. Напомним некоторые определения.

Преобразованием Лапласа функции вещественной переменной $f(t)$ называется такая функция $F(s)$ от комплексной переменной $s = \sigma + i\omega$, что:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt. \quad (2)$$

Обратным преобразованием Лапласа функции $F(s)$ комплексной переменной называется функция $f(t)$ вещественной переменной, такая что:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} e^{st} F(s) ds, \quad (3)$$

где σ_1 — некоторое вещественное число.

Использование преобразования Лапласа позволяет при переходе от дифференциальных уравнений к степенным заменить формально оператор дифференцирования $\frac{d^n}{dt^n}$ на степень переменной s :

$$\frac{d^n}{dt^n} \rightarrow s^n. \quad (4)$$

Также упрощается работа с функциями с запаздывающим аргументом — запаздывающий аргумент формально преобразуется в мультипликативную экспоненту:

$$f(t - \tau) \rightarrow F(s)e^{-s\tau}. \quad (5)$$

На блочных диаграммах можно выделить несколько типов соединения: последовательное (рис. 2), параллельное (рис. 3) и соединение с помощью обратной связи (рис. 4). Каждое из них можно преобразовать к структуре, изображённой на рис. 1.

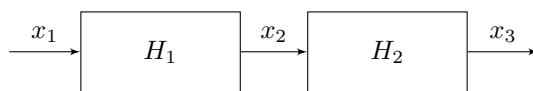


Рис. 2. Последовательное соединение блоков

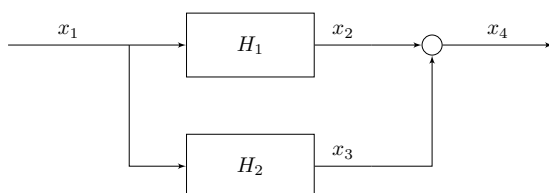


Рис. 3. Параллельное соединение блоков

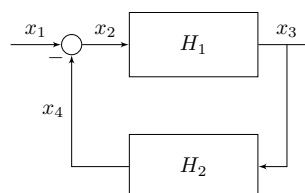


Рис. 4. Обратная связь

Далее для каждого типа соединения выпишем выражения для передаточной функции соединения $H(s)$.

Для последовательного соединения (рис. 2) имеем:

$$x_2(s) = H_1(s)x_1(s), \quad x_3(s) = H_2(s)x_2(s) \Rightarrow x_3(s) = H_2(s)H_1(s)x_1(s).$$

Таким образом, при последовательном соединении передаточная функция соединения будет равна произведению передаточных функций звеньев:

$$H(s) = \prod_{i=1}^n H_i(s). \quad (6)$$

Для параллельного соединения¹ (рис. 3) имеем

$$\begin{aligned} x_2(s) = H_1(s)x_1(s), \quad x_3(s) = H_2(s)x_1(s), \quad x_4(s) = x_2(s) + x_3(s) &\Rightarrow \\ \Rightarrow x_4(s) = (H_1(s) + H_2(s))x_1(s). \end{aligned}$$

Таким образом, передаточная функция параллельного соединения будет равна сумме передаточных функций звеньев:

$$H(s) = \sum_{i=1}^n H_i(s). \quad (7)$$

Для отрицательной обратной связи² (рис. 4) имеем:

$$\begin{aligned} x_3(s) = H_1(s)x_2(s), \quad x_4(s) = H_2(s)x_3(s), \quad x_2(s) = x_1(s) - x_4(s) &\Rightarrow \\ \Rightarrow x_3(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}x_1(s). \end{aligned}$$

Таким образом, передаточная функция соединения с отрицательной обратной связью имеет вид:

$$H(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}. \quad (8)$$

3. Метод гармонической линейаризации

Идеология теории автоматического управления наиболее естественно применяется к линейным системам. Однако ситуация ухудшается, если в системе присутствует нелинейный элемент. К особенностям нелинейных систем относятся следующее:

- к нелинейной системе неприменим принцип суперпозиции;
- в нелинейной системе могут возникнуть автоколебания;
- в нелинейной системе возможны несколько состояний равновесия;
- в нелинейной системе могут быть явления скачкообразного резонанса.

Метод гармонической линейаризации является приближённым методом. Он применяется для исследования условий возникновения и определения параметров автоколебаний, анализа и оценки их устойчивости, а также для исследования вынужденных колебаний. Гармонически-линейаризованная система зависит от амплитуд и частот периодических процессов. Это является существенным отличием гармонической линейаризации от обычного способа линейаризации, приводящего к чисто линейным выражениям, что позволяет исследовать основные свойства нелинейных систем.

Для упрощения анализа нелинейной системы её разбивают на нелинейную и линейную части. В состав линейной части системы входят все линейные звенья. В нелинейную часть попадает нелинейный элемент. Причём здесь под нелинейными понимаются не только собственно нелинейные функции, но и разрывные функции, а также функции, имеющие разрывы производных.

Метод гармонической линейаризации основан на предположении, что линейная часть системы является фильтром нижней гармоники, частота которой определяет частоту автоколебаний, т.е. более высокие гармоники не должны проходить на вход нелинейного звена.

Метод гармонической линейаризации применяется для систем определённой структуры (см. рис. 5).

¹Здесь мы использовали элемент «сумматор» (представлен на схеме в виде окружности).

²Здесь мы использовали элемент «сумматор с вычитанием».

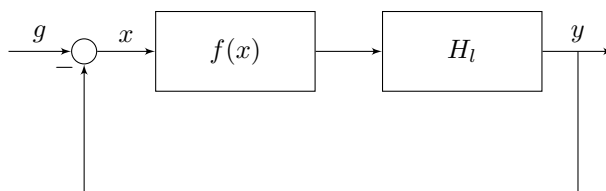


Рис. 5. Блочная структура системы для метода гармонической линейзации

Система состоит из линейного звена H_l и нелинейного звена, заданного функцией $f(x)$ (обычно рассматривают статический нелинейный элемент). Для метода гармонической линейзации предполагается режим свободного движения (входной сигнал $g(t) = 0$).

На вход нелинейного элемента подаются свободные гармонические колебания:

$$x(t) = A \sin(\omega t) \quad (9)$$

(A — амплитуда колебаний, ω — частота колебаний).

На выходе нелинейного элемента $f(x)$ мы получим периодический сигнал, который можно разложить в ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin(k\omega t) + b_k \cos(k\omega t)), \quad (10)$$

где коэффициенты ряда Фурье имеют следующий вид:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin(\omega t)) \sin(k\omega t) d(\omega t), \quad (11)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin(\omega t)) \cos(k\omega t) d(\omega t), \quad k = \overline{1, \infty}.$$

При этом будем считать, что в (10) $a_0 = 0$, т.е. постоянная составляющая отсутствует.

