СОСТОЯНИЯ ИЗМЕРЕННОЙ НАБЛЮДАЕМОЙ С МИНИМАЛЬНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

Зорин А.В.

Российский университет дружбы народов, alvalzor@yandex.ru

Из обобщенного соотношения неопределенностей теории квантовых измерений следует, что точность измерения даже одной, отдельно взятой наблюдаемой, в общем случае ограничена, чему нет аналога в общепринятой квантовой механике. Состояния минимальной неопределенности физической величины в механике квантовых измерений являются решениями нелинейного уравнения. Приближенные численные решения находятся методом условной минимизации нулевого порядка с добавкой регуляризирующего члена.

Ключевые слова: обобщенное соотношение неопределенностей, состояния с минимальной дисперсией, решения нелинейного уравнения, метод условной минимизации нулевого порядка.

Введение

В работах Курышкина В.В. сформулировано обобщенное соотношение неопределенностей для измеренных значений квантовой наблюдаемой (см., например, [1]). Принцип неопределенности Гейзенберга был основан на анализе мысленного эксперимента с микроскопом на γ - излучении [2]:

$$\varepsilon(Q)\eta(P) \geq \hbar/2, \tag{1}$$

где $\varepsilon(Q)$ - средняя ошибка измерения положения, а $\eta(P)$ - среднее возмущение значения импульса. Принцип неопределенности в формулировке В. Гейзенберга противоречит теореме Вигнера-Араки-Яназе [3]. М. Озава на основе более глубокого анализа процедуры квантового измерения вывел обобщенное соотношение неопределенностей:

$$\varepsilon(A)\eta(B)+\varepsilon(A)\sigma(B)+\sigma(A)\eta(B) \geq [A,B] \quad 2, \tag{2}$$

где $\sigma^2(A)=\langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2$, справедливое для всех наблюдаемых A, B, любого состояния $| \rangle$ системы и любого «измерительного прибора» [4]. Заметим, что модель квантовых измерений Озавы, эквивалентная операциональной модели квантовых измерений и статистической модели квантовых измерений Холево, совпадает с моделью квантовой механики с неотрицательной квантовой функцией распределения Курышкина [5-6]. При этом соотношение неопределенностей (2) совпадает с соотношением неопределенностей Курышкина [7-8].

Основная часть

Основной задачей общепринятой квантовой механики, описывающей изолированные квантовые объекты, является задача на собственные значения и собственные функции (векторы в функциональном пространстве):

$$O_W(H)\psi = E\psi \tag{3}$$

Здесь $O_W(H)$ - оператор, построенный по правилу квантования Вейля для классической наблюдаемой H. Задача на собственные значения и собственные функции:

$$O_\rho(H)\psi_\rho = E_\rho\psi_\rho \tag{4}$$

имеет важное значение и в механике квантовых измерений. Здесь $O_\rho(H)$ оператор измеренной наблюдаемой, построенный по правилу квантования Вейля-Курышкина из классической наблюдаемой H, где ρ - состояние измерительного прибора [6]. Однако, в отличие от аналогичной задачи в общепринятой квантовой механике, собственные значения определены в состояниях ψ_ρ с ненулевой дисперсией $\sigma_\rho(H)$. Естественным образом, поэтому, не менее важное значение в механике квантовых измерений принимает задача отыскания состояний, обеспечивающих минимальную дисперсию измеренной наблюдаемой:

$$\sigma_\rho^2(A) = \langle O_\rho(A^2)\rangle - \langle O_\rho(A)\rangle^2 \tag{5}$$

Задача минимизации функционала (5) исследовалась в работах Курышкина В.В. и его учеников (см. например, [7]). Воспользуемся следующими утверждениями [9].

Теорема. В квантовой механике с неотрицательной квантовой функцией распределения минимальная неопределенность (дисперсия) $\sigma^2_\rho(A)$ любой физической величины A достигается в чистых состояниях.

