

---

# Физика

УДК 532.526

## Интегральная модель свободноконвективного турбулентного пограничного слоя с большими поперечными числами Грасгофа и однородно распределённым удельным тепловым потоком

Ю. П. Рыбаков\*, С. Г. Черкасов†, Я. А. Суслов†

\* *Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*

† *ГНЦ ФГУП «Центр Келдыша», Россия, Москва*

Предложена интегральная двухзонная модель для описания характеристик турбулентного свободно-конвективного пограничного слоя около вертикальной стенки. Получены уточнённые профили вертикальной скорости и избыточной температуры, учитывающие влияние пристеночной области на течение в основной части пограничного слоя. Предложен корректный способ использования формулы Блазиуса для определения величины турбулентного напряжения трения на стенке. На основе дифференцирования профиля избыточной температуры найдено соотношение, связывающее удельную плотность теплового потока и избыточную температуры стенки. Показано, что в рамках выбранного приближения соотношение, связывающее удельную плотность теплового потока и избыточную температуры стенки, имеет форму, аналогичную формулам Влита–Росса и Саундерса. Получена замкнутая система интегро-дифференциальных уравнений, описывающая течение в свободноконвективном пограничном слое. В рамках выбранного приближения общая система интегро-дифференциальных уравнений была сведена к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. На основании полученной системы было проведено численное моделирование свободноконвективного турбулентного пограничного слоя в условиях ряда экспериментов. Сделано сопоставление результатов численного моделирования, в том числе полей вертикальной скорости и избыточной температуры, с экспериментальными данными.

**Ключевые слова:** свободная конвекция, турбулентность, пограничный слой, интегральный подход, двухзонная модель

### 1. Введение

Среди инструментов расчётно-теоретического исследования свободно-конвективных пограничных слоёв своей простотой и удобством выделяются интегральные методы. По сравнению с прямым численным моделированием данный подход позволяет существенно упростить используемый математический аппарат и тем самым свести исходную задачу к более экономичным вычислительным алгоритмам. Наиболее широкая область применения интегральных методов — расчёт характеристик свободно-конвективного пограничного слоя во внешних задачах конвекции [1, 2], хотя эти методы могут быть полезными и для внутренних задач, в том числе и нестационарных [3]. Применительно к турбулентному свободно-конвективному пограничному слою наиболее известным интегральным методом является метод Эккерта–Джексона [4]. Этот метод был предложен довольно давно и использовался в основном для расчёта интенсивности теплообмена. Что же касается скорости конвективного течения, то расчёты по методу Эккерта–Джексона приводят к заметным отличиям от экспериментальных данных. Сравнительно недавно был предложен новый метод [5, 6]. В этом методе для описания теплообмена использовалась эмпирическая зависимость, но по поперечным распределениям скорости и температуры этот метод даёт более точные результаты. В данной статье исследования, начатые в [5, 6], продолжены и предложена новая интегральная физико-математическая модель, в

которой удалось сохранить уровень точности расчёта поперечных профилей скорости и температуры, но уже без привлечения эмпирических данных по теплообмену. Модель основана на выдвинутой ранее [7] гипотезе о двухзонной структуре свободно-конвективного турбулентного пограничного слоя. Проведено сравнение результатов расчёта по данной модели с экспериментальными данными [8, 9].

## 2. Постановка задачи

Рассматривается турбулентный свободно-конвективный пограничный слой около вертикальной полубесконечной пластины с однородно распределённым удельным тепловым потоком  $q_w$ . Задачу об определении полей скоростей и температуры в пограничном слое будем рассматривать в рамках двухзонной теории [7] в виде области, где доминируют вязкие силы (вязкий подслой), и области, где доминирует выталкивающая сила (основная часть пограничного слоя). При этом можно пренебречь выталкивающей силой внутри вязкого подслоя и вязкими силами внутри зоны свободной конвекции. В рамках сделанных допущений можно существенно упростить задачу, воспользовавшись интегральным подходом. Обозначим через  $\delta$  толщину пограничного слоя, а через  $\eta$  — толщину вязкого вынужденного подслоя, которая определяется из соотношения  $\frac{Gr_\eta^*}{Re_\eta^2} = 1$ . В соответствии с теорией [7] и из соображений размерности примем, что

$$\eta = \left( \frac{\nu^2 \lambda}{g \beta q_w} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (1)$$

Здесь  $\beta$ ,  $\nu$ ,  $\lambda$  — соответственно коэффициент теплового расширения, кинематический коэффициент вязкости и коэффициент теплопроводности жидкости,  $g$  — ускорение массовой силы.