Линейный элемент представляет собой фильтр низких частот, то есть при увеличении k линейные элементы подавляют высшие гармоники. Ограничимся только первыми гармониками. Тогда (10) переписывается в виде:

$$f(x) = a_1 \sin(\omega t) + b_1 \cos(\omega t), \quad (12)$$

где

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin(\omega t)) \sin(\omega t) d(\omega t), \quad b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin(\omega t)) \cos(\omega t) d(\omega t). \quad (13)$$

Из (9) можно записать:

$$\sin(\omega t) = \frac{x}{A}, \quad \cos(\omega t) = \frac{1}{A\omega} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{A\omega} \frac{d}{dt} x. \quad (14)$$

Введя обозначения

$$\begin{aligned}\varkappa(A) &= \frac{a_1}{A} = \frac{1}{A\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin(\omega t)) \sin(\omega t) d(\omega t), \\ \varkappa'(A) &= \frac{b_1}{A} = \frac{1}{A\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin(\omega t)) \cos(\omega t) d(\omega t),\end{aligned}\tag{15}$$

перепишем (12) с учётом (14) в виде:

$$f(x) = \left[\varkappa(A) + \frac{\varkappa'(A)}{\omega} \frac{d}{dt} \right] x = H_{nl}(A, \partial_t)x,\tag{16}$$

где $H_{nl}(A, \partial_t)$ — приближенная передаточная функция нелинейного звена, $\varkappa(A)$ и $\varkappa'(A)$ — коэффициенты гармонической линеаризации, определяемые (15).

После нахождения коэффициентов гармонической линеаризации для заданного нелинейного звена возможно провести исследование параметров колебательного режима — амплитуды A и частоты ω колебаний. Существование в нелинейной системе режима автоколебаний соответствует нахождению линеаризованной системы на колебательной границе устойчивости. Тогда A и ω могут быть найдены с помощью критериев устойчивости линейных систем (например, может быть использованы критерии Михайлова, Найквиста–Михайлова, Рауса–Гурвица). Таким образом изучение параметров автоколебаний может быть осуществлено одним из методов определения границы устойчивости линейных систем.

3.1. Критерий Найквиста–Михайлова

Критерий Найквиста–Михайлова [8, 9] позволяет судить об устойчивости замкнутой системы автоматического управления по амплитудно-фазовой характеристике (Nyquist plot) разомкнутой системы. Данный критерий относится в аналитико-графическим критериям. Он интересен наглядным графическим представлением поведения системы и регионов существования автоколебательного режима. Фактически он хорошо иллюстрирует наличие автоколебаний и их характер.

Для использования этого критерия исходное нелинейное уравнение разбивается на две части, одна из которых зависит от амплитуды, а другая — от частоты. В качестве графического представления строятся параметрические графики этих частот. При этом амплитуда и частота играют роль натуральных параметров на этих кривых.

Рассмотрим принцип определения наличия регионов возникновения автоколебаний и их устойчивости в соответствии с критерием Найквиста–Михайлова. Сделаем подстановку $\partial_t \rightarrow i\omega$ и $s \rightarrow \partial_t \rightarrow i\omega$ в передаточных функциях $H_l(s)$ и $H_{nl}(A, \partial_t)$. Тогда незатухающие синусоидальные колебания с постоянной амплитудой будут определяться прохождением амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы через точку $(-1, i0)$. Характеристическая функция системы будет иметь вид:

$$1 + H_o(i\omega) = 0,\tag{17}$$

$$H_o(i\omega) := H_l(i\omega)H_{nl}(A, i\omega).\tag{18}$$

Здесь H_o — передаточная функция разомкнутой системы.

Таким образом:

$$H_l(i\omega)H_{nl}(A, i\omega) = -1.\tag{19}$$

С учётом (16) из (19) имеем равенство:

$$H_l(i\omega) = -\frac{1}{\varkappa(A) + i\varkappa'(A)}, \quad (20)$$

полученное Л.С. Гольдфарбом (см. [10, §7.7, с. 40–42]). Левая часть уравнения (20) — амплитудно-фазовая характеристика линейного звена, а правая часть — обратная амплитудно-фазовая характеристика первой гармоники нелинейного звена (взятая с обратным знаком). А само уравнение (20) является уравнением баланса между частотой и амплитудой.

Уравнение (20), записанное в форме

$$\varkappa(A) + i\varkappa'(A) = -\frac{1}{H_l(i\omega)}, \quad (21)$$

было получено Р. Коченбургером (см. [10, §7.7, с. 40–42]).

По методу Гольдфарба строят амплитудно-фазовую характеристику линейной части системы $H_l(i\omega)$ и кривую гармонического коэффициента передачи $-\frac{1}{\varkappa(A) + i\varkappa'(A)}$. В точках пересечения кривых с помощью интерполяции находят значения частоты и амплитуды автоколебаний.

По методу Коченбургера значения частоты и амплитуды автоколебаний находят по пересечениям кривых $H_l(i\omega)$ и $-(\varkappa(A) + i\varkappa'(A))$.

Л.С. Гольдфарб, используя критерий Найквиста, получил следующий критерий определения устойчивости автоколебаний. При движении по кривой $-\frac{1}{\varkappa(A) + i\varkappa'(A)}$ в направлении возрастания амплитуды точке входа в контур амплитудно-фазовой характеристики $H_l(i\omega)$ будет соответствовать неустойчивое периодическое решение, а точке выхода — устойчивое решение. При чем точка выхода из контура определяет параметры автоколебаний.

При использовании метода Коченбургера также осуществляется движение по соответствующей кривой в сторону увеличения амплитуды колебаний. При этом устойчивые колебания соответствуют точке входа в контур, а неустойчивые — точке в выхода из контура.

3.2. Критерий Рауса–Гурвица

Данный критерий является алгебраическим критерием устойчивости [11, 12]. Этот критерий удобен тем, что исследование сводится к анализу полинома, который удобно проводить средствами систем компьютерной алгебры.

Передаточная функция замкнутой системы (рис. 5) с учётом (8) имеет вид:

$$H_c(s) = \frac{H_l(s)}{1 + H_l(s)H_{nl}(s)} := \frac{P_n(s)}{P_d(s)}. \quad (22)$$

Уравнение $P_d(s) = 0$ будет характеристическим уравнением системы. Представим его в виде полинома:

$$P_d(s) := a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n. \quad (23)$$

Из коэффициентов характеристического уравнения построим определитель Гурвица Δ по следующему алгоритму:

- по главной диагонали слева направо выставляются все коэффициенты характеристического уравнения от a_1 до a_n ;
- от каждого элемента диагонали вверх и вниз достраиваются столбцы так, чтобы индексы убывали сверху вниз;

– на место коэффициентов с индексами меньше нуля или больше n ставятся нули. Таким образом, определитель Гурвица будет выглядеть следующим образом [13]:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_n \end{vmatrix}. \quad (24)$$

По критерию Гурвица, для того, чтобы динамическая система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все n главных диагональных миноров определителя Гурвица были положительны при $a_0 > 0$. Эти миноры называются определителями Гурвица.

