Математическое моделирование

УДК 517.958, 517.963

Построение асимптотического приближения решений краевой задачи для релятивистского конечно-разностного уравнения Шрёдингера с сингулярным осцилляторным квазипотенциалом

И. В. Амирханов [*], **С. А. Васильев** [†], **Д. Г. Васильева** [†], **А. Ф. Каращук** [†], **В. Э. Денисов** [‡], **Д. Н. Удин** [§]

[*] *Объединённый институт ядерных исследований*
ул. Жолио–Кюри, д. 6, Дубна, Московская обл., Россия, 141980

[†] *Российский университет дружбы народов*
ул. Миклухо–Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198

[‡] *ТНК-ВР*
ул. Арбат, д. 1, Москва, Россия, 119019

[§] *Отделение IBM по Центральной и Восточной Европе*
Донаусштрассе, д. 95, Вена, Австрия, А-1020

В статье с помощью асимптотических методов исследуются решения краевой задачи для релятивистского конечно-разностного уравнения Шрёдингера с сингулярным осцилляторным квазипотенциалом. Для собственных функций и собственных значений этой задачи получены соответствующие нерелятивистские пределы.

Ключевые слова: асимптотические методы, математическое моделирование, квазипотенциальный подход.

1. Введение

Сингулярный гармонический осциллятор является одной из немногих задач нерелятивистской квантовой механики, имеющих точное решение [1]. Эта модель используется при описании многих явлений — взаимодействие многих тел, квантовый эффекта Холла и т.д.

В данной статье с помощью асимптотических методов исследуются решения краевой задачи для релятивистского конечно-разностного уравнения Шрёдингера [2–7] с сингулярным осцилляторным квазипотенциалом, которое является линейным дифференциальным уравнением бесконечного порядка с малыми параметрами при старших производных. Таким образом, для построения решений, представляющих собой набор собственных функций и собственных значений, возможно использование методов, применяемых в теории сингулярно возмущённых дифференциальных уравнений [8–13].

От дифференциального уравнения бесконечного порядка можно перейти к уравнению конечного (но высокого) порядка путём отбрасывания производных больше порядка $2m$. В данной работе также исследовано поведение собственных функций и собственных значений при неограниченном возрастании порядка уравнения $m \to \infty$.

Статья поступила в редакцию 17 марта 2008 г.

2. Постановка задачи

Рассмотрим релятивистское конечно-разностное уравнение Шрёдингера [5–7] в релятивистском конфигурационном пространстве для радиальных волновых функций связанных состояний двух одинаковых элементарных частиц

$$\left[H_0^{\mathrm{rad}} + V(r) - 2c\sqrt{q^2+m^2c^2}\right]\psi(r,l) = 0, \tag{1}$$

$$H_0^{\mathrm{rad}} = 2mc^2\, ch\left(\frac{i\hbar}{mc}D\right) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{mr(r+\frac{i\hbar}{mc})}\exp\left(\frac{i\hbar}{mc}D\right) =$$
$$= \sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p 2mc^2}{(2p)!!}\left(\frac{\hbar}{mc}\right)^{2p}D^{2p} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{mr(r+\frac{i\hbar}{mc})}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}\left(\frac{i\hbar}{mc}\right)^p D^p, \quad D^p = \mathrm{d}^p/\mathrm{d}r^p,$$

где m, q и l — масса, импульс и момент элементарных частиц, а $V(r)$ — квазипотенциал.

Если в этом уравнении формально устремить величину скорости света к бесконечности ($c \to \infty$), то это уравнение переходит в нерелятивистское уравнение Шрёдингера

$$\left[-\hbar^2 D^2 + \hbar^2 l(l+1)/r^2 + mV(r) - q^2\right]\psi(r) = 0. \tag{2}$$

Для удобства перейдём к системе единиц, в которой $\hbar = 1$, $m = 1$. Пусть далее $l = 0$ (случай S-волны) и

$$\varepsilon = \frac{1}{c}, \lambda_{\varepsilon,\infty} = 2q^2/\sqrt{1+\varepsilon^2 q^2} + 1, \quad v(r) = V(r), \quad q^2 = \left(1 + 0,25\varepsilon^2\lambda_{\varepsilon,\infty}\right)\lambda_{\varepsilon,\infty},$$

тогда уравнение (1) можно переписать в виде:

$$\left[\widetilde{L}_\infty^\varepsilon - \lambda_{\varepsilon,\infty}\right]\psi_{\varepsilon,\infty}(r) = 0, \tag{3}$$

$$\widetilde{L}_\infty^\varepsilon = L_2 + \varepsilon^2 L_\infty^\varepsilon + v(r) = \sum_{p=1}^{\infty}\varepsilon^{2p-2}\mathcal{L}_{2p}, \quad \mathcal{L}_{2p} = \frac{2(-1)^p}{(2p)!!}D^{2p}, \quad \varepsilon \in (0,1],$$

$$L_2 = \mathcal{L}_2 = -D^2 + v(r), \quad L_\infty^\varepsilon = \sum_{p=1}^{\infty}\varepsilon^{2p-2}\mathcal{L}_{2p+2} = \sum_{p=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{p+1}}{(2p+2)!!}\varepsilon^{2p-2}D^{2p+2}.$$

Это дифференциальное уравнение бесконечного порядка с малым параметром ($\varepsilon \ll 1$) при старших производных и поэтому его можно отнести к классу сингулярно возмущённых уравнений.

Если в уравнении (3) ограничиться конечным порядком $m > 1$, то можно записать:

$$\left[\widetilde{L}_{2m}^\varepsilon - \lambda_{\varepsilon,2m}\right]\psi_{\varepsilon,2m}(r) = 0,$$

$$\widetilde{L}_{2m}^\varepsilon = L_2 + \varepsilon^2 L_{2m}^\varepsilon = \sum_{p=1}^{m}\varepsilon^{2p-2}\mathcal{L}_{2p} + v(r),$$

$$L_{2m}^\varepsilon = \sum_{p=1}^{m-1}\varepsilon^{2p-2}\mathcal{L}_{2p+2} = \sum_{p=1}^{m-1}\frac{2(-1)^{p+1}}{(2p+2)!!}\varepsilon^{2p-2}D^{2p+2},$$

где L_2 — эллиптический самосопряжённый оператор порядка 2, $\widetilde{L}_{2m}^\varepsilon$ — эллиптический самосопряжённый оператор порядка $2m$, $\psi_{\varepsilon,2m}(r)$ — решение дифференциального уравнения порядка $2m$.

Для этого дифференциального уравнения сформулируем краевые задачи A_ε^{2m} на отрезке $[0, r_0]$ и B_ε^{2m} на полупрямой $[0, +\infty)$ для нахождения собственных функций $[\psi_{\varepsilon,2m,\gamma}]_{\gamma=1}^{\infty}$ и собственных значений $[\lambda_{\varepsilon,2m,\gamma}]_{\gamma=1}^{\infty}$ следующим образом:

краевые условия задачи A_ε^{2m}:

$$\left[\widetilde{L}_{2m} - \lambda_{\varepsilon,2m}\right]\psi_{\varepsilon,2m}(r) = 0, \tag{4}$$

$$D^i\psi_{\varepsilon,2m}(0) = D^i\psi_{\varepsilon,2m}(r_0) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, m-1; \tag{5}$$

краевые условия задачи B_ε^{2m}:

$$D^i\psi_{\varepsilon,2m}(0) = D^i\psi_{\varepsilon,2m}(+\infty) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{6}$$

Если положить $\varepsilon = 0$, то получим вырожденные задачи A_0 и B_0 для нахождения собственных функций $[\psi_{0,\gamma}]_{\gamma=1}^{\infty}$ и собственных значений $[\lambda_{0,\gamma}]_{\gamma=1}^{\infty}$ такого вида:

краевые условия задачи A_0:

$$[L_2 - \lambda_0]\,\psi_0(r) = 0, \tag{7}$$

$$\psi_0(0) = \psi_0(r_0) = 0; \tag{8}$$

краевые условия задачи B_0:

$$\psi_0(0) = \psi_0(+\infty) = 0. \tag{9}$$

В связи с этим возникает вопрос о поведении собственных функций $[\psi_{\varepsilon,2m,\gamma}]_{\gamma=1}^{\infty}$ и собственных значений $[\lambda_{\varepsilon,2m,\gamma}]_{\gamma=1}^{\infty}$ задач A_ε^{2m} и B_ε^{2m}, во-первых, при устремлении малого параметра к нулю ($\varepsilon \to 0$) при фиксированном порядке m оператора $\widetilde{L}_{2m}$, во-вторых, при возрастании порядка m и фиксированном ε.

