Математическое моделирование

УДК 535.012.2
DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-2-141-148

Поверхностные электромагнитные волны на границе анизотропных сред

О. Н. Бикеев*, Л. А. Севастьянов†

* *Кафедра прикладной физики*
† *Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей*
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198

В статье рассматривается вопрос о существовании поверхностной электромагнитной волны на границе раздела в структуре, образованной из двух идентичных анизотропных сред, каждая из которых повёрнута в разные стороны на некоторый угол относительно направления распространения искомой электромагнитной волны.

Ранее в своих пионерских статьях на эту тему Дьяконов М. И. и Аверкиев Н. С. (1988, 1990) ограничились рассмотрением только одноосных анизотропных сред. Здесь же приведены выкладки для общего случая двуосных сред, причём, как частный случай, полученные результаты описывают и случай одноосных сред. В работе не используются какие-либо приближения, за исключением, быть может, концепции плоских волн. Получены точные аналитические выражения, связывающие значения фазовой скорости поверхностной волны с углом поворота осей симметрии анизотропных сред относительно направления волнового вектора поверхностной волны. Наряду с этим определены поперечные распределения полей такой волны, вид которых однозначно характеризует эту волну как поверхностную.

Ключевые слова: поверхностная электромагнитная волна, анизотропная среда, фазовая скорость, поперечное распределение поля, тензор диэлектрической проницаемости

В продолжении работ Дьяконова М. И. [1] и Аверкиева Н. С. [2] рассмотрим структуру, состоящую из двух одинаковых анизотропных сред, в общем случае двуосных, немагнитных (рис. 1). Граница раздела сред пусть находится в плоскости yoz декартовой системы координат, совпадающей с кристаллографической системой координат анизотропных сред. Для того, чтобы граница раздела физически существовала, повернём «верхнюю» ($X > 0$) среду на угол φ вокруг оси Ox, а «нижнюю» ($X < 0$) — на угол $-\varphi$ вокруг той же оси.

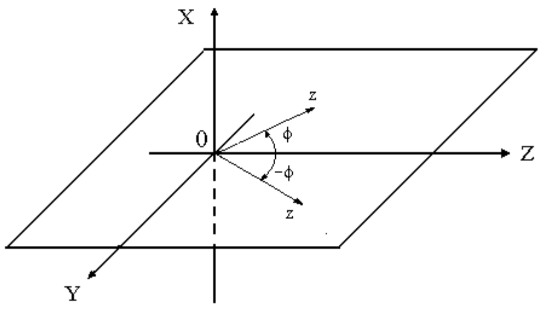


Рис. 1. Взаимное расположение анизотропных сред

Статья поступила в редакцию 20 декабря 2016 г.
Работа частично поддержана грантами РФФИ № № 15-07-08795 и № 16-07-00556.

Пусть тензор диэлектрической проницаемости в кристаллографической системе координат (xyz) выглядит как:

$$\hat{\varepsilon}_{xyz} = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix}.$$

Для определённости будем считать, что $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3$, что, в большинстве случаев, характерно для реальных кристаллов. Иных ограничений на компоненты тензора накладывать не будем, в принципе они могут быть и комплексными. Тензор $\hat{\varepsilon}$ в «повёрнутой» на угол φ системе координат (XYZ) можно вычислить, используя матрицу поворота L_x:

$$L_x = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix}. \tag{1}$$

Аналогичная матрица поворота для среды в нижнем полупространстве получится из (1) путём замены φ на $-\varphi$.

Тензор $\hat{\varepsilon}$ в «повёрнутой» системе координат (XYZ) будет иметь вид:

$$\hat{\varepsilon}_{XYZ} = L_x^{-1} \cdot \hat{\varepsilon}_{xyz} \cdot L_x = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{32} \\ 0 & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix},$$

где:

для среды при $X > 0$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22} &= \varepsilon_2 \cos^2\varphi + \varepsilon_3 \sin^2\varphi, \\ \varepsilon_{33} &= \varepsilon_2 \sin^2\varphi + \varepsilon_3 \cos^2\varphi, \\ \varepsilon_{32} &= -\sin\varphi\cos\varphi(\varepsilon_3 - \varepsilon_2), \end{aligned} \tag{2a}$$