При $a_n = 0$ система находится на границе аperiodической устойчивости.

Если предпоследний определитель Гурвица (минор определителя Рауса–Гурвица) $\Delta_{n-1} = 0$, то система находится на границе колебательной устойчивости. Собственно, данное выражение и необходимо нам для определения условий возникновения и параметров автоколебаний.

3.3. Критерий Михайлова

Данный критерий является вариацией критерия Найквиста–Михайлова [9] (собственно, из-за этого в названии раздела 3.1 мы добавляем к критерию Найквиста вторую фамилию).

Для применения этого критерия необходимо записать характеристическое уравнение замкнутой системы (22) (рис. 5) с учётом замены $s \rightarrow \partial_t \rightarrow i\omega$:

$$P_d(i\omega, A) = 0. \quad (25)$$

После явного выделения действительной и комплексной частей уравнение (25) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{P_d(i\omega, A)\} &= 0, \\ \operatorname{Im}\{P_d(i\omega, A)\} &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Тогда параметры автоколебаний можно определить из уравнения (26) (подробнее см. [14, § 6.3, с. 143–148], [15, §3.6, с. 139–144]).

Критерий устойчивости Михайлова [15, §3.6, с. 139–144]: для того чтобы система автоматического управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы вектор кривой Михайлова $P_d(i\omega) = \operatorname{Re}\{P_d(i\omega)\} + i \operatorname{Im}\{P_d(i\omega)\} = P_d(\omega)e^{i\psi(\omega)}$ при изменении частоты ω от 0 до ∞ повернулся, нигде не обращаясь в ноль, вокруг начала координат против часовой стрелки на угол $n\pi/2$, где n — порядок характеристического уравнения.

4. Модель системы с управлением по алгоритму RED

В этом разделе приведём описание моделируемой системы.

Система представляет собой сеть передачи данных, передаваемых по протоколу TCP Reno [16] от источника до маршрутизатора с модулем управления, работающим по алгоритму типа RED [1–3, 17, 18].

Алгоритм RED [1] использует экспоненциально взвешенное скользящее среднее значение длины очереди \hat{Q} в качестве фактора, определяющего вероятность отбрасывания пакета $p(\hat{Q})$ (см. (27)). Для управления функцией сброса используются два пороговых значения средневзвешенной длины очереди, влияющих на функционирование алгоритма (рис. 6):

$$p(\hat{Q}) = \begin{cases} 0, & 0 < \hat{Q} \leq Q_{\min}, \\ \frac{\hat{Q} - Q_{\min}}{Q_{\max} - Q_{\min}} p_{\max}, & Q_{\min} < \hat{Q} \leq Q_{\max}, \\ 1, & \hat{Q} > Q_{\max}. \end{cases} \quad (27)$$

Здесь $p(\hat{Q})$ — функция сброса пакета, \hat{Q} — экспоненциально взвешенное скользящее среднее значение длины очереди, Q_{\min} и Q_{\max} — пороговые значения средневзвешенного значения длины очереди, p_{\max} — максимальный уровень сброса пакетов.

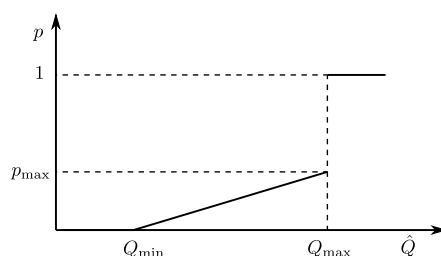


Рис. 6. Функция сброса алгоритма RED

Алгоритм RED благодаря простоте своей реализации в сетевом оборудовании достаточно эффективен, но обладает рядом недостатков. В частности, при некоторых значениях параметров возникает устойчивый автоколебательный режим функционирования системы, что негативным образом сказывается на показателях качества обслуживания сети [19–21]. К сожалению, отсутствуют чёткие критерии выбора значений параметров RED, при которых система не входила бы в автоколебательный режим.

Для описания системы с управлением по алгоритму типа RED по аналогии с работами [6, 22–28] будем использовать непрерывную модель:

$$\begin{cases} \dot{W}(t) = \frac{1}{T(Q, t)} - \frac{W(t)W(t - T(Q, t))}{2T(t - T(Q, t))} p(t - T(Q, t)); \\ \dot{Q}(t) = \frac{W(t)}{T(Q, t)} N(t) - C; \\ \dot{\hat{Q}}(t) = -w_q C \hat{Q}(t) + w_q C Q(t). \end{cases} \quad (28)$$

Здесь используются следующие обозначения:

- W — размер окна TCP Reno;
- Q — значение длины очереди;
- \hat{Q} — экспоненциально взвешенное скользящее среднее значение длины очереди (EWMA, Exponentially Weighted Moving Average);
- w_q — весовой коэффициент, определяемый алгоритмом EWMA ($0 < w_q < 1$);
- C — интенсивность обслуживания очереди;

- T — полное время двойного оборота (RTT, Round-Trip Time); $T = T_p + \frac{Q}{C}$, где T_p — время двойного оборота свободной сети (без учёта задержек в оборудовании); $\frac{Q}{C}$ — время нахождения пакета в очереди;
- N — количество сессий TCP Reno;
- p — функция сброса пакетов.

Для этой модели примем следующие упрощающие предположения:

- модель записана в моментах;
- модель описывает только фазу избежания перегрузок протокола TCP Reno [16];
- в модели рассматривается только сброс при получении 3-х последовательных подтверждений ACK протокола TCP Reno.

5. Линеаризация модели системы с управлением по алгоритму RED

Для записи модели (28) в блочно-линейном подходе нам необходимо сначала её линеаризовать. Будем придерживаться методики, изложенной в статье [25], однако проведём все вычисления подробно.

Обозначим для краткости переменные: $W := W(t)$, $W_T := W(t - T(Q, t))$, $Q := Q(t)$, $\hat{Q} := \hat{Q}(t)$, $p := p(t - T(Q, t))$, $T = T(Q, t)$, $N(t) = N$.

Будем проводить линеаризацию в районе точки равновесия. Обозначим точку равновесия индексом f .

