УДК 517.51

Достаточные условия разрешимости функционально-дифференциального уравнения с ортотропными сжатиями в весовых пространствах

А. Л. Тасевич

Кафедра прикладной математики
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198

В данной работе исследуется разрешимость одного функционально-дифференциального уравнения в шкале весовых пространств Кондратьева. Уравнение рассматривается на вещественной плоскости, имеет постоянные коэффициенты и содержит преобразование аргументов искомой функции, причем это преобразование состоит в сжатии одного и растяжении другого аргумента. Такие преобразования мы называем ортотропными сжатиями. Показано, что рассматриваемая задача сводится к обратимости разностного оператора на прямой с переменными гладкими коэффициентами, стабилизирующимися на бесконечности. Получены достаточные условия обратимости разностного оператора и исходного функционально-дифференциального оператора в алгебраическом виде.

Хорошо известно, что свойства функционально-дифференциальных уравнений во многом определяются структурой орбит точек области под действием группы, порожденной присутствующими в уравнении преобразовании. Для изотропных сжатий орбиты располагаются на лучах, выходящих из начала координат, и сгущаются в начале координат — неподвижной точке оператора. В случае если по одной координате происходит сжатие, а по другой растяжение, орбиты находятся на линиях, имеющих вид гипербол. При этом начало координат по-прежнему является неподвижной точкой. Поэтому естественно предположить, что задачи с ортотропными сжатиями по своим свойствам и методам исследования отличаются от задач с изотропными сжатиями.

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения, весовые пространства, оператор взвешенного сдвига, ортотропные сжатия, разностные уравнения.

Введение

Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение

$$A_R u(x_1,x_2) = -\sum_{i,j=1}^{2} \left(R_{ij} u_{x_i}\right)_{x_j} = f(x_1,x_2), \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{1}$$

где R_{ij}, $i,j = 1,2$, являются операторами взвешенного ортотропного сжатия и задаются следующей формулой

$$R_{ij}v(x) = a_{ij0}v(x) + a_{ij1}v(q^{-1}x_1, px_2) + a_{ij,-1}v(qx_1, p^{-1}x_2),$$

коэффициенты $a_{ijk} \in \mathbb{C}$, $i,j = 1,2$, $k = 0, \pm 1$. Здесь $p, q > 1$, т.е. имеется растяжение по одной переменной и сжатие по другой.

Основным результатом данной статьи является исследование разрешимости уравнения (1) в шкале весовых пространств $H_0^s\left(\mathbb{R}^2\right)$. Поэтому $f \in H_0^s\left(\mathbb{R}^2\right)$.

Согласно определению В.А. Кондратьева [1] весовым пространством $H_0^s\left(\mathbb{R}^2\right)$ при целом неотрицательном s называется пополнение множества $C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ по

Статья поступила в редакцию 10 октября 2015 г.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, задание №1.1974.2014/K «Краевые задачи для функционально-дифференциальных уравнений с частными производными».

норме

$$\|u\|_{H_0^s(\mathbb{R}^2)} = \left(\sum_{|\alpha|\leqslant s} \int_{\mathbb{R}^2} |x|^{2(-s+|\alpha|)} |D^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \qquad (2)$$

Очевидно, уравнение порождает ограниченный оператор из $H_0^{s+2}\left(\mathbb{R}^2\right)$ в $H_0^s\left(\mathbb{R}^2\right)$. Под однозначной разрешимостью уравнения (1) мы будем понимать существование ограниченного обратного оператора.

