

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ
MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF RUSSIA
PEOPLES' FRIENDSHIP UNIVERSITY OF RUSSIA

LI
ВСЕРОССИЙСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ
ПО ПРОБЛЕМАМ ДИНАМИКИ,
ФИЗИКИ ЧАСТИЦ, ФИЗИКИ ПЛАЗМЫ
И ОПТОЭЛЕКТРОНИКИ

Тезисы докладов

Москва, РУДН, 12–15 мая 2015 г.

LI
ALL-RUSSIA CONFERENCE
ON PROBLEMS IN DYNAMICS,
PARTICLE PHYSICS, PLASMA PHYSICS
AND OPTOELECTRONICS

Moscow, Russia, 12–15 May 2015 g.

Москва
Российский университет дружбы народов
2015

УДК 53(063)
ББК 22.3
В85

Утверждено
РИС Ученого совета
Российского университета
дружбы народов

ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ КОНФЕРЕНЦИИ

Председатель оргкомитета –
д.ф.-м.н., профессор *Ю.П. Рыбаков*

Заместитель председателя –
к.ф.-м.н., доцент *Я.Н. Шаар*

Ответственный секретарь –
аспирант *Гоним Науар*

д.х.н., профессор, декан факультета физико-математических
и естественных наук *Л.Г. Воскресенский*,
д.ф.-м.н., профессор *В.П. Милантьев*, д.ф.-м.н, проф. *В.И. Ильгисонис*,
д.т.н., профессор, засл. деят. науки РФ *Г.П. Башарин*,
д.ф.-м.н., профессор *К.Е. Самуйлов*, д.ф.-м.н, проф. *Н.С. Ерохин*,
д.ф.-м.н., профессор *Л.А. Севастьянов*, д.ф.-м.н., профессор *А.Л. Скубачевский*,
к.ф.-м.н., профессор *И.Л. Толмачев*, д.т.н., проф. *В.А. Комоцкий*

В85 Л1 Всероссийская конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники : тезисы докладов. Москва, РУДН, 12–15 мая 2015 г. – Москва : РУДН, 2015. – 261 с. : ил.

УДК 53(063)
ББК 22.3

ISBN 978-5-209-06776-4

© Коллектив авторов, 2015
© Российский университет дружбы народов,
Издательство, 2015

F(R, T) THEORY OF GRAVITY: SOME REMARKS

Bijan Saha

Laboratory of Information Technologies
Joint Institute for Nuclear Research, Dubna
e-mail: bijan@jinr.ru

Within the scope of $f(R, T)$ gravity we have studied an interacting system of scalar and electromagnetic fields in a Bianchi type I universe. In doing so we have considered the nonlinear generalization of electromagnetic field proposed by Mie that breaks the gauge symmetry at small distances, the Maxwell theory being restored at large distances, i.e, in the linear limit. It was found that if the study is confined to the case $f(R, T) = R + q f(T)$, the system is completely given by the equations similar to Einstein gravity. Moreover, the present study imposes some severe restrictions on the field equations as well.

В рамках $f(R, T)$ теории мы изучили взаимодействующие системы скалярного и электромагнитного полей в Вселенной Бианки типа I. Поступая таким образом, мы рассмотрели нелинейные обобщения электромагнитного поля предложенной Ми, что нарушает калибровочных симметрий на малых расстояниях, теория Максвелла восстанавливаются на большие расстояния, т.е, в линейном пределе. Было установлено, что в случае, если исследование ограничивается в случае $f(R, T) = R + q f(T)$, то систему можно описать уравнениями, похожими на стандартные уравнения Эйнштейна. Более того, в настоящем исследовании накладывает некоторые серьезные ограничения на поле уравнении.

The existence of dark matter in the Universe as well as the recent observational data supporting the accelerated mode of expansion of the Universe pose a fundamental theoretical challenge to the Einstein theory of gravity. One of the possible ways to explain the observations is the modification of the Einstein gravity in such a way that it would give the gravitational alternative to DE. The modified theories of gravity justify the unification of DM and DE, transition from deceleration to acceleration epoch of the universe, description of hierarchy problem, dominance of effective dark energy, which help to solve the coincidence problem and many more.

Currently there are a number of candidates for DE such as cosmological constant, quintessence, Chaplygin gas, k-essence, spinor field, tachyon etc. Another approach is to modify the general relativity itself. This is known as modified gravity. One of such theoretical model is known as $f(R)$ gravity, in which the standard Einstein-Hilbert action is replaced by an arbitrary function of the Ricci scalar R . This model has been extensively used in recent time and it was found that the late-time acceleration of the Universe can be explained within this theory.

Recently a generalization of $f(R, T)$ theory of gravity was proposed by Harko *et al* [1], where T is the trace of stress-energy tensor. After this paper was published in 2011, many authors have investigated different problems within the scope of $f(R, T)$ theory.

