УДК 621.39

Модель выделения ресурсов беспроводной сети объёмами случайной величины

В. А. Наумов*, А. К. Самуйлов†

* *Научно-исследовательский институт инновационных услуг*
ул. Лённротинкату, д. 30, Хельсинки, Финляндия, 00180

† *Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей*
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198

Задачей данной статьи является построение и анализ модели соты беспроводной сети LTE (Long Term Evolution) в виде многолинейной системы массового обслуживания (СМО) с потерями, вызванными нехваткой ресурсов, необходимых для обслуживания заявок. Принятая на обслуживание заявка занимает случайный объем ресурсов нескольких типов с заданными функциями распределения. Случайные векторы, описывающие требования заявок к ресурсам, не зависят от процессов поступления и обслуживания заявок, независимы в совокупности и одинаково распределены. На систему поступает L независимых пуассоновских потоков заявок, а для их обслуживания имеется N идентичных приборов. Длительности обслуживания заявок распределены по экспоненциальному закону. Функционирование СМО описывается полумарковским процессом, который учитывает число находящихся на обслуживании заявок, их типы и объёмы занимаемых ими ресурсов. Получены явные выражения для стационарного распределения полумарковского процесса, а основным результатом статьи является теорема о мультипликативности по числу входящих потоков стационарного распределения объёмов занятых ресурсов. Дальнейшие исследования предполагают проверку гипотезы об инвариантности вида стационарного распределения относительно закона распределения длительности обслуживания, а также разработку численных методов для анализа вероятностно-временных характеристик системы.

Ключевые слова: многолинейная система массового обслуживания, ограниченный ресурс, случайный объем занимаемого ресурса, полумарковский процесс, стационарное распределение, теорема о мультипликативности.

Введение

В статье исследована модель выделения радиоресурсов пользователям беспроводной сети, реализованной на базе технологии LTE. Модель учитывает особенности выделения ресурсов, которые, по сути, заключаются в том, что объём ресурса соты сети ограничен, а запросы пользователей (абонентов, устройств и пр.) порождают требования на предоставление им ресурса, объём которого, вообще говоря, является случайной величиной (с.в.) с заданной функцией распределения (ФР). В этом и заключается отличие предлагаемой в данной статье модели от известных ранее моделей. Во-первых, в известных моделях мультисервисных сетей с потерями [1–5] в явном виде отсутствовал параметр, определяющий наличие ресурса заданного ограниченного объёма, и, во-вторых, требования пользователей к занимаемому ресурсу являлись детерминированными. Например, в работах Ф. Келли [1], К. Росса [2], Г.П. Башарина [3], К.Е. Самуйлова [4,5], посвящённых анализу мультисервисных сетей с потерями, эти требования определялись как некоторые константы, соответствующие числу условных единиц ширины полосы пропускания, занимаемой в сети соединением пользователя. Отметим, что идея построения модели и начальные исследования были опубликованы в [6], а в статье [7] были представлены предложения по прикладным аспектами и численному анализу.

В данной статье получены явные выражения для стационарного распределения системы с ограниченным ресурсом, несколькими пуассоновскими входящими

Статья поступила в редакцию 14 февраля 2015 г.

потоком и экспоненциальным обслуживанием. Основным результатом статьи является теорема о мультипликативности по числу потоков стационарного распределения объёмов занятых ресурсов.

1. Описание модели

Перейдём к описанию математической модели, которая построена в терминах многолинейных систем массового обслуживания (СМО).