Собственные функции $[\psi_{\varepsilon,2m,\gamma}]_{\gamma=1}^{\infty}$ и $[\psi_{0,\gamma}]_{\gamma=1}^{\infty}$ (решения соответствующих задач A_ε^{2m}, A_0 и B_ε^{2m}, B_0) являются элементами гильбертова пространства $H\,(\Omega_\Gamma)\,(\Gamma = A, B)$ со скалярным произведением $(\psi, \varphi)_{H(\Omega_\Gamma)} = \int_{\Omega_\Gamma} \psi(r)\,\varphi(r)\,\mathrm{d}r$ ($\psi, \varphi \in H(\Omega_\Gamma)$), в котором действует множество линейных непрерывных самосопряжённых операторов $\mathcal{A}\,(\Omega_\Gamma) : H\,(\Omega_\Gamma) \to H\,(\Omega_\Gamma)$ задач $A_\varepsilon^{2m}, B_\varepsilon^{2m}, A_0, B_0$ ($\widetilde{L}_{2m}^{\varepsilon}, L_2 \in \mathcal{A}$, $m > 2$), где $\Omega_\Gamma, \Gamma = A, B$ — область определения операторов (индекс A соответствует отрезку $[0, r_0]$, а индекс B — полупрямой $[0, +\infty)$). Через $\|\mathcal{A}\,(\Omega_\Gamma)\|_H$ обозначим норму операторов $\mathcal{A}\,(\Omega_\Gamma)$

$$\|\mathcal{A}\,(\Omega_\Gamma)\|_H = \sup_{\psi\in H, \psi\neq 0} \frac{\|\mathcal{A}\psi\|_H}{||\psi||_H}, \quad ||\psi||_H = (\psi, \psi)_H^{1/2}.$$

Приведём достаточные условия разрешимости задач A_0, B_0 и A_ε^{2m}, B_ε^{2m} [9].

Условие 1. *Оператор L_2 при граничных условиях задач A_0 или B_0 должен быть положительно определённым, т.е.*

$$(L_2(\psi_0), \psi_0)_{H(\Omega_\Gamma)} = \int\limits_{\Omega_\Gamma} L_2(\psi_0)\psi_0\,\mathrm{d}r = \int\limits_{\Omega_\Gamma} |D\psi_0|^2\,\mathrm{d}r + \int\limits_{\Omega_\Gamma} v(r)\psi_0^2\,\mathrm{d}r \geqslant 0,$$

для любых функций $v(r) \in C^\infty(\Gamma)$ и функций $\psi_0 \in H(\Omega_\Gamma)$ из области определения Ω_Γ, удовлетворяющих краевым условиям соответствующих вырожденных задач (A_0 или B_0).

Условие 2. *Оператор L_{2m}^{ε} при граничных условиях задач A_ε^{2m} или B_ε^{2m} должен быть положительным, т.е.*

$$(L_{2m}^{\varepsilon}\psi_{\varepsilon,2m}, \psi_{\varepsilon,2m})_{H(\Omega_\Gamma)} = \sum_{p=1}^{m-1} \frac{2(-1)^{p+1}}{(2p+2)!!}\varepsilon^{2p-2} \int\limits_{\Omega_\Gamma} \left(D^{2p+2}\psi_{\varepsilon,2m}\right)\psi_{\varepsilon,2m}\,\mathrm{d}r =$$

$$= \sum_{p=1}^{m-1} \frac{2}{(2p+2)!!} \varepsilon^{2p-2} \int\limits_{\Omega_\Gamma} \left| D^{p+1} \psi_{\varepsilon,2m} \right|^2 \mathrm{d}r \geqslant 0,$$

для любых $\psi_{\varepsilon,2m} \in H(\Omega_\Gamma)$ из области определения Ω_Γ, удовлетворяющих краевым условиям соответствующих сингулярно возмущённых задач (A_ε^{2m} или B_ε^{2m}).

Известно, что вырождение задач $A_\varepsilon^{2m}, B_\varepsilon^{2m}$ в задачи A_0, B_0 будет *регулярным*, если число корней с отрицательной вещественной частью и положительной вещественной частью *дополнительного характеристического уравнения*, имеющего в нашем случае вид

$$\mathcal{P}(\alpha^{2m}) = \sum_{p=1}^{m} \frac{(-1)^p}{(2p)!!} (\alpha^{2m})^{2p-2} = 0,$$

совпадает с числом краевых условий выпадающих слева и, соответственно, справа при переходе от задач $A_\varepsilon^{2m}, B_\varepsilon^{2m}$ к задачам A_0, B_0.

Для нашего случая достаточное условие регулярности вырождения задач $A_\varepsilon^{2m}, B_\varepsilon^{2m}$ в задачи A_0, B_0 имеет место, если выполняется следующее условие.

Условие 3. *Для вещественной части обобщённой характеристической формы оператора $\sum\limits_{p=1}^{m} \varepsilon^{2p-2} \mathcal{L}_{2p}$, которая получается заменой в нем D^{2p} на $(i\xi)^{2p}$*

$$\pi_\varepsilon(\xi) = \sum_{p=1}^{m} \frac{2(-1)^p}{(2p)!!} \varepsilon^{2p-2} (i\xi)^{2p},$$

должно выполняться неравенство

$$\mathrm{Re}\ (\pi_\varepsilon(\xi)) = \sum_{p=1}^{m} \frac{2}{(2p)!!} \varepsilon^{2p-2} \xi^{2p} \geqslant C \sum_{p=1}^{m} \varepsilon^{2p-2} |\xi|^{2p} \geqslant 0,$$

где C не зависит от ξ, тогда задачи A_ε^{2m} и B_ε^{2m} регулярно вырождаются в задачи A_0 и B_0.

Пусть далее $\lambda_{\varepsilon,2m,1} \leqslant \lambda_{\varepsilon,2m,2} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{\varepsilon,2m,n} \leqslant \ldots$ и $\lambda_{0,1} \leqslant \lambda_{0,2} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{0,n} \leqslant \ldots$ — упорядоченные в порядке возрастания собственные значения $[\lambda_{\varepsilon,2m,\gamma}]_{\gamma=1}^{\infty}$, $[\lambda_{0,\gamma}]_{i=1}^{\infty}$, которым соответствуют полные ортонормированные системы собственных функций $[\psi_{\varepsilon,2m,\gamma}]_{\gamma=1}^{\infty}$, $[\psi_{0,\gamma}]_{\gamma=1}^{\infty}$.

Так как для задач A_ε^{2m} и A_0 область определения Ω_A операторов $\widetilde{L}_{2m}$ и L_2 совпадает и для любой функции $\psi_{\varepsilon,2m} \in \Omega_A$, удовлетворяющей краевым условиям задачи A_ε^{2m}, в силу *условия 2* выполняется

$$\left(L_{2m}^{\varepsilon} \psi_{\varepsilon,2m}, \psi_{\varepsilon,2m}\right)_{H(\Omega_A)} \geqslant \left(L_2 \psi_{\varepsilon,2m}, \psi_{\varepsilon,2m}\right)_{H(\Omega_A)},$$

то из минимаксной теории собственных значений Куранта [9] следует:

$$\lambda_{\varepsilon,2m,\gamma} \geqslant \lambda_{0,\gamma}, \quad \gamma = 1, 2, \ldots.$$

Аналогичная оценка имеет место и для задач B_ε^{2m} и B_0.

