Математика

УДК 517.925.51

Об оценке нормы решения сингулярно возмущённых квазилинейных задач на полуоси для систем ОДУ с нелинейной нормальной матрицей

Ю. А. Коняев, А. З. Воркне

Кафедра высшей математики
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, 117198, Россия

С помощью метода унитарных преобразований исследованы сингулярно возмущённые квазилинейных системы обыкновенных дифференциальных уравнений на полуоси с нелинейной нормальной матрицей, что в некоторых случаях может привести к появлениям счётного числа дополнительных пограничных слоев. Для таких систем наибольшие проблемы возникают при исследовании устойчивости их решения особенно в критических случаях, когда спектр определяющей матрицы лежит (или касается) мнимой оси. Предложенный метод позволяет проводить исследования традиционного аппарата функций Ляпунова.

Приведены достаточные условия устойчивости (и асимптотической устойчивости) и оценки нормы решения таких задач, что уточняет или дополняет известные ранее результаты.

Рассмотрены нетривиальные примеры сингулярно возмущённых нелинейных задач для квазилинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с нелинейной нормальной матрицей.

Ключевые слова: сингулярно возмущённые задачи, метод унитарных преобразований, нормальная матрица, устойчивость.

1. Введение

Предложен отличный от ранее известных [1–3] метод исследования устойчивости и оценки нормы решения одного класса сингулярно возмущённых (с/в) линейных и квазилинейных систем *ОДУ* с нормальной нелинейной матрицей, включая и критические случаи. В некоторых случаях решение указанных с/в задач может содержать счётное число дополнительных пограничных слоев. В основе предложенного алгоритма лежит метод унитарных преобразований [4, 5].

2. Спектральный метод анализа с/в квазилинейных систем

Рассмотрим один класс с/в задач на полуоси (изучение которых известными методами [1–3] вызывает заметные трудности) для квазилинейных с/в систем *ОДУ* вида:

$$\varepsilon\dot{x} = A(x,t)x + f(x,t), \quad x(0,t) = x_0, \tag{1}$$

$x,\ f \in \mathbb{R}^n$, $f(0,t) \equiv 0$, с нелинейной непрерывной и нормальной в области $\Omega = \{|x| \leqslant \mathbb{R} : t \geqslant 0\}$ матрицей $A(x,t)$ (для неё в области Ω имеет место [6] тождественное равенство $A(x,t)A^*(x,t) \equiv A^*(x,t)A(x,t)$).

Предварительно сформулируем вспомогательное утверждение.

Лемма. *Для линейной системы ОДУ:*

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x(0) = x_0, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{2}$$

Статья поступила в редакцию 17 июня 2013 г.

квадрат евклидовой нормы её решения удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\frac{\mathrm{d}|x|^2}{\mathrm{d}t} = 2\mathrm{Re}\,(x^* A(t)x).$$

Доказательство. С учётом записи сопряжённой к (2) системы $\dot{x}^* = x^* A^*(t)$ (и равенства $|x|^2 = x^* x$) запишем дифференциальное уравнение для квадрата нормы решения системы (2):

$$\frac{\mathrm{d}|x|^2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(x^* x)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x^*}{\mathrm{d}t}x + x^*\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^* A^*(t)x + x^* A(t)x = \\ = (x^* A(t)x)^* + (x^* A(t)x) = 2\mathrm{Re}\,(x^* A(t)x),$$

что и требовалось [4]. □

Теорема 1. *Евклидова норма решения с/в квазилинейной задачи на полуоси*

$$\varepsilon\dot{x} = A(x,t)x, \quad x(0,\varepsilon) = x_0 \tag{3}$$

с непрерывной и нормальной в области Ω *матрицей* $A(x,t)$ *в случае, если её спектр* $\{\lambda_{A_j}(x,t)\}_1^n$ *удовлетворяет в области* Ω *неравенствам:*

$$\mathrm{Re}\,\lambda_{A_j}(x,t) \leqslant \varphi_A(t), \quad j = \overline{1,n}, \tag{4}$$

определяется соотношением:

$$|x(t,\epsilon)| \leqslant |x_0| \exp(a(t)/\varepsilon), \quad a(t) = \int\limits_0^t \varphi_A(s)\mathrm{d}s, \tag{5}$$

отражая наличие в решении (5) *экспоненциального пограничного слоя в окрестности точки* $t = 0$*. Представление* (5) *гарантирует устойчивость решения с/в задачи* (3) *при* $a(t) \leqslant 0$ $(t \geqslant 0)$ *или асимптотическую устойчивость в случае, когда* $a(t) \to -\infty$ $(t \to +\infty)$*.*

