УДК 519.622.2

Численное решение систем ОДУ с постоянными коэффициентами

Д. А. Ахременков, К. П. Ловецкий

Кафедра систем телекоммуникаций
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо–Маклая, д. 6, Москва, 117198, Россия

В работе сравниваются несколько подходов к решению систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами над полем комплексных чисел, приводятся сравнительные результаты численного и аналитического решения для одной из таких систем.

Ключевые слова: системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, численные методы решения.

1. Методы решения систем дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \hat{A}\vec{y}, \quad \vec{y}(0) = \vec{y}_0, \tag{1}$$

где $\vec{y}(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots y_n(x))^T$ — вектор неизвестных функций, x — независимая переменная; $\hat{A}$ — $(n \times n)$-матрица постоянных коэффициентов, $\vec{y}_0$ — вектор начальных условий.

В зависимости от характеристик матрицы $\hat{A}$ существует несколько подходов к решению системы.

1.1. Все собственные значения различны, собственные вектора независимы

В случае, если для рассматриваемой системы известны все собственные значения $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ матрицы $\hat{A}$, они различны и для этих n значений можно выбрать n линейно независимых векторов $(v_1, v_2, \dots, v_n)$, то, принимая во внимание, что $\vec{y}(x) = \vec{v} \cdot e^{\lambda x}$, получим $\hat{A}\vec{v} = \lambda\vec{v}$, откуда следует

$$\hat{A}\left(v_1, v_2, \dots, v_n\right)^T = \left(v_1, v_2, \dots, v_n\right) \mathrm{diag}\left(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\right),$$

что можно представить в виде

$$\hat{T}^{-1}\hat{A}\hat{T} = \mathrm{diag}\left(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\right), \tag{2}$$

где $\hat{T}$ — матрица, столбцы которой — собственные вектора матрицы $\hat{A}$.

Если применить преобразование $\vec{y}\left(x\right) = \hat{T}\vec{z}\left(x\right)$, $\dfrac{d\vec{y}}{dx} = \hat{T}\vec{z}\left(x\right)$, то первоначальная система дифференциальных уравнений (1) примет вид

$$\frac{d\vec{z}}{dx} = \mathrm{diag}\left(\left(\lambda_1\right), \left(\lambda_2\right), \dots, \left(\lambda_n\right)\right)\vec{z}; \quad \vec{z}\left(0\right) = \vec{z}_0 = \hat{T}^{-1}\vec{y}_0,$$

которую можно легко проинтегрировать:

$$\vec{z}\left(x\right) = \mathrm{diag}\left(\exp\left(\lambda_1 x\right), \exp\left(\lambda_2 x\right), \dots, \exp\left(\lambda_n x\right)\right)\vec{z}_0.$$

Авторы выражают благодарность профессору Севастьянову Л.А. за полезные замечания и плодотворное обсуждение статьи.

Окончательно получаем:

$$\vec{y}\,(x) = \hat{T}\ \mathrm{diag}\ (\exp(\lambda_1 x)\,, \exp(\lambda_2 x)\,, \ldots, \exp(\lambda_n x))\ \ \hat{T}^{-1}\vec{y}_0. \tag{3}$$

Однако вышеописанная теория хороша, но в ней есть несколько подводных камней:

а) не у всякой матрицы $\hat{A}$ существует n линейно независимых собственных векторов, поэтому вышеописанная процедура не применима для таких матриц;

б) даже если такое разложение существует, матрица $\hat{T}$ может быть плохо обусловлена, поэтому численная реализация процедуры будет неустойчивой.

1.2. Приведение к диагональному виду

В соответствии с теоремой об аппроксимации [1] для любой квадратной матрицы $\hat{A}$ существует матрица $\hat{T}$, такая что:

$$\hat{T}^{-1}\hat{A}\hat{T} = \left|\begin{array}{cccc} \lambda_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & \lambda_2 & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \lambda_n \end{array}\right|,$$

причём $\sum\limits_{i,\ j} |b_{i,j}| \leqslant \varepsilon$, где ε — произвольное малое положительное число.

