ВЫВОД УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ДЛЯ ОБОЛОЧЕК В ФОРМЕ КОСОГО ГЕЛИКОИДА

Е.М. ТУПИКОВА, *соискатель*
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

В статье рассмотрен вопрос вывода расчетных уравнений равновесия косого геликоида в общем виде для несопряженной неортогональной системы координат.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: косой геликоид, уравнения равновесия, линейная теория тонких упругих оболочек, неортогональная несопряженная система координат.

Аналитический расчет оболочек в форме косого геликоида был произведен в статьях [4] и [5].

Основы теории тонких упругих оболочек изложены в монографии [1].

Поскольку уравнения расчета оболочек достаточно громоздки и сложны, аналитические и полуаналитические методы до последнего времени оставались непопулярными и, как правило, уступали место конечноэлементным и иным численным методам. Анализ напряженно-деформированного состояния косого геликоида осложняется тем, что у этой оболочки несопряженная неортогональная система координат.

В период написания работ [3,4,5] такие расчеты были сопряжены со значительными техническими трудностями и временными затратами как при выводе самих уравнений, так и при их обработке и решении. Ни в одной работе не были рассмотрены из-за указанных трудностей уравнения равновесия, выведенные из физических и геометрических соотношений без значительных упрощений расчетной физической модели (как, например, в работе [3]), или без перехода к ортогональной системе координат (как в работе [4]). Возможно применение ряда приемов, помогающих уйти от непосредственного расчета общего случая данной проблемы к наиболее простым частным случаям[5].

В настоящее время интенсивное и экстенсивное (наращивание мощностей и характеристик) развитие компьютерной техники, новейшее программное обеспечение для математических расчетов позволяет производить намного более сложные расчеты, чем это было возможно 30-40 лет назад, без значительных временных затрат и со сведением к минимуму влияния «человеческого фактора» при обработке данных. В частности, программный комплекс Maple 17 имеет обширный инструментарий для решения дифференциальных уравнений, упрощения сложных и громоздких выражений и ряд других полезных функций.

Параметрическое уравнение геликоида принято автором в виде:

$$x = u \cdot cos\varphi \cdot cosv;$$

$$y = u \cdot cos\varphi \cdot sinv;$$
$$z = u \cdot sin\varphi + c \cdot v;$$

По сравнению с видом

$$x = u \cdot cosv;$$
$$y = u \cdot sinv;$$
$$z = \mathrm{k} \cdot \mathrm{u} + c \cdot v;$$

такие уравнения более очевидны и позволяют применять больше тригонометрических преобразований, (причем следует помнить, что координата u отсчитывается по-другому).

Тогда квадратичные формы поверхности принимают вид:

$$E := 1;\ F := \sin(\varphi)\ c;\ G := u^2 \cos(\varphi)^2 + c^2;$$
$$\chi := \arccos\left(\frac{c \sin(\varphi)}{\sqrt{u^2 \cos(\varphi)^2 + c^2}}\right);$$
$$L := 0;$$
$$M := -\cos(\varphi)^3\ c \sqrt{c^2 + u^2}$$
$$N := u^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi)^3 \sqrt{c^2 + u^2};$$

Для упрощения принято, что геликоид имеет большое число витков и напряженно-деформированное состояние не зависит от координаты v, т.е. рассматривается двумерная задача.

Задача рассматривается для пологой оболочки.

Тогда геометрические соотношения принимают вид:

$$\varepsilon u = uu' - \frac{c\ sin\varphi\ uv \cdot\ u\ cos\varphi^2}{\left(u^2\ cos\varphi^2 + c^2\right)^{3/2}} + \frac{c\ sin\varphi \cdot uv'}{\sqrt{u^2\ cos\varphi^2 + c^2}};$$

$$\varepsilon v - \frac{\mathrm{uv}' - \dfrac{c\ sin\varphi\ \ uu\ \ u\ cos\varphi^2}{\left(u^2\ cos\varphi^2 + c^2\right)^{3/2}} + \dfrac{c\ sin\varphi\ \ uu}{\sqrt{u^2\ cos\varphi^2 + c^2}}}{\sqrt{u^2 \cos(\varphi)^2 + c^2}}$$
$$+ \frac{\left(1 - \dfrac{c^2\ sin\varphi^2}{u^2\ cos\varphi^2 + c^2}\right) \mathrm{u\ uu}}{c^2 + u^2} + \frac{uz\ \ u^2\ sin\varphi\ cos\varphi^3 \sqrt{c^2 + u^2}}{u^2\ cos\varphi^2 + c^2};$$

