

## ТЕОРИЯ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК THEORY OF THIN ELASTIC SHELLS

DOI 10.22363/1815-5235-2019-15-5-367-373  
УДК 624.042:539.3

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

### Выбор оптимальной оболочки покрытия на квадратном плане в виде поверхности переноса

Е.М. Тупикова

Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6  
tupikova-em@rudn.ru

#### История статьи:

Поступила в редакцию: 10 июля 2019 г.  
Доработана: 22 сентября 2019 г.  
Принята к публикации: 02 октября 2019 г.

#### Аннотация

**Цели.** В статье произведен анализ и сравнение результатов статического расчета оболочек на действие распределенной нагрузки типа собственного веса. Исследованы оболочки переноса с одинаковыми габаритными размерами четырех видов: поверхности переноса цепной линии по цепной, окружности по окружности, эллипса по эллипсу и синусоиды по синусоиде. **Методы.** Для расчетов применялся метод конечных элементов. Исследование проводилось для оболочек из материала с характеристиками условного железобетона. **Результаты.** Сравнительный анализ результатов показал, что наиболее выгодное для строительных конструкций поведение под нагрузкой демонстрируют оболочки в форме поверхности переноса цепной линии по цепной и окружности по окружности. Наихудшими для железобетонного строительства являются оболочки в форме поверхности переноса эллипса по эллипсу. Выявлены особенности напряженно-деформированного состояния перечисленных объектов, представляющие интерес для потенциального внедрения таковых в практику проектирования и строительства.

**Ключевые слова:** поверхности прямого переноса; тонкие упругие оболочки; метод конечных элементов; статический расчет

#### Для цитирования

Тупикова Е.М. Выбор оптимальной оболочки покрытия на квадратном плане в виде поверхности переноса // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 5. С. 367–373. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-5-367-373>

### Введение

Оболочки в форме поверхностей переноса имеют перспективы для применения в архитектуре ввиду их эстетической выразительности в сочетании с малым весом и объемом материала [16].

Выбор оболочек с близкими габаритными размерами и различной геометрией занимает ученых-механиков начиная с В.В. Новожилова [1]. Многие работы посвящены исследованию такой

проблемы, но подавляющее большинство исследований реализованы для уже хорошо изученных и зарекомендовавших себя форм, в частности куполов на основе различных поверхностей вращения [1–4]. Имеются также исследования на тему сравнительного анализа напряженно-деформированного состояния оболочек вращения неканонической формы [5–9]. Помимо этого, для оболочек вращения разработаны и апробированы несколько критериев их оптимальности [10]. Работ, посвященных выбору оптимальных оболочек переноса, значительно меньше.

В данной статье рассмотрены четыре оболочки в форме поверхностей переноса, перекрывающие квадратный план. Предполагается, что конструкции могут быть изготовлены путем торкре-

Тупикова Евгения Михайловна, кандидат технических наук, ассистент департамента строительства Инженерной академии. eLIBRARY SPIN-код: 5501-6984.

© Тупикова Е.М., 2019



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

тирования, нанесения бетонного раствора на арматурные сетки соответствующей геометрии. Выбраны формы, которые технологически возможно было бы изготовить из металлических стержней или сеток: поверхность переноса окружности по окружности, цепной линии по цепной линии, эллипса по эллипсу и синусоиды по синусоиде.

### 1. Цель исследования

Целью данной работы является выбор оптимальной с точки зрения напряженно-деформированного состояния формы оболочки для покрытия квадратного в плане здания размером 6×6 м из железобетона. На примере такого объекта предполагается изучить особенности работы оболочек четырех разных форм в виде поверхностей переноса, выбрать из них оптимальные для применения в практике строительства, выявить нераациональные варианты, обозначить основные трудности, возможные при проектировании, и пути их разрешения.

### 2. Материалы и методы

Уравнения поверхностей прямого переноса общеизвестны. Они приводятся в литературе [11; 12]. Произведено геометрическое моделирование и конечно-элементный анализ оболочек на основе четырех явных уравнений поверхностей.