Направим ось  $z$  вверх вдоль пластины, а ось  $x$  по нормали к ней. В дальнейшем будем называть зонами 1 и 2 вязкий вынужденный подслой ( $x < \eta$ ,  $\frac{Gr_x^*}{Re_x^2} < 1$ ) и основную часть пограничного слоя ( $\eta < x < \delta$ ,  $\frac{Gr_x^*}{Re_x^2} > 1$ ) внутри пограничного слоя.

Примем также, что поперечное число Грасгофа  $Gr_\delta^* = \frac{g \beta q_w \delta^4}{\lambda \nu^2}$  велико, следовательно, толщина вязкого подслоя намного меньше толщины всего пограничного слоя, то есть  $\frac{\eta}{\delta} \sim Gr_\delta^{*-1/4} \ll 1$ .

Введём избыточную температуру жидкости в пограничном слое

$$\Delta T(x, z) = T(x, z) - T_\infty, \quad T_\infty = T(z) \Big|_{x=\delta}.$$

Тогда уравнения турбулентного свободно-конвективного пограничного слоя в отсутствии стратификации вне пограничного слоя для усреднённых величин в интегральной форме будут иметь вид:

$$\frac{d}{dz} \int_0^\delta w^2 dx = g \beta \int_0^\delta \Delta T dx - \frac{1}{\rho} \tau_w, \quad (2)$$

$$\frac{d}{dz} \int_0^\delta w \Delta T dx = \frac{1}{\rho c} q_w. \quad (3)$$

Здесь  $w$  — вертикальная составляющая скорости;  $\tau_w$  — напряжение трения на стенке;  $\rho$ ,  $c$  — плотность и удельная теплоёмкость жидкости.

Примем также следующие дополнительные соотношения.

**1. Профиль скорости.** Для распределения вертикальной составляющей скорости поперёк пограничного слоя используем формулу

$$w = w_1(z) \left( \frac{x}{\eta} \right)^{\frac{1}{7}} \left( 1 - \frac{x}{\delta} \right)^4. \quad (4)$$

**2. Напряжение трения.** В зоне 1 в рамках принятых в рассматриваемой модели допущений формула (4) принимает вид:

$$w \approx w_1(z) \left( \frac{x}{\eta} \right)^{\frac{1}{7}}. \quad (5)$$

Используем теперь аналогию с течением в турбулентном пограничном слое при вынужденном обтекании пластины [10]. В этом случае профиль скорости достаточно хорошо описывается формулой

$$w = W_\infty (x/\delta)^{\frac{1}{7}}, \quad (6)$$

где  $W_\infty$  — скорость внешнего течения,  $\delta$  — толщина пограничного слоя. При этом напряжение трения на стенке достаточно хорошо описывается формулой Блазиуса:

$$\tau_w = 0,0228 \rho W_\infty^2 \left( \frac{\nu}{W_\infty \delta} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

В двухзонной модели турбулентного свободно-конвективного пограничного слоя роль внешнего течения играет течение во внешней части пограничного слоя (зона 2), а аналогом вынужденного пограничного слоя с толщиной  $\delta$  является вязкий подслой с толщиной  $\eta$  (зона 1). Сравнивая формулы (5) и (6), легко увидеть, что профиль скорости около стенки в задаче конвекции совпадает с профилем скорости в такой задаче вынужденного обтекания, в которой  $\delta = \eta$  и  $W_\infty = w_1$ . Если профили скорости около стенки совпадают, то можно предположить, что и напряжения трения совпадают. Поэтому для напряжения трения на стенке будем использовать формулу Блазиуса в виде

$$\tau_w = 0,0228 \rho w_1^2 \left( \frac{\nu}{w_1 \eta} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (7)$$

