Современная математика. Фундаментальные направления. Том 63, № 3 (2017). С. 494–503

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-3-494-503 УДК 514.13+514.132

О ФОРМУЛЕ ОБЪЕМА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО СИМПЛЕКСА

© 2017 г. **В. А. КРАСНОВ**

Аннотация. В настоящей работе получена явная формула объема произвольного гиперболического 4-симплекса через координаты вершин.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Вычисление объемов евклидовых многогранников является очень старой и сложной проблемой, берущей свое начало с трудов Архимеда и Тартальи.

В сферическом и гиперболическом случаях ситуация, по словам К.-Ф. Гаусса, напоминает «джунгли». Объемы тетраэдров специального вида (ортосхемы) в неевклидовых пространствах были найдены в разное время в работах Л. Шлефли [12], Н. И. Лобачевского [2], Я. Бойяи [5], Дж. Милнора [8], Э. Б. Винберга [1] и др.

Что касается формулы объема произвольного неевклидова тетраэдра, то она долгое время была неизвестна. Лишь сравнительно недавно эта проблема была полностью решена в работах Ю. Чо и Х. Кима [6], Дж. Мураками и У. Яно [11], Дж. Мураками и А. Ушиджимы [10], Д. А. Деревнина и А. Д. Медных [7], а также Дж. Мураками [9]. Заметим, что полученные в вышеназванных работах формулы выражают объем произвольного гиперболического тетраэдра в терминах двугранных углов (или длин ребер). Кроме того, вывод данных формул основан на использовании формулы Шлефли [12] для дифференциала объема.

В 2013 году И. Х. Сабитовым [3] был предложен новый метод вычисления объемов гиперболических многогранников произвольной размерности через координаты вершин, который позволяет найти объем многогранника через некоторый интеграл по его граничной поверхности, являющейся объединением многогранников меньшей размерности. Позднее, в работе [4], была получена формула произвольного гиперболического тетраэдра (трехмерного симплекса) через координаты вершин.

В настоящей работе мы проведем подобные вычисления для размерности четыре и представим явную интегральную формулу для вычисления объема четырехмерного симплекса.

1. Некоторые предварительные результаты

Рассмотрим задачу вычисления объема многогранников в n-мерном гиперболическом пространстве $\mathbb{H}^n$ постоянной отрицательной кривизны K.

Работа выполнена при поддержке Программы РУДН «5-100».

Мы будем рассматривать метрики вида:

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + \ldots + dx_n^2}{(-K)x_n^2}. \tag{1.1}$$

Данные метрики задаются моделью гиперболического пространства в верхнем полупространстве $x_n > 0$ постоянной отрицательной кривизны K.

Рассмотрим теперь некоторые предварительные результаты, которые понадобятся нам в дальнейшем (подробные доказательства и обоснования данных результатов приведены в работе [3]).

Одним из основных инструментов для вычисления объемов тел в модели гиперболического пространства в верхнем полупространстве с метрикой (1.1) является следующая теорема.

Теорема 1.1 (И. Х. Сабитов, 2013). *Пусть D — компактное тело с кусочно-гладкой границей ∂D, расположенное в верхнем полупространстве $x_n > 0$ пространства $\mathbb{H}^n$. Тогда объем $V = V(D)$ такого тела в метрике* (1.1) *может быть вычислен по формуле*:

$$V = \frac{1}{(-K)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_D \frac{dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n}{x_n^n} = \frac{(-1)^n}{(n-1)(-K)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\partial D} \frac{dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{n-1}}{x_n^{n-1}}. \tag{1.2}$$

Доказательство теоремы 1.1 основано на применении формулы Стокса к правому интегралу и формуле, выражающей объем тела в римановой геометрии с метрикой, заданной стандартным образом с помощью коэффициентов g_{ij}

$$V = \int\limits_D \sqrt{det(g_{ij})} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n. \tag{1.3}$$

Для вычисления объема гиперболического симплекса в дальнейшем мы будем использовать правый интеграл в формуле (1.2):

$$V_S = \frac{(-1)^n}{(n-1)(-K)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_S \frac{dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{n-1}}{x_n^{n-1}}. \tag{1.4}$$

В формуле (1.4) S — произвольная компактная гиперповерхность в $\mathbb{H}^n$, а V_S — алгебраический объем тела, ограниченного этой гиперповерхностью.

Если S представляет собой многогранник (не обязательно выпуклый), то интеграл (1.4) определен на гипергранях S_i, каждая из которых принадлежит $(n-1)$-мерной полусфере

$$\widehat{S}_i : (x_1 - a_{i1})^2 + \ldots + (x_{n-1} - a_{i,n-1})^2 + x_n^2 = R_i^2. \tag{1.5}$$

Замечание 1.1. Заметим, что если некоторая гипергрань лежит в гиперплоскости, ортогональной к гиперплоскости $x_n = 0$, тогда интеграл по этой гиперграни равен нулю.

Обозначим через Ω_i ортогональную проекцию гиперграни S_i на плоскость $x_n = 0$. Если гиперсфера $\widehat{S}_i$ ориентирована своей внешней нормалью, то, в силу формул (1.4) и (1.5), получаем

$$\int\limits_{S_i} \frac{dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{n-1}}{x_n^{n-1}} = \int\limits_{\Omega_i} \frac{dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{n-1}}{(R_i^2 - r_i^2)^{(n-1)/2}}, \tag{1.6}$$

где $r_i^2 = (x_1 - a_{i1})^2 + \ldots + (x_{n-1} - a_{i,n-1})^2$.

Рассмотрим теперь другой класс метрик пространств постоянной кривизны вида

$$ds^2 = \frac{1}{(1 + ar^2)^2}(dx_1^2 + \ldots + dx_n^2), \tag{1.7}$$

где $a = \text{const}$, а $r^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$.

