УДК 517.93,518:512.34

Управление движением по заданной кривой и обратные задачи динамики

Р. Г. Мухарлямов[*], Н. В. Абрамов[†]

[*] *Кафедра теоретической механики*
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, 117198, Россия
[†] *Кафедра экономической информатики*
Самарский государственный архитектурно-строительный университет
ул. Молодогвардейская, 194, Самара, 443001, Россия

Рассматривается задача управления движением механической системы по заданной кривой в пространстве состояний. Определяются условия устойчивости движения по заданной кривой в пространстве координат. Предлагаются методы построения управляющих сил, зависящих от координат механической системы. Приводится решение задачи управления движением точки в центральном поле сил.

Ключевые слова: механическая система, динамика, устойчивость, связи, управление, движение, материальная точка, обобщённая координата.

1. Введение

Задача управления движением механической системы относится к обратным задачам динамики, предполагающим определение выражений сил, под действием которых механическая система совершает движения с заданными свойствами. Наиболее полно эти свойства выражаются в виде требования осуществления движения по заданному закону или по заданной кривой в пространстве координат. Так в [1] была поставлена задача об определении сил в функциях координат точек их приложения, под действием которых планеты описывают конические сечения. В [2, 3] определены выражения силы, соответствующей движению материальной точки по плоской кривой. В [4] предложено решение задачи построения потенциального силового поля по заданному семейству траекторий изображающей точки в многомерном пространстве. Некоторые современные методы решения обратных задач динамики предложены в [5]. В настоящей работе рассматривается задача управления движением механической системы по заданной кривой в пространстве состояний. Предлагаются методы построения управляющих сил, зависящих от координат механической системы. Приводятся условия устойчивости движения по заданной кривой.

2. Постановка задачи

Обозначив q^i, v^i обобщённые координаты и скорости, уравнения движения механической системы можно представить в виде

$$\dot{q}^i = v^i, \quad \dot{v}^i = a^i_j(q^l)(f^j(q^l, v^m) + u^j) - a^i_{jk}(q^l)v^j v^k, \tag{1}$$

$$i,\ j,\ k,\ l,\ m = 1, 2, \ldots, n, \quad \dot{q}^i \equiv \frac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}t},$$

$$q^i(t_0) = q^i_0, \quad v^j(t_0) = v^j_0, \tag{2}$$

Статья поступила в редакцию 1 ноября 2010 г.
Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, код 10-01-00381-а.

где f^j — обобщённые внешние силы, u^j — управляющие силы, действующие на систему. Здесь, как и в дальнейшем, предполагается, что по одинаковым индексам производится суммирование. Системой (1) описывается динамика голономных и некоторых неголономных систем, например, систем Чаплыгина. Предполагается, что непрерывные, дважды дифференцируемые по всем переменным q^i функции

$$\alpha^p = g^p(q^i), \quad p = 1, \ldots, n-1, \tag{3}$$

при известных значениях α^p задают единственную кривую в пространстве переменных q^i. Равенства (3) позволяют учитывать возможные отклонения от уравнений связей

$$g^p(q^j) = 0 \tag{4}$$

в процессе численного интегрирования уравнений динамики системы (1). Задача сводится к определению управляющих сил u^j, которые удовлетворяли бы следующим условиям:

1) если начальные условия (2) удовлетворяют равенствам

$$g^p(q_0^j) = 0, \quad g_j^p(q_0^i)v_0^j = 0, \quad g_j^p = \frac{\partial g^p}{\partial q^j}, \tag{5}$$

то соответствующее решение $q^i = q^i(t)$, $v^j = v^j(t)$, системы (1) должно удовлетворять условиям $g^p(q^j) = 0, \quad g_j^p(q^i)v^j = 0$;

2) если начальные условия (2) таковы, что $g^p(q_0^j) = \alpha_0^p, \quad g_j^p(q_0^i)v_0^j = \beta_0^p, \quad \|\alpha_0^p\| + \|\beta_0^p\| \leqslant \delta$, то на соответствующих решениях $q^i = q^i(t), v^j = v^j(t)$ системы (1) должны соблюдаться неравенства

$$\begin{gathered} \|\alpha^p(t)\| + \|\beta^r(t)\| \leqslant \varepsilon, \quad \alpha^p(t) = g^p(q^i(t)), \\ \beta^q(t) = g_j^q(q^i(t))v^j(t), \quad q, r = 1, \ldots, n-1. \end{gathered} \tag{6}$$

Условие 1) предполагает движение изображающей точки по кривой (4) в пространстве координат q^i, условие 2) означает устойчивость этого движения по отношению к уравнениям связей (4).