#### 2.1. Поверхность переноса цепной линии по цепной линии

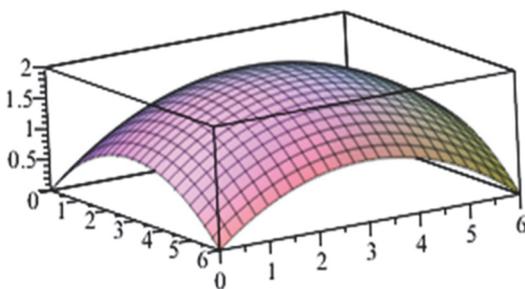


Рис. 1. Поверхность переноса цепной линии по цепной линии [Figure 1. Surface of translation of catenary curve along catenary curve]

$$z = -a \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{x-b}{a}\right) + a \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{b}{a}\right) - d \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{y-c}{d}\right) + d \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{c}{d}\right).$$

$$c = b = 3 \text{ м}, a = d = 4,657746 \text{ м}, \quad (1)$$

где  $a$  и  $d$  – параметры, связанные со стрелой подъема;  $b$  и  $c$  – половина размера в плане вдоль координатных осей  $x$  и  $y$  соответственно.

Стрела подъема в данном случае определена с некоторой погрешностью (порядка  $10^{-6}$  м), поскольку не может быть выражена в явном виде из уравнения поверхности.

#### 2.2. Поверхность переноса окружности по окружности (тороид)

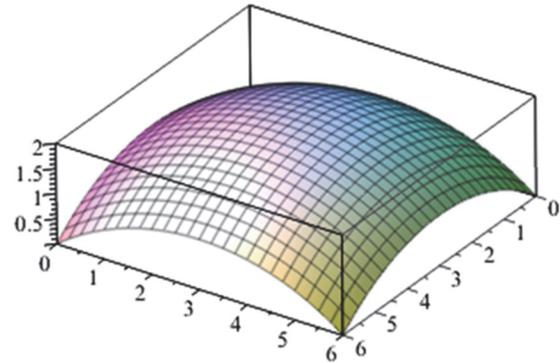


Рис. 2. Поверхность переноса окружности по окружности [Figure 2. Surface of translation of circle curve along circle]

$$z = \left(r_1^2 - \left(x + \frac{a}{2}\right)^2\right)^{0.5} - \left(r_1^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)^{0.5} + \left(r_2^2 - \left(y - \frac{b}{2}\right)^2\right)^{0.5} - \left(r_2^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2\right)^{0.5},$$

$$a = b = 6 \text{ м}, r_1 = r_2 = 5 \text{ м}, \quad (2)$$

где  $a$  и  $b$  – размеры в плане вдоль координатных осей  $x$  и  $y$ ;  $r_1$  и  $r_2$  – радиусы направляющей и образующей окружностей соответственно.

#### 2.3. Поверхность переноса эллипса по эллипсу

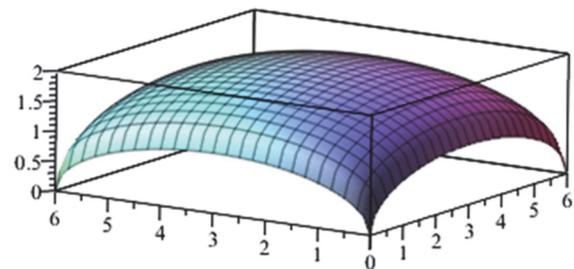


Рис. 3. Поверхность переноса эллипса по эллипсу [Figure 3. Surface of transition of ellipse along ellipse]

$$z = f_1 - b + \frac{b}{a} \cdot \sqrt{\left(a^2 - \left(x - \frac{c}{2}\right)^2\right)} + f_2 - m + \frac{m}{n} \cdot \sqrt{\left(n^2 - \left(y - \frac{d}{2}\right)^2\right)},$$

$$a = n = 3, b = m = 1, c = d = 6, f_1 = f_2 = 1, \quad (3)$$

где  $f_1$  – стрела подъема эллипсов, лежащих в плоскостях  $y = 0$  и  $y = d$ ;  $f_2$  – стрела подъема эллипсов, лежащих в плоскостях  $x = 0$  и  $x = c$ ;  $c$  и  $d$  – размеры в плане;  $a, b$  – полуоси эллипсов, получающихся в сечениях плоскостями  $y = \text{const}$ ;  $m, n$  – полуоси эллипсов, получающихся в сечениях  $x = \text{const}$ .