$$\omega u = -\frac{1}{\sqrt{c^2+u^2}\ (u^2 \cos\varphi^2 + c^2)^2} \Big(\big((-(c^2+u^2)\ (u^2 \cos\varphi^2 + c^2)\ uv'$$
$$+ c^2\ u\ uv\ (\cos\varphi^2 - 1)\ )\ \sqrt{u^2 \cos\varphi^2 + c^2}$$
$$+ c\ uz\ \cos\varphi \sqrt{c^2+u^2}\ (u^2 \cos\varphi^2 + c^2)^2 \big) \cos\varphi \Big);$$

$$\omega v = -\frac{1}{\sqrt{c^2+u^2}\ (u^2 \cos\varphi^2 + c^2)} \Big(\big(\sqrt{u^2 \cos\varphi^2 + c^2}\ u\ uv(u,v)$$
$$+ c\ \big(uz \cos\varphi\ (c^2+u^2)^{3/2} + \sin\varphi\ u\ uu\big)\big) \cos\varphi \Big);$$

$$\gamma v = 0;$$
$$\gamma u = -(uz');$$

$$\kappa u = -\Big(-(c^2+u^2)\ (u^2 \cos\varphi^2 + c^2)^2\ uz'' + \frac{1}{2}\ (\cos\varphi^2 - 1)\ \ u\ \big(($$
$$-2\ u^2 \cos\varphi^2 - 2\ c^2)\ uz' + u\ uz\ \cos\varphi^6\ (c^2+u^2)^2 \big)\ c^2 \Big) \Big/$$
$$\Big((c^2+u^2)^{3/2}\ (u^2 \cos\varphi^2 + c^2)^{3/2} \cos\varphi \Big);$$

$$\kappa v = \frac{1}{2}\ \frac{1}{\sqrt{c^2+u^2}\ (u^2 \cos\varphi^2 + c^2)^{3/2}} \Big(\cos\varphi\ u\ \big((2\ u^2 \cos\varphi^2$$
$$+ 2\ c^2)\ (uz') + c^2\ uz\ \cos\varphi^4\ u\ (\cos\varphi^2 - 1)\ (c^2+u^2) \big) \Big);$$

$$\kappa uv := -\frac{1}{2} \Big(c \sin\varphi \Big((c^2+u^2)\ (u^2 \cos\varphi^2 + c^2)^2\ \ uz''$$
$$-\frac{1}{2}\ \big(2\ (u^2 \cos\varphi^2 + c^2)^2\ uz + u^3\ uz\ \cos(\varphi)^6\ (\cos\varphi^2$$
$$-1)\ (c^2+u^2)^2 \big)\ u \Big) \Big) \Big/ \Big((c^2+u^2)^{3/2} \cos\varphi\ (u^2 \cos\varphi^2$$
$$+ c^2)^2 \Big);$$

Физические соотношения применены в виде:

$$Nu := \frac{E0 \cdot h}{(1-\sigma^2)} \cdot \frac{\varepsilon u - \cot(\chi) \cdot \omega + \sigma \cdot \varepsilon v}{\sin(\chi)};$$
$$Nv := \frac{E0 \cdot h}{(1-\sigma^2)} \cdot \frac{\varepsilon v - \cot(\chi) \cdot \omega + \sigma \cdot \varepsilon u}{\sin(\chi)};$$
$$Mu := -\frac{E0 \cdot h^3}{12 \cdot (1-\sigma^2)} \cdot \frac{\kappa u + \sigma \cdot \kappa v}{\sin(\chi)};$$

$$Mv := -\frac{E0 \cdot h^3}{12 \cdot (1-\sigma^2)} \cdot \frac{\kappa v + \sigma \cdot \kappa u}{\sin(\chi)};$$

$$Muv := \frac{E0 \cdot h^3}{12 \cdot (1+\sigma)} \cdot \frac{\kappa uv - \cos(\chi) \cdot \kappa v}{\sin(\chi)};$$

$$Mvu := -\frac{E0 \cdot h^3}{12 \cdot (1+\sigma)} \cdot \frac{\kappa uv - \cos(\chi) \cdot \kappa u}{\sin(\chi)};$$

$$Su := \frac{E0 \cdot h}{2(1-\sigma^2)} \cdot \left(\frac{1 + (\cos(\chi))^2}{(\sin(\chi))^2} \cdot \varepsilon uv - \cot(\chi) \cdot (\varepsilon u + \varepsilon v) - \sigma \cdot (\varepsilon uv + \cot(\chi) \cdot (\varepsilon u + \varepsilon v)) \right);$$

$$Sv := -Su;$$

Уравнения равновесия принимают вид:

