УДК 517.945

Отсутствие глобальных решений для квазилинейных обратных параболических уравнений

Б. Б. Тсегау

Кафедра математического анализа и теории функций
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198

Данная статья посвящена отсутствию глобальных решений квазилинейных обратных параболических уравнений для оператора p-Лапласа: $u_t = -\operatorname{div}\left(|Du|^{p-2} Du\right) + |u|^{q-1} u$, $(x,t) \in \Omega \times (0,\infty)$ с граничным условием Дирихле $u = 0$ на границе $\partial\Omega \times (0,\infty)$ и интегрируемой начальной функцией $u(x,0) = u_0(x)$, где Ω является гладко ограниченной областью в $\mathbb{R}^N$. Мы также рассмотрим эту задачу в случае $\Omega = \mathbb{R}^N$.

Проблема анализируется с использованием метода пробных функций, разработанного Э. Л. Митидиери и С. И. Похожаевым [Митидиери Э., Похожаев С. И. Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных // Тр. МИАН. — М.: Наука, 2001. — Т. 234, No 3. — 362 с.]. Он основан на получении априорных оценок для решений путём алгебраического анализа интегральной формы неравенства с оптимальным выбором пробных функций. С помощью этого метода мы получаем условия отсутствия решений, основанные на слабой постановке задачи с пробными функциями вида $\varphi(x,t) = \left(\pm u^{\pm}(x,t) + \varepsilon\right)^{\delta} \varphi_R(x,t)$ при $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, где u^+ и u^- являются положительной и отрицательной частями решения u задачи, а φ_R – стандартная срезающая функция, носитель которой зависит от параметра $R > 0$.

Ключевые слова: квазилинейные обратные параболические уравнения, оператор p–Лапласа, метод пробных функций, априорные оценки и отсутствие глобальных решений.

1. Введение

В последние годы теория локальной и глобальной разрешимости параболических уравнений в частных производных получила значительное развитие. Прямые и обратные параболические уравнения для диффузионных процессов являются двумя классами уравнений в частных производных, характеризующих динамику процесса диффузии.

В данной работе, применяя метод пробных функций, мы получим необходимые условия разрешимости обратных квазилинейных параболических задач с эллиптической главной частью в виде оператора p-Лапласа:

$$\begin{cases} u_t = -\Delta_p u + |u|^{q-1} u, & (x,t) \in \Omega \times (0,\infty), \\ u(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_0 \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega), & x \in \Omega \end{cases} \tag{1}$$

и

$$\begin{cases} u_t = -\Delta_p u + |u|^{q-1} u, & (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_0 \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N), & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{2}$$

где Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^N$ с гладкой границей $\partial\Omega$, $1 < p < \infty$ и $q > p-1$. Здесь $\Delta_p u := \operatorname{div}\left(|Du|^{p-2} Du\right)$ обозначает оператор p-Лапласа.

Статья поступила в редакцию 13 июня 2013 г.

Автор выражает благодарность Е. И. Галахову за постановку задачи, руководство и полезные обсуждения результатов работы.

Начнём с уже известных результатов для обратных параболических задач и соответствующих прямых параболических задач. Большое количество замечательных результатов для прямых параболических задач были получены несколькими авторами (см., например, работы [1–9] и ссылки в них). Достаточные условия для разрешимости некоторых обратных параболических задач были также получены в ([10–15] и ссылки там).

Пусть Ω — открытая ограниченная область в $\mathbb{R}^N$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Для скалярных функций $u(x,t)$ и $f(x,t,u,\nabla u)$ было показано (O. Зубелевич [15]), что краевая параболическая задача

$$\begin{cases} u_t = -\Delta u + f(x,t,u,\nabla u), & x \in \Omega, \quad t \geqslant 0, \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t \geqslant 0, \end{cases} \tag{3}$$

имеет решения в $H_0^1(\Omega)$ при условии, что $\sup_{t \geqslant 0} \|u(\cdot,t)\|_{H_0^1(\Omega)} < +\infty$.

Кроме того, доказано, что существует не более одного решения (3), если f удовлетворяет условию монотонности, т.е.

$$(f(\cdot,t,u,\nabla u) - f(\cdot,t,v,\nabla v), u - v)_{L^2(\Omega)} \geqslant 0, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega), \quad \forall t \geqslant 0.$$

Вопросы существования неотрицательных целых решений (т.е. решений, определённых для всех $x \in \mathbb{R}^N$ и $t \in \mathbb{R}$) уравнения пористой среды:

$$\begin{cases} u_t - \Delta(u^m) = u^p, & x \in \mathbb{R}^N, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u \geqslant 0, & x \in \mathbb{R}^N, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{4}$$

где $p > m > 1$, изучал П. Супле [8]. Было показано, что при $p/m \geqslant p_S$ (4) допускает целые решения, но при $1 < p/m < p_S$ не имеет нетривиальных неотрицательных ограниченных радиальных решений, где p_S — критический показатель Соболева:

$$p_S = \begin{cases} (N+2)/(N-2), & \text{если} \quad N > 2, \\ +\infty, & \text{если} \quad N = 1, 2. \end{cases} \tag{5}$$

При $m = 1$ П. Полачик и П. Квиттнер [7] доказали, что не существует никаких положительных ограниченных целых решений (4) в классе радиально-симметричных функций при $1 < p < p_S$, тогда как при $p \geqslant p_S$ такие решения существуют.

Всякий раз, когда мы рассматриваем знакопеременные решения, нелинейность u^p интерпретируется как $|u|^{p-1}u$. В случае наличия нелинейного члена решения уравнения могут разрушаться, а именно, решения могут быть неограниченными на конечных временных интервалах.

Результаты о глобальном существовании и разрушении решений полулинейных параболических уравнений

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = |u|^{p-1} u, & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \, T > 0, \\ u(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{6}$$

были получены в работах [3–5]. Из стандартной теории мы знаем, что существует локальное (по времени) положительное решение задачи (6) с критическим показателем Соболева p_S, определённым в (5). В зависимости от начального данного u_0 было показано, что решение существует глобально, если u_0 мало, а если u_0 велико в некотором подходящем смысле, то соответствующее решение u разрушается за конечное время.

