УДК 517.9

Об интегралах систем обыкновенных дифференциальных уравнений, представимых в конечном виде

М. Д. Малых

Факультет наук о материалах
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Ленинские Горы, Корпус «Б», Москва, Россия, 119991
Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198

Существующие теории разрешимости систем нелинейных дифференциальных уравнений в конечном виде представляют собой обобщения теории Галуа и по этой причине список элементарных операций в этих теория считается предметом договора. В своих Стокгольмских лекциях (1897) Пенлеве на примере уравнений 1-го и 2-го порядка указал свойство, общее всем уравнениям, разрешимым в элементарных, специальных и абелевых функциях: общее решения этих уравнений зависят от констант интегрирования алгебраически. Тем самым зафиксировав алгебраические свойства общего решения, можно выделить класс общеупотребимых трансцендентных функций. Это утверждение можно вписать в круг идей теории Галуа, тем самым построив для дифференциальных уравнений теорию и без фиксации этого списка.

Рассмотрим произвольную систему $g_1(x_1, \dots, \dot{x}_1, \dots) = 0, \dots$, где $g_1, \dots$ — многочлены от $x_1, \dot{x}_1 \dots$, коэффициенты которых лежат в поле k функций переменной t, напр., $k = \mathbb{C}(t)$. Эта система имеет решения в алгебраически замкнутом поле K, напр., в поле рядов Пюизё. Будем предполагать, что идеал $\mathfrak{p} = (f_1, \dots)$ кольца $K[x_1, \dots]$ прост и что существует дифференцирование D кольца рациональных функций на многообразии $V(\mathfrak{p}/K)$, ядром которого является поле интегралов системы. Обозначим его степень трансцендентности как r и докажем, что существует r-параметрическая группа автоморфизмов поля интегралов. Эта теорема будет использована для вычисления интегралов системы дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: теория Галуа, интегрирование в конечном виде, абелевы интегралы, уравнение Риккати.

1. Введение

При исследовании разрешимости классических геометрических задач «в конечном виде» нельзя не фиксировать список тех операций, которые разрешается выполнять конечное число раз, напр., задача об удвоении куба не решается при помощи циркуля и линейки, но решается с помощью невсиса. Кажется, что и в теории дифференциальных уравнений список элементарных функций является предметом договора, см. напр., [1]. Но почему в таком случае все общеупотребимые трансцендентные функции были известны ещё во времена Гаусса? Можно ли указать свойство, характеризующее общеупотребительные функции как математический, а не социокультурный феномен?

В Стокгольмских лекциях Пенлеве [2], см. также [3], можно обнаружить весьма интересное наблюдение: зафиксировав *алгебраические* свойства общего решения, можно выделить класс общеупотребимых *трансцендентных* функций. В [3] была доказана след. теорема такого сорта:

Теорема 1. *Если общее решение дифференциального уравнения*

$$F(y', y, x) = 0, \quad F \in k[y', y],$$

зависит от константы алгебраически, то уравнение или сводится алгебраической заменой к уравнению Риккати, или решается в эллиптических функциях.

Статья поступила в редакцию 23 июня 2014 г.

В элементарных курсах дифференциальных уравнений все возникшие уравнения 1-го порядка стремятся свести к уравнению Риккати или его вырождению — линейному уравнению первого порядка. Например, уравнение Бернулли

$$y' = p(x)y + q(x)y^n$$

алгебраической заменой $y = z^{-1/(n+1)}$ сводят к линейному уравнению, что позволяет выписать его общее решение как

$$y = (\alpha(x) + \beta(x)C)^{-1/(n+1)}.$$

Другой пример доставляет уравнение $(y')^2 = p(x)(4y^3 - g_2 y - g_3)$, к которому приводит изучение колебаний маятника; здесь переменные можно разделить и выписать решение при помощи эллиптических функций как

$$y = \wp\left(\int \sqrt{p(x)}\mathrm{d}x\right).$$

Теорема Пенлеве же указывает на свойство, общее для общих решений этих дифференциальных уравнений.

В [2] это наблюдение было распространено на уравнения 2-го порядка.

