

# Математическая теория телетрафика

УДК 621.39

## Математическая модель системы стандарта GSM с поддержкой полноскоростных и полускоростных речевых кодеков

Г. П. Башарин, С. Н. Клапоуцак, А. М. Коннон,  
Н. В. Митькина

*Кафедра систем телекоммуникаций  
Российский университет дружбы народов  
ул. Миклухо-Маклая, 6, Москва, Россия, 117198*

Кодирование и передача голоса в двухскоростном режиме в стандарте GSM дают возможность значительно увеличить производительность радиоресурсов в соте. В работе построена математическая модель системы со стягиванием, поддерживающей полноскоростной (Full-Rate, FR) и полускоростной (Half-Rate, HR) режимы. Введён целочисленный порог для ограничения числа вызовов, обслуживаемых в FR-режиме. Выводятся СУГБ для равновесного распределения вероятностей и формулы для расчёта основных ВВХ. На нескольких численных примерах показаны преимущества двухскоростного режима.

**Ключевые слова:** метод множественного доступа TDMA, канал трафика, полноскоростной логический канал, полускоростной логический канал, СтМП, СУГБ, вероятностно-временные характеристики.

## 1. Введение

Цифровой стандарт для мобильной сотовой связи — GSM (Global System for Mobile Communications) — разработан под эгидой Европейского института стандартизации электросвязи (ETSI) в конце 80-х годов и в настоящее время является Федеральным стандартом России. В GSM применяются методы множественного доступа TDMA и FDMA (Time- and Frequency-Division Multiple Access) с целью оптимального распределения ширины полосы между всеми возможными пользователями. За выделение каналов в GSM отвечают приёмопередатчики (Transmitter-Receiver, TRX), установленные на базовых станциях (БС). Каждому приёмопередатчику соответствует комбинация восходящего диапазона (для передачи от Мобильной Станции, МС) и нисходящего диапазона (для передачи от БС) частот. На одной полосе в 200 КГц (частотном канале) одновременно может быть организовано до восьми физических каналов в режиме разделения времени. Дискретной единицей времени при этом является один временной слот, длительность которого составляет 0.577 мс [1]. Восемь последовательных слотов объединяются в один кадр (frame) TDMA (см. рис. 1). Слоты с одним и тем же номером в последовательных кадрах образуют один физический канал или канал трафика (Traffic Chanel, TCH).

Часть общей канальной ёмкости системы используется для передачи служебной информации. Для организации соединения между МС и БС на базе TCH организуются логические каналы [2, гл. 7]. Каждому соединению соответствует один полноскоростной или полускоростной логический канал. Логический канал, использующий слот с одинаковым номером в каждом кадре, будем называть полноскоростным (Full Rate Channel, FR), а логический канал, использующий слот с одинаковым номером в каждом втором кадре, — полускоростным (Half Rate

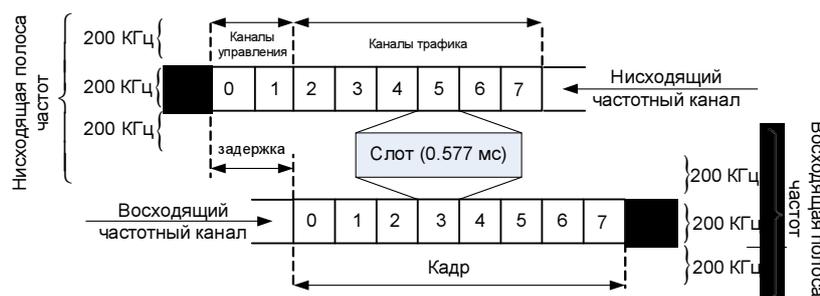


Рис. 1. Принцип каналообразования в системе GSM

Channel, HR). В большинстве современных GSM сетей для организации соответствующих каналов используются расширенный полноскоростной кодек (Enhanced Full Rate codec, EFR) со скоростью передачи 12.2 Кбит/с и полускоростной кодек (Half Rate codec, HR) со скоростью передачи 5.6 Кбит/с [2, гл. 8]. На рис. 2 представлена схема загрузки двух FR-каналов и трёх HR-каналов, т.е. пяти соединений, в четыре ТСН, три из которых загружены полностью, а один — наполовину.



