УДК 517.977

Об асимптотической приводимости некоторых классов модельных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с квазиполиномиальной матрицей

Нгуен Вьет Хоа

Кафедра высшей математики
Российский Университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, 117198, Россия

Доказаны основные теоремы об асимптотической приводимости неавтономных модельных систем с квазиполиномиальной матрицей при наличии особенностей.

Ключевые слова: асимптотическая приводимость, метод расщепления, неавтономные модельные системы ОДУ с квазиполиномиальной матрицей.

1. Введение

Для неавтономных модельных линейных систем с квазиполиномиальной матрицей с особенностями доказаны с помощью одного из вариантов метода расщепления теоремы об асимптотической приводимости к более простым системам, более удобным для качественного и численного анализа.

2. О приводимости некоторых классов модельных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с квазиполиномиальной матрицей

В предлагаемой работе рассмотрены различные варианты линейных неавтономных модельных систем ОДУ с квазиполиномиальной матрицей с особенностями более общего, вида чем в монографиях [1, 2].

На основе одного из последних вариантов метода расщепления [3–5] предложены алгоритмы асимптотического приведения исходных систем (с учётом спектральных характеристик определяющей матрицы) к менее громоздкому виду, удобному для дальнейшего анализа, что обобщает известные ранее результаты [1–5].

Для удобства изложения для произвольной квадратной матрицы $A = \{a_{jk}\}_1^n$ введём обозначения для «её диагональной» $\bar{A}\mathrm{diag}\,\{a_{11}, \ldots, a_{nn}\}$ и «бездиагональной» $\bar{\bar{A}} = A - \bar{A}$ частей.

Теорема 1. *Система ОДУ с квазиполиномиальной матрицей вида*

$$\dot{x} = t^m A\,(t)\,x; \quad x\,(t_0) = x_0; \quad x \in R^n; \;\; (m \geqslant 1)\,; \quad (t_0 > 0)\,; \tag{1}$$

$A\,(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k\,(t)\,t^{-k}$, *где* $A_k\,(t)$ *— T-периодические достаточно плавные матрицы и матричный ряд сходятся по некоторой норме абсолютно и равномерно при* $t \geqslant t_0 > 1$ *в случае, если спектр* $\{\lambda_{0j}\,(t)\}_1^n$ *матрицы* $A_0\,(t)$ *удовлетворяет неравенствам*

$$\sigma_{jk}\,(t) \equiv \lambda_{0j}\,(t) - \lambda_{0k}\,(t) \neq 0; \quad \bigl(j \neq k; \quad j, k = \overline{1, n}; \quad t \geqslant t_0 > 1\bigr)\,, \tag{2}$$

Статья поступила в редакцию 28 декабря 2011 г.

может быть с помощью невырожденной при достаточно больших $t > t_0 > 1$ *замены*

$$x = S_0(t)\,H(t)\,z; \quad \left(S_0^{-1}(t)\,A_0(t)\,S_0(t) = \Delta_0(t) = \operatorname{diag}\{\lambda_{01}(t),...,\lambda_{0n}(t)\}\right); \quad (3)$$

$H(t) = E + \sum\limits_{k=1}^{N} \bar{\bar{H}}_k(t)\,t^{-k}$; $\bar{\bar{H}}_k(t)$ *— T-периодические матрицы* $\left(k = \overline{1,n}\right)$, *приведена к неавтономной системе с почти диагональной матрицей:*

$$\dot{z} = t^m \left(\sum_{k=0}^{N} \Lambda_k(t)\,t^{-k} + 0\left(t^{-N-1}\right)\right) z \equiv t^m Q(t)\,z, \quad (4)$$

где T-периодические диагональные $\Lambda_k(t)$ *и «бездиагональные»* $\bar{\bar{H}}_k(t)$; $\left(k = \overline{1,n}\right)$ *матрицы однозначно определяются итерационным методом.*

Доказательство. В условиях теоремы 1 существует невырожденная Т-периодическая замена $x = S_0(t)\,y$, приводящая систему (1) к виду:

$$\dot{y} = t^m B(t)\,y; \quad \left(B(t) = \Lambda_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k(t)\,t^{-k}\right), \quad (5)$$