Рассмотрим изображённую на рис. 1 многолинейную СМО с $N \leqslant \infty$ приборами, на которую поступают L независимых пуассоновских потоков заявок с интенсивностями $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_L$ соответственно. Длительности обслуживания заявок независимы между собой, от поступающих потоков и экспоненциально распределены с параметром μ_l для заявок типа l. Обозначим через R общий объём ресурса, имеющегося в системе для обслуживания заявок, и будем считать, что объём ресурса, требуемого заявкам типа l, является с.в. с ФР $F_l(x)$, не зависящей от процессов поступления и обслуживания заявок. Обслуживающимся заявкам присваивается номер, причём так, чтобы заявка с номером i имела i-е по величине остаточное время обслуживания. Этот номер следует отличать от порядкового номера заявки. При поступлении новой заявки все находящиеся на обслуживании заявки перенумеровываются. Для обслуживания каждой заявки требуется некоторый случайный объём ресурса, а поступившая заявка теряется, если в момент поступления свободного ресурса системы недостаточно. В момент начала обслуживания заявки суммарный объём занятого ресурса увеличивается на величину выделенного ей ресурса, а в момент окончания обслуживания заявки суммарный объём занятого ресурса уменьшается на ту же величину.

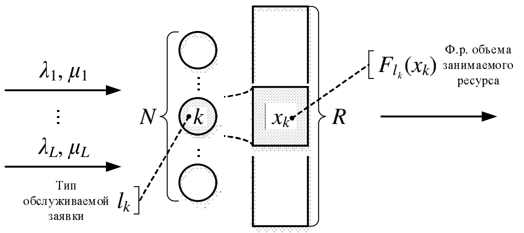

Рис. 1. Многолинейная СМО с ресурсом ограниченного объёма

Состояние системы в момент t описывается полумарковским процессом $X(t) = (\xi(t), \theta(t), \gamma(t))$. Здесь $\xi(t)$ — число заявок в системе, $\theta(t) := (\theta_1(t), \theta_2(t), \ldots, \theta_{\xi(t)}(t))$ и $\gamma(t) := (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \ldots, \gamma_{\xi(t)}(t))$, где $\theta_i(t)$ — тип i-й обслуживаемой заявкой и $\gamma_i(t)$ — объём занимаемого ею ресурса.

Состояние системы изменяется в моменты t_i, когда либо поступает заявка, либо завершается обслуживание. Рассмотрим интервал постоянства (t_{i-1}, t_i), на котором $X(t) = (k, l_1, l_2, \ldots, l_k, c_1, \ldots, c_k)$. Можно показать, что длина такого интервала имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda + \mu(l_1, \ldots, l_k)$, где $\lambda = \sum\limits_{l=1}^{L} \lambda_l$ и $\mu(l_1, \ldots, l_k) = \sum\limits_{i=1}^{k} \mu_{l_i}$. В момент завершения интервала постоянства либо с вероятностью $\lambda_l/(\lambda + \mu(l_1, \ldots, l_k))$ поступает новая заявка, либо с вероятностью $\mu(l_1, \ldots, l_k)/(\lambda + \mu(l_1, \ldots, l_k))$ завершается обслуживание. При нумерации обслуживаемых заявок в порядке убывания их остаточных времён обслуживания в момент окончания обслуживания систему покидает заявка с максимальным номером. Поэтому если t_i — момент завершения обслуживания, то в этот момент процесс $X(t)$ переходит из состояния $(k, l_1, l_2, \ldots, l_k, c_1, \ldots, c_k)$ в состояние $(k-1, l_1, \ldots, l_{k-1}, c_1, \ldots, c_{k-1})$.

В момент t_i поступления заявки возможен переход процесса $X(t)$ в различные состояния. Пусть поступившей в момент t_i заявке типа j требуется ресурс объёма

c. Обозначим через $d := c_1 + c_2 + \ldots + c_k$ суммарный объём занятого в этот момент ресурса.