Для $\Omega = \mathbb{R}^N$ С. И. Похожаев [6] изучал разрушение глобальных знакопеременных решений уравнения (6) в классе функций, удовлетворяющих условию

$$u(x,t) \geqslant -c_1 exp\left(c_2 |x|^2\right), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \in (0,T) \quad \text{при} \quad T > 0,$$
$$u_0(x) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N), \quad u_0(x) \geqslant -M_0,$$

где c_1, c_2 и M_0 — положительные константы. Он доказал, что если начальная функция $v_0(x) := u_0(x) + M_0$ удовлетворяет неравенству

$$A_p R^{N+2-2p'} - R^N \int\limits_{|\xi|\leqslant 1} v_0(R\xi)\left(1 - |\xi|^2\right)^\beta \mathrm{d}\xi < 0$$

для некоторых $R = R_* > 1$, константы $A_p > 0$, $\beta > 0$ и $T_0 := M_0^{1-p}/(p-1) > R_*^2$, то существует $T_\infty \leqslant R_*^2$ такое, что

$$\int\limits_0^t \int\limits_{|x|\leqslant R_*} |u(x,t)|^p \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \to +\infty \text{ при } \quad t \to T_\infty.$$

Глобальное существование и разрушение решений обратного параболического уравнения с бигармоническим оператором

$$\begin{cases} u_t + \Delta^2 u = |u|^{p-1} u, & (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{7}$$

изучали Ф. Гаццола, Х. К. Грюнау [11]. Было доказано, что существует глобальное решение u задачи (7), если $p > 1 + 4/N, N \geqslant 2$ и существует $\alpha > 0$ такое, что

$$|u_0(x)| \leqslant \frac{\alpha}{1 + |x|^{4/(p-1)}}. \tag{8}$$

Кроме того, было показано, что если α достаточно велико и в (8) имеет место равенство, то любое положительное решение уравнения (7) разрушается за конечное время. Результат для задачи (7) может быть легко распространён на общие полулинейные параболические задачи более высокого порядка

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^k u = |u|^{p-1} u, & (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{9}$$

где $p > 1 + 2k/N$. Как и в бигармоническом случае, можно доказать для (9) тот же результат, что и для задачи (7), с заменой $1 + 4/N$ на $1 + 2k/N$ и $4/(p-1)$ на $2k/(p-1)$ (см. [10]).

Г. Кай, Х. Пан и Р. Син [14] исследовали проблему несуществования решений для полулинейной параболической системы уравнений более высокого порядка с переменной времени на $\mathbb{R}$. Они доказали, что если две функции $u \in L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{N+1})$ и $v \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{N+1})$ удовлетворяют параболической системе уравнений

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^m u = |v|^p, & (x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \\ v_t + (-\Delta)^m v = |u|^q, & (x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \end{cases} \tag{10}$$

то глобальное решение (10) тривиально (т.е. $u \equiv 0$, $v \equiv 0$) при $m \geqslant 1$ и p, $q > 1$ таких, что

$$\frac{N}{2m} \leqslant \max\left\{\frac{p+1}{pq-1}, \frac{q+1}{pq-1}\right\}.$$

Условия для локальной и глобальной разрешимости полулинейных эволюционных задач следующего типа также были изучены в [13]:

$$\begin{cases} u_t = -(-\Delta)^{\beta/2}u - V(x)u + t^\sigma h(x)u^p + W(x,t), & (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{11}$$

где $0 < T \leqslant +\infty$, $0 < \beta \leqslant 2$, $W(x,t) = t^\gamma w(x) \geqslant 0$, $\gamma > -1$ и потенциал V удовлетворяет условию

$$\limsup_{|x|\to+\infty} |V(x)|\, |x|^a < +\infty, \quad a > 0.$$

Результат работы [13] показывает, что для любого $\sigma > -1$, $p > \max\{1, 1+\sigma\}$ задача (11) не имеет глобального решения, если

$$\lim_{|x|\to+\infty} u_0^{p-1} h(x)\, |x|^{(1+\sigma)\inf\{\beta,a\}} = +\infty \tag{12}$$

или

$$\lim_{|x|\to+\infty} w^{p-1} h(x)\, |x|^{[\gamma(p-1)+p+\sigma]\inf\{\beta,a\}} = +\infty. \tag{13}$$

Было также доказано, что если $u_0(x)$ удовлетворяет условию (12), любые возможные локальные решения задачи (11) разрушаются за конечное время для любой локально интегрируемой функции W.

Э. Митидиери и С.И. Похожаев [1] и В. Галактионов и Дж.Л. Васкес [9] изучали отсутствие нетривиальных слабых положительных решений задачи

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}\left(|Du|^{m-2} Du\right) \geqslant u^q, & (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty), \\ u(x,t) \geqslant 0, & (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0, & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{14}$$

Было показано, что при $m > 1$ задача (14) не имеет нетривиальных слабых положительных решений, если

$$\max\{1, m-1\} < q \leqslant m - 1 + \frac{m}{N}.$$

В настоящей работе глобальная (при $t > 0$) разрешимость обратных параболических задач (1) и (2) в классе знакопеременных функций представляет особый интерес. Применяя метод пробных функций [1], мы получим условия отсутствия глобальных решений для этих задач с ограниченными интегрируемыми исходными данными.

Работа организована следующим образом. Во втором разделе мы определим слабые решения уравнений (1) и (2), получим необходимые оценки и введём пробные функции для последующего использования. Раздел 3 посвящён исследованию отсутствия решений обеих задач (1) и (2). Подробные формулировки основных результатов и их доказательства содержатся в этом разделе.

2. Предварительные оценки и определения

В этом разделе дадим определение слабого решения задач (1) и (2), а затем получим некоторые оценки, которые будут играть важную роль в следующем разделе. Большинство исследований уравнения p-Лапласа имеют дело со слабыми решениями (см. [1]). Хорошо известно, что решения уравнения p–Лапласа, как правило, принадлежат классу $C^{1,\alpha}$, и уравнение следует понимать в слабом (обобщённом) смысле.

В этой статье всюду можно считать, что Ω является ограниченной областью в $\mathbb{R}^N$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Будем предполагать, что параметры p и q в наших задачах удовлетворяют соотношению $q > p-1$ для $1 < p < \infty$.

Определение 1. Функция $u \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega \times [0,\infty);\mathbb{R}) \cap L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega \times [0,\infty);\mathbb{R})$ называется слабым решением задачи (1), если следующее интегральное тождество:

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_\Omega |u|^{q-1} u\varphi \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t =$$

$$= -\int\limits_0^\infty \int\limits_\Omega \left(|Du|^{p-2}(Du, D\varphi) + u\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int\limits_\Omega u_0(x)\varphi(x,0)\,\mathrm{d}x \quad (15)$$

выполняется для любой пробной функции $\varphi \in W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\Omega \times [0,\infty);\mathbb{R}_+)$ с компактным носителем, удовлетворяющей условию $\varphi(x,t) = 0$ на $\partial\Omega \times [0,\infty)$, где предполагается, что все интегралы существуют. Символ $\mathbb{R}_+$ обозначает множество неотрицательных действительных чисел.

Определение 2. Функция $u \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}^N \times [0,\infty);\mathbb{R}\right) \cap L^q_{\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}^N \times [0,\infty);\mathbb{R}\right)$ называется слабым решением задачи (2), если следующее интегральное тождество:

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^N} |u|^{q-1} u\varphi \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t =$$

$$= -\int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(|Du|^{p-2}(Du, D\varphi) + u\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int\limits_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\varphi(x,0)\,\mathrm{d}x \quad (16)$$

выполняется для любой пробной функции $\varphi \in W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}^N \times [0,\infty);\mathbb{R}_+\right)$ с компактным носителем, где предполагается, что все интегралы существуют.