что позволяет после ещё одного невырожденного при достаточно больших $t > t_0 > 1$ преобразования $y = H(t)\,z$ перейти и системе (4), если матрицы $B(t)$, $H(t)$ и $Q(t)$ связаны дифференциальным равенством

$$\dot{H} = t^m \left(B(t)\,H(t) - H(t)\,Q(t)\right). \quad (6)$$

Приравнивая в (6) коэффициенты при одинаковых степенях t, получим неавтономные алгебраические матричные уравнения для последовательного и однозначного определения всех необходимых Т- периодических диагональных $\Lambda_k(t)$ и «бездиагональных» $\bar{\bar{H}}_k(t)$ матриц $\left(k = \overline{1,n}\right)$:

$$t^{m-k}: \Lambda_0(t)\,\bar{\bar{H}}_k(t) - \bar{\bar{H}}_k(t)\,\Lambda_0(t) = \Lambda_k(t) - P_k(t); \quad \left(k = \overline{1,m}; \quad P_1(t) \equiv B_1(t)\right);$$

$$P_k(t) = B_k(t) + \sum_{j=1}^{k-1} \left(B_j(t)\,H_{k-j}(t) - H_{k-j}(t)\,\Lambda_j(t)\right); \quad (7)$$

$$t^{-k}: \Lambda_0(t)\,\bar{\bar{H}}_{m+k}(t) - \bar{\bar{H}}_{m+k}(t)\,\Lambda_0(t) = \Lambda_{m+k}(t) - P_{m+k}(t);$$

$$P_{m+k}(t) = B_{m+k}(t) + \\ + \sum_{j=1}^{m+k-1} \left(B_j(t)\,\bar{\bar{H}}_{m+k-j}(t) - \bar{\bar{H}}_{m+k-j}(t)\,\Lambda_j(t)\right) - \dot{\bar{\bar{H}}}_k(t) + k\bar{\bar{H}}_{k-1}(t), \quad (8)$$

$\left(k = \overline{1, N-m}\right)$.

Структура линейных алгебраических матричных уравнений (7) и (8) позволяет однозначно определить следующие матрицы:

$$\Lambda_k(t) = \bar{P}_k(t); \quad \bar{\bar{H}}_k(t) = \{h_{ijk}(t)\}; \quad P_k(t) = \{p_{ijk}(t)\}$$

$$h_{ijk}(t) = -p_{ijk}(t)/\sigma_{ij}(t); \quad \left(i \neq j; \quad i,j = \overline{1,n}; \quad k = \overline{1,N}\right), \quad (9)$$

что и завершает доказательство теоремы 1. □

Замечание 1. Случай, когда в системе (1) матрицы $A_k(t)$ являются постоянными, исследуется методами теоремы 1 (включая случай $m = 0$).

Принципиально другая ситуация при анализе системы (1) возникает, когда $m = -1$ и $m \leqslant -2$.

Теорема 2. *Система* (1) *при* $m = -1$ *и наличии постоянных матриц* A_k $(k \geqslant 0)$ *в случае, если спектр* $\{\lambda_{0j}\}_1^n$ *матрицы* A_0 *удовлетворяет неравенствам:*

$$\sigma_{jk} \equiv \lambda_{0j} - \lambda_{0k} \neq 0, \pm 1, \pm 2, ... \quad \left(j \neq k; \quad j, k = \overline{1, n}\right) \tag{10}$$

может быть с помощью невырожденной при достаточно больших $t > t_0 > 1$ *замены*

$$x = S_0 H(t)\, z; \quad \left(S_0^{-1} A_0 S_0 = \Lambda_0 = diag\left\{\lambda_{01}, ..., \lambda_{0n}\right\}\right); \quad \left(H(t) = E + \sum_{k=1}^{N} H_k t^{-k}\right) \tag{11}$$

приведена к системе с почти диагональной матрицей вида

$$\dot{z} = t^{-1}\left(\Delta_0 + 0\left(t^{-N-1}\right)\right) z \equiv t^{-1} Q(t)\, z, \tag{12}$$

где постоянные матрицы H_k $\left(k = \overline{1, N}\right)$ *однозначно определяются с помощью итерационного алгоритма.*

Доказательство. Повторяя рассуждения теоремы 1, для матриц $B(t)$, $H(t)$ и $Q(t)$ получим дифференциальное соотношение:

$$t\dot{H} = B(t)\, H(t) - H(t)\, Q(t)\,. \tag{13}$$

Приравнивая в (13) коэффициенты при одинаковых степенях t, получаем набор однотипных матричных уравнений вида:

$$\Lambda_0 \bar{\bar{H}}_n - \bar{\bar{H}}_n \Lambda_0 - n H_n = -P_n; \quad \left(n = \overline{1, N}\right); \quad P_1 = B_1; \quad P_n = B_n + \sum_{j=1}^{n-1} B_j H_{n-j},$$

откуда получаем формулы для последовательного и однозначного определения всех матриц $\bar{\bar{H}}_k$ $\left(k = \overline{1, N}\right)$:

$$\bar{H}_k = -\bar{P}_k / k; \quad \bar{\bar{H}}_k = \{h_{ijk}\}; \quad \bar{\bar{P}}_k = \{p_{ijk}\}; \quad h_{ijk} = -p_{ijk} / \left(\sigma_{ij} - n\right),$$

