УДК 517.93, 517.972.5

Об одной прямой задаче механики бесконечномерных диссипативных систем

В. М. Савчин, С. А. Будочкина

Кафедра математического анализа и теории функций
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, 6, Москва, Россия, 117198

В работе предложен конструктивный метод нахождения первых интегралов уравнений движения бесконечномерных диссипативных систем.

Ключевые слова: производная Гато, потенциальный оператор, первый интеграл, генератор симметрии, инвариантность уравнения движения.

1. Введение

Одной из основных прямых задач механики систем с бесконечным числом степеней свободы является задача нахождения первых интегралов уравнений движения. Следует отметить, что интегралы уравнений движения имеют многочисленные применения. В частности, они могут использоваться для доказательства существования и единственности классических решений дифференциальных уравнений в частных производных, для исследования устойчивости движения бесконечномерных систем.

Для нахождения первых интегралов уравнений движения можно применить известную теорему Э. Нетер о взаимосвязи симметрий вариационного принципа с первыми интегралами соответствующего уравнения Эйлера–Лагранжа. Для этого нужно построить стационаризуемый в процессе движения функционал, получить условия его инвариантности, а затем определить первые интегралы уравнения движения.

В настоящей работе для нахождения первых интегралов используется подход, основанный на применении теории преобразований переменных для установления инвариантности самих уравнений движения.

2. Постановка задачи

Пусть уравнения движения материальной системы представлены в операторном виде

$$N(u) \equiv P_{2u,t}u_{tt} + P_{1u,t}u_t + P_{3u,t}u_t^2 + Q(t,u) = 0, \tag{1}$$

$$u \in D(N) \subseteq U \subseteq V, \quad t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}; \quad u_t \equiv D_t u \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u, \qquad u_{tt} \equiv \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}u.$$

Здесь $\forall\, t \in [t_0, t_1]$, $\forall\, u \in U_1$ операторы $P_{iu,t} : U_1 \to V_1$, $(i = \overline{1,3})$ являются линейными; $Q : [t_0, t_1] \times U \to V$ — произвольный оператор, вообще говоря, нелинейный; $D(N)$ — область определения оператора N,

$$D(N) = \{u \in U : \, u|_{t=t_0} = \varphi_1, \; u|_{t=t_1} = \varphi_2, \; u_t|_{t=t_0} = \varphi_3, \; u_t|_{t=t_1} = \varphi_4, \\ \varphi_i \in U_1 \, (i = \overline{1,4})\}; \tag{2}$$

Статья поступила в редакцию 13 марта 2008 г.
Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ грант №06.01.00341a).

$U = C^2([t_0, t_1]; U_1)$, $V = C([t_0, t_1]; V_1)$, U_1, V_1 — действительные линейные нормированные пространства, $U_1 \subseteq V_1$.

Будем предполагать, что при каждых $t \in [t_0, t_1]$ и $g(t)$, $u(t) \in U_1$ функции $P_{1u,t}g(t)$ и $P_{3u,t}g(t)$ со значениями в V_1 непрерывно дифференцируемы, а $P_{2u,t}g(t)$ — дважды непрерывно дифференцируема на $[t_0, t_1]$.

Под решением задачи (1) понимается функция $u \in D(N)$, удовлетворяющая (1). В дальнейшем для упрощения обозначений будем записывать (1) также в виде

$$N(u) \equiv P_{2u}u_{tt} + P_{1u}u_t + P_{3u}u_t^2 + Q(u) = 0,$$

считая, что операторы P_{iu} $(i = \overline{1,3})$ и Q зависят также и от t.

Операторное уравнение движения (1) может быть обыкновенным дифференциальным, дифференциальным уравнением в частных производных, интегро-дифференциальным уравнением и др., а также системой таких уравнений.

Сформулируем задачу следующим образом: получить аналог условий потенциальности Гельмгольца для заданного уравнения движения, дать общий вид первых интегралов этого уравнения в случае его инвариантности.

3. Необходимые сведения об основах вариационного исчисления в операторной форме

Пусть N — оператор, заданный в области $D(N)$ линейного нормированного пространства U над полем действительных чисел $\mathbb{R}$, а область значений $R(N)$ принадлежит линейному нормированному пространству V над полем $\mathbb{R}$, т. е.

$$N(u) = v, \quad u \in U, \quad v \in V.$$

Если в точке $u \in D(N)$ существует предел

$$\delta N(u, h) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\{N(u + \varepsilon h) - N(u)\}, \quad \forall\, h \in U, \tag{3}$$

то он называется вариацией Гато оператора N в точке u (или первой вариацией оператора N в точке u).