3. Формализм построения асимптотического решения краевой задачи для случая произвольного потенциала $v(r)$

3.1. Общая схема построения асимптотики. Регулярный и пограничный ряды

Для поиска решений задач A_ε^{2m} и B_ε^{2m} здесь привлекаются методы, применяемые в рамках теории сингулярных возмущений дифференциальных уравнений [8–13].

Будем искать формальное решение $\psi_{\varepsilon,2m}(r)$ рассматриваемых задач в виде такого асимптотического ряда

$$\Theta\psi_{\varepsilon,2m}(r) = \bar{\psi}_{2m}(r,\varepsilon) + \Pi_{2m}\psi\left(\rho_1,\varepsilon\right) + Q_{2m}\psi\left(\rho_2,\varepsilon\right) = \\ = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\left(\bar{\psi}_{2m,k}(r) + \Pi_{2m,k}\psi(\rho_1) + Q_{2m,k}\psi(\rho_2)\right), \quad (10)$$

что его частичная сумма

$$\Theta_j\psi_{\varepsilon,2m}(r) = \sum_{k=0}^{j}\varepsilon^k\left(\bar{\psi}_{2m,k}(r) + \Pi_{2m,k}\psi(\rho_1) + Q_{2m,k}\psi(\rho_2)\right)$$

будет удовлетворять неравенствам для решения задачи A_ε^{2m}

$$\max_{r\in[\delta_A,r_0-\delta_A]}|\psi_{\varepsilon,2m} - \Theta_j\psi_{\varepsilon,2m}| < M_A\,\varepsilon^{j+1}$$

и задачи B_ε^{2m}

$$\max_{r\in[\delta_B,\infty+)}|\psi_{\varepsilon,2m} - \Theta_j\psi_{\varepsilon,2m}| < M_B\,\varepsilon^{j+1},$$

а также аналогичным неравенствам для краевых условий данных задач, где M_A, M_B и $\delta_A \ll 1, \delta_B \ll 1$ — положительные постоянные, независимые от r и ε. Тогда для $\psi_{\varepsilon,2m}$ асимптотическое решение будет иметь вид:

$$\psi_{\varepsilon,2m}(r) = \sum_{k=0}^{j}\varepsilon^k\left(\bar{\psi}_{2m,k}(r) + \Pi_{2m,k}\psi(\rho_1) + Q_{2m,k}\psi(\rho_2)\right) + \bar{z}_j^{2m}(r),$$

где $\bar{z}_j^{2m}(r) = \varepsilon^{j+1}z_j^{2m}(r)$ — погрешность асимптотического приближения решения $\psi_{\varepsilon,2m}$ частичной суммой $\Theta_j\psi_{\varepsilon,2m}$

$$\bar{z}_j^{2m}(r) = \psi_{\varepsilon,2m} - \Theta_j\psi_{\varepsilon,2m}.$$

Здесь $\bar{\psi}_{2m}(r,\varepsilon) \equiv \bar{\psi}_{2m,0}(r) + \varepsilon\bar{\psi}_{2m,1}(r) + \varepsilon^2\bar{\psi}_{2m,2}(r) + \ldots$ — регулярная часть разложения, $\Pi_{2m}\psi(\rho_1,\varepsilon) \equiv \Pi_{2m,0}\psi(\rho_1) + \varepsilon\Pi_{2m,1}\psi(\rho_1) + \varepsilon^2\Pi_{2m,2}\psi(\rho_1) + \ldots$ — пограничный ряд, описывающий поведение решения на левом краю отрезка $[0,r_0]$ или полупрямой $[0,+\infty)$, $Q_{2m}\psi\left(\rho_2,\varepsilon\right) \equiv Q_{2m,0}\psi(\rho_2) + \varepsilon Q_{2m,1}\psi(\rho_2) + \varepsilon^2 Q_{2m,2}\psi(\rho_2) + \ldots$ — пограничный ряд, описывающий поведение решения задачи A_ε^{2m} на правом краю отрезка $[0,r_0]$ (для задачи B_ε^{2m} $Q_{2m}\psi(\rho_2,\varepsilon)$ заведомо равно нулю, так как решение задачи B_0 выбирается таким образом, чтобы оно стремилось к нулю при $r \to +\infty$ вместе со всеми своими производными, но для сохранения общности мы все-таки будем выписывать задачи для нахождения $Q_{2m}\psi(\rho_2,\varepsilon)$ и в этом случае).

Для пограничных функций $\Pi_{2m,k}\psi$, $Q_{2m,k}\psi$ здесь введены новые независимые (растянутые) переменные $\rho_1 = r/\varepsilon$ и $\rho_2 = \left(r_0 - r\right)/\varepsilon$.

Асимптотику собственных значений $\lambda_{\varepsilon,2m}$ будем искать в виде следующего асимптотического ряда по степеням ε:

$$\lambda_{\varepsilon,2m} \equiv \lambda_{2m,0} + \varepsilon\lambda_{2m,1} + \varepsilon^2\lambda_{2m,2} + \ldots, \quad (11)$$

где частичная сумма

$$\Theta_j\lambda_{\varepsilon,2m} = \sum_{k=0}^{j}\varepsilon^k\lambda_{2m,k}$$

будет удовлетворять неравенству $|\lambda_{\varepsilon,2m} - \Theta_j\lambda_{\varepsilon,2m}| < \tilde{M}\,\varepsilon^{j+1}$ ($\tilde{M}$ — положительная постоянная, независимая от r и ε).

Асимптотическое приближение собственного значения $\lambda_{\varepsilon,2m}$ будет иметь вид:

$$\lambda_{\varepsilon,2m} = \sum_{k=0}^{j} \varepsilon^k \lambda_{2m,k} + \bar{\Delta}_j^{2m}, \text{ где } \bar{\Delta}_j^{2m} = \varepsilon^{j+1}\Delta_j^{2m}, \quad \bar{\Delta}_j^{2m} = \lambda_{\varepsilon,2m} - \Theta_j \lambda_{\varepsilon,2m}$$

— погрешность асимптотического приближения собственного значения $\lambda_{\varepsilon,2m}$ частичной суммой.

Кроме того, будем предполагать возможность разложения функции $v(r)$ в виде сходящегося ряда в окрестности точки $r = 0$ и окрестности точки $r = r_0$

$$v(r) = \sum_{s=-1}^{\infty} v_s^1 r^s, \quad v(r) = \sum_{s=-1}^{\infty} v_s^2 (r - r_0)^s,$$

или, переходя к растянутым переменным, получим:

$$v(\rho_1) = \sum_{s=-1}^{\infty} v_s^1 \varepsilon^s \rho_1^s, \quad v(\rho_2) = \sum_{s=-1}^{\infty} (-1)^{|s|} v_s^2 \varepsilon^s \rho_2^s. \tag{12}$$

Главные члены асимптотики.
Подставим разложения (10), (11) и (12) в уравнение (4) и краевые условия (5) задачи A_ε^{2m}, а также в уравнение (4) и краевые условия (6) задачи B_ε^{2m}, и приравняем члены, стоящие при одинаковых степенях ε, таким образом, чтобы получить краевые задачи для нахождения членов разложения $\bar{\psi}_{2m,k}$, $\Pi_{2m,k}\psi$, $Q_{2m,k}\psi$ и $\lambda_{2m,k}$ соответствующих задач.

При этом на пограничные функции $\Pi_{2m,k}\psi$ и $Q_{2m,k}\psi$ мы накладываем такие дополнительные условия, которые обеспечивают стремление этих функций к нулю вне пограничного слоя, т. е.

$$\Pi_{2m,k}\psi(\rho_1) \to 0, \quad Q_{2m,k}\psi(\rho_2) \to 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

при $\varepsilon \to 0$ и фиксированном r.