The purpose of this note is to study the system of interacting scalar and electromagnetic field within the framework of this new theory and see if this new model can improve the results obtained earlier for a standard Einstein-Hilbert model [2].

It was found that the introduction of stress energy into the system though can be treated as a generalization of the standard $f(R)$ theory, its version in the form $f(R, T) = R + q f(T)$, where q is a coupling constant, can hardly generalize the known results, beside imposing some severe restrictions on the system. Within the scope of an interacting system of scalar and electromagnetic fields we found that such a generalization leads to the flatness of space-time [3].

[1] T. Harko, F.S.N. Lobo, S. Nojiri, and S.D. Odintsov, $f(R, T)$ gravity, *Physical Review D*, **84** 024020 (2011)

[2] Rybakov Yu.P., Shikin G.N., Popov Yu. A., Saha B., Electromagnetic field with induced massive term: Case with scalar field, *Central European Journal of Physics* **9**, 1165 (2011).

[3] Bijan Saha: Interacting Scalar and Electromagnetic Fields in $f(R,T)$ Theory of Gravity, *International Journal of Theoretical Physics* (2015), DOI 10.1007/s10773-015-2615-1; ArXiv: 1410.1738v1 [gr-qc]

ГЕОМЕТРИЯ, ТОПОЛОГИЯ И УРАВНЕНИЯ ИНДУКЦИИ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ

Журавлев В.М.

Ульяновский государственный университет

Ульяновск, Россия

zhvictorm@gmail.com

GEOMETRY, TOPOLOGY AND INDUCTION EQUATIONS OF FUNDAMENTAL FIELDS

(Zhuravlev V.M.)

We construct the dynamics of the fundamental fields within the previously proposed theory of geometric-topological description of matter and the fundamental fields - electromagnetic and gravitational. The paper sets out the derivation of the equations of induction electromagnetic and gravitational fields and some of the consequences of them. The question about the appearance of the theory of the hidden mass as geometric correction in the formula calculating mass density. Provided the calculation of certain invariants theory and their relation to the fine structure constant

В работе строится динамика фундаментальных полей в рамках ранее предложенной теории геометро-топологического описания материи и фундаментальных полей – электромагнитного и гравитационного. В работе излагается вывод уравнений индукции электромагнитного и гравитационного полей и некоторые следствия из них. Обсуждается вопрос о появлении в теории эффекта скрытой массы как геометрической поправки в формуле вычисления плотности масс. Приводятся вычисления некоторых инвариантов теории и их связь с постоянной тонкой структуры.

Основные идеи данной теории были изложены в работах [1,2,3] и представлялись на предыдущей конференции [4]. В настоящей работе идеи, изложенные в этих работах, развиваются и уточняются. Основным элементом данной теории является топологическая интерпретация целочисленного электрического заряда как топологического инварианта областей физического пространства, выделенных геометрическим способом с помощью функции высоты F , которая задает с помощью уравнения

$$u = F(x, t)$$

физическую трехмерную гиперповерхность V^3 в четырехмерном евклидовом пространстве W^4 . Здесь $x = \{x^1, x^2, x^3\}$ и $u = x^4$ - декартовы координаты на W^4 , t - время (абсолютное в W^4). Координаты $x = \{x^1, x^2, x^3\}$ соответствуют токам трехмерной евклидовой гиперплоскости $P^3 \in W^4$. Все пространство P^3 разбивается однозначно на отдельные области особыми изоповерхностями функции F , называемой

фундаментальным потенциалом. Под особой изоповерхностью функции F понимается изоповерхность (или ее замкнутая компонента), на которой лежит хотя бы одна седловая точка данной функции. При этом вводится понятие топологической ячейки, которая определяется как область пространства, ограниченная любой изоповерхностью функции F . Простой топологической ячейкой называется топологическая ячейка, которая содержит один и только один экстремум функции F . Особые топологические ячейки, ограниченные особыми изоповерхностями, состоят из объединения нескольких простых ячеек и рассматриваются как отдельные элементарные частицы материи. Для описания структуры и динамики материи в теории вводится формализм, опирающийся на понятие геометрических маркеров $e = (e^1(\mathbf{x}, t), e^2(\mathbf{x}, t), e^3(\mathbf{x}, t))$, которые на каждой простой и пустой ячейках связываются с фундаментальным потенциалом F соотношением:

$$F = F_0 + \varepsilon \frac{1}{2} |e|^2,$$

где $e^2 = (e^1)^2 + (e^2)^2 + (e^3)^2$, а F_0 - значение функции F в экстремуме F , лежащем в данной топологической ячейке. Введение геометрических маркеров e позволяет ввести теорию поля электрической индукции \mathbf{D} и поле напряженности гравитационного поля \mathbf{g} компонентами:

$$D^\alpha = \frac{1}{|e|^3} Q^\alpha, \quad g^\alpha = \frac{4\pi G}{3} Q^\alpha, \quad Q^\alpha = |J| e^\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial e^\alpha} \quad (1)$$

