СОГЛАССОВАННОЕ ВВЕДЕНИЕ СТОХАСТИКИ В ЭПИДЕМИОЛОГИЧЕСКУЮ МОДЕЛЬ

Еферина Е.Г.

Российский университет дружбы народов, eg.eferinal@gmail.com

Построена SIR модель с согласованными стохастической и детерминистической частями. Исследовано влияние введения стохастики на детерминистическую модель.

Ключевые слова: эпидемиологическая модель, стохастическая модель, стохастическое дифференциальное уравнение, метод Рунге-Кутты.

Введение

Чтобы смоделировать ход эпидемии в популяции нужно выделить несколько ключевых характеристик, которые имеют отношение к стадии заражения. В работе исследуется эпидемиологическая модель со следующими ключевыми характеристиками: S — количество восприимчивых к заболеванию (number susceptible), I — количество инфицированных особей (number infectious), R — количество восстановленных особей (number recovered (immune)).

Стохастизация модели SIR

В качестве уравнения, описывающего стохастическое поведение исследуемой системы, предлагается использовать стохастическое дифференциальное уравнение, полученное как приближение основного кинетического уравнения, построенного с помощью схем взаимодействия. Тогда схема взаимодействия и вектор r будут иметь вид [1,2]:

$$\begin{aligned} S + / &\xrightarrow{\{3} 2/, & r^{i1} &= (-1,1,0)^T, \\ / &\xrightarrow{v} R, & r^{i2} &= (0,-1,1)^T, \end{aligned} \qquad (1)$$

где β>0 – скорость перехода от S к I, ν>0 – скорость перехода от I к R (особь либо восстанавливается, либо умирает). Первая строка схемы отражает взаимодействие восприимчивой (S) и инфицированной (I) особей, в результате которого появляется новая инфицированная (I) особь. А вторая строка описывает появление восстановленной (R) особи.

Запишем вероятности переходов:

$$s_1^+ = \{3 \frac{S!}{(S-1)!} \cdot \frac{/!}{(/-1)!} = \{3S/,$$

$$s_2^+ = v \frac{R!}{R!} \cdot \frac{/!}{(/-1)!} = v/.$$

Запишем стохастическое дифференциальное уравнение в форме Ланжевена для модели (1):

$$d \begin{pmatrix} S \\ / \\ R \end{pmatrix} = (A^i)\, dt + b^i_a \begin{pmatrix} dW^1 \\ dW^2 \\ dW^3 \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

где вектор сносов A^i и матрица диффузии B^{ij} имеют следующий вид:

$$A^i = r^{ia}[s_a^+ - s_a^-], \quad b^i_a b^j_a = B^{ij} = r^{ia} r^{ja}[s_a^+ - s_a^-].$$

Таким образом, имеем

$$B^{ij} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (-1\ 1\ 0)\{3S/ + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} (0\ -1\ 1) v/ = \begin{pmatrix} \{3S/ & -\{3S/ & 0 \\ -\{3S/ & \{3S/ + v/ & -v/ \\ 0 & -v/ & v/ \end{pmatrix},$$

$$A^i = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \{3S/ + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} v/ = \begin{pmatrix} -\{3S/ \\ \{3S/ - v/ \\ v/ \end{pmatrix}.$$

Детерминистическое поведение системы

Как следствие можно получить систему дифференциальных уравнений, описывающих динамику численности особей:

$$\begin{aligned} S^{\cdot} &= -\{3S/, \\ /^{\cdot} &= \{3S/ - v/, \\ R^{\cdot} &= v/. \end{aligned} \qquad (3)$$

Найдем стационарные состояния системы (3), которые являются решениями системы уравнений:

$$\begin{aligned} &-\{3S/ = 0, \\ &\{3S/ - v/ = 0, \\ &v/ = 0. \end{aligned} \qquad (4)$$

Система (4) имеет одно стационарное состояние: $(S, /, R) = ({}^{V}, 0, \underset{\{3}{N} - {}^{V})$, где $\underset{\{3}{N}$ – численность популяции.