**3. Профиль температуры.** Согласно теоретическим исследованиям и экспериментальным данным [7–9] поперечное распределение избыточной температуры во внешней зоне 2 имеет вид:

$$\Delta T = Ax^{-\frac{1}{3}} + B.$$

Во внутренней зоне 1 профиль температуры описывается линейной функцией, а на внешней границе пограничного слоя  $\Delta T$  обращается в нуль. Чтобы удовлетворить всем этим условиям, для распределения избыточной температуры поперёк пограничного слоя предлагается следующая формула:

$$\Delta T = T_1(z) \frac{\left( \frac{\eta}{\delta} \right)^{\frac{1}{3}} \left( 1 + \frac{\eta}{\delta} \right)^{\frac{1}{3}} \left( \frac{x}{\delta} + \frac{\eta}{\delta} \right)^{-\frac{1}{3}} - \left( \frac{\eta}{\delta} \right)^{\frac{1}{3}}}{\left( 1 + \frac{\eta}{\delta} \right)} - \left( \frac{\eta}{\delta} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (8)$$

**4. Теплообмен.** В модели [5, 6] для описания теплообмена между стенкой и жидкостью использовалась эмпирическая формула Влита-Росса [1]

$$Nu_z = 0,17Ra_z^{*\frac{1}{4}} = 0,095Ra_z^{\frac{1}{3}}. \quad (9)$$

Здесь  $Nu_z = q_w z / \lambda T_w$  — число Нуссельта,  $Ra_z = g\beta T_w z^3 / \nu^2$  — число Рэлея,  $Ra_z^*$  — модифицированное число Рэлея.

В предлагаемой модели для этой цели используется закон Фурье, в который подставляется выражение (8), что даёт:

$$q_w = -\lambda \frac{\partial \Delta T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\lambda}{3} \frac{\left(1 + \frac{\eta}{\delta}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(1 + \frac{\eta}{\delta}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{\eta}{\delta}\right)^{\frac{1}{3}}} \frac{T_1(z)}{\eta}. \quad (10)$$

В рассматриваемом случае, когда  $\eta/\delta \ll 1$ , это формула принимает вид:

$$q_w \approx \frac{\lambda T_1(z)}{3\eta}. \quad (11)$$

Из формулы (11) следует соотношение:

$$Nu_z = \frac{1}{3^{\frac{4}{3}} Pr^{\frac{1}{3}}} Ra_z^{\frac{1}{3}} = K(Pr) \times Ra_z^{\frac{1}{3}}. \quad (12)$$

В условиях экспериментов, на которых проверялась модель [5, 6], коэффициент  $K(Pr)$  в формуле (12) принимает значение 0,12–0,23 для чисел Прандтля в диапазоне от 7 до 1, соответственно. Это несколько выше, чем у формулы Влита-Росса, где  $K(Pr) = 0,095$ , однако стоит отметить, что данный результат хорошо согласуется с эмпирической формулой Саундерса [10], в которой коэффициент  $K(Pr) = 0,17$ .

**5. Основная система уравнений.** В рамках используемого подхода сначала требуется вычислить интегралы в формулах (2) и (3) с учётом формул (4) и (8):

$$\int_0^{\delta} w^2 dx \approx 0,0523 w_1^2 \delta^{\frac{9}{7}} \eta^{-\frac{2}{7}}, \quad (13)$$

$$\int_0^{\delta} \Delta T dx \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\eta}{\delta}\right)^{\frac{1}{3}} T_1 \delta, \quad (14)$$

$$\int_0^{\delta} w \Delta T dx \approx 0,172 \left(\frac{\eta}{\delta}\right)^{\frac{4}{21}} w_1 T_1 \delta. \quad (15)$$

Подставляя (4), (7), (8), (13), (14) и (15) в уравнения (2) и (3), с учётом однородности теплового потока на стенке, получим следующую систему уравнений:

$$0,0523 \frac{d}{dz} \left( w_1^2 \delta^{\frac{9}{7}} \right) = \frac{3}{2} \nu^{\frac{3}{14}} \left( \frac{g\beta q_w}{\rho c} \right)^{\frac{25}{42}} Pr^{\frac{25}{42}} \delta^{\frac{2}{3}} - 0,0228 \nu^{\frac{1}{4}} w_1^{\frac{7}{4}} \left( \frac{\nu^2 \lambda}{g\beta q_w} \right)^{\frac{1}{112}}, \quad (16)$$

$$0,516 \frac{d}{dz} \left( w_1 \delta^{\frac{17}{21}} \right) = a \left( \frac{g\beta q_w}{\nu^2 \lambda} \right)^{\frac{25}{84}}. \quad (17)$$