В точке равновесия производные по времени обращаются в ноль, поэтому система уравнений (28) примет следующий вид:

$$\begin{cases} 0 = \frac{1}{T_f} - \frac{W_f^2}{2T_f} p_f; \\ 0 = \frac{W_f}{T_f} N_f - C; \\ 0 = -w_q C \hat{Q}_f + w_q C Q_f. \end{cases} \quad (29)$$

Из системы уравнений (29) получим уравнения связи на равновесные значения переменных:

$$\begin{cases} p_f = \frac{2}{W_f^2}; \\ W_f = \frac{CT_f}{N_f}; \\ \hat{Q}_f = Q_f. \end{cases} \quad (30)$$

Запишем правые части системы (28):

$$\begin{cases} L_W(W, W_T, Q, p) = \frac{1}{T} - \frac{WW_T}{2T} p; \\ L_Q(W, Q) = \frac{W}{T} N - C; \\ L_{\hat{Q}}(\hat{Q}, Q) = -w_q C \hat{Q} + w_q C Q. \end{cases} \quad (31)$$

Проварьируем правые части (31) по всем переменным в окрестности точки равновесия:

$$\begin{aligned} \frac{\delta L_W}{\delta W} \Big|_f &= -\frac{W_T}{2T} p \Big|_f = -\frac{W_f}{2T_f} p_f; & \frac{\delta L_W}{\delta W_T} \Big|_f &= -\frac{W}{2T} p \Big|_f = -\frac{W_f}{2T_f} p_f; \\ \frac{\delta L_W}{\delta Q} \Big|_f &= -\frac{1}{T^2} \frac{\delta \left(\frac{Q}{C} + T_p \right)}{\delta Q} + \frac{W W_T}{2T^2} p \frac{\delta \left(\frac{Q}{C} + T_p \right)}{\delta Q} \Big|_f &= -\frac{1}{CT_f^2} + \frac{W_f^2}{2CT_f^2} p_f; \\ \frac{\delta L_W}{\delta p} \Big|_f &= -\frac{W W_T}{2T} \Big|_f = -\frac{W_f^2}{2T_f}; & \frac{\delta L_Q}{\delta W} \Big|_f &= \frac{1}{T} N \Big|_f = \frac{N}{T_f}; \\ \frac{\delta L_Q}{\delta Q} \Big|_f &= -\frac{W}{T^2} N \frac{\delta T}{\delta Q} \Big|_f = -\frac{W}{T^2} N \frac{\delta \left(\frac{Q}{C} + T_p \right)}{\delta Q} \Big|_f &= -\frac{W}{CT^2} N \Big|_f = -\frac{W_f}{CT_f^2} N; \\ \frac{\delta L_{\hat{Q}}}{\delta \hat{Q}} \Big|_f &= -w_q C \Big|_f = -w_q C; & \frac{\delta L_{\hat{Q}}}{\delta Q} \Big|_f &= w_q C \Big|_f = w_q C. \end{aligned}$$

Учитывая уравнения связи (30), перепишем эти уравнения в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\delta L_W}{\delta W} \Big|_f &= -\frac{W_f}{2T_f} \frac{2}{W_f^2} = -\frac{1}{W_f T_f} = -\frac{N}{CT_f^2}; \\ \frac{\delta L_W}{\delta W_T} \Big|_f &= -\frac{W_f}{2T_f} \frac{2}{W_f^2} = -\frac{1}{W_f T_f} = -\frac{N}{CT_f^2}; \\ \frac{\delta L_W}{\delta Q} \Big|_f &= -\frac{1}{CT_f^2} + \frac{2}{2CT_f^2} = 0; & \frac{\delta L_W}{\delta p} \Big|_f &= -\frac{C^2 T_f^2}{N^2} \frac{1}{2T_f} = -\frac{C^2 T_f}{2N^2}; \\ \frac{\delta L_Q}{\delta W} \Big|_f &= \frac{N}{T_f}; & \frac{\delta L_Q}{\delta Q} \Big|_f &= -\frac{CT_f}{N} \frac{N}{CT_f^2} = -\frac{1}{T_f}; & \frac{\delta L_{\hat{Q}}}{\delta \hat{Q}} \Big|_f &= -w_q C; & \frac{\delta L_{\hat{Q}}}{\delta Q} \Big|_f &= w_q C. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили из исходной системы (28) линеаризованную систему:

$$\left\{ \begin{aligned} \delta \dot{W}(t) &= \frac{\delta L_W}{\delta W} \Big|_f \delta W(t) + \frac{\delta L_W}{\delta W_T} \Big|_f \delta W(t - T_f) + \\ &+ \frac{\delta L_W}{\delta Q} \Big|_f \delta Q(t) + \frac{\delta L_W}{\delta p} \Big|_f \delta p(t - T_f) = \\ &= -\frac{N}{CT_f^2} (\delta W(t) + \delta W(t - T_f)) - \frac{C^2 T_f}{2N^2} \delta p(t - T_f); \\ \delta \dot{Q}(t) &= \frac{\delta L_Q}{\delta W} \Big|_f \delta W(t) + \frac{\delta L_Q}{\delta Q} \Big|_f \delta Q(t) = \frac{N}{T_f} \delta W(t) - \frac{1}{T_f} \delta Q(t); \\ \delta \dot{\hat{Q}}(t) &= \frac{\delta L_{\hat{Q}}}{\delta \hat{Q}} \Big|_f \delta \hat{Q}(t) + \frac{\delta L_{\hat{Q}}}{\delta Q} \Big|_f \delta Q(t) = -w_q C \delta \hat{Q}(t) + w_q C \delta Q(t). \end{aligned} \right. \quad (32)$$

Кроме того, линеаризуем функцию сброса (27):

$$P_{\text{RED}} \delta \hat{Q}(t) := \delta p(\hat{Q}, t) = \begin{cases} 0, & 0 < \hat{Q} \leq Q_{\min}, \\ \frac{p_{\max}}{Q_{\max} - Q_{\min}} \delta \hat{Q}(t), & Q_{\min} < \hat{Q} \leq Q_{\max}, \\ 0, & \hat{Q} > Q_{\max}. \end{cases} \quad (33)$$

Выполним над (32) преобразования (4) и (5).

$$\begin{cases} s \delta W(s) = -\frac{N}{CT_f^2} (\delta W(s) + \delta W(s) e^{-sT_f}) - \frac{C^2 T_f}{2N^2} \delta p(s) e^{-sT_f} = \\ \quad = -\frac{N}{CT_f^2} (1 + e^{-sT_f}) \delta W(s) - \frac{C^2 T_f}{2N^2} \delta p(s) e^{-sT_f}; \\ s \delta Q(s) = \frac{N}{T_f} \delta W(s) - \frac{1}{T_f} \delta Q(s). \\ s \delta \hat{Q}(s) = -w_q C \delta \hat{Q}(s) + w_q C \delta Q(s). \end{cases} \quad (34)$$

Приведём в (34) подобные:

$$\begin{cases} \delta W(s) = -\frac{1}{s + \frac{N}{CT_f^2} (1 + e^{-sT_f})} \frac{C^2 T_f}{2N^2} e^{-sT_f} \delta p(s); \\ \delta Q(s) = \frac{1}{s + \frac{1}{T_f}} \frac{N}{T_f} \delta W(s); \\ \delta \hat{Q}(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{w_q C}} \delta Q(s). \end{cases} \quad (35)$$

Учитывая выражение для $\delta \hat{Q}(s)$ из системы уравнений (35), запишем (33) в следующем виде:

$$\delta p(s) = P_{\text{RED}} \frac{1}{1 + \frac{s}{w_q C}} \delta Q(s). \quad (36)$$

Функция P_{RED} имеет вид, приведённый на рис. 7.

