УДК 519.6

Задача продолжения нестационарного температурного поля с произвольной поверхности

Е. Б. Ланеев, М. Н. Муратов, Адель Салех Абдулхак Табет

Кафедра нелинейного анализа и оптимизации
Российский университет дружбы народов
ул.Миклухо-Маклая, 6, 117198, Москва, Россия

Рассматривается задача продолжения нестационарного температурного поля как некорректно поставленная задача Коши для уравнения теплопроводности с данными Коши на поверхности произвольного вида. Предложен метод построения приближенного решения задачи, устойчивой к погрешностям в данных Коши.

Ключевые слова: некорректная задача, задача Коши, уравнение теплопроводности, метод регуляризации.

1. Введение

Рассматриваемая здесь задача является естественным обобщением задач продолжения гармонических полей [1], а построенное устойчивое решение — развитием теории решения таких задач. Предложенное построение приближенного решения включает метод регуляризации путём введения регуляризирующего множителя.

Пусть имеется теплопроводящее тело цилиндрической формы прямоугольного сечения с источниками тепла $\rho(x,t)$. Пусть на боковых гранях цилиндра поддерживается нулевая температура, а на поверхности S поддерживается конвективный теплообмен со средой нулевой температуры [2]. Будем для простоты считать, что начальная температура равна нулю. Получим смешанную краевую задачу для уравнения теплопроводности

2. Постановка задачи

Пусть плотность источников неизвестна и подлежит определению. Заданной (измеренной) будем считать функцию

$$u|_S = f, \quad 0 < t < \infty.$$

В области $D(F,H) \otimes R^1$, считая, что носитель плотности источников расположен в области $z > H$, получаем задачу

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}(M,t) = a^2 \Delta u(M,t), \quad M \in D(H,F), \quad -\infty < t < \infty,\\
&u|_S = f,\\
&\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = -hf \equiv g,\\
&u|_{x=0,l_x} = 0,\; u|_{y=0,l_y} = 0,\\
&u|_{t=0} = 0,\\
&u \underset{z\to\infty}{\to} 0,
\end{aligned} \tag{1}$$

Статья поступила в редакцию 25 марта 2010 г.
Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ грант №09-01-00633-a).

где

$$D(F,H)=\{(x,y,z):0<x<l_x,\ 0<y<l_y,\ F(x,y)<z<H\},$$
$$S=\{(x,y,z):0<x<l_x,\ 0<y<l_y,\ z=F(x,y)\},$$
$$F\in C^2(\Pi(0)),\quad \Pi(z)=\{(x,y,z):\ 0<x<l_x,\ 0<y<l_y,\ z=\mathrm{const}\}.$$

Функции f и g считаем непрерывными на $S\otimes R^1$. Задача (1) некорректно поставлена [1] по условиям Коши на поверхности S. В [1] приведён метод построения точного и регуляризованного решения аналогичной задачи Коши для уравнения Лапласа, устойчивого по отношению к погрешностям в функциям f и g. Основной элемент этой схемы — сведение задачи к интегральному уравнению. Приведём аналогичные построения для приближенного решения задачи (1).

3. Построение приближенного решения

Пусть функции f и g заданы приближённо, а именно: пусть заданы функции f^δ и g^δ, такие, что

$$\left\| f^\delta-f\right\|_{L_2(\Pi(0))}\leqslant\delta,\quad \left\| g^\delta-g\right\|_{L_2(\Pi(0))}\leqslant\delta. \tag{2}$$