Всюду в дальнейшем будем обозначать константы, не зависящие от R, x и t, символами $C_i, i = 1, 2, \ldots$. Прежде всего построим пробную функцию на $\Omega \times [0,\infty)$ и получим некоторые оценки. Позже введём подобную пробную функцию, но определённую на $\mathbb{R}^N$, и будем использовать соответствующие оценки для доказательства теорем 1 и 3 соответственно.

Пусть $\vartheta > 0$ и $R > 0$. При достаточно больших $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ выберем срезающую функцию φ_R, определённую по формуле

$$\varphi_R(x,t) = \xi^{\lambda_1}\left(\frac{|x|}{R}\right)\eta^{\lambda_2}\left(\frac{t}{R^\vartheta}\right), \quad x \in \Omega, \quad t \in [0,\infty), \quad (17)$$

где $\xi, \eta \in C_0^\infty([0,\infty);[0,1])$ – две гладкие функции такие, что $0 \leqslant \xi(s) \leqslant 1$, $-C_1 \leqslant \xi'(s) \leqslant 0$ и

$$\xi(s) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad 0 \leqslant s \leqslant 1, \\ 0, & \text{если} \quad s \geqslant 2, \end{cases} \tag{18}$$

$0 \leqslant \eta(\tau) \leqslant 1, \quad -C_1 \leqslant \eta'(\tau) \leqslant 0$ и

$$\eta(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 1, \\ 0, & \text{если} \quad \tau \geqslant 2. \end{cases} \tag{19}$$

Замечание 1. Отметим, что параметр R выбран так, что

$$\left\{(x,t) \in \Omega \times [0,\infty) : |x| \leqslant 2R, \quad t \leqslant 2R^\vartheta\right\}$$

полностью лежит в $\Omega \times [0,\infty)$.

Непосредственным вычислением мы получим

$$\left|\frac{\mathrm{d}\xi\left(\frac{r}{R}\right)}{\mathrm{d}r}\right| \leqslant \frac{C_1}{R}, \quad \left|\frac{\mathrm{d}\eta\left(\frac{t}{R^\vartheta}\right)}{\mathrm{d}t}\right| \leqslant \frac{C_1}{R^\vartheta},$$

где $r = |x|$.

Далее при $\alpha > 1$ и $\beta > 1$ установим оценки для $|D\varphi_R|^\beta \varphi_R^{1-\beta}$ и $\left|\frac{\partial\varphi_R}{\partial t}\right|^\alpha \varphi_R^{1-\alpha}$:

$$|D\varphi_R|^\beta \varphi_R^{1-\beta} = \left|\eta^{\lambda_2}\left(\frac{t}{R^\vartheta}\right)\lambda_1\xi^{\lambda_1-1}\left(\frac{r}{R}\right)\frac{\mathrm{d}\xi\left(\frac{r}{R}\right)}{\mathrm{d}r}\right|^\beta \left(\xi^{\lambda_1}\left(\frac{r}{R}\right)\eta^{\lambda_2}\left(\frac{t}{R^\vartheta}\right)\right)^{1-\beta} \leqslant$$
$$\leqslant C_2(\lambda_1,\beta)R^{-\beta}\xi^{\lambda_1-\beta}\left(\frac{r}{R}\right)\eta^{\lambda_2}\left(\frac{t}{R^\vartheta}\right).$$

Поскольку $0 \leqslant \xi,\ \eta \leqslant 1$, имеем

$$|D\varphi_R|^\beta \varphi_R^{1-\beta} \leqslant C_2(\lambda_1,\beta)R^{-\beta} \quad \text{при} \quad \lambda_1 > \beta. \tag{20}$$

Аналогично

$$\left|\frac{\partial\varphi_R}{\partial t}\right|^\alpha \varphi_R^{1-\alpha} \leqslant C_3(\lambda_2,\alpha)R^{-\vartheta\alpha} \quad \text{при} \quad \lambda_2 > \alpha. \tag{21}$$

Поскольку $\xi \equiv 1$, когда $r \leqslant R$, и $\eta \equiv 1$, когда $t \leqslant R^\vartheta$, мы знаем, что $D\varphi_R(x,t) = 0$ при $r \leqslant R$ и $\frac{\partial}{\partial t}\varphi_R(x,t) = 0$ при $t \leqslant R^\vartheta$, и мы имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{supp}(\varphi_R) &\subset \{x \in \Omega : |x| \leqslant 2R\} \times \left\{t \in [0,\infty) : t \leqslant 2R^\vartheta\right\}, \\ \operatorname{supp}(|D\varphi_R|) &\subset \{x \in \Omega : R \leqslant |x| \leqslant 2R\} \times \left\{t \in [0,\infty) : t \leqslant 2R^\vartheta\right\}, \\ \operatorname{supp}\left(\left|\frac{\partial\varphi_R}{\partial t}\right|\right) &\subset \{x \in \Omega : |x| \leqslant 2R\} \times \left\{t \in [0,\infty) : R^\vartheta \leqslant t \leqslant 2R^\vartheta\right\}. \end{aligned} \tag{22}$$

Отсюда следует, что

$$\iint\limits_{\operatorname{supp}(|D\varphi_R|)} |D\varphi_R(x,t)|^\beta \varphi_R^{1-\beta}(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t =$$

$$= C_2(\lambda_1,\beta)R^{-\beta}\int\limits_0^{2R^{\vartheta}}\int\limits_{\{x\in\Omega:R\leqslant|x|\leqslant 2R\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant C_4(\lambda_1,\beta,\vartheta)R^{N+\vartheta-\beta}, \quad (23)$$

$$\iint\limits_{\mathrm{supp}\left(\left|\frac{\partial\varphi_R}{\partial t}\right|\right)}\left|\frac{\partial\varphi_R(x,t)}{\partial t}\right|^{\alpha}\varphi_R^{1-\alpha}(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t =$$

$$= C_3(\lambda_2,\alpha)R^{-\vartheta\alpha}\int\limits_{R^{\vartheta}}^{2R^{\vartheta}}\int\limits_{\{x\in\Omega:|x|\leqslant 2R\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant C_5(\lambda_2,\alpha,\vartheta)R^{N+\vartheta-\vartheta\alpha}. \quad (24)$$

Теперь предположим, что функция $u\in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega\times[0,\infty);\mathbb{R})\cap L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega\times[0,\infty);\mathbb{R})$ является нетривиальным слабым решением задачи (1) в смысле определения 1. Для любого такого решения u обозначим его положительную часть как

$$u^+(x,t) := \max\{u(x,t),0\}$$

и его отрицательную часть как

$$u^-(x,t) := \min\{u(x,t),0\}.$$

Введём множества

$$\begin{aligned} D_+(\Omega) &:= \{(x,t)\in\Omega\times[0,\infty) : u(x,t)>0\}, \\ D_-(\Omega) &:= \{(x,t)\in\Omega\times[0,\infty) : u(x,t)\leqslant 0\}, \\ D_{0+}(\Omega) &:= \{x\in\Omega : u_0(x)>0\}, \\ D_{0-}(\Omega) &:= \{x\in\Omega : u_0(x)\leqslant 0\}. \end{aligned}$$

Аналогично можно определить $D_+(\mathbb{R}^N)$, $D_-(\mathbb{R}^N)$ $D_{0+}(\mathbb{R}^N)$ и $D_{0-}(\mathbb{R}^N)$.