Замечание 1.2. Легко видеть, что, если положить в формуле (1.7) $a = 0$, то мы получим евклидову метрику. Значения $a > 0$ соответствуют случаю сферической метрики с постоянной положительной кривизной $K = 4a$. Наконец, при $a < 0$ имеем метрику n-мерного гиперболического пространства постоянной отрицательной кривизны $K = 4a$.

Если в пространстве постоянной отрицательной кривизны задано некоторое компактное тело D, то формула для вычисления объема задается следующей теоремой.

Теорема 1.2 (И. Х. Сабитов, 2013). *Пусть в случае метрики* (1.7) *задано компактное тело* D *с кусочно-гладкой границей* ∂D. *Тогда объем* $V = V(D)$ *такого тела можно вычислить по формуле*:

$$V = \int\limits_{\partial D} \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1} x_i F_n(r)}{r^n} dx_1 \wedge \ldots \widehat{dx}_i \ldots \wedge dx_n, \tag{1.8}$$

где

$$F(r) = \int\limits_0^r \frac{x^{n-1}}{(1+ax^2)^n} dx,$$

а запись $\widehat{dx}_i$ *означает, что соответствующий дифференциал отсутствует.*

Идея доказательства теоремы 1.2 заключается в применении формулы Стокса к правой части формулы (1.8) и элементарных преобразований с учетом формулы (1.7).

Вернемся к правому интегралу в формуле (1.6). Используя формулу (1.3) и схему доказательства теоремы 1.2, нетрудно получить следующее представление:

$$\int\limits_{\Omega_i} \frac{dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{n-1}}{(R_i^2 - r_i^2)^{(n-1)/2}} = \frac{1}{R_i^{n-1}} \int\limits_{\Omega_i} \frac{dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{n-1}}{(1 - (\frac{r_i}{R_i})^2)^{(n-1)/2}} =$$

$$= \int\limits_{\partial \Omega_i} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(-1)^{j-1}(x_j - a_{ij}) F(\frac{r_i}{R_i})}{r_i^{n-1}} dx_1 \wedge \ldots \widehat{dx}_j \ldots \wedge dx_{n-1}, \tag{1.9}$$

где

$$F\left(\frac{r_i}{R_i}\right) = \int\limits_0^{\frac{r_i}{R_i}} \frac{x^{n-2}}{(1-x^2)^{(n-1)/2}} dx.$$

А теперь поставим задачу вычислить объем 4-симплекса через координаты вершин. Для этого мы будем использовать последний интеграл в формуле (1.9).

2. Вычисление алгебраического объема гиперболического четырехмерного симплекса через координаты вершин

Рассмотрим проблему вычисления объемов 4-симплексов в терминах координат вершин (длин ребер).

Определение 2.1. Будем говорить, что n-симплекс в модели гиперболического пространства $\mathbb{H}^n$ в верхнем полупространстве расположен в *стандартной позиции*, если его вершины могут быть пронумерованы в таком порядке $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$, чтобы они имели следующие координаты:

$$A_0(0,0,0,\ldots,0,1), \quad A_1(0,0,0,\ldots,0,q), \quad A_2(x_{21},0,0,\ldots,0,x_{2n}), \quad x_{21} > 0,$$

$$A_3(x_{31}, x_{32}, 0, \ldots, 0, x_{3n}), \quad x_{32} > 0,$$

$$\ldots,$$

$$A_k(x_{k1}, \ldots x_{k,k-1}, , 0, \ldots, 0, x_{kn}), \quad x_{k,k-1} > 0,$$

$$\ldots,$$

$$A_{n-1}(x_{n-1,1}, \ldots x_{n-1,n-2}, 0, x_{n-1,n}), \quad x_{n-1,n-2} > 0,$$

$$A_n(x_{n1}, \ldots x_{n,n-1}, x_{nn}), \quad x_{n,n-1} > 0.$$

Известно, что любой симплекс можно некоторым движением перевести в симплекс, находящийся в стандартной позиции [3]. Таким образом, мы, не нарушая общности, будем рассматривать симплексы в стандартной позиции.

Рассмотрим симплекс $A_0A_1A_2A_3A_4$, расположенный в стандартной позиции в пространстве $\mathbb{H}^4$ с вершинами

$$A_0(0,0,0,1), \quad A_1(0,0,0,q), \quad A_2(x_{21},0,0,x_{24}), \quad A_3(x_{31},x_{32},0,x_{34}), \quad A_4(x_{41},x_{42},x_{43},x_{44}).$$

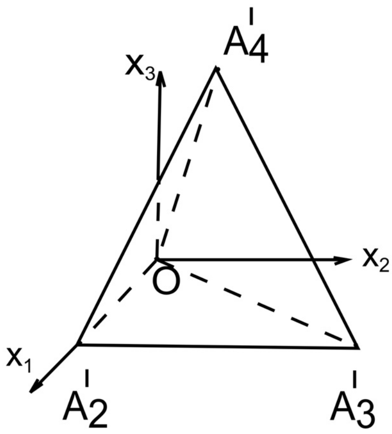

Рис. 2.1

Нетрудно видеть, что все гиперграни нашего симплекса, за исключением $A_1A_2A_3A_4$ и $A_0A_2A_3A_4$, расположены в плоскостях, ортогональных плоскости $x_4 = 0$, то есть имеют уравнения $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$. Таким образом, только два интеграла (по гиперграням $A_1A_2A_3A_4$ и $A_0A_2A_3A_4$) в формуле (1.4) могут быть отличными от нуля.