### 3. Верификация модели

Для проверки полученной модели были использованы экспериментальные исследования [8] и [9], сделанные на воде с перепадами температур  $7\text{--}25^\circ\text{C}$ . Пластина была погружена в воду с температурой  $25\text{--}30^\circ\text{C}$ . В статье [8] наиболее полно представлены эксперименты V5 и V9. В эксперименте V5 плотность теплового потока на пластине составляла  $19497\text{ Вт/м}^2$ , в эксперименте V9 —  $28661\text{ Вт/м}^2$ . На рис. 1 и 2 представлены поперечные распределения температуры и скорости в условиях эксперимента V5 и V9 соответственно. Как видно из графиков, результаты расчёта хорошо согласуются с экспериментальными данными во всей толщине пограничного слоя. Так же можно заметить, что точность расчёта возле стенки и вблизи внешней границы пограничного слоя немного ниже, чем в середине.

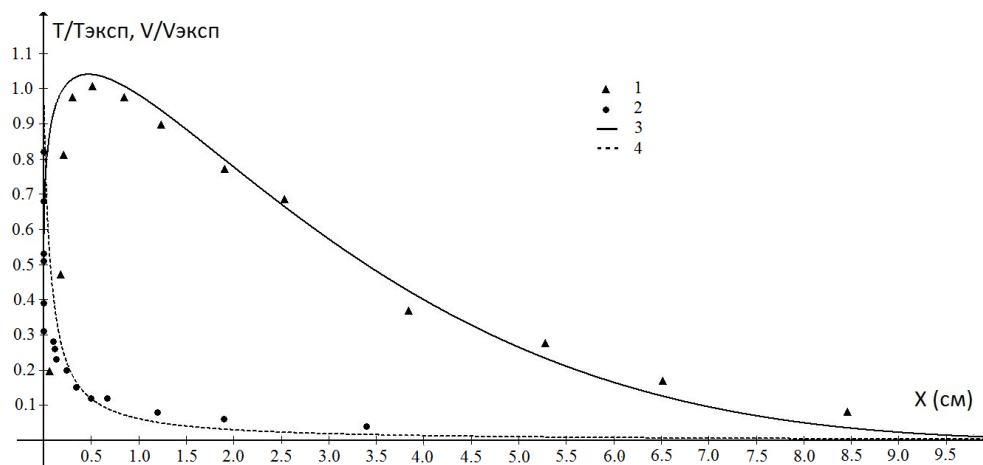


Рис. 1. Профиль скорости и избыточной температуры поперёк пограничного слоя для условий опыта V5. На данном рисунке: 1 — экспериментальные значения скорости, 2 — экспериментальные значения температуры, 3 — расчётные значения скорости и 4 — расчётные значения температуры

Из статьи [9] для сравнения с результатами расчёта был взят эксперимент с тепловым потоком  $4488\text{ Вт/м}^2$  как наилучшим образом описывающий область развитой турбулентности. Как видно из рис. 3, зависимость числа Нуссельта от числа Грасгофа, представленная формулой (12), которая следует из данной модели, так же хорошо совпадает с экспериментальными данными. Максимальное отклонение расчётного значения числа Нуссельта от полученного в результате эксперимента не превышает  $12,5\%$ .

### 4. Заключение

Предложена физико-математическая модель для расчёта характеристик турбулентного свободно-конвективного пограничного слоя, основанная на уравнениях пограничного слоя в интегральной форме. В модели используются элементы двухзонной теории свободно-конвективного пограничного слоя. Показано, что результаты расчётов хорошо совпадают с результатами известных экспериментов, как по интенсивности теплообмена, так и по распределениям скорости и температуры поперёк пограничного слоя.