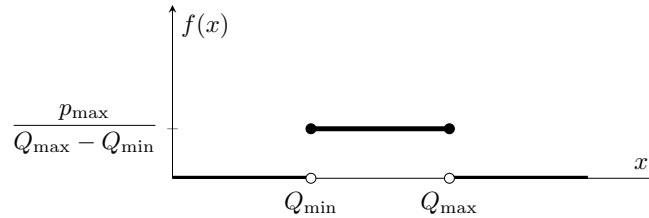


Рис. 7. Функция P_{RED}

На основании (35) и (36) построим блочное представление линеаризованной модели RED (рис. 8).

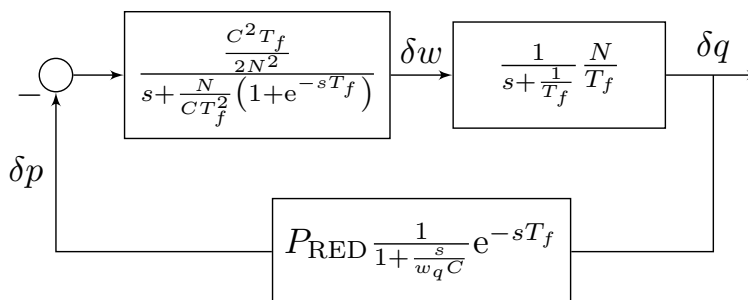


Рис. 8. Блочное представление линеаризованной модели RED

6. Гармоническая линеаризация линеаризованной модели системы с управлением по алгоритму RED

Приведём блочную схему линеаризованной модели (рис. 8) к виду, необходимому для гармонической линеаризации.

В качестве статической нелинейной функции будем использовать P_{RED} (33). Линеаризованную часть получим из (35) и (36) с помощью преобразования (6).

$$\begin{aligned}
 H_l &= \frac{1}{s + \frac{N}{C T_f^2} (1 + e^{-s T_f})} \frac{C^2 T_f}{2 N^2} e^{-s T_f} \times \frac{1}{s + \frac{1}{T_f}} \frac{N}{T_f} \times \frac{1}{1 + \frac{s}{w_q C}} = \\
 &= \frac{1}{s + \frac{N}{C T_f^2} (1 + e^{-s T_f})} \frac{1}{s + \frac{1}{T_f}} \frac{1}{1 + \frac{s}{w_q C}} \frac{C^2}{2 N} e^{-s T_f}. \quad (37)
 \end{aligned}$$

В блочном представлении схема на рис. 8 перейдёт в вид, приведённый на рис. 9

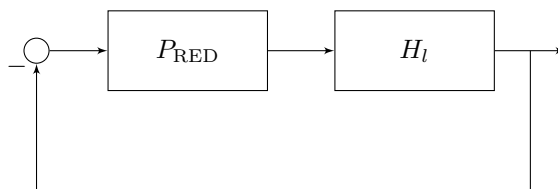


Рис. 9. Блочное представление линеаризованной модели RED для гармонической линеаризации

Вычислим коэффициенты гармонической линеаризации $\varkappa(a)$ и $\varkappa'(a)$ (15) для статической нелинейности P_{RED} :

$$\begin{aligned}
 \varkappa(A) &= \frac{4}{A\pi} \int_0^{\pi/2} P_{\text{RED}}(A \sin(\omega t)) \sin(\omega t) d(\omega t); \\
 \varkappa'(A) &= \frac{4}{A\pi} \int_0^{\pi/2} P_{\text{RED}}(A \sin(\omega t)) \cos(\omega t) d(\omega t).
 \end{aligned} \quad (38)$$

С учётом (33) получим:

$$\begin{aligned}\varkappa(A) &= \frac{4}{A\pi} \frac{p_{\max}}{Q_{\max} - Q_{\min}} \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \sin(\omega t) d(\omega t) = \\ &= \frac{4}{A\pi} \frac{p_{\max}}{Q_{\max} - Q_{\min}} - \cos(\omega t) \Big|_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} = \frac{4}{A\pi} \frac{p_{\max}}{Q_{\max} - Q_{\min}} (\cos \alpha_{\min} - \cos \alpha_{\max}); \\ \varkappa'(A) &= \frac{4}{A\pi} \frac{p_{\max}}{Q_{\max} - Q_{\min}} \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \cos(\omega t) d(\omega t) = \\ &= \frac{4}{A\pi} \frac{p_{\max}}{Q_{\max} - Q_{\min}} \sin(\omega t) \Big|_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} = \frac{4}{A\pi} \frac{p_{\max}}{Q_{\max} - Q_{\min}} (\sin \alpha_{\max} - \sin \alpha_{\min}).\end{aligned}\quad (39)$$

Найдём значения \sin и \cos от пределов интегрирования α_{\min} и α_{\max} :

$$\begin{aligned}x = A \sin \alpha_{\min} = Q_{\min}, \quad \sin \alpha_{\min} = \frac{Q_{\min}}{A}; \quad \cos \alpha_{\min} = \sqrt{1 - \frac{Q_{\min}^2}{A^2}}; \\ x = A \sin \alpha_{\max} = Q_{\max}, \quad \sin \alpha_{\max} = \frac{Q_{\max}}{A}; \quad \cos \alpha_{\max} = \sqrt{1 - \frac{Q_{\max}^2}{A^2}}.\end{aligned}\quad (40)$$

Таким образом, из (39) с учётом (40) получим:

$$\begin{aligned}\varkappa(A) &= \frac{4}{A\pi} \frac{p_{\max}}{Q_{\max} - Q_{\min}} \left(\sqrt{1 - \frac{Q_{\min}^2}{A^2}} - \sqrt{1 - \frac{Q_{\max}^2}{A^2}} \right); \\ \varkappa'(A) &= \frac{4}{A\pi} \frac{p_{\max}}{Q_{\max} - Q_{\min}} \frac{Q_{\max} - Q_{\min}}{A} = \frac{4p_{\max}}{A^2\pi}.\end{aligned}\quad (41)$$