2. Вспомогательные утверждения и система уравнений равновесия

Известно следующее утверждение: пусть с.в. $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k$ независимы и экспоненциально распределены с параметрами $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k$ соответственно, тогда

$$P\{\zeta_1 \geqslant \zeta_2 \geqslant \ldots \geqslant \zeta_k\} = \prod_{n=1}^{k} \frac{\nu_n}{\sum\limits_{r=n}^{k} \nu_i}. \quad (1)$$

Из формулы (1) следует, что принятая к обслуживанию заявка типа j получит номер i с вероятностью, определяемой следующей формулой

$$\sigma_{ji}(l_1, \ldots, l_k) = \begin{cases} \dfrac{\mu_j}{\mu_j + \mu(l_1, \ldots, l_k)}, & i = 1; \\ \dfrac{\mu_j}{\mu_j + \mu(l_i, \ldots, l_k)} \prod\limits_{r=1}^{i-1} \dfrac{\mu(l_r, \ldots, l_k)}{\mu_j + \mu(l_r, \ldots, l_k)}, & 1 < i \leqslant k; \\ \prod\limits_{r=1}^{k} \dfrac{\mu(l_r, \ldots, l_k)}{\mu_j + \mu(l_r, \ldots, l_k)}, & i = k+1. \end{cases} \quad (2)$$

Если в момент поступления заявки число обслуживаемых заявок k было меньше, чем N, и $c + d \leqslant R$, то заявка будет принята к обслуживанию и процесс $X(t)$ с вероятностью $\sigma_{ji}(l_1, \ldots, l_k)$ перейдёт из состояния $(k, l_1, l_2, \ldots, l_k, c_1, \ldots, c_k)$ в состояние $(k+1, l_1, \ldots l_{i-1}, j, l_i \ldots, l_k, c_1, \ldots, c_{i-1}, c, c_i, \ldots, c_k)$. В противном случае заявка теряется и состояние системы остаётся неизменным.

Введём стационарное распределение процесса $X(t)$:

$$p_0 = \lim_{t \to \infty} P\left\{\xi(t) = 0\right\},$$

$$p^k_{l_1, \ldots, l_k}(x_1, \ldots, x_k) = \\ = \lim_{t \to \infty} P\{\xi(t) = k;\ \theta_1(t) = l_1, \ldots, \theta_k(t) = l_k,\ \gamma_1(t) \leqslant x_1, \ldots, \gamma_k(t) \leqslant x_k\}.$$

Приведённое выше описание изменений состояний системы однозначно определяет переходные вероятности процесса $X(t)$ [8] и приводит к следующей системе уравнений равновесия для его стационарного распределения:

$$p_0 \sum_{j=1}^{L} \lambda_j F_j(R) = \sum_{j=1}^{L} \mu_j p^1_j(R); \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^{L} \lambda_j \int\limits_{0 \leqslant y_1 \leqslant x_1} F_j(R - y_1) p^1_{l_1}(\mathrm{d}y_1) + p^1_{l_1}(x_1)\mu_{l_1} =$$

$$= \lambda_{l_1} F(x_1) p_0 + \sum_{j=1}^{L} (\mu_j + \mu_{l_1}) \int\limits_{\substack{0 \leqslant y_1 \leqslant x_1 \\ 0 \leqslant y_2 \leqslant R - y_1}} p^2_{l_1 j}(\mathrm{d}y_1, \mathrm{d}y_2),\ 1 \leqslant l_1 \leqslant L,\ 0 \leqslant x_1 \leqslant R; \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^{L}\lambda_j \int\limits_{\substack{0\leqslant y_i\leqslant x_i,\ i=1,2,\ldots,k\\ y_1+\ldots+y_k\leqslant R}} F_j(R-y_1-y_2\ldots y_k)p^k_{l_1l_2\ldots l_k}(\mathrm{d}y_1,\mathrm{d}y_2,\ldots,\mathrm{d}y_k)+$$

$$+\,p^k_{l_1l_2\ldots l_k}(x_1,x_2,\ldots,x_k)\sum_{i=1}^{k}\mu_{l_i}=$$

$$=\sum_{j=1}^{L}\sum_{i=1}^{k}\lambda_j\sigma_{ji}(l_1\ldots l_{i-1}l_{i+1}\ldots l_k)p^{k-1}_{l_1\ldots l_{i-1}l_{i+1}\ldots l_k}(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_k)F_j(x_i)+$$

