Вестник РУДН Серия *Математика. Информатика. Физика.* № 3. 2008. С. 5–12

Математика

УДК 517.97

Обобщённое решение прямой задачи для нестационарного модифицированного уравнения переноса

Исмаил Ахмед Абдел Басет

Кафедра дифференциальных уравнений и математической физики
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо–Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198

В работе доказана однозначная разрешимость обобщённого решения начально-краевой задачи для нестационарного модифицированного уравнения переноса, которое отличается от обычного уравнения переноса заменой в интегральном слагаемом функции, являющейся решением, некоторой постоянной функцией из того же класса, что и решение.

Ключевые слова: модифицированное уравнение переноса, метод последовательных приближений.

Рассмотрим обобщённое решение нестационарного модифицированного уравнения переноса

$$u_t(x,v,t) + (v,\nabla)\,u(x,v,t) + \Sigma(x,v,t)\,u(x,v,t) = \\ = \int\limits_V J(x,v',t,v)\,a(x,v',t)\mathrm{d}v' + F(x,v,t), \text{ где } (x,v,t)\in D, \quad (1)$$

(в обычном уравнении переноса в интегральном слагаемом стоит $u(x,v',t)$ вместо $a(x,v',t)$; такая модификация более удобна для некоторых нелинейных обратных задач по сравнению с обычным уравнением переноса, которое описывает процесс переноса нейтронов в веществе и некоторые другие физические явления).

Функции Σ, J и a характеризуют свойства среды, а F — источник излучения. Прямая задача для модифицированного уравнения переноса состоит в определении функции u, удовлетворяющей уравнению (1), а также граничному и начальному условию

$$u(x,v,t) = \mu, \quad (x,v,t)\in\gamma_-\times[0,T], \quad (2)$$

$$u(x,v,0) = \varphi, \quad (x,v)\in G\times V. \quad (3)$$

Прямые задачи для обычного уравнения переноса в различных видах и геометриях исследовались многими авторами. Из большого числа работ отметим [1–7]. Для доказательства теоремы существования и единственности решения задачи (1)–(3) введём следующие функциональные пространства и обозначения:

1) пусть область $G\subset\mathbb{R}^n$ строго выпукла, а ограниченное замкнутое множество V содержится в шаровом слое $\{v\in\mathbb{R}^n : 0 < v_0 \leqslant |v| \leqslant v_1 < \infty\}$;
2) $L_\infty(D, L_p(V))$ — пространство классов существенно ограниченных функций на D со значениями в $L_p(V)$, $1 < p < \infty$, где $D = G\times V\times(0,T)$;

Статья поступила в редакцию 28 февраля 2008 г.
Работа выполнена по направлению «Функциональные методы в дифференциальных уравнениях и междисциплинарных исследованиях» Инновационной образовательной программы РУДН.

3) $H_p(D) = \{u \in L_p(D) : u_t, (v,\nabla)u \in L_p(D), u|_{\Gamma_-} \in L_p(\Gamma_-)\}$, где $\Gamma_- = \gamma_- \times [0,T]$ и $\gamma_- = \{(x,v) \in \partial G \times V : (v,n_x) < 0\}$, а n_x — внешняя нормаль к границе ∂G области G в точке x. Это пространство является банаховым относительно нормы

$$\|u\|_{H_p(D)} = \left[\|u\|^p_{p,D} + \|u_t\|^p_{p,D} + \|(v,\nabla)u\|^p_{p,D} + \|u|_{\Gamma_-}\|^p_{p,\Gamma_-}\right]^{1/p}, \quad 1 < p < \infty; \tag{4}$$

4) $W^t_p(D) = \left\{F(x,v,t) \in L_p(D) : \dfrac{\partial F}{\partial t} \in L_p(D)\right\}$ с нормой

$$\|F\|_{W^t_p(D)} = \left[\|F\|^p_{L_p(D)} + \left\|\frac{\partial F}{\partial t}\right\|^p_{L_p(D)}\right]^{1/p}, \quad 1 < p < \infty, \quad [1, \text{с. } 126]; \tag{5}$$