Содержание работы можно разбить на три части. В первой части исходное уравнение (1) приводится при помощи ряда преобразований к разностному уравнению на прямой

$$\gamma_0(\tau)v(\tau) + \gamma_1(\tau)v(\tau - h) + \gamma_2(\tau)v(\tau - 2h) = g(\tau), \qquad \tau \in \mathbb{R}. \qquad (3)$$

Разрешимость уравнений с операторами взвешенного сдвига исследовалась в работах многих авторов, в том числе [2, 3]. Однако, необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения вида (3), напрямую выраженные через коэффициенты γ_0, γ_1 и γ_2, не были получены. Исследованию разрешимости разностных уравнений с переменными коэффициентами на прямой посвящена вторая часть работы. В последней части получены достаточные условия разрешимости уравнения (1) в явном виде. При этом в условиях фигурирует показатель веса, чье изменение имеет существенное влияние.

В настоящей работе мы исследуем разрешимость в весовых пространствах, введенных В.А. Кондратьевым для исследования эллиптических задач в областях с угловыми и коническими точками [1]. Оказалось естественным исследовать разрешимость в этих же пространствах краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений, имеющих степенные особенности решений как на границе, так и внутри области. Например, краевые задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений были решены в весовых пространствах в [4, 5]. При этом для функционально-дифференциальных уравнений со сжатием эффект появления особенностей дополнительно связан с наличием в области неподвижной точки у преобразования сжатия. В работе [6] установлена разрешимость в шкале весовых пространств функционально-дифференциальных уравнений с изотропными сжатиями и показано, что путем выбора параметров пространства можно всегда добиться однозначной разрешимости. Исследование функционально-дифференциальных уравнений с ортотропными сжатиями впервые было проведено в [7], где были получены результаты о сильной эллиптичности, разрешимости первой краевой задачи и структуре спектра.

1. Основной результат

Зафиксировав числа $p > 1$, $q > 1$, введем ограниченный линейный оператор P в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$ по формуле

$$Pu(x_1, x_2) = u(q^{-1}x_1, px_2).$$

Понятно, что

$$P^{-1}u(x_1, x_2) = u(qx_1, p^{-1}x_2), \quad P^* = qp^{-1}P^{-1},$$

а в образах Фурье оператор P заменяется на P^*,

$$\tilde{u}(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)} u(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2, \quad \widetilde{Pu}(\xi_1, \xi_2) = P^* u(\xi_1, \xi_2).$$

Ясно также, что спектр $\sigma(P)$ оператора $P: L_2(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2)$ лежит на окружности $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = \sqrt{q/p}\}$. Можно показать аналогично [8], что $\sigma(P)$ совпадает с указанной окружностью.

Применив преобразование Фурье к уравнению (1), получим

$$\left(a_{110}\tilde{u} + a_{111}\frac{q^2}{p}P^{-1}\tilde{u} + a_{11,-1}\frac{p}{q^2}P\tilde{u}\right)\xi_1^2 +$$
$$\left((a_{120}+a_{210})\tilde{u} + \left(a_{121}q + a_{211}\frac{1}{p}\right)\frac{q}{p}P^{-1}\tilde{u} + \left(a_{12,-1}\frac{1}{q} + a_{21,-1}p\right)\frac{p}{q}P\tilde{u}\right)\xi_1\xi_2 +$$
$$+\left(a_{220}\tilde{u} + a_{221}\frac{q}{p^2}P^{-1}\tilde{u} + a_{22,-1}\frac{p^2}{q}P\tilde{u}\right)\xi_2^2 = \tilde{f}. \quad (4)$$

Как следует из результатов [9, Глава 2, параграф 2], преобразование Фурье при $s \notin \mathbb{Z}$ осуществляет изоморфизм весовых пространств

$$F_s : H_0^s\left(\mathbb{R}^2\right) \to H_s^0\left(\mathbb{R}^2\right), \quad s \notin \mathbb{Z}.$$

