
Математическое моделирование

УДК 519.856.2

Применение методов стохастической микродинамики для исследования равновесия в системах экономического обмена

А. Ю. Попков*, Д. С. Новикова†

* *Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт системного анализа Российской академии наук
Пр-т 60-летия Октября, д. 9, Москва, Россия, 117312*

† *Кафедра информационных технологий
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая д. 6, Москва, Россия, 117198*

Работа посвящена исследованию равновесия в системах экономического обмена с помощью методов стохастической микродинамики (МСМ), основанных на прямом компьютерном моделировании процессов, возникающих и протекающих в системе. МСМ представляют собой обобщение методов молекулярной динамики, и в отличие от последних, направленных на исследование физических систем, МСМ нацелены на исследование систем, состоящих из большого количества частиц, имеющих нефизическое происхождение. Для моделирования исследуемой в работе экономической системы было выбрано агентное моделирование. В связи с тем, что в системе присутствует стохастическая составляющая, проявляющаяся в поведении экономических агентов, для получения достоверных результатов моделирования использовался метод Монте-Карло.

В работе представлена формальная модель исследуемой экономической системы и результаты её компьютерного моделирования для разных входных параметров. В рамках проведённого исследования было обнаружено и исследовано равновесие в многочастичных системах со стохастическим поведением элементов.

Результаты, представленные в работе, могут быть использованы для дальнейшего изучения многоагентных систем и систем экономического обмена.

Ключевые слова: система экономического обмена, имитационное моделирование, методы стохастической микродинамики.

1. Введение

Одной из актуальных проблем современной экономической науки является вопрос о взаимосвязи микро- и макроэкономических процессов. При этом предполагается специфическое устройство исследуемого объекта (экономики), который содержит большое количество экономически мотивированных агентов, имеющих определённые индивидуальные свойства и взаимодействующих друг с другом. Изменение во времени состояния экономических агентов происходит как под влиянием собственных «динамических» характеристик, так и в результате взаимодействия с другими агентами, которые реализуются в определённой экономической среде. Экономическая система в целом приобретает «системные» свойства, отличные от индивидуальных свойств экономических агентов.

Динамика рассматриваемой системы реализуется на двух уровнях: макроуровне (уровень системы в целом) и микроуровне (уровень экономических агентов). Состояние системы характеризуется параметрами (макропоказателями), в терминах которых рассматриваются временные свойства процессов (макропроцессов) в экономической системе. Таким образом, микро- и макропроцессы образуют своеобразный замкнутый контур: микропроцессы трансформируются в макропроцессы («прямая» связь), на основе которых формируется экономическая среда, влияющая на микропроцессы экономических агентов («обратная» связь) [1].

Исследуемая проблема принадлежит к классу более общих проблем, связанных с соотношением индивидуального и коллективного, которые изучаются в различных отраслях науки [2–6]. Однако влияние макроограничений на поведение элементов микроуровня, стохастичность процессов в различных временных шкалах, на микро- и макроуровнях и др. оставались вне поля зрения исследователей. В то же время они оказываются принципиальными как раз при изучении нефизических систем.

Определённый вклад в изучение соотношения индивидуального и коллективного внесла теория макросистем, построенная на обобщённом вариационном принципе максимизации энтропии на компактных множествах, в терминах которого определяется понятие равновесного состояния [7].

Настоящая работа посвящена экспериментальному исследованию возникновения равновесного состояния в системе экономических агентов со стохастическим поведением. Для исследования таких систем в [8] предлагается использовать методы стохастической микродинамики (МСМ), направленные на прямое компьютерное моделирование, состоящее в имитации процессов, происходящих в системе с большим количеством взаимодействующих элементов со стохастическим поведением.

2. Математическая модель системы экономического обмена

Рассмотрим систему, состоящую из большого количества N экономически мотивированных (экономических) агентов. Экономическими агентами могут быть как физические, так и юридические лица, обладающие товаром для продажи и некоторым капиталом. Товарами могут быть как материальные, так и сырьевые ресурсы. В работе рассматриваются системы с одним видом товара.