#### 2.4. Поверхность переноса синусоиды по синусоиде

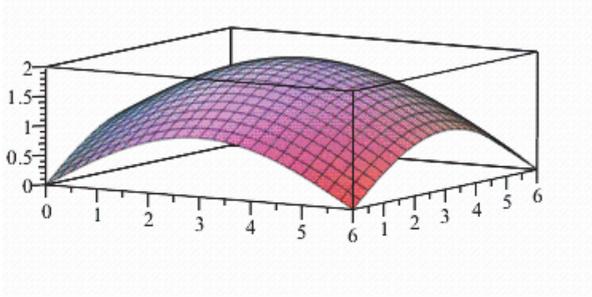


Рис. 4. Поверхность переноса синусоиды по синусоиде  
[Figure 4. Surface of transition of sinusoid curve along sinusoid]

$$z = c \cdot \sin\left(\frac{1 \cdot \pi \cdot x}{a}\right) + d \cdot \sin\left(\frac{1 \cdot \pi \cdot y}{b}\right),$$

$$a = b = 6 \text{ м}, c = d = 1 \text{ м},$$

где  $a$  и  $b$  – длины отрезков, на которых умещается одна полуволна синусоиды в направлениях  $x$  и  $y$  соответственно;  $c$  и  $d$  – амплитуды синусоид.

Каждая оболочка имеет размеры в плане  $6 \times 6$  м, стрелу подъема 2 м и толщину 8 см, расчетные характеристики материала – условного железобетона  $E = 325 \text{ Мпа}$ ,  $\nu = 0.17$ . Оболочки опираются на жесткие диафрагмы, таким образом, по всем краям закрепление жесткое. К оболочкам приложена

внешняя нагрузка типа собственного веса величиной  $10000 \text{ Н/м}^2$ .

Методом конечных элементов произведен статический расчет оболочек. Метод конечных элементов реализован в программном комплексе ANSYS 15 APDL при помощи четырехугольных элементов shell181 [13].

Длина стороны элемента 25 см. Модель оболочки имеет  $27 \times 27 = 729$  узлов и, соответственно, 676 элементов, что достаточно для целей данного расчета.

Получены изополя перемещений и силовых факторов, а также эпюры вдоль линии, проходящей через центр оболочки и середины противоположных сторон.

На первый взгляд, построение эквивалентных напряжений (по Мизесу) для условного материала без учета армирования не имеет смысла, но на самом деле эти изополя могут дать примерную картину расположения проблемных с точки зрения армирования зон, требующих усиления.

### 3. Результаты

Далее приведены эпюры в срединных сечениях (половина, так как схема симметричная). На рисунках эпюры и изополя размещены в следующем порядке:  $a$  – для поверхности переноса цепной линии по цепной,  $b$  – для поверхности переноса окружности по окружности,  $v$  – для поверхности переноса эллипса по эллипсу,  $z$  – для поверхности переноса синусоиды по синусоиде.

В оболочках типа «эллипсоид по эллипсоиду» и «синус по синусу» возникают также поперечные и перерезывающие силы, сопоставимые с нормальными.

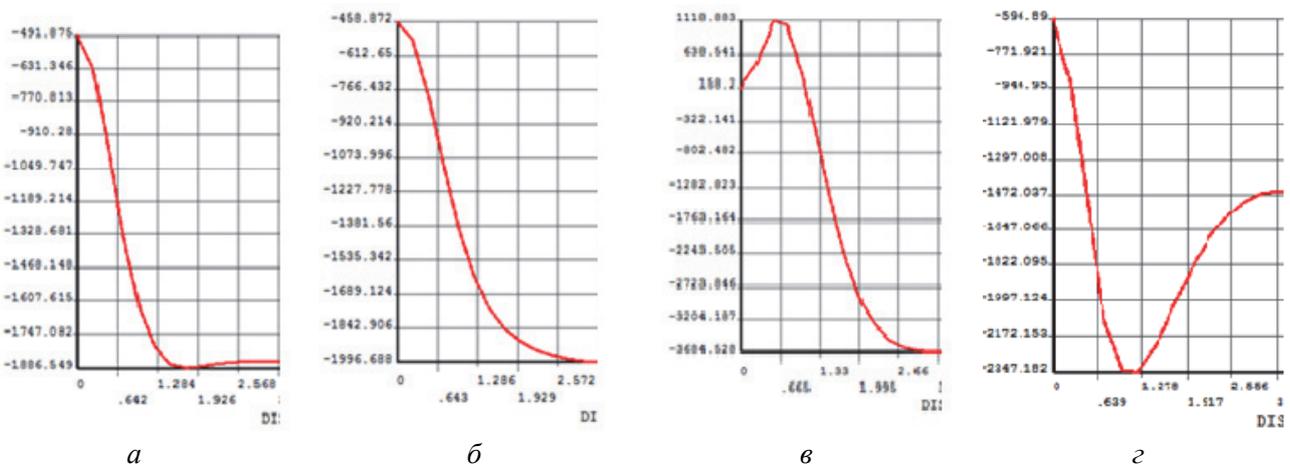


Рис. 5.  $N_{11}$  нормальные силы  
[Figure 5.  $N_{11}$  is axial force]