для среды при $X < 0$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22} &= \varepsilon_2 \cos^2\varphi + \varepsilon_3 \sin^2\varphi, \\ \varepsilon_{33} &= \varepsilon_2 \sin^2\varphi + \varepsilon_3 \cos^2\varphi, \\ \varepsilon_{32} &= \sin\varphi\cos\varphi(\varepsilon_3 - \varepsilon_2). \end{aligned} \tag{2b}$$

В сформированной таким образом анизотропной структуре будем искать решение уравнений Максвелла для поверхностных электромагнитных (ЭМ) волн, распространяющихся вдоль поверхности раздела в направлении оси OZ, которая является биссектрисой угла между осями Oz кристаллографических систем координат верхней и нижней анизотропных сред. Пусть зависимость полей всех плоских волн от времени и координат имеет вид $\exp\{-i[\omega t - (k_x x + k_y y + k_z z)]\}$, где $\vec{k}$ — волновой вектор, а k_x, k_y, k_z — его проекции на оси координат.

Для каждой из этих волн должно выполняться волновое уравнение (в гауссовой системе), полученное из уравнений Максвелла в векторной форме:

$$[\vec{k} \times \vec{H}] = -k_0 \vec{D}, \quad [\vec{k} \times \vec{E}] = k_0 \vec{H}, \quad (\vec{k} \cdot \vec{H}) = 0, \quad (\vec{k} \cdot \vec{E}) \neq 0.$$

Это уравнение имеет вид:

$$\left[\vec{k} \times [\vec{k} \times \vec{E}]\right] + k_0^2 \vec{D} = 0, \tag{3}$$

где $k_0 = \omega/c$, $\vec{D} = \hat{\varepsilon}_{XYZ}\vec{E}$.

Подстановка (2a), (2b) в (3) приводит к матричному уравнению

$$\begin{vmatrix} (\varepsilon_1 - \beta^2 - \gamma^2) & \tau\beta & \gamma\tau \\ \tau\beta & [\varepsilon_{22} - (\tau^2 + \gamma^2)] & \gamma\beta + \varepsilon_{32} \\ \gamma\tau & \gamma\beta + \varepsilon_{32} & [\varepsilon_{33} - (\beta^2 + \gamma^2)] \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Здесь $\tau = \frac{k_x}{k_0}$, $\beta = \frac{k_y}{k_0}$, $\gamma = \frac{k_z}{k_0}$ — нормированные компоненты волнового вектора $\vec{k}$. Не теряя общности, можно предположить, что решением (4) является набор плоских волн с фазовыми фронтами параллельными оси OY, или $\mathrm{d}/\mathrm{d}y = 0$, а с ним и $\beta = 0$, что упростит (4). Приравнивая к нулю детерминант матрицы в (4), получим дисперсионное уравнение, связывающее компоненты волнового вектора τ и γ:

$$\varepsilon_1\tau^4 + \big[\varepsilon_1(\gamma^2 - \varepsilon_{22}) + \varepsilon_{33}(\gamma^2 - \varepsilon_1)\big]\tau^2 + (\gamma^2 - \varepsilon_1)(\gamma^2\varepsilon_{33} - \varepsilon_2\varepsilon_3) = 0. \tag{5}$$

Биквадратное уравнение (5) даёт два решения для поперечных волновых чисел собственных плоских волн τ_1^2 и τ_2^2 в зависимости от продольного числа γ. Следует отметить — в данном случае необходимо полагать, что продольное волновое число γ будет одним и тем же для обеих собственных волн анизотропной среды [3]. Это обусловлено, естественно, наличием плоской границы у каждой из анизотропных сред, на которой тангенциальные компоненты волновых векторов собственных волн должны быть одинаковыми.

Решение уравнения (5) можно записать в виде:

$$\tau_{1,2}^2 = \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}{2} \pm \frac{\sqrt{\varepsilon_1^2\Delta_{32}^2 + 2\gamma^2\varepsilon_1\Delta_{32}(\Delta_{21}\sin^2\varphi - \Delta_{31}\cos^2\varphi) + \gamma^4(\varepsilon_1 - \varepsilon_{33})^2} \mp \gamma^2(\varepsilon_1 - \varepsilon_{33})}{2\varepsilon_1}, \tag{6}$$

где $\Delta_{21} = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$, $\Delta_{31} = \varepsilon_3 - \varepsilon_1$, $\Delta_{32} = \varepsilon_3 - \varepsilon_2$.