$$\frac{1}{\sin(\chi)} \cdot \frac{\partial}{\partial u} (B \cdot (\mathrm{N} + \cos(\chi) \cdot Su)) - \frac{B^2}{A} \cdot \Gamma 112 \cdot \sin(\chi) \cdot Su - B \cdot \Gamma 122 \cdot \sin(\chi) \cdot Nv + A \cdot B \cdot (X(u,v) + (\cos(\chi)) \cdot Y(u,v));$$

$$\frac{1}{\sin(\chi)} \cdot \frac{\partial}{\partial u} (B \cdot (\mathrm{Su} + \cos(\chi) \cdot \mathrm{N})) - A \cdot \Gamma 121 \cdot \sin(\chi) \cdot \mathrm{N} + \frac{A^2}{B} \cdot \Gamma 221 \cdot \sin(\chi) \cdot Sv + A \cdot B \cdot (Y(u,v) + (\cos(\chi)) \cdot X(u,v));$$

$$A \cdot B \cdot \left(\frac{\mathrm{N}}{Ru} + \frac{Nv}{Rv} + \frac{(Sv - Su)}{Ruv} \right) + \frac{\partial}{\partial u} (B \cdot Qu) + A \cdot B \cdot \sin(\chi) \cdot Z(u,v);$$

$$\frac{1}{\sin(\chi)} \cdot \frac{\partial}{\partial u} (B \cdot (\mathrm{M} + \cos(\chi) \cdot Muv)) - A \cdot \Gamma 121 \cdot \sin(\chi) \cdot Muv + \frac{\mathrm{A}^2}{B} \cdot \Gamma 221 \cdot \sin(\chi) \cdot Mv - A \cdot B \cdot Qu;$$

Из четвертого уравнения находится Qu, а далее из первых трех уравнений в результате простейших алгебраических преобразований получаются уравнения вида:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2} uu = f1\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} uu;\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} uv;\ \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}u^3} uz;\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2} uz;\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} uz;\ uz;\ X;\ Y;\ u \right);$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2} uv = f2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} uu;\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} uv;\ \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}u^3} uz;\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2} uz;\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} uz;\ uz;\ X;\ Y;\ u \right);$$

$$\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}u^4} uz = f3\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} uu;\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} uv;\ \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}u^3} uz;\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2} uz;\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} uz;\ uz;\ X;\ Y;\ u \right);$$

Такую систему дифференциальных уравнений восьмого порядка можно свести к системе восьми дифференциальных уравнений первого порядка.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,u}\,y = f(u, y);$$

$$y = \begin{bmatrix} y0 \\ y1 \\ y2 \\ y3 \\ y4 \\ y5 \\ y6 \\ y7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_u \\ u_u' \\ u_v \\ u_v' \\ u_z \\ u_z' \\ u_z'' \\ u_z''' \end{bmatrix}, \qquad f(u, y) = \begin{bmatrix} y1 \\ f1 \\ y3 \\ y6 \\ y5 \\ f1 \\ y7 \\ f3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_u'' \\ u_v'' \\ u_z' \\ u_z'' \\ u_v' \\ u_v'' \\ u_z''' \\ u_z'''' \end{bmatrix}$$

Полностью система не приводится ввиду большого объема.

Такую систему восьми дифференциальных уравнений первого порядка можно в дальнейшем решать численным методом, например, методом прогонки.

Литература

1. *Гольденвейзер А.Л.* Теория тонких упругих оболочек. – М.:ГТТИ, 1953.-544 с.
2. *Иванов В.Н., Кривошапко С.Н.* Аналитические методы расчета оболочек неканонической формы:Монография. -М.: РУДН, 2010 г. -542 с.,ил.
3. *Рекач В.Г., Кривошапко С.Н.* Расчет оболочек сложной геометрии: Монография. - М.: Изд-во УДН, 1988 г. -176с.,ил.
4. *Ярошенко А.Р.* Осесимметричная деформация винтовой оболочки с прямоугольным профилем//Динамика и прочность машин. – Харьков, 1971. – Вып.12.-с.3-9.
5. *O'Mathuna D.* Rotationelly symmetric deformations in helicoidal shells// J.of Mathematics and Physics.-1963.-42, №2.-P.85-111.

THE DERIVATION OF THE EQUATIONS OF EQUILIBRIUM FOR THE SKEW HELICOIDAL SHELLS

E. M. TUPIKOVA

Peoples' Friendship University of Russia

The article considers the issue of analytical methods of stress-strain behavior calculations for the skew helicoidal shells. The problem is set for non-orthogonal non-conjugated system of coordinates.

KEY WORDS: skew helicoid, equations of equilibrium, linear theory of thin elastic shells, non-orthogonal non-conjugated system of coordinates.