Нулевое приближение.
В нулевом приближении мы получим систему для нахождения $\bar{\psi}_{2m,0}$, $\Pi_{2m,0}\psi$, $Q_{2m,0}\psi$ и $\lambda_{2m,0}$ задач A_ε^{2m} и B_ε^{2m} такого вида:

$$[L_2 - \lambda_{2m,0}]\bar{\psi}_{2m,0} = 0, \quad L_2 = -D^2 + v(r), \tag{13}$$

$$L_{2m}^1 \Pi_{2m,0}\psi = 0, \quad L_{2m}^1 = \sum_{p=1}^{m} \frac{2(-1)^p}{(2p)!!} \frac{\mathrm{d}^{2p}}{\mathrm{d}\rho_1^{2p}},$$

$$L_{2m}^2 Q_{2m,0}\psi = 0, \quad L_{2m}^2 = \sum_{p=1}^{m} \frac{2(-1)^p}{(2p)!!} \frac{\mathrm{d}^{2p}}{\mathrm{d}\rho_2^{2p}},$$

$$D^i(\bar{\psi}_{2m,0}(0) + \Pi_{2m,0}\psi(0)) = D^i(\bar{\psi}_{2m,0}(\bar{r}) + Q_{2m,0}\psi(\bar{r})) = 0,$$

$$\Pi_{2m,0}\psi(\rho_1) \to 0, Q_{2m,0}\psi(\rho_2) \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, m-1,$$

где $\bar{r} = r_0$ для A_ε^{2m} и $\bar{r} = +\infty$ для B_ε^{2m}.

Как известно [9], собственные функции $\left[\bar{\psi}_{2m,0,\gamma}\right]_{\gamma=1}^{\infty}$ и собственные значения $[\lambda_{2m,0,\gamma}]_{\gamma=1}^{\infty}$ совпадают с решениями соответствующих вырожденных задач A_0 или B_0.

Таким образом, пограничные функции $\Pi_{2m,0}\psi(\rho_1), Q_{2m,0}\psi(\rho_2)$ можно найти как решения следующих краевых задач:

$$L_{2m}^1 \Pi_{2m,0}\psi = 0, \tag{14}$$

$$D^i\Pi_{2m,0}\psi(0) = -D^i\bar{\psi}_{2m,0}(0), \Pi_{2m,0}\psi(\rho_1) \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \quad i = 0,1,2,\dots,m-1, \tag{15}$$

$$L^2_{2m}Q_{2m,0}\psi = 0, \tag{16}$$

$$D^iQ_{2m,0}\psi(\bar{r}) = -D^i\bar{\psi}_{2m,0}(\bar{r}), \quad Q_{2m,0}\psi(\rho_2) \to 0, \varepsilon \to 0, i = 0,1,2,\dots,m-1, \tag{17}$$

$\Pi_{2m,0}\psi(\rho_1)$ и $Q_{2m,0}\psi(\rho_2)$ будем искать в таком виде:

$$\Pi_{2m,0}\psi(\rho_1) = \sum_{\zeta=1}^{m-1} C^{2m,1}_{\zeta,0} \exp(-\alpha^{2m}_\zeta \rho_1), \; Q_{2m,0}\psi(\rho_2) = \sum_{\zeta=1}^{m-1} C^{2m,2}_{\zeta,0} \exp\left(-\alpha^{2m}_\zeta \rho_2\right).$$

Здесь мы имеем столько же произвольных постоянных $C^{2m,1}_{\zeta,0}$ и $C^{2m,2}_{\zeta,0}$, сколько граничных условий задач A^{2m}_ε или B^{2m}_ε выпадает при переходе к вырожденным задачам A_0 или B_0.

Значения α^{2m}_ζ ($\zeta = 1,\dots,2m-2$) являются корнями *дополнительного характеристического уравнения* [9]

$$\mathcal{P}(\alpha^{2m}) = \sum_{p=1}^{m} \frac{(-1)^p}{(2p)!!}(\alpha^{2m})^{2p-2} = 0,$$

которые могут быть найдены численно.

Известно, что у данного алгебраического уравнения число корней с положительной и отрицательной вещественной частью одинаково [14]

$$\mathrm{Re}\left(\alpha^{2m}_\zeta\right) > 0, \quad \zeta = \overline{1,m-1}, \quad \mathrm{Re}\left(\alpha^{2m}_\zeta\right) < 0, \quad \zeta = \overline{m,m-2}.$$

Из краевых условий

$$D^i\Pi_{2m,0}\psi(0) = -D^i\bar{\psi}_{2m,0}(0), \quad D^iQ_{2m,0}\psi(\bar{r}) = -D^i\bar{\psi}_{2m,0}(\bar{r}), \quad i = 0,1,2,\dots,m-1$$

получим систему из $2m$ линейных уравнений для нахождения коэффициентов $C^{2m,1}_{\zeta,0}$, $C^{2m,2}_{\zeta,0}$ $(\zeta = 1,2,\dots,m)$ вида:

$$\mathbf{D}^{2m}\vec{\mathbf{C}}^{\,2m} = \vec{\mathbf{b}}^{\,2m}, \quad \mathbf{D}^{2m} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}^{2m}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}^{2m}_{22} \end{pmatrix}, \tag{18}$$

где блочные матрицы

$$\mathbf{D}^{2m}_{11} = (d_{1,r\zeta})^m_{r,\zeta=1}, \quad d_{1,r\zeta} = (-\alpha^{2m}_\zeta)^{r-1},$$

$$\mathbf{D}^{2m}_{22} = (d_{2,r\zeta})^m_{r,\zeta=1}, \quad d_{2,r\zeta} = (\alpha^{2m}_\zeta)^{r-1},$$

$$\vec{\mathbf{C}}^{\,2m\top} = \left(C^{2m,1}_{1,0},\dots,C^{2m,1}_{m,0},C^{2m,2}_{1,0},\dots,C^{2m,2}_{m,0}\right),$$

$$\vec{\mathbf{b}}^{\,2m\top} = (p^{2m}_1,\dots,p^{2m}_m,q^{2m}_1,\dots,q^{2m}_m),$$

$$p^{2m}_i = -D^i\bar{\psi}_{2m,0}(0), \quad q^{2m}_i = -D^i\bar{\psi}_{2m,0}(\bar{r}), \quad i = 1,\dots,m-1.$$

Так как значения $\alpha^{2m}_\zeta(\zeta = \overline{1,2m-2})$ попарно различны, то матрицы $\mathbf{D}^{2m}_{11}, \mathbf{D}^{2m}_{22}, \mathbf{D}^{2m}$ являются невырожденными и существует обратная к $\mathbf{D}^{2m}$ матрица $(\mathbf{D}^{2m})^{-1}$. Тогда единственное решение алгебраической системы (18) существует и имеет вид: $\vec{\mathbf{C}}^{\,2m} = (\mathbf{D}^{2m})^{-1}\vec{\mathbf{b}}^{\,2m}$.

Таким образом, мы полностью построили нулевое приближение $\bar{\psi}_{2m,0}$, $\Pi_{2m,0}\psi$, $Q_{2m,0}\psi$, $\lambda_{2m,0}$ задач A^{2m}_ε и B^{2m}_ε.

Нахождение следующих членов асимптотических рядов.
В случае $k > 0$ для задач A_ε^{2m} и B_ε^{2m} мы получим системы уравнений и дополнительные условия для нахождения $\bar{\psi}_{2m,k}$, $\Pi_{2m,k}\psi$, $Q_{2m,k}\psi$ и $\lambda_{2m,k}$ такого вида:

$$[L_2 - \lambda_{2m,0}]\bar{\psi}_{2m,k} = \lambda_{2m,k}\bar{\psi}_{2m,0} - h_k^{2m}(r), \tag{19}$$

$$L_{2m}^1 \Pi_{2m,k}\psi = g_{1k}^{2m}(\rho_1), \quad L_{2m}^2 Q_{2m,k}\psi = g_{2k}^{2m}(\rho_2), \tag{20}$$

$$D^i\left(\bar{\psi}_{2m,k}(0) + \Pi_{2m,k}\psi(0)\right) = D^i\left(\bar{\psi}_{2m,k}(\bar{r}) + Q_{2m,k}\psi(\bar{r})\right) = 0, \tag{21}$$

$$\Pi_{2m,k}\psi(\rho_1) \to 0, \quad Q_{2m,k}\psi(\rho_2) \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad i = \overline{0, m-1},$$

$$h_k^{2m}(r) = \sum_{p=1}^{[k/2]\leqslant 2m} \frac{2(-1)^{p+1}}{(2p+2)!!} D^{2p+2}\bar{\psi}_{2m,k-2p} - \sum_{p=1}^{k-1} \lambda_{2m,p}\bar{\psi}_{2m,k-p},$$

$$g_{1k}^{2m}(\rho_1) = -\frac{v_{-1}^1}{\rho_1}\Pi_{2m,k-1}\psi + \sum_{p=0}^{k-2}\left(\lambda_{2m,p} - v_p^1\rho_1^p\right)\Pi_{2m,k-p-2}\psi,$$

$$g_{2k}^{2m}(\rho_2) = \frac{v_{-1}^2}{\rho_2}Q_{2m,k-1}\psi + \sum_{p=0}^{k-2}\left(\lambda_{2m,p} - (-1)^p v_p^2\rho_2^p\right)Q_{2m,k-p-2}\psi.$$