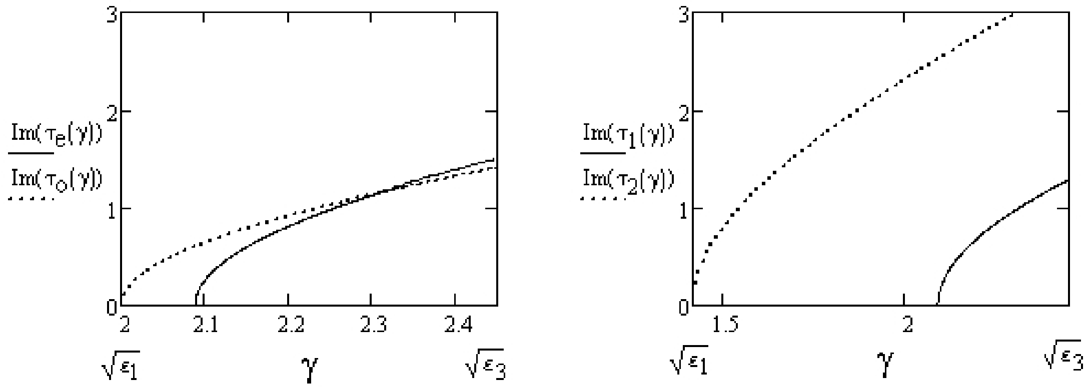
Ситуация существенно упрощается, если двуосные среды заменить одноосными. Для этого достаточно положить $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Тогда биквадратное уравнение (5) распадается на два квадратных уравнения:

$$(\tau_1^2 + \gamma^2 - \varepsilon_1) \cdot \big[\varepsilon_1(\tau_2^2 + \gamma^2) + \gamma^2\Delta_{31}\cos^2\varphi - \varepsilon_1\varepsilon_3\big] = 0. \tag{7}$$

Решения (7) дают значения поперечных волновых чисел для обыкновенной и необыкновенной собственных волн одноосной анизотропной среды:

$$\tau_1 = \tau_{\mathrm{o}} = \sqrt{\varepsilon_1 - \gamma^2} \quad \text{и} \quad \tau_2 = \tau_{\mathrm{e}} = \sqrt{\varepsilon_3 - \gamma^2\left(1 + \frac{\Delta_{31}}{\varepsilon_1}\cos^2\varphi\right)}. \tag{8}$$

Поскольку разыскивается решение волнового уравнения (3) для поверхностной волны, то амплитуды всех полей такой волны должны экспоненциально убывать вдоль оси $\pm X$ [1]. Для существования такого решения необходимо, чтобы поперечные компоненты волновых векторов собственных волн были чисто мнимыми величинами, но при этом продольная компонента должна быть действительной и не превышать, по крайней мере, $\sqrt{\varepsilon_3}$. Проверим, так ли это в рассматриваемом случае. Для этого построим графические зависимости поперечных волновых чисел от продольного для случаев одноосных и двуосных сред (рис. 2).



(a) (b)

Рис. 2. Зависимости чисто мнимых поперечных волновых чисел от действительного продольного числа: a) — одноосные среды ($\varepsilon_1 = 4$, $\varepsilon_2 = 4$, $\varepsilon_3 = 6$), b) — двуосные ($\varepsilon_1 = 2$, $\varepsilon_2 = 4$, $\varepsilon_3 = 6$). В обоих случаях $\varphi = \pi/4$

Из рис. 2 следует, что поверхностная ЭМ волна потенциально может существовать как в одноосной, так и в двуосной структурах. В обоих случаях в некотором диапазоне действительных продольных волновых чисел есть области с чисто мнимыми поперечными числами. Это условие является необходимым, но не является достаточным.

Как видно из (6) и (8), наличие плоской границы у анизотропной среды связывает компоненты волновых векторов собственных волн вполне определённым образом. В силу этого и амплитуды полей этих собственных волн оказываются взаимосвязаны. Для определения этой связи воспользуемся волновым уравнением (4) при $\beta = 0$. Поскольку значения поперечных волновых чисел уже известны (6) и (8), решим систему уравнений (4) относительно амплитуд полей собственных волн в анизотропной среде:

$$\begin{vmatrix} E_{x1,2} \\ E_{y1,2} \\ E_{z1,2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma\tau_{1,2}(\tau_{1,2}^2 + \gamma^2 - \varepsilon_{22}) \\ \varepsilon_{32}(\varepsilon_1 - \gamma^2) \\ -(\varepsilon_1 - \gamma^2)(\tau_{1,2}^2 + \gamma^2 - \varepsilon_{22}) \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Амплитуды составляющих магнитного поля можно вычислить, используя уравнения Максвелла ($\beta = 0$):