Следующие леммы играют важную роль в доказательствах наших результатов об отсутствии решений. Рассуждая аналогично [1, Лемма 33.1], можно доказать следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть u — слабое решение (1), и пусть $\delta>0$. Тогда для любой неотрицательной пробной функции $\varphi_R\in W^{1,\infty}(\Omega\times[0,\infty);\mathbb{R}_+)$ с компактным носителем выполняется следующее неравенство:*

$$\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{\Omega}|u|^{q-1}u\left(u^+\right)^{\delta}\varphi_R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t + C_6\iint\limits_{D_+(\Omega)}\left(u^+\right)^{\delta-1}\left|Du^+\right|^p\varphi_R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant$$

$$\leqslant C_7\iint\limits_{D_+(\Omega)}\left(u^+\right)^{p-1+\delta}|D\varphi_R|^p\varphi_R^{1-p}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t + C_8\iint\limits_{D_+(\Omega)}\left(u^+\right)^{\delta+1}\left|\frac{\partial\varphi_R}{\partial t}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}t -$$

$$-\frac{1}{1+\delta}\int\limits_{D_{0+}(\Omega)}\left(u_0^+\right)^{\delta+1}\xi^{\lambda_1}\left(\frac{|x|}{R}\right)\mathrm{d}x, \quad (25)$$

где $|u|^{q-1}u\left(u^+\right)^{\delta}$, $\left|Du^+\right|^p\left(u^+\right)^{\delta-1}\in L^1_{loc}(\Omega\times[0,\infty))$ и $C_i=C_i(\delta)>0$, $i=6,7,8$ для данного $\delta>0$.

Доказательство. Пусть u — нетривиальное слабое решение (1) и $\delta > 0$. Если $u^+ > 0$, то возьмём пробную функцию $(u^+)^\delta \varphi_R$, иначе положим

$$u_\varepsilon^+(x,t) := u^+(x,t) + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (x,t) \in \Omega \times [0,\infty).$$

Функцию φ_ε определим следующим образом:

$$\varphi_\varepsilon(x,t) := \left(u_\varepsilon^+\right)^\delta (x,t)\varphi_R(x,t), \tag{26}$$

где φ_R — пробная функция, заданная в (17) с компактным носителем, удовлетворяющая условию $\varphi_R(x,t) = 0$ на $\partial\Omega\times[0,\infty)$; функции φ_ε могут быть использованы в качестве пробных функций в определениях 1 и 2.

Предположим, что u^+ не тождественно равна нулю на $\Omega \times [0,\infty)$. Умножая (1) на φ_ε и интегрируя по частям на $\Omega \times [0,\infty)$, получаем

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_\Omega |u|^{q-1} u \left(u_\varepsilon^+\right)^\delta \varphi_R \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \delta \iint\limits_{D_+(\Omega)} \left(u_\varepsilon^+\right)^{\delta-1} \left|Du^+\right|^p \varphi_R \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant$$
$$\leqslant \iint\limits_{D_+(\Omega)} \left(u_\varepsilon^+\right)^\delta \left|Du^+\right|^{p-1} |D\varphi_R| \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \frac{1}{1+\delta} \iint\limits_{D_+(\Omega)} \left(u_\varepsilon^+\right)^{\delta+1} \left|\frac{\partial\varphi_R}{\partial t}\right| \mathrm{d}x\mathrm{d}t-$$
$$- \frac{1}{1+\delta} \int\limits_{D_{0+}(\Omega)} \left(u_\varepsilon^+\right)^{\delta+1} \varphi_R \,\mathrm{d}x|_{t=0} + \varepsilon^\delta \iint\limits_{D_-(\Omega)} \Big(|u_t|\,\varphi_R + |Du|^{p-1} |D\varphi_R|\Big) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \tag{27}$$

До сих пор нам не требовались никакие условия на параметр δ, за исключением положительности.

Применяя неравенство Юнга с параметром $\mu > 0$ к первому интегралу в правой части неравенства (27), получаем

$$\iint\limits_{D_+(\Omega)} \left(u_\varepsilon^+\right)^\delta \left|Du^+\right|^{p-1} |D\varphi_R| \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant \mu \iint\limits_{D_+(\Omega)} \left(u_\varepsilon^+\right)^{\delta-1} \left|Du^+\right|^p \varphi_R \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t+$$
$$+ C_9(\mu) \iint\limits_{D_+(\Omega)} \left(u_\varepsilon^+\right)^{p-1+\delta} |D\varphi_R|^p \varphi_R^{1-p} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

Теперь выберем μ так, что $\mu < \delta$. Тогда из неравенства (27) получаем

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_\Omega |u|^{q-1} u \left(u_\varepsilon^+\right)^\delta \varphi_R \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t + C_{10}(\delta,\mu) \iint\limits_{D_+(\Omega)} \left(u_\varepsilon^+\right)^{\delta-1} \left|Du^+\right|^p \varphi_R \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant$$
$$\leqslant C_9(\mu) \iint\limits_{D_+(\Omega)} \left(u_\varepsilon^+\right)^{p-1+\delta} |D\varphi_R|^p \varphi_R^{1-p} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \frac{1}{1+\delta} \iint\limits_{D_+(\Omega)} \left(u_\varepsilon^+\right)^{\delta+1} \left|\frac{\partial\varphi_R}{\partial t}\right| \mathrm{d}x\mathrm{d}t-$$
$$- \frac{1}{1+\delta} \int\limits_{D_{0+}(\Omega)} \left(u_\varepsilon^+\right)^{\delta+1} \varphi_R \,\mathrm{d}x|_{t=0} + \varepsilon^\delta \iint\limits_{D_-(\Omega)} \Big(|u_t|\,\varphi_R + |Du|^{p-1} |D\varphi_R|\Big) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \tag{28}$$

где $C_{10}(\delta,\mu) := \delta - \mu$ и $C_9(\mu)$ — положительные постоянные.

