УДК 621.39

О двух системах массового обслуживания с «прозрачными» заявками и их применении к анализу услуг мультивещания

О. Н. Плаксина

Кафедра систем телекоммуникаций
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, 6, Москва, Россия, 117198

В статье представлены результаты исследования двух моделей услуг мультивещания. Построены математические модели в виде системы массового обслуживания типа $M|G|1|0|\Pi$ с прозрачными (П) заявками, проведён анализ моделей и получены формулы для основных вероятностно-временных характеристик.

Ключевые слова: мультивещание, система массового обслуживания, прозрачные заявки.

1. Введение

Услуга мультивещания занимает фиксированную ёмкость звена сети в независимости от числа обслуживаемых пользователей, что позволяет значительно экономить сетевые ресурсы. Мультивещание (multicasting) является одной из составляющих пакетной услуги TriplePlay [1], включающей передачу данных, речи и видео, а одним из наиболее актуальных примеров использования мультивещания является передача трафика вещательного телевидения по IP-сетям. Кроме того, мультивещание применяется в ряде других приложений, в том числе при организации видеоконференций, дистанционного обучения, рассылке корпоративной информации, сетевых играх и пр.

Рассматриваются два сценария предоставления услуги мультивещания. В первом случае (дисциплина Π_1) принципиальную роль играет пользователь, активизирующий услугу, и, который определяет начало и окончание сессии мультивещания. Остальные пользователи могут присоединяться к активизированной услуге, однако завершение сессий всех пользователей происходит одновременно в момент завершения сессии пользователем-инициатором услуги. Такой сценарий может применяться в сетевых играх или видеоконференциях. Разработке соответствующих математических моделей посвящены, например, работы [1–4]. Во втором случае (дисциплина Π_2) пользователи могут присоединяться к услуге мультивещания и отключаться в любой момент времени. Этот сценарий соответствует просмотру пользователями канала вещательного телевидения. Модель и приближенный метод анализа её характеристик разработаны в [5]. В отличие от результатов работ [1–5], в исследуемых ниже моделях рассматривается функция распределения (ФР) длительности обслуживания общего вида. Искомыми характеристиками являются стационарное распределение, математическое ожидание и дисперсия числа заявок в системе.

2. Две модели обслуживания трафика услуги мультивещания

Рассматривается звено сети, поддерживающей предоставление одной услуги мультивещания, которая может находиться в состоянии «1» (включена), если услуга предоставляется хотя бы одному пользователю, или в состоянии «0» (выключена), в противном случае. Функционирование звена может быть описано с

Статья поступила в редакцию 15 января 2010 г.

помощью системы массового обслуживания (СМО) с «прозрачными» заявками $M|G|1|0|\Pi$, на которую поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ. Заявка, поступившая в пустую систему, занимает прибор и обслуживается в течение некоторого случайного интервала времени. Все последующие заявки, поступившие в систему в период занятости, присоединяются к ранее поступившим заявкам и обслуживаются «прозрачно», т.е. одновременно на одном приборе.

Исследуются две дисциплины «прозрачного» обслуживания. В первом случае (дисциплина Π_1) период занятости прибора определяет первая из поступивших заявок, а в момент окончания её обслуживания систему одновременно покидают все заявки, поступившие за время её обслуживания, незамедлительно освобождая занятые ресурсы. Длительность обслуживания заявки-инициатора периода занятости распределена по произвольному закону с ФР $B_1(x)$ и средним значением $\mu^{-1} < \infty$. При дисциплине Π_2 заявки, обслуживаясь одновременно на одном приборе, покидают систему независимо друг от друга. Длительность обслуживания заявок распределена в соответствии с ФР $B_2(x)$ со средним значением $\gamma^{-1} < \infty$.

Введём случайные процессы (СП) $\xi^{(1)}(t)$ и $\xi^{(2)}(t)$, описывающие число заявок в системе в момент времени t для дисциплин Π_1 и Π_2 соответственно. Далее в разделах 2 и 3 статьи получены стационарные распределения и характеристики СП $\xi^{(1)}(t)$ и $\xi^{(2)}(t)$.

3. Анализ модели с дисциплиной Π_1

Рассматриваемая СМО кодируется как $M|G|1|0|\Pi_1$ и анализируется с помощью аппарата линейчатых марковских процессов [6]. Введём случайный процесс $\{\eta(t),\ t \geqslant 0\}$, характеризующий состояние системы, следующим образом. Если в момент t система свободна, т.е. число заявок в системе $\xi^{(1)}(t) = 0$, то $\eta(t) = \xi^{(1)}(t)$. В противном случае $\eta(t) = \left(\xi^{(1)}(t), \nu(t)\right)$, где $\nu(t)$ — прошедшее время обслуживания первой из поступивших заявок, т.е. время, прошедшее с начала периода занятости системы. По построению $\eta(t)$ является линейчатым марковским процессом и определён на множестве состояний $X = \{(0); (i, x),\ i = 1, 2, ...,\ x > 0\}$.