что и завершает доказательство теоремы 2. □

Теорема 3. *Система* (1) *при* $m = -1$ *с* T*-периодическими матрицами* $A_k(t)$ $(k \geqslant 0)$ *может быть приведена с помощью невырожденной при достаточно больших* $t > t_0 > 1$ T*-периодической замены*

$$x = H(t)\, y; \quad \left(H(t) = E + \sum_{k=1}^{N} H_k(t)\, t^{-k}\right) \tag{14}$$

к более простой системе полиномиального типа с постоянными матрицами вида

$$\dot{y} = t^{-1}\left(\sum_{k=0}^{N} B_k t^{-k} + 0\left(t^{-N-1}\right)\right) y = t^{-1} B(t)\, y, \tag{15}$$

где T-периодические матрицы $H_k(t)$ и постоянные матрицы B_k $\left(k=\overline{1,N}\right)$ определяются с помощью простого алгоритма.

Доказательство. Система (1) может быть приведена к системе (15), если матрицы $A(t)$, $B(t)$ и $H(t)$ удовлетворяют дифференциальному соотношению:

$$t\dot{H} = A(t)H(t) - H(t)B(t). \tag{16}$$

Приравнивая в (16) коэффициенты при одинаковых степенях t, получим набор однотипных неавтономных матричных уравнений вида:

$$\dot{H}_k(t) = P_{k-1}(t) - B_{k-1}; \quad \left(k=\overline{0,N}\right); \quad P_0(t) = A_0(t); \tag{17}$$

$$P_{k-1}(t) = A_{k-1}(t) + (k-1)H_{k-1}(t) + \sum_{j=0}^{k-2}\left(A_j(t)H_{k-j}(t) - H_{k-j}(t)B_j\right); \left(k=\overline{0,N}\right),$$

откуда последовательно и однозначно определяются T-периодические матрицы

$$H_k(t) = \int\limits_0^t \left(P_{k-1}(t) - B_{k-1}\right)\mathrm{d}t, \tag{18}$$

где $B_{k-1} = \dfrac{1}{T}\int\limits_0^T P_{k-1}(t)\,\mathrm{d}t$, что и завершает доказательство теоремы 3. □

Теорема 4. *Система* (1) *с постоянными матрицами* A_k $(k \geqslant 0)$ *при* $m \leqslant -2$ *может быть приведена с помощью невырожденной при достаточно больших* $t > t_0 > 1$ *замены*

$$x = H(t)y; \quad \left(H(t) = E + \sum_{k=m}^{N} H_k t^{-k}\right) \tag{19}$$

к системе вида

$$\dot{y} = t^m\left(B_0 + 0\left(t^{-N-1}\right)\right)y \equiv t^m B(t)y, \tag{20}$$

где постоянные матрицы H_k $\left(k=\overline{m,N}\right)$ *определяются по итерационной схеме.*

Доказательство. Приведение системы (1) при $m \leqslant -2$ с постоянными матрицами A_k к системе (20) с помощью замены (19) возможно, если матрицы $A(t)$, $B(t)$ и $H(t)$ удовлетворяют соотношению вида:

$$\dot{H} = t^m\left(A(t)H(t) - H(t)B(t)\right). \tag{21}$$

Приравнивая в (21) коэффициенты при одинаковых степенях t , получим набор уравнений вида

$$t^0 : B_0 = A_0; \quad t^{-1} : mH_m = -A_1 \quad \Rightarrow H_m = -\frac{A_1}{m};$$

$$t^{-2} : (m+1)H_{m+1} = -A_2 \Rightarrow H_{m+1} = -\frac{A_2}{m+1}$$

и так далее. Теорема 4 доказана. □

Теорема 5. *Система* (1) *при* $m \leqslant -2$ *с* T*-периодическими матрицами* $A_k(t)$ $(k \geqslant 0)$ *может быть приведена с помощью невырожденной при* $t > t_0 > 1$ T*-периодической замены*

$$x = H(t)\,y; \qquad \left(H(t) = E + \sum_{k=m}^{N} H_k(t)\,t^{-k}\right) \tag{22}$$

к более простой системе вида:

$$\dot{y} = t^m \left(\sum_{k=0}^{N} B_k t^{-k} + 0\left(t^{-N-1}\right)\right) y = t^m B(t)\,y, \tag{23}$$

где T*-периодические матрицы* $H_k(t)$ $\left(k = \overline{m, N}\right)$ *и постоянные матрицы* B_k $(k = \overline{0, N})$ *определяются с помощью простых итераций.*