Всюду далее в работе мы считаем, что $s \notin \mathbb{Z}$. Норма в пространстве $H_s^0\left(\mathbb{R}^2\right)$ задается следующей формулой

$$\|u\|_{H_s^0(\mathbb{R}^2)} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} |x|^{2s}|u(x)|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Замечание 1. Отметим, что функции, обращающиеся в нуль во всех четвертях плоскости $\mathbb{R}^2_\xi$, кроме одной, образуют инвариантное подпространство оператора P. Поэтому уравнение (4) на всей плоскости $\mathbb{R}^2_\xi$ распадается на четыре независимых уравнения в каждой из четвертей. Заменой $\xi_1\,(\xi_2)$ на $-\xi_1\,(-\xi_2)$ можно свести каждое из этих уравнений к уравнениям в первой четверти $\mathbb{R}^2_I$:

$$\left(a_{110}\tilde{u} + a_{111}\frac{q^2}{p}P^{-1}\tilde{u} + a_{11,-1}\frac{p}{q^2}P\tilde{u}\right)\xi_1^2 \pm$$
$$\pm\left((a_{120}+a_{210})\tilde{u} + \left(a_{121}q + a_{211}\frac{1}{p}\right)\frac{q}{p}P^{-1}\tilde{u} + (a_{12,-1}\frac{1}{q} + a_{21,-1}p)\frac{p}{q}P\tilde{u}\right)\xi_1\xi_2 +$$
$$+\left(a_{220}\tilde{u} + a_{221}\frac{q}{p^2}P^{-1}\tilde{u} + a_{22,-1}\frac{p^2}{q}P\tilde{u}\right)\xi_2^2 = \tilde{f}. \quad (5)$$

Орбиты точек плоскости, порожденные действием оператора P, располагаются на «гиперболах»

$$|\xi_1|^{\ln p}|\xi_2|^{\ln q} = \text{const}.$$

Этим мотивируется следующая замена переменных

$$\xi_1 = \rho t^{s_1}, \quad \xi_2 = \rho t^{-s_2}, \qquad \xi_1 > 0,\ \xi_2 > 0,$$

$$\rho = \sqrt{\xi_1^{s_2}\xi_2^{s_1}}, \quad t = \sqrt{\xi_1/\xi_2}, \qquad \rho > 0,\ t > 0,$$

где

$$s_1 = \frac{2\ln q}{\ln pq}, \quad s_2 = \frac{2\ln p}{\ln pq} \quad (s_1 + s_2 = 2).$$

В новых переменных указанные кривые приобретают вид координатных линий

$$\rho = \text{const},$$

а оператору P соответствует сжатие только по координате t. Действительно, если

$$\tilde{u}(\xi_1, \xi_2) = \tilde{u}(\rho t^{s_1}, \rho t^{-s_2}) = \hat{u}(\rho, t) = \hat{u}\left(\sqrt{\xi_1^{s_2}\xi_2^{s_1}}, \sqrt{\xi_1/\xi_2}\right),$$

то

$$P\tilde{u}(\xi_1, \xi_2) = \tilde{u}(q^{-1}\xi_1, p\xi_2) = \hat{u}\left(\sqrt{(q^{-1}\xi_1)^{s_2}(p\xi_2)^{s_1}}, \sqrt{(q^{-1}\xi_1)/(p\xi_2)}\right) = \hat{u}(\rho, (pq)^{-1/2}t),$$

поскольку $p^{s_1/2}q^{-s_2/2} = 1$. Переобозначим функцию в правой части

$$\tilde{f}(\xi_1, \xi_2) = \tilde{f}(\rho t^{s_1}, \rho t^{-s_2}) = \hat{f}(\rho, t).$$

Далее положим $t = e^\tau$ $(-\infty < \tau < +\infty)$ и $\hat{u}(\rho, t) = \hat{u}(\rho, e^\tau) = w(\rho, \tau) = w(\rho, \ln t)$, а также $\hat{f}(\rho, t) = g(\rho, \tau)$. Тогда

$$\hat{u}(\rho, (pq)^{-1/2}t) = w(\rho, \ln\Big((pq)^{-1/2}t\Big)) = w(\rho, \tau - \ln\sqrt{pq}),$$

т.е. в результате сделанных преобразований оператор P становится оператором сдвига T по переменной $\tau \in \mathbb{R}$,

$$Tw(\rho, \tau) = w(\rho, \tau - \ln\sqrt{pq}), \quad T^{-1}w(\rho, \tau) = w(\rho, \tau + \ln\sqrt{pq}).$$

Перейдем к новым переменным также в равенстве, определяющем норму пространства $H_s^0\left(\mathbb{R}_I^2\right)$.