Таким образом, из (20), (37) и (41) получаем:

$$\begin{aligned}\frac{1}{i\omega + \frac{N}{CT_f^2}(1 + e^{-i\omega T_f})} \frac{1}{i\omega + \frac{1}{T_f}} \frac{1}{1 + \frac{i\omega}{w_q C}} \frac{C^2}{2N} e^{-i\omega T_f} = \\ = -\frac{A\pi}{4p_{\max}} \left[\frac{1}{Q_{\max} - Q_{\min}} \left(\sqrt{1 - \frac{Q_{\min}^2}{A^2}} - \sqrt{1 - \frac{Q_{\max}^2}{A^2}} \right) + i \frac{1}{A} \right]^{-1}.\end{aligned}\quad (42)$$

Далее приведём пример нахождения характеристик моделируемой системы с помощью метода гармонической линеаризации.

Для численного эксперимента нами были выбраны следующие параметры: $Q_{\min} = 100$ [пакеты], $Q_{\max} = 150$ [пакеты], $p_{\max} = 0.1$, $T_p = 0.0075$ с, $w_q = 0.002$, $C = 2000$ [пакеты]/с, $N = 60$ (количество сессий ТСР).

В результате расчётов получены следующие значения для амплитуды и циклической частоты: $A = 1.89$ [пакетов], $\omega = 16.55$ с⁻¹.

Для наглядности можно построить параметрические графики на комплексной плоскости отдельно для левой $H_l(i\omega)$ и правой $-1/H_{nl}(A)$ частей уравнения (42) (от ω и от A соответственно) (см. рис. 10 и 11). Пересечение кривых даёт точку возникновения автоколебаний.

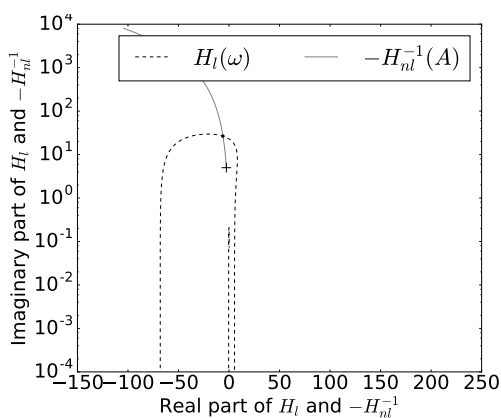


Рис. 10. Амплитудно-фазовая частотная характеристика для системы (42)

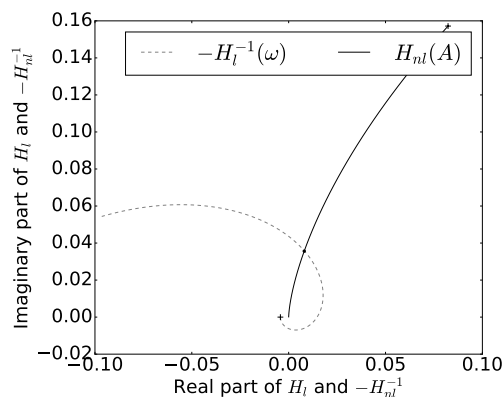


Рис. 11. Амплитудно-фазовая частотная характеристика для системы (21)

Поведение графика можно продемонстрировать с помощью эталонного средства имитационного моделирования компьютерных сетей NS-2 [29, 30]. При выбранных нами данных мы получим график изменения окна на источнике (рис. 12) и колебаний длины очереди на маршрутизаторе с алгоритмом управления RED (рис. 13).

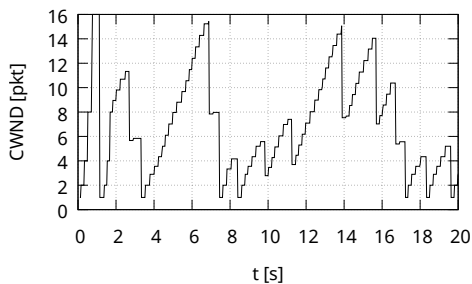


Рис. 12. Изменение размера скользящего окна на источнике

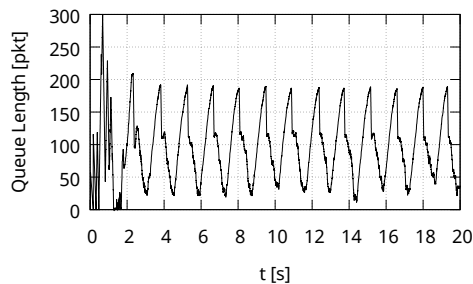


Рис. 13. Колебание очереди на маршрутизаторе с RED

В дальнейшем предполагается исследовать результаты, полученные с помощью системы NS-2 для нахождения параметров автоколебаний, а именно частоты и амплитуды. Эти результаты предполагается сравнить с теоретическими, полученными методом гармонической линеаризации.

7. Заключение

Авторами была продемонстрирована методика исследования колебательных режимов систем с управлением. Впрочем, эта демонстрация является скорее доказательством концепции, чем конкретными вычислениями. Авторы постарались изложить эту методику понятным образом для математиков, незнакомых с формализмом теории управления.

В дальнейшем предполагается применить данную методику к исследованию широкого спектра алгоритмов активного управления трафиком. Также представляется интересным сравнить эти результаты с ранее полученными результатами по областям возникновения автоколебаний в системах с управлением.