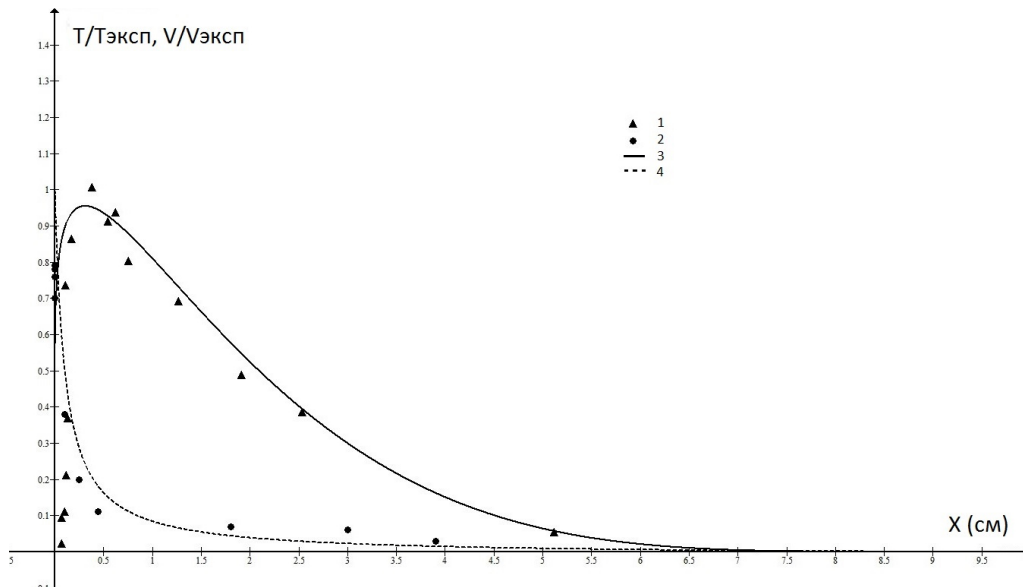


Рис. 2. Профиль скорости и избыточной температуры поперёк пограничного слоя для условий опыта V9. На данном рисунке: 1 — экспериментальные значения скорости, 2 — экспериментальные значения температуры, 3 — расчётные значения скорости и 4 — расчётные значения температуры

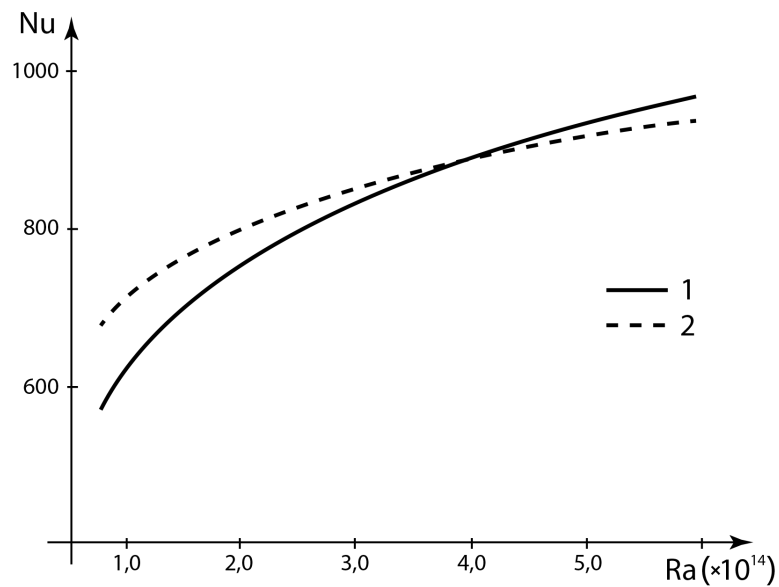


Рис. 3. Зависимость числа Нуссельта от числа Рэлея в условиях экспериментов [9] с плотностью теплового потока на стенке 4488 [Вт/м<sup>2</sup>]. На данном рисунке: 1 — расчётное значение числа Нуссельта, 2 — экспериментальное значение числа Нуссельта

## Литература

1. Джалурия Й. Естественная конвекция. — М.: Мир, 1983. — 400 с.
2. Свободноконвективные течения, тепло- и массообмен / Б. Гебхарт, Й. Джалурия, Р. Махаджан, Б. Саммакия. — М.: Мир, 1991. — 678 с.
3. Черкасов С. Г. Естественная конвекция и температурная стратификация в криогенном топливном баке в условиях микрогравитации // Изв. РАН. МЖГ. — 1994. — № 5. — С. 142–149.
4. Эккерт Э. Р., Дрейк Р. М. Теория тепло- и массообмена. — М.; Л.: Госэнергоиздат, 1961. — 680 с.
5. Черкасов С. Г., Суслов Я. А. Двухпараметрический интегральный метод расчёта турбулентного свободно-конвективного пограничного слоя // Тепловые процессы в технике. — 2014. — Т. 6, № 8. — С. 338–342.
6. Черкасов С. Г., Суслов Я. А. Полуэмпирический интегральный метод расчёта свободноконвективного турбулентного пограничного слоя // Шестая Российская Национальная Конференция по тепломассобмену, тезисы докладов. Секция 2. — Т. 1. — 2014. — С. 242.
7. William K. George S. P. C. A Theory for Natural Convection Turbulent Boundary Layers Next to Heated Vertical Surfaces // Int. J. Heat Mass Transform. — 1979. — Vol. 22. — Pp. 813–826.
8. Влит Л. Экспериментальное исследование турбулентных пограничных слоёв в условиях естественной конвекции // Теплопередача. Серия С. — 1969. — Т. 91, № 4. — С. 73–95.
9. Qureshi Z. H., Gebhart B. Transition and Transport in a Buoyancy Driven Flow in Water Adjacent to a Vertical Uniform Flux Surface // Int. J. Heat Mass Transform. — 1978. — Vol. 21. — Pp. 1467–1479.
10. Saunders O. A. Natural Convection in Liquids // Proc R. Soc. A. — 1939. — Vol. 172. — Pp. 55–71.