Рис. 2. Схема загрузки логических FR- и HR-каналов в каналы трафика

В статье построена математическая модель системы стандарта GSM, поддерживающей FR и HR-кодеки. Представлены формулы для расчёта основных ВВХ и на численных примерах показана эффективность двухскоростного режима.

## 2. Построение математической модели системы стандарта GSM, поддерживающей полноскоростные и полускоростные каналы

Рассматривается ССПС, состоящая из однотипных сот. Пусть данная система поддерживает только один тип услуг — передачу голоса. В каждой соте выделено  $C$  ТСН для обслуживания абонентской нагрузки ( $C \in N$ ). БС назначен некоторый целочисленный порог  $g$ ,  $0 < g \leq C$ . Выберем соту (сота 1) и рассмотрим её как СМО.

Заявка при поступлении одновременно занимает один ТСН в режиме FR, т.е.  $d_1 = 1$ , если в момент её поступления в системе занято не более чем  $C - g$  ТСН. Как только количество занятых ТСН становится равным или больше  $C - g$ , вновь поступившая заявка принимается на обслуживание и занимает один ТСН в режиме HR, т.е.  $d_2 = 1/2$ . В таком режиме БС функционирует до тех пор, пока количество свободных ТСН не станет больше  $g$ . Будем предполагать в работе, что если ТСН работают в HR-режиме и каждый из них занят только одной HR-заявкой, то обе заявки сразу передаются в один из ТСН, освобождая другой.

Например, ТСН № 5 на рис. 2 способен принять ещё одну НР-заявку. Такой алгоритм функционирования соты 1 определяет СМО, как систему со стягиванием (packing) [3, §5.2].

Поток поступления заявок в соте 1 пуассоновский и имеет постоянную интенсивность  $\lambda$ . Время занятия заявкой  $d_k$  каналов,  $k = 1, 2$ , в соте 1 распределено по экспоненциальному закону с параметром  $\mu$ . По завершении обслуживания в соте 1 заявка покидает систему, не оказывая влияние на её дальнейшее функционирование.

Если в момент поступления заявки на БС оказались заняты полностью все  $C$  ТСН, то поступившая заявка получает отказ и теряется, не оказывая дополнительного влияния на интенсивность поступления породившего её пуассоновского потока. Если же в момент поступления полностью заняты  $C - 1$  ТСН, а один ТСН занят наполовину, то заявка будет принята и получит один НР-канал.

В данной работе подробно рассматривается наиболее важный с практической точки зрения случай  $d_1 = 1, d_2 = 1/2$ , хотя все результаты могут быть легко обобщены на случай произвольных  $d_1$  и  $d_2$ .

Определим вектор  $\vec{n} = (n_1, n_2)$ , описывающий состояние системы, где  $n_1 = 0, 1, \dots, C - g$  — число заявок, обслуживаемых FR-каналами,  $n_2 = 0, 1, \dots, 2C$  — число заявок, обслуживаемых НР-каналами. Пространство  $\Omega$  всех возможных состояний системы имеет вид:

$$\Omega := \{ \vec{n} : n_1 = 0, 1, \dots, C - g, n_2 = 0, 1, \dots, u(g) \cdot 2C; n_1 + (1/2)n_2 \leq C \}, \quad (1)$$

$$|\Omega| = (C + g + 1)(C - g + 1).$$

В режиме со стягиванием  $\vec{d}^T \vec{n} = \sum_{k=1}^2 d_k n_k =: U(\vec{n})$  — число занятых ТСН, а  $n_{\bullet} = n_1 + n_2$  — число обслуживаемых заявок, т.е. число занятых логических каналов в состоянии  $(n_1, n_2) \in \Omega$ .

