К ВОПРОСУ О НАХОЖДЕНИИ РАЗВЕРНУТЫХ ВЫРАЖЕНИЙ В АНАЛИТИЧЕСКОМ РАСЧЕТЕ ТОРСА-ГЕЛИКОИДА

А.К. БАЛОВ, *студент*
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

В статье показаны некоторые проблемы, возникающие при нахождении развернутых выражений для определения векторных коэффициентов, входящих в выражения параметров перемещений при аналитическом расчете торса-геликоида по методу малого параметра.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: аналитический расчет, торс-геликоид, напряженно-деформированное состояние, метод малого параметра.

Геликоидальные оболочки широко востребованы в современной архитектуре (Рис. 1). Существуют разные расчетные программы, вычислительные функции которых, основаны на методе конечных элементов, которые и используются в наше время на практике для расчета геликоидальных оболочек. Однако аналитические методы позволяют проводить более углубленный анализ состояния геликоидов. Данный вопрос является актуальным, а аналитические методы расчета геликоидальных оболочек нуждаются в совершенствовании.

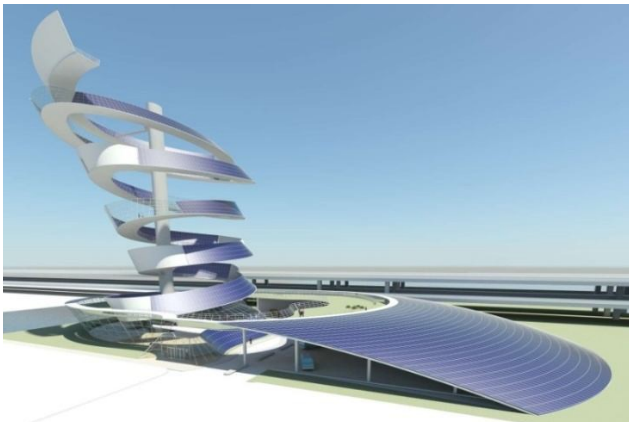

Рис.1. Проект Архитекторов из бюро ShortList_0 Design Group LLC под названием «Солнечная спираль».

В 1992 году появились работы [1], [2], в которых изучается напряженно-деформированное состояние упругих оболочек в форме торсов-геликоидов с параметрическими уравнениями срединной поверхности.

$$x = x(u, s) = a\cos\frac{s}{т} - \frac{аи}{т}\sin\frac{s}{т},\ y = y(u, s) = a\sin\frac{s}{т} + \frac{аи}{т}\cos\frac{s}{т},$$

$$z = z(u, s) = (s + u)\frac{Ь}{т}.$$

 222

где $\tau = \sqrt{a^2 + b^2}$, $s = \mathrm{const}$ - прямолинейные образующие, касательные к кривой (1.3), линии $u = \mathrm{const}$ являются винтовыми на круговом цилиндре с радиусом $r = a\sqrt{1 + \frac{u^2}{a^2 + b^2}}$ и имеют тот же шаг $2\pi b$, что и ребро возврата (2)

$$x = a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ y = a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ z = \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Внутренние силовые факторы принимаются в виде N_u^*, N_v^*, S_u^*, S_v^*, Q_u^*, Q_v^*, M_u^*, M_v^*, H_{uv}^*, H_{vu}^*.

Для указанных условий была получена система трех дифференциальных уравнений (1), (2), (3)

$$\left(a^2 + \frac{1-\nu}{2}\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial a^2} - \frac{1-\nu}{2}\left(B^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial a^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial\beta^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial\beta^2}\right) + \left(1 - \nu - \frac{1+\nu}{2}a^2\right)\frac{\partial^2 u_2}{\partial a\partial\beta} - (1-\nu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial a\partial\beta} + \frac{1-\nu}{2a}\frac{\partial u_1}{\partial\beta} + \left(a - \frac{1-\nu}{2a}\right)\frac{\partial u_1}{\partial a} + \frac{1-\nu}{2}\left(\frac{1}{a} - 3a\right)\frac{\partial u_2}{\partial a} + (1-\nu)\left(a - \frac{1}{2a}\right)\frac{\partial u_2}{\partial\beta} - u_1 - \mu\nu a\frac{\partial w}{\partial a} + \mu w + \frac{a\tau}{c}\left(X + \frac{Y}{B}\right) = 0. \qquad (1)$$