Применением формул Грина приближенное решение задачи (1) строится в виде

$$\begin{aligned}
u^\delta_\alpha(M,t)&=v^\delta_\alpha(M,t)-\Phi^\delta(M,t)=\\
&=\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{q-i\infty}^{q+i\infty}e^{pt}\frac{\tilde\Phi^\delta_{nm}(b,p)}{1+\alpha\exp\left(2\sqrt{\frac{p}{a^2}+\frac{\pi^2}{a^2}\left[\frac{n^2}{l_x^2}+\frac{m^2}{l_y^2}\right]}(b-H)\right)}\times\\
&\quad\times\exp\left(\sqrt{\frac{p}{a^2}+\frac{\pi^2}{a^2}\left[\frac{n^2}{l_x^2}+\frac{m^2}{l_y^2}\right]}(z-b)\right)\mathrm{d}p\times\\
&\quad\times\sin\frac{\pi n x_M}{l_x}\sin\frac{\pi m y_M}{l_y}-\Phi^\delta(M,t),\quad b<\min_{(x,y)\in\Pi(0)}F(x,y).
\end{aligned}\tag{3}$$

где

$$\Phi^\delta(M,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{S}\left[g^\delta(P,\tau)\varphi(M,P,t,\tau)-f^\delta(P,\tau)\frac{\partial\varphi}{\partial n_P}(M,P,t,\tau)\right]\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\tau,$$

$$\begin{aligned}
\varphi(M,P,t,\tau)=\frac{\theta(t-\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(z_M-z_P)^2}{4a^2(t-\tau)}}\sum_{n,m=1}^{\infty}\exp\left(-a^2\pi^2\left[\frac{n^2}{l_x^2}+\frac{m^2}{l_y^2}\right](t-\tau)\right)\times\\
\times\sin\frac{\pi n x_M}{l_x}\sin\frac{\pi m y_M}{l_y}\sin\frac{\pi n x_P}{l_x}\sin\frac{\pi m y_P}{l_y}
\end{aligned}$$

— фундаментальное решение уравнения теплопроводности в цилиндре. Здесь $\tilde\Phi_{nm}(b,p)$ — образ коэффициентов Фурье функции $\Phi(M,t)|_{M\in\Pi(b)}$:

$$\tilde\Phi_{nm}(b,p)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}te^{-pt}\frac{4}{l_xl_y}\int\limits_0^{l_x}\mathrm{d}x\int\limits_0^{l_y}\mathrm{d}y\Phi(x,y,b,t)\sin\frac{\pi nx}{l_x}\sin\frac{\pi my}{l_y}.$$

Теорема. *Пусть решение задачи (1) существует в области* $D(F,H) \otimes R^1$, $\alpha = \alpha(\Delta)$, $\alpha(\Delta) \to 0$, $\Delta/\sqrt{\alpha(\Delta)} \to 0$ *при* $\Delta \to 0$. *Тогда функция* $u_{\alpha(\Delta)}$ *вида (3), где* $\Delta = C\delta$, *равномерно сходится к точному решению задачи при* $\delta \to 0$, $\mu \to 0$ *в области* $D(H-\varepsilon, F+\varepsilon)$, *где* $\varepsilon > 0$ — *некоторое фиксированное сколь угодно малое число.*

4. Заключение

Приближенное решение вида (3) может быть использовано для устойчивого численного продолжения температурного поля с поверхности S в сторону источника. При этом особенности этого поля связываются с источниками поля.

Литература

1. *Ланеев Е. Б.* Некорректные задачи продолжения гармонических функций и потенциальных полей и методы их решения. — М.: РУДН, 2006. — 139 с.
2. *Ланеев Е. Б., Муратов М. Н.* Об одной обратной задаче к краевой задаче для уравнения Лапласа с условием третьего рода не неточно заданной границе // Вестник РУДН. Серия Математика. — 2003. — Т. 10(1). — С. 100–110.

UDC 519.6

On Stable Solution for a Mixed Boundary Value Problem for Laplace Equation with the Approximately Defined Boundary

E. B. Laneev, M. N. Mouratov, Adel Saleh Abdulhak Tabet

Department of Differential Equations and Functional Analysis
Peoples' Friendship University of Russia
Miklykho-Maklaya str., 6, 117198, Moscow, Russia

A non-stationary heat conduction equation treated as an incorrect Cauchy problem is considered. Temperature field is given on an arbitrary surface. The continuation of that temperature field toward heat sources is performed.

Key words and phrases: incorrect problem, Cauchy problem, heat conduction equation, regularization.