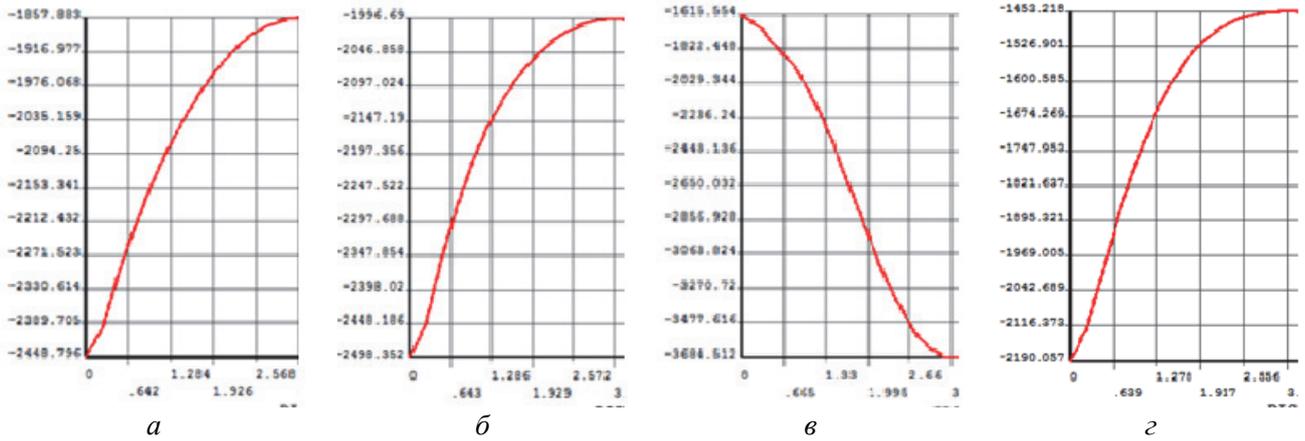


Рис. 6.  $N_{22}$  нормальные силы  
 [Figure 6.  $N_{22}$  is axial force]

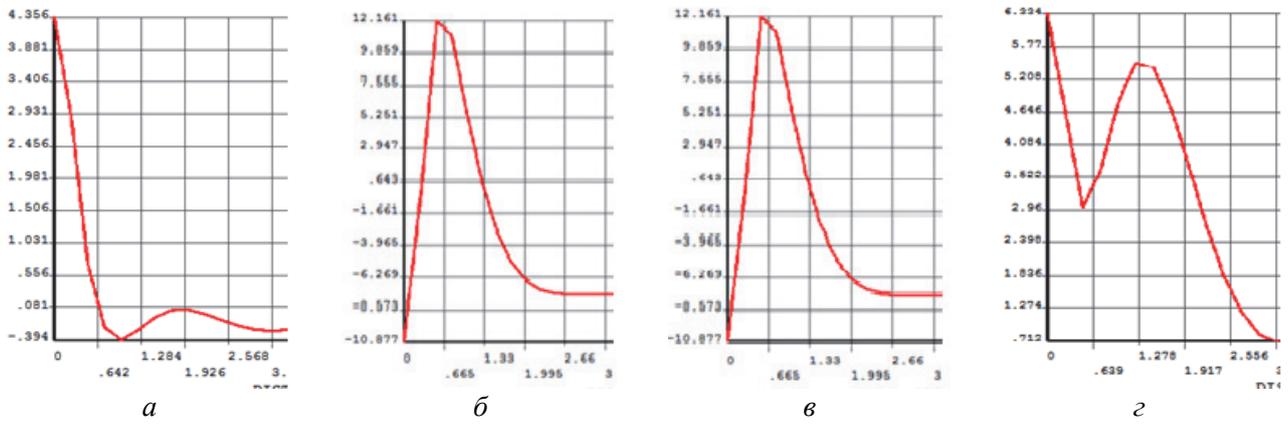


Рис. 7. Изгибающие моменты  $M_{11}$   
 [Figure 7. Bending moments  $M_{11}$ ]