$$\begin{vmatrix} H_{x1,2} \\ H_{y1,2} \\ H_{z1,2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\gamma E_{y1,2} \\ \gamma E_{x1,2} - \tau_{1,2} E_{z1,2} \\ \tau_{1,2} E_{y1,2} \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Для окончательного решения вопроса о существовании поверхностной волны необходимо получить дисперсионное уравнение для этой волны и вычислить распределения амплитуд полей в поперечном сечении. Если искомое дисперсионное уравнение будет выполняться, то это и будет достаточным условием существования поверхностной волны.

Дисперсионное уравнение можно получить методом «сшивания» на границе раздела сред тангенциальных составляющих собственных полей. Учитывая необходимые условия существования поверхностной волны на границе раздела сред, в (9) и (10) следует положить:

$$\begin{aligned} &\text{при } X > 0 \quad \tau_1 = iT_1, \qquad \tau_2 = iT_2, \qquad \varphi > 0,\\ &\text{при } X < 0 \quad \tau_1 = -iT_1, \quad \tau_2 = -iT_2, \quad \varphi < 0. \end{aligned}$$

Наличие определённой связи между компонентами полей собственных волн, обусловленное плоской границей, позволяет в (9) и (10) все амплитуды полей выразить через какую-нибудь одну (например, E_z), и последнюю представить при $X > 0$ в виде:

$$E_Z(x) = E_{Z2} + E_{Z1} = A\exp(-T_2x) + B\exp(-T_1x),$$

где A и B — произвольные амплитуды. Для среды при $X < 0$:

$$E_Z(x) = E_{Z2} + E_{Z1} = C\exp(T_2x) + D\exp(T_1x).$$

Остальные амплитуды собственных полей можно таким же образом выразить через неизвестные (пока) константы A, B, C и D.

Приравнивая на границе раздела ($X = 0$) тангенциальные компоненты полей, получим следующее матричное уравнение относительно неизвестных констант:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ \dfrac{1}{T_2^2-\gamma^2+\varepsilon_{22}} & \dfrac{1}{T_1^2-\gamma^2+\varepsilon_{22}} & \dfrac{1}{T_2^2-\gamma^2+\varepsilon_{22}} & \dfrac{1}{T_1^2-\gamma^2+\varepsilon_{22}} \\ \dfrac{T_2}{T_2^2-\gamma^2+\varepsilon_{22}} & \dfrac{T_1}{T_1^2-\gamma^2+\varepsilon_{22}} & \dfrac{-T_2}{T_2^2-\gamma^2+\varepsilon_{22}} & \dfrac{-T_1}{T_1^2-\gamma^2+\varepsilon_{22}} \\ T_2 & T_1 & T_2 & T_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{vmatrix} = 0. \tag{11}$$

Из равенства нулю определителя этой системы линейных однородных уравнений получим

$$(T_1^2 + T_1T_2 + T_2^2 + \varepsilon_{22} - \gamma^2)(\gamma^2 - \varepsilon_{22} + T_1T_2) = 0.$$

Левый сомножитель не равен нулю при действительных значениях γ, следовательно, уравнение

$$\gamma^2 = \varepsilon_{22} - T_1T_2 \tag{12}$$

и будет искомым дисперсионным уравнением для поверхностной волны. Здесь следует заметить, что термин «дисперсионное уравнение» следует понимать в некоторой степени условно. Дисперсии в общепринятом смысле у такой поверхностной волны нет, если только не учитывать естественную дисперсию анизотропных сред. Это уравнение, на самом деле, описывает зависимость фазовой скорости такой волны $\gamma = \frac{k_z}{k_0}$ от параметров среды — ε_1, ε_2, ε_3, φ.

Для одноосной структуры аналогичное уравнение выглядит следующим образом:

$$\gamma^2 = (\varepsilon_1\cos^2\varphi + \varepsilon_3\sin^2\varphi) - T_{\mathrm{o}}T_{\mathrm{e}}, \tag{13}$$

где $T_{\mathrm{o}} = -i\tau_{\mathrm{o}}$, $T_{\mathrm{e}} = -i\tau_{\mathrm{e}}$ — поперечные волновые числа для обыкновенной и необыкновенной волн (8).