Эти грани являются частью полусфер с уравнениями

$$A_0A_2A_3A_4 : (x_1 - a_{10})^2 + (x_2 - a_{20})^2 + (x_3 - a_{30})^2 + x_4^2 = R_0^2,$$
$$A_1A_2A_3A_4 : (x_1 - a_{11})^2 + (x_2 - a_{21})^2 + (x_3 - a_{31})^2 + x_4^2 = R_1^2. \tag{2.1}$$

Заметим также, что $A_1A_2A_3A_4$ и $A_0A_2A_3A_4$ имеют одну и ту же ортогональную проекцию Ω на плоскость $x_4 = 0$, которая является тетраэдром (рис. 2.1) с вершинами

$$O(0,0,0), \quad A_2'(x_{21},0,0), \quad A_3'(x_{31},x_{32},0), \quad A_4'(x_{41},x_{42},x_{43}).$$

Грани ортогональной проекции Ω имеют уравнения:

$$OA_2'A_3' : x_3 = 0,$$
$$OA_2'A_4' : x_{43}x_2 - x_{42}x_3 = 0,$$
$$OA_3'A_4' : (x_{33}x_{42} - x_{43}x_{32})x_1 + (x_{31}x_{43} - x_{33}x_{41})x_2 + (x_{32}x_{41} - x_{31}x_{42})x_3 = 0,$$
$$A_2'A_3'A_4' : x_{32}x_{43}(x_1 - x_{41}) + x_{43}(x_{21} - x_{31})(x_2 - x_{41}) + (x_{32}(x_{21} - x_{41}) - x_{42}(x_{21} - x_{31}))(x_3 - x_{31}) = 0.$$

Отметим также, что в случае пространства $\mathbb{H}^4$ функция $F = F\left(\dfrac{r_i}{R_i}\right)$ имеет вид

$$F\left(\frac{r_i}{R_i}\right) = \int\limits_0^{\frac{r_i}{R_i}} \frac{x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \frac{r_i}{\sqrt{R_i^2 - r_i^2}} - \arcsin\frac{r_i}{R_i}.$$

Таким образом,

$$F\left(\frac{r_i}{R_i}\right) = \frac{r_i}{\sqrt{R_i^2 - r_i^2}} - \arcsin\frac{r_i}{R_i}. \tag{2.2}$$

Вычислим теперь координаты центров и квадраты радиусов гиперсфер (2.1). Решая соответствующие системы, получаем:

$$a_{10} = \frac{x_{21}^2 + x_{24}^2 - 1}{2x_{21}}, \quad a_{20} = \frac{x_{32}^2 + x_{34}^2 - x_{24}^2 + x_{31}^2 - x_{21}^2 - 2a_{10}(x_{21} - x_{31})}{2x_{32}},$$
$$a_{30} = \frac{x_{43}^2 + x_{41}^2 + x_{44}^2 + x_{42}^2 - x_{31}^2 - x_{34}^2 - x_{32}^2 + 2a_{10}(x_{31} - x_{41}) + 2a_{20}(x_{32} - x_{42})}{2x_{43}},$$
$$R_0^2 = 1 + a_{10}^2 + a_{20}^2 + a_{30}^2,$$

$$a_{11} = \frac{x_{21}^2 + x_{24}^2 - q^2}{2x_{21}}, \quad a_{21} = \frac{x_{32}^2 + x_{34}^2 - x_{24}^2 + x_{31}^2 - x_{21}^2 - 2a_{11}(x_{21} - x_{31})}{2x_{32}},$$

$$a_{31} = \frac{x_{43}^2 + x_{41}^2 + x_{44}^2 + x_{42}^2 - x_{31}^2 - x_{34}^2 - x_{32}^2 + 2a_{11}(x_{31} - x_{41}) + 2a_{21}(x_{32} - x_{42})}{2x_{43}},$$

$$R_1^2 = 1 + a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2. \tag{2.3}$$

Переходим непосредственно к вычислению объема симплекса $T_4 = A_0A_1A_2A_3A_4$. Согласно формуле (1.6), объем данного многогранника можно свести к вычислению разности следующих интегралов по ортогональной проекции $\Omega = OA_2'A_3'A_4'$ гиперграней $A_1A_2A_3A_4$ и $A_0A_2A_3A_4$ на плоскость $x_4 = 0$:

$$V(T_4) = -\frac{1}{3(-K)^{\frac{3}{2}}} \left(\int\limits_{\Omega} \frac{dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3}{(R_0^2 - r_0^2)^{3/2}} - \int\limits_{\Omega} \frac{dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3}{(R_1^2 - r_1^2)^{3/2}} \right), \tag{2.4}$$

где

$$r_0^2 = (x_1 - a_{10})^2 + (x_2 - a_{20})^2 + (x_3 - a_{30})^2,$$
$$r_1^2 = (x_1 - a_{11})^2 + (x_2 - a_{21})^2 + (x_3 - a_{31})^2,$$

а величины $a_{10}, a_{20}, a_{30}, a_{11}, a_{21}, a_{31}, R_0$ и R_1 вычисляются по формулам (2.3).

Замечание 2.1. Уменьшаемое и вычитаемое в формуле (2.4) выбираются в соответствие с ориентацией симплекса.

Каждый из интегралов в формуле (2.4) в силу (1.9) можно свести к алгебраической сумме интегралов по граням тетраэдра $\Omega = OA_2'A_3'A_4'$. Имеем:

$$\int\limits_{\Omega} \frac{dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3}{(R_0^2 - r_0^2)^{3/2}} = \int\limits_{\Omega} \frac{dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3}{(1 - (\frac{r_0}{R_0})^2)^{3/2}} =$$

$$= \int\limits_{\partial\Omega} \frac{(x_1 - a_{01})F(\frac{r_0}{R_0})}{r_0^3} dx_2 \wedge dx_3 - \frac{(x_2 - a_{02})F(\frac{r_0}{R_0})}{r_0^3} dx_1 \wedge dx_3 + \frac{(x_3 - a_{03})F(\frac{r_0}{R_0})}{r_0^3} dx_1 \wedge dx_2, \tag{2.5}$$

$$\int\limits_{\Omega} \frac{dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3}{(R_1^2 - r_1^2)^{3/2}} = \int\limits_{\Omega} \frac{dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3}{(1 - (\frac{r_1}{R_1})^2)^{3/2}} =$$

$$= \int\limits_{\partial\Omega} \frac{(x_1 - a_{11})F(\frac{r_1}{R_1})}{r_1^3} dx_2 \wedge dx_3 - \frac{(x_2 - a_{12})F(\frac{r_1}{R_1})}{r_1^3} dx_1 \wedge dx_3 + \frac{(x_3 - a_{13})F(\frac{r_1}{R_1})}{r_1^3} dx_1 \wedge dx_2. \tag{2.6}$$