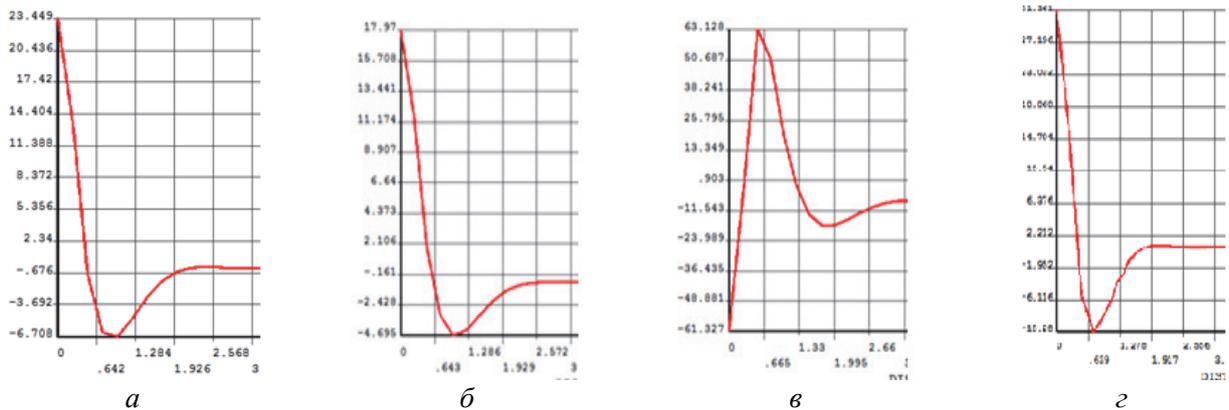


Рис. 8. Изгибающие моменты  $M_{22}$   
 [Figure 8. Bending moments  $M_{22}$ ]