Теорема. Если в некотором чистом состоянии ψ_ρ дисперсия (5) физической величины A достигает минимума, то волновая функция ψ_ρ удовлетворяет уравнению:

$$\left\{O_\rho\left(A^2\right) - 2\alpha O_\rho(A) + \alpha^2\right\}\psi_\rho = \sigma_\rho^2(A)\psi_\rho \tag{6}$$

где $\alpha = \langle\psi_\rho|O_\rho(A)|\psi_\rho\rangle$.

В работе [10] проведено численное исследование состояний с минимальной дисперсией механики квантовых измерений, незначительно отклоняющихся от соответствующих состояний с минимальной дисперсией в общепринятой квантовой механике. Данное рассмотрение обусловлено тем фактом, что спектральные характеристики измеренных наблюдаемых стремятся к спектральным характеристикам изолированных наблюдаемых при стремлении к нулю возмущения наблюдаемых, вносимого процедурой измерения [7, 9]. В случае, когда такое возмущение не является исчезающе малым, подобное исследование следует производить с помощью условной минимизации надлежащим образом построенной целевой функции, включающей в себя невязку и регуляризирующую штрафную составляющую. В качестве начальных точек минимизации, как и в работе [10] удобно выбирать соответствующие состояния с минимальной дисперсией в общепринятой квантовой механике. В качестве метода минимизации предложено использовать метод Нелдера-Мида.

Заключение

В работе исследованы состояния с минимальной дисперсией измеренных квантовых наблюдаемых, принимающие важное значение в механике квантовых измерений. Показано, что такие состояния удовлетворяют нелинейному уравнению. Предложен устойчивый метод решения данного уравнения, использующий как аналитические, так и численные вычисления на компьютере.

Литература

1. *Kuryshkin V. V.* Some problems of quantum mechanics possessing a non-negative phase-space distribution function // Int. J. Theor. Phys., 1973. – V. 7, N 6. – P. 451-466.
2. *Heisenberg W.* ̈Uber den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik. Z. Phys. 43, 172-198 (1927).
3. *Ozawa M.* Quantum measuring processes of continuous observables // J. Math. Phys. 25, 79 (1984); Conservation Laws, Uncertainty Relations, and Quantum Limits of Measurements // Phys. Rev. Lett., 88, 050402 (2002).
4. *Ozawa M.* Heisenberg's uncertainty relation: Violation and reformulation. arXiv: 1402.5601.

5. *Ozawa M.* Mathematical foundations of quantum information: Measurement and foundations. arXiv:1203.0927.
6. *Sevastyanov L., Zorin A., Gorbachev A.* A Quantum Measurements Model of Hydrogen-like Atoms in Maple // Lecture Notes in Computer Science. V. 8136, 2013. P. 369-380.
7. *Курышкин В.В., Терлецкий Я П.* О перспективах развития квантовой механики с неотрицательной КФР // Проблемы статистической физики и теории поля, 1976. - М.: УДН.- С. 70-96.
8. *Зорин А.В., Севастьянов Л.А.* Состояния с минимальной дисперсией наблюдаемых в квантовой механике Курышкина.// Вестник РУДН, Физика. 2002, т. 10, №1.-С. 65-84.
9. *Запарованный Ю.И.* Квантово-механический формализм с неотрицательной функцией распределения: Дисс. канд. физ-мат наук. -М.: УДН, 1975. -119 л.
10. *Zorin A.V., Sevastianov L.A., Belomestny G.A.* Numerical search for the states with minimal dispersion in quantum mechanics with non-negative quantum distribution function // Lect. Notes in Comp. Sci., 2005, V.3401, pp. 613-621.

STATES WITH MINIMUM DISPERSION OF MEASURED OBSERVABLES

Zorin A.V.

Peoples' Friendship University of Russia, alvalzor@yandex.ru

From the generalized uncertainty relation of quantum measurements theory follows that the accuracy of measurement of even one individual observable, is limited in general, that there is no analog in conventional quantum mechanics. Minimum uncertainty states of physical quantities in quantum measurements mechanics are solutions of the nonlinear equation. Their approximate numerical solutions are searched by conditional minimization zero-order method with the addition of a regularizing term.

Key words: generalized uncertainty relation, states with minimal dispersion, solution of a nonlinear equation, conditional minimization of zero order method