Если при фиксированном $u \in D(N)$ вариация $\delta N(u, h)$ является линейным по h оператором, то говорят, что оператор N дифференцируем в точке u в смысле Гато. Выражение $\delta N(u, h)$ называется дифференциалом Гато и обозначается через $DN(u, h)$. В этом случае используют также запись $DN(u, h) = N'_u h$ и говорят, что N'_u есть производная Гато оператора N в точке u.

В дальнейшем будем предполагать, что для рассматриваемого оператора $N : D(N) \subset U \to V$ в любой точке $u \in D(N)$ существует N'_u. Область определения $D(N'_u)$ состоит из таких элементов $h \in U$, что $(u + \varepsilon h) \in D(N)$ для любого достаточно малого значения ε. Элемент $h \in D(N'_u)$ будем называть допустимым элементом. Отметим, что в общем случае $D(N) \neq D(N'_u)$.

При существовании производной Гато оператора N имеет место равенство

$$N(u + \varepsilon h) = N(u) + \varepsilon N'_u h + r(u, \varepsilon h), \quad u \in D(N), \tag{4}$$

где для любого фиксированного элемента $h \in D(N'_u)$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{r(u, \varepsilon h)}{\varepsilon} = 0.$$

Отметим, что если $\tilde{N}_u$ — некоторый линейный оператор, произвольным образом зависящий от u, то производная Гато находится по формуле

$$\tilde{N}'_u(g; h) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\tilde{N}_{u+\varepsilon h}g - \tilde{N}_u g}{\varepsilon}. \tag{5}$$

Вторая производная Гато оператора N вычисляется по формуле

$$N''_u(h_1, h_2) = \frac{\partial^2}{\partial\varepsilon_1\partial\varepsilon_2} N(u + \varepsilon_1 h_1 + \varepsilon_2 h_2)\Big|_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=0}.$$

Предполагается также, что

$$N''_u(h_1, h_2) = N''_u(h_2, h_1) \quad \forall\, u \in D(N), \quad \forall\, h_1,\, h_2 \in D(N'_u).$$

С целью полноты изложения и ясности употребляемой терминологии приведём некоторые сведения о билинейных формах и потенциальных операторах, которые будут использоваться в дальнейшем исследовании.

Определение 1. Отображение $\Phi(\cdot,\cdot) : V \times U \to \mathbb{R}$, линейное по каждому аргументу, называется билинейной формой.

Определение 2. Билинейная форма $\Phi(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ называется симметрической, если

$$\Phi(v, g) = \Phi(g, v), \quad \forall\, g,\, v \in V.$$

Определение 3. Билинейная форма $\Phi(.,.) : V \times U \to \mathbb{R}$ называется невырожденной, если:

1) из условия $\Phi(v, h) = 0 \quad \forall\, v \in V$ следует, что $h = 0$;
2) из условия $\Phi(v, h) = 0 \quad \forall\, h \in U$ следует, что $v = 0$.

Будем предполагать, что билинейная форма

$$\Phi(\cdot,\cdot) \equiv \int\limits_{t_0}^{t_1} \langle\cdot,\cdot\rangle \,\mathrm{d}t : V \times U \to \mathbb{R} \tag{6}$$

такова, что билинейное отображение $\Phi_1(\cdot,\cdot) \equiv \langle\cdot,\cdot\rangle$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\langle v_1(t), v_2(t)\rangle = \langle v_2(t), v_1(t)\rangle, \quad \forall\, v_1(t),\, v_2(t) \in V_1, \tag{7}$$

$$D_t\langle v(t), g(t)\rangle = \langle D_t v(t), g(t)\rangle + \langle v(t), D_t g(t)\rangle, \quad \forall\, v,\, g \in C^1([t_0, t_1]; U_1). \tag{8}$$

Если $v = v(x, t)$, $x \in \Omega \subset R^n$, $t \in (t_0, t_1)$, $U_1 = V_1 = C(\overline{\Omega})$, то можно, например, рассмотреть

$$\langle v, g\rangle = \int\limits_{\Omega} v(x, t) g(x, t) \,\mathrm{d}x. \tag{9}$$

Определение 4 (см. [1])**.** Оператор $N : D(N) \subset U \to V$ называется потенциальным на множестве $D(N)$ относительно билинейной формы вида (6), если существует дифференцируемый по Гато функционал (действие по Гамильтону) $F_N : D(F_N) = D(N) \to \mathbb{R}$ такой, что

$$\delta F_N[u, h] = \Phi\big(N(u), h\big), \quad \forall\, u \in D(N), \quad \forall\, h \in D(N'_u).$$

Функционал F_N называется *потенциалом оператора* N, а N — *градиентом функционала* F_N. Записывают $N = \mathrm{grad}_\Phi F_N$. Оператор N называется *потенциальным на множестве* $D(N)$ *относительно* Φ.