Таким образом, вычисление правых интегралов в формулах (2.5) и (2.6) сводится к вычислению двойных интегралов на гранях $OA_2'A_3'$, $OA_2'A_4'$, $OA_3'A_4'$ и $A_2'A_3'A_4'$ тетраэдра $\Omega = OA_2'A_3'A_4'$. Предположим, не нарушая общности. что тетраэдр Ω расположен в первом октанте системы координат $Ox_1x_2x_3$ (рис. 2.1).

Вычислим для начала интеграл по первой грани $OA_2'A_3'$. Заметим, что для данной грани $x_3 = 0$. Следовательно, первые два слагаемых в правых интегралах (2.5) и (2.6) равны нулю. Значит, нам требуется вычислить лишь интегралы

$$\int\limits_{OA_2'A_3'} \frac{(-a_{03})F(\frac{r_0}{R_0})}{r_0^3} dx_1 \wedge dx_2 \quad \text{и} \quad \int\limits_{OA_2'A_3'} \frac{(-a_{13})F(\frac{r_1}{R_1})}{r_1^3} dx_1 \wedge dx_2.$$

Очевидно, что пределы интегрирования в указанных интегралах имеют следующий вид:

$$0 \leqslant x_2 \leqslant x_{32}, \frac{x_{31}}{x_{32}} x_2 \leqslant x_1 \leqslant \frac{(x_{31} - x_{21})}{x_{32}} x_2 + x_{21}.$$

Таким образом,

$$I_{10} = \int\limits_{OA_2'A_3'} \frac{(-a_{03})F(\frac{r_0}{R_0})}{r_0^3} dx_1 \wedge dx_2 =$$

$$= -a_{03}\int\limits_0^{x_{32}} dx_2 \int\limits_{\frac{x_{31}}{x_{32}}x_2}^{\frac{(x_{31}-x_{21})}{x_{32}}x_2+x_{21}} \Bigg(\frac{1}{\left[(x_1-a_{01})^2+(x_2-a_{02})^2+a_{03}^2\right]\sqrt{R_0^2-a_{03}^2-(x_1-a_{01})^2+(x_2-a_{02})^2}} -$$

$$- \frac{\arcsin\left(\frac{(x_1-a_{01})^2+(x_2-a_{02})^2+a_{03}^2}{R_0}\right)}{(a_{03}^2+(x_1-a_{01})^2+(x_2-a_{02})^2)^{\frac{3}{2}}}\Bigg)dx_1 =$$

$$= -a_{03}\int\limits_0^{x_{32}} dx_2\Bigg(\frac{1}{a_{03}^2+(x_2-a_{02})^2}\arcsin\frac{x_1-a_{01}}{\sqrt{R_0^2-a_{03}^2-(x_2-a_{02})^2}} -$$

$$- \frac{x_1-a_{01}}{(a_{03}^2+(x_2-a_{02})^2)\sqrt{a_{03}^2+(x_2-a_{02})^2+(x_1-a_{01})^2}}\times$$

$$\times \arcsin\frac{\sqrt{a_{03}^2+(x_2-a_{02})^2+(x_1-a_{01})^2}}{R_0}\Bigg)\Bigg|_{\frac{x_{31}}{x_{32}}x_2}^{\frac{(x_{31}-x_{21})}{x_{32}}x_2+x_{21}} =$$

$$= -a_{13}\int\limits_0^{x_{32}}\Bigg(\frac{1}{a_{03}^2+(x_2-a_{02})^2}\arcsin\frac{\frac{(x_{31}-x_{21})}{x_{32}}x_2+x_{21}-a_{01}}{\sqrt{R_0^2-a_{03}^2-(x_2-a_{02})^2}} -$$

$$- \frac{\frac{(x_{31}-x_{21})}{x_{32}}x_2+x_{21}-a_{01}}{(a_{03}^2+(x_2-a_{02})^2)\sqrt{a_{03}^2+(x_2-a_{02})^2+(\frac{(x_{31}-x_{21})}{x_{32}}x_2+x_{21}-a_{01})^2}}\times$$

$$\times \arcsin\frac{\sqrt{a_{03}^2+(x_2-a_{02})^2+(\frac{(x_{31}-x_{21})}{x_{32}}x_2+x_{21}-a_{01})^2}}{R_0} -$$

$$- \frac{1}{a_{03}^2+(x_2-a_{02})^2}\arcsin\frac{\frac{x_{31}}{x_{32}}x_2-a_{01}}{\sqrt{R_0^2-a_{03}^2-(x_2-a_{02})^2}} +$$

$$+ \frac{\frac{x_{31}}{x_{32}}x_2-a_{01}}{(a_{03}^2+(x_2-a_{02})^2)\sqrt{a_{03}^2+(x_2-a_{02})^2+(\frac{x_{31}}{x_{32}}x_2-a_{01})^2}}\cdot$$

$$\times \arcsin\frac{\sqrt{a_{03}^2+(x_2-a_{02})^2+(\frac{x_{31}}{x_{32}}x_2-a_{01})^2}}{R_0}\Bigg)dx_2, \qquad (2.7)$$

$$I_{11} = \int\limits_{OA_2'A_3'} \frac{(-a_{13})F(\frac{r_1}{R_1})}{r_1^3}dx_1\wedge dx_2 =$$

