НАРУШЕНИЕ ИДЕМПОТЕНТНОСТИ ОРТОГОНАЛЬНОГО ПРОЕКТИРУЮЩЕГО ОПЕРАТОРА В ЗАДАЧАХ РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗОВ В РАМКАХ КОНФЛЮЕНТНОЙ СИТУАЦИИ

А.Б. Исаев, В.Ф. Аль-Харази

Кафедра кибернетики и мехатроники
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, 6, Москва, Россия, 117198

В статье в рамках общей проблемы построения разделяющей плоскости для двух классов образов, отягощенных случайными погрешностями измерений своих признаков (конфлюентная ситуация), получен результат, указывающий на причинно-следственную связь между выбыванием оценок метода наименьших квадратов (МНК) из класса линейных и несмещенных оценок и выбыванием ортогонального и проектирующего оператора, с помощью которого получаются оценки МНК из класса идемпотентных линейных операторов.

Ключевые слова: идемпотентность, конфлюентная ситуация.

Известно, что процедура классификации образов может производиться в условиях, когда результаты измерений координат всех признаков предъявляемых образов отягощены случайными погрешностями (конфлюентная ситуация) и игнорирование погрешностей признаков приводит к грубым ошибкам идентификации объектов при использовании традиционного алгоритма метода наименьших квадратов (МНК) с целью построения разделяющей линии регрессии [1; 2; 3].

Известно также, что оценки МНК для параметров линии регрессии становятся смещенными и неэффективными [2; 3], что и является источником ошибок в задачах идентификации объектов с помощью линейных разделяющих функций.

На наш взгляд, существует глубокая причинно-следственная связь между выбыванием оценок МНК из класса линейных несмещенных оценок и выбыванием ортогонального и проектирующего оператора P_Ω (с помощью которого и осуществляется получение оценок МНК) из класса идемпотентных и линейных операторов.

Получение оценок МНК эквивалентно проведению операции проектирования вектора наблюдений $\vec{Y}^T = [y_1, y_2, ..., y_N]$ координат признака *Y*, предъявляемых образов ($\vec{Y} \in E_n$ в общем случае) на подпространство R_m ($m < n$), линейное и вещественное, к которому принадлежат результаты измерений признака *X* распознаваемых образов $\left\{x_i^j, y_i^j\right\}$, $i = \overline{1, N_j}$ ~ число образов, $j = \overline{1, m}$ ~ число классов образов, E_n ~ евклидово пространство, $R_m[x] \equiv \Omega$ ~ пространство проекций оператора P_Ω, т.е. это пространство координат признака *X*.

В евклидовом пространстве E_n (наше пространство измерений) эта проекция $\widehat{Y} = P_\Omega Y \in R[x]$ единственная в $R[x]$, а процедура проектирования осуществляется на пространство векторов признака X, не содержащих погрешности измерений, поэтому сам оператор P_Ω является величиной детерминированной и не содержит случайных погрешностей измерений признака X. Для заданных Y и $\widehat{Y}$ этот оператор поэтому единственен и представляет собой матрицу

$$P = X\left(X^T X\right)^{-1} X^T \tag{1}$$

— симметричную $\left(P^T = P\right)$ и идемпотентную $\left(P^2 = P\right)$, как можно убедиться.

Известное утверждение о том, что оценки МНК относятся к классу линейных несмещенных оценок (в частности, оценки МНК для параметров разделяющей линии регрессии) справедливо, пока матрица X (содержащая независимые переменные $\left\{x_i^j\right\}$ — координаты измерения признака X) — точная, т.е. признак X измеряется без погрешностей.

Если же координаты признака X измеряются с погрешностями, то следует каждому i-тому наблюдению координаты x_i^j $(i = \overline{1, N_j}, j = \overline{1, m})$ приписать случайную погрешность δ_{ij} так, что в конфлюентной ситуации будет наблюдаться матрица $X_\Delta = \Xi + \Delta$, где $\Xi = [\xi_{ij}]$ — точная (истинная) матрица, $\Delta = \delta_{ij}$ — матрица погрешностей.

В этой ситуации оценка МНК для вектора параметров линии регрессии (разделяющей линии) теперь будет $\vec{a}(\Delta) = \left(X_\Delta^T X_\Delta\right)^{-1} X_\Delta^T \vec{Y}$ вместо традиционной, несмещенной $\vec{a} = \left(\Xi^T \Xi\right)^{-1} \Xi^T \vec{Y}$.

В [4] получено приближенное выражение для $\vec{a}(\Delta)$ — вектора оценок МНК в конфлюентной ситуации:

$$\vec{a}(\Delta) \cong a + \left(X_\Delta^T X_\Delta\right)^{-1} \Delta^T \vec{e} - \left(X_\Delta^T X_\Delta\right)^{-1} X^T \Delta a, \tag{2}$$

где все символы введены выше, кроме вектора остатков $\vec{e} = Y - Xa$.