Известно [9], что если λ — простое собственное значение самосопряжённого оператора $\mathcal{A}$, действующего в гильбертовом пространстве $H(\Omega_\Gamma)$, и $\psi \in H(\Omega_\Gamma)$ — соответствующая нормированная собственная функция $||\psi||_{H(\Omega_\Gamma)} = 1$, то в $H_1(\Omega_\Gamma)$ — ортогональном дополнении к ψ в $H(\Omega_\Gamma)$ — оператор $\mathcal{A} - \lambda I$ имеет ограниченный обратный $(\mathcal{A} - \lambda I)^{-1}_{H_1(\Omega_\Gamma)}$ (псевдорезольвенту). Уравнение

$$\mathcal{A}\varphi - \lambda\varphi = \omega\psi - h,\ h \in H(\Omega_\Gamma)$$

относительно $\varphi \in H_1(\Omega_\Gamma)$ и числа ω разрешимо, именно

$$\omega = (h, \psi)_{H(\Omega_\Gamma)}, \quad \varphi = (\mathcal{A} - \lambda I)^{-1}_{H_1(\Omega_\Gamma)}(\omega\psi - h),$$

где $(\omega\psi - h) \in H_1(\Omega_\Gamma)$.

Таким образом, при $k > 0$ для $\lambda_{2m,k,n}$ и $\bar{\psi}_{2m,k,n}$ получим

$$\lambda_{2m,k,n} = (h_k^{2m}, \psi_{0,n})_{H(\Omega_\Gamma)} = \int\limits_{\Omega_\Gamma} h_k^{2m}(r)\,\psi_{0,n}(r)\,\mathrm{d}r, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$\bar{\psi}_{2m,k,n} = (L_2 - \lambda_{2m,0,n})^{-1}_{H_1(\Omega_\Gamma)} h_k^{2m},$$

где $H_1(\Omega_\Gamma)$ — ортогональное дополнение к собственным функциям $\psi_{0,n} \in H(\Omega_\Gamma)$, $(\Gamma = A, B)$ вырожденной краевой задачи (A_0 или B_0) при условии $||\psi_{0,n}||_{H(\Omega_\Gamma)} = 1$.

Пограничные функции $\Pi_{2m,k}\psi(\rho_1), Q_{2m,k}\psi(\rho_2)$ при $k > 0$ могут быть найдены из краевых задач следующего вида:

$$L_{2m}^1 \Pi_{2m,k}\psi = g_{1k}^{2m}, \tag{22}$$

$$D^i\Pi_{2m,k}\psi(0) = -D^i\bar{\psi}_{2m,k}(0), \quad \Pi_{2m,k}\psi(\rho_1) \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \quad i = \overline{0, m-1}, \tag{23}$$

$$L_{2m}^2 Q_{2m,k}\psi = g_{2k}^{2m}, \tag{24}$$

$$D^i Q_{2m,k}\psi(\bar{r}) = -D^i\bar{\psi}_{2m,k}(\bar{r}), \quad Q_{2m,k}\psi(\rho_2) \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \quad i = \overline{0, m-1}. \tag{25}$$

Решения этих краевых задач будем искать в виде:

$$\Pi_{2m,k}\psi(\rho_1) = \Pi_{2m,k}\widetilde{\psi}(\rho_1) + \Pi_{2m,k}\psi^*(\rho_1), \tag{26}$$

$$Q_{2m,k}\psi(\rho_2) = Q_{2m,k}\widetilde{\psi}(\rho_2) + Q_{2m,k}\psi^*(\rho_2), \tag{27}$$

где

$$\Pi_{2m,k}\widetilde{\psi}(\rho_1) = \sum_{\zeta=1}^{m-1} C_{\zeta,k}^{2m,1}\, \mathrm{e}^{-\alpha_\zeta^{2m}\rho_1}, \quad Q_{2m,k}\widetilde{\psi}(\rho_2) = \sum_{\zeta=1}^{m-1} C_{\zeta,k}^{2m,2}\, \mathrm{e}^{-\alpha_\zeta^{2m}\rho_2}$$

— общие решения однородных уравнений (22), (24), а

$$\Pi_{2m,k}\psi^*(\rho_1) = \sum_{\zeta=1}^{m-1} \bar{C}_{\zeta,k}^{2m,1}(\rho_1)\, \mathrm{e}^{-\alpha_\zeta^{2m}\rho_1}, \quad Q_{2m,k}\psi^*(\rho_2) = \sum_{\zeta=1}^{m-1} \bar{C}_{\zeta,k}^{2m,2}(\rho_2)\, \mathrm{e}^{-\alpha_\zeta^{2m}\rho_2}$$

— частные решения данных неоднородных уравнений.

Так как α_i^{2m} попарно различны, то определители Вронского $W\left[e^{-\alpha_1^{2m}\rho_1}, \ldots, e^{-\alpha_{m-1}^{2m}\rho_1}\right]$ и $W\left[e^{-\alpha_1^{2m}\rho_2}, \ldots, e^{-\alpha_{m-1}^{2m}\rho_2}\right]$, составленные из систем функций $\left(\mathrm{e}^{-\alpha_\zeta^{2m}\rho_1}\right)_{\zeta=1}^{m-1}$ и $\left(\mathrm{e}^{-\alpha_\zeta^{2m}\rho_2}\right)_{\zeta=1}^{m-1}$, отличны от нуля. Это означает, что частные решения неоднородных уравнений (22), (24) можно найти методом вариации постоянных, т.е.

$$\mathbf{D}_{11}^{2m}\vec{\mathbf{\Omega}}_1 = \vec{\mathbf{F}}_1, \quad \mathbf{D}_{22}^{2m}\vec{\mathbf{\Omega}}_2 = \vec{\mathbf{F}}_2,$$

$$\vec{\mathbf{\Omega}}_1^\top = \left(\frac{\mathrm{d}\bar{C}_{\zeta,1}^{2m,1}(\rho_1)}{\mathrm{d}\rho_1}, \ldots, \frac{\mathrm{d}\bar{C}_{\zeta,m-1}^{2m,1}(\rho_1)}{\mathrm{d}\rho_1}\right), \quad \vec{\mathbf{\Omega}}_2^\top = \left(\frac{\mathrm{d}\bar{C}_{\zeta,1}^{2m,2}(\rho_2)}{\mathrm{d}\rho_2}, \ldots, \frac{\mathrm{d}\bar{C}_{\zeta,m-1}^{2m,2}(\rho_2)}{\mathrm{d}\rho_2}\right),$$

$$\vec{\mathbf{F}}_1^\top = \left(0, \ldots, 0, g_{1k}^{2m}\right), \quad \vec{\mathbf{F}}_2^\top = \left(0, \ldots, 0, g_{2k}^{2m}\right),$$

где, как показано выше, $\det\left|\mathbf{D}_{11}^{2m}\right| \neq 0$, $\det\left|\mathbf{D}_{22}^{2m}\right| \neq 0$. Тогда неизвестные функции $\bar{C}_{\zeta,k}^{2m,1}(\rho_1)$ и $\bar{C}_{\zeta,k}^{2m,2}(\rho_2)$ могут быть найдены из систем вида: $\vec{\mathbf{\Omega}}_1 = \left(\mathbf{D}_{11}^{2m}\right)^{-1}\vec{\mathbf{F}}_1$, $\vec{\mathbf{\Omega}}_2 = \left(\mathbf{D}_{22}^{2m}\right)^{-1}\vec{\mathbf{F}}_2$. После интегрирования и подстановки найденных неоднородных решений в (26), (19), будем иметь столько же произвольных постоянных, сколько граничных условий задач A_ε^{2m} или B_ε^{2m} выпадает при переходе к вырожденным задачам A_0 или B_0.