Из уравнения (13) можно в явном виде выразить продольное волновое число (или фазовую скорость) поверхностной ЭМ волны:

$$\gamma^2 = \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_1 \operatorname{tg}^2 \varphi}{2} \left(\sqrt{4 \frac{\Delta_{31}}{\varepsilon_1} \cos^2 \varphi + 1} - 1 \right), \quad \text{где } \Delta_{31} = \varepsilon_3 - \varepsilon_1. \tag{14}$$

Аналогичное выражение для случая двуосных сред не столь компактно, однако для полноты картины можно привести и его:

$$\gamma^2 = \varepsilon_1 \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_1 - \varepsilon_{33}} + \frac{\sqrt{(\varepsilon_2\varepsilon_3 - \varepsilon_1\varepsilon_{33})^2 - 4\varepsilon_1\varepsilon_{22}\varepsilon_{33}(\varepsilon_1 - \varepsilon_{22})} - (\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_{33})}{2(\varepsilon_1 - \varepsilon_{33})}, \tag{15}$$

где, напомним, $\varepsilon_{22} = \varepsilon_2 \cos^2 \varphi + \varepsilon_3 \sin^2 \varphi$, $\varepsilon_{33} = \varepsilon_2 \sin^2 \varphi + \varepsilon_3 \cos^2 \varphi$ (см. (2)).

Остаётся заметить, что уравнение (15) переходит в (14) при замене ε_2 на ε_1, то есть при переходе к случаю одноосных сред.

Поскольку фазовые скорости поверхностных волн в том и другом случаях зависят лишь от одного свободного параметра φ, приведём, для наглядности, эти зависимости в графическом виде (рис. 3).

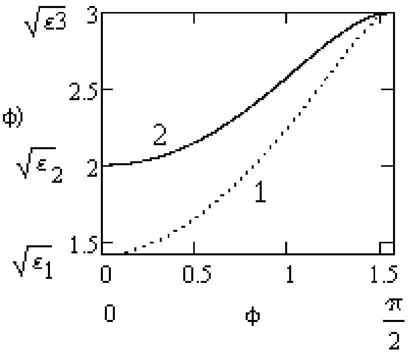


Рис. 3. Продольное волновое число поверхностной волны в зависимости от угла поворота: 1 — одноосные среды, 2 — двуосные

Теперь, когда стали известными все поперечные и продольные волновые числа, можно вернуться к уравнению (11) и вычислить неизвестные ранее константы:

$$A = \frac{-1}{T_1 + T_2}, \quad B = \frac{1}{T_1 + T_2}, \quad C = -A, \quad D = -B. \tag{16}$$

Для одноосных сред выражения для искомых констант имеют вид:

$$A = T_{\text{o}}^3, \quad B = -T_{\text{e}}\varepsilon_1 \operatorname{tg}^2 \varphi, \quad C = -A, \quad D = -B. \tag{17}$$

Поперечные распределения амплитуд полей можно записать в соответствии с ранее сделанными предположениями, например, для:

$$E_Z(x) = \begin{cases} A\exp(-T_2 x) + B\exp(-T_1 x), & x > 0, \\ C\exp(T_2 x) + D\exp(T_1 x), & x < 0, \end{cases}$$

и т. д. В графическом виде эти поперечные распределения амплитуд полей поверхностной волны представлены на рис. 4.

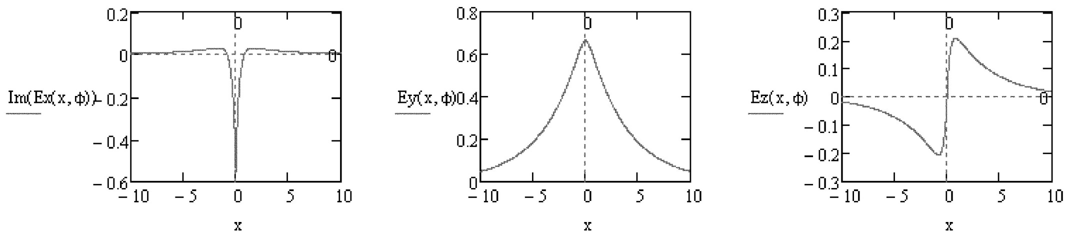


Рис. 4. Поперечные (с точностью до константы) распределения амплитуд компонент электрического поля поверхностной волны: $\varepsilon_1 = 2$, $\varepsilon_2 = 4$, $\varepsilon_3 = 9$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Координата x измеряется в единицах длины волны, амплитуды — в относительных единицах

В случае одноосных сред распределения амплитуд подобны приведённым выше.