Литература

1. *Floyd S., Jacobson V.* Random Early Detection Gateways for Congestion Avoidance // IEEE/ACM Transactions on Networking. — 1993. — Vol. 1, No 4. — Pp. 397–413.
2. *Jacobson V.* Congestion Avoidance and Control // ACM SIGCOMM Computer Communication Review. — 1988. — Vol. 18, No 4. — Pp. 314–329.
3. *Королькова А. В., Кулябов Д. С., Черноуванов А. И.* К вопросу о классификации алгоритмов RED // Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2009. — № 3. — С. 34–46.
4. *Королькова А. В., Кулябов Д. С.* Математическая модель динамики поведения параметров систем типа RED // Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2010. — № 1. — С. 54–64.
5. Модель управления очередями на маршрутизаторах / Т. Р. Велиева, А. В. Королькова, Д. С. Кулябов, Б. А. Сантуш // Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2014. — Т. 2. — С. 81–92.
6. *Velieva T. R., Korolkova A. V., Kulyabov D. S.* Designing Installations for Verification of the Model of Active Queue Management Discipline RED in the GNS3 // 6th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT). — IEEE Computer Society, 2015. — Pp. 570–577.
7. *Aström K. J., Murray R. M.* Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers. — Princeton University Press, 2008. — 408 p.
8. *Nyquist H.* Regeneration Theory // Bell System Technical Journal. — 1932. — Vol. 11, No 1. — Pp. 126–147.
9. *Сю Д. С., Мейер А. У.* Современная теория автоматического управления и ее применение. — Москва: Машиностроение, 1972. — 552 с.
10. Теория автоматического управления: Учеб. для вузов по спец. «Автоматика и телемеханика». В 2-х ч. Ч. II. Теория нелинейных и специальных систем автоматического управления / А. А. Воронов, Д. П. Ким, В. М. Лохин и др.; под ред. А. А. Воронова. — 2-е изд., перераб. и доп. издание. — М.: Высш. шк, 1986.
11. *Routh E. J.* A Treatise on the Stability of a Given State of Motion: Particularly Steady Motion. — Macmillan, 1877.
12. *Hurwitz A.* Ueber die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Theilen besitzt // Mathematische Annalen. — 1895. — Bd. 46, No 2. — Ss. 273–284.
13. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — 5-е издание. — Москва: Физматлит, 2010.
14. *Бесекерский В. А., Попов Е. П.* Теория систем автоматического регулирования. — М.: Наука, 1972.
15. Теория автоматического управления: Учеб. для вузов по спец. «Автоматика и телемеханика». В 2-х ч. Ч. I. Теория линейных систем автоматического управления / Н. А. Бабаков, А. А. Воронов, А. А. Воронова и др.; под ред. А. А. Воронова. — 2-е изд., перераб. и доп. издание. — М.: Высш. шк, 1986.
16. *Allman M., Paxson V., Blanton E.* TCP Congestion Control: Techrep. — 2009.
17. *Kushwaha V., Gupta R.* Congestion Control for High-Speed Wired Network: A Systematic Literature Review // Journal of Network and Computer Applications. — 2014. — Vol. 45. — Pp. 62–78.
18. *Adams R.* Active Queue Management: A Survey // IEEE Communications Surveys Tutorials. — 2013. — Vol. 15, No 3. — Pp. 1425–1476.
19. *Jenkins A.* Self-Oscillation // Physics Reports. — 2013. — Vol. 525, No 2. — Pp. 167–222.
20. *Ren F., Lin C., Wei B.* A Nonlinear Control Theoretic Analysis to TCP-RED System // Computer Networks. — 2005. — Vol. 49, No 4. — Pp. 580–592.
21. *Lautenschlaeger W., Francini A.* Global Synchronization Protection for Bandwidth Sharing TCP Flows in High-Speed Links // Proc. 16-th International Conference on High Performance Switching and Routing, IEEE HPSR 2015. — Budapest, Hungary:

- 2015.
22. *Misra V., Gong W.-B., Towsley D.* Stochastic Differential Equation Modeling and Analysis of TCP-Window Size Behavior // Proceedings of PERFORMANCE. — 1999. — Vol. 99.
 23. *Misra V., Gong W.-B., Towsley D.* Fluid-Based Analysis of a Network of AQM Routers Supporting TCP Flows with an Application to RED // ACM SIGCOMM Computer Communication Review. — 2000. — Vol. 30, No 4. — Pp. 151–160.
 24. On Designing Improved Controllers for AQM Routers Supporting TCP Flows / C. V. V. Hollot, V. Misra, D. Towsley, Wei-Bo Gong // Proceedings IEEE INFOCOM 2001. Conference on Computer Communications. Twentieth Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Society (Cat. No.01CH37213). — Vol. 3. — IEEE, 2001. — Pp. 1726–1734.
 25. *Hollot C. V. V., Misra V., Towsley D.* A Control Theoretic Analysis of RED // Proceedings IEEE INFOCOM 2001. Conference on Computer Communications. Twentieth Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Society (Cat. No.01CH37213). — Vol. 3, No 2. — IEEE, 2001. — Pp. 1510–1519.
 26. *Korolkova A. V., Kulyabov D. S., Sevastianov L. A.* Combinatorial and Operator Approaches to RED Modeling // Mathematical Modelling and Geometry. — 2015. — Vol. 3, No 3. — Pp. 1–18.
 27. Hybrid Simulation Of Active Traffic Management / A. V. Korolkova, T. R. Velieva, P. A. Abaev, L. A. Sevastianov, D. S. Kulyabov // Proceedings 30th European Conference on Modelling and Simulation. — 2016. — Pp. 685–691.
 28. *Brockett R.* Stochastic Analysis for Fluid Queueing Systems // Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No.99CH36304). — Vol. 3. — IEEE, 1999. — Pp. 3077–3082.
 29. *Altman E., Jiménez T.* NS Simulator for Beginners // Synthesis Lectures on Communication Networks. — 2012. — Vol. 5, No 1. — Pp. 1–184.
 30. *Issariyakul T., Hossain E.* Introduction to Network Simulator NS2. — 2012. — Vol. 9781461414, 510 p.

UDC 004.021:519.2:519.6

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-3-234-252

Application of the Harmonic Linearization Method to the Study a Control Systems with a Self-Oscillatory Regime

D. S. Kulyabov*[†], A. V. Korolkova*, T. R. Velieva*

** Department of Applied Probability and Informatics
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)
6 Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russian Federation*

*[†] Laboratory of Information Technologies
Joint Institute for Nuclear Research
6 Joliot-Curie St., Dubna, Moscow region, 141980, Russian Federation*

In data transmission networks implemented as systems with control, the phenomenon of global synchronization can occur. Outwardly, this phenomenon manifests itself as a self-oscillating mode in the system. This mode negatively affects the characteristics of the entire system, such as throughput and transmission delays. Relevant is the problem of finding the areas of occurrence of self-oscillation. The authors investigated this problem for the system as a whole. Also, the problem of isolating the elements of the system responsible for the appearance of an autooscillatory regime is urgent. The complexity of this problem is caused by the essentially nonlinear character of the system and its elements. Often, the linearization method is used for the decomposition of the system. But with the linearization, the self-oscillatory regime disappears. There is a need to find a method of decomposition, non-destructive self-oscillating mode of the system. As such a method, the authors suggest using the method of harmonic linearization. This method is used in the control theory. However, we must admit that this

mathematical apparatus is little known to researchers specializing in the study of networks. The authors tried to describe in as much detail the process of research using the method of harmonic linearization. The method is used to study the influence of the form of RED-type function on the occurrence of self-oscillation mode. Thus, this material is more methodical than exploratory one.