Таким образом, описанный алгоритм позволяет найти асимптотическое решение задач A_ε^{2m} и B_ε^{2m} для любого порядка j.

3.2. Обоснование асимптотики

Сформулируем следующую теорему.

Теорема 1. *Если самосопряжённые эллиптические операторы L_2 , L_{2m} удовлетворяют условиям 1–3 для задач $A_\varepsilon^{2m}, B_\varepsilon^{2m}, A_0, B_0$ и функция $v(r) \in C^\infty$ представима в виде равномерно сходящихся рядов в окрестности точки $r = 0$ и окрестности точки $r = r_0$*

$$v(r) = \sum_{s=-1}^{\infty} v_s^1 r^s, \quad v(r) = \sum_{s=-1}^{\infty} v_s^2 (r - r_0)^s,$$

то решение краевых задач A_ε^{2m} и B_ε^{2m} существует.

Соответствующее n-е собственное значение $\lambda_{\varepsilon,2m,n}$ и соответствующая n-я собственная функция $\psi_{\varepsilon,2m,n}(r)$ оператора $\widetilde{L}_{2m}$ имеют следующие асимптотические представления:

$$\lambda_{\varepsilon,2m,n} \equiv \lambda_{2m,0,n} + \varepsilon\lambda_{2m,1,n} + \varepsilon^2\lambda_{2m,2,n} + \ldots + \varepsilon^{j+1}\Delta_j^{2m}, \tag{28}$$

$$\psi_{\varepsilon,2m,n}(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^j (\bar{\psi}_{2m,k,n}(r) + \Pi_{2m,k,n}\psi(\rho_1) + Q_{2m,k,n}\psi(\rho_2)) + \varepsilon^{j+1} z_j^{2m}(r), \tag{29}$$

где $\lambda_{2m,0,n} = \lambda_{0,n}$ — n-е собственные значение (которое предполагается простым) и $\bar{\psi}_{2m,0,n}(r) = \psi_{0,n}(r)$ — n-я собственная функция оператора L_2 для краевых задач A_0 и B_0; функции $\bar{\psi}_{2m,k,n}(r)$, $\Pi_{2m,k,n}\psi$, $Q_{2m,k,n}\psi$ и значения $\lambda_{2m,k,n}$ при $k > 0$ определяются из систем уравнений и краевых условий, приведённых в пункте 2.

Для остаточных членов $\bar{z}_j^{2m}(r)$ и Δ_j^{2m} справедлива оценка

$$\left\|D\bar{z}_j^{2m}\right\|_H + \left\|\bar{z}_j^{2m}\right\|_H = O(\varepsilon^{j+1}), \quad \Delta_j^{2m} = O(1),$$

а для производной порядка p от частичной суммы $\Theta_j\psi_{\varepsilon,2m,n}$:

$$\left\|D^{q+2}\bar{z}_j^{2m}\right\|_H = O(\varepsilon^{j-q+1}), \quad 1 \leqslant q \leqslant s, \quad s \geqslant 2m-2,$$

точнее во внутренней подобласти $[\delta, r_0 - \delta]$:

$$\left\|D^{q+2}\bar{z}_j^{2m}\right\|_H = O(\varepsilon^{j+1}), \quad |q| \leqslant s,$$

а в погранслойных областях $(0, \delta]$ и $[r_0 - \delta, r_0)$:

$$\left\|D^{q+2}\bar{z}_j^{2m}\right\|_H = O(\varepsilon^{j-q+1}), \quad 1 \leqslant |q| \leqslant s.$$

Доказательство. Построенная функция $\Theta_j\psi_{\varepsilon,2m,n}(r)$ удовлетворяет краевым условиям задач A_ε^{2m} и B_ε^{2m}. Далее, так как

$$\|\psi_0\|_H = \|\bar{\psi}_{2m,0}\|_H = 1, \text{ то } \|\psi_{\varepsilon,2m}|_H = 1 + O(\varepsilon).$$

В силу наших построений

$$\left[\widetilde{L}_{2m}^{\varepsilon} - \Theta_j\lambda_{\varepsilon,2m}\right]\Theta_j\psi_{\varepsilon,2m}(r) = \varepsilon^{j+1}\bar{f}_j^{2m},$$

где $\bar{f}_j^{2m}$ — ограниченная функция ($\left\|\bar{f}_j^{2m}\right\|_H = O(1)$.) Но тогда, согласно оценки [9],

$$\inf_n |\lambda - \lambda_{\varepsilon,2m,n}| \leqslant \left\|\widetilde{L}_{2m}^{\varepsilon}\psi - \lambda\psi\right\|_H / ||\psi||_H,$$

где $\psi \in \Omega_\Gamma$ — произвольная функция из области определения оператора $\widetilde{L}_{2m}^{\varepsilon}$, а $\lambda > 0$ — произвольное вещественное число [9], и в силу оценки

$$\|\psi_{\varepsilon,2m}\|_H = 1 + O(\varepsilon)$$

получим

$$\lambda_{\varepsilon,2m,n} - \Theta_j\lambda_{\varepsilon,2m} = \varepsilon^{j+1}\Delta_j^{2m}, \text{ где } \left|\Delta_j^{2m}\right| \leqslant \|\bar{f}_j\|_H / \|\Theta_j\psi_{\varepsilon,2m}\|_H,$$

откуда вытекает оценка $\Delta_j^{2m} = O(1)$.

Пусть T_d^0 — замкнутая линейная оболочка, состоящая из собственных функций $\Theta_j\psi_{\varepsilon,2m,n}(r)$, отвечающих соответствующим собственным значениям $\Theta_j\lambda_{\varepsilon,2m,n}$, лежащим на отрезке $[\lambda_{0,n} - d, \lambda_{0,n} + d]$, где d — некоторое число $d > \sigma\left(\left\|\widetilde{L}^{\varepsilon}_{2m}\Theta_j\psi_{\varepsilon,2m} - \Theta_j\lambda_{\varepsilon,2m}\,\Theta_j\psi_{\varepsilon,2m}\right\|_H\right) \leqslant \sigma$. Тогда существует такая функция $\widetilde{\psi}_T \in T_d^0, \left\|\widetilde{\psi}_T\right\|_H = 1$, для которой $\left\|\Theta_j\psi_{\varepsilon,2m} - \widetilde{\psi}_T\right\|_H \leqslant 2\sigma/d$ [9].

Положим $3d = \min\left[\lambda_{0,n} - \lambda_{0,n-1}; \lambda_{0,n+1} - \lambda_{0,n}\right]$, тогда при достаточно малом ε имеют место следующие неравенства

$$\lambda_{\varepsilon,2m,n-1} - \lambda_{0,n-1} \leqslant d,\ \lambda_{\varepsilon,2m,n} - \lambda_{0,n} \leqslant d,\ \lambda_{\varepsilon,2m,n+1} - \lambda_{0,n+1} \leqslant d.$$

Таким образом, на отрезке $[\lambda_{0,n} - d, \lambda_{0,n} + d]$ заключено единственное собственное значение $\lambda_{\varepsilon,2m,n}$ оператора $\widetilde{L}^{\varepsilon}_{2m}$, которому отвечает единственная нормированная собственная функция $\psi_{\varepsilon,2m,n}(r)$, совпадающая с нормированной функцией $\widetilde{\psi}_T$, и справедлива оценка

$$\left\|\psi_{\varepsilon,2m,n} - \Theta_j\psi_{\varepsilon,2m,n}/\left\|\Theta_j\psi_\varepsilon, 2m, n\right\|_H\right\|_H \leqslant O\left(\varepsilon^{j+1}\right).$$

Теперь, если положить $\bar{\psi}_{\varepsilon,2m,n} = \left\|\Theta_j\psi_{\varepsilon,2m,n}\right\|_H \psi_{\varepsilon,2m,n}$, то получим, что $\bar{z}^{2m}_j = \varepsilon^{j+1}z^{2m}_j = \bar{\psi}_{\varepsilon,2m,n} - \Theta_j\psi_{\varepsilon,2m,n}$ и для z^{2m}_j справедливо $\left\|z^{2m}_j\right\|_H = O(1)$.