Теорема 2 (Пенлеве, [2], С. 381). *Если общее решение y заданного уравнения 2-го порядка*

$$f(x, \dot{x}, \ddot{x}; t) = 0,$$

(где f — многочлен относительно $x, \dot{x}, \ddot{x}$), зависит рационально от констант $x_0, \dot{x}_0, \ddot{x}_0$, связанных соотношением

$$f(x_0, \dot{x}_0, \ddot{x}_0; t_0) = 0,$$

то этот интеграл принадлежит к одной из следующих категорий:

1) или этот интеграл выражается алгебраически;

2) или x выражается рационально через эллиптические функции $\wp(u + C)$ и $\wp'(u + C)$, где u выражается через t квадратурой

$$u = \int h(t)\mathrm{d}t,$$

т. е. $x = R(\wp(u + C), \wp'(u + C))$, при этом коэффициенты функции R выражаются алгебраически через коэффициенты исходного дифференциального уравнения и вторую константу интегрирования;

3) или x выражается рационально через абелеву функцию $\mathrm{Al}(u, v)$ и её производные по u и v, причём u и v выражаются через t квадратурами

$$u = \int h(t)\mathrm{d}t + C_1, \quad v = \int k(t)\mathrm{d}t + C_2;$$

4) или общее решение выражается рационально через функцию $y(t)$, то есть $x = R(y)$, где y удовлетворяет уравнению Риккати

$$\dot{y} = -y^2 + \gamma(t),$$

R и γ выражаются алгебраически через коэффициенты исходного дифференциального уравнения и произвольную константу C;

5) *или $x = R(y, \wp(u+C), \wp'(u+C))$, где u даётся квадратурой*

$$u = \int h(t)\mathrm{d}t,$$

а y удовлетворяет уравнению Риккати

$$\dot{y} = -y^2 + \gamma(t),$$

причём R выражается алгебраически через коэффициенты исходного дифференциального уравнения, а γ может ещё зависеть рационально от $\wp(u+C)$ и $\wp'(u+C)$;

6) *или исходное уравнение алгебраической заменой сводится к линейному дифференциальному уравнению.*

К сожалению, алгебраические изыскания Пенлеве известны заметно меньше аналитических, которые были существенно развиты в XX веке [4–7]. На современном языке сказанное означает, что можно построить аналог теории Галуа для дифференциальных уравнений, не фиксировав список допустимых операций, используемых для вычисления трансцендентных функций. В этом принципиальное отличие этой теории от теории Галуа для алгебраических уравнений и её многочисленных аналогов для нелинейных дифференциальных уравнений (например, от теории Зингера [8, 9]). Цель настоящей статьи и состоит в том, чтобы дать абрис такой теории для произвольных систем дифференциальных уравнений; для одного уравнения 1-го порядка (см. также [10]).

2. Абрис теории Галуа

Рассмотрим систему

$$\{f_1(x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n; t) = 0, \dots \tag{1}$$

где f_i — многочлены относительно $x_1, \dots x_n$ и их производных, коэффициенты которых принадлежат полю k, именуемому далее полем основных функций. Идеал, который порождают многочлены $f_1, \dots$ в кольце $k[x_1, \dots, x_{2n}]$, обозначим как $\mathfrak{p}$. Дифференцирование по t будем рассматривать как дифференцирование поля k и считать, что $\mathbb{C}$ — его поле констант. Например, для дифференциального уравнения

$$\dot{x}^2 + e^t x = 0$$

можно принять $\mathbb{C}(e^t, t)$ за поле основных функций k.

Мы не будем требовать, чтобы число уравнений и искомых функций совпадало, поскольку при рассмотрении классических механических задач, например, задачи многих тел, такое предположение является весьма обременительным. Вместо этого мы ограничимся следующими предположениями: существует такое алгебраически замкнутое дифференциальное расширение K поля основных функций k, что система (1)

– неприводима, то есть идеал $\mathfrak{p}^K$ — простой,
– вполне совместна в K, то есть всякий многочлен из $K[x_1, \dots, x_{2n}]$, обращающийся в нуль на решении из K, принадлежит $\mathfrak{p}^K$,
– замкнута, то есть существует продолжение D дифференцирования по t на поле $R(\mathfrak{p}/K)$ рациональных функций на аффинном многообразии $V(\mathfrak{p}/K)$.

Обычно можно использовать в качестве K поля рядов Пюизё.

Нули дифференцирования D поля $R(\mathfrak{p}/K)$ составляют поле, элементами которого служат константы поля K и, вообще говоря, рациональные интегралы системы (1), причём их коэффициенты лежат в поле K, то есть могут быть трансцендентными функциями t относительно поля основных функций k. В дальнейшем нули дифференцирования D будем называть полем рациональных интегралов системы (1). Если это поле не сводится к полю констант поля K, то система допускает рациональные интегралы, их коэффициенты представляют собой некоторые аналитические функции переменной t, которые порождают над k поле, именуемое далее полем коэффициентов интегралов. Базис трансцендентности этого поля над k будем называть трансцендентами, вводимые интегрированием системы.