Будем предполагать, что для любых фиксированных элементов $u \in D(N)$, $g, h \in D(N'_u)$ функция $\varphi(\varepsilon) \equiv \Phi(N(u + \varepsilon h), g)$ принадлежит классу $C^1[0, 1]$ и $(u - u_0) \in D(N'_u)$, $\forall\, u, u_0 \in D(N)$; существует сопряжённый оператор N'^*_u к N'_u, определённый равенством

$$\Phi(N'_u h, g) = \Phi(h, N'^*_u g), \quad \forall\, u \in D(N), \quad \forall\, h \in D(N'_u), \quad \forall\, g \in D(N'^*_u).$$

В работе [1] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть дифференцируемый по Гато оператор $N : D(N) \subset U \to V$ и билинейная форма $\Phi(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ такие, что для любых фиксированных элементов $u \in D(N)$, $g, h \in D(N'_u)$ функция $\varepsilon \to \Phi(N(u+\varepsilon h), g)$ является непрерывно дифференцируемой на отрезке $[0,1]$. Тогда для потенциальности оператора N в односвязной области $D(N)$ относительно рассматриваемой билинейной формы необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\Phi(N'_u h, g) = \Phi(N'_u g, h), \quad \forall\, u \in D(N), \quad \forall\, g, h \in D(N'_u). \tag{10}$$

4. Аналог условий потенциальности Гельмгольца

Получим условия на операторы P_{1u}, P_{2u}, P_{3u} и Q, при которых уравнение движения (1) может быть представлено в форме уравнения Эйлера–Лагранжа.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $D_t^* = -D_t$ на $D(N'_u)$. Тогда для существования действия по Гамильтону для уравнения движения (1) на $D(N)$ относительно (6) необходимо и достаточно, чтобы $\forall\, u \in D(N)$, $\forall\, t \in [t_0, t_1]$ выполнялись следующие условия на $D(N'_u)$:*

$$P_{2u} - P_{2u}^* = 0, \tag{11}$$

$$u_t P_{3u}^* - P_{2u}^{*\prime}(\cdot; u_t) + P_{3u}(u_t(\cdot)) = 0, \tag{12}$$

$$-2\frac{\partial P_{2u}^*}{\partial t} + P_{1u}^* + P_{1u} = 0, \tag{13}$$

$$-\frac{\partial^2 P_{2u}^*}{\partial t^2} + \frac{\partial P_{1u}^*}{\partial t} + Q'_u - {Q'_u}^* = 0, \tag{14}$$

$$-\left(\frac{\partial P_{2u}^*}{\partial t}\right)'_u(\cdot; u_t) - \frac{\partial P_{2u}^{*\prime}}{\partial t}(\cdot; u_t) + P_{1u}^{*\prime}(\cdot; u_t) + P'_{1u}(u_t; \cdot) - [P'_{1u}(u_t; \cdot)]^* + 2u_t\frac{\partial P_{3u}^*}{\partial t} = 0, \tag{15}$$

$$P'_{2u}(u_{tt}; \cdot) - P_{2u}^{*\prime}(\cdot; u_{tt}) - [P'_{2u}(u_{tt}; \cdot)]^* + 2u_{tt}P_{3u}^* = 0, \tag{16}$$

$$-P_{2u}^{*\prime\prime}(\cdot; u_t; u_t) + P'_{3u}(u_t^2; \cdot) - [P'_{3u}(u_t^2; \cdot)]^* + 2u_t P_{3u}^{*\prime}(\cdot; u_t) = 0. \tag{17}$$

Доказательство. Используя (1) и (5), получаем

$$N'_u h = 2P_{3u}(u_t h_t) + P'_{3u}(u_t^2; h) + P_{2u}h_{tt} + P'_{2u}(u_{tt}; h) + P_{1u}h_t + P'_{1u}(u_t; h) + Q'_u h.$$

Критерий (10) в данном случае записывается в виде

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\langle 2P_{3u}(u_t h_t) + P'_{3u}(u_t^2; h) + P_{2u}h_{tt} + P'_{2u}(u_{tt}; h) + P_{1u}h_t + P'_{1u}(u_t; h) + Q'_u h, g \right\rangle \mathrm{d}t =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left\langle 2P_{3u}(u_t g_t) + P'_{3u}(u_t^2; g) + P_{2u}g_{tt} + P'_{2u}(u_{tt}; g) + P_{1u}g_t + P'_{1u}(u_t; g) + Q'_u g, h \right\rangle \mathrm{d}t,$$