В силу наших построений и того, что $\lambda_{\varepsilon,2m,\gamma} \geqslant \lambda_{0,\gamma}$, $\gamma = 1, 2, \ldots$, а также

$$\left[\widetilde{L}^{\varepsilon}_{2m} - \Theta_j\lambda_{\varepsilon,2m}\right]\Theta_j\psi_{\varepsilon,2m}(r) = \varepsilon^{j+1}\bar{f}^{2m}_j, \quad \left\|\bar{f}^{2m}_j\right\|_H = O(1),$$

получим

$$\left\|\left[\widetilde{L}^{\varepsilon}_{2m} - \lambda_{\varepsilon,2m}\right]\bar{z}^{2m}_j\right\|_H = O(\varepsilon^{j+1})$$

и, значит,

$$\left\|\widetilde{L}^{\varepsilon}_{2m}\bar{z}^{2m}_j\right\|_H \leqslant \left\|\left[\widetilde{L}^{\varepsilon}_{2m} - \lambda_{\varepsilon,2m}\right]\bar{z}^{2m}_j\right\|_H + |\lambda_{\varepsilon,2m}|\left\|\bar{z}^{2m}_j\right\|_H = O(\varepsilon^{j+1}).$$

Так как $\bar{z}^{2m}_j$ удовлетворяют граничным условиям задач A^{2m}_ε и B^{2m}_ε и в силу *условий 1-3* имеем

$$\left\|\bar{z}^{2m}_j\right\|^2_H \leqslant \sum_{p=1}^{m-1}\varepsilon^{2p}\left\|D^p\bar{z}^{2m}_j\right\|^2_H + \left\|D\bar{z}^{2m}_j\right\|^2_H + \left\|\bar{z}^{2m}_j\right\|^2_H \leqslant \bar{C}\,\varepsilon^{2(j+1)}\left\|\bar{w}^{2m}_j\right\|^2_H,$$

где $\bar{w}^{2m}_j$ — ограниченная функция $\left(\left\|\bar{w}^{2m}_j\right\|_H = O(1)\right)$, а $\bar{C} > 0$ — положительная константа, не зависящая от r и ε. Отсюда сразу вытекают оценки для $\bar{z}^{2m}_j$, приведённые в условиях теоремы. □

4. Поведение собственных функций и собственных значений при неограниченном возрастании порядка уравнения $m \to \infty$

Исследуем некоторые вопросы поведения собственных функций и собственных значений задач A^{2m}_ε и B^{2m}_ε при неограниченном возрастании порядка уравнения

$$\left[\widetilde{L}^{\varepsilon}_{2m} - \lambda_{\varepsilon,2m}\right]\psi_{\varepsilon,2m}(r) = 0, \quad m \to \infty.$$

Рассмотрим задачи $A^{2m}_\varepsilon, B^{2m}_\varepsilon$ и $A^{2m+2}_\varepsilon, B^{2m+2}_\varepsilon$ для нахождения $[\psi_{\varepsilon,2m,\gamma}]^\infty_{\gamma=1}$, $[\lambda_{\varepsilon,2m,\gamma}]^\infty_{\gamma=1}$ и $[\psi_{\varepsilon,2m+2,\gamma}]^\infty_{\gamma=1}$, $[\lambda_{\varepsilon,2m+2,\gamma}]^\infty_{\gamma=1}$ (собственные значения занумерованы с учётом монотонности).

Пусть $\Delta_{2m}^{2m+2}\psi_{\varepsilon,n} = \psi_{\varepsilon,2m+2,n} - \psi_{\varepsilon,2m,n}$ и $\Delta_{2m}^{2m+2}\lambda_{\varepsilon,n} = \lambda_{\varepsilon,2m+2,n} - \lambda_{\varepsilon,2m,n}$, где $\|\psi_{\varepsilon,2m+2}\|_H = 1$, $\|\psi_{\varepsilon,2m}\|_H = 1$.

Сформулируем следующую теорему.

Теорема 2. *Если положительные самосопряжённые эллиптические операторы, действующие в* $H(\Omega_\Gamma)$, L_2 , L_{2m} *удовлетворяют условиям 1-3 для задач* $A_\varepsilon^{2m}, B_\varepsilon^{2m}, A_0, B_0$, *то справедливы следующие оценки при* $m \to \infty$

$$\left|\Delta_{2m}^{2m+2}\lambda_{\varepsilon,n}\right| \leqslant \left\|\widetilde{L}_{2m+2}^{\varepsilon} - \widetilde{L}_{2m}^{\varepsilon}\right\|_H \leqslant \frac{2\varepsilon^{2m}}{(2m+2)!!}, \quad \left\|\Delta_{2m}^{2m+2}\psi_{\varepsilon,n}\right\|_H \leqslant \frac{2\varepsilon^{2m}}{(2m+2)!!}.$$

Доказательство. Положим $\Delta_{2m}^{2m+2}L = \widetilde{L}_{2m+2}^{\varepsilon} - \widetilde{L}_{2m}^{\varepsilon} = \frac{2(-1)^{m+1}\varepsilon^{2m}}{(2m+2)!!}D^{2m+2}$. Из вариационной теории собственных значений получим

$$\lambda_{\varepsilon,2m+2,n} \leqslant \sup_{\varphi}\left[((\Delta_{2m}^{2m+2}L + \widetilde{L}_{2m}^{\varepsilon})\varphi,\varphi)_H\right], \quad \|\varphi\|_H = 1,$$

$$(\varphi,\psi_{\varepsilon,2m,\gamma})_H = 0, \quad \gamma = \overline{1,n-1} \leqslant \lambda_{\varepsilon,2m,n} + \bar{\lambda},$$

где $\bar{\lambda}$ — наибольшее положительное собственное значение оператора $\Delta_{2m}^{2m+2}L$. Поскольку $\bar{\lambda} \leqslant \left\|\Delta_{2m}^{2m+2}L\right\|_H$, имеем $\left|\Delta_{2m}^{2m+2}\lambda_{\varepsilon,n}\right| \leqslant \left\|\widetilde{L}_{2m+2}^{\varepsilon} - \widetilde{L}_{2m}^{\varepsilon}\right\|_H$, откуда следует оценка $\left|\Delta_{2m}^{2m+2}\lambda_{\varepsilon,n}\right| \leqslant 2\varepsilon^{2m}/(2m+2)!!$.

Для $\Delta_{2m}^{2m+2}\psi_\varepsilon$ имеет место

$$\left[\widetilde{L}_{2m+2}^{\varepsilon} - \lambda_{\varepsilon,2m+2}\right]\Delta_{2m}^{2m+2}\psi_\varepsilon = \frac{2\varepsilon^{2m}}{(2m+2)!!}\bar{v}_{2m},$$

где $\bar{v}_{2m}$ — ограниченная функция ($||\bar{v}_{2m}||_H = O(1)$), причём $(\bar{v}_{2m},\Delta_{2m}^{2m+2}\psi_\varepsilon)_H = 0$, значит оператор $(\widetilde{L}_{2m+2}^{\varepsilon} - \lambda_{\varepsilon,2m+2})$ имеет ограниченный обратный $(\widetilde{L}_{2m+2}^{\varepsilon} - \lambda_{\varepsilon,2m+2})_{H_1}^{-1}$ (псевдорезольвенту). Таким образом

$$\Delta_{2m}^{2m+2}\psi_\varepsilon = \frac{2\varepsilon^{2m}}{(2m+2)!!}\left(\widetilde{L}_{2m+2}^{\varepsilon} - \lambda_{\varepsilon,2m+2}\right)_{H_1}^{-1}\bar{v}_{2m},$$