3. Устойчивость и управление движением

Для решения первой части поставленной задачи достаточно построить такие функции $u^i = u^i(q^l, v^j)$, которые удовлетворяли бы равенствам [6]

$$g_i^p(\alpha_j^i(f^j + u^j) - a_{jk}^i v^j v^k) + g_{jk}^p v^j v^k = G^p(\alpha^r, \beta^q, q^i, v^j), \tag{7}$$

$$g_{jk}^p = \frac{\partial^2 g^p}{\partial q^j \partial q^k}, \quad G^p(0, 0, q^i, v^j) = 0.$$

Левые части системы уравнений (7) получены дифференцированием функций (3) по времени t до второго порядка включительно в силу системы уравнений (1). Правые части уравнений (7) являются произвольными непрерывными функциями переменных $\alpha^r, \beta^q, q^i, v^j$. При этом, если начальные условия (2) удовлетворяют равенствам (5), то система дифференциальных уравнений относительно α^r, β^q

$$\dot{\alpha}^p = \beta^p, \quad \dot{\beta}^p = G^p(\alpha^r, \beta^q, q^i, v^j), \tag{8}$$

имеет тривиальное решение

$$\alpha^p = 0, \quad \beta^p = 0. \tag{9}$$

Из равенств (3), (8), (9) следует, что равенства (4) представляют собой уравнения связей для системы (1), если управляющие функции u^j рассматривать как реакции связей.

Для обеспечения устойчивости движения изображающей точки по кривой, определяемой уравнениями (4), достаточно подобрать функции $G^p(\alpha^r, \beta^q, q^i, v^j)$ так, чтобы тривиальное решение (9) системы (8) было устойчиво. Соответствующие условия устойчивости могут быть получены посредством функций Ляпунова [7]. Если функция $V = V(\alpha^r, \beta^r)$ является положительно определённой и её производная

$$\dot{V} = V_p \beta^p + V_p' G^p(\alpha^r, \beta^q, q^i, v^j), \quad V_p = \frac{\partial V}{\partial \alpha^p}, \quad \dot{V}_p' = \frac{\partial V}{\partial \beta^p}, \tag{10}$$

вычисленная в силу уравнений системы (8), является знакопостоянной отрицательной, то тривиальное решение (9) системы (8) устойчиво. Если правая часть равенства (10) является знакоопределённой отрицательной функцией по отношению к переменным α^p, β^r, то тривиальное решение (9) системы (8) устойчиво асимптотически.

Будем рассматривать равенства

$$\beta = g_j^r v^j \tag{11}$$

как систему $n-1$ линейных алгебраических уравнений относительно n обобщённых скоростей v^j. Решение этой системы определяется выражением [8]:

$$v^i = v_0 w^i + w_p^i \beta^p, \quad w_p^i = \delta^{ij} g_j^s w_{sp}, \tag{12}$$

где w_{sp} элемент матрицы (w_{sp}), обратной к матрице (g^{pr}), $g^{pr} = g_i^p \delta^{ij} g_j^r : w_{sp} g^{pr} = \delta_s^r$, $\delta^{ij} = 0$, $i \neq j$, $\delta^{ii} = 0$, и $\delta_s^r = 0$, $r \neq s$, $\delta_r^r = 1$, v_0 произвольная величина, w^i определитель, составленный из величин δ_j^i и соответствующих выражений производных g_j^p функций $g^p(q^k)$.

Запишем равенства (7) как систему линейных алгебраических уравнений относительно управляющих сил u^j:

$$s_j^p u^j = s^p, \tag{13}$$

$$s^p = G^p + s_{jk}^p v^j v^k - s_j^p f^j, \tag{14}$$

$$s_j^p = g_i^p \alpha_j^i, s_{jk}^p = g_i^p \alpha_{jk}^i - g_{jk}^p, \quad s_j^p = s_j^p(q^l), s_{jk}^p = s_{jk}^p(q^l),$$

Система (13), так же как система (6), состоит из $n-1$ уравнений относительно n неизвестных u^j. Её общее решение записывается в виде:

$$u^j = u_0 u_0^j + u_p^j s^p, \tag{15}$$

где u_0 произвольная функция переменных $q^i, v^j, u_0^j = u_0^j(q^l)$, вычисляется как определитель, строки которого составляют величины δ_k^j и коэффициенты s_j^p уравнений системы (13), $u_p^j = \delta^{jk} s_k^q(q^l) s_{qp}(q^l)$, s_{qp} элемент матрицы (s_{qp}), обратной к матрице (s^{pr}), $s^{pr} = s_i^p \delta^{ij} s_j^r$, $s_{qp} s^{pr} = \delta_q^r$.