$$= -a_{13}\int\limits_0^{x_{32}} dx_2 \int\limits_{\frac{x_{31}}{x_{32}}x_2}^{\frac{(x_{31}-x_{21})}{x_{32}}x_2+x_{21}} \Bigg(\frac{1}{\left[(x_1-a_{11})^2+(x_2-a_{12})^2+a_{13}^2\right]\sqrt{R_0^2-a_{13}^2-(x_1-a_{11})^2+(x_2-a_{12})^2}} -$$

$$- \frac{\arcsin\left(\frac{(x_1-a_{11})^2+(x_2-a_{12})^2+a_{13}^2}{R_1}\right)}{(a_{13}^2+(x_1-a_{11})^2+(x_2-a_{12})^2)^{\frac{3}{2}}}\Bigg)dx_1 =$$

$$= -a_{13}\int\limits_0^{x_{32}} dx_2\Bigg(\frac{1}{a_{13}^2+(x_2-a_{12})^2}\arcsin\frac{x_1-a_{11}}{\sqrt{R_1^2-a_{13}^2-(x_2-a_{12})^2}} -$$

$$- \frac{x_1-a_{11}}{(a_{13}^2+(x_2-a_{12})^2)\sqrt{a_{13}^2+(x_2-a_{12})^2+(x_1-a_{11})^2}}\times$$

$$\times \arcsin\frac{\sqrt{a_{13}^2+(x_2-a_{12})^2+(x_1-a_{11})^2}}{R_1}\Bigg)\Bigg|_{\frac{x_{31}}{x_{32}}x_2}^{\frac{(x_{31}-x_{21})}{x_{32}}x_2+x_{21}} =$$

$$= -a_{13}\int\limits_0^{x_{32}}\Bigg(\frac{1}{a_{13}^2+(x_2-a_{12})^2}\arcsin\frac{\frac{(x_{31}-x_{21})}{x_{32}}x_2+x_{21}-a_{11}}{\sqrt{R_1^2-a_{13}^2-(x_2-a_{12})^2}}-$$

$$-\frac{\frac{(x_{31}-x_{21})}{x_{32}}x_2+x_{21}-a_{11}}{(a_{13}^2+(x_2-a_{12})^2)\sqrt{a_{13}^2+(x_2-a_{12})^2+(\frac{(x_{31}-x_{21})}{x_{32}}x_2+x_{21}-a_{11})^2}}\times$$

$$\times\arcsin\frac{\sqrt{a_{13}^2+(x_2-a_{12})^2+(\frac{(x_{31}-x_{21})}{x_{32}}x_2+x_{21}-a_{11})^2}}{R_1}-$$

$$-\frac{1}{a_{13}^2+(x_2-a_{12})^2}\arcsin\frac{\frac{x_{31}}{x_{32}}x_2-a_{11}}{\sqrt{R_1^2-a_{13}^2-(x_2-a_{12})^2}}+$$

$$+\frac{\frac{x_{31}}{x_{32}}x_2-a_{11}}{(a_{13}^2+(x_2-a_{12})^2)\sqrt{a_{13}^2+(x_2-a_{12})^2+(\frac{x_{31}}{x_{32}}x_2-a_{11})^2}}\times$$

$$\times\arcsin\frac{\sqrt{a_{13}^2+(x_2-a_{12})^2+(\frac{x_{31}}{x_{32}}x_2-a_{11})^2}}{R_1}\Bigg)dx_2. \tag{2.8}$$

Для вычисления объема 4-симплекса $T_4=A_0A_1A_2A_3A_4$ нам необходимо теперь проинтегрировать выражения

$$\frac{(x_1-a_{i1})F(\frac{r_i}{R_i})}{r_i^3}dx_2\wedge dx_3-\frac{(x_2-a_{i2})F(\frac{r_i}{R_i})}{r_i^3}dx_1\wedge dx_3+\frac{(x_3-a_{i3})F(\frac{r_i}{R_i})}{r_i^3}dx_1\wedge dx_2,\ i=0,1 \tag{2.9}$$

по трем остальным граням $OA_2'A_4'$, $OA_3'A_4'$ и $A_2'A_3'A_4'$.

Для начала найдем пределы интегрирования для проекций этих граней тетраэдра $\Omega=OA_2'A_3'A_4'$ на координатные плоскости $dx_k\wedge dx_s$. Имеем

$$(OA_2'A_4'):\ 1)\ dx_1\wedge dx_2:\ 0\leqslant x_2\leqslant x_{42},\quad \frac{x_{41}}{x_{42}}x_2\leqslant x_1\leqslant\frac{(x_{41}-x_{21})}{x_{42}}x_2+x_{21}x_{42};$$

$$2)\ dx_1\wedge dx_3:\ 0\leqslant x_3\leqslant x_{43},\quad \frac{x_{41}}{x_{43}}x_3\leqslant x_1\leqslant\frac{(x_{41}-x_{21})}{x_{43}}x_3+x_{21}x_{43};$$

$$(OA_3'A_4'):\ 1)\ dx_1\wedge dx_2:0\leqslant x_2\leqslant x_{31}(x_{31}>x_{41}),\quad \frac{x_{41}}{x_{42}}x_2\leqslant x_1\leqslant\frac{x_{41}-x_{31}}{x_{42}-x_{32}}x_2-\frac{x_{32}(x_{41}-x_{31})}{x_{42}-x_{32}};$$

$$2)\ dx_1\wedge dx_3:\ 0\leqslant x_3\leqslant x_{43},\quad \frac{x_{41}}{x_{43}}x_3\leqslant x_1\leqslant\frac{(x_{41}-x_{31})}{x_{43}}x_3+x_{31};$$

$$3)\ dx_2\wedge dx_3:\ 0\leqslant x_3\leqslant x_{43},\quad \frac{x_{42}}{x_{43}}x_3\leqslant x_2\leqslant\frac{(x_{42}-x_{31})}{x_{43}}x_3+x_{31};$$