Рассматриваемая система функционирует в двух временных шкалах: «быстрого» и «медленного» времени. В шкале «быстрого» времени реализуется микродинамика системы, определяемая индивидуальными свойствами агентов и в результате их взаимодействия. Макродинамика системы реализуется в шкале «медленного» времени.

Предполагается, что каждый экономический агент i в каждый момент времени t может находиться в роли продавца или в роли покупателя и обладает некоторым количеством товара $n_i(t)$, денег $m_i(t)$ и определённой ценой своего товара $v_i(t)$.

Агенты действуют в экономической среде и обладают индивидуальным поведением при принятии решений. Такое поведение определяется двумя параметрами: количеством товара $u_i(t)$, которое планирует продать агент, находясь в роли продавца, и количеством денег $w_i(t)$, которое планирует потратить агент, находясь в роли покупателя. Таким образом, состояние агента i описывается вектором:

$$x_i(t) = \{n_i(t), m_i(t), v_i(t), u_i(t), w_i(t)\}, \quad i = \overline{1, N}.$$

Собственная динамика агента определяется случайным изменением цены товара, по которой агент готов продать единицу товара в момент времени t , и описывается стохастическим уравнением:

$$v_i(t+1) = v_i(t) + \eta_i(t), \quad i = \overline{1, N},$$

где $\eta_i(t)$ является нормально распределённой случайной величиной со средним μ и дисперсией σ^2 .

Взаимодействие агентов состоит в совершении сделки купли-продажи. Агенты взаимодействуют друг с другом, продавая и покупая товар. Роль агентов в сделке (продавец или покупатель) устанавливается случайным образом, рассматриваются только парные взаимодействия. В каждый момент «быстрого» времени могут взаимодействовать $Q < N$ агентов, составляющих *группу взаимодействия*. Группа взаимодействия состоит из S продавцов и B покупателей, при этом $S + B = Q$.

Предполагается, что сделка между агентами с номерами i и j может быть осуществлена в соответствии с априорной вероятностью p_{ij} . Взаимодействие агента с самим собой невозможно. Априорные вероятности определяют матрицу взаимодействия:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p_{12} & \dots & p_{1N} \\ p_{21} & 0 & \dots & p_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N1} & p_{N2} & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

где $p_{ij} = p_{ji}, p_{ii} = 0, i = \overline{1, N}, j = \overline{1, N}$. Матрица взаимодействия изменяется в шкале медленного времени. В каждый момент времени информация о том, совершится сделка между парой агентов с номерами i и j или нет, представлена симметрической матрицей $\Xi = \xi_{ij}$, элементы которой являются случайными величинами с биномиальным распределением:

$$\xi_{ij} = \text{Bin}(1, p_{ij}), \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, N},$$

где $\xi_{ij} = \xi_{ji}, \xi_{ii} = 0, i = \overline{1, N}, j = \overline{1, N}$.

Обозначим через i агента-покупателя, через j — агента-продавца. Сделка купли-продажи между двумя агентами состоит в том, что продавец продаёт покупателю фиксированное количество a единиц товара по некоторой цене z_{ij} , которая определяется по формуле:

$$z_{ij}(t) = \varepsilon(x_i, x_j, t)v_i(t) + (1 - \varepsilon(x_i, x_j, t))v_j(t),$$

где функция $\varepsilon(x_i, x_j, t)$ определяет ценообразование сделки и может принимать значения из отрезка $[0, 1]$, x_i и x_j — состояния взаимодействующих агентов. В модели, рассматриваемой в настоящей работе $\varepsilon(x_i, x_j, t) = \alpha = 0,5$. Таким образом, изменение состояния агентов в результате совершения сделки может быть описано следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} n_i(t+1) &= n_i(t) + \xi_{ij} a, & m_i(t+1) &= m_i(t) - \xi_{ij} a z_{ij}(t), \\ n_j(t+1) &= n_j(t) - \xi_{ji} a, & m_j(t+1) &= m_j(t) + \xi_{ji} a z_{ij}(t). \end{aligned}$$