Далее выберем

$$\varepsilon := \varepsilon_n = \left(n \iint\limits_{supp(\varphi_R + |D\varphi_R|)} \left(|u_t| \, \varphi_R + |Du|^{p-1} \, |D\varphi_R| \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}t \right)^{-\frac{1}{\delta}} \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Отсюда имеем

$$\varepsilon^\delta \iint\limits_{D_-(\Omega)} \left(|u_t| \, \varphi_R + |Du|^{p-1} \, |D\varphi_R| \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon^\delta \iint\limits_{supp(\varphi_R + |D\varphi_R|)} \left(|u_t| \, \varphi_R + |Du|^{p-1} \, |D\varphi_R| \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}t = \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Применяя теоремы Фату и Лебега при $\varepsilon \to 0$, получаем требуемое утверждение из неравенства (28). □

Лемма 2. *Пусть u — слабое решение* (2) *и пусть $\delta > 0$. Тогда для любой пробной функции $\varphi_R \in W^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^N \times [0,\infty); \mathbb{R}_+\right)$ с компактным носителем выполняется следующее неравенство:*

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^N} |u|^{q-1} \, u \left(u^+\right)^\delta \varphi_R \, \mathrm{d}x\mathrm{d}t + C_{11} \iint\limits_{D_+(\mathbb{R}^N)} \left(u^+\right)^{\delta-1} \left|Du^+\right|^p \varphi_R \, \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant$$
$$\leqslant C_{12} \iint\limits_{D_+(\mathbb{R}^N)} \left(u^+\right)^{p-1+\delta} |D\varphi_R|^p \, \varphi_R^{1-p} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}t + C_{13} \iint\limits_{D_+(\mathbb{R}^N)} \left(u^+\right)^{\delta+1} \left| \frac{\partial \varphi_R}{\partial t} \right| \mathrm{d}x\mathrm{d}t -$$
$$- \frac{1}{1+\delta} \int\limits_{D_{0+}(\mathbb{R}^N)} \left(u_0^+\right)^{\delta+1} \xi^{\lambda_1} \left(\frac{|x|}{R} \right) \mathrm{d}x, \quad (29)$$

где $|u|^{q-1} \, u \left(u^+\right)^\delta, \left|Du^+\right|^p \left(u^+\right)^{\delta-1} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N \times [0,\infty))$.

Доказательство. Доказательство этой леммы полностью аналогично доказательству леммы 1. □

3. Результаты об отсутствии решений и их доказательства

В этом разделе путём использования предварительных результатов и оценок, полученных в разделе 2, докажем отсутствие глобальных решений задач (1) и (2) при соответствующих предположениях.

Докажем сначала результаты об отсутствии глобального решения задачи (1). Начнём с определения допустимого класса решений задачи (1). Пусть $\delta > 0$ достаточно мало, $1 < p < \infty$ и $q > p - 1$. Определим $W^{1,p}_{u^+,\delta,\,\mathrm{loc}}(\Omega \times [0,\infty); \mathbb{R})$ как

$$W^{1,p}_{u^+,\delta,\,\mathrm{loc}}(\Omega \times [0,\infty); \mathbb{R}) := \{u : \Omega \times [0,\infty) \to \mathbb{R},$$
$$\left(u^+\right)^{q+\delta}, \left|Du^+\right|^p \left(u^+\right)^{\delta-1} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega \times [0,\infty); \mathbb{R}) \Big\},$$

где Du понимается в смысле распределений.

Аналогично можно определить $W^{1,p}_{u^-,\delta,\,\mathrm{loc}}(\Omega\times[0,\infty);\mathbb{R})$, и положим

$$W^{1,p}_{\delta,\,\mathrm{loc}}\left(\Omega\times[0,\infty);\mathbb{R}\right) := W^{1,p}_{u^+,\delta,\,\mathrm{loc}}\left(\Omega\times[0,\infty);\mathbb{R}\right)\cap W^{1,p}_{u^-,\delta,\,\mathrm{loc}}\left(\Omega\times[0,\infty);\mathbb{R}\right).$$

Следующая теорема является первым основным результатом этого раздела.

Теорема 1. *Предположим, что* $u_0\in L^1_{loc}(\Omega;\mathbb{R})$ *и* $q>\max\{1,p-1\}$. *Если для любого достаточно малого* $\delta>0$ *существуют константы* $C, C', R_0>0$, *такие что*

$$\begin{gathered}CR_0^{\omega}-\frac{1}{1+\delta}\left\|u_0^+\right\|^{\delta+1}_{L^{\delta+1}_{\xi}(D_{0+}(\Omega))}\leqslant 0,\quad C'R_0^{\omega}-\frac{1}{1+\delta}\left\|-u_0^-\right\|^{\delta+1}_{L^{\delta+1}_{\xi}(D_{0-}(\Omega))}\leqslant 0,\\ \operatorname{supp}\left(\xi\left(\frac{|x|}{R_0}\right)\right)\subset\Omega,\end{gathered}\tag{30}$$

где

$$\omega:=\frac{N(q-p+1)-p(\delta+1)}{q-p+1},$$

$$\|\cdot\|_{L^{\delta+1}_{\xi}(D_{0\pm}(\Omega))}:=\left(\int\limits_{D_{0\pm}(\Omega)}(\cdot)^{\delta+1}\,\xi^{\lambda_1}\left(\frac{|x|}{R_0}\right)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{\delta+1}},$$

то задача (1) *не имеет глобальных нетривиальных решений в классе* $W^{1,p}_{\delta,\,loc}(\Omega\times[0,\infty);\mathbb{R})$.

Доказательство. Рассуждаем от противного. Предположим, что u является глобальным нетривиальным решением задачи (1). Возьмём пробную функцию $\varphi_{R_0}\in W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\Omega\times[0,\infty);\mathbb{R}_+)$, определённую формулой (17), удовлетворяющую (18) и (19). Заметим сначала, что

$$|u(x,t)|^{q-1}\,u(x,t)u^+(x,t)=\left(u^+(x,t)\right)^{q+1}\ \text{ при почти всех } (x,t)\in\Omega\times[0,\infty).$$

Далее, учитывая, что второй интеграл в левой части неравенства (25) неотрицателен, из леммы 1 получаем

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{\Omega}|u|^{q-1}\,u\left(u^+\right)^{\delta}\varphi_{R_0}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{\Omega}\left(u^+\right)^{q+\delta}\varphi_{R_0}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\iint\limits_{D_+(\Omega)}\left(u^+\right)^{q+\delta}\varphi_{R_0}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant\\ \leqslant C_7\iint\limits_{D_+(\Omega)}\left(u^+\right)^{p-1+\delta}|D\varphi_{R_0}|^p\,\varphi_{R_0}^{1-p}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t+C_8\iint\limits_{D_+(\Omega)}\left(u^+\right)^{\delta+1}\left|\frac{\partial\varphi_{R_0}}{\partial t}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\\ -\frac{1}{1+\delta}\int\limits_{D_{0+}(\Omega)}\left(u_0^+\right)^{\delta+1}\xi^{\lambda_1}\left(\frac{|x|}{R_0}\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{31}$$

Применяя неравенство Юнга с параметрами γ, $\sigma>0$ к первым двум интегралам в правой части неравенства (31), получаем

$$\iint\limits_{D_+(\Omega)}\left(u^+\right)^{p-1+\delta}|D\varphi_{R_0}|^p\,\varphi_{R_0}^{1-p}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant\gamma\iint\limits_{D_+(\Omega)}\left(u^+\right)^{q+\delta}\varphi_{R_0}\mathrm{d}x\mathrm{d}t+$$

$$+ C_{14}(\gamma) \iint\limits_{D_+(\Omega)\cap supp(\left|D\varphi_{R_0}\right|)} \left|D\varphi_{R_0}\right|^{p\chi'} \varphi_{R_0}^{1-p\chi'}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \quad (32)$$