$$+\sum_{j=1}^{L}(\mu_j+\mu(l_1\ldots l_k))\int\limits_{\substack{0\leqslant y_i\leqslant x_i,\ i=1,2,\ldots,k\\ 0\leqslant y_{k+1}\leqslant R-y_1-\ldots-y_k}} p^{k+1}_{l_1\ldots l_kj}(\mathrm{d}y_1,\ldots,\mathrm{d}y_k,\mathrm{d}y_{k+1}),$$

$$1\leqslant l_1,\ldots,l_k\leqslant L,\quad x_1,x_2,\ldots,x_k\geqslant 0,\quad \sum_{i=1}^{k}x_i\leqslant R,\quad 1<k<N; \tag{5}$$

$$p^N_{l_1l_2\ldots l_N}(x_1,x_2,\ldots,x_N)\sum_{i=1}^{N}\mu_{l_i}=$$

$$=\sum_{j=1}^{L}\sum_{i=1}^{N}\lambda_j\sigma_{ji}(l_1\ldots l_{i-1}l_{i+1}\ldots l_N)p^{N-1}_{l_1\ldots l_{i-1}l_{i+1}\ldots l_N}(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_N)F_j(x_i),$$

$$1\leqslant l_1,\ldots,l_N\leqslant L,\quad x_1,x_2,\ldots,x_N\geqslant 0,\quad \sum_{i=1}^{N}x_i\leqslant R. \tag{6}$$

Нетрудно убедиться путём подстановки, что решение системы уравнений (3)–(6), удовлетворяющее нормировочному условию

$$p_0+\sum_{k=1}^{N}\sum_{1\leqslant l_1,\ldots,l_k\leqslant L}\int\limits_{\substack{x_1,x_2,\ldots,x_k\geqslant 0\\ x_1+x_2+\ldots+x_k\leqslant R}} p^k_{l_1,\ldots,l_k}(\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2,\ldots,\mathrm{d}x_k)=1, \tag{7}$$

имеет следующий вид

$$\begin{gathered}p^k_{l_1,\ldots,l_k}(x_1,x_2,\ldots,x_k)=p_0F_{l_1}(x_1)F_{l_2}(x_2)\ldots F_{l_k}(x_k)\prod_{n=1}^{k}\frac{\lambda_{l_n}}{\sum\limits_{i=n}^{k}\mu_{l_i}},\\ 1\leqslant l_1,\ldots,l_k\leqslant L,\quad x_1,x_2,\ldots,x_k\geqslant 0,\quad \sum_{i=1}^{k}x_i\leqslant R,\quad 1\leqslant k\leqslant N,\end{gathered} \tag{8}$$

где

$$p_0=\left(1+\sum_{r=1}^{N}\sum_{k_1+\ldots+k_r=r}F_1^{(k_1)}*F_2^{(k_2)}*\ldots*F_r^{(k_r)}(R)\frac{\rho_1^{k_1}}{k_1!}\frac{\rho_2^{k_2}}{k_2!}\ldots\frac{\rho_r^{k_r}}{k_r!}\right)^{-1}. \tag{9}$$

Здесь $\rho_l = \frac{\lambda_l}{\mu_l}$, символ $*$ есть знак свёртки, а $F_j^{(k)}(x)$ обозначает k-кратную свёртку ФР $F_j(x)$. Введём символ Кронекра — $\delta_{jl} = 1$, если $j = l$ и $\delta_{jl} = 0$ в противном случае.