Сделка возможна тогда и только тогда, когда у покупателя есть необходимое количество денег, чтобы заплатить за товар по условленной цене, а у продавца — необходимое количество товара для продажи. Поэтому имеют место следующие естественные ограничения на возможность совершения сделки:

$$n_j(t) \geq a, \quad m_i(t) \geq a z_{ij}(t).$$

Наряду с этими ограничениями существуют дополнительные ограничения, определяемые на основании индивидуальных характеристик агентов, участвующих в сделке. Предполагается, что покупатель i после совершения сделки не должен потратить больше, чем он планировал изначально, продавец j после совершения сделки не должен продать больше, чем он планировал изначально. Ожидания покупателя и продавца описываются, соответственно, следующими соотношениями:

$$u_j(t) \geq a, \quad w_i(t) \geq a z_{ij}(t),$$

где $w_i(t)$ — количество денег, которое планирует потратить агент i , находясь в роли покупателя, в момент времени t , и $u_j(t)$ — количество товара, которое планирует продать агент j , находясь в роли продавца, в момент времени t .

В результате совершения сделки происходит изменение индивидуальных характеристик агентов i и j , определяемое соотношениями:

$$u_j(t+1) = u_j(t) - a, \quad w_i(t+1) = w_i(t) - a z_{ij}(t).$$

Предполагается, что покупатели выбирают продавца исходя из того, насколько выгодна сделка с каждым из них. Сделка тем более выгодна, чем меньше затрат несёт покупатель при её совершении. Затраты покупателя определяются тем, сколько ему нужно заплатить за товар у того или иного продавца, и описываются соотношением:

$$I_{ij}(t) = \xi_{ij} a z_{ij}(t), \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, N}.$$

Таким образом, в момент времени t будут взаимодействовать только те пары продавец-покупатель, для которых

$$(i, j) = \arg \min_{i \in J_B, j \in J_S} I_{ij},$$

где i, j — индексы покупателя и продавца соответственно, J_B, J_S — множества индексов покупателей и продавцов в группе взаимодействия.

Важной особенностью экономических систем является наличие такого феномена, как инфляция. Одним из результатов действия инфляции является понижение стоимости денег и, как следствие, повышение уровня цен. Если рассматривать инфляцию как некоторый процесс, протекающий в экономической системе и оказывающий воздействие на экономику, то можно отметить, что этот процесс является более медленным, чем процесс взаимодействия экономических агентов, поэтому его воздействие реализуется в шкале «медленного» времени. Изменение состояния агентов под действием инфляции определяется следующим образом:

$$v_i(t+1) = v_i(t) (1 + \gamma(t)),$$

где функция $\gamma(t)$ определяет уровень инфляции и может принимать значения из отрезка $[0, 1]$, t — момент в шкале «медленного» времени.

3. Основные результаты

Моделирование динамики системы проводилось на интервале $[0, T]$ в шкале «быстрого» времени. На микроуровне системы каждый агент движется по своей собственной траектории в пространстве состояний. Совокупность этих траекторий составляет траекторию движения системы на микроуровне и может быть представлена вектором: $x(t) = \{x_1(t), \dots, x_N(t)\}^T$, $t \in [0, T]$.

В связи с тем, что поведение агентов в рассматриваемой модели имеет стохастическую составляющую, для получения достоверных результатов моделирования необходимо использовать метод статистических испытаний (метод Монте-Карло) [9].

При проведении s испытаний результатом будет ансамбль траекторий движения агентов в пространстве состояний: $X(t) = \{x^1(t), \dots, x^s(t)\}$, $t \in [0, T]$, где $x^k(t) = \{x_1^k(t), \dots, x_N^k(t)\}$, $k = \overline{1, s}$.