Описанную моносервисную двухскоростную модель функционирования соты 1 будем обозначать как  $\begin{array}{c|c|c} M & M & C, g \\ \lambda & \mu & d_1, d_2 \end{array} \Big| 0$ . Её схематическое изображение представлено на рис. 3.

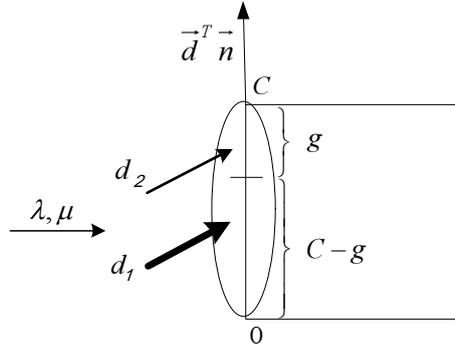


Рис. 3. Схема функционирования соты

Подпространства приёма и блокировки заявок имеют вид:

$$S := \{ \vec{n} \in \Omega : \vec{d}^T \vec{n} < C \}, \quad |S| = |\Omega| - |\bar{S}| = (C - g + 1)(C + g),$$

$$\bar{S} := \{ \vec{n} \in \Omega : \vec{d}^T \vec{n} = C \}, \quad |\bar{S}| = C - g + 1, \quad (2)$$

а подпространства приёма заявок в FR- и HR-режимах соответственно:

$$\begin{aligned} S_1 &:= \left\{ \vec{n} \in \Omega : \vec{d}^T \vec{n} < C - g \right\}, \quad |S_1| = (C - g + 1)(C - g), \\ S_2 &:= S \setminus S_1 = \left\{ \vec{n} \in \Omega : C - g \leq \vec{d}^T \vec{n} \leq C - 1/2 \right\}, \\ |S_2| &= |S| - |S_1| = 2g(C - g + 1). \end{aligned} \quad (3)$$

В случае  $g = 0$  получим односкоростную FR-систему, поведение которой описывается моделью Эрланг-В с параметрами  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$  и  $C$ . В случае  $g = C$  — односкоростную HR-систему, поведение которой описывается моделью Эрланг-В с параметрами  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$  и  $2C$ , что физически очевидно.

### 3. Построение СтМП и СУГБ

Процесс функционирования данной системы описывается двумерным СтМП  $\vec{X}(t) = (X_1(t), X_2(t))$ ,  $t \geq 0$ , с пространством состояний  $\Omega$ , где  $X_k(t)$  — число  $k$ -заявок в системе в момент времени  $t \geq 0$ ,  $k = 1, 2$ . Диаграмма интенсивностей переходов процесса представлена на рис. 4.

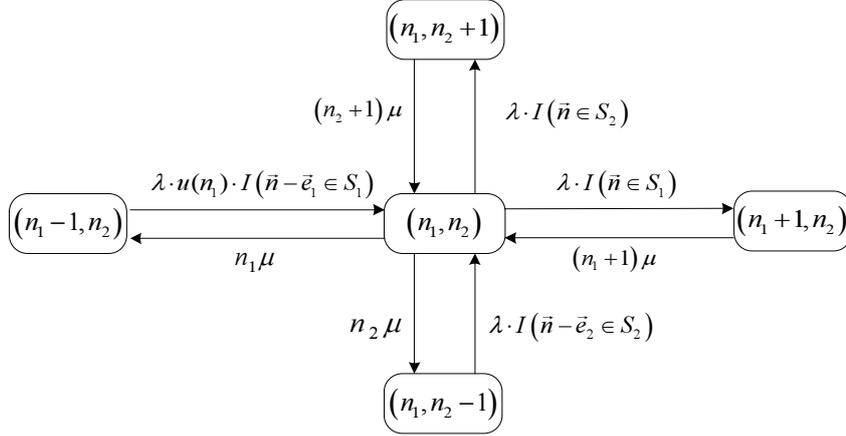


Рис. 4. Диаграмма интенсивностей переходов процесса  $\vec{X}(t)$ ,  $\vec{n} \in \Omega$