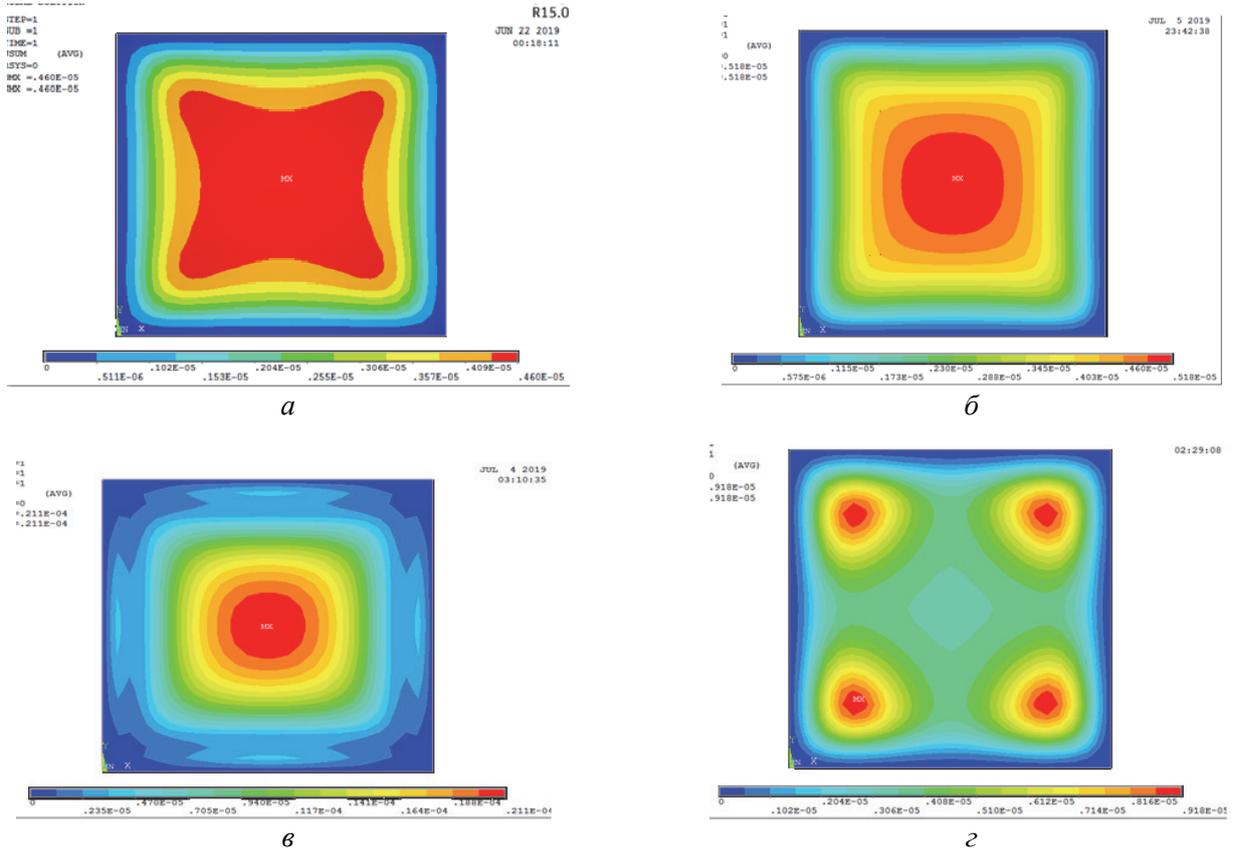


Рис. 9. Изополя прогибов  
[Figure 9. Deflection isofields]

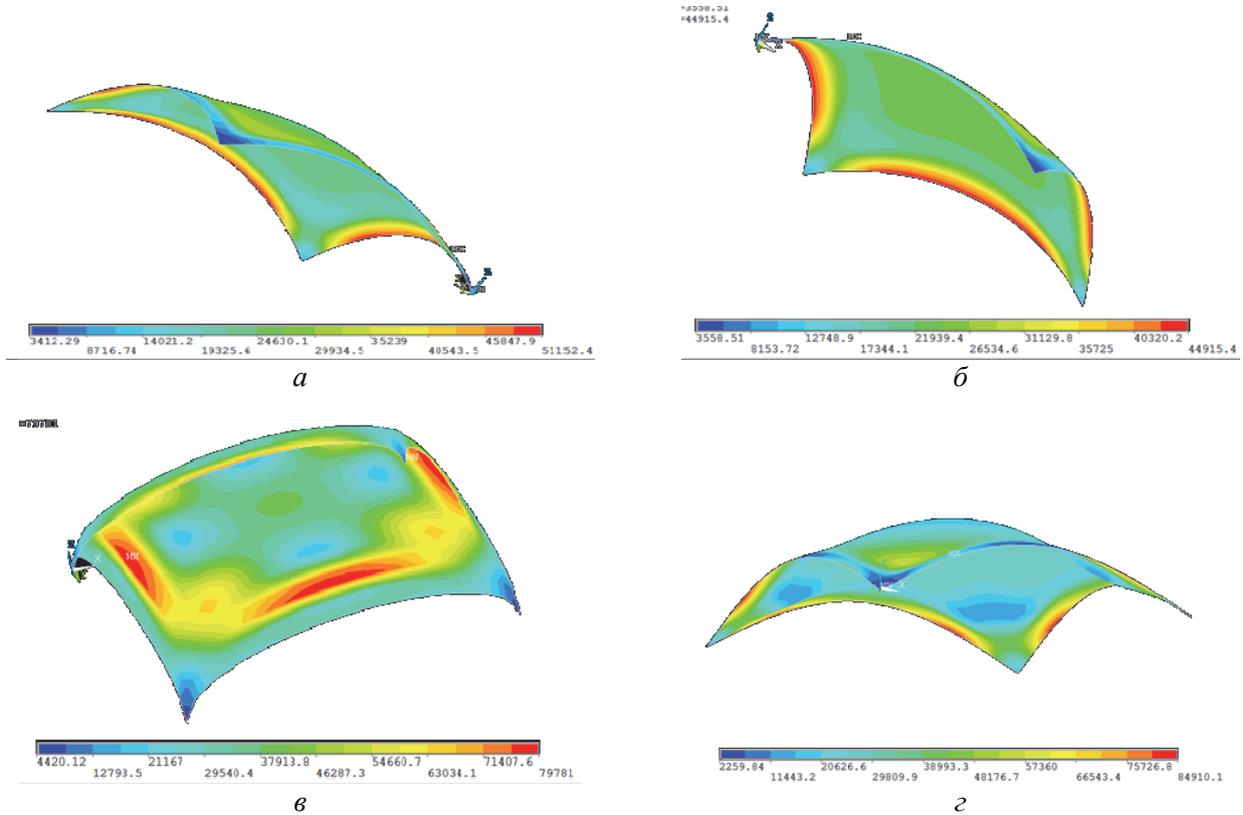


Рис. 10. Эквивалентные напряжения по Мизесу  
[Figure 10. Equivalent stress (von Mises stress) isofields]

Сравнение максимальных усилий и перемещений  
[Table. The comparison of maximum stresses and strain]