5) $h_p(G\times V) = \{\varphi \in L_p(G\times V) : (v,\nabla)\varphi \in L_p(G\times V), \varphi|_{\gamma_-} \in L_p(\gamma_-)\}$ с нормой

$$\|\varphi\|_{h_p} = \left[\|\varphi\|^p_{L_p(G\times V)} + \|(v,\nabla)\varphi\|^p_{L_p(G\times V)} + \|\varphi|_{\gamma_-}\|^p_{L_p(\gamma_-)}\right]^{1/p}.$$

$C_{X\to Y}$ — наименьшая константа вложения X в Y, т.е. $\|\cdot\|_Y \leqslant C_{X\to Y}\|\cdot\|_X$, $\mathcal{L}(X,Y)$ — множество линейных непрерывных операторов из X в Y. Здесь и в дальнейшем $\nabla = \nabla_x$.

Заметим, что область G может быть представлена в следующем виде: $G = \pi_v \times (\zeta_-, \zeta_+)$, то есть каждый $x \in G$ при фиксированном v можно записать следующим образом : $x = y + v\bar{\xi}$ — характеристическая прямая вдоль вектора v, где y принадлежит π_v ортогональной проекции области G на гиперплоскость, перпендикулярную вектору v и не пересекающую G; причем $\bar{\xi}$ — одномерный параметр из $[\zeta_-, \zeta_+]$ такой, что элемент $v\bar{\xi}$ принадлежит ортогональному дополнению пространства, содержащего π_v, где $\zeta_- = \zeta_-(y,v)$, $\zeta_+ = \zeta_+(y,v)$ | $0 < \zeta_-(y,v) < \zeta_+(y,v)$ при всех $(y,v) \in \pi_v \times V$ и $\zeta_-(y,v) = \zeta_+(y,v)$ при $(y,v) \in \partial\pi_v \times V$, т.е. $y + v\,\zeta_\pm \in \partial G_\pm = \{x \in \partial G : \pm(v,n_x) > 0\}$. Тогда с учётом новых обозначений получим равенство $(v,\nabla)\, u(y+v\bar{\xi}, v, t) = \dfrac{\partial}{\partial\bar{\xi}} u(y+v\bar{\xi}, v, t)$.

В этом пункте исследуем обобщённые решения прямой задачи в классе $H_2(D)$, взяв вместо уравнения (1) более общее уравнение

$$u_t(x,v,t) + (v,\nabla)\, u(x,v,t) = \\ = (Pu)(x,v,t) + \int\limits_V J(x,v',t,v)\, a(x,v',t)\, dv' + F(x,v,t), \tag{6}$$

где $(x,v,t) \in D$ и оператор P удовлетворяет следующим условиям:

1) $P : X \to Y$, где X, Y — вещественные банаховы пространства;
2) P — липшиц-непрерывный равномерно относительно $t \in (0,T)$ оператор, т.е. существует такая постоянная Липшица $\tilde{p}$, не зависящая от t, что для любых u_1, $u_2 \in X$ выполняется условие $\|(P\,u_1 - P\,u_2)(\cdot,\cdot,t)\| \leqslant \tilde{p}\,\|(u_1,u_2)(\cdot,\cdot,t)\|$.

Теорема 1. *Пусть* $X = H_2(D), Y = W^t_2(D); F, J, a \in Y;$ $\varphi \in h_2(G\times V); \mu \in W^t_2(\Gamma_-)$ *и выполнено условие согласования*

$$\varphi(x,v) = \mu(x,v,0) \tag{7}$$

при почти всех $(x,v) \in \gamma_-$. *Тогда существует единственное обобщённое решение* $u \in H_2(D)$ *задачи* (6), (2), (3), *удовлетворяющее оценке устойчивости*

$$\|u\|_{H_2} \leqslant C\left(\|F\|_{W^t_2} + m(V)\|J\|_{W^t_2}\cdot\|a\|_{W^t_2} + \|\varphi\|_{h_2} + \|\mu\|_{W^t_2}\right),$$

где $m(V)$ *— мера множества* V.