Доказательство. Для нормальной в области Ω матрицы $A(x,t)$ всегда существует [6] унитарная подстановка $x = U_A(x,t)y$ $(|x(t)| \equiv |y(t)|)$;

$$U_A^*(x,t)A(x,t)U_A(x,t) \equiv \Lambda_A(x,t) = \mathrm{diag}\,\{\lambda_{A1}(x,t),\ldots,\lambda_{An}(x,t)\},$$

что позволяет (используя лемму) записать дифференциальное неравенство:

$$\varepsilon\frac{\mathrm{d}|x|^2}{\mathrm{d}t} = 2\mathrm{Re}\,(x^* A(x,t)x) = 2\mathrm{Re}\,(y^* U_A^*(x,t)A(x,t)U_A(x,t)y) = \\ = 2\mathrm{Re}\,(y^*\Lambda_A(x,t)y) = 2\mathrm{Re}\sum_1^n \lambda_{A_j}(x,t)|y_j|^2 \leqslant 2\varphi_A(t)|x|^2,$$

откуда имеем нужный результат (5). □

Замечание.
1. Наличие равенства в условии (4) приводит к равенству в оценке (5).
2. В точках t_k (в которых $a(t_k) = 0$) могут возникать дополнительные пограничные слоя.
3. В некоторых случаях матрица $A(x,t)$ (не являясь нормальной) может быть представлена в виде суммы двух или более нормальных матриц.

Пример 1. Для с/в системы:

$$\varepsilon\dot{x} = \begin{pmatrix} \varphi_A(t) & |x|^2 t \\ -|x|^2 t & \varphi_A(t) \end{pmatrix} x, \quad x(0,\varepsilon) = x_0 \tag{6}$$

с нормальной матрицей её спектр равен $\lambda_{A_j}(x,t) = \varphi_A(t) \pm i|x|^2 t$ и в силу теоремы 1 имеем точную оценку нормы решения с/в задачи (6):

$$|x(t,\varepsilon)| = |x_0| \exp(a(t)/\varepsilon), \quad a(t) = \int\limits_0^t \varphi_A(s)\mathrm{d}s.$$

Это приводит (в случае $\varphi_A(t) = -\sin t$) к появлению в решении

$$|x(t,\varepsilon)| = |x_0| \exp((\cos t - 1)/\varepsilon)$$

счётного числа равномерно расположенных дополнительных пограничных слоев в точках $t_k = 2\pi k$.

Для функции $\varphi_A(t) = -\dfrac{2\pi m_0}{(t+1)^2} \sin\left(\mathrm{d}\frac{2\pi m_0}{t+1}\right)$ $(m_0 \in \mathbb{N})$ получаем другое равенство для нормы решения

$$|x(t,\varepsilon)| = |x_0| \exp\left(\cos\left(\left(\frac{2\pi m_0}{t+1}\right) - 1/\varepsilon\right)\right),$$

в котором имеется конечное число неравномерно расположенных дополнительных пограничных слоев в точках:

$$t_k = \frac{m_0}{k} - 1 \geqslant 0, \quad m_0 > 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, m_0.$$

Теорема 2. *Если для с/в задачи:*

$$\varepsilon\dot{x} = (A(x,t) + B(x,t))x + f(x,t), \quad x(0,\varepsilon) = x_0 \tag{7}$$

с нормальными в области Ω матрицами $A(x,t)$ и $B(x,t)$ для их спектра в области Ω справедливы неравенства:

$$\operatorname{Re}\lambda_{A_j}(x,t) \leqslant -C_1|x|^\alpha, \quad \operatorname{Re}\lambda_{B_j}(x,t) \leqslant -C_2|x|^\beta;$$

$$j = \overline{1,n} \quad \beta \geqslant \alpha \geqslant 0 \quad C_1,\ C_2 > 0,$$

и для достаточно гладкой функции $f(x,t)$ в области Ω имеет место неравенство:

$$|f(x,t)| \leqslant C_3|x|^{1+\delta} \quad 0 < C_3 < C_1, C_2 \quad 0 < \alpha < \beta < \delta,$$

тогда для евклидовой нормы решения с/в задачи (7) справедлива оценка ($|x_0| \neq 0$):

$$|x(t,\varepsilon)| \leqslant \frac{1}{\sqrt[\alpha]{\frac{\alpha\sigma_1 t}{\varepsilon} + \frac{1}{|x_0|^\alpha}}} \to 0, \quad t \to +\infty, \quad 0 < C_1 < \sigma_0, \tag{8}$$

что гарантирует асимптотическую устойчивость тривиального решения с/в задачи (7).