$$(A_2'A_3'A_4'):\ 1)\ dx_1\wedge dx_2:0\leqslant x_2\leqslant x_{32},\quad \frac{x_{41}-x_{21}}{x_{42}}x_2+x_{21}\leqslant x_1\leqslant\frac{x_{31}-x_{21}}{x_{32}}x_2+x_{21}\vee$$

$$\vee x_{32}\leqslant x_2\leqslant x_{42},\quad \frac{x_{41}-x_{21}}{x_{42}}x_2+x_{21}\leqslant x_1\leqslant\frac{x_{41}-x_{31}}{x_{42}-x_{32}}x_2+\frac{x_{31}(x_{42}-x_{32})-x_{32}(x_{41}-x_{31})}{x_{42}-x_{32}};$$

$$2)\ dx_1\wedge dx_3:\ 0\leqslant x_3\leqslant x_{43},\quad \frac{x_{41}-x_{31}}{x_{43}}x_1+x_{31}\leqslant x_1\leqslant\frac{x_{41}-x_{21}}{x_{41}}x_1+x_{21};$$

$$3)\ dx_2\wedge dx_3:\ 0\leqslant x_3\leqslant x_{43},\quad \frac{x_{42}}{x_{43}}x_3\leqslant x_2\leqslant\frac{(x_{42}-x_{32})}{x_{43}}x_3+x_{32}.$$

Переходим к вычислению интегралов от выражений (2.9) по граням $OA_2'A_4'$, $OA_3'A_4'$ и $A_2'A_3'A_4'$. Получаем:

$$I_{i2}=\int\limits_{OA_2'A_4'}\frac{(x_1-a_{i1})F(\frac{r_i}{R_i})}{r_i^3}dx_2\wedge dx_3-\frac{(x_2-a_{i2})F(\frac{r_i}{R_i})}{r_i^3}dx_1\wedge dx_3+\frac{(x_3-a_{i3})F(\frac{r_i}{R_i})}{r_i^3}dx_1\wedge dx_2=$$

$$= \int\limits_0^{x_{42}} dx_2 \int\limits_{\frac{x_{41}}{x_{42}}x_2}^{\frac{(x_{41}-x_{21})}{x_{42}}x_2+x_{21}x_{42}} \frac{(\frac{x_{43}x_2}{x_{42}}-a_{i3})F(\frac{\sqrt{(x_1-a_{01})^2+(x_2-a_{02})^2+(\frac{x_{43}x_2}{x_{42}}-a_{03})^2}}{R_i})}{((x_1-a_{01})^2+(x_2-a_{02})^2+(\frac{x_{43}x_2}{x_{42}}-a_{03})^2)^{\frac{3}{2}}}dx_1-$$

$$-\int\limits_0^{x_{43}} dx_3 \int\limits_{\frac{x_{41}}{x_{43}}x_3}^{\frac{(x_{41}-x_{21})}{x_{43}}x_3+x_{21}x_{43}} \frac{(\frac{x_{42}x_3}{x_{43}}-a_{i2})F(\frac{\sqrt{(x_1-a_{i1})^2+(\frac{x_{42}x_3}{x_{43}}-a_{i2})^2+(x_3-a_{i3})^2}}{R_i})}{((x_1-a_{i1})^2+(\frac{x_{42}x_3}{x_{43}}-a_{i2})^2+(x_3-a_{i3})^2)^{\frac{3}{2}}}dx_1, \tag{2.10}$$

$$I_{i3} = \int\limits_{OA'_3A'_4} \frac{(x_1-a_{i1})F(\frac{r_i}{R_i})}{r_i^3}dx_2\wedge dx_3 - \frac{(x_2-a_{i2})F(\frac{r_i}{R_i})}{r_i^3}dx_1\wedge dx_3 + \frac{(x_3-a_{i3})F(\frac{r_i}{R_i})}{r_i^3}dx_1\wedge dx_2 =$$

$$= \int\limits_0^{x_{31}} dx_2 \int\limits_{\frac{x_{41}}{x_{42}}x_2}^{\frac{(x_{41}-x_{31})}{x_{42}-x_{32}}x_2-\frac{x_{32}(x_{41}-x_{31})}{x_{42}-x_{32}}} \frac{(\tilde{x}_3-a_{i3})F(\frac{\sqrt{(x_1-a_{01})^2+(x_2-a_{02})^2+(\tilde{x}_3-a_{03})^2}}{R_i})}{((x_1-a_{01})^2+(x_2-a_{02})^2+(\tilde{x}_3-a_{03})^2)^{\frac{3}{2}}}dx_1-$$

$$-\int\limits_0^{x_{43}} dx_3 \int\limits_{\frac{x_{41}}{x_{43}}x_3}^{\frac{(x_{41}-x_{31})}{x_{43}}x_3+x_{31}} \frac{(\tilde{x}_2-a_{i2})F(\frac{\sqrt{(x_1-a_{i1})^2+(\tilde{x}_2-a_{i2})^2+(x_3-a_{i3})^2}}{R_i})}{((x_1-a_{i1})^2+(\tilde{x}_2-a_{i2})^2+(x_3-a_{i3})^2)^{\frac{3}{2}}}dx_1+,$$

$$+\int\limits_0^{x_{43}} dx_3 \int\limits_{\frac{x_{42}}{x_{43}}x_3}^{\frac{(x_{42}-x_{31})}{x_{43}}x_3+x_{31}} \frac{(\tilde{x}_1-a_{i1})F(\frac{\sqrt{(\tilde{x}_1-a_{i1})^2+(x_2-a_{i2})^2+(x_3-a_{i3})^2}}{R_i})}{((\tilde{x}_1-a_{i1})^2+(x_2-a_{i2})^2+(x_3-a_{i3})^2)^{\frac{3}{2}}}dx_2, \tag{2.11}$$