	$N_1$	$N_2$	$M_1$	$M_2$	$uz$	$Q_{23}$	$N_{12}$	$\sigma_{\text{экв}} [\sigma_{\text{equiv}}]$
Цепная [Catenary]	-1886	-2448	4,35	23,45	$4,6^{*10^{-6}}$	–	–	51152
Окружность [Circle]	-1996	-2498	3,34	17,97	$5,18^{*10^{-6}}$	–	–	44900
Эллипс [Ellipse]	+1118/-3684	-3684	-10,87	-61,33	$2,11^{*10^{-5}}$	592	146	79780
Синус [Sinus]	-2347	-2190	6.33	31.36	$9,18^{*10^{-6}}$	–	175	84910

## Выводы

По результатам проведенных численных экспериментов можно сделать следующие выводы:

– поверхности переноса окружности по окружности и цепной линии по цепной имеют сравнительно меньшие значения нормальных сил и моментов;

– поверхность переноса синусоида по синусоиде имеет наименьший прогиб в центре и локальные максимумы моментов (максимумы располагаются не в центре оболочки);

– эллипс по эллипсу – наименее выгодная оболочка по значениям силовых факторов, возникают растягивающие, поперечные и перерезывающие силы, для железобетона требуется усиленное армирование;

– все оболочки имеют зоны больших эквивалентных напряжений по контуру опирания и в углах. Наименее эта проблема выражена в случае поверхности переноса окружности по окружности, наиболее остро (самые большие напряжения) у поверхности переноса синусоида по синусоиде. Для железобетонной конструкции это означает, что потребуется усиление армирования для восприятия данных напряжений.

Перспективы данного исследования заключаются в дальнейшем рассмотрении особенностей работы таких оболочек с точки зрения устойчивости, динамики и ударных воздействий.

## Список литературы

1. Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И. Линейная теория тонких оболочек. Ленинград: Политехника, 1991. 656 с.
2. Ram Ranjan Sahu, Pramod Kumar Gupta. Blast Diffusion by Different Shapes of Domes // Defense Science Journal. 2015. Vol. 65. No. 1. Pp. 77–82.
3. Nick B. Search for dome // 3D Warehouse / Trimble Inc. The Netherlands, 2017. URL: <https://extensions.sketchup.com/>
4. Гмирач К.М., Козлов А.В., Проскуров Р.А. Подбор оптимальных параметров эллипсоидной железобе-

тонной оболочки вращения // Международный научно-исследовательский журнал. 2017. № 02 (56). Ч. 3. С. 100–104.

5. Prabhavati P., Vankudre S.B., Varur Veeresh. Optimization of RCC Dome // International Journal of Engineering Research & Technology (IJERT). 2014. Vol. 3. Issue 6. Pp. 1515–1519.

6. Zingoni A. Parametric stress distribution in shell-of-revolution sludge digesters of parabolic ogival form // Thin-Walled Structures. 2002. Vol. 40. Pp. 691–702.

7. Кривошапко С.Н., Иванов В.Н. Псевдосферические оболочки в строительной индустрии // Строительство и реконструкция. 2018. № 2 (76). С. 32–40.

8. Кривошапко С.Н., Иванов В.Н. Катеноидные оболочки // Промышленное и гражданское строительство. 2018. № 12. С. 7–13.

9. Кривошапко С.Н. Оболочки вращения неканонических форм // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2018. № 7 (715). С. 66–79.

10. Krivoshapko S.N. Optimal shells of revolution and main optimizations // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 3. С. 201–209.

11. Encyclopédie Des Formes Mathématiques Remarquables Surfaces. URL: <http://mathcurve.com/surfaces/surfaces.shtml>

12. Krivoshapko S.N., Ivanov V.N. Encyclopedia of Analytical Surfaces. Springer, 2015.

13. Kohnke P. ANSYS: Theory Reference. Release 5.6. ANSYS Inc., 1999.

14. Adriaenssens Sigrid, Veenendaal Diederik, Williams Chris J.K. Shell Structures for Architecture: Form Finding and Optimization. Routledge, 2014. 323 p.

15. Jasion P., Magnucki K. Buckling and post-buckling analysis of untypical shells of revolution // Insights and Innovations in Structural Engineering, Mechanics and Computation: Proc. of the 6<sup>th</sup> International Conference on Structural Engineering, Mechanics and Computation, SEMC-2016. 2016. Pp. 766–771.