Доказательство. Покажем сначала эквивалентность задачи (6), (2), (3) некоторому интегральному уравнению. Пусть $u \in H_2(D)$ есть обобщённое решение задачи (6), (2), (3). Перепишем уравнение (6) в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}}\right) u(y + v\bar{\xi}, v, t) = (Pu)(y + v\bar{\xi}, v, t) + \\ + \int\limits_V J(y + v\bar{\xi}, v, t, v')\, a(y + v\bar{\xi}, v', t)\,\mathrm{d}v' + F(y + v\bar{\xi}, v, t). \quad (8)$$

Поскольку $t - \bar{\xi} = \mathrm{const}$ является характеристикой данного уравнения, то оно на этой характеристике примет вид

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} u(y + v\theta, v, \theta - \bar{\xi} + t) = (Pu + F)(y + v\theta, v, \theta - \bar{\xi} + t) + \\ + \int\limits_V J(y + v\theta, v, \theta - \bar{\xi} + t, v')\, a(y + v\theta, v', \theta - \bar{\xi} + t)\,\mathrm{d}v'. \quad (9)$$

Проинтегрируем это равенство по θ от $\bar{\xi} - t$ до $\bar{\xi}$, а затем от ζ_- до $\bar{\xi}$, с учётом условий (2), (3), в которых следы $u|_{t=0}$ и $u|_{\bar{\xi}=\zeta_-}$ понимаются как поточечные пределы абсолютно непрерывной по t и по $\bar{\xi}$ функции u. Получим интегральное уравнение

$$u(y+v\bar{\xi}, v, t) = \begin{cases} \varphi(y + v(\bar{\xi} - t), v) + \int\limits_{\bar{\xi}-t}^{\bar{\xi}} (Pu + F)(y + v\theta, v, \theta - \bar{\xi} + t)\,\mathrm{d}\theta + \\ \quad + \int\limits_{\bar{\xi}-t}^{\bar{\xi}} \int\limits_V J(y + v\theta, v, \theta - \bar{\xi} + t, v')\, a(y + v\theta, v', \theta - \bar{\xi} + t)\,\mathrm{d}v'\,\mathrm{d}\theta, \\ \quad \zeta_- + t \leqslant \bar{\xi} \leqslant \zeta_+, 0 \leqslant t \leqslant T, \\ \mu(y + v\zeta_-, v, t - \bar{\xi} + \zeta_-) + \int\limits_{\zeta_-}^{\bar{\xi}} (Pu + F)(y + v\theta, v, \theta - \bar{\xi} + t)\,\mathrm{d}\theta + \\ \quad + \int\limits_{\zeta_-}^{\bar{\xi}} \int\limits_V J(y + v\theta, v, \theta - \bar{\xi} + t, v')\, a(y + v\theta, v', \theta - \bar{\xi} + t)\,\mathrm{d}v'\,\mathrm{d}\theta, \\ \quad \zeta_- \leqslant \bar{\xi} \leqslant \alpha, \end{cases}$$

где $\alpha = \min\{\zeta_- + t, \zeta_+\}$, или в более компактной форме

$$u(y + v\bar{\xi}, v, t) = \phi(\bar{\xi}, y, v, t) + \int\limits_{\eta}^{\bar{\xi}} (Pu + F)(y + v\theta, v, \theta - \bar{\xi} + t)\,\mathrm{d}\theta + \\ + \int\limits_{\eta}^{\bar{\xi}} \int\limits_V J(y + v\theta, v, \theta - \bar{\xi} + t, v')\, a(y + v\theta, v', \theta - \bar{\xi} + t)\,\mathrm{d}v'\mathrm{d}\theta. \quad (10)$$

После замены $\tau = \theta - \bar{\xi} + t$ под знаком интеграла получим

$$u(y + v\bar{\xi}, v, t) = \phi(\bar{\xi}, y, v, t) + \int\limits_{\beta}^{t} (Pu + F)(y + v(\tau - t + \bar{\xi}), v, \tau)\,\mathrm{d}\tau + \\ + \int\limits_{\beta}^{t} \int\limits_V J(y + v(\tau - t + \bar{\xi}), v, \tau, v')\, a(y + v(\tau - t + \bar{\xi}), \tau, v')\,\mathrm{d}v'\mathrm{d}\tau, \quad (11)$$

где $\phi(\bar\xi, y, v, t) = \varphi(y + v(\bar\xi - t), v)$, $\eta = \bar\xi - t$; $\beta = 0$ при $0 \leqslant t \leqslant \bar\xi - \zeta_-$, $\zeta_- \leqslant \bar\xi \leqslant \zeta_+$ и $\phi(\bar\xi, y, v, t) = \mu(y + v\zeta_-, v, t - \bar\xi + \zeta_-)$; $\eta = \zeta_-$; $\beta = t - \bar\xi + \zeta_-$ при $\bar\xi - \zeta_- \leqslant t \leqslant T$, $\zeta_- \leqslant \bar\xi \leqslant \zeta_+$.