Если ε мало по сравнению с машинной точностью, то элементами выше диагонали при численном решении можно пренебречь и решение исходной системы находится так же, как в случае, рассмотренном в пункте 1.1. Однако результат этой теоремы противоречит на первый взгляд тому факту, что произвольная матрица, имеющая кратные собственные значения, не может быть приведена к диагональной форме. Разъяснение сводится к тому, что $\hat{T}$ зависит от ε. Попытка устремить ε к нулю приведёт либо к тому, что матрица $\hat{T}$ станет вырожденной, либо к тому, что соответствующий предел перестанет существовать.

1.3. Разложение Шура

Известно [2] (теорема Шура), что для любой комплексной матрицы $\hat{A}$ существует такая унитарная матрица $\hat{Q}$, что:

$$\hat{Q} * \hat{A}\hat{Q} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \times & \times & \cdots & \times \\ & \lambda_2 & \times & \cdots & \times \\ & & \lambda_3 & & \times \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

После приведения матрицы $\hat{A}$ к форме Шура и применения преобразования $\vec{y}\,(x) = \hat{Q}\vec{z}\,(x)\,,\ \ \dfrac{d\vec{y}}{dx}\,(x) = \hat{Q}\dfrac{d\vec{z}}{dx}{}'\,(x)$, получим:

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{12} & \cdots & b_{1,n-1} & b_{1n} \\ & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & & \lambda_{n-1} & b_{n-1,n} \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$z_0 = z\left(0\right) \ = \hat{Q} * \vec{y}_0.$$

Последнее уравнение $\frac{dz_n}{dx} = \lambda_n z_n$ системы (4), можно проинтегрировать независимо от других. В результате получим $z_n = \exp\left(\lambda_n x\right) z_{n0}$. Тогда для z_{n-1} имеем:

$$\frac{dz_{n-1}}{dx} = \lambda_{n-1} z_{n-1} + b_{n-1,n} z_n, \tag{5}$$

где z_n — известно. Это линейное уравнение (неоднородное, если $b_{n-1,n} \neq 0$) можно решить методом Эйлера. Возможны два случая:

1. Если $\lambda_{n-1} \neq \lambda_n$, положим $z_{n-1} = E\exp\left(\lambda_{n-1}x\right) + F\exp\left(\lambda_n x\right)$, подставим это выражение в (5) и сравним коэффициенты. В результате получим $F = b_{n-1,n} z_{n0} / \left(\lambda_n - \lambda_{n-1}\right)$ и $E = z_{n-1,0} - F$;
2. Если $\lambda_{n-1} = \lambda_n$ положим $z_{n-1} = \left(E + Fx\right)\exp\left(\lambda_n x\right)$, получим $F = b_{n-1,n} z_{n0}$ и $E = z_{n-1,0}$.

Далее по индукции находим z_{n-2} и для остальных переменных проводим аналогичные рассуждения.

Для случая $\lambda_i \neq \lambda_j$ можно получить простую рекурсивную формулу в явном виде:

$$z_i\left(x\right) = \sum_{j=1}^{n} E_{ij}\exp\left(\lambda_j x\right) \tag{6}$$

Для этого подставим (6) в (4) и, после приравнивания коэффициентов, получим для $i = n, n-1, n-2$, и т.д. [2]

$$E_{ik} = \frac{1}{\lambda_k - \lambda_i}\left(\sum_{j=1}^{k} b_{ij} E_{jk}\right),\ k = i+1, i+2, \ldots$$

$$E_{ii} = z_{i0} - \sum_{j=i+1}^{n} E_{ij}$$

В случае же равных собственных значений $\lambda_i = \lambda_j$ простых рекурсивных формул получить не удаётся и в этом случае следует каждый раз повторять процедуру пункта 2).