или

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \left\langle 2P_{3u}(u_t h_t) + P'_{3u}(u_t^2; h) + P_{2u}h_{tt} + P'_{2u}(u_{tt}; h) + P_{1u}h_t + P'_{1u}(u_t; h) + Q'_u h, g \right\rangle - \right.$$

$$
-\left\langle -2D_t(u_tP_{3u}^*h)+[P_{3u}'(u_t^2;\cdot)]^*h+D_t^2(P_{2u}^*h)+[P_{2u}'(u_{tt};\cdot)]^*h-\right.
$$
$$
\left.-D_t(P_{1u}^*h)+[P_{1u}'(u_t;\cdot)]^*h+Q_u'^*h,g\right\rangle\Big\}\mathrm{d}t=0,\quad \forall\, u\in D(N),\quad \forall\, g,\,h\in D(N_u'). \quad (18)
$$

С учётом производной Гато второго порядка имеем

$$
D_t^2(P_{2u}^*h)=D_t[D_t(P_{2u}^*h)]=D_t\left[P_{2u}^*h_t+\frac{\partial P_{2u}^*}{\partial t}h+P_{2u}^{*\prime}(h;u_t)\right]=
$$
$$
=P_{2u}^*h_{tt}+2\frac{\partial P_{2u}^*}{\partial t}h_t+2P_{2u}^{*\prime}(h_t;u_t)+\frac{\partial^2 P_{2u}^*}{\partial t^2}h+\left(\frac{\partial P_{2u}^*}{\partial t}\right)_u'(h;u_t)+
$$
$$
+P_{2u}^{*\prime\prime}(h;u_t;u_t)+P_{2u}^{*\prime}(h;u_{tt})+\frac{\partial P_{2u}^{*\prime}}{\partial t}(h;u_t). \quad (19)
$$

Принимая во внимание (19), из (18) получаем

$$
\int_{t_0}^{t_1}\Big\langle 2P_{3u}(u_th_t)+P_{3u}'(u_t^2;h)+P_{2u}h_{tt}+P_{2u}'(u_{tt};h)+P_{1u}h_t+P_{1u}'(u_t;h)+Q_u'h+
$$
$$
+2u_{tt}P_{3u}^*h+2u_t\frac{\partial P_{3u}^*}{\partial t}h+2u_tP_{3u}^{*\prime}(h;u_t)+2u_tP_{3u}^*h_t-[P_{3u}'(u_t^2;\cdot)]^*h-
$$
$$
-P_{2u}^*h_{tt}-2\frac{\partial P_{2u}^*}{\partial t}h_t-2P_{2u}^{*\prime}(h_t;u_t)-\frac{\partial^2 P_{2u}^*}{\partial t^2}h-\left(\frac{\partial P_{2u}^*}{\partial t}\right)_u'(h;u_t)-
$$
$$
-P_{2u}^{*\prime\prime}(h;u_t;u_t)-P_{2u}^{*\prime}(h;u_{tt})-\frac{\partial P_{2u}^{*\prime}}{\partial t}(h;u_t)-[P_{2u}'(u_{tt};\cdot)]^*h+P_{1u}^*h_t+\frac{\partial P_{1u}^*}{\partial t}h+
$$
$$
+P_{1u}^{*\prime}(h;u_t)-[P_{1u}'(u_t;\cdot)]^*h-Q_u'^*h,g\Big\rangle\,\mathrm{d}t=0.
$$