16. Gbaguidi Aissè G.L. Influence of the geometrical researches of surfaces of revolution and translation surfaces on design of unique structures // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 4. С. 308–314. URL: <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-4-308-314>

## Optimization study of shape of translational shell of square plan

Evgeniya M. Tupikova

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russian Federation  
tupikova-em@rudn.ru

### Article history:

Received: July 10, 2019

Revised: September 03, 2019

Accepted: October 02, 2019

### For citation

Tupikova E.M. (2019). Optimization study of shape of translational shell of square plan. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 15(5), 367–373. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-5-367-373>. (In Russ.)

### Abstract

**The aim of the work.** The static analysis and comparison of the results for translational shells under equally distributed load of dead weight are provided. The shells of the similar general dimensions in plan and rise of four different types: translation of catenary along catenary, circle along circle, ellipse along ellipse and sinusoid along sinusoid are investigated. **Methods.** The finite element method was applied for the analysis. The research was conducted for the shells of material of reinforced concrete characteristics. **Results.** The comparison has shown that shells of catenary and circle translation surface demonstrate the most advantageous behavior under loading; the worst results for reinforced concrete were got for ellipse along ellipse translation shell. The peculiarities of each type behavior were revealed, that is of interest for their prospective reduction to practice of structural design.

**Keywords:** translational surface; thin elastic shell; finite element method; static analysis

### References

1. Novozhilov V.V., Chernyh K.F., Mihajlovskij E.I. (1991). *Linejnaya teoriya tonkih obolochek [Linear theory of thin shells]*. Leningrad: Politekhnik Publ. (In Russ.)
2. Ram Ranjan Sahu, Pramod Kumar Gupta. (2015). Blast Diffusion by Different Shapes of Domes. *Defense Science Journal*, 65(1), 77–82.
3. Nick B. (2017). Search for dome. 3D Warehouse. The Netherlands, Trimble Inc. <https://extensions.sketchup.com/>
4. Gmirach K.M., Kozlov A.V. (2017). Podbor optimal'nyh parametrov ellipsoidnoj zhelezobetonnoj obolochki vrashcheniya [Selection of optimal parameters of an ellipsoid reinforced concrete shell of revolution]. *Mezhdunarodnyj nauchno-issledovatel'skij zhurnal [International Research Journal]*, 2(56), part 3, 100–104. (In Russ.)
5. Prabhavati P., Vankudre S.B., Varur Veeresh. (2014). Optimization of RCC Dome. *International Journal of Engineering Research & Technology (IJERT)*, 3(6), 1515–1519.
6. Zingoni A. (2002). Parametric stress distribution in shell-of-revolution sludge digesters of parabolic ogival form. *Thin-Walled Structures*, 40, 691–702.
7. Krivoshapko S.N., Ivanov V.N. (2018). Pseudo-spherical shells in building industry. *Building and Reconstruction*, 2(76), 32–40. (In Russ.)
8. Krivoshapko S.N., Ivanov V.N. (2018). Catenoidal shells. *Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo [Industrial and Civil Engineering]*, 12, 7–13. (In Russ.)
9. Krivoshapko S.N. (2018). Shells of revolution of non-trivial forms. *Izvestiya Vuzov. Stroitel'stvo*, 7(715), 66–79. (In Russ.)
10. Krivoshapko S.N. (2019). Optimal shells of revolution and main optimizations. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 15(3), 201–209. (In Russ.)
11. *Encyclopédie Des Formes Mathématiques Remarquables Surfaces*. <http://mathcurve.com/surfaces/surfaces.shtml>
12. Krivoshapko S.N., Ivanov V.N. (2015). *Encyclopaedia of Analytical Surfaces*. Springer International Publishing, Switzerland.
13. Kohnke P. (1999). ANSYS: Theory Reference. Release 5.6. ANSYS Inc.
14. Adriaenssens Sigrid, Veenendaal Diederik, Williams Chris J.K. (2014). *Shell Structures for Architecture: Form Finding and Optimization*. Routledge.
15. Jasion P., Magnucki K. (2016). Buckling and post-buckling analysis of untypical shells of revolution. Insights and Innovations in Structural Engineering, Mechanics and Computation: Proc. of the 6<sup>th</sup> International Conference on Structural Engineering, Mechanics and Computation, SEMC-2016 (pp. 766–771).
16. Gbaguidi Aïssè G.L. (2019). Influence of the geometrical researches of surfaces of revolution and translation surfaces on design of unique structures. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 15(4), 308–314. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-4-308-314>

Evgeniya M. Tupikova, PhD Civil Engineering, Assistant Professor of Department of Civil Engineering, Engineering Academy.