и

$$\iint\limits_{D_+(\Omega)} \left(u^+\right)^{\delta+1} \left|\frac{\partial\varphi_{R_0}}{\partial t}\right| \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant \sigma \iint\limits_{D_+(\Omega)} \left(u^+\right)^{q+\delta} \varphi_{R_0}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t +$$

$$+ C_{15}(\sigma) \iint\limits_{D_+(\Omega)\cap supp(\left|\frac{\partial\varphi_{R_0}}{\partial t}\right|)} \left|\frac{\partial\varphi_{R_0}}{\partial t}\right|^{m'} \varphi_{R_0}^{1-m'}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \quad (33)$$

где

$$\chi = \frac{q+\delta}{p-1+\delta},\quad \chi' = \frac{\chi}{\chi-1},\quad m = \frac{q+\delta}{\delta+1},\quad m' = \frac{m}{m-1}.$$

Подставляя неравенства (32) и (33) в (31), а затем выбирая γ и σ достаточно малыми, получаем

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_\Omega \left(u^+\right)^{q+\delta} \varphi_{R_0}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant C_{16} \iint\limits_{D_+(\Omega)\cap supp(\left|D\varphi_{R_0}\right|)} \left|D\varphi_{R_0}\right|^{p\chi'} \varphi_{R_0}^{1-p\chi'}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t +$$

$$+ C_{17} \iint\limits_{D_+(\Omega)\cap supp(\left|\frac{\partial\varphi_{R_0}}{\partial t}\right|)} \left|\frac{\partial\varphi_{R_0}}{\partial t}\right|^{m'} \varphi_{R_0}^{1-m'}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \frac{1}{1+\delta} \int\limits_{D_{0+}(\Omega)} \left(u_0^+\right)^{\delta+1} \xi^{\lambda_1}\left(\frac{|x|}{R_0}\right)\mathrm{d}x, \quad (34)$$

где C_{16} и C_{17} — положительные константы, зависящие от $\mu, \sigma, \gamma, \delta, p$ и q.

Теперь в силу оценки (23) и (24) для $\beta := p\chi'$ и $\alpha = m'$ можем переписать неравенство (34) как

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_\Omega \left(u^+\right)^{q+\delta} \varphi_{R_0}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant$$

$$\leqslant C_{18}R_0^{N+\vartheta-p\chi'} + C_{19}R_0^{N+\vartheta-\vartheta m'} - \frac{1}{1+\delta} \int\limits_{D_{0+}(\Omega)} \left(u_0^+\right)^{\delta+1} \xi^{\lambda_1}\left(\frac{|x|}{R_0}\right)\mathrm{d}x,$$

где C_{18} и C_{19} — положительные константы, зависящие от λ_1, λ_2, ϑ, μ, δ, σ, γ, p и q.

Это означает, что

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_\Omega \left(u^+\right)^{q+\delta} \varphi_{R_0}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant$$

$$\leqslant C_{20}\left(R_0^{N+\vartheta-p\chi'} + R_0^{N+\vartheta-\vartheta m'}\right) - \frac{1}{1+\delta} \int\limits_{D_{0+}(\Omega)} \left(u_0^+\right)^{\delta+1} \xi^{\lambda_1}\left(\frac{|x|}{R_0}\right)\mathrm{d}x, \quad (35)$$

где $C_{20} = \max\{C_{18}, C_{19}\} > 0$.

Легко видеть, что выражение в скобках в правой части неравенства (35) минимально тогда и только тогда, когда оба слагаемых имеют одинаковый показатель, то есть оптимальное значение ϑ равно $p(p-1)/(q-p+1)$. Отсюда следует, что

$$0 \leqslant \int\limits_0^\infty \int\limits_\Omega \left(u^+\right)^{q+\delta} \varphi_{R_0}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant C_{20} R_0^\omega - \frac{1}{1+\delta} \int\limits_{D_{0+}(\Omega)} \left(u_0^+\right)^{\delta+1} \xi^{\lambda_1} \left(\frac{|x|}{R_0}\right) \mathrm{d}x. \quad (36)$$

Из условий (30) легко видно, что правая часть неравенства (36) является неположительной, то есть

$$0 \leqslant \int\limits_0^\infty \int\limits_\Omega \left(u^+\right)^{q+\delta} \varphi_{R_0}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant 0.$$

Это означает, что $u^+ \equiv 0$ почти всюду в $\Omega \times [0,\infty)$. Следовательно, $u \leqslant 0$ почти всюду в $\Omega \times [0,\infty)$.

С другой стороны, предположим, что u^- не равна тождественно нулю в $\Omega \times [0,\infty)$, и умножая (1) на пробную функцию

$$\Phi_\varepsilon(x,t) := \left(-u^-(x,t) + \varepsilon\right)^\delta \varphi_{R_0}(x,t) \quad (37)$$

вместо (26) и интегрируя по частям на $\Omega \times [0,\infty)$, получаем

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_\Omega \left(-u^-\right)^{q+\delta} \varphi_{R_0}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}t + C_6 \iint\limits_{D_-(\Omega)} \left(-u^-\right)^{\delta-1} \left|Du^-\right|^p \varphi_{R_0}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant$$
$$\leqslant C_7 \iint\limits_{D_-(\Omega)} \left(-u^-\right)^{p-1+\delta} \left|D\varphi_{R_0}\right|^p \varphi_{R_0}^{1-p}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}t + C_8 \iint\limits_{D_-(\Omega)} \left(-u^-\right)^{\delta+1} \left|\frac{\partial \varphi_{R_0}}{\partial t}\right| \mathrm{d}x\mathrm{d}t -$$
$$- \frac{1}{1+\delta} \int\limits_{D_{0-}(\Omega)} \left(-u_0^-\right)^{\delta+1} \xi^{\lambda_1} \left(\frac{|x|}{R_0}\right) \mathrm{d}x. \quad (38)$$

Аналогично предыдущим рассуждениям из (38) получаем

$$0 \leqslant \int\limits_0^\infty \int\limits_\Omega \left(-u^-\right)^{q+\delta} \varphi_{R_0}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant 0,$$

откуда следует $u^- \equiv 0$ почти всюду в $\Omega \times [0,\infty)$ и, следовательно, $u \geqslant 0$ почти всюду в $\Omega \times [0,\infty)$. В результате получаем отсутствие нетривиальных решений задачи (1), что противоречит нашему предположению. Это завершает доказательство. $\square$

В частности, при $p = 2$ получаем полулинейную параболическую задачу

$$\begin{cases} u_t = -\Delta u + |u|^{q-1} u, & (x,t) \in \Omega \times (0,\infty), \\ u(x,t) = 0, & (x,t) \in \Omega \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (39)$$

Следующий результат непосредственно следует из теоремы 1.