$$\frac{1-\nu}{2}\left(B^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial\beta^2} - B^4\frac{\partial^2 u_2}{\partial a^2}\right) - \left(a^2 + \frac{1-\nu}{2}\right)\frac{\partial^2 u_2}{\partial\beta^2} + (1-\nu)B^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial a\partial\beta} + \left(\nu - 1 + \frac{1+\nu}{2}a^2\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial a\partial\beta} + \left(\frac{1-\nu}{2}\frac{B^2}{a} + a\right)\frac{\partial u_1}{\partial\beta} - \frac{1-\nu}{2}\frac{B^2}{a}\frac{\partial u_1}{\partial a} + \frac{1-\nu}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right)\frac{\partial u_2}{\partial\beta} + \mu(1-\nu)a\frac{\partial w}{\partial a} - \mu a\frac{\partial w}{\partial\beta} - \frac{ba}{\tau^2 c}S^* + \frac{a\tau}{c}(BY + X) = 0, . \qquad (2)$$

где
$$S^* = -\frac{D}{a\tau^2}\Big[\frac{B^2}{a^2}\frac{\partial^3 w}{\partial a^3} - \left(1 + \frac{3}{a^2}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial a^2\partial\beta} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^3 w}{\partial a^3} + \frac{3}{a^2}\frac{\partial^3 w}{\partial a\partial\beta^2} + \left(\frac{1}{a} - \frac{3}{a^3}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial a^2} + \left(\frac{6}{a^3} - \frac{1}{a}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial a\partial\beta} + \frac{3}{a^3}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} + \left(\frac{3}{a^4} - \frac{1}{a}\right)\frac{\partial w}{\partial a} - \frac{3}{a^4}\frac{\partial w}{\partial\beta} + \frac{\mu}{a}\frac{\partial^2 u_2}{\partial\beta^2} + \mu\left(\frac{B}{a} - \nu a\right)\frac{\partial^2 u_2}{\partial a^2} - \frac{2\mu}{a}\frac{\partial^2 u_2}{\partial a\partial\beta} + \frac{\mu}{a^2}\frac{\partial u_2}{\partial\beta} + \mu\left(2 - 2\nu - \frac{1}{a^2}\right)\frac{\partial u_2}{\partial a}\Big],$$

$$-\frac{B^4}{a^3}\frac{\partial^4 w}{\partial a^4} + \frac{4B^2}{a^3}\frac{\partial^4 w}{\partial a\partial\beta^3} - \left(\frac{6}{a^3} + \frac{2}{a}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial a^2\partial\beta^2} - \frac{6}{a^4}\frac{\partial^3 w}{\partial\beta^3} - \frac{1}{a^3}\frac{\partial^4 w}{\partial\beta^4} + \left(\frac{6}{a^4} - 2 + \frac{4}{a^2}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial a^3} + \left(\frac{2}{a^2} + \frac{18}{a^4}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial a\partial\beta^2} + \left(6 + \frac{18}{a^2}\right)\frac{\partial^3 w}{a^4} + \left(\frac{10}{a^3} + \frac{30}{a^5}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial a\partial\beta} + \left(\frac{14}{a^3} + \frac{15}{a^5}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} + \left(\frac{1}{a} - \frac{15}{a^3} - \frac{6}{a^5}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial a^2} + \left(\frac{15}{a^6} + \frac{6}{a^4} - \frac{1}{a^2}\right)\frac{\partial w}{\partial a} + \left(\frac{6}{a^6} - \frac{15B^2}{a^4}\right)\frac{\partial w}{\partial\beta} + \mu\Big[\left(\nu - 2 - \frac{1}{a^2}\right)\frac{\partial^3 u_2}{\partial a^3} + \left(\frac{3}{a^2} + 2 - \nu\right)\frac{\partial^3 u_2}{\partial a^2\partial\beta} + \frac{3}{a^2}\frac{\partial^3 u_2}{\partial a\partial\beta^2} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial^3 u_2}{\partial\beta^3} + \frac{3}{a^3}\frac{\partial^2 u_2}{\partial\beta^2} + \left(\frac{3}{a^3} - \frac{1-2\nu}{a}\right)\frac{\partial^2 u_2}{\partial a^2} + \left(\frac{1}{a} - \frac{6}{a^3} - \frac{2\nu}{a}\right)\frac{\partial^2 u_2}{\partial a\partial\beta} + \left(\frac{1-2\nu}{a^2} - \frac{3}{a^4}\right)\frac{\partial u_2}{\partial a} + \left(\frac{3}{a^4} + \frac{1}{a^2}\right)\frac{\partial u_2}{\partial\beta}\Big] - \frac{12\mu\tau^4}{h^2a^2}\left[\frac{\partial u_2}{\partial\beta} - (1-\nu)\frac{\partial u_2}{\partial a} - \nu\frac{\partial u_1}{\partial a} - \frac{u_1}{a}\right] - \frac{12\mu}{h^2a^2}\frac{\tau^4 w}{a} - \frac{a\tau}{aD}Z = 0 \qquad (3)$$