Таким образом, условие (18) приводится к виду

$$
\int_{t_0}^{t_1}\Big\langle\Big\{(P_{2u}-P_{2u}^*)D_{tt}+\left(2P_{3u}\big(u_t(\cdot)\big)+P_{1u}+2u_tP_{3u}^*-2\frac{\partial P_{2u}^*}{\partial t}-2P_{2u}^{*\prime}(\cdot;u_t)+P_{1u}^*\right)D_t+
$$
$$
+P_{3u}'(u_t^2;\cdot)+P_{2u}'(u_{tt};\cdot)+P_{1u}'(u_t;\cdot)+Q_u'+2u_{tt}P_{3u}^*+2u_t\frac{\partial P_{3u}^*}{\partial t}+2u_tP_{3u}^{*\prime}(\cdot;u_t)-[P_{3u}'(u_t^2;\cdot)]^*-
$$
$$
-\frac{\partial^2 P_{2u}^*}{\partial t^2}-\left(\frac{\partial P_{2u}^*}{\partial t}\right)_u'(\cdot;u_t)-P_{2u}^{*\prime\prime}(\cdot;u_t;u_t)-P_{2u}^{*\prime}(\cdot;u_{tt})-\frac{\partial P_{2u}^{*\prime}}{\partial t}(\cdot;u_t)-[P_{2u}'(u_{tt};\cdot)]^*+
$$
$$
+\frac{\partial P_{1u}^*}{\partial t}+P_{1u}^{*\prime}(\cdot;u_t)-[P_{1u}'(u_t;\cdot)]^*-Q_u'^*\Big\}h,g\Big\rangle\,\mathrm{d}t=0,\quad \forall\, u\in D(N),\quad \forall\, g,\,h\in D(N_u').
$$

Это тождественно выполняется тогда и только тогда, когда

$$
\Big[(P_{2u}-P_{2u}^*)\,D_{tt}+\left(2P_{3u}\big(u_t(\cdot)\big)+P_{1u}+2u_tP_{3u}^*-2\frac{\partial P_{2u}^*}{\partial t}-2P_{2u}^{*\prime}(\cdot;u_t)+P_{1u}^*\right)D_t+
$$
$$
+P_{3u}'(u_t^2;\cdot)+P_{2u}'(u_{tt};\cdot)+P_{1u}'(u_t;\cdot)+Q_u'+2u_{tt}P_{3u}^*+2u_t\frac{\partial P_{3u}^*}{\partial t}+2u_tP_{3u}^{*\prime}(\cdot;u_t)-[P_{3u}'(u_t^2;\cdot)]^*-
$$
$$
-\frac{\partial^2 P_{2u}^*}{\partial t^2}-\left(\frac{\partial P_{2u}^*}{\partial t}\right)_u'(\cdot;u_t)-P_{2u}^{*\prime\prime}(\cdot;u_t;u_t)-P_{2u}^{*\prime}(\cdot;u_{tt})-\frac{\partial P_{2u}^{*\prime}}{\partial t}(\cdot;u_t)-[P_{2u}'(u_{tt};\cdot)]^*+
$$
$$
+\frac{\partial P_{1u}^*}{\partial t}+P_{1u}^{*\prime}(\cdot;u_t)-[P_{1u}'(u_t;\cdot)]^*-Q_u'^*\Big]h=0,\quad \forall\, u\in D(N),\quad \forall\, h\in D(N_u'),
$$

а для справедливости этого равенства необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (11)–(17). □

5. Пример

Рассмотрим уравнение движения вида

$$N(u) \equiv a_1 u_t^2 + b_1 u_x^2 + a_2 u u_{tt} + b_2 u u_{xx} = 0, \tag{20}$$

$$(x,t) \in Q_T = (0,l) \times (0,T),$$

где $u = u(x,t)$ — неизвестная функция; a_i, b_i, $(i = 1,2)$ — постоянные.

Положим

$$D(N) = \big\{u \in U = C^2(\overline{Q}_T) : u|_{t=0} = \varphi_1(x),\ u|_{t=T} = \varphi_2(x)\ \big(x \in (0,l)\big),$$
$$u|_{x=0} = \psi_1(t),\ u|_{x=l} = \psi_2(t)\ \big(t \in (0,T)\big)\big\}, \tag{21}$$

где $\varphi_i \in C[0,l]$, $\psi_i \in C[0,T]$, $(i = 1,2)$.

Обозначим $V = C(\overline{Q}_T)$ и зададим билинейную форму равенством

$$\Phi(v,g) = \int_0^T \int_0^l v(x,t) g(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \tag{22}$$

Покажем, что уравнение движения (20) допускает представление в форме уравнения Эйлера–Лагранжа при выполнении условий

$$b_2 = 2b_1, \quad a_2 = 2a_1. \tag{23}$$

Действительно, в данном случае $P_{3u} = a_1$, $P_{2u} = a_2 u$, $P_{1u} = 0$, $Q(u) = b_1 u_x^2 + b_2 u u_{xx}$, поэтому

$$P^*_{2u} = a_2 u, \quad \frac{\partial P^*_{2u}}{\partial t} = 0, \quad P^*_{1u} = 0, \quad P^*_{3u} = a_1,$$

$$P^{*\prime}_{2u}(\cdot; u_t) = a_2 u_t, \quad P_{3u}(u_t(\cdot)) = a_1 u_t, \quad Q'_u = 2b_1 u_x D_x + b_2 u_{xx} + b_2 u D_x^2,$$