Введём вероятности $p_0(t) = P\left\{\xi^{(1)}(t) = 0\right\}$, $P_k(x,t) = P\left\{\xi^{(1)}(t) = k, \nu(t) < x\right\}$, и функцию плотности $p_k(x,t) = \dfrac{\partial}{\partial x} P_k(x,t)$, $k \geqslant 1$. Тогда для моментов времени t и $t + \Delta$ и $k \geqslant 1$ выполняется соотношение

$$p_k(x+\Delta, t+\Delta) = p_k(x,t)(1-\lambda\Delta)\frac{1-B_1(x+\Delta)}{1-B_1(x)} + \\ + u(k-1)p_{k-1}(x,t)\lambda\Delta\frac{1-B_1(x+\Delta)}{1-B_1(x)} + o(\Delta), \quad (1)$$

где $\dfrac{1-B_1(x+\Delta)}{1-B_1(x)}$ — вероятность того, что за время Δ период занятости не закончится, при условии, что с момента его начала прошло время x.

Предположим, что существуют вероятности $p_0 = \lim\limits_{t\to\infty} p_0(t)$, $P_k(x) = \lim\limits_{t\to\infty} P_k(x,t)$ и функции плотности $p_k(x) = P_k'(x)$. Тогда, выполнив в (1) предельный переход, получаем систему уравнений

$$q_k'(x) = -\lambda q_k(x) + u(k-1)\lambda q_{k-1}(x), \quad k \geqslant 1, \quad (2)$$

где для удобства записи введена функция

$$q_k(x) = \frac{p_k(x)}{1-B_1(x)}. \quad (3)$$

Несложно заметить, что граничные условия для системы уравнений (2) имеют вид

$$\lambda p_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_0^{\infty} q_k(x) \mathrm{d}B_1(x), \tag{4}$$

$$\begin{cases} q_1(0) = \lambda p_0, \\ q_k(0) = 0, \quad k \geqslant 2, \end{cases} \tag{5}$$

а её решение определяется формулой

$$q_k(x) = e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} q_1(0), \quad k \geqslant 1, \tag{6}$$

что доказывается с помощью метода математической индукции.

Из (3) и (6) следует, что

$$p_k(x) = (1 - B_1(x)) e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} q_1(0).$$

С учётом того, что $p_k = \lim\limits_{x \to \infty} P_k(x) = \int\limits_0^{\infty} p_k(x) \mathrm{d}x$ и после преобразований получаем $p_k = \frac{q_1(0)}{\lambda} B_{k-1}$, где $B_k = 1 - \sum\limits_{i=0}^{k} \beta_i$ и $\beta_i = \int\limits_0^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} \mathrm{d}B_1(t)$. Теперь найти p_0 можно из системы уравнений (2) с учётом граничных условий (4):

$$p_0 = \frac{1}{1+\rho}, \quad \text{где} \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Таким образом, стационарные вероятности p_k СП $\xi^{(1)}(t)$ имеют вид:

$$\begin{cases} p_0 = \dfrac{1}{1+\rho}, \\ p_k = \dfrac{1}{1+\rho} B_{k-1}, \quad k \geqslant 1. \end{cases} \tag{7}$$

Нетрудно видеть, что производящая функция (ПФ) $P(z)$ распределения (7) записывается как

$$P(z) = \frac{1 - z\beta(\lambda - \lambda z)}{(1-z)(1+\rho)}, \tag{8}$$

и, далее, имея ПФ $P(z)$, получаем математическое ожидание $M\xi^{(1)}$ и дисперсию $D\xi^{(1)}$ числа заявок в СМО $M|G|1|0|\Pi_1$:

$$M\xi^{(1)} = \frac{\lambda^2 b^{(2)} + 2\rho}{2\,(1+\rho)}, \tag{9}$$

$$D\xi^{(1)} = \frac{2\lambda^3 b^{(3)} + 9\lambda^2 b^{(2)} + 6\rho}{6\,(1+\rho)} - \frac{\lambda^2 \left(b^{(2)}\right)^2 + 4\lambda^2 \rho b^{(2)} + 4\rho^2}{4\,(1+\rho)^2}, \tag{10}$$

где $b^{(i)}$ — i-й начальный момент ФР $B_1(x)$.