UDC 532.526

### Integral Model of Natural Convection Turbulent Boundary Layers Next to Heated Vertical Surface with a Large Lateral Grashof Number and Homogeneous Heat Flux

Y. P. Rybakov\*, S. G. Cherkasov<sup>†</sup>, Y. A. Suslov<sup>†</sup>

\* Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia

<sup>†</sup> Keldysh Federal Research Center, Moscow, Russia

The proposed integrated two-zone model to describe the characteristics of the turbulent free convection boundary layer near a vertical wall. To obtain accurate profiles of vertical velocity and excess temperature, taking into account the effect of wall region of the flow in the main part of the boundary layer. Offered the correct way of using the Blasius formula to determine the value of turbulent shear stress on the wall. On the basis of the differentiation profile of excess temperature the relation connecting the specific heat flux and excess wall temperature. It is shown that in the framework of the chosen approximation ratio linking density of the heat flux and excess wall temperature has a form similar to the formulas Vliet–Ross and Saunders. The obtained closed system of integro-differential equations describing the flow in free convection flow the boundary layer. In the framework of the chosen approximation, the total system of integro-differential equations was reduced to a system of nonlinear ordinary differential equations of the first order. On the basis of the obtained systems was carried out numerical simulation of a natural convection turbulent boundary layer in terms of the number of experiments. Made comparison of results of numerical simulation, including the fields of vertical velocity and excess temperature, with experimental data.

**Key words and phrases:** natural convection, turbulence, boundary layer, integral method, two-zone model

## References

1. Y. Jaluria, Natural Convection, Mir, Moscow, 1983, in Russian.
2. B. Gebhart, Y. Jaluria, R. Mahajan, B. Sammakia, Natural Convection Flows, Heat and Mass Transfer, Mir, Moscow, 1991, in Russian.
3. S. G. Cherkasov, Natural Convection and Temperature Stratification in Criogenic Fuel Tank in Conditions of Micro Gravitation, *Izvestia RAN MZG* (5) (1994) 142–149, in Russian.
4. E. R. Eckert, R. M. Drake, Theory of Heat and Mass Transfer, Gosenergoizdat, Moscow, Leningrad, 1961, in Russian.
5. S. G. Cherkasov, Y. A. Suslov, Two-Parametrical Integral Method of Calculation Turbulent Boundary Layer, *Heat Processes in Technics* 6 (8) (2014) 338–342, in Russian.
6. S. G. Cherkasov, Y. A. Suslov, Semi-Empirical Integral Method of Calculation Turbulent Boundary Layer, in: Six National Conferencing of heat ond mass transfer, thesis. Section 2., Vol. 1, 2014, p. 242, in Russian.
7. S. P. C. William K. George, A Theory for Natural Convection Turbulent Boundary Layers Next to Heated Vertical Surfaces, *Int. J. Heat Mass Transform* 22 (1979) 813–826.
8. L. Vliet, Experimental Investigation of Natural Convection Turbulent Boundary Layers, *Heat Transfer. Series S.* 91 (4) (1969) 73–95, in Russian.
9. Z. H. Qureshi, B. Gebhart, Transition and Transport in a Buoyancy Driven Flow in Water Adjacent To a Vertical Uniform Flux Surface, *Int. J. Heat Mass Transform* 21 (1978) 1467–1479.
10. O. A. Saunders, Natural Convection in Liquids, *Proc R. Soc. A* 172 (1939) 55–71.

© Рыбаков Ю. П., Черкасов С. Г., Суслов Я. А., 2016