Если иметь в виду выражения (3), (11) переменных α^p, β^p, то в общем случае управляющие силы зависят от координат и скоростей механической системы:

$$\begin{gathered} u^j = u_0(q^l, v^m)u_0^j(q^l) + u_p^j(q^l)s^p(q^i, v^m), \\ s^p(q^l, v^m) = G^p(\alpha^r(q^l), \beta^q g_j^r(q^l)v^j, q^i, v^j) + s_{jk}^p(q^l)v^j v^k - s_j^p(q^l)f^j(q^l, v^m). \end{gathered} \tag{16}$$

4. Управление позиционными силами

Рассмотрим случай, когда выражения активных сил f^j являются многочленами второй степени относительно обобщённых скоростей

$$f^j(q^i, v^m) = f_0^j(q^i) + f_k^j(q^i)v^k + f_{kl}^j(q^l)v^k v^l. \tag{17}$$

Определим функции $G^p(\alpha^r, \beta^q, q^i, v^j)$ линейными выражениями относительно величин α^r, β^r:

$$G^p = k_r^p \beta^r + c_r^p \alpha^r$$

с коэффициентами

$$k_r^p(q^l, v^m) = k_{r0}^p(q^l) + k_{ri}^p(q^l)v^i, \tag{18}$$

$$c_r^p(q^l, v^m) = c_{r0}^p(qa^l) + c_{ri}^p(q^l)v^i + c_{rik}^p(q^l)v^i v^k. \tag{19}$$

Тогда равенство (14) с учётом (3), (17)–(19) можно представить в виде:

$$s^p(q^i, v^m) = \sigma_0^p(q^l) + \sigma_r^p(q^l)\beta^r + \sigma_{rs}^p(q^l)\beta^r\beta^s, \tag{20}$$

$$\sigma_0^p = v_0^2 s_{ik}^p w^i w^k + (c_{s0}^p + v_0 c_{si}^p w^i + v_0^2 c_{sik}^p s^i w^k)g^s - s_l^p(f_0^l + v_0 f_i^l w^i + v_0^2 f_{ik}^l w^i w^k),$$

$$\sigma_q^p = k_{q0}^p + v_0(k_{qi}^p w^i + 2s_{ik}^p w^i w_q^k) + (c_{si}^p w_q^i + 2v_0 c_{sik}^p w^i w_q^k)g^s - s_l^p(f_i^l w_q^i + 2v_0 f_{ik}^l w^i w_q^k),$$

$$\sigma_{qr}^p = k_{ri}^p w_q^i + s_{ik}^p w_q^i w_r^k - s_l^p f_{ik}^l w_q^i w_r^k + c_{sik}^p s_q^i w_r^k g^s.$$

Полагая в (16) $u_0 = u_0(q^l)$ и используя выражение (20), управляющие силы можно привести к виду многочлена второй степени относительно переменных β^r:

$$u^j = u_0(q^l)u_0^j(q^l) + u_p^j(q^l)(\sigma_0^p(q^l) + \sigma_r^p(q^l)\beta^r + \sigma_{rs}^p(q^l)\beta^r\beta^s). \tag{21}$$

Из равенств (21) видно, что если их правые части не содержат переменных β^r, то управляющие силы будут зависеть только от координат механической системы q^l. Следовательно, можно сформулировать следующие утверждения об условиях существования позиционных сил, обеспечивающих движение по кривой, заданной уравнениями (4).

Теорема 1. *Если начальные условия* (2) *таковы, что выполняются условия*

$$g^p(q_0^j) = \alpha_0^p, \quad g_j^p(q_0^i)v_0^j = 0, \tag{22}$$

то управляющие силы зависят только от координат и соответствуют движению изображающей точки по кривой

$$g^p(q^l) = \alpha_0^p. \tag{23}$$

Действительно, очевидно, что при выполнении условий (20) система (8) имеет тривиальное решение $\alpha^p(t) = 0$, если $\alpha^p = g^p(q^j) - \alpha_0^p$.

Теорема 2. *Если коэффициенты* $k^p_{r0}(q^l)$, $k^p_{ri}(q^l)$, $c^p_{r0}(q^l)$, $c^p_{ri}(q^l)$, $c^p_{rik}(q^l)$ *в выражениях* (18), (19) *удовлетворяют условиям*

$$\sigma^p_r(q^l) = 0, \quad \sigma^p_{rs}(q^l) - 0, \tag{24}$$

то управляющие силы зависят только от координат и соответствуют движению изображающей точки по кривой (4).