Отметим отдельно случай экспоненциального распределения длительности обслуживания, когда распределение (7) принимает вид

$$\begin{cases} p_0 = \dfrac{1}{1+\rho}, \\ p_k = \dfrac{1}{1+\rho}\left(\dfrac{\rho}{1+\rho}\right)^k, \quad k \geqslant 1, \end{cases}$$

а характеристики (9) и (10) рассчитываются по формулам

$$M\xi^{(1)} = \rho, \quad D\xi^{(1)} = \rho\,(1+\rho)\,.$$

4. Модель с дисциплиной Π_2

Рассмотрим теперь СМО $M|G|1|0|\Pi_2$ и пусть на систему поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью $\lambda(k) = (N-k)\,\varepsilon$, где $\varepsilon = \frac{\lambda}{N}$. Поскольку при дисциплине Π_2 заявки обслуживаются независимо друг от друга, то несложно видеть, что рассматриваемая система эквивалентна частному случаю модели Энгсета с явными потерями (см., например, [7]), когда число обслуживающих приборов совпадает с числом N источников нагрузки. В таком случае стационарное распределение вероятностей p_k СП $\xi^{(2)}(t)$ имеет вид

$$\begin{cases} p_0 = \dfrac{1}{(1+\widetilde{\rho})^N}, \\ p_k = \dfrac{C_N^k \widetilde{\rho}^k}{(1+\widetilde{\rho})^N}, \quad k = \overline{1,N}, \end{cases} \tag{11}$$

где $\widetilde{\rho} = \frac{\varepsilon}{\gamma}$. Математическое ожидание $M\xi^{(2)}$ и дисперсия $D\xi^{(2)}$ числа заявок в системе рассчитываются по формулам

$$M\xi^{(2)} = \frac{N\widetilde{\rho}}{1+\widetilde{\rho}}, \quad D\xi^{(2)} = \frac{N\widetilde{\rho}}{(1+\widetilde{\rho})^2}.$$

В предельном случае, когда число источников и обслуживающих приборов неограниченно возрастают, а интенсивность ε каждого из источников стремится к нулю, распределение (11) преобразуется в распределение Пуассона с параметром $\rho = \frac{\lambda}{\gamma}$:

$$\begin{cases} p_0 = e^{-\rho}, \\ p_k = \dfrac{\rho^k}{k!}e^{-\rho}, \quad k \geqslant 1, \end{cases}$$

а характеристики $M\xi^{(2)}$ и $D\xi^{(2)}$ принимают вид $M\xi^{(2)} = \rho, \quad D\xi^{(2)} = \rho$. Заметим, что в [8] доказана инвариантность системы Энгсета с потерями с зависимыми длительностями обслуживания. Таким образом, приведённые выше формулы могут быть использованы для расчёта характеристик СМО $M|G|1|0|\Pi_2$.

5. Заключение

В статье рассмотрены два сценария поведения пользователей услуг мультивещания и построены соответствующие модели в виде СМО с «прозрачными» заявками. Результаты исследования моделей показывают, что распределение числа заявок для СМО с дисциплиной Π_2, в отличие от СМО с дисциплиной Π_1, инвариантно относительно функции распределения длительности обслуживания. В случае, когда длительность обслуживания распределена по экспоненциальному закону, значения среднего числа заявок для обеих моделей совпадают.

Литература

1. Новый этап развития математической теории телетрафика / Г. П. Башарин, К. Е. Самуйлов, Н. В. Яркина, И. А. Гудкова // Автоматика и телемеханика. — 2009. — № 12. — С. 16–28.
2. *Наумов В. А., Самуйлов К. Е., Яркина Н. В.* Теория телетрафика мультисервисных сетей. Монография. — М.: Изд-во РУДН, 2007.
3. *Samouylov K. E., Plaksina O. N.* Approximating Blocking Probabilities for Multiservice Network Link with Unicast and Multicast Connections // International IEEE Conference EUROCON 2009. — 2009. — Pp. 1814–1817.
4. *Рыков В. В.* Сети обслуживания прозрачных требований // Автоматика и телемеханика. — 2001. — № 5. — С. 147–158.
5. Blocking of Dynamic Multicast Connections in a Single Link / J. Karvo, J. Virtamo, S. Aalto, O. Martikainen // Proceedings of the IFIP TC6/WG6.2 Fourth International Conference on Broadband Communications: The future of telecommunications. — 1998. — Pp. 473–484.
6. *Беляев Ю. К.* Линейчатые марковские процессы и их приложения к задачам теории надежности. — Вильнюс: Гос. изд-во полит. и науч. литературы Литовской ССР, 1962.
7. *Башарин Г. П.* Лекции по математической теории телетрафика. Учебное пособие. — М.: Изд-во РУДН, 2009.
8. *Cohen J. W.* The Generalized Engset Formula // Phillips Telecommun. — 1957. — No 18. — Pp. 158–170.

UDC 621.39

On Two Queuing Systems with «Transparent» Calls Applying to the Multicast Network Analysis

O. N. Plaksina

Telecommunication Systems Department
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russia

Two multicast service models with different users' behavior are considered. We present corresponding mathematical models as queuing systems $M|G|1|0|T$ with arbitrary distributed service times and transparent (T) calls. Calculation formulas for stationary probabilities of service customers and other characteristics are obtained.

Key words and phrases: multicasting, queuing systems, transparent calls.