Лемма 1. *Пусть k независимых случайных величин $\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_k$ разбиты на $L \leqslant k$ непустых групп, причём все величины, входящие в j-ю группу, имеют экспоненциальное распределение с параметром γ_j. Обозначим $g(i)$ номер группы, в которую входит случайная величина ζ_i и определим случайные величины $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_k$ как номера величин $\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_k$ при их упорядочении по убыванию, т.е. так, чтобы выполнялись неравенства $\zeta_{\theta_1} \geqslant \zeta_{\theta_2} \geqslant ... \geqslant \zeta_{\theta_k}$. Пусть, кроме того, k_j есть число случайных величин ζ_i входящих в j-ю группу, и обозначим $\varphi_k(k_1, ..., k_L)$ множество всех целочисленных векторов $(l_1, l_2, ..., l_k)$ длины $k = k_1 + k_2 + ... + k_L$, среди компонент которых число j встречается ровно k_j раз для каждого $j = 1, 2, ..., L$. Тогда справедлива следующая формула:*

$$P\{g(\theta_1) = l_1, ..., g(\theta_k) = l_k\} = \left(\prod_{j=1}^{L} k_j!\right) \prod_{n=1}^{k} \frac{\gamma_{l_n}}{\sum\limits_{r=n}^{k} \gamma_{l_r}}, \quad (l_1, l_2, ..., l_k) \in \varphi(k_1, ..., k_L). \tag{10}$$

Доказательство. Согласно формуле (1) для любой перестановки $s_1, ..., s_k$ чисел $1, ..., k$ справедливо равенство

$$P\{\zeta_{s_1} \geqslant \zeta_{s_2} \geqslant ... \geqslant \zeta_{s_k}\} = \prod_{n=1}^{k} \frac{\gamma_{g(s_n)}}{\sum\limits_{r=n}^{k} \gamma_{g(s_r)}},$$

и поэтому

$$P\{g(\theta_1) = l_1, ..., g(\theta_k) = l_k\} = \sum_{\substack{1 \leqslant s_1, ..., s_k \leqslant k \\ s_i \neq s_j,\ i \neq j \\ g(s_\nu) = l_\nu,\ \nu = 1, 2, ..., k}} P\{\zeta_{s_1} \geqslant ... \geqslant \zeta_{s_k}\} =$$

$$\sum_{\substack{1 \leqslant s_1, ..., s_k \leqslant k \\ s_i \neq s_j,\ i \neq j \\ g(s_\nu) = l_\nu,\ \nu = 1, 2, ..., k}} \prod_{n=1}^{k} \frac{\gamma_g(s_n)}{\sum\limits_{r=n}^{k} \gamma_g(s_r)} = \sum_{\substack{1 \leqslant s_1, ..., s_k \leqslant k \\ s_i \neq s_j,\ i \neq j \\ g(s_\nu) = l_\nu,\ \nu = 1, 2, ..., k}} \prod_{n=1}^{k} \frac{\gamma_{l_n}}{\sum\limits_{r=n}^{k} \gamma_{l_r}}.$$

Заметим, что последнее произведение не зависит от индексов суммирования $s_1, ..., s_k$. Поэтому сумма, в которую оно входит, равняется этому произведению, умноженному на общее число индексов суммирования, т.е. на число перестановок $s_1, ..., s_k$ чисел $1, 2, \ldots, k$, удовлетворяющих равенствам $g(s_\nu) = l_\nu, \nu = 1, 2, ..., k$. Поскольку среди компонент вектора $(l_1, ..., l_k)$ число j встречается ровно k_j раз для каждого $j = 1, 2, ..., L$, то число таких перестановок $s_1, ..., s_k$ равно произведению $k_1! k_2! ... k_L!$. Лемма доказана. □

Следствие. Справедливо равенство

$$\sum_{(l_1, ..., l_k) \in F_k(k_1, ..., k_L)} \prod_{n=1}^{k} \frac{\gamma_{l_n}}{\sum\limits_{r=n}^{k} \gamma_{l_r}} = \frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{L} k_j!}. \tag{11}$$

Доказательство. Равенство вытекает из формул (10) и того факта, что суммирование вероятностей $P\left\{g\left(\theta_1\right)=l_1,...,g\left(\theta_k\right)=l_k\right\}$ по всем векторам $\left(l_1,...,l_k\right)\in \varphi_k\left(k_1,...,k_L\right)$ даёт единицу.