Пример. Рассмотрим движение материальной точки единичной массы под действием центральной силы. Положение точки на плоскости будем определять полярными координатами $q^1 = r, q^2 = \varphi$. Уравнения движения точки имеют вид

$$\dot r = v, \quad \dot\varphi = \omega, \quad \dot v = r\omega^2 + f + u_r, \quad \dot\omega = -\frac{2}{r}v\omega + \frac{1}{r}u_\omega, \tag{25}$$

где f обозначает величину силы, которую представим функцией

$$f = f_0(r,\varphi) + f_r(r,\varphi)v + +f_\varphi(r,\varphi)\omega + f_{rr}(r,\varphi)v^2 + 2f_{r\varphi}(r,\varphi)v\omega + f_{\varphi\varphi}(r,\varphi)\omega^2. \tag{26}$$

Требуется определить выражения позиционных управляющих сил $u_r = u_r(r,\varphi)$, $u_\varphi = u_\varphi(r,\varphi)$, соответствующих движению точки по кривой

$$r - \rho(\varphi) = 0 \tag{27}$$

при начальных условиях $r(t_0) = r_0$, $\varphi(t_0) = \varphi_0$, $v(t_0) = v_0$, $\omega(t_0) = \omega_0$, $r_0 = \rho(\varphi_0)$, $v_0 = \rho'(\varphi_0)\omega_0$.

Из выражения $\alpha = r - \rho(\varphi)$ следуют значения

$$\beta = v - \rho'\omega, \quad \rho' = \frac{\partial\rho(\varphi)}{\partial\varphi} \tag{28}$$

$$\dot\beta = \dot v - \rho''\omega^2 - \rho'\dot\omega, \quad \rho'' = \frac{\partial^2\rho(\varphi)}{\partial\varphi^2}. \tag{29}$$

Составим уравнения (8) в виде линейной системы

$$\dot\alpha = \beta, \quad \dot\beta = -c\alpha - k\beta, \quad c = c_0 + c_v v + c_\omega\omega, \quad k = k_0 + k_v v + k_\omega\omega, \tag{30}$$

в которой коэффициенты c_0, c_v, c_ω, k_0, k_v, k_ω зависят только от координат r, φ.

Равенство (28) составляет одно уравнение с двумя неизвестными v, ω. Его общее решение

$$v = \lambda\rho' + \mu\beta, \quad \omega = \lambda - \mu\rho'\beta, \quad \mu = \frac{1}{1+(\rho')^2}, \tag{31}$$

содержит произвольную величину λ, которую будем полагать функцией координат r, φ.

Подставив выражения (25), (26), (30) и (31) в равенство (29), получим уравнение, которому должны удовлетворять выражения управляющих сил u_r, u_φ:

$$u_r - \frac{\rho'}{r}u_\varphi = \alpha, \quad \alpha = \alpha_0(r,\varphi) + \alpha_1(r,\varphi)\beta + \alpha_2(r,\varphi)\beta^2, \tag{32}$$

$$\alpha_0(r,\varphi) = c_0\alpha - f_0 + \lambda\left((c_1 + c_2\rho')\,\alpha - f_v\rho' - f_\omega\right) - \\ - \lambda^2\left(r + 2f_{v\omega}\rho' + f_{\omega\omega} + (\rho')^2\left(f_{vv} + \frac{2}{r}\right)\right), \tag{33}$$

$$\alpha_1(r,\varphi) = k_0 + \lambda\,(k_1 + \rho' k_2) + \mu\,((c_2 - \rho' c_1)\,\alpha + 2\lambda\rho' - (f_v - \rho' f_\omega)) - \\ - 2\lambda\mu\left(\rho'\,(f_{vv} - f_{\omega\omega}) + \left(1 - (\rho')^2\right)\left(f_{v\omega} + \frac{\rho'}{r}\right)\right), \quad (34)$$

$$\alpha_2(r,\varphi) = \mu\,(k_2 - \rho' k_1) - \mu^2\left((\rho')^2\left(r + f_{\omega\omega} - \frac{2}{r}\right) + f_{vv} - 2\rho' f_{v\omega}\right). \quad (35)$$

Уравнение (32) имеет решение

$$u_1 = \frac{\rho'}{r}u + \frac{r^2}{r^2 + (\rho')^2}\alpha, \quad u_\varphi = u - \frac{\rho' r}{r^2 + (\rho')^2}\alpha, \quad (36)$$

где u произвольная функция. Из выражений (32), (36) видно, что управляющие силы u_r, u_φ являются позиционными, если коэффициенты $\alpha_1(r,\varphi)$, $\alpha_2(r,\varphi)$ окажутся тождественно равными нулю. Из равенств (34), (35) следует, что этого всегда можно добиться, подбирая соответствующим образом произвольные величины λ, k_0, k_1, k_2, c_0, c_1, c_2.