Доказательство. С помощью изложенного выше алгоритме (см. теорему 1) можно показать, что приведение системы (1) $(m \leqslant -2)$ и системе (23) возможно, если матрицы $A(t)$, $B(t)$ и $H(t)$ связаны соотношением (обозначив $m = -n$):

$$t^n \dot{H} = A(t)\,H(t) - H(t)\,B(t); \tag{24}$$

$$t^n\left(\frac{\dot{H}_m(t)}{t^m} - \frac{mH_m(t)}{t^{m+1}} + \frac{\dot{H}_{m+1}(t)}{t^{m+1}} - \frac{(m+1)\,H_{m+1}(t)}{t^{m+2}} + \ldots\right) =$$

$$= \left(A_0(t) + \frac{A_1(t)}{t} + \frac{A_2(t)}{t^2} + \ldots\right)\left(E + \frac{H_m(t)}{t^m} + \frac{H_{m+1}(t)}{t^{m+1}} + \ldots\right) -$$

$$- \left(E + \frac{H_m(t)}{t^m} + \frac{H_{m+1}(t)}{t^{m+1}} + \ldots\right)\left(B_0 + \frac{B_1}{t} + \frac{B_2}{t^2} + \ldots\right)$$

Приравнивая в (24) коэффициенты при одинаковых степенях t, получим набор однотипных алгебраических неавтономных матричных уравнений:

$$t^0 : \dot{H}_m = A_0(t) - B_0 \quad \Rightarrow B_0 = \frac{1}{T}\int_0^T A_0(t)\,\mathrm{d}t; \quad H_m = \int_0^t (A_0(s) - B_0)\,\mathrm{d}s;$$

$$t^{-1} : \dot{H}_{m+1} = (A_1(t) + mH_m(t)) - B_1 \quad \Rightarrow B_1 = \frac{1}{T}\int_0^T P_1(t)\,\mathrm{d}t;$$

$$(P_1(t) = A_1(t) + mH_m(t)); \quad H_{m+1}(t) = \int_0^t (P_1(s) - B_1)\,\mathrm{d}s;$$

$$t^{-2} : \dot{H}_{m+2} = (A_2(t) + (m+1)\,H_{m+1}(t)) - B_2 \quad \Rightarrow B_2 = \frac{1}{T}\int_0^T P_2(t)\,\mathrm{d}t;$$

$$(P_2(t) = A_2(t) + (m+1)\,H_{m+1}(t)); \quad H_{m+2}(t) = \int_0^t (P_2(s) - B_2)\,\mathrm{d}s;$$

и так далее. Теорема 5 доказана. □

3. Заключение

Предложенный в статье метод асимптотической приводимости линейных неавтономных модельных систем ОДУ с квазиполиномиальной матрицей при наличии особенностей является конструктивным и удобным как для качественного, так и для численного анализа.

Доказанные с помощью метода аналогий и алгоритма метода расщепления нетривиальные теоремы позволяют дополнить или уточнить известные ранее результаты [1–5].

Литература

1. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, Изд-во МГУ, 1998. — 480 с. [*Demidovich B. P.* Lekcii po matematicheskoyj teorii ustoyjchivosti. — M.: Nauka, Izd-vo MGU, 1998. — 480 s.]
2. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений ОДУ. — М., 1998. — 464 с. [*Vazov V.* Asimptoticheskie razlozheniya resheniyj ODU. — M., 1998. — 464 s.]
3. *Коняев Ю. А.* О некоторых методах исследования устойчивости // Математический сборник. — 2001. — Т. 192, № 3. — С. 65–82. [*Konyaev Yu. A.* O nekotorihkh metodakh issledovaniya ustoyjchivosti // Matematicheskiyj sbornik. — 2001. — T. 192, No 3. — S. 65–82.]
4. *Коняев Ю. А.* Асимптотические и аналитические методы решения некоторых классов прикладных модельных задач. — М., 2005. — 160 с. [*Konyaev Yu. A.* Asimptoticheskie i analiticheskie metodih resheniya nekotorihkh klassov prikladnihkh modeljnihkh zadach. — M., 2005. — 160 s.]
5. *Коняев Ю. А.* Об одном методе исследования некоторых задач теории возмущений // Математический сборник. — 1993. — Т. 184, № 12. — С. 133–144. [*Konyaev Yu. A.* Ob odnom metode issledovaniya nekotorihkh zadach teorii vozmutheniyj // Matematicheskiyj sbornik. — 1993. — T. 184, No 12. — S. 133–144.]

UDC 517.977

About Asymptotic Transformation Some Classes of Systems of the Model Ordinary Differential Equations (ODE) with a Quasipolynomial Matrix

Nguyen Viet Khoa

Department of Mathematics
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russia

The basic theorems about asymptotic transformation systems with a quasipolynomial matrix are proved.

Key words and phrases: asymptotic derived, splitting method, nonautonomous model systems ODE with a quasipolynomial matrix.