Окончательно решение исходной системы (1) получается следующим образом

$$\vec{y}(x) \ = -\ \hat{Q}\ \vec{z}(x).$$

2. Численные эксперименты

На основе разложения Шура разработана программа для численного решения системы (1). Чтобы проверить точность численного решения по этому алгоритму, расчёты проводились для матрицы $\hat{A}$, допускающей аналитическое решение:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Эта система имеет следующие собственные векторы и соответствующие им собственные значения:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.22 & -0.66 & 0.22 & 0.66 \\ -0.5 & -0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.69 & 0.69 & 0.14 & -0.14 \\ -0.39 & 0.39 & -0.59 & 0.59 \end{bmatrix}.$$

Поскольку собственные векторы линейное независимы, общее решение системы будет иметь вид:

$$\begin{cases} y_1 = C_1 v_1^1 e^{\lambda_1 x} + C_2 v_2^1 e^{\lambda_2 x} + C_3 v_3^1 e^{\lambda_3 x} + C_4 v_4^1 e^{\lambda_4 x} \\ y_2 = C_1 v_1^2 e^{\lambda_1 x} + C_2 v_2^2 e^{\lambda_2 x} + C_3 v_3^2 e^{\lambda_3 x} + C_4 v_4^2 e^{\lambda_4 x} \\ y_3 = C_1 v_1^3 e^{\lambda_1 x} + C_2 v_2^3 e^{\lambda_2 x} + C_3 v_3^3 e^{\lambda_3 x} + C_4 v_4^3 e^{\lambda_4 x} \\ y_4 = C_1 v_1^4 e^{\lambda_1 x} + C_2 v_2^4 e^{\lambda_2 x} + C_3 v_3^4 e^{\lambda_3 x} + C_4 v_4^4 e^{\lambda_4 x} \end{cases} \qquad (7)$$

Коэффициенты C находятся из начального условия: $Y_0 = \{1,\ 0.5,\ -0.5, -1\}$. Подставляя $x = 0$ в (7) получим:

$$\begin{cases} y_1^0 = C_1 v_1^1 + C_2 v_2^1 + C_3 v_3^1 + C_4 v_4^1 \\ y_2^0 = C_1 v_1^2 + C_2 v_2^2 + C_3 v_3^2 + C_4 v_4^2 \\ y_3^0 = C_1 v_1^3 + C_2 v_2^3 + C_3 v_3^3 + C_4 v_4^3 \\ y_4^0 = C_1 v_1^4 + C_2 v_2^4 + C_3 v_3^4 + C_4 v_4^4 \end{cases}$$

или в матричной форме: $\vec{y}_0 = \vec{C}\hat{v}$, откуда находим вектор коэффициентов C: $\vec{C} = \vec{y}_0 \hat{v}^{-1}$

$$\vec{C} = \begin{bmatrix} -1.705 \\ 0 \\ -0.904 \\ -0.003 \end{bmatrix}.$$

Подставив эти коэффициенты в (7), получим решение системы для заданных начальных данных.

Для той же самой задачи с указанной выше матрицей $\hat{A}$ было найдено численное решение для заданных начальных значений. График численного решения приведён на рис. 1.

Решения сравнивались на интервале от 0 до 1, ошибка вычислялась по формуле:

$$\delta = \max_{i=1,\ldots,4\ x?[0;1]} \left| \tilde{y}_i\left(x\right) - y_i\left(x\right) \right|,$$

где $\tilde{y}_i\left(x\right)$ — аналитическое решение в точке x, а $y_i\left(x\right)$ — численное решение в этой же точке. Ошибка составила 8,978E-13, что является хорошим результатом, учитывая, что аналитическое решение представляет сумму экспоненциальных функций. График ошибки приведён на рис. 2.