Обратно, пусть $u \in H_2(D)$ есть решение интегрального уравнения (10). Тогда, вычислив обобщённые производные по t и по вектору v от обеих частей равенства (10) и сложив их, получим уравнение (6). Начальное условие (2) и краевое условие (3) получаются предельным переходом в левой и правой частях равенства (10) при $t \to 0$ и $\bar\xi \to \zeta_-$ соответственно.

Итак, любое обобщённое решение $u \in H_2(D)$ задачи (6), (2), (3) является решением уравнения (10) или (11) и наоборот, т. е. задача (6), (2), (3) эквивалентна интегральному уравнению (10).

Дальнейшие исследования переносим на уравнение (10), переписав его в операторной форме $u = u_0 + Au$, где

$$u_0(y + v\bar\xi, v, t) = \phi(\bar\xi, y, v, t) + \int\limits_{\eta}^{\bar\xi} F(y + v\theta, v, \theta - \bar\xi + t)\,\mathrm{d}\theta +$$
$$+ \int\limits_{\eta}^{\bar\xi}\int\limits_{V} J(y + v\theta, v, \theta - \bar\xi + t, v')\, a(y + v\theta, \theta - \bar\xi + t, v')\,\mathrm{d}v'\,\mathrm{d}\theta, \quad (12)$$

$$(Au)(\bar\xi, y, v, t) = \int\limits_{\eta}^{\bar\xi} (Pu)(y + v\theta, v, \theta - \bar\xi + t)\,\mathrm{d}\theta. \quad (13)$$

Из явного вида оператора A и условия (7) следует, что оператор A непрерывно отображает пространство $H_2(D)$ в себя и $u_0 \in H_2(D)$. Действительно, для любой функции $B(x, v, t)$ из пространства основных функций $\mathcal{D}$ (см. [8]) имеет место цепочка равенств

$$\int\limits_{D} (Au)\frac{\partial B}{\partial t}\left(y + v\bar\xi, v, t\right)\,\mathrm{d}\bar\xi\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int\limits_{V}\int\limits_{\pi_v}\int\limits_{\zeta_-}^{\zeta_+}\Bigg[\int\limits_{0}^{\bar\xi-\zeta_-} \frac{\partial B}{\partial t}\left(y + v\bar\xi, v, t\right)\int\limits_{\bar\xi-t}^{\bar\xi} (Pu)\left(y + v\theta, v, \theta - \bar\xi + t\right)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}t +$$
$$+ \int\limits_{\bar\xi-\zeta_-}^{T} \frac{\partial B}{\partial t}\left(y + v\bar\xi, v, t\right)\int\limits_{\zeta_-}^{\bar\xi} (Pu)\left(y + v\theta, v, \theta - \bar\xi + t\right)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}t\Bigg]\,\mathrm{d}\bar\xi\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}v =$$
$$= \int\limits_{V}\int\limits_{\pi_v}\int\limits_{\zeta_-}^{\zeta_+}\Bigg\{B\left(y + v\bar\xi, v, \bar\xi - \zeta_-\right)\int\limits_{\zeta_-}^{\bar\xi} (Pu)\left(y + v\theta, v, \theta - \zeta_-\right)\,\mathrm{d}\theta -$$
$$- \int\limits_{0}^{\bar\xi-\zeta_-} B\left(y + v\bar\xi, v, t\right)\left[(Pu)\left(y + v(\bar\xi - t), v, 0\right) + \int\limits_{\bar\xi-t}^{\bar\xi} \frac{\partial}{\partial t}(Pu)\left(y + v\theta, v, \theta - \bar\xi + t\right)\,\mathrm{d}\theta\right]\mathrm{d}t +$$
$$+ B\left(y + v\bar\xi, v, T\right)\int\limits_{\zeta_-}^{\bar\xi} (Pu)\left(y + v\theta, v, \theta - \bar\xi + T\right)\,\mathrm{d}\theta -$$