3. Теорема о мультипликативности стационарного распределения

Введём стационарные вероятности того, что в системе находятся k_j заявок типа j и суммарный объём занимаемого ими ресурсов не превосходит x_j, $j=1,2,...,L$:

$$P_{k_1,...,k_L}(x_1,x_2,\ldots,x_L)=$$
$$=\sum_{(l_1,...,l_k)\in\varphi_k(k_1,...,k_L)}\int\limits_{\substack{y_i\geqslant 0,\ i=1,2,...,k\\ \sum_{i=1}^{k}\delta_{jl_i}y_i\leqslant x_j,\ j=1,2,...,L}} p^k_{l_1,...,l_k}(\mathrm{d}y_1,\mathrm{d}y_2,\ldots,\mathrm{d}y_k),$$
$$x_1,x_2,\ldots,x_k\geqslant 0,\quad \sum_{i=1}^{k}x_i\leqslant R,\quad k_1,\ldots,k_L\geqslant 0,\quad \sum_{i=1}^{L}k_i\leqslant N. \quad (12)$$

Здесь $\varphi_k(k_1,\ldots,k_L)$ — множество всех целочисленных векторов $(l_1,l_2,\ldots,l_k)$ длины $k=k_1+k_2+\ldots+k_L$, среди компонент которых число j встречается ровно k_j раз для каждого $j=1,2,\ldots,L$.

Теорема 1. *Стационарные вероятности того, что в системе находятся k_j заявок типа j и суммарный объём занимаемого ими ресурсов не превосходит x_j, $j=1,2,\ldots,L$, имеют мультипликативный вид:*

$$P_{k_1,...,k_L}(x_1,x_2,\ldots,x_L)=p_0\prod_{j=1}^{L}F_j^{(k_j)}(x_j)\frac{\rho_j^{k_j}}{k_j!},$$

где

$$x_1,x_2,\ldots,x_k\geqslant 0,\quad \sum_{i=1}^{k}x_i\leqslant R,k_1,\ldots,k_L\geqslant 0,\quad \sum_{i=1}^{L}k_i\leqslant N,$$

и

$$p_0=\left(1+\sum_{r=1}^{N}\sum_{k_1+\ldots+k_r=r}F_1^{(k_1)}*F_2^{(k_2)}*\ldots*F_r^{(k_r)}(R)\frac{\rho_1^{k_1}}{k_1!}\frac{\rho_2^{k_2}}{k_2!}\ldots\frac{\rho_r^{k_r}}{k_r!}\right)^{-1}.$$

Доказательство теоремы следует из леммы и формул (8)–(9).

Заключение

В статье получено стационарное распределение для СМО с ограниченным ресурсом, несколькими входящими пуассоновскими потоками и экспоненциальным обслуживанием. Показано, что стационарное распределение имеет мультипликативный вид. Дальнейшие исследования предполагают проверку гипотезы об инвариантности вида стационарного распределения относительно закона распределения длительности обслуживания аналогично тому, как это сделано в [9], а также разработку численных методов для анализа вероятностно-временных характеристик системы.