Например, дифференциальное уравнение

$$\dot{x}^2 = 2t(4x^3 - g_2x - g_3) \quad \Rightarrow \quad y = \wp\left(t^2 + C\right) = r\left(\wp(t^2), C\right)$$

имеет общее решение $x = \wp\left(t^2 + C\right) = r\left(\wp(t^2), C\right)$. Поэтому его интегрирование вводит над полем $k = k(t)$ одну трансценденту $\wp(t^2)$.

В механике традиционно интересовались интегралами движения, коэффициенты которых являются алгебраическими функциями t. Между тем случай, когда интегралы являются неалгебраическими функциями, интересен тем, что эти функции можно описать.

Задача 1. *Перечислить операции, необходимые для задания трансцендент, вводимых интегрированием заданной системы дифференциальных уравнений.*

Мы существенно провинимся в решении этой задачи, если опишем автоморфизмы поля интегралов.

Теорема 3. *Поле интегралов системы дифференциальных уравнений эквивалентно полю рациональных функций на гиперповерхности, допускающей непрерывную группу бирациональных автоморфизмов, размерность которой совпадает с числом алгебраически независимых трансцендент, вводимых интегрированием системы дифференциальных уравнений.*

Для доказательства можно употребить хорошо известный в компьютерной алгебре метод, восходящий к знаменитой работе Лиувилля об интегрировании функций в конечном виде [11]. Элементы базиса поля коэффициентов — функции $\alpha_1(t), \dots, \alpha_r(t)$ — удовлетворяют алгебраической системе дифференциальных уравнений. Заменяя функции $\alpha_1(t), \dots, \alpha_r(t)$ в интеграле на любое другое решение этой системы, опять получим интеграл, чем и будет задан автоморфизм поля интегралов.

Вспомним теперь, что группа автоморфизмов произвольной алгебраической кривой конечна (см., например, [12]), таким образом в предложенной версии теории Галуа аналогом разрешимой группы среди конечных групп выступает непрерывная группа автоморфизмов среди автоморфизмов алгебраических многообразий. Описание многообразий над $\mathbb{C}$, допускающих бесконечные группы бирациональных автоморфизмов, было предметом многочисленных изысканий итальянских геометров [13], № 39, путь к приложению которых в теории дифференциальных уравнений открывает доказанная теорема.

Эти геометрические изыскания ведут к тому, что система дифференциальных уравнений допускает рациональные интегралы только в двух случаях, если их коэффициенты выражаются алгебраически через элементы поля основных функций k и

– абелевы функции вида $\mathrm{Al}\left(\int \lambda_1 \mathrm{d}t, \dots, \int \lambda_p \mathrm{d}t\right)$, где λ_k — функции переменной t, алгебраические над k,
– или решения некоторой системы линейных дифференциальных уравнений, коэффициенты которой алгебраичны над k.

Это утверждение и даёт полное решение поставленной задачи 1.

Литература

1. *Borwein J. M., Crandall R. E.* Closed Forms: What They Are and Why We Care // Notices of the AMS. — 2013. — Vol. 60, No 1. — Pp. 50–65.
2. *Painlevé P.* Leçons sur la theorie analytique des equations differentielles. — Paris, 1897. — Reprinted in the first volume of Penleve's work, 1971.
3. *Painlevé P.* Memoire sur les equations differentielles du primier ordre // Annales scientifiques de l'É.N.S., 3e série. — 1890. — T. 8. — C. 9–58. — Reprinted in the 2nd volume of Penleve's work, 1974, pag. 237-461.
4. *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.
5. *Кудряшов Н. А.* Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 2002.
6. Трансценденты Пенлеве. Метод задачи Римана / А. Р. Итс, А. А. Капаев, В. Ю. Новокшенов, А. С. Фокас. — Москва–Ижевск: R & C, 2005.
7. *Соболевский С. Л.* Подвижные особые точки решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — Минск: БГУ, 2006.
8. *Singer M. F.* Liouvillian First Integral of Differential Equations // Transactions of the American Mathematical Society. — 1992. — Vol. 333, No 2. — Pp. 673–688.
9. *Casale G.* Liouvillian First Integrals of Differential Equations // Banach Center Publ. — 2011. — Vol. 94. — Pp. 153–161.
10. *Боголюбов А. Н., Малых М. Д.* Трансцендентные функции, вводимые интегрированием дифференциальных уравнений // Динамика сложных систем — XXI век. — 2010. — № 3. — С. 35–38.
11. *Ritt J. F.* Integration in Finite Terms. — N.-Y., 1949.
12. *Чеборарев Н. Г.* Теория алгебраических функций. — М.: УРСС, 2013.
13. *Castelnuovo G., Enriques F.* Die algebraischen Flächen vom Gesichtspunkte der birationalen Transformationen aus // Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. — 1903–1932. — Bd. III.2.