$$- B\left(y + v\bar{\xi}, v, \bar{\xi} - \zeta_-\right) \int\limits_{\zeta_-}^{\bar{\xi}} (Pu)\left(y + v\theta, v, \theta - \zeta_-\right)\, \mathrm{d}\theta -$$

$$- \int\limits_{\bar{\xi}-\zeta_-}^{T} B\left(y + v\bar{\xi}, v, t\right) \int\limits_{\zeta_-}^{\bar{\xi}} \frac{\partial}{\partial t}(Pu)\left(y + v\theta, v, \theta - \bar{\xi} + t\right)\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}t \Bigg\} \mathrm{d}\bar{\xi}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}v =$$

$$= - \int\limits_{D} W\left(y + v\bar{\xi}, v, t\right) B(y + v\bar{\xi}, v, t)\, \mathrm{d}\bar{\xi}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}v\, \mathrm{d}t, \quad (14)$$

где

$$W\left(y + v\bar{\xi}, v, t\right) = (Pu)\left(y + v(\bar{\xi} - t), v, 0\right) + \int\limits_{\bar{\xi}-t}^{\bar{\xi}} \frac{\partial}{\partial t}(Pu)\left(y + v\theta, v, \theta - \bar{\xi} + t\right)\, \mathrm{d}\theta$$

при $\bar{\xi} - \zeta_- < t \leqslant T$.

Итак, мы показали, что существует обобщённая производная

$$\frac{\partial}{\partial t}(Au) = W.$$

Аналогично показывается существование обобщённой производной $(v, \nabla)(Au)$, где

$$(v, \nabla)(Au) = (Pu)(y + v\bar{\xi}, v, t) - (Pu)(y + v(\bar{\xi} - t), v, 0) -$$

$$- \int\limits_{\bar{\xi}-t}^{\bar{\xi}} \frac{\partial}{\partial t}(Pu)(y + v\theta, v, \theta - \bar{\xi} + t)\, \mathrm{d}\theta \quad \text{при } 0 \leqslant t < \bar{\xi} - \zeta_-, \quad (15)$$

$$(v, \nabla)(Au) = (Pu)(y + v\bar{\xi}, v, t) -$$

$$- \int\limits_{\bar{\xi}-t}^{\bar{\xi}} \frac{\partial}{\partial t}(Pu)(y + v\theta, v, \theta - \bar{\xi} + t)\, \mathrm{d}\theta \quad \text{при } \bar{\xi} - \zeta_- < t \leqslant T. \quad (16)$$

На основании условия согласования показываем, что существует обобщённая производная $\dfrac{\partial u_0}{\partial t}$, где

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = -(v, \nabla)\varphi(y + v(\bar{\xi} - t), v) + F(y + v(\bar{\xi} - t), v, 0) +$$

$$+ \int\limits_{\bar{\xi}-t}^{\bar{\xi}} \frac{\partial F}{\partial t}(y + v\theta, v, \theta - \bar{\xi} + t)\, \mathrm{d}\theta + \int\limits_{V} J(y + v(\bar{\xi} - t), v, v', 0) a(y + v(\bar{\xi} - t), v', 0)\, \mathrm{d}v' +$$

$$+ \int\limits_{\bar{\xi}-t}^{\bar{\xi}} \int\limits_{V} \frac{\partial}{\partial t}\Big[J(y + v\theta, v, \theta - \bar{\xi} + t) a((y + v\theta, \theta - \bar{\xi} + t), v')\Big]\, \mathrm{d}v'\, \mathrm{d}\theta \text{ при } 0 \leqslant t < \bar{\xi} - \zeta_-, \quad (17)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = \frac{\partial \mu}{\partial t}(y + v\zeta_-, v, t - \theta\zeta_-) + \int\limits_{\bar{\xi}-t}^{\bar{\xi}} \frac{\partial F}{\partial t}(y + v\theta, v, \theta - \bar{\xi} + t)\,\mathrm{d}\theta +$$

$$+ \int\limits_{\bar{\xi}-t}^{\bar{\xi}} \int\limits_V \frac{\partial}{\partial t}\Big[J(y + v\theta, v, \theta - \bar{\xi} + t)a((y + v\theta, \theta - \bar{\xi} + t), v')\Big]\,\mathrm{d}v'\,\mathrm{d}\theta \text{ при } \bar{\xi} - \zeta_- < t \leqslant T. \quad (18)$$