$$Q'^*_u = -2b_1 u_{xx} - 2b_1 u_x D_x + 2b_2 u_{xx} + 2b_2 u_x D_x + b_2 u D_x^2,$$

$$\frac{\partial^2 P^*_{2u}}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial P^*_{1u}}{\partial t} = 0, \quad P'_{1u}(u_t;\cdot) = 0, \quad P^{*\prime}_{1u}(\cdot; u_t) = 0, \quad [P'_{1u}(u_t;\cdot)]^* = 0,$$

$$\left(\frac{\partial P^*_{2u}}{\partial t}\right)'_u (\cdot; u_t) = 0, \quad \frac{\partial P^{*\prime}_{2u}}{\partial t}(\cdot; u_t) = 0, \quad \frac{\partial P^*_{3u}}{\partial t} = 0, \quad P'_{2u}(u_{tt};\cdot) = a_2 u_{tt},$$

$$P^{*\prime}_{2u}(\cdot; u_{tt}) = a_2 u_{tt}, \quad [P'_{2u}(u_{tt};\cdot)]^* = a_2 u_{tt}, \quad P^{*\prime\prime}_{2u}(\cdot; u_t; u_t) = 0,$$

$$P'_{3u}(u_t^2;\cdot) = 0, \quad [P'_{3u}(u_t^2;\cdot)]^* = 0, \quad P^{*\prime}_{3u}(\cdot; u_t) = 0.$$

Из (11) $\Longrightarrow a_2 u - a_2 u = 0$,
(12) $\Longrightarrow a_1 u_t - a_2 u_t + a_1 u_t = 0$,
(13) $\Longrightarrow 0 = 0$,
(14) $\Longrightarrow 2b_1 u_x D_x + b_2 u_{xx} + b_2 u D_x^2 + 2b_1 u_{xx} + 2b_1 u_x D_x - 2b_2 u_{xx} - 2b_2 u_x D_x - b_2 u D_x^2 = 0$,
(15) $\Longrightarrow 0 = 0$,
(16) $\Longrightarrow a_2 u_{tt} - a_2 u_{tt} - a_2 u_{tt} + 2a_1 u_{tt} = 0$,
(17) $\Longrightarrow 0 = 0$.

Таким образом, при выполнении условий (23) оператор N вида (20) является потенциальным на $D(N)$ (21) относительно билинейной формы (22).

6. Нахождение первых интегралов уравнения движения вида (1)

Распространим метод нахождения первых интегралов, предложенный в [2], на случай операторного уравнения (1).

Рассмотрим однопараметрическую группу преобразований вида

$$G : \begin{cases} \overline{t} = t + \varepsilon\varphi(t, u), \\ \overline{u}(\overline{t}) = u(t) + \varepsilon\psi(t, u), \end{cases} \tag{24}$$

где φ, ψ — некоторые операторы.

С помощью преобразования (24) заданной функции $u(t)$ можно поставить в соответствие функцию $\overline{u}(t, \varepsilon)$ по правилу

$$\overline{u} = u + \varepsilon S(u), \tag{25}$$

где $S(u) = \psi(t, u) - u_t\varphi(t, u)$. При этом оператор S называется генератором преобразования (25).

Определение 5. Преобразование (25) называется симметрией уравнения движения

$$N(u) = 0, \tag{26}$$

если для любого достаточно малого ε и любого решения u этого уравнения функция $\overline{u}$ вида (25) также является решением этого уравнения.

Критерий инвариантности получен в работе [3] и сформулирован в виде следующей теоремы.

Теорема 3. *Преобразование (25) является симметрией уравнения движения (26) тогда и только тогда, когда*

$$[N, S](u) \equiv N'_u S(u) - S'_u N(u) = 0 \tag{27}$$

на решениях заданного уравнения движения.