Доказательство. В условиях теоремы 2 с помощью унитарных подстановок $x = U_A(x,t)y$ и $x = U_B(x,t)z$ $(|x(t)| \equiv |y(t)| \equiv |z(t)|)$,

$$U_A^*(x,t)A(x,t)U_A(x,t) = \Lambda_A(x,t) = \mathrm{diag}\,\{\lambda_{A1}(x,t),\ldots,\lambda_{An}(x,t)\};$$

$$U_B^*(x,t)B(x,t)U_B(x,t) = \Lambda_B(x,t) = \mathrm{diag}\,\{\lambda_{B1}(x,t),\ldots,\lambda_{Bn}(x,t)\})$$

запишем дифференциальное неравенство для квадрата евклидовой нормы решения с/в задачи (7):

$$\begin{aligned}\varepsilon\frac{\mathrm{d}|x|^2}{\mathrm{d}t} &= 2\mathrm{Re}\,(x^*A(x,t)x) + 2\mathrm{Re}\,(x^*B(x,t)x) + 2\mathrm{Re}\,(x^*f(x,t)) \leqslant \\ &\leqslant 2\mathrm{Re}\,(y^*\Lambda_A(x,t)y) + 2\mathrm{Re}\,(z^*\Lambda_B(x,t)z) + C_1|x|^{2+\delta} \leqslant \\ &\leqslant 2(-C_1|x|^{\alpha} - C_2|x|^{\beta} + C_3|x|^{\delta})|x|^2 \leqslant \\ &\leqslant 2\,(-C_1|x|^{\alpha})\left(1 + \frac{C_2}{C_1}|x|^{\beta-\alpha} - \frac{C_3}{C_1}|x|^{\delta-\alpha}\right)|x|^2 \leqslant \\ &\leqslant 2(-\sigma_0|x|^{\alpha})|x|^2, \quad (0 < \sigma_0 < C_j),\end{aligned}$$

что проводит к оценке (8), гарантируя асимптотическую устойчивость решения с/в задачи (7). (Следует отметит, что сумма нормальных матриц в общем случае не является нормальной). □

Пример 2. Для с/в системы:

$$\varepsilon\dot{x} = (A(x,t) + B(x,t))x + f(x,t) \quad x(0,\varepsilon) = x_0$$

с нормальными матрицами

$$A(x,t) = \begin{pmatrix} -|x|^3 & \cos t \\ -\cos t & -|x|^3 \end{pmatrix} \quad ; \quad B(x,t) = \begin{pmatrix} -|x|^4 & \sin t \\ -\sin t & -|x|^4 \end{pmatrix}$$

и оценкой для функции $|f(x,t)| \leqslant |x|^5$ имеем (в силу теоремы 2) неравенство для нормы решения:

$$|x(t,\varepsilon)| \leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{3t}{\varepsilon} + \frac{1}{|x_0|^3}}} \to 0, \quad (t \to +\infty),$$

гарантируя асимптотическую устойчивость решения.

Теорема 3. *Если для с/в задачи:*

$$\varepsilon\dot{x} = A(x,t)x, \quad x(0,\varepsilon) = x_0, \tag{9}$$

$$x,\ f \in \mathbb{R}^n, \quad f(0,t) \equiv 0,$$

с нормальной и непрерывной в области $\Omega = \{|x| \leqslant \mathbb{R}:\ t \geqslant 0\}$ *матрицей* $A(x,t)$, *для спектра которой* $\{\lambda_{A_j}(x,t)\}_1^n$ *справедливы неравенства:*

$$\mathrm{Re}\,\lambda_{A_j}(x,t) \leqslant -\varphi_A(t)|x|^{\beta};$$

$$j = \overline{1,n}, \quad \beta \geqslant 0, \quad a(t) = \int\limits_0^t \varphi_A(s)\mathrm{d}s,$$

тогда для евклидовой нормы решения с/в задачи (9) *имеет место оценка при* $\beta > 0$ $(|x_0| \neq 0)$*:*

$$l|x(t,\varepsilon)| \leqslant \frac{1}{\sqrt[\beta]{\frac{\beta a(t)}{\varepsilon} + \frac{1}{|x_0|^\beta}}}, \tag{10}$$

отражая наличие специального «радикального» погранслоя в окрестности точки $t = 0$*, или (при* $\beta = 0$*):*

$$|x(t,\varepsilon)| \leqslant |x_0| \exp(-a(t)/\varepsilon), \tag{11}$$

что гарантирует асимптотическую устойчивость при $a(t) \to +\infty$*,* $t \to +\infty$*, или устойчивость решения при* $a(t) \geqslant 0$ *с/в задачи* (9).