Определение 1. Через K^s обозначим множество измеримых функций в $\mathbb{R}_+^2 = \{(\rho, \tau) \in \mathbb{R}^2 : \rho > 0\}$, для которых конечен интеграл

$$\|w\|_{K^s} := \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty} 2\rho^{2s+1}e^{\tau(s_1-s_2)}\left(e^{2s_1\tau} + e^{-2s_2\tau}\right)^s |w(\rho, \tau)|^2 d\rho d\tau\right)^{1/2}. \tag{6}$$

Замечание 2. Норма (6) получена в результате указанных выше преобразований из нормы пространства $H_s^0(\mathbb{R}_I^2)$, $s \notin \mathbb{Z}$, т.е. $\|\tilde{u}\|_{H_s^0(\mathbb{R}_I^2)} = \|w\|_{K^s}$.

Введем следующие обозначения

$$\alpha_{-1}(\tau) = a_{111}\frac{q^2}{p}e^{2s_1\tau} \pm \left(a_{121}q + a_{211}\frac{1}{p}\right)\frac{q}{p}e^{(s_1-s_2)\tau} + a_{221}\frac{q}{p^2}e^{-2s_2\tau},$$
$$\alpha_0(\tau) = a_{110}e^{2s_1\tau} \pm (a_{120} + a_{210})\, e^{(s_1-s_2)\tau} + a_{220}e^{-2s_2\tau},$$
$$\alpha_1(\tau) = a_{11,-1}\frac{p}{q^2}e^{2s_1\tau} \pm \left(a_{12,-1}\frac{1}{q} + a_{21,-1}p\right)\frac{p}{q}e^{(s_1-s_2)\tau} + a_{22,-1}\frac{p^2}{q}e^{-2s_2\tau}$$

и сформулируем промежуточный результат.

Лемма 1. *Уравнение* (1) *имеет единственное решение* $u \in H_0^{s+2}\left(\mathbb{R}^2\right)$ *при любой функции* $f \in H_0^s\left(\mathbb{R}^2\right)$, $s \notin \mathbb{Z}$, *тогда и только тогда, когда уравнение*

$$\rho^2\left(\alpha_0(\tau)w(\rho, \tau) + \alpha_{-1}(\tau)T^{-1}w(\rho, \tau) + \alpha_1(\tau)Tw(\rho, \tau)\right) = g(\rho, \tau) \tag{7}$$

имеет единственное решение $w \in K^{s+2}$ *при любой функции* $g \in K^s$.

Для краткости записи обозначим $e(\tau) = e^{2s_1\tau} + e^{-2s_2\tau}$ и $h = \ln\sqrt{pq}$.

Можно переписать уравнение (7) следующим образом

$$\rho^2 e(\tau)T^{-1}\left[\gamma_0(\tau)I + \gamma_1(\tau)T^1 + \gamma_2(\tau)T^2\right]\left(e^{\tau(s_1-s_2)/2}\left(e(\tau)\right)^{s/2} w(\rho,\tau)\right) = \\ = \left(e^{\tau(s_1-s_2)/2}\left(e(\tau)\right)^{s/2} g(\rho,\tau)\right), \quad (8)$$