В силу того, что последовательность одинаково распределённых случайных величин, у которых существуют математические ожидания, подчиняется закону больших чисел, то среднее арифметическое этих величин сходится по вероятности к их математическому ожиданию [9]. Таким образом, средние значения вектора состояния агента i в момент времени t для s испытаний можно вычислить следующим образом:

$$\bar{x}_i(t) = \frac{1}{s} \sum_{k=1}^s x_i^k(t), \quad i = \overline{1, N}, \quad t \in [0, T].$$

После применения операции осреднения получим среднюю траекторию движения всех агентов системы: $\bar{x}(t) = \{\bar{x}_1(t), \dots, \bar{x}_N(t)\}$, $t \in [0, T]$, где $\bar{x}_i(t) = \{\bar{n}_i(t), \bar{m}_i(t), \bar{v}_i(t), \bar{u}_i(t), \bar{w}_i(t)\}$, $i = \overline{1, N}$.

Пусть $f = \max_{i=\overline{1, N}} \bar{m}_i(t)$, $t \in [0, T]$, где $\bar{m}_i(t)$ — среднее по ансамблю значение вектора состояния агента i по координате m , определяющее количество денег у агента. Тогда в зависимости от выбранного числа финансовых уровней h интервал $[0, f]$, разбивается на h отрезков одинаковой длины. Финансовые уровни представляют собой множества, которым может принадлежать или не принадлежать агент. Распределение агентов по финансовым уровням в каждый момент времени определяет макросостояние системы [7].

Объектом исследований была система, состоящая из 100 экономических агентов. Моделирование проводилось для трёх различных наборов параметров (см. табл. 1) при 4500 шагах в шкале «быстрого» времени (300 шагов в шкале «быстрого» времени и 15 — в шкале «медленного»), 200 испытаниях Монте-Карло и 6 финансовых уровней. Максимальное количество единиц товара, участвующего в сделке, равно 4.

Таблица 1

Параметры модели

| № | B | S | Товар (ед.) | Деньги (ед.) |
|---|-----|-----|-------------|--------------|
| 1 | 80 | 5 | 100 000 | 1 000 000 |
| 2 | 60 | 20 | 100 000 | 1 000 000 |
| 3 | 80 | 5 | 10 000 | 1 000 000 |

На рис. 1–3 представлена динамика макросостояния системы (распределения агентов по финансовым уровням) для трёх вариантов параметров модели. По оси x откладывается время, по оси y — число агентов. Каждый график соответствует отдельному финансовому уровню.

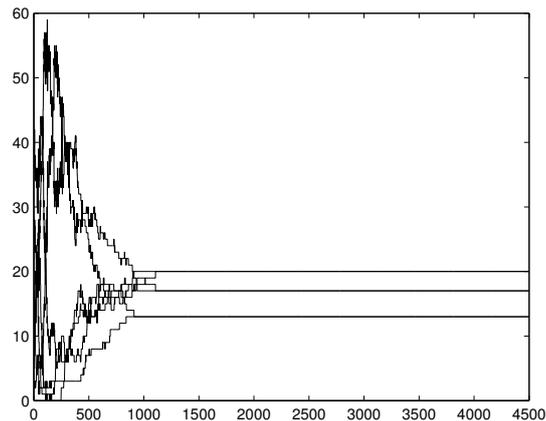


Рис. 1. Распределение агентов по финансовым уровням (для 1 набора параметров)

Как видно из приведённых на рис. 1–3 графиков, начиная с некоторого момента времени, число агентов, принадлежащих каждому финансовому уровню, перестаёт меняться, что свидетельствует о наступлении стабилизации макросостояния.