Литература

1. *Kelly F. P.* Mathematical Models of Multiservice Networks // Complex Stochastic Systems and Engineering. — Oxford University Press, 1995. — Pp. 221–234.
2. *Ross K. W.* Multiservice Loss Models for Broadband Telecommunication Networks. — London: Springer-Verlag, 1995. — 343 p.
3. *Башарин Г. П.* Лекции по математической теории телетрафика. Изд.3-е, перераб. и доп. — Москва: РУДН, 2009. — 342 с.
4. *Наумов В. А., Самуйлов К. Е., Яркина Н. В.* Теория телетрафика мультисервисных сетей. Монография. — Москва: РУДН, 2008. — 191 с.
5. *Башарин Г. П., Гайдамака Ю. В., Самуйлов К. Е.* Математическая теория телетрафика и ее приложения к анализу мультисервисных сетей связи следующих поколений // Автоматика и вычислительная техника. — 2013. — № 2. — С. 11–21.
6. *Наумов В. А., Самуйлов К. Е.* О моделировании систем массового обслуживания с множественными ресурсами // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — 2014. — № 3. — С. 60–64.
7. Two Approaches to Analyzing Dynamic Cellular Networks with Limited Resources / V. Naumov, K. Samouylov, E. Sopin, A. S. // 6th Int. Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT). — Moscow: 2014. — Pp. 585–588.
8. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем. — Киев: Наукова Думка, 1982.
9. *Севастьянов Б. А.* Эргодическая теорема для марковских процессов и ее приложение к телефонным линиям с отказами // Теория вероятностей и ее приложения. — 1957. — Т. 2, вып. 1. — С. 106–116.

UDC 621.39

Queuing System with Resource Allocation of the Random Volume

V. A. Naumov*, A. K. Samuylov†

* *Service Innovation Research Institute*
30, Lönnrotinkatu, Helsinki, Finland, 00180

† *Department of Applied Probability and Informatics*
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, Russian Federation, 117198

The objective of this paper is the construction and analysis of the model of the wireless LTE network (Long Term Evolution) as a multiserver queuing system where losses are caused by a lack of resources required to service requests. Adopted by the service application takes a random amount of resources given to several types of distribution functions. Random vectors describing the requirements of applications to resources, processes do not depend on input flow and service distribution are jointly independent and identically distributed. L independent Poisson flows of requests enter the system, and there are N identical devices. Service times are distributed exponentially. The functioning of the system is described by the semi-Markov process, which takes into account the number of serviced requests, their types and amounts of resources they occupy. Explicit expressions for the stationary distribution of the semi-Markov process, and the theorem on product form solution are main results of the paper. Further studies suggest checking the hypothesis of invariance with respect to the form of the stationary distribution of the distribution of the service time and the development of numerical methods for the analysis of probability measures of the system.

Key words and phrases: multiserver queuing system, a limited resource, a random amount of allocated resource, semi-Markov process, the stationary distribution, the theorem of multiplicative solution.

References

1. F. P. Kelly, Mathematical Models of Multiservice Networks, Oxford University Press, 1995, pp. 221–234.
2. K. W. Ross, Multiservice Loss Models for Broadband Telecommunication Networks, Springer-Verlag, London, 1995.
3. G. P. Basharin, Lectures on the Mathematical Theory of Teletraffic, RUDN, Moscow, 2009, in Russian.
4. V. F. Naumov, K. E. Samuylov, N. V. Yarkina, Teletraffic Theory for Multiservice Networks, RUDN, Moscow, 2007, in Russian.
5. G. P. Basharin, Y. V. Gaidamaka, K. E. Samouylov, Mathematical Theory of Teletraffic and Its Application to the Analysis of Multiservice Communication of Next Generation Networks, Automatic Control and Computer Sciences 47 (2) (2013) 62–69.
6. V. A. Naumov, K. E. Samouylov, On the Modeling of Queuing Systems with Multiple Resources, Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series "Mathematics. Informatics. Physics" (3) (2014) 60–64, in Russian.
7. V. Naumov, K. Samouylov, E. Sopin, A. S., Two Approaches to Analyzing Dynamic Cellular Networks with Limited Resources, in: 6th Int. Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT), Moscow, 2014, pp. 585–588.
8. V. S. Korolyuk, A. F. Turbin, Markov Renewal Processes in Problems of Reliability of Systems, Naukova Dumka, Kiev, 1982, in Russian.
9. B. A. Sevastianov, An Ergodic Theorem for Markov Processes and its Application to the Phone Lines with Failures, Theory of Probability and its Applications 2 (1957) 106–116, in Russian.