UDC 517.9

On Integrals of Ordinary Differential Equations Systems which are Representable in Finite Terms

M. D. Malykh

Faculty of Materials Sciences
Lomonosov Moscow State University
GSP-1, Leninskie Gory, Moscow, Russia, 119991
Department of Applied Informatics and Probability Theory
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, Russian Federation, 117198

Existing theories on resolvability of nonlinear differential equations systems in a finite terms are generalization of Galois theory and for this reason the list of elementary operations is subject of the contract. In the Stockholm lectures (1897) Painleve gave on the example of the equations of the 1st and 2nd order property which is common for all equations, solvable in elementary, special and abelian functions: the general solutions of these equations depend on integration constants algebraically. Thus, if we record algebraic properties of the common decision, we can allocate a class of all-usable transcendental functions. This statement can be inscribed in a circle of the theory of Galois, i.e. we can construct the theory for the differential equations without fixing of this list. We consider an arbitrary system of ordinary differential equations $g_1(x_1, \dots, \dot{x}_1) = 0, \dots,$ here $g_1, \dots$ are polynomials from $x_1, \dot{x}_1 \dots,$ which coefficients lie in a field k of functions of a variable t, for example in $k = \mathbb{C}(t)$. This system has solutions in an algebraically closed field K, for example in the field of Puiseux series. We will assume that ideal $\mathfrak{p} = (f_1, \dots)$ of ring $K[x_1, \dots]$ is simple and that there is a differentiation D of the ring the rational functions on affine variety $V(\mathfrak{p}/K)$, which kernel is a field of integrals of the system. Coefficients of integrals generate a field over k. We will designate its transcendence degree as r and prove that there are r-parametrical group of automorphisms for the field of integrals. This theorem will be used for calculation of integrals of these equations.

Key words and phrases: Galois theory, integration in finite terms, abelian integrals, Riccati equation.

References

1. J. M. Borwein, R. E. Crandall, Closed Forms: What They Are and Why We Care, Notices of the AMS 60 (1) (2013) 50–65.
2. P. Painlevé, Leçons sur la theorie analytique des equations differentielles, Paris, 1897, reprinted in the first volume of Painleve's work, 1971.
3. P. Painlevé, Memoire sur les equations differentielles du primier ordre, Annales scientifiques de l'É.N.S., 3e série 8 (1890) 9–58, reprinted in the 2nd volume of Painleve's work, 1974, pag. 237-461.
4. V. V. Golubev, Vorlesungen über Differentialgleichungen im Komplexen, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1958.
5. N. A. Kudrjashov, Analytical Theory of Nonlinear Differential Equations, Nauka, Moscow, 2002, in Russian.
6. A. R. Its, A. A. Kapaev, V. J. Novokshenov, A. S. Fokas, Painleve Transcendent. Method of the Riemann Problem, R & C, Moskva–Izhevsk, 2005, in Russian.
7. S. L. Sobolevskij, Movable Singularities of Solutions of Ordinary Differential Equations, BGU, Minsk, 2006, in Russian.
8. M. F. Singer, Liouvillian First Integral of Differential Equations, Transactions of the American Mathematical Society 333 (2) (1992) 673–688.
9. G. Casale, Liouvillian First Integrals of Differential Equations, Banach Center Publ. 94 (2011) 153–161.
10. A. N. Bogoljubov, M. D. Malyh, On the Transcendental Functions Entered by Integration of the Differential Equations, Dynamics of Complex Systems — XXI Century (3) (2010) 35–38.
11. J. F. Ritt, Integration in Finite Terms, N.-Y., 1949.
12. N. G. Cheborarev, Theory of Algebraic Functions, URSS, Moscow, 2013, in Russian.
13. G. Castelnuovo, F. Enriques, Die algebraischen Flächen vom Gesichtspunkte der birationalen Transformationen aus, Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen III.2.