Пусть  $p(\vec{n}) := P\{\vec{X} = \vec{n}\}$ ,  $\vec{n} \in \Omega$ , — равновесная вероятность состояния  $\vec{n}$ . Используя диаграмму интенсивностей переходов, (2), (3) и полагая  $p(\vec{n}) = 0$ ,  $\vec{n} \notin \Omega$ , запишем СУГБ в виде:

$$\begin{aligned} p(\vec{n}) (n_{\bullet} \mu + \lambda \cdot I(\vec{n} \in S)) &= \sum_{k=1}^2 p(\vec{n} - \vec{e}_k) I(\vec{n} - \vec{e}_k \in S_k) \lambda + \\ &+ \sum_{k=1}^2 p(\vec{n} + \vec{e}_k) I(\vec{n} \in S_k) (n_k + 1) \mu, \vec{n} \in \Omega. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $I(\cdot)$  — функция-индикатор выполнения события в скобках, а  $\vec{e}_1 = (1, 0)$ ,  $\vec{e}_2 = (0, 1)$  — единичные вектора.

Пусть  $\pi$  — вероятность того, что вновь поступившая заявка застанет систему в макросостоянии  $\bar{S} = \bar{S}_1 \cap \bar{S}_2$  и будет заблокирована. Тогда

$$\pi := \sum_{\vec{n} \in \bar{S}} p(\vec{n}). \quad (5)$$

Среднее число занятых ТСН всеми вызовами равно [3, §2.6]:

$$UTIL := E(U(\vec{n})) = \sum_{\vec{n} \in \Omega} p(\vec{n}) \sum_{k=1}^2 n_k d_k. \quad (6)$$

Можно заметить, что описанная модель не является частным случаем адаптивной многоскоростной системы, рассмотренной в [4], поскольку интенсивность обслуживания заявок остаётся постоянной независимо от скорости передачи.

Для данной модели не выполняется свойство мультипликативности в невырожденных случаях  $0 < g < C$ . Проиллюстрируем это на примере системы  $C = 2$ ,  $g = 1$ ,  $d_1 = 1$ ,  $d_2 = 1/2$ .

На рис. 5 представлен размеченный граф интенсивностей переходов соответствующего процесса  $\vec{X}(t)$ .

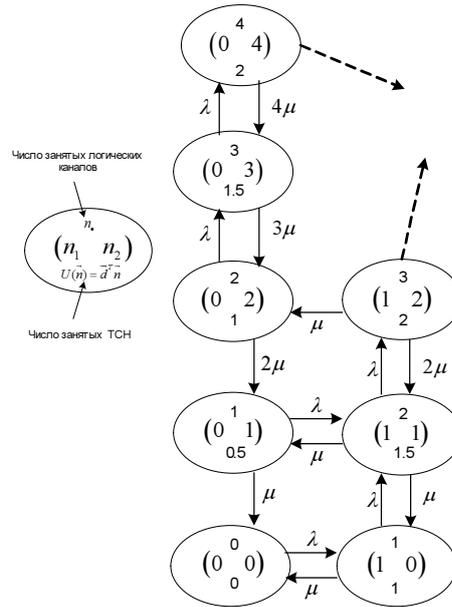


Рис. 5. Граф интенсивностей переходов процесса  $\vec{X}(t)$  при  $C = 2$ ,  $g = 1$ ,  $d_1 = 1$ ,  $d_2 = 1/2$

Как видно из рис. 5, для контура состояний  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(1,1)$  не выполняется критерий Колмогорова [3, прил. В]:

$$\begin{aligned} a_{(0,0)(0,1)} a_{(0,1)(1,1)} a_{(1,1)(1,0)} a_{(1,0)(0,0)} &= 0 \cdot \lambda \cdot \mu \cdot \mu \neq \\ &\neq \lambda \cdot \lambda \cdot \mu \cdot \mu = a_{(0,0)(1,0)} a_{(1,0)(1,1)} a_{(1,1)(0,1)} a_{(0,1)(0,0)}. \end{aligned}$$