Доказательство. Аналогично предыдущему с помощью [6] унитарной подстановки $x = U_A(x,t)y$ $(|x(t)| \equiv |y(t)|$;

$$U_A^*(x,t)A(x,t)U_A(x,t) = \Lambda_A(x,t) = \operatorname{diag}\{\lambda_{A1}(x,t), \ldots, \lambda_{An}(x,t)\}$$

запишем дифференциальное неравенство для квадрата евклидовой нормы решения с/в задачи (10):

$$\varepsilon\frac{\mathrm{d}|x|^2}{\mathrm{d}t} = 2\mathrm{Re}\,(x^*A(x,t)x) = 2\mathrm{Re}\,(y^*\Lambda_A(x,t)y) = \\ = 2\mathrm{Re}\sum_1^n \lambda_{A_j}(x,t)|y_j|^2 \leqslant 2\varphi_A(t)|x|^{2+\beta},$$

приводя к оценке нормы решения (10) или (11), что гарантирует асимптотическую устойчивость при $a(t) \to -\infty$ $(t \to +\infty)$ и устойчивость решения с/в задачи (9) при $a(t) \geqslant 0$. □

3. Заключение

С помощью по существу алгебраического варианта метода унитарных преобразований [4, 5] изучены с/в квазилинейные системы *ОДУ*, матрица которых является нелинейной нормальной матрицей, или суммой нелинейных нормальных матриц.

С помощью указанного нетрадиционного алгоритма изучен целый класс с/в квазилинейных задач и получены достаточные конструктивные условия асимптотической устойчивости (или устойчивости) решения, приводя в некоторых случаях к появлению пограничного слоя нового «радикального» типа или дополнительных пограничных слоев.

Предложенный метод (не претендуя на универсальность) позволил получить ряд интересных результатов в теории сингулярных возмущений и в теории устойчивости.

Литература

1. *Ломов С. А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука, 1981. — С. 400с. [Lomov S. A. Introduction to General Theory of Singular Perturbations. — Moscow: Nauka, 1981.]
2. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. — 1990. [Vasil'yeva A. B., Butuzov V. F. Asymptotic Methods in Theory of Singular Perturbations. — Vysshaya shkola, 1990, 280 p.]

3. *Коняев Ю. А., Федоров Ю. С.* Асимптотический анализ некоторых классов сингулярно возмущенных задач на полуоси // Математические заметки. — 1997. — Т. 62, № 1. — С. 111–117. [Konyayev Yu. A., Fedorov Yu. S. Asymptotic Analysis of Certain Classes of Singularly Perturbed Problems on the Semisaxis // Matematicheskiye zametki. — 1997. — Vol. 62(1). — P. 111–117.]
4. *Коняев Ю. А.* Метод унитарных преобразований в теории устойчивости // Изв. Вузов. Математика. — 2002. — № 2. — С. 41–45. [Konyayev Yu. Method of Unitary Transformations in the Theory of Stability // Izv. Vuzov. Matematika. — 2002. — No 2. — P. 41–45.]
5. *Коняев Ю. А., Безяев В. И.* О квазилинейных неавтономных системах ОДУ с нормальной матрицей // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — 2010. — № 2(1). — С. 15–18. [Konyayev Yu. A., Bezyayev V. I. Quasi-linear non-autonomous systems with the normal matrix // Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series "Mathematics. Information Sciences. Physics". — 2010. — No 2(1). — P. 15–18.]
6. *Ланкастер П.* Теория матриц. — М: Наука, 1978. — 280 с. [Lankaster P. Theory of Matrices. — Moscow: Nauka, 1978.]

UDC 517.925.51

Estimating the Norm of Solution of Singularly Perturbed Quasilinear Problems for ODE Systems with Nonlinear Normal Matrices on the Semiaxis

Y. A. Konyaev, A. Z. Workneh

Department of Mathematics
Peoples' Friendship University of Russia
Miklukho–Maklaya str., 6, Moscow, 117198, Russia

Using the method of unitary transformation, the singularly perturbed quasi-linear systems of ordinary differential equations with nonlinear normal matrices on the semiaxis were studied, which in some cases can lead to the existence of countable number of additional boundary layers. For such system, most problems arise in the study of the stability of their solution especially in critical cases where the spectrum defined by the matrix lies (or touches) the imaginary axis.

The proposed method allows us to study the traditional Lyapunov functions. We have shown sufficient conditions for stability (and asymptotic stability) and given the evaluation of the norm of the solution for such problems, which clarifies or supplements previously known results.

In addition in the paper we have included some non-trivial examples of nonlinear singularly perturbed problems for quasi-linear systems of ordinary differential equations with nonlinear normal matrices.

Key words and phrases: singularly perturbed initial value problem, unitary transformation, normal matrix, stability.