Теорема 4. *Пусть S_1, S_2 — генераторы симметрий уравнения (1), и оператор N является потенциальным на $D(N)$ относительно билинейной формы (6). Тогда выражение*

$$I[u] = D_t\langle P_{2u}S_2(u), S_1(u)\rangle - \langle 2P_{3u}(u_tS_2(u)) + 2P_{2u}D_tS_2(u) + P_{1u}S_2(u), S_1(u)\rangle \tag{28}$$

определяет первый интеграл заданного уравнения движения.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} &\langle N'_u h, g\rangle = \\ &= \langle 2P_{3u}(u_th_t) + P'_{3u}(u_t^2; h) + P_{2u}h_{tt} + P'_{2u}(u_{tt}; h) + P_{1u}h_t + P'_{1u}(u_t; h) + Q'_u h, g\rangle = \\ &\qquad = 2\langle h_t, u_tP^*_{3u}g\rangle + \langle h, [P'_{3u}(u_t^2; \cdot)]^* g\rangle + \langle h_{tt}, P^*_{2u}g\rangle + \langle h, [P'_{2u}(u_{tt}; \cdot)]^* g\rangle + \\ &\qquad\qquad + \langle h_t, P^*_{1u}g\rangle + \langle h, [P'_{1u}(u_t; \cdot)]^* g\rangle + \langle Q'^*_u g, h\rangle. \end{aligned} \tag{29}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \langle h_t, u_tP^*_{3u}g\rangle = D_t\langle h, u_tP^*_{3u}g\rangle - \langle h, u_{tt}P^*_{3u}g\rangle - \langle h, u_t\frac{\partial P^*_{3u}}{\partial t}g\rangle - \\ - \langle h, u_tP^{*\prime}_{3u}(g; u_t)\rangle - \langle h, u_tP^*_{3u}g_t\rangle, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\langle h_{tt}, P^*_{2u}g\rangle = D_t\langle h_t, P^*_{2u}g\rangle - \Big\langle h_t, \frac{\partial P^*_{2u}}{\partial t}g\Big\rangle - \langle h_t, P^{*\prime}_{2u}(g;u_t)\rangle - \langle h_t, P^*_{2u}g_t\rangle = \\
&= D_t\langle h_t, P^*_{2u}g\rangle - D_t\Big\langle h, \frac{\partial P^*_{2u}}{\partial t}g\Big\rangle + \Big\langle h, \frac{\partial^2 P^*_{2u}}{\partial t^2}g\Big\rangle + \Big\langle h, \Big(\frac{\partial P^*_{2u}}{\partial t}\Big)'_u(g;u_t)\Big\rangle + \\
&+ \Big\langle h, \frac{\partial P^*_{2u}}{\partial t}g_t\Big\rangle - D_t\langle h, P^{*\prime}_{2u}(g;u_t)\rangle + \Big\langle h, \frac{\partial P^{*\prime}_{2u}}{\partial t}(g;u_t)\Big\rangle + \langle h, P^{*\prime\prime}_{2u}(g;u_t;u_t)\rangle + \\
&+ \langle h, P^{*\prime}_{2u}(g_t;u_t)\rangle + \langle h, P^{*\prime}_{2u}(g;u_{tt})\rangle - D_t\langle h, P^*_{2u}g_t\rangle + \\
&+ \Big\langle h, \frac{\partial P^*_{2u}}{\partial t}g_t\Big\rangle + \langle h, P^{*\prime}_{2u}(g_t;u_t)\rangle + \langle h, P^*_{2u}g_{tt}\rangle,
\end{aligned}
$$

$$
\langle h_t, P^*_{1u}g\rangle = D_t\langle h, P^*_{1u}g\rangle - \langle h, \frac{\partial P^*_{1u}}{\partial t}g\rangle - \langle h, P^{*\prime}_{1u}(g;u_t) - \langle h, P^*_{1u}g_t\rangle.
$$

Таким образом, (29) примет вид

$$
\begin{aligned}
&\langle N'_u h, g\rangle = D_t\langle h, 2u_tP^*_{3u}g\rangle - \langle h, 2u_{tt}P^*_{3u}g\rangle - \Big\langle h, 2u_t\frac{\partial P^*_{3u}}{\partial t}g\Big\rangle - \\
&- \langle h, 2u_tP^{*\prime}_{3u}(g;u_t)\rangle - \langle h, 2u_tP^*_{3u}g_t\rangle + \langle h, [P'_{3u}(u_t^2;\cdot)]^*g\rangle + \\
&+ D_t\langle h_t, P^*_{2u}g\rangle - D_t\Big\langle h, \frac{\partial P^*_{2u}}{\partial t}g\Big\rangle + \Big\langle h, \frac{\partial^2 P^*_{2u}}{\partial t^2}g\Big\rangle + \Big\langle h, \Big(\frac{\partial P^*_{2u}}{\partial t}\Big)'_u(g;u_t)\Big\rangle + \\
&+ \Big\langle h, \frac{\partial P^*_{2u}}{\partial t}g_t\Big\rangle - D_t\langle h, P^{*\prime}_{2u}(g;u_t)\rangle + \Big\langle h, \frac{\partial P^{*\prime}_{2u}}{\partial t}(g;u_t)\Big\rangle + \langle h, P^{*\prime\prime}_{2u}(g;u_t;u_t)\rangle + \\
&+ \langle h, P^{*\prime}_{2u}(g_t;u_t)\rangle + \langle h, P^{*\prime}_{2u}(g;u_{tt})\rangle - D_t\langle h, P^*_{2u}g_t\rangle + \\
&+ \Big\langle h, \frac{\partial P^*_{2u}}{\partial t}g_t\Big\rangle + \langle h, P^{*\prime}_{2u}(g_t;u_t)\rangle + \langle h, P^*_{2u}g_{tt}\rangle + \langle h, [P'_{2u}(u_{tt};\cdot)]^*g\rangle + \\
&+ D_t\langle h, P^*_{1u}g\rangle - \Big\langle h, \frac{\partial P^*_{1u}}{\partial t}g\Big\rangle - \langle h, P^{*\prime}_{1u}(g;u_t)\rangle - \langle h, P^*_{1u}g_t\rangle + \\
&+ \langle h, [P'_{1u}(u_t;\cdot)]^*g\rangle + \langle Q'^*_u g, h\rangle. \qquad (30)
\end{aligned}
$$