Описанный пример подтверждает отсутствие мультипликативности при  $0 < g < C$  и в случае произвольных  $d_1 \neq d_2$ . Таким образом, ВВХ могут быть найдены лишь после вывода и численного решения СУГБ (3), порядок которой очень быстро возрастает с ростом значений структурных параметров. Однако часто удаётся найти специальные подходы, позволяющие использовать эффективные численные методы расчёта ВВХ.

Разобьём множество состояний  $\Omega$  на подмножества  $G_i := \{(n_1, n_2) \in \Omega : n_1 + n_2 = i\}$ ,  $i = \overline{0, 2C}$ . Упорядочив множества  $G_i$ ,  $i = \overline{0, 2C}$  по возрастанию индекса, а состояния внутри каждого множества по возрастанию  $n_1$ , приводим матрицу  $A$  интенсивностей переходов СтМП  $\vec{X}(t)$  к блочно-трёхдиагональному, т.е. квазиакобиеву виду, что позволяет решить СУГБ методом LU-разложения [5]. Возможен также поиск параметров модели с трёхдиагональной, т.е. якобиевой матрицей  $A$ , аппроксимирующей исходную модель с квазиакобиевой матрицей  $A$ . Соответствующие примеры приводятся в [6, 7].

### 4. Пример численного анализа

Рассмотрим модель системы со структурными параметрами, представленными в табл. 1.

Исходные данные для численного примера

Таблица 1

C	2			3			
g	0	1	2	0	1	2	3

Так как в системе отсутствует мультипликативность, для проведения точных расчётов ВВХ будем решать СУГБ (3) методом LU-разложения, когда  $0 < g < C$ .

Случай  $g = 0$  соответствует модели Эрланга  $M | M | C$ , а случай  $g = C$  — модели  $M | M | 2C$ .

На рис. 6 и 7 приведены графики, отображающие зависимость вероятности блокировок от нагрузки для разных значений  $C = 2$  и  $C = 3$  соответственно при всех возможных значениях порога  $g = \overline{0, C}$ .

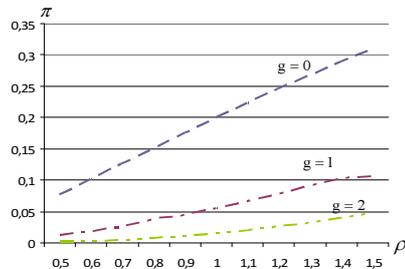


Рис. 6. Графики зависимости π от ρ при C = 2

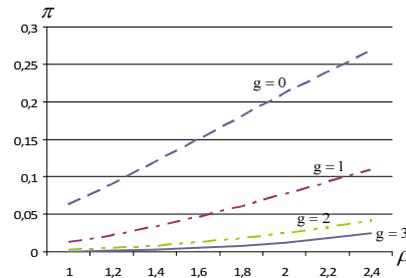


Рис. 7. Графики зависимости π от ρ при C = 3

Из графиков видно, что использование НР-режима позволяет значительно снизить вероятность блокировок в сравнении с односкоростной FR-системой ( $g = 0$ ).

С помощью рис. 8 и 9 можно убедиться, что введение двухскоростного режима позволяет, кроме того, значительно уменьшить используемую ширину полосы частот при фиксированной нагрузке.