$$I_{i4} = \int\limits_{A'_2A'_3A'_4} \frac{(x_1-a_{i1})F(\frac{r_i}{R_i})}{r_i^3}dx_2\wedge dx_3 - \frac{(x_2-a_{i2})F(\frac{r_i}{R_i})}{r_i^3}dx_1\wedge dx_3 + \frac{(x_3-a_{i3})F(\frac{r_i}{R_i})}{r_i^3}dx_1\wedge dx_2 =$$

$$= \int\limits_0^{x_{32}} dx_2 \int\limits_{\frac{x_{41}-x_{21}}{x_{42}}x_2+x_{21}}^{\frac{x_{31}-x_{21}}{x_{32}}x_2+x_{21}} \frac{(\hat{x}_3-a_{i3})F(\frac{\sqrt{(x_1-a_{i1})^2+(x_2-a_{i2})^2+(\hat{x}_3-a_{i3})^2}}{R_i})}{((x_1-a_{i1})^2+(x_2-a_{i2})^2+(\hat{x}_3-a_{i3})^2)^{\frac{3}{2}}}dx_1+$$

$$= \int\limits_0^{x_{32}} dx_2 \int\limits_{\frac{x_{31}-x_{21}}{x_{32}}x_2+x_{21}}^{\frac{x_{41}-x_{31}}{x_{42}-x_{32}}x_2-\frac{x_{32}(x_{41}-x_{31})}{x_{42}-x_{32}}+x_{31}} \frac{(\hat{x}_3-a_{i3})F(\frac{\sqrt{(x_1-a_{i1})^2+(x_2-a_{i2})^2+(\hat{x}_3-a_{i3})^2}}{R_i})}{((x_1-a_{i1})^2+(x_2-a_{i2})^2+(\hat{x}_3-a_{i3})^2)^{\frac{3}{2}}}dx_1-$$

$$-\int\limits_0^{x_{43}} dx_3 \int\limits_{\frac{(x_{41}-x_{31})}{x_{43}}x_3+x_{31}}^{\frac{(x_{41}-x_{21})}{x_{43}}x_3+x_{21}} \frac{(\hat{x}_2-a_{i2})F(\frac{\sqrt{(x_1-a_{i1})^2+(\hat{x}_2-a_{i2})^2+(x_3-a_{i3})^2}}{R_i})}{((x_1-a_{i1})^2+(\hat{x}_2-a_{i2})^2+(x_3-a_{i3})^2)^{\frac{3}{2}}}dx_1+$$

$$+\int\limits_0^{x_{43}} dx_3 \int\limits_{\frac{x_{42}}{x_{43}}x_3}^{\frac{(x_{42}-x_{32})}{x_{43}}x_3+x_{32}} \frac{(\hat{x}_1-a_{i1})F(\frac{\sqrt{(\hat{x}_1-a_{i1})^2+(x_2-a_{i2})^2+(x_3-a_{i3})^2}}{R_i})}{((\hat{x}_1-a_{i1})^2+(x_2-a_{i2})^2+(x_3-a_{i3})^2)^{\frac{3}{2}}}dx_2, \tag{2.12}$$

где

$$i \in \{0,1\}, F(t) = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} - \arcsin t,$$

а $\tilde{x}_1(\hat{x}_1), \tilde{x}_2(\hat{x}_2), \tilde{x}_3(\hat{x}_3)$ выражаются соответственно через x_2, x_3; x_1, x_3; x_1, x_2 с помощью уравнений

$$(x_{33}x_{42} - x_{43}x_{32})\tilde{x}_1 + (x_{31}x_{43} - x_{33}x_{41})x_2 + (x_{32}x_{41} - x_{31}x_{42})x_3 = 0,$$

$$(x_{32}x_{43}(\hat{x}_1 - x_{41}) + x_{43}(x_{21} - x_{31})(x_2 - x_{41}) + (x_{32}(x_{21} - x_{41}) - x_{42}(x_{21} - x_{31}))(x_3 - x_{31}) = 0,$$

$$(x_{33}x_{42}-x_{43}x_{32})x_1+(x_{31}x_{43}-x_{33}x_{41})\tilde{x}_2+(x_{32}x_{41}-x_{31}x_{42})x_3=0,$$
$$x_{32}x_{43}(x_1-x_{41})+x_{43}(x_{21}-x_{31})(\hat{x}_2-x_{41})+(x_{32}(x_{21}-x_{41})-x_{42}(x_{21}-x_{31}))(x_3-x_{31})=0,$$
$$(x_{33}x_{42}-x_{43}x_{32})x_1+(x_{31}x_{43}-x_{33}x_{41})x_2+(x_{32}x_{41}-x_{31}x_{42})\tilde{x}_3=0,$$
$$x_{32}x_{43}(x_1-x_{41})+x_{43}(x_{21}-x_{31})(x_2-x_{41})+(x_{32}(x_{21}-x_{41})-x_{42}(x_{21}-x_{31}))(\hat{x}_3-x_{31})=0.$$

Таким образом, нами доказана следующая

Теорема 2.1. *Пусть в гиперболическом пространстве* $\mathbb{H}^4$ *с метрикой* (1.7) *задан ограниченный тетраэдр* $T_4=A_0A_1A_2A_3A_4$ *в стандартной позиции, вершины которого имеют координаты* $A_0(0,0,0,1), A_1(0,0,0,q), A_2(x_{21},0,0,x_{24}), A_3(x_{31},x_{32},0,x_{34}), A_4(x_{41},x_{42},x_{43},x_{44})$. *Тогда его алгебраический объем* $V=V(T_4)$ *может быть вычислен по формуле*:

$$V(T_4)=-\frac{1}{3(-K)^{\frac{3}{2}}}\left(I_{11}-I_{10}+I_{21}-I_{20}+I_{31}-I_{30}+I_{41}-I_{40}\right), \tag{2.13}$$

где величины $I_{10}, I_{11}, I_{20}, I_{21}, I_{30}, I_{31}, I_{40}$ *и* I_{41} *имеют интегральные представления* (2.7)*,* (2.8)*,* (2.10)*,* (2.11) *и* (2.12).