Следствие 1. Предположим, что $u_0 \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{R})$ и $q > 1$. Если для любого достаточно малого $\delta > 0$ существуют константы $C, C', R_0 > 0$, удовлетворяющие условию (30), то задача (39) не имеет глобальных нетривиальных решений в классе $W^{1,2}_{\delta,\mathrm{loc}}(\Omega \times [0,\infty);\mathbb{R})$.

Далее мы изучаем результаты об отсутствии решений задачи (2). Рассмотрим пробную функцию $\varphi_R \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N \times [0,\infty);\mathbb{R}_+)$, определённую как

$$\varphi_R(x,t) = \xi^{\lambda_1}\left(\frac{|x|}{R}\right)\eta^{\lambda_2}\left(\frac{t}{R^{\vartheta}}\right), \quad x \in \mathbb{R}^N, \ t \in [0,\infty), \tag{40}$$

где $\xi, \ \eta \in C_0^{\infty}([0,\infty);[0,1])$ удовлетворяет свойствам (18) и (19).

Легко понять, что соответствующие неравенства (20)–(25) справедливы и с пробной функцией (40) в области $\mathbb{R}^N \times [0,\infty)$. Мы применяем аналогичные процедуры, чтобы доказать эти неравенства.

Аналогично можно определить допустимый класс решений задачи (2) как

$$W^{1,p}_{\delta,\,\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}^N \times [0,\infty);\mathbb{R}\right) := W^{1,p}_{u^+,\delta,\,\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}^N \times [0,\infty);\mathbb{R}\right) \cap W^{1,p}_{u^-,\delta,\,\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}^N \times [0,\infty);\mathbb{R}\right),$$

где $1 < p < \infty$, и $\delta > 0$ достаточно мало.

Второй основной результат этого раздела заключается в следующем.

Теорема 2. *Предположим, что $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R})$ и $\delta > 0$ достаточно мало. Если*

$$\max\{1, p-1\} < q \leqslant p - 1 + \frac{p(\delta+1)}{N}, \tag{41}$$

то задача (2) не имеет глобальных нетривиальных решений класса $W^{1,p}_{\delta,loc}(\mathbb{R}^N \times [0,\infty);\mathbb{R})$.

Доказательство. Пусть u является глобальным нетривиальным решением задачи (2). Возьмём пробную функцию $\varphi_R \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N \times [0,\infty);\mathbb{R})$, определённую формулой (40).

Применяя те же рассуждения, что и в доказательстве теоремы 1, устанавливаем

$$\iint\limits_{D_+(\mathbb{R}^N)} \left(u^+\right)^{q+\delta} \varphi_R \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant C_{21}R^{\omega} - \frac{1}{1+\delta}\int\limits_{D_{0+}(\mathbb{R}^N)} \left(u_0^+\right)^{\delta+1}\xi^{\lambda_1}\left(\frac{|x|}{R}\right)\mathrm{d}x, \tag{42}$$

где C_{21} — положительная постоянная, не зависящая от R, x и t. Параметр ω определён в (30). Сужая область интегрирования в левой части неравенства (42) на $\left\{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leqslant R\right\} \times \left\{t \in [0,\infty) : t \leqslant R^{\vartheta}\right\}$, где $\varphi_R \equiv 1$, в силу (18) и (19) получаем

$$0 \leqslant \int\limits_0^{R^{\vartheta}} \int\limits_{\{x\in\mathbb{R}^N:|x|\leqslant R\}} \left(u^+\right)^{q+\delta}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant C_{22}R^{\omega}. \tag{43}$$

Если выполнено строгое неравенство в (41), т.е.

$$\max\{1, p-1\} < q < p - 1 + \frac{p(\delta+1)}{N},$$

то, переходя к пределу при $R \to \infty$ в (43), получаем, что правая часть неравенства (43) не является положительной. Следовательно,

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \left(u^+\right)^{q+\delta} \mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0,$$

откуда следует, что $u^+ \equiv 0$ почти всюду в $\mathbb{R}^N \times [0, \infty)$. Таким образом, $u \leqslant 0$ почти всюду в $\mathbb{R}^N \times [0, \infty)$.

Если $q = p - 1 + p(\delta + 1)/N$ (т. е. $\omega = 0$), то из неравенства (43) следует, что $u^+ \in L^{q+\delta}(\mathbb{R}^N \times [0, \infty))$.

Поскольку u является слабым решением задачи (2), из (29) имеем

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \left(u^+\right)^{q+\delta} \varphi_R \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant C_{12} \iint\limits_{D_+(\mathbb{R}^N)} \left(u^+\right)^{p-1+\delta} |D\varphi_R|^p \varphi_R^{1-p} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \\ + C_{13} \iint\limits_{D_+(\mathbb{R}^N)} \left(u^+\right)^{\delta+1} \left|\frac{\partial \varphi_R}{\partial t}\right| \mathrm{d}x\mathrm{d}t. \quad (44)$$

Применяя неравенство Гельдера, из (44) получаем

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \left(u^+\right)^{q+\delta} \varphi_R \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant \\ \leqslant C_{12} \left(\iint\limits_{D_+(\mathbb{R}^N)} \left(u^+\right)^{q+\delta} \varphi_R \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{\chi}} \left(\iint\limits_{D_+(\mathbb{R}^N)} |D\varphi_R|^{p\chi'} \varphi_R^{1-p\chi'} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{\chi'}} + \\ + C_{13} \left(\iint\limits_{D_+(\mathbb{R}^N)} \left(u^+\right)^{q+\delta} \varphi_R \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{m}} \left(\iint\limits_{D_+(\mathbb{R}^N)} \left|\frac{\partial \varphi_R}{\partial t}\right|^{m'} \varphi_R^{1-m'} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{m'}}, \quad (45)$$

где $\chi, \chi', m,$ и m' определены, как в (32) и (33).

Теперь, если принять во внимание наш выбор φ_R, из (45) следует

$$\int_0^{R^\vartheta} \int_{\{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leqslant R\}} \left(u^+\right)^{q+\delta} \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant \\ \leqslant C_{12} \left(\iint\limits_{G_R} \left(u^+\right)^{q+\delta} \varphi_R \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{\chi}} \left(\iint\limits_{G_R} |D\varphi_R|^{p\chi'} \varphi_R^{1-p\chi'} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{\chi'}} + \\ + C_{13} \left(\iint\limits_{G_R} \left(u^+\right)^{q+\delta} \varphi_R \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{m}} \left(\iint\limits_{G_R} \left|\frac{\partial \varphi_R}{\partial t}\right|^{m'} \varphi_R^{1-m'} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{m'}}, \quad (46)$$

где

$$G_R := D_+(\mathbb{R}^N) \cap \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,\infty) : R \leqslant |x| \leqslant 2R,\ R^\vartheta \leqslant t \leqslant 2R^\vartheta \right\}.$$

Поскольку $u^+ \in L^{q+\delta}(\mathbb{R}^N \times [0,\infty))$, существует последовательность $\{R_k\} \to \infty$ при $k \to \infty$ такая, что

$$\lim_{k\to\infty} \iint\limits_{G_{R_k}} \left(u^+\right)^{q+\delta} \varphi_R \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0. \tag{47}$$

Комбинируя предельное соотношение (47) с неравенством (46), приходим к

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_0^{R^\vartheta} \int\limits_{\{x\in\mathbb{R}^N:|x|\leqslant R\}} \left(u^+\right)^{q+\delta} \mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(u^+\right)^{q+\delta} \mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0.$$

Таким образом, $u^+ \equiv 0$ почти всюду в $\mathbb{R}^N \times [0,\infty)$. То есть $u \leqslant 0$.