5. Заключение

Построение уравнений динамики механической системы с учётом движений изображающей точки вдоль заданной кривой и в её окрестности показало, что движение по кривой можно сделать устойчивым. Неоднозначность решения задачи определения управляющих сил позволяет выбрать их из множества заданной структуры. В частности, из выражений функций управления могут быть исключены обобщённые скорости системы.

Литература

1. *Bertrand M. J.* Sur la possibilite de deduire d'une seule des lois de Kepler le principe de l'attraction // Comptes Rendues. — 1877.
2. *Darboux M. G.* Recherche de la loi que doit suivre une force centrale pour que la trajectoire quelle determine soit toujours une conique // Comptes rendues. — 1877. — Vol. LXXXIV, No 16. — Pp. 760–762.
3. *Имшенецкий В. Г.* Определение силы, движущей по коническому сечению материальную точку, в функции ее координат // Сообщения Харьковского математического общества. — 1879. — Т. 1. [*Imsheneckiyj V. G.* Opredelenie silih, dvizhutheyj po konicheskomu secheniyu materialjnuyu tochku, v funkcii ee koordinat // Soobtheniya Kharjkovskogo matematicheskogo obthestva. — 1879. — T. 1.]
4. *Суслов Г. К.* О силовой функции, допускающей данные интегралы. — Киев: изд. Киевского ун-та, 1890. [*Suslov G. K.* O silovoyj funkcii, dopuskayutheyj dannihe integralih. — Kiev: izd. Kievskogo un-ta, 1890.]
5. *Галиуллин А. С.* Методы решения обратных задач динамики. — М.: Наука, 1986. [*Galiullin A. S.* Metodih resheniya obratnihkh zadach dinamiki. — M.: Nauka, 1986.]
6. *Еругин Н. П.* Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // Прикладная математика и механика. — 1952. — Т. 21, № 6. — С. 659–670. [*Erugin N. P.* Postroenie vsego mnozhestva sistem differencialjnihkh uravneniyj, imeyuthikh zadannuyu integraljnuyu krivuyu // Prikladnaya matematika i mekhanika. — 1952. — T. 21, No 6. — S. 659–670.]
7. *Мухарлямов Р. Г.* О построении множества систем дифференциальных уравнений устойчивого движения по интегральному многообразию // Дифференц. уравнения. — 1969. — Т. 5, № 4. — С. 688–699. [*Mukharlyamov R. G.* O postroenii

mnozhestva sistem differencialjnihkh uravneniyj ustoyjchivogo dvizheniya po integraljnomu mnogoobraziyu // Differenc. uravneniya. — 1969. — T. 5, No 4. — S. 688–699.]

8. *Мухарлямов Р. Г.* О построении дифференциальных уравнений оптимального движения по заданному многообразию // Дифференц. уравнения. — 1971. — Т. 7, № 10. — С. 1825–1834. [*Mukharlyamov R. G.* O postroenii differencialjnihkh uravneniyj optimaljnogo dvizheniya po zadannomu mnogoobraziyu // Differenc. uravneniya. — 1971. — T. 7, No 10. — S. 1825–1834.]

UDC 517.93,518:512.34

Control of Motion along a Specified Curve and Inverse Problem of Dynamics

R. G. Mukharlyamov[*], N. V. Abramov[†]

[*] *Department of Theoretical Mechanics*
Peoples' Friendship University of Russia
Miklukho–Maklaya str. 6, Moscow, 117198, Russia
[†] *Department of Economical Informatics*
Samara State University of Architecture and Civil Engineering
Molodogvardejsky str., 194, Samara, 443001, Russia

The article deals with the problem of control over mechanical system motion along a specified curve in state space. The conditions of motion stability along a specified curve in coordinate space are determined. The constructing techniques of control forces, depending on the coordinates of mechanical system, are viewed in the article. Moreover, the solving of the problem of control over particles motions in the central field of forces is performed.

Key words and phrases: mechanical system, dynamics, stability, constraints, control, motion, generalized coordinate.