Далее

$$(v, \nabla)u_0 = (v, \nabla)\varphi(y + v(\bar{\xi} - t), v) + F(y, v\bar{\xi}, v, t) - F(y + (v\bar{\xi} - t), v, 0) -$$
$$- \int\limits_{\bar{\xi}-t}^{\bar{\xi}} \frac{\partial F}{\partial t}(y + v\theta, v, \theta - \bar{\xi} + t)\,\mathrm{d}\theta + \int\limits_V J(y + v\bar{\xi}, v, v', t)a(y + v\bar{\xi}, v', t)\,\mathrm{d}v' -$$
$$- \int\limits_V J(y + v(\bar{\xi} - t), v, v', 0)a(y + v(\bar{\xi} - t), v', 0)\,\mathrm{d}v' -$$
$$- \int\limits_{\bar{\xi}-t}^{\bar{\xi}} \int\limits_V \frac{\partial}{\partial t}\Big[J(y + v\theta, v, \theta - \bar{\xi} + t)a(y + v\theta, \theta - \bar{\xi} + t, v')\Big]\,\mathrm{d}v'\,\mathrm{d}\theta \text{ при } 0 \leqslant t < \bar{\xi} - \zeta_-, \quad (19)$$

$$(v, \nabla)u_0 = -\frac{\partial \mu}{\partial t}(y + v\zeta_-, v, t - \bar{\xi} + \zeta_-) + F(y + v\bar{\xi}, v, t) -$$
$$- \int\limits_{\bar{\xi}-t}^{\bar{\xi}} \frac{\partial F}{\partial t}(y + v\theta, v, \theta - \bar{\xi} + t)\,\mathrm{d}\theta + \int\limits_V J(y + v\bar{\xi}, v, v', t)a(y + v\bar{\xi}, v', t)\,\mathrm{d}v' -$$
$$- \int\limits_{\bar{\xi}-t}^{\bar{\xi}} \int\limits_V \frac{\partial}{\partial t}\Big[J(y + v\theta, v, \theta - \bar{\xi} + t)a(y + v\theta, \theta - \bar{\xi} + t, v')\Big]\,\mathrm{d}v'\,\mathrm{d}\theta \text{ при } \bar{\xi} - \zeta_- < t \leqslant T. \quad (20)$$

Кроме того, $u_0|_{\Gamma_-} = \mu(y + v\zeta_-, v, t)$. Классы, которым принадлежат функции F, J, a, φ, μ, позволяют заключить, что $u_0 \in H_2(D)$.

Покажем теперь, что $(Au) \in H_2(D)$. Как показано в [9], используя теорему Фубини, получаем

$$\|Au\|^2_{2,D} = \int\limits_0^T \int\limits_V \int\limits_{\pi_v} \int\limits_{\zeta_-}^{\zeta_+} \Big| \int\limits_{\eta}^{\bar{\xi}} (Pu)(y + v\theta, v, \theta - \bar{\xi} + t)\,\mathrm{d}\theta \Big|^2 \mathrm{d}\bar{\xi}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int\limits_0^T \int\limits_V \int\limits_{\pi_v} \int\limits_{\zeta_-}^{\zeta_+} \Big| \int\limits_{\beta}^{t} (Pu)(y + v(\tau - t + \bar{\xi}), v, \tau)\,\mathrm{d}\tau \Big|^2 \mathrm{d}\bar{\xi}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t \leqslant$$
$$\leqslant T \int\limits_0^T \int\limits_0^T \int\limits_V \int\limits_{\pi_v} \int\limits_{\zeta_-}^{\zeta_+} |(Pu)(y + v(\tau - t + \bar{\xi}), v, \tau)|^2\,\mathrm{d}\bar{\xi}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t \leqslant$$
$$\leqslant T^2 \int\limits_D |(Pu)(y + v\bar{\xi}, v, \tau)|^2\,\mathrm{d}\bar{\xi}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}\tau = T^2 \|Pu\|^2_{2,D} < \infty; \quad (21)$$