с тремя неизвестными параметрами перемещений u_1, u_2, w. Для расчета длинных торсов-геликоидов хотя бы с одним жестко защемленным криволинейным краем $a = \mathrm{const}$, полагаем, что и тогда система трех дифференциальных уравнений (1), (2), (3) в частных производных превращается в систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений с одним неза-

$$u_1 = u_1(a),\ u_2 = u_2(a),\ w = w(a),\ \frac{\partial^i\ldots}{\partial s^i} = \frac{\partial^i\ldots}{\partial\beta^i} = 0$$

висимым параметром a [2]:

$$(a^2+\frac{1-v}{2})\frac{d^2u_1}{da^2}-\frac{1-v}{2}B^2\frac{d^2u_2}{da^2}+(a-\frac{1-v}{2a})\frac{du_1}{da}+\frac{1-v}{2}(\frac{1}{a}-3a)\frac{du_2}{da}u_1-\mu va\frac{dw}{da}+\mu w+\frac{aa^2}{c}(X+\frac{У}{в})=0,. \quad (4)$$

$$\frac{1-v}{2}B^2[\frac{d^2u_1}{da^2}-B^2\frac{d^2u_2}{da^2}-\frac{1}{a}\frac{du1}{da}+(\frac{1}{a}-3a)\frac{du2}{da}]+\mu(1-v)a\frac{dw}{da}-\mu\frac{aa^2h^2}{12т^4}[\frac{в^2}{a^2}\frac{d^3w}{da^3}+(\frac{1}{a}-\frac{3}{a^3})\frac{d^2w}{da^2}+(\frac{3}{a^4}-\frac{1}{a})\frac{dw}{da}+\mu(\frac{в^2}{a}-va)\frac{d^2u_2}{da^2}+\mu(2-2v-\frac{1}{a^2})\frac{du2}{da}]+\frac{aa}{c}(ВУ+X)=0,. \quad (5)$$

$$-\frac{в^4}{a^3}\frac{d^4w}{da^4}+(\frac{6}{a^4}-2+\frac{4}{a^2})\frac{d^3w}{da^3}+(\frac{1}{a}-\frac{15}{a^5}-\frac{6}{a^3})\frac{d^2w}{da^2}+(\frac{15}{a^6}+\frac{6}{a^4}-\frac{1}{a^4})\frac{dw}{a^2 da}+\mu[(v-2-\frac{1}{a^2})\frac{d^3u_2}{da^3}+(\frac{3}{a^3}-\frac{1-2v}{a})\frac{d^2u_2}{da^2}+(\frac{1-2v}{a^2}-\frac{3}{a^4})\frac{du2}{da}]-\frac{12\mu т}{h^2a^2}[(1-v)\frac{du2}{da}+v\frac{du1}{da}+\frac{u1}{a}]-\frac{12\mu^2т^4}{h^2a^2}\frac{w}{a}-\frac{aт^4}{aD}Z=0. \quad (6)$$