где

$$\gamma_0(\tau) = \frac{\alpha_{-1}(\tau-h)}{e(\tau-h)},$$

$$\gamma_1(\tau) = \frac{\alpha_0(\tau-h)\sqrt{q/p}e^{s/2}(\tau)}{e^{s/2+1}(\tau-h)}, \quad \gamma_2(\tau) = \frac{\alpha_1(\tau-h)(q/p)e^{s/2}(\tau)}{e(\tau-h)e^{s/2}(\tau-2h)}.$$

Обратим внимание на то, что принадлежность функций $w(\rho,\tau)$ и $g(\rho,\tau)$ пространствам K^{s+2} и K^s, соответственно, означает, что при почти всех $\rho > 0$ $e^{\tau(s_1-s_2)/2}\left(e(\tau)\right)^{s/2} w(\rho,\tau)$ и $e^{\tau(s_1-s_2)/2}\left(e(\tau)\right)^{s/2} g(\rho,\tau)$ как функции переменного τ являются элементами пространства $L_2(\mathbb{R})$.

Учитывая то, что оператор $\rho^2 e(\tau)T^{-1}$ есть изоморфизм K^{s+2} на K^s и что коэффициенты γ_i, $i = 0,1,2$, зависят только от τ, вопрос об обратимости оператора $B : K^{s+2} \to K^s$ сводится к вопросу об обратимости оператора

$$B_0 = \gamma_0 I + \gamma_1 T^1 + \gamma_2 T^2 : L_2(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2). \quad (9)$$

Обратим внимание на то, что получившиеся коэффициенты γ_i, $i = 0,1,2$ стабилизируются на бесконечности, т. е. существуют конечные пределы

$$\begin{gathered} \lim_{\tau\to+\infty}\gamma_0(\tau) = a_{111}\frac{q^2}{p}, \\ \lim_{\tau\to+\infty}\gamma_1(\tau) = a_{110}\sqrt{\frac{q}{p}}q^s, \quad \lim_{\tau\to+\infty}\gamma_2(\tau) = a_{11,-1}q^{2s-1}, \\ \lim_{\tau\to-\infty}\gamma_0(\tau) = a_{221}\frac{q}{p^2}, \\ \lim_{\tau\to-\infty}\gamma_1(\tau) = a_{220}\sqrt{\frac{q}{p}}p^{-s}, \quad \lim_{\tau\to-\infty}\gamma_2(\tau) = a_{22,-1}p^{-2s+1}, \end{gathered} \quad (10)$$

причем сходимость к этим пределам экспоненциальная.

Условие 1. *Одним из основных условий на коэффициенты рассматриваемого уравнения является условие отделимости от нуля коэффициента при операторе* T *или при* T^{-1}. *Для этих двух случаев нет никаких принципиальных различий в дальнейших рассуждениях, поэтому будем считать, что* $\alpha_{-1}(\tau) \neq 0$, $\forall\tau \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$.

Сопоставим оператору B_0 функцию

$$b_0(\tau,\lambda) := \sum_{j=0}^{2}\gamma_j(\tau)\lambda^j \quad (\tau\in\overline{\mathbb{R}},\ \lambda\in\mathbb{C}). \quad (11)$$

Тогда условие 1 можно записать как

$$b_0(\tau,0) \neq 0, \quad \tau\in\overline{\mathbb{R}}. \quad (12)$$

Теорема 1. *Предположим, что выполнено условие* (12) *и, кроме того,*

$$b_0(\pm\infty,\lambda) := \sum_{j=0}^{2} \gamma_j(\pm\infty)\lambda^j \neq 0 \quad (|\lambda| \leqslant 1). \tag{13}$$

Тогда существует ограниченный обратный оператор $B_0^{-1} : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$.

Доказательство состоит из двух шагов. На первом шаге рассматривается ограничение уравнения $B_0 v = z \in L_2(\mathbb{R})$ на полупрямую $I_- = (-\infty, N)$, где N — произвольное число. Строится обратный ограниченный оператор с нормой, не зависящей от N. После этого найденное на I_- решение однозначно продолжается на $I_+ = (N, +\infty)$ функцией $v \in L_2(\mathbb{R})$, являющейся решением уравнения на всей прямой.