Применяя операцию взятия математического ожидания к обеим частям (2), получаем:

$$M\left[a(\Delta) - a\right] \cong M\left\{B_\Delta^{-1} \Delta^T \vec{e} - B^{-1} X^T \Delta B^{-1} X^T Y\right\} \neq 0$$

и обращающееся в нуль, например, при $\Delta = 0$.

Покажем, что в конфлюентной ситуации оператор проектирования P_Δ выбывает из класса симметричных и идемпотентных операторов, т.е. $P_\Delta^T \neq P_\Delta$ и $P_\Delta^2 \neq P_\Delta$. Действительно:

$$P_\Delta = (\Xi + \Delta)\left[(\Xi + \Delta)^T (\Xi + \Delta)\right]^{-1} (\Xi + \Delta)^T,$$

введем: $\left(\Xi^T\Xi\right)=B$, $C=\left(\Delta^T\Xi+\Xi^T\Delta\right)$ и, используя разложение $X_\Delta^T X_\Delta \cong B^{-1} - -B^{-1}CB^{-1}+B^{-1}CB^{-1}CB^{-1}$, получим:

$$P_\Delta = P + \Xi B^{-1}\Delta^T - \Xi B^{-1}\Delta^T P - P\Delta B^{-1}\Xi^T. \quad (3)$$

Из (3) очевидно, что, во-первых, матрица P_Δ (оператор) более не симметрична (т.е. $P_\Delta^T \neq P_\Delta$ если $\Delta \neq 0$) и, во-вторых, $P_\Delta P_\Delta \neq P_\Delta$ (т.е. $P_\Delta^2 \neq P_\Delta$) ~ оператор P_Δ в конфлюентной ситуации не является идемпотентным. Последнее справедливо в силу приближенности разложения (3) и присутствия в нем множителей Δ^T и Δ, отличных от нуля.

Из (3) видно, что симметричность *P* и его идемпотентность восстанавливаются при $\Delta \equiv 0$.

Изложенные выкладки по существу доказывают следующую теорему.

Теорема

В конфлюентной ситуации оператор проектирования P_Δ, построенный аналогично оператору P в схеме классического метода наименьших квадратов, выбывает из класса симметричных и идемпотентных операторов.

Из этой теоремы следует, что при использовании алгоритмов, базирующихся прямо или косвенно на классическом МНК в конфлюентной ситуации, нереально существование решения, описывающего единственную оптимальную прямую (разделяющую линию регрессии в нашей задаче). Наличие случайных погрешностей измерений у независимых переменных (в результатах измерений координат признака *X*) означает нарушение одного из основных постулатов применимости классического МНК и приводит к потере оценками МНК для параметров разделяющей линии регрессии ряда оптимальных статических свойств — несмещенности, эффективности и состоятельности.

Для построения разделяющих поверхностей (в частности, линейных) требуется применять многочисленные алгоритмы конфлюентного анализа [1].

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Грешилов А.А., Стакун В.А., Стакун А.А.* Статические методы принятия решений с элементами конфлюентного анализа. — М.: Радио и связь, 1998.

[2] *Исаев А.Б.* О применимости метода максимального правдоподобия в конфлюентном анализе // Метрология. — 1984. — № 12. — С. 16—26.

[3] *Исаев А.Б.* Основные принципы конфлюентного анализа и некоторые алгоритмы обработки линейных зависимостей // Измерительная техника. — 1982. — № 10. — С. 13—16.

[4] *Hodges S.D., Moore P.G.* «Date Uncertaintes and L.S. Regression» // Applied Statistics. — 1972. — V. 21. — No 2. — P. 185—195.

INFRINGEMENT IDEMPOTENTSES OF THE ORTHOGONAL PROJECTING OPERATOR IN PROBLEMS OF RECOGNITION OF IMAGES WITHIN THE LIMITS OF KONFLUENT SITUATIONS

A.B. Isaev, V.F. Al-Harasi

Cybernetics and Mechatronics Department
Peoples' Friendship University of Russia
Miklukho-Maklaya str., 6, Moscow, Russia, 117198

In the Article, within the limits of a shared problem of construction of a dividing plane for two classes of the images burdened by casual errors of measurements of the signs (the cofluent situation), the result specifying in a relationship of cause and effect between outing of estimations of a method of the least squares (m.n.k. is received.) from a class of the linear and not displaced estimations and outing the orthogonal and projecting operator with which help estimations m.n.k. turn out. From a class of idempotent linear operators.

Key words: idempotentses, cofluent situation.