$$\Big\| \frac{\partial}{\partial t}(Au) \Big\|^2_{2,D} \leqslant 2\,\|Pu\|^2_{2,D} + 4T^2 \,\Big\| \frac{\partial}{\partial t}(Pu) \Big\|^2_{2,D} < \infty; \quad (22)$$

$$\left\|(v,\nabla)(Au)\right\|^2_{2,D} \leqslant 6\|Pu\|^2_{2,D}+6T^2\left\|\frac{\partial}{\partial t}(Pu)\right\|^2_{2,D}<\infty; \qquad (23)$$

$\|(Au)|_{\Gamma_-}\|^2_{2,\Gamma_-}=0$, т. к. $(Au)(y+v\zeta_-,v,t)=0$.

Следовательно, $\|Au\|^2_{2,D}<\infty$, т. е. $Au\in H_2(D)$.

Докажем теперь существование, единственность и устойчивость решения уравнения (10) методом последовательных приближений.

С этой целью в качестве приближенных решений возьмём функции

$$u_n(y+v\bar{\xi},v,t)=u_0(y+v\bar{\xi},v,t)+(Au_{n-1})(\bar{\xi},y,v,t).$$

При этом по аналогии с работой [1] и [5] легко получить следующую оценку

$$\|u_0\|_{H_2}\leqslant(5T+4)\left(\|F\|_{W_2^t(D)}+m(V)\|J\|_{W_2^t(D)}\cdot\|a\|_{W_2^t(D)}+\|\varphi\|_{h_2(G\times V)}+\|\mu\|_{W_2^t(\Gamma_-)}\right).$$

Теперь оценим разность u_n-u_{n-1}:

$$\|u_n-u_{n-1}\|^2_{H_2}\leqslant\frac{\alpha^{2n}}{(2n)!!}\|u_0\|^2_{H_2},\quad n=1,2,\dots,\ \text{где } \alpha=4\tilde{p}(T+1)\ [10,\ \text{с. } 21].$$

Используя это неравенство, получаем

$$\|u_{n+k}-u_n\|^2_{H_2}\leqslant\|u_{n+k}-u_{n+k-1}\|^2_{H_2}+\dots+\|u_{n+1}-u_n\|^2_{H_2}\leqslant$$
$$\leqslant\left[1-\left(\frac{\alpha^2}{2n+4}\right)^k\right]\left[1-\frac{\alpha^2}{2n+4}\right]^{-1}\frac{\alpha^{2n+2}}{(2n+2)!!}\|u_0\|^2_{H_2}$$
$$\text{для любого } k>0\ [10,\ \text{с. } 22]. \qquad (24)$$

Следовательно, $\|u_{n+k}-u_n\|_{H_2}\to 0$ при $n,k\to\infty$, т. е. последовательность $\{u_n\}$ фундаментальна в пространстве $H_2(D)$. Поскольку это пространство полно, то существует такой элемент $u\in H^2(D)$, что $\|u-u_n\|_{H_2}\to 0$ при $n\to 0$.

Из неравенства

$$\|u-u_0-Au\|_{H_2}\leqslant\|u-u_n\|_{H_2}+\|u_n-u_0-Au_{n-1}\|_{H_2}+$$
$$+\|Au_{n-1}-Au\|_{H_2}\leqslant\|u-u_n\|_{H_2}+p\sqrt{11T^2+8}\,\|u-u_{n-1}\|_{H_2}\ [10,\ \text{с. } 22] \qquad (25)$$

следует, что u является решением уравнения (10).