Сделаем в заключение ещё несколько существенных замечаний. Исходя из (14) и (15), можно показать, что фазовая скорость поверхностной волны оказывается самой медленной из всех фазовых скоростей собственных волн анизотропной среды (напрашивается аналогия с волной Релея в твёрдом теле). Действительно, продольное волновое число самой медленной из собственных волн анизотропной среды, распространяющейся в направлении OZ, можно получить, если положить равным нулю поперечное число τ_2 (τ_{e}) в уравнениях (6) или (8). Соответствующие вычисления дают следующие значения: в случае одноосных сред при $\tau_{\mathrm{e}} = 0$ (8) $\gamma_{\min} = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_1\varepsilon_3}{\varepsilon_{33}}}$, для двуосных сред $\tau_2 = 0$, при этом $\gamma_{\min} = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_2\varepsilon_3}{\varepsilon_{33}}}$. Таким образом, продольное волновое число поверхностной волны всегда должно быть больше указанных значений, что, в свою очередь, приведёт к выполнению необходимого условия существования поверхностной волны.

Со стороны максимальных значений γ ограничение происходит тогда, когда собственные поля анизотропной среды становятся ортогональными, т.е. их интерференция невозможна. Вычислить γ, при которой это происходит, можно путём приравнивая к нулю скалярного произведения амплитуд собственных векторов напряжённости электрического поля (9) анизотропной среды. Произведя указанные вычисления, получим:

Для одноосных сред $\gamma_{\max} = \dfrac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\cos\varphi}$. При этом значении γ $\tau_{\mathrm{o}} = \tau_{\mathrm{e}}$ (см. рис. 2а). И для двуосных сред $\gamma_{\max} = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_2\varepsilon_3 - \varepsilon_1^2}{\varepsilon_{33} - \varepsilon_1}}$.

Литература

1. *Дьяконов М. И.* Новый тип пограничных электромагнитных волн // ЖЭТФ. — 1988. — Т. 94, № 4. — С. 119–123.
2. *Аверкиев Н. С., Дьяконов М. И.* Электромагнитные волны, локализованные на границе раздела прозрачных анизотропных сред // Оптика и спектроскопия. — 1990. — Т. 68, № 5. — С. 1118–1121.
3. *Федоров Ф. И., Филиппов В. В.* Отражение и преломление света прозрачными кристаллами. — Минск: Наука и техника, 1976. — 224 с.

UDC 535.012.2
DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-2-141-148

Surface Electromagnetic Waves at the Interface of Two Anisotropic Media

O. N. Bikeev*, **L. A. Sevastianov**†

* *Department of Applied Physics*
† *Department of Applied Probability and Informatics*
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)
6 Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russian Federation

The article discusses the existence of surface electromagnetic wave at the interface of a structure formed by two identical anisotropic media, each of which is rotated in opposite directions at an angle relative to the desired direction of propagation of electromagnetic wave.

Earlier, in the pioneering papers on the subject Diakonov M.I. and Averkiev N.S. (1988, 1990) considered only uniaxial anisotropic media. This article presents calculations for the general case of biaxial media. In a particular case, the obtained results describe a case of uniaxial media. The paper does not use any approximation, except, perhaps, the concept of plane waves. Exact analytical expressions were obtained, which relate the values of the phase velocity of the surface wave with an angle of rotation of the axes of symmetry of anisotropic media relative to the direction of the wave vector of the surface wave. In addition, the transverse distributions of the fields of such a wave were found, and these distributions uniquely characterizes this wave as surface wave.

Key words and phrases: surface electromagnetic wave, anisotropic medium, phase velocity, transverse distribution of the field, dielectric tensor

References

1. M. I. Diakonov, New Type of Electromagnetic Waves at the Boundary, JETP 94 (4) (1988) 119–123, in Russian.
2. N. S. Averkiev, M. I. Diakonov, Electromagnetic Waves, Localized at the Boundary of Two Transparent Anisotropic Media, Optica i spectroskopia 68 (5) (1990) 1118–1121, in Russian.
3. F. I. Fedorov, V. V. Filippov, Reflection and Refraction of Light by Transparent Crystals, Nauka i tekhnika, Minsk, 1976, in Russian.