Аналогично можно легко показать, что $u^- \equiv 0$ почти всюду в $\mathbb{R}^N \times [0,\infty)$, с помощью пробных функций (37) вместо (26). Таким образом, $u \equiv 0$ почти всюду в $\mathbb{R}^N \times [0,\infty)$. Но это противоречит предположению, что u является нетривиальным решением задачи (2). Это противоречие завершает доказательство. □

При $p = 2$ справедливо следующее предложение.

Следствие 2. Предположим, что $u_0 \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R})$ и $\delta > 0$ достаточно мало. Если

$$1 < q \leqslant 1 + \frac{2(\delta+1)}{N},$$

то задача

$$\begin{cases} u_t = -\Delta u + |u|^{q-1} u, & (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

не имеет глобальных нетривиальных решений в классе $W^{1,2}_{\delta,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N \times [0,\infty);\mathbb{R})$.

Литература

1. *Митидиери Э., Похожаев С. И.* Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных // Тр. МИАН. — М.: Наука, 2001. — Т. 234, № 3. — 362 с. [Mitidieri E., Pohozaev S. I. A Priori Estimates and the Absence of Solutions of Non- linear Partial Differential Equations and Inequalities // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 2001. — Vol. 234, No 3. — 362 p. — (in russian).]
2. *Gong-ming W., Zu-chi C.* Nonexistence of Global Positive Solutions for Quasi-Linear Parabolic Inequalities // Jou. Univ. Sc. & Tech. China. — 2004. — Vol. 34, No 3. — Pp. 2903–2916.
3. *Ma L.* Blow – Up for Semi-Linear Parabolic Equations with Critical Sobolev Exponent // Pure and Applied Analysis. — 2013. — Vol. 12, No 2. — Pp. 1103–1110. — `doi:10.3934/cpaa.2013.12.1103`.
4. *Fila M., Souplet P.* The Blow-Up Rate for Semi-Linear Parabolic Problems on General Domains. — Basel: Birkhauser Verlag, 2001. — Vol. 8, Pp. 473–480.
5. *Gazzola F., Weth T.* Finite Time Blow-Up and Global Solutions for Semilinear Parabolic Equations with Initial Data at High Energy Level // Differential and Integral Equations. — 2005. — Vol. 18, No 9. — Pp. 961–990.

6. *Pohozaev S.* Blow-Up of Global Sign-Changing Solutions of a Nonlinear Heat Equation // Doklady Mathematics. — 2012. — Vol. 85, issue 2. — Pp. 225–228.
7. *Polacik P., Quittner P.* A Liouville-Type Theorem and the Decay of Radial Solutions of a Semilinear Heat Equation // Nonlinear Anal. — 2006. — Vol. 64. — Pp. 1679–1689.
8. *Souplet P.* An Optimal Liouville-Type Theorem for Radial Entire Solutions of the Porous Medium Equation with Source // J. Differential Equations. — 2009. — Vol. 246. — Pp. 3980 – 4005.
9. *Galaktionov V., Vazquez J. L.* Extinction for a Quazilinear Heat Equation with Absorption // Comm. PDE. — 1994. — Vol. 19. — Pp. 1075–1106.
10. *Caristi G., Mitidieri E.* Existence and Nonexistence of Global Solutions of Higher-Order Parabolic Problem with Slow Decay Initial Data // J. Math. Anal. Appl. — 2003. — Vol. 279. — Pp. 710–722.
11. *Gazzola F., Grunau H. C.* Global Solutions for Superlinear Parabolic Equations Involving the Biharmonic Operator for Intial Data with Optimal Slow Decay // Calculus of Variations. — 2007. — Vol. 30. — Pp. 389–415.
12. *Sun F.* Life Span of Blow-Up Solutions for Higher-Order Semilinear Parabolic Equations // Electronic Journal of Differential Equations. — 2010. — Vol. 17. — Pp. 1–9. — `http://ejde.math.txstate.edu`.
13. *Guedda M., Kirane M.* Local and Global Nonexistence of Solutions to Semilinear Evolution Equations // Electronic Journal of Differential Equations. — 2002. — Vol. 9. — Pp. 149–160. — `http://ejde.math.swt.edu`.
14. *G. Cai H. P., Xing R.* A Note on Parabolic Liouville Theorems and Blow-Up Rates for a Higher-Order Semilinear Parabolic System // International Journal of Differential Equations. — 2011. — Vol. 2011. — Pp. 1–9. — `doi:10.1155/2011/896427`.
15. *Zubelevich O.* On Weakly Nonlinear Backward Parabolic Problem // International Journal of Differential Equations. — 2009. — Pp. 9–28. — `http://www.ma.utexas.edu/mp_arc/c/09/09-28.pdf`.

UDC 517.945

Nonexistence of Global Solutions of Quasi-linear Backward Parabolic Equations

B. B. Tsegaw

Department of Mathematical Analysis and Theory of Functions
Peoples' Friendship University of Russia
6, Mikluho-Maklay str., Moscow, Russia, 117198

This paper deals with the nonexistence of global solutions of quasi-linear backward parabolic equations for p-Laplacian operators: $u_t = -\operatorname{div}\left(|Du|^{p-2} Du\right) + |u|^{q-1} u,\ (x,t) \in \Omega \times (0,\infty)$ with the Dirichlet boundary condition $u = 0$ on the boundary $\partial\Omega \times (0,\infty)$ and a bounded integrable initial function $u(x,0) = u_0(x)$, where Ω is a smoothly bounded domain in $\mathbb{R}^N$. We also consider this problem in the case of $\Omega = \mathbb{R}^N$.

The problem is analyzed using the test function method, developed by E. L. Mitidieri and S. I. Pohozaev [Mitidieri E., Pohozaev S. I. A Priory Estimates and the Absence of Solutions of Non- linear Partial Differential Equations and Inequalities // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 2001. — Vol. 234, No 3. — 362 p. — (in russian).] It is based on deriving a priory estimates for solutions by an algebraic analysis of the integral form of inequalities with an optimal choice of test functions. With the help of this method, we obtain the nonexistence conditions based on the weak formulation of the problem with test functions of the form: $\varphi(x,t) = \left(\pm u^{\pm}(x,t) + \varepsilon\right)^{\delta} \varphi_R(x,t)$, for $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, where u^+ and u^- are the positive and negative parts of the solution u of the problem respectively and φ_R is a standard cut-off function whose support depends on a parameter $R > 0$.

Key words and phrases: Quasi-linear backward parabolic equations, p-Laplacian operators, test function method, apriori estimates and nonexistence of global solutions.