откуда следует, что

$$\left\|\Delta_{2m}^{2m+2}\psi_{\varepsilon,n}\right\|_H \leqslant \frac{2\varepsilon^{2m}}{(2m+2)!!}.$$

□

5. Построение асимптотического решения в случае линейного сингулярного осцилляторного квазипотенциала

Рассмотрим краевую задачу B_ε^{2m} на оси $[0,\infty+)$ для $v(r) = kr^2 + g/r^2$. Решением вырожденной краевой задачи B_0 является система функций:

$$\psi_{0,n} = N_n\exp(-0,5\sqrt{2k}r)(\sqrt{2k}r)^sF(-n,\,2s+1,5,\,\sqrt{2k}r),\; s = 0,25[-1+\sqrt{1+8g}],$$

$$\lambda_n = \sqrt{0,5\,k}[4n+2+\sqrt{1+8g}], \quad n = 1,3,5,\ldots.$$

Как было показано выше, для нулевого приближения $\bar{\psi}_{2m,0,n} = \psi_{0,n}$. Отсюда найдём $\Pi_{2m,0,n}\psi(\rho_1)$ и $Q_{2m,0,n}\psi(\rho_2)$

$$\Pi_{2m,0,n}\bar{\psi}(\rho_1) = \sum_{k=1}^{m-1}C_{0kn}\exp(-\alpha_k\rho_1), \quad Q_{2m,0,n}\psi(\rho_2) = 0,$$

$$C_{0kn} = \sum_{s=1}^{m-1} \varepsilon^{s-1} A_{k,s} \frac{\mathrm{d}^s \bar{\psi}_{2m,0,n}(0)}{\mathrm{d}r^s},$$

$$A_{1,s} = \frac{1}{\prod\limits_{l \neq s} (\alpha_l - \alpha_s)}, \quad l, s = 1, \ldots, m-1,$$

$$A_{2q,s} = A_{2q+1,s} = -\frac{\sum\limits_{r=1}^{2q} \frac{(-1)^r}{(2r)!} \alpha_s^{2r-2}}{\prod\limits_{l \neq s} (\alpha_l - \alpha_s)}, \quad q = 1, 2, \ldots, (m-1)/2, \quad l, s = 1, \ldots, m-1.$$

В первом приближении мы получим $\bar{\psi}_{2m,1,n} = \psi_{0,n}$, $\lambda_{2m,1,n} = 0$. Решением типа погранслоя в этом приближении будет функция:

$$\Pi_{2m,1,n} \bar{\psi}(\rho_1) = \sum_{k=1}^{m-1} C_{1kn} \exp(-\alpha_k \rho), \quad Q_{2m,1,n} \psi(\rho_2) = 0,$$

$$C_{1kn} = \sum_{s=1}^{m-1} \varepsilon^{s-1} A_{k,s} \frac{\mathrm{d}^s \bar{\psi}_{2m,1,n}(0)}{\mathrm{d}r^s}.$$

В следующем приближении мы получим $\bar{\psi}_{2m,2,n} = \psi_{0,n}$, $\lambda_{2m,2,n} = \varepsilon \frac{1}{4} \lambda_n^2$, $n = 1, 3, 5, \ldots$, погранслойные функции в этом приближении имеют вид:

$$\Pi_{2m,1,n} \bar{\psi}(\rho_1) = \sum_{k=1}^{m-1} F_{kn}(r, \varepsilon) \exp(-\varepsilon^{-1} \alpha_k r), \quad Q_{2m,2,n} \psi(\rho_2) = 0,$$

$$F_{kn}(r, \varepsilon) = R_{kn} + \rho_1 T_{kn},$$

$$R_{kn} = C_{1kn} - \lambda_{2m,0,n} \sum_{p=0}^{m-1} C_{1pn} B_{p,k}, \quad T_{kn} = -C_{1kn} \lambda_{2m,0,n} \bar{B}_{k,k},$$

$$\bar{B}_{k,k} = \frac{1}{\prod\limits_{j \neq k} (\alpha_j - \alpha_k)}, \; B_{k,k} = \frac{\sum\limits_{j=1, j \neq k}^{m-1} (\alpha_k - \alpha_j)}{\prod\limits_{j \neq k} (\alpha_j - \alpha_k)^2}, \; B_{p,k} = \frac{1}{(\alpha_p - \alpha_k) \prod\limits_{j \neq k} (\alpha_j - \alpha_k)}.$$

Таким образом, процедуру построения асимптотического ряда можно продолжить далее и построить асимптотическое решение рассматриваемой задачи с точностью до любого заданного порядка ε.

6. Заключение

На основе методов теории сингулярно возмущённых дифференциальных уравнений были рассмотрены краевые задачи для сингулярно возмущённого дифференциального уравнения высокого порядка. Полученные результаты свидетельствуют об эффективности метода пограничных функций для данного класса задач.

В рамках этой работы проведено исследование дифференциального уравнения порядка $2m$ с малым параметром при старшей производной и было получено следующее:

1) был применён метод пограничных функций и получена асимптотика собственных функций и собственных значений по малому параметру, отражающая погранслойный характер решений этого уравнения;
2) показана сходимость асимптотических решений к решениям соответствующих вырожденных краевых задач при $\varepsilon \to 0$;

3) исследовано поведение собственных функций и собственных значений при неограниченном возрастании порядка уравнения $m \to \infty$;
4) рассмотрена задача на полупрямой для случая осцилляторного потенциала и построено асимптотическое приближение её решений для произвольного порядка m.

Литература

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория. — М.: Наука, 1989.
2. *Logunov A. A., Tavkhelidze A. N.* // Nuovo Cimento. — Vol. 29. — 1963. — P. 380.
3. *Logunov A. A., Tavkhelidze A. N.* // Nuovo Cimento. — Vol. 30. — 1963. — P. 134.
4. *Logunov A. A., Tavkhelidze A. N.* // Phys. Let. — Vol. 4. — 1963. — P. 325.
5. *Kadyshevsky V. G.* // Nucl. Phys. — Vol. B6. — 1968. — P. 125.
6. *Kadyshevsky V. G., Mateev M.* // Nuovo Cimento. — Vol. 55A. — 1967. — P. 275.
7. *Kadyshevsky V. G., Mir-Kasimov R. M., Skachkov N. B.* // Nuovo Cimento. — Vol. 55A. — 1968. — P. 1233.
8. *Тихонов А. Н.* // Мат. сб. — Т. 31(73), № 3. — 1952. — С. 575.
9. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* // УМН. — Т. 12, вып. 5 (77). — 1957. — С. 3.
10. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. — М.: Наука, 1973.
11. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. — М.: Высш. школа, 1990.
12. *Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н., Федотова Е. В.* // ЖВМиМФ. — Т. 27, № 2. — 1987.
13. *Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н., Полежаева Е. В.* // ЖВМиМФ. — Т. 29, № 7. — 1989.
14. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. — М., 1971.
15. *Жидков Е. П., Кадышевский В. Г., Катышев Ю. В.* // ТМФ. — Т. 3, № 2. — 1970.
16. *Данфорд Н., Шварц Д.* Линейные операторы. — М.: Мир, 1974. — Т. 3.

UDC 517.958, 517.963

Asymptotic Solution of Boundary Problem for Relativistic Finite-Difference Schrödinger Equation with Singular Oscillator Quasipotential

I. V. Amirkhanov [*], S. A. Vasilyev [†], D. G. Vasilyeva [†], A. F. Karaschuk [†], V. E. Denisov [‡], D. N. Udin [§]

[*] *Joint Institute for Nuclear Research*
Joliot-Curie str., 6, Dubna, Moscow Region, Russia, 141980

[†] *Peoples' Friendship University of Russia*
Miklukho-Maklaya str., 6, Moscow, Russia, 117198

[‡] *TNK-BP*
Arbat str., 1, Moscow, Russia, 119019

[§] *IBM Central and Eastern Europe*
Donaostrasse, 95, Vienna, Austria, A-1020

Using the asymptotic methods the solution of boundary problem for the relativistic finite-difference Schredinger equation with the singular oscillator quasipotential is studied. For this problem eigenvalues and eigenfunctions are considered. It is shown that they have correct non-relativistic limits.