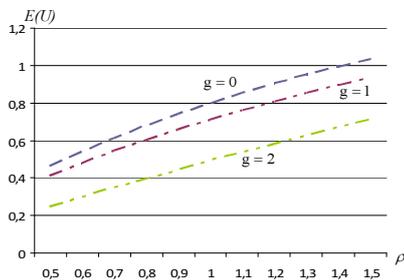


Рис. 8. Графики зависимости E(U) от ρ при C = 2

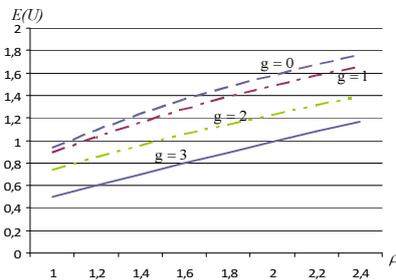


Рис. 9. Графики зависимости E(U) от ρ при C = 3

Максимальный выигрыш по обоим показателям достигается в случае полного использования НР-режима, т.е. когда  $g = C$ , но при этом, в зависимости от радиообстановки, может ухудшиться восприятие речи абонентом [8].

## 5. Заключение

В настоящей статье построена математическая модель адаптивной двухскоростной системы, поддерживающей полноскоростной (FR) и полускоростной (HR) режимы. Было исследовано влияние HR-режима на производительность соты стандарта GSM. На основании численных примеров можно сделать вывод о том, что передача голоса в двухскоростном режиме в стандарте GSM даёт возможность повысить эффективность использования радиоресурсов в соте, но при этом могут ухудшиться показатели восприятия качества речи на уровне пользователя (QoE — Quality of Experience). Этот вопрос приобретает особую роль в сетях следующего поколения (NGN) [9, раздел 2.1.1] и нуждается в дополнительном исследовании с использованием статистических данных операторов ССПС [1, App. B].

## Литература

1. *Halonen T., Romero J., Melero J.* GSM, GPRS and EDGE Performance: Evolution Towards 3G/UMTS. — 2nd edition. — Jhon Wiley and Sons, 2003.
2. *Весоловский К.* Системы подвижной радиосвязи. — М.: Горячая линия-Телеком, 2006.
3. *Башарин Г. П.* Лекции по математической теории телетрафика. — 2 издание. — М.: Изд-во РУДН, 2007.
4. *Башарин Г. П., Клапоуцак С. Н., Миткина Н. В.* Математическая модель адаптивной многоскоростной системы с эластичным трафиком // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — 2008. — № 3. — С. 31–39.
5. *Наумов В. А.* Численные методы анализа марковских систем. Учебное пособие. — М.: Изд-во УДН, 1985. — 36 с.
6. *Башарин Г. П.* О выводе систем уравнений состояния для двухкаскадных телефонных схем с потерями // Электросвязь. — 1960. — № 1. — С. 56–62.
7. *Башарин Г. П.* Об аналитическом и численном методах исследования коммутационных систем // В сб. статей ИППИ АН СССР «Системы распределения информации». — М.: Наука, 1972. — С. 17–32.
8. *Pedraza S., Romero J., Munoz J.* (E)GPRS Hardware Dimensioning Rules with Minimum Quality Criteria // IEEE Vehicular Technology Society Fall Conference. — 2002. — Pp. 391–395.
9. Системы сигнализации в сетях с коммутацией каналов и пакетов / А. И. Лениников, А. П. Пшеничников, Ю. В. Гайдамака, А. В. Чукарин. — М.: МТУСИ, 2008.

UDC 621.39

### Mathematical Model of Standard GSM System Supporting Full and Half-Rate Speech Codecs

G. P. Basharin, S. N. Klapouschak, A. M. Konnon, N. V. Mitkina

*Telecommunication Systems Department  
Peoples' Friendship University of Russia  
Miklukho-Maklaya str., 6, Moscow, Russia, 117198*

Usage of dual (Full/Half) rate mode in standard GSM system gives the possibility to increase considerably the performance of radio resources in the cell. In this work we develop a mathematical model of a system with repacking, supporting Full-Rate (FR) and Half-Rate (HR) modes. We define a threshold for the number of FR-calls served simultaneously. The balance equations and formulas for QoS parameters are derived. The advantages of dual rate mode usage are shown through numerical examples.