Далее в силу оценки

$$\|u_n-u_0\|^2_{H_2}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha^{2k}}{(2k)!!}\|u_0\|^2_{H_2}\ [10,\ \text{с. } 22] \qquad (26)$$

и абсолютной сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\alpha^{2k}}{(2k)!!}$ получаем оценку устойчивости

$$\|u\|_{H_2}\leqslant C_1\|u_0\|_{H_2}\leqslant C\left(\|F\|_{W_2^t}+m(V)\|J\|_{W_2^t}\cdot\|a\|_{W_2^t}+\|\varphi\|_{h_2}+\|\mu\|_{W_2^t}\right),$$

где постоянная C зависит только от T и $\tilde{p}$.

Из (26) вытекает единственность решения интегрального уравнения (10). Итак, существует единственное устойчивое решение $u\in H_2(D)$ уравнения (10), а, значит, и обобщённое решение задачи (6), (2), (3). Теорема доказана. □

Замечание. Оценки, полученные в ходе доказательства теоремы 1, не являются точными. Тот вид, в котором они выписаны, упрощает некоторые выкладки, но никак не влияет на общность результатов. Уточнить эти оценки можно с помощью интегрального неравенства Минковского.

Литература

1. *Прилепко А. И., Волков Н. П.* Обратные задачи определения параметров нестационарного уравнения переноса по переопределениям интегрального типа // Диф. уравнения. — Т. 23, № 1. — 1987. — С. 124–136.
2. *Прилепко А. И., Иванков А. Л.* Обратные задачи определения коэффициента и правой части нестационарного многоскоростного уравнения переноса по переопределению в точке // Диф. уравнения. — Т. 21, № 1. — 1985. — С. 109–119.
3. *Кузнецов Ю. А., Морозов С. Ф.* // Диф. уравнения. — Т. 8, № 9. — 1972. — С. 1639–1648.
4. *Масленников М. В.* // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — Т. 97. — 1968. — С. 1–134.
5. *Гермогенова Т. А.* Обобщенные решения краевых задач для уравнения переноса. — (Препринт / ИПМ АН СССР). — 1967.
6. *Кейз К., Цвайфель П.* Линейная теория переноса. — М.: Мир, 1972. — 384 с.
7. *Шихов С. Б.* Вопросы математической теории реактров. Линейный анализ. — М.: Атомиздат, 1973. — 376 с.
8. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1950. — 256 с.
9. *Кириллов А. А., Гвишиани А. Д.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1988.
10. *Волков Н. П.* Обратные задачи для нестационарного кинетического уравнения переноса с разрывными переменными: Дис. канд физ.-мат. наук / МГУ. — М., 1986.
11. *Kaper H. G., Lekkerkerker G. G., Heitmanek J.* Spectral in Linear Transport Theory. — Basel, 1982.
12. *Greiner G.* Spectral Properties and Asymptotic Behavior of the Linear Transport Equation // Math. Z. — Vol. 185, No 2. — 1984. — Pp. 167–177.
13. *Iorgens K.* // Comm. Pure Appl. Math. — Vol. 11. — 1958. — Pp. 219–242.
14. *Douglis A.* Numerical Solutions of Partial Diff. eq. // Proc. of Sumposium.-Maryland / Ed. by ed. I. H. Bramble. — London: 1966. — Pp. 197–256.
15. *Волков Н. П.* Анализ математических моделей физических процессов. — М.: Энергоатомиздат, 1988. — 11–19 с.
16. *Волков Н. П.* Теоретико-функциональные методы в задачах математической физики. — М.: Энергоатомиздат, 1986. — 22–26 с.
17. *Тихонов И. В.* Корректность обратной задачи с финальным переопределением для нестационарного уравнения переноса // Вестн. Моск. Ун-та. Сер. 15, Вычисл. Матем. и Киберн. — № 1. — 1995. — С. 56.
18. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973.

UDC 517.97

Generalized Solution of Direct Problem for Modified Time-Dependent Transport Equation

Ismail Ahmed Abdel Baset

Department of Differential Equations and Mathematical Physics
Peoples' Friendship University of Russia
Miklukho-Maklaya str., 6, Moscow, Russia, 117198

Solvability of the generalized solution for the time-dependent modified transport equation with initial and boundary conditions problem is proved. Modified transport equation differs from the common equation by replacement integrated composed function, being the solution, by a constant function, from the same class of the solution. That modification is more convenient for some nonlinear inverse problems in comparison with the common transport equation.