Подставим теперь в выражение из (13) значения $\gamma_i(\pm\infty)$, $i = 0, 1, 2$. Тогда получим достаточное условие разрешимости уравнения (1) в пространстве Кондратьева $H_0^s(\mathbb{R}^2)$.

Теорема 2. *Пусть для оператора* $A_R : H_0^{s+2}(\mathbb{R}^2) \to H_0^s(\mathbb{R}^2)$ *из* (1) *выполнены условия*

$$a_{111}pqe^{2s_1\tau} \pm (a_{121}pq + a_{211})\, e^{(s_1-s_2)\tau} + a_{221}e^{-2s_2\tau} \neq 0 \quad \left(\tau \in \overline{\mathbb{R}}\right); \tag{14}$$

$$a_{111} + a_{110}\lambda + a_{11,-1}\lambda^2 \neq 0 \quad (|\lambda| \leqslant \sqrt{p/q}\,q^{s-1}); \tag{15}$$

$$a_{221} + a_{220}\lambda + a_{22,-1}\lambda^2 \neq 0 \quad (|\lambda| \leqslant \sqrt{p/q}\,p^{-s+1}). \tag{16}$$

Тогда существует ограниченный обратный оператор A_R^{-1}.

Действительно, условие (14) совпадает с (12), а соотношения (13) с учетом (10) примут вид

$$a_{111}\frac{q^4}{p} + a_{110}\sqrt{\frac{q^4}{p}}\,q^{s+1/2}\lambda + a_{11,-1}q^{2s+1}\lambda^2 \neq 0 \quad (|\lambda| \leqslant 1),$$

$$a_{221}\frac{q}{p^4} + a_{220}\sqrt{\frac{q}{p^4}}\,p^{-s-1/2}\lambda + a_{22,-1}p^{-2s-1}\lambda^2 \neq 0 \quad (|\lambda| \leqslant 1).$$

Сделав замену $\tilde{\lambda} = \sqrt{p/q}\,q^{s-1}\lambda$ в первом выражении и $\hat{\lambda} = \sqrt{p/q}\,p^{-s+1}\lambda$ во втором, мы приходим к условиям (15) и (16).

Замечание 3. Важным результатом является наличие параметра s в условии разрешимости уравнения (1). Увеличение этого параметра позволяет нам ослабить условие на коэффициенты a_{22k}, $k = 0, \pm 1$: уменьшается круг, где не должны лежать корни выражения в (16). Но в то же время ужесточаются условия на коэффициенты a_{11k}, $k = 0, \pm 1$, т. к. увеличивается круг, где выражение из (15) не должно обращаться в ноль.

Замечание 4. Обратим внимание на то, что коэффициенты при смешанных производных входят лишь в условие (14), которое является значительно менее ограничительным по сравнению с (15) и (16).

Замечание 5. Условие 1 можно заменить на аналогичное для функции $\alpha_1(\tau)$:

$$a_{11,-1}e^{2s_1\tau} \pm (a_{12,-1} + a_{21,-1}pq)\, e^{(s_1-s_2)\tau} + a_{22,-1}pqe^{-2s_2\tau} \neq 0 \quad \left(\tau \in \overline{\mathbb{R}}\right).$$

При этом условия теоремы (15) и (16) останутся теми же.

2. Заключение

В работе получены достаточные условия разрешимости функционально-дифференциального уравнения, содержащего преобразования ортотропного сжатия аргументов искомой функции, в шкале весовых пространств Кондратьева, причем условия имеют конструктивный характер.