Замечание 2.2. В работах [3] и [4] приводится лемма, утверждающая, что координаты вершин гиперболического симплекса можно выразить элементарными функциями от длин его ребер. В статье [4] приводится схема доказательства этой леммы для трехмерного случая. Заметим, что формулы, выражающие координаты вершин через длины ребер, являются очень громоздкими даже для случая $n=3$. Таким образом, при желании с помощью теоремы 2.1 и вышеупомянутой леммы можно получить обобщение формулы Мураками—Ушиджимы [10] объема трехмерного гиперболического тетраэдра через длины ребер на четырехмерный случай.

Автор выражает признательность В. П. Лексину за полезные обсуждения и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Винберг Э. Б.* Объемы неевклидовых многогранников// Усп. мат. наук. — 1993. — *48*, № 2. — С. 17–46.
2. *Лобачевский Н. И.* Воображаемая геометрия. Полн. собр. соч. Т. 3. — М.—Л.: 1949.
3. *Сабитов И. Х.* Об одном методе вычисления объемов тел// Сиб. электрон. мат. изв. — 2013. — № 10. — С. 615–626.
4. *Сабитов И. Х.* Гиперболический тетраэдр: вычисление объема с применением к доказательству формулы Шлефли// Модел. и анализ информ. систем. — 2013. — *20*, № 6. — С. 149–161.
5. *Bolyai J.* Appendix. The theory of space// В сб.: «Janos Bolyai». — Budapest, 1987.
6. *Cho Yu., Kim H.* On the volume formula for hyperbolic tetrahedra// Discrete Comput. Geom. — 1999. — *22*. — С. 347–366.
7. *Derevnin D. A., Mednykh A. D.* A formula for the volume of hyperbolic tetrahedron// Rus. Math. Surv. — 2005. — *60*, № 346.
8. *Milnor J.* Hyperbolic geometry: the first 150 years// Bull. Am. Math. Soc. (N.S.). — 1982. — *6*, № 1. — С. 307–332.
9. *Murakami J.* The volume formulas for a spherical tetrahedron// Arxiv: 1011.2584v4. — 2011.
10. *Murakami J., Ushijima A.* A volume formula for hyperbolic tetrahedra in terms of edge lengths// J. Geom. — 2005. — *83*, № 1-2. — С. 153–163.
11. *Murakami J., Yano M.* On the volume of a hyperbolic and spherical tetrahedron// Commun. Anal. Geom. — 2005. — *13*. — С. 379–400.
12. *Schläfli L.* Theorie der vielfachen Kontinuität// В сб.: «Gesammelte mathematische Abhandlungen». — Basel: Birkhäuser, 1950.

В. А. Краснов
Российский университет дружбы народов,
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6
E-mail: krasnov_va@rudn.university

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-3-494-503 UDC 514.13+514.132

On the Volume Formula for Hyperbolic 4-Dimensional Simplex

© 2017 **V. A. Krasnov**

Abstract. In this paper, we derive an explicit formula for the volume of abritrary hyperbolic 4-simplex depending on vertices coordinates.

REFERENCES

1. E. B. Vinberg, "Ob"emy neevklidovykh mnogogrannikov" [Volumes of non-Euclid polyhedrons], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1993, **48**, No. 2, 17–46 (in Russian).
2. N. I. Lobachevskiy, *Voobrazhaemaya geometriya. Poln. sobr. soch. T.* 3 [Imaginary Geometry. Compl. Set of Works. Vol. 3], Moscow–Leningrad, 1949 (in Russian).
3. I. Kh. Sabitov, "Ob odnom metode vychisleniya ob"emov tel" [On one method for computation of volumes of solids], *Sib. elektron. mat. izv.* [Seberian Electron. Math. Bull.], 2013, No. 10, 615–626 (in Russian).
4. I. Kh. Sabitov, "Giperbolicheskiy tetraedr: vychislenie ob"ema s primeneniem k dokazatel'stvu formuly Shlefli" [Hyperbolic tetrahedron: computation of volume with application to the proof of the Schläfli formula], *Model. i analiz inform. sistem* [Model. Anal. Inform. Syst.], 2013, **20**, No. 6, 149–161 (in Russian).
5. J. Bolyai, "Appendix. The theory of space," In: *Janos Bolyai*, Budapest, 1987.
6. Yu. Cho and H. Kim, "On the volume formula for hyperbolic tetrahedra," *Discrete Comput. Geom.*, 1999, **22**, 347–366.
7. D. A. Derevnin and A. D. Mednykh, "A formula for the volume of hyperbolic tetrahedron," *Rus. Math. Surv.*, 2005, **60**, No. 346.
8. J. Milnor, "Hyperbolic geometry: the first 150 years," *Bull. Am. Math. Soc.* (*N.S.*), 1982, **6**, No. 1, 307–332.
9. J. Murakami, "The volume formulas for a spherical tetrahedron," *Arxiv*, 2011, 1011.2584v4.
10. J. Murakami and A. Ushijima, "A volume formula for hyperbolic tetrahedra in terms of edge lengths," *J. Geom.*, 2005, **83**, No. 1-2, 153–163.
11. J. Murakami and M. Yano, "On the volume of a hyperbolic and spherical tetrahedron," *Commun. Anal. Geom.*, 2005, **13**, 379–400.
12. L. Schläfli, "Theorie der vielfachen Kontinuität," In: *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, Birkhäuser, Basel, 1950.

V. A. Krasnov
RUDN University,
6 Miklukho-Maklaya st., 117198 Moscow, Russia
E-mail: krasnov_va@rudn.university