Кривошапко С.Н. предложил применить к решению системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений (4), (5), (6) метод малого параметра и записал эти уравнения в виде **[3]**

$$E=-\frac{aa^4}{св^2}X+\mu\frac{a(1+va^2)}{в^2}\frac{dw}{da}-\mu w-\mu^2\frac{a^2h^2}{12т^4в^2}[\frac{aв^2}{a^2}\frac{d^3w}{da^3}+(1-\frac{3}{a^2})\frac{a}{Ь}\frac{d^2w}{da^2}+\frac{a}{Ь}(\frac{3}{a^3}-\frac{1}{a})\frac{dw}{da}+(B^2-va)\frac{d^2u_2}{da^2}+(2a-2av-\frac{1}{a})\frac{du2}{da}. \quad (7)$$

$$u_1=-\frac{1}{2a}\int Eda+\frac{a}{2}\int\frac{E}{a^2}da-\frac{A2}{2a}+aA_3 \quad .$$

$$\frac{du_2}{da}=\frac{(1+3a^2)}{2a^2B^4}\int Eda+\frac{1-a^2}{2B^4}\int\frac{E}{a^2}da+\mu\frac{2a}{B^4}w-\mu^2\frac{2a^2h^2}{12(1-v)т^4B^4}[\frac{aB^2}{Ьa}\frac{d^2w}{da^2}+\frac{a}{Ь}(1-\frac{a}{a^2})\frac{dw}{da}+(B^2-va^2)\frac{du_2}{da}+a(1-v)u_2]+\frac{2aa}{CB^4(1-v)}\int a(ВУ+X)da+\frac{2aA_1}{(1-v)B^4}+\frac{1+3a^2}{2a^2B^4}A_2+\frac{1-a^2}{B^4}A_3, \quad (8)$$

где A_2, A_3 - произвольные постоянные интегрирования.

$$\frac{d}{da}\{\frac{1}{a}\frac{d}{da}[\frac{B^4}{a}\frac{d}{da}(\frac{1}{a}\frac{dw}{da})]\}=-\frac{aт^4}{aD}Z+\mu\frac{12т^4}{h^2a^2}\frac{d}{da}\{[(1-v)u_2+vu_1]-\frac{Ь}{aa}w+\frac{1}{a}u_1\}+\mu^2\frac{a}{Ь}\frac{d}{da}\{\frac{1}{a}\frac{d}{da}[(va-2a-\frac{1}{a})\frac{du_2}{da}+(1+v)u_2]\}, \quad (9)$$

где X, Y, Z – внешние поверхностные силы, возникающие от действия собственного веса $g = -gk$

$$X = -\mu \frac{ag}{т},\ У = 0,\ Z = \frac{ag}{т} \tag{10}$$

Решения этих уравнений предложил разложить в ряды по степени малого параметра [3]

$$u_1 = u_1(a, \mu) = \sum_{i=0}^{oo} H_i(a)\mu^i,.$$
$$u_2 = u_2(a, \mu) = \sum_{i=0}^{oo} V_i(a)\mu^i,.$$
$$w = w(a, \mu) = \sum_{i=0}^{oo} W_i(a)\mu^i,. \tag{11}$$

где $H_i(a)$, $V_i(a)$, $W_i(a)$- векторные коэффициенты, которые нужно определить.

Для определения первых членов рядов (**11**) нужно переписать уравнения (7), (8), (9), (**10**) при условии, что $\mu = 0$:

$$\frac{d}{da}\left\{\frac{1}{a}\frac{d}{da}\left[\frac{в^4}{a}\frac{d}{da}\left(\frac{1}{a}\frac{dw_0}{da}\right)\right]\right\} = -\frac{ат^4}{aD}Z,$$
$$E_0 = 0,\ H_0 = -\frac{A20}{2a} + aA_{30},$$
$$\frac{dV_0}{da} = \frac{2aA_{10}}{(1-v)в^4} + \frac{1+3a^2}{2a^2в^4}A_{20} + \frac{1-a^2}{в^4}A_{30}, \tag{12}$$

где A_{i0} $(i = 1,2,3)$- произвольные постоянные интегрирования. Решив уравнения (12) получим:

$$W_0 = \frac{a^4т^4}{64aD}Z + C_{10}\ln B^2 + a^2\ln B^2 C_{20} + a^2C_{30} + C_{40},$$
$$E_0 = 0,\ H_0 = -\frac{A_{20}}{2a} + aA_{30},$$
$$V_0 = -\frac{A_{10}}{(1-v)в^2} - \frac{A_{20}}{2aв^2} + \frac{aA30}{в^2} + A_{40}, \tag{13}$$

где A_{40}, C_{i0} $(i = 1, 2, 3, 4)$ − постоянные интегрирования, которые находятся из граничных условий на винтовых краях, но так как у нас упрощенное дифференциальное уравнение, применимое только для длинных торсов-геликоидов, это не представляется возможным.