Учитывая условия (11)–(17), из (30) получаем

$$
\begin{aligned}
&\langle N'_u h, g\rangle = \langle N'_u g, h\rangle + D_t\langle h, 2u_tP^*_{3u}g\rangle + D_t\langle h_t, P^*_{2u}g\rangle - D_t\Big\langle h, \frac{\partial P^*_{2u}}{\partial t}g\Big\rangle - \\
&- D_t\langle h, P^{*\prime}_{2u}(g;u_t)\rangle - D_t\langle h, P^*_{2u}g_t\rangle + D_t\langle h, P^*_{1u}g\rangle = \langle N'_u g, h\rangle + \\
&+ D_t\langle h, 2u_tP^*_{3u}g\rangle + D_t^2\langle h, P^*_{2u}g\rangle - 2D_t\Big\langle h, \frac{\partial P^*_{2u}}{\partial t}g\Big\rangle - \\
&- 2D_t\langle h, P^{*\prime}_{2u}(g;u_t)\rangle - 2D_t\langle h, P^*_{2u}g_t\rangle + D_t\langle h, P^*_{1u}g\rangle = \langle N'_u g, h\rangle + \\
&+ D_t\big(D_t\langle P_{2u}g, h\rangle - \langle 2P_{3u}(u_tg) + 2P_{2u}g_t + P_{1u}g, h\rangle\big).
\end{aligned}
$$

Подставляя в последнее выражение $S_1(u)$ и $S_2(u)$ вместо h и g и принимая во внимание (27), заключаем, что $I[u]$ вида (28) является первым интегралом заданного уравнения движения. $\square$

7. Заключение

В работе получен аналог условий потенциальности Гельмгольца для заданного уравнения движения. Дан общий вид первого интеграла этого уравнения в случае его инвариантности. Кроме того, предложен конструктивный метод нахождения генераторов симметрий.

Литература

1. *Савчин В. М.* Математические методы механики бесконечномерных непотенциальных систем. — М.: Изд-во УДН, 1991. — 237 с.
2. *Caviglia G.* Symmetry Transformations, Isovectors and Conservation Laws // J. Math. Phys. — Vol. 27, No 4. — 1986. — Pp. 972–978.
3. *Савчин В. М.* Симметрии ДУЧП с отклоняющимися аргументами // Тезисы докладов XXXVII Всероссийской научной конференции по проблемам математики, информатики, физики, химии и методики преподавания естественнонаучных дисциплин. — 2001. — С. 7–8.
4. *Савчин В. М., Будочкина С. А.* О структуре вариационного уравнения эволюционного типа со второй производной по t // Дифференциальные уравнения. — Т. 39, № 1. — 2003. — С. 118–124.
5. *Савчин В. М., Будочкина С. А.* О существовании вариационного принципа для операторного уравнения со второй производной по «времени» // Математические заметки. — Т. 80, № 1. — 2006. — С. 87–94.

UDC 517.93, 517.972.5

On a Direct Problem of Mechanics of Infinite-Dimensional Dissipative Systems

V. M. Savchin, S. A. Budochkina

Department of Mathematical Analysis and Theory of Functions
Peoples' Friendship University of Russia
Miklukho-Maklaya str., 6, Moscow, Russia, 117198

A constructive method for finding some first integrals of equations of motion of dissipative systems with infinite number of degrees of freedom is suggested.