Фазовый портрет детерминистической модели (4) приведен на рис. 1. Зависимость числа восприимчивых, инфицированных и восстановленных особей от времени для детерминистической модели показана на рис. 2.

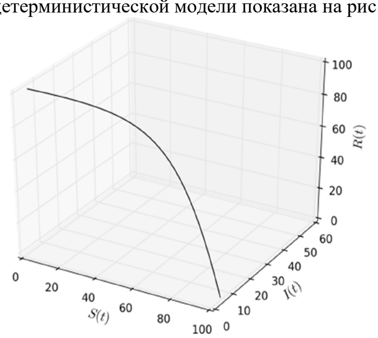

Рис. 1. Фазовый портрет детерминистической модели

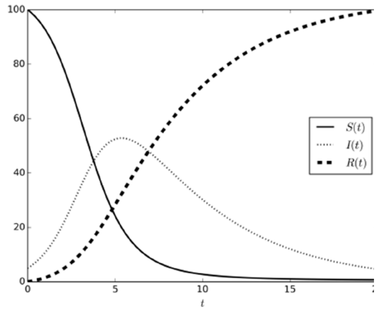

Рис. 2. Детерминистическая модель, динамическое поведение

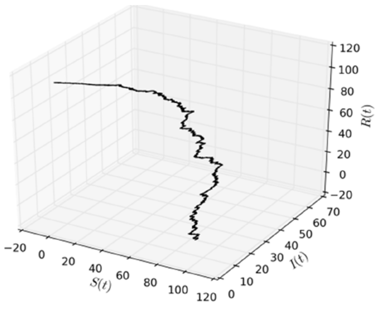

Рис. 3. Фазовый портрет стохастической модели

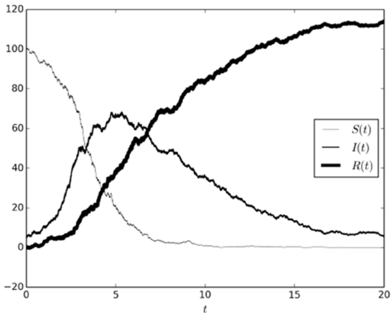

Рис. 4. Стохастическая модель, динамическое поведение

Для решения стохастического дифференциального уравнения в форме Ланжевена (2) в моментах использован метод, заключающийся в распространении методов Рунге-Кутты на случай стохастических дифференциальных уравнений [4].

Фазовый портрет стохастической модели приведен на рис. 3. Зависимость числа восприимчивых, инфицированных и восстановленных особей от времени для стохастической модели показана на рис. 4.

Выводы

Применен метод стохастизации одношаговых процессов к модели SIR и для нее получены дифференциальное уравнение Ланжевена и детерминистическая система уравнений. Характер структурной устойчивости системы приводит к тому, что введении стохастического члена не влияет на поведение системы.

Литература

1. *Кулябов Д.С., Демидова А. В.*, Введение согласованного стохастического члена в уравнение модели роста популяции // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». – 2012. – № 3. – С. 69-78.

2. *Кулябов Д.С., Геворкян М. Н., Егоров А. Д.,* Влияние стохастизации на одношаговые модели // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». – 2014. – №1. – С. 71-85.

3. *Гардинер К. В.,* Стохастические методы в естественных науках. – М.: Мир, 1986.

4. *Soheili A. R., Namjoo M.,* Strong approximation of stochastic differential equations with runge-kutta methods // World Journal of Modelling and Simulation. – 2008. – Vol. 4, № 2. – P. 83–93.

COORDINATED INTRODUCTION OF STOCHASTIC IN THE EPIDEMIOLOGICAL MODEL

Eferina E.G.

Peoples' Friendship University of Russia, eg.eferinal@gmail.com

SIR model with agreed stochastic and deterministic parts is build. The influence of the introduction of stochastics on a deterministic model is investigated.

Key words: epidemiological model, stochastic model, stochastic differential equation, Runge-Kutta method.