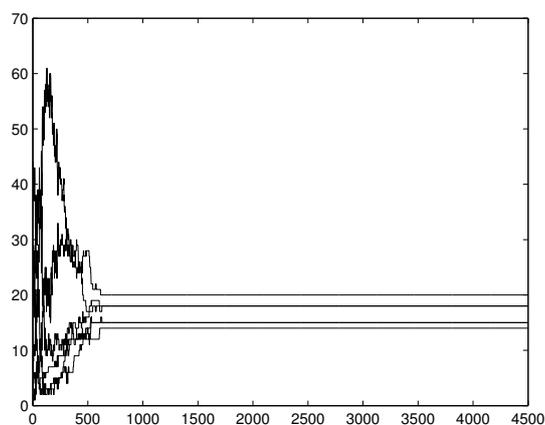


Рис. 2. Распределение агентов по финансовым уровням
(для 2 набора параметров)

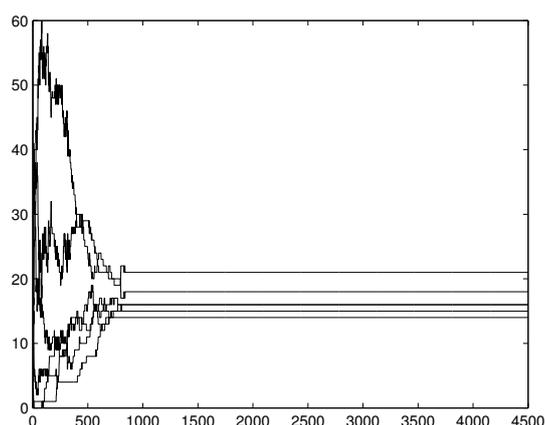


Рис. 3. Распределение агентов по финансовым уровням
(для 3 набора параметров)

Серия компьютерных экспериментов с рассматриваемой моделью показала, что наступление стабилизации макросостояния напрямую зависит от того, какое количество товара и денег находится в системе и насколько быстро происходит перераспределение ресурсов. Чем больше количество ресурсов, денежных и товарных, находящихся в системе, тем больше времени требуется для стабилизации макросостояния. Скорость перераспределения ресурсов, в свою очередь, зависит от размера группы взаимодействия и соотношения числа покупателей и продавцов в ней, задаваемого соответствующим параметром модели. Чем больше размер группы взаимодействия и чем равномернее распределено число покупателей и продавцов в ней, тем быстрее происходит перераспределение ресурсов в системе и тем быстрее её макросостояние стабилизируется. Также перераспределение ресурсов системы напрямую зависит от количества непустых взаимодействий между агентами, особенно на первых временных итерациях.

На рис. 1–2 можно наблюдать зависимость наступления момента стабилизации от распределения ролей внутри группы взаимодействия. На рис. 2 стабилизация

макросостояния наступает раньше, так как соотношение покупателей и продавцов более равномерно (1:3) по сравнению со случаем, отражённом на рис. 1, где соотношение равно 1:16.

Стабилизация макросостояния системы экономического обмена может наблюдаться не только в глобальном смысле, как на рис. 1–3, но и на отдельных участках. Однако со временем длина временного отрезка, на котором наблюдается стабилизация, увеличивается. Одной из основных причин отсутствия стабилизации макросостояния на заданном временном интервале или того, что стабилизация наступает через значительное количество итераций по времени, является медленное перераспределение ресурсов в системе. Удалённость по времени момента наступления стабилизации также может быть связана с тем, что хотя в системе имеются ещё продавцы, которые готовы продать товар и покупатели, готовые его приобрести, не все сделки могут быть заключены, так как может оказаться, что покупатель хочет купить больше, чем предлагает тот или иной продавец. Таким образом, может оказаться, что для каждого отдельного покупателя существует лишь небольшое число продавцов, способных удовлетворить его потребности. В связи с этим может потребоваться значительное количество итераций по времени для того, чтобы покупатель нашёл подходящего продавца. В целом изменение макросостояния системы со временем носит незначительный характер по сравнению с начальными моментами времени, а число взаимодействий между агентами значительно сокращается.

Заключение

В работе проведено исследование равновесия в многочастичных системах со стохастическим поведением элементов. Объектом исследования является система экономического обмена, состоящая из большого количества экономических агентов со стохастическим поведением. Основным инструментом исследования являются методы стохастической микродинамики, основанные на прямом компьютерном моделировании процессов, возникающих в рассматриваемых системах.