Key words and phrases: traffic active management, control theory, self-oscillating mode, method of harmonic linearization, RED

References

1. S. Floyd, V. Jacobson, Random Early Detection Gateways for Congestion Avoidance, *IEEE/ACM Transactions on Networking* 1 (4) (1993) 397–413. doi:10.1109/90.251892.
2. V. Jacobson, Congestion Avoidance and Control, *ACM SIGCOMM Computer Communication Review* 18 (4) (1988) 314–329. arXiv:arXiv:1011.1669v3, doi:10.1145/52325.52356.
3. A. V. Korolkova, D. S. Kulyabov, A. I. Chernoiyanov, On the Classification of RED Algorithms, *Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series: Mathematics. Information Sciences. Physics* (3) (2009) 34–46, in Russian.
4. A. V. Korolkova, D. S. Kulyabov, Mathematical Model of the Dynamic Behavior of RED-Like System Parameters, *Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series "Mathematics. Information Sciences. Physics"* (1) (2010) 54–64, in Russian.
5. T. R. Velieva, A. V. Korolkova, D. S. Kulyabov, B. A. Dos Santos, Model Queue Management on Routers, *Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series "Mathematics. Information Sciences. Physics"* 2 (2014) 81–92, in Russian.
6. T. R. Velieva, A. V. Korolkova, D. S. Kulyabov, Designing Installations for Verification of the Model of Active Queue Management Discipline RED in the GNS3, in: 6th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT), *IEEE Computer Society*, 2015, pp. 570–577. arXiv:1504.02324, doi:10.1109/ICUMT.2014.7002164.
7. K. J. Aström, R. M. Murray, *Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers*, Princeton University Press, 2008.
8. H. Nyquist, Regeneration Theory, *Bell System Technical Journal* 11 (1) (1932) 126–147. doi:10.1002/j.1538-7305.1932.tb02344.x.
9. J. Hsu, A. Meyer, *Modern Control Principles and Applications*, McGraw-Hill, 1968.
10. A. A. Voronov, D. P. Kim, V. M. Lokhin, et al., *Theory of Automatic Control: Textbook for High Schools on the Specialty "Automation and telemechanics"*. In two parts. Part II. Theory of Nonlinear and Special Systems of Automatic Control, 2nd Edition, High School, Moscow, 1986, in Russian.
11. E. J. Routh, *A Treatise on the Stability of a Given State of Motion: Particularly Steady Motion*, Macmillan, 1877.
12. A. Hurwitz, Ueber die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Theilen besitzt, *Mathematische Annalen* 46 (2) (1895) 273–284. doi:10.1007/BF01446812.
13. F. R. Gantmacher, *The Theory of Matrices*, Chelsea Pub. Co., 1959.
14. V. A. Besekerskiy, E. P. Popov, *Theory of Automatic Control Systems*, Nauka, Moscow, 1972, in Russian.
15. N. A. Babakov, A. A. Voronov, A. A. Voronova, et al., *Theory of Automatic Control: Textbook for High Schools on the Specialty "Automation and telemechanics"*. In two parts. Part. I. Theory of Linear Systems of Automatic Control, 2nd Edition, High School, Moscow, 1986, in Russian.
16. M. Allman, V. Paxson, E. Blanton, TCP Congestion Control, *Tech. rep.* (sep 2009). doi:10.17487/rfc5681.

17. V. Kushwaha, R. Gupta, Congestion Control for High-Speed Wired Network: A Systematic Literature Review, *Journal of Network and Computer Applications* 45 (2014) 62–78. doi:10.1016/j.jnca.2014.07.005.
18. R. Adams, Active Queue Management: A Survey, *IEEE Communications Surveys Tutorials* 15 (3) (2013) 1425–1476. doi:10.1109/SURV.2012.082212.00018.
19. A. Jenkins, Self-Oscillation, *Physics Reports* 525 (2) (2013) 167–222. arXiv:1109.6640, doi:10.1016/j.physrep.2012.10.007.
20. F. Ren, C. Lin, B. Wei, A Nonlinear Control Theoretic Analysis to TCP-RED System, *Computer Networks* 49 (4) (2005) 580–592. doi:10.1016/j.comnet.2005.01.016.
21. W. Lautenschlaeger, A. Francini, Global Synchronization Protection for Bandwidth Sharing TCP Flows in High-Speed Links, in: *Proc. 16-th International Conference on High Performance Switching and Routing, IEEE HPSR 2015, Budapest, Hungary, 2015*. arXiv:1602.05333.
22. V. Misra, W.-B. Gong, D. Towsley, Stochastic Differential Equation Modeling and Analysis of TCP-Window Size Behavior, *Proceedings of PERFORMANCE 99*.
23. V. Misra, W.-B. Gong, D. Towsley, Fluid-Based Analysis of a Network of AQM Routers Supporting TCP Flows with an Application to RED, *ACM SIGCOMM Computer Communication Review* 30 (4) (2000) 151–160. doi:10.1145/347057.347421.
24. C. V. V. Hollot, V. Misra, D. Towsley, Wei-Bo Gong, On Designing Improved Controllers for AQM Routers Supporting TCP Flows, in: *Proceedings IEEE INFOCOM 2001. Conference on Computer Communications. Twentieth Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Society (Cat. No.01CH37213), Vol. 3, IEEE, 2001, pp. 1726–1734*. doi:10.1109/INFCOM.2001.916670.
25. C. V. V. Hollot, V. Misra, D. Towsley, A Control Theoretic Analysis of RED, in: *Proceedings IEEE INFOCOM 2001. Conference on Computer Communications. Twentieth Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Society (Cat. No.01CH37213), Vol. 3, IEEE, 2001, pp. 1510–1519*. doi:10.1109/INFCOM.2001.916647.
26. A. V. Korolkova, D. S. Kulyabov, L. A. Sevastianov, Combinatorial and Operator Approaches to RED Modeling, *Mathematical Modelling and Geometry* 3 (3) (2015) 1–18.
27. A. V. Korolkova, T. R. Velieva, P. A. Abaev, L. A. Sevastianov, D. S. Kulyabov, Hybrid Simulation Of Active Traffic Management, *Proceedings 30th European Conference on Modelling and Simulation (2016)* 685–691 doi:10.7148/2016-0685.
28. R. Brockett, Stochastic Analysis for Fluid Queueing Systems, in: *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No.99CH36304), Vol. 3, IEEE, 1999, pp. 3077–3082*. doi:10.1109/CDC.1999.831407.
29. E. Altman, T. Jiménez, NS Simulator for Beginners, *Synthesis Lectures on Communication Networks* 5 (1) (2012) 1–184. doi:10.2200/S00397ED1V01Y201112CNT010.
30. T. Issariyakul, E. Hossain, Introduction to Network Simulator NS2, Vol. 9781461414, 2012. doi:10.1007/978-1-4614-1406-3.