Литература

1. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. ММО. — 1967. — № 16. — С. 209–292.
2. *Антоневич А. Б.* Линейные функциональные уравнения: операторный подход. — Мн.: Университетское, 1988.
3. *Антоневич А. Б., Ахматова А. А.* Спектральные свойства дискретного оператора взвешенного сдвига // Тр. Ин-та матем. — 2012. — Т. 20, № 1. — С. 14–21.
4. *Скубачевский А. Л.* Эллиптические задачи с нелокальными условиями вблизи границы // Математический сборник. — 1986. — Т. 129(171), № 2. — С. 279–302.
5. *Skubachevskii A. L.* Elliptic Functional Differential Equations and Applications // Operator Theory: Advances and Applications. — Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 1997. — Vol. 91.
6. *Россовский Л. Е.* Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргумертов неизвестной функции // СМФН. — 2014. — № 54. — С. 3–138.
7. *Россовский Л. Е., Тасевич А. Л.* Первая краевая задача для сильно эллиптического функционально-дифференциального уравнения с ортотропными сжатиями // Математические заметки. — 2015. — Т. 97, № 5. — С. 733–748.
8. *Россовский Л. Е.* Коэрцитивность функционально-дифференциальных уравнений // Математические заметки. — 1996. — Т. 59, № 1. — С. 103–113.
9. *Пламеневский Б. А.* Алгебры псевдодифференциальных операторов. — М.: Наука, 1986.

UDC 517.51

Sufficient Conditions of Solvability of a Functional Differential Equation with Orthotropic Contractions in Weighted Spaces

A. L. Tasevich

Applied Mathematics Department
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, Russia, 117198

In this paper the solvability of a functional-differential equation is studied in the scale of Kondrat'ev weighted spaces. The equation is considered in the real plane, it has constant coefficients and transformations of arguments of required function, and this transformation consists in the contraction of one argument and the expansion of another. These transformations are called by orthotropic contractions here. The considered problem boils down to an invertibility of a difference operator on the real line with variable smooth coefficients stabilized in the infinity. Sufficient conditions of the invertibility of the difference operator and the initial functional differential operator were obtained in algebraic form.

It is well-known that the properties of functional differential equations are largely defined by the structure of point orbits under the action of a group generated by transformations attended in the equation. The orbits of isotropic contractions are situated on the rays passing through the origin and condense near the origin "— a fixed point of the operator. In case of contraction of one argument and expansion of another the orbits are situated on curves having a form of hyperbolas. Herewith the origin is a fixed point of the operator as before.

Therefore it is natural to assume that problems with orthotropic contractions differ in their properties and analysis methods from problems with isotropic contractions.

Key words and phrases: functional-differential equations, Kondrat'ev weighted spaces, weighted shift operator, orthotropic contractions, difference equations.

References

1. V. A. Kondrat'ev, Boundary Value Problems for Elliptic Equations in Domains with Conical or Angular Points, Tr. Mosk. Mat. Obs. (16) (1967) 209–292, in Russian.
2. A. B. Antonevich, Linear Functional Equations. Operator Approach, Vol. 83, Birkhäuser, Basel, 1996.
3. A. B. Antonevich, A. A. Akhmatova, Spectral Properties of Discrete Weighted Shift Operators, Tr. Inst. Mat. 20 (1) (2012) 14–21, in Russian.
4. A. L. Skubachevskii, Elliptic Problems with Nonlocal Conditions Near the Boundary, Mathematics of the USSR-Sbornik 1 (57) (1987) 293–316.
5. A. L. Skubachevskii, Elliptic Functional Differential Equations and Applications, Vol. 91, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 1997.
6. L. E. Rossovskii, Coerciveness of Functional-Differential Equations, Math. Notes 59 (1) (1996) 75–82.
7. L. E. Rossovskii, A. L. Tasevich, The First Boundary-Value Problem for Strongly Elliptic Functional-Differential Equations with Orthotropic Contractions, Math. Notes 5 (97) (2015) 745–758.
8. B. A. Plamenevskii, Algebras of Pseudodifferential Operators, Nauka, Moscow, 1986, in Russian.