В результате работы было экспериментально установлено возникновение равновесного макросостояния, теоретическое обоснование которого дано в рамках теории макросистем.

Результаты, полученные по завершению исследования, могут быть использованы для дальнейшего изучения многоагентных систем и систем экономического обмена.

Литература

1. Попков Ю. С. Стохастическая микро- и макродинамика пространственного экономического обмена // Информационные технологии и вычислительные системы. — 2011. — № 4. — С. 3–15.
2. Meerkov S. M. Mathematical Theory of Behavior – Individual and Collective Behavior of Reversible Elements // Mathematical Bioscience. — 1979. — Vol. 43. — Pp. 41–106.
3. Haken H. Synergetics. — Heidelberg: Springer-Verlag, 1974.
4. Prigogine I., Stengers I. Order out of Chaos. — London: Heinemann, 1984.
5. Weidlich W., Haag G. Interregional Migration: Dynamic Theory and Comparative Analysis. — Berlin: Springer-Verlag, 1988.
6. Вайдлих В. Социодинамика. Системный подход к моделированию в социальных науках. — Москва: УРСС, 2004.
7. Попков Ю. С. Теория макросистем. — Москва: УРСС, 1999.
8. Деуреченская М. А., Попков А. Ю. и др. Модели и алгоритмы стохастической микродинамики // Труды ИСА РАН. — 2011. — Т. 61. — С. 14–30.
9. Соболев И. М. Численные методы Монте-Карло. — Москва: Наука, 1973.

UDC 519.856.2

Application of the Methods of Stochastic Micro Dynamics to the Research of Stability in the Systems of Economic Exchange

A. Y. Popkov*, D. S. Novikova†

* *Institute for Systems Analysis of the Russian Academy of Sciences
9, pr. 60-letiya Oktyabrya, Moscow, Russian Federation, 117312*

† *Department of Information Technologies
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, Russian Federation, 117198*

The paper is devoted to the research of stability in the systems of economic exchange with the use of the stochastic micro dynamics methods (SMDM) based on the direct computer simulation of the processes progressing in the system. SMDM are derived from the molecular dynamics methods and are supposed to be used for the research of the systems which consist of a great number of particles of non-physical nature. For the simulation of economic system we have chosen agent simulation. Because of the stochastic component in the system which appears in the agent's behaviour there was need to use Monte Carlo method to get reliable results of the simulation.

The paper presents the formal model of the economic system which was the main test subject of the research work and results of its computer simulation with the different sets of input parameters.

The results presented in the paper are supposed to be used for the future research of the multi-agent systems which components have non-physical origin.

Key words and phrases: system of economic exchange, simulation modeling, methods of stochastic micro dynamics.

References

1. Yu. S. Popkov, Stochastical Micro- and Macrodynamics of Spatial Economic Exchange, *Information Technology and Computing* (4) (2011) 3–15, in Russian.
2. S. M. Meerkov, Mathematical Theory of Behavior – Individual and Collective Behavior of Reyardable Elements, *Mathematical Bioscience* 43 (1979) 41–106.
3. H. Haken, *Synergetics*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1974.
4. I. Prigogine, I. Stengers, *Order out of Chaos*, Heinemann, London, 1984.
5. W. Weidlich, G. Haag, *Interregional Migration: Dynamic Theory and Comparative Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
6. V. Vaidlikh, *Sociodynamics. Systematic Approach to Modeling Social Sciences*, URSS, Moscow, 2004, in Russian.
7. Yu. S. Popkov, *Theory of Macrosystems*, URSS, Moscow, 1999, in Russian.
8. M. A. Dvurechenskaya, A. Yu. Popkov, Yu. S. Popkov, E. Yu. Shklovskiy, Models for Stochastic Microdynamics (Survey and Some Problems), *Proceedings of ISA RAS* 61 (2011) 14–30, in Russian.
9. I. M. Sobol, *Numerical Monte Carlo Methods*, Nauka, Moscow, 1973, in Russian.