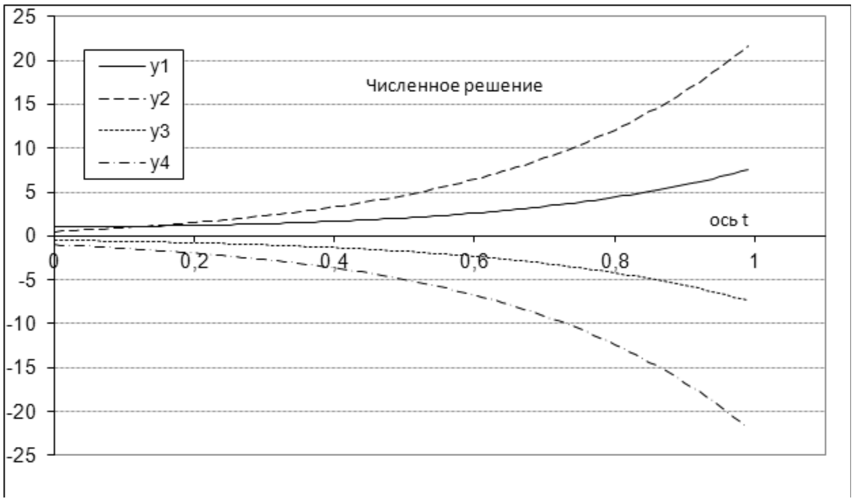

Рис. 1. **Численное решение системы**

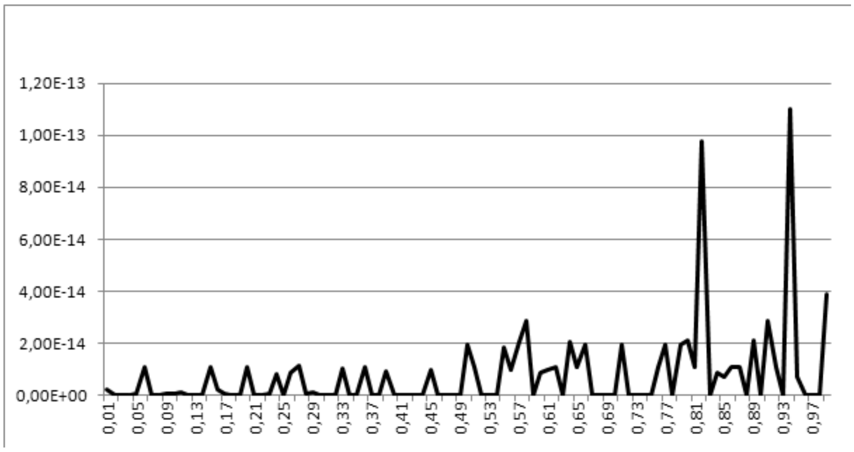

Рис. 2. **Отклонение численного от аналитического решения**

3. Заключение

Описанный выше метод позволяет решать системы с кратными собственными значениями в комплексной плоскости, однако, хотя алгоритм нахождения такого решения известен, программирование такого решения, само по себе, является нетривиальной задачей.

Литература

1. *Беллман Р.* Ведение в теорию матриц. — М.: Наука, 1969. — 235 с. [*Bellman R.* Vedenie v teoriyu matric. — M.: Nauka, 1969. — 235 s.]
2. *Hairer E., Wanner G.* Ordinary Differential Equations. — 1993. — 70 p.

UDC 519.622.2

Solving Systems of Linear Differential Equations with Constant Coefficients

D. A. Ahremenkov, K. P. Lovetskiy

Telecommunication Systems Department
Peoples Friendship University of Russia
Miklukho-Maklaya str., 6, Moscow, 117198, Russia

The paper demonstrates the comparison of some different algorithms for solving systems of ordinary differential equations with complex constant coefficients describing the evolution of monochromatic linearly polarized plane electromagnetic waves in a stratified medium.

Key words and phrases: systems of linear differential equations with constant coefficients, numerical methods.