Для нахождения вторых членов рядов (**11**), нужно проделать то же самое, выписав члены содержащие малый параметр μ в первой степени

$$\frac{d}{da}\frac{1}{a}\frac{d}{da}\left[\frac{в^4}{a}\frac{d}{da}\left(\frac{1}{a}\frac{dw1}{da}\right)\right] = \frac{12т^4}{h^2a^2}\frac{d}{da}\left[(1-v)V_0 + vH_0\right] - \frac{Ьw0}{aa} + \frac{н0}{a},$$
$$E_1 = \frac{a^2a^4g}{св^2т} + \frac{a(1+va^2)}{в^2}\frac{dw_0}{da} - W_0,$$
$$H_1 = -\frac{1}{2a}\int E_1 da + \frac{a}{2}\int\frac{E1}{a^2}da - \frac{A21}{2a} + aA_{31},$$
$$\frac{dV_1}{da} = \frac{(1+3a^2)}{2a^2в^4}\int E_1 da + \frac{1-a^2}{2в^4}\int\frac{E_1}{a^2}da + \frac{2a}{в^4}W_0 - \frac{2aa}{св^4(1-v)}\int\frac{aa}{т}g\,da + \frac{2aA_{11}}{(1-v)в^4} + \frac{1+3a^2}{2a^2в^4}A_{21} + \frac{1-a^2}{в^4}A_{31}. \tag{14}$$

При вычислении W_1, H_1, V_1, предполагается, что константы интегрирования A_{i0}, C_{i0} $(i = 1, 2, 3, 4)$, входящие в векторные коэффициенты W_0, H_0, V_0 (13) уже известны. Однако если для первого члена ряда даются развернутые выражения (13), то для второго члена ряда развернутого выражения в литературе обнаружено не было. Перед автором была поставлена задача получить развернутые выражения для второго члена ряда, при этом появились интегралы

$$\int \frac{\ln(1+a^2)}{a} d\alpha, \int \frac{\ln(1+a^2)}{1+a^2} d\alpha,$$

которые можно решить разложением в ряды Тейлора. Такое решение нужно проверить на сходимость, а интеграл

$$\int \frac{\ln(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2}$$

был решен М.И. Рынковской в работе [4] с применением чисел Бернулли. Таким образом, в ближайшее время планируется проверка и, если понадобится, поиск другого варианта интегрирования, а также дальнейшая работа по получению развернутых выражений.

Литература

1. *М.К. Кумудини Джаявардена.* Решение задач расчета тонких упругих оболочек в форме развертывающихся геликоидов: Дис. … канд. техн. наук. – М.:РУДН, 1992.-183с.
2. *Кривошапко С.Н.* К расчету не пологой тонкой оболочки в форме торса-геликоида// Вопросы прочности пространственных систем: Материалы XXVIII научной конференции инженерного факультета. Секция строительной механики. – М.:РУДН, 1992.-с.30-38.
3. *Кривошапко С.Н.,* Геометрия линейчатых поверхностей с ребром возврата и линейная теория расчета торсовых оболочек [Текст] / Кривошапко С.Н.: Монография. – М.: РУДН, 2009. – 357с.
4. *Рынковская М.И.,* Изгибание и задачи расчета тонких упругих оболочек в форме прямого и развертывающегося геликоидов на распределенную нагрузку и осадку одной из криволинейных опор: Дисс. канд. техн. наук – М.: РУДН, 2013. – 217с.

ON THE QUESTION OF ESTIMATION OF DETAILED EXPRESSIONS IN ANALYTICAL CALCULATION OF DEVELOPING HELICOID

A.K. BALOV, *student*

Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia

This paper is about some problems which appear while finding of detailed expressions of vectorial coefficients in the formulas of displacement parameters in analytical calculation of developing helicoid by the method of small parameter.

KEY WORDS: analytical calculation, developing helicoid, deflected mode, method of small parameter.