где G – постоянная тяготения Ньютона, поле \mathbf{Q} вспомогательное. Эти поля удовлетворяют стандартным уравнениям классической теории - первому уравнению Максвелла для \mathbf{D} и уравнению Пуассона для \mathbf{g} :

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi \sum_{k=1}^N \varepsilon_k \delta(x - x_k), \quad \operatorname{div} \mathbf{g} = 4\pi G \rho, \quad \operatorname{div} \mathbf{Q} = 3 |J| \quad (2)$$

Сумма в уравнении Максвелла берется по всем критическим точкам функции F (т.е. экстремумам и седловым точкам этой функции), $\varepsilon_k = \pm 1$ - знаки точечных зарядов, совпадающих с критическими точками. В эти уравнения входит функция $|J|$:

$$|J| = \det \left| \frac{\partial e^\alpha}{\partial x^\alpha} \right|,$$

представляющая собой якобиан преобразования $x \rightarrow e$ и играющая роль “голой” массы плотностью $\rho = |J|$.

Динамика материи описывается с помощью введения в теорию поля переноса маркеров \mathbf{V} , удовлетворяющего уравнению:

$$\frac{\partial e^\alpha}{\partial t} + V^\alpha \frac{\partial e^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0. \quad (3)$$

Следствием этого уравнения является уравнение для $\rho = |J|$:

$$\frac{\partial |J|}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{V} |J|) = 0. \quad (4)$$

Используя (3), можно получить следующее общее уравнение, связывающее поле переноса \mathbf{V} и поля \mathbf{D} , \mathbf{g} , \mathbf{Q} :

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} + \mathbf{rot}([\mathbf{N}, \mathbf{V}]) = - \left(3N(\mathbf{e}) + e^a \frac{\partial N(\mathbf{e})}{\partial e^a} \right) |J| \mathbf{V}. \quad (5)$$

Здесь поле N имеет компоненты $N^\alpha = |J| N(\mathbf{e}) e^a \frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a}$. В случае $N(\mathbf{e}) = 1/R^3$, где $R = \sqrt{2|F - F_0|} = \sqrt{e^2}$, имеем $\mathbf{N} = \mathbf{D}$ и уравнение принимает вид уравнения электромагнитной индукции:

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{rot}([\mathbf{D}, \mathbf{V}]) = - \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \delta(x - x_i) \mathbf{V},$$

в котором роль напряженности магнитного поля играет поле $\mathbf{H} = [\mathbf{D}, \mathbf{V}]$, а роль влотности тока величина:

$$\mathbf{j} = - \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \delta(x - x_i) \mathbf{V}$$

Аналогично, если выбрать $N(\mathbf{e}) = 4\pi G / 3m_0 \sqrt{1 + R^2 / R_0^2}$, то $\mathbf{N} = \mathbf{g}$, уравнение (5) принимает вид уравнения индукции гравитационного поля:

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} + \mathbf{rot}([\mathbf{g}, \mathbf{V}]) = -4\pi G \rho_m \zeta(R) \mathbf{V}.$$

Здесь $\rho_m = m_0 |J| \sqrt{1 + R^2 / R_0^2}$ - плотность массы с учетом геометрической поправки, а

$\zeta(R) = \frac{1}{3} \frac{3 + 4R^2 / R_0^2}{1 + R^2 / R_0^2}$ - геометрический фактор, эквивалентный появлению скрытой массы.

Уравнение Пуассона для \mathbf{g} будет иметь несколько отличный от (2) такой вид:

$$\mathbf{div} \mathbf{g} = 4\pi G \rho_m \zeta(R)$$

В работе обсуждаются некоторые следствия уравнений индукции и вычисляются некоторые инварианты уравнений. Указывается на связь этих инвариантов с постоянной тонкой структуры. Обсуждается вопрос о физическом смысле темной материи в рамках предлагаемой теории.

[1] Zhuravlev V.M. A topological interpretation of quantum theory and elementary particle structure. *Gravitation and Cosmology*, 2011, Vol. 17, No. 3, pp. 201–217.

[2] Журавлев В.М. Геометрия, топология и физические поля (Часть I). *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*, 2014, вып. 4. С. 6-24. <http://www.stfi.ru/ru/issues.html>

[3] Журавлев В.М. Геометрия, топология и физические поля. (Часть II). *Масса и гравитация*, 2014, вып. 4. С. 25-39. <http://www.stfi.ru/ru/issues.html>

[4] Журавлев В.М. Топология, частицы и гравитация. Тезисы докладов XLIX Всероссийской конференции по проблемам физики частиц, физики плазмы и конденсированных сред, оптоэлектроники, Россия, г. Москва, РУДН, 15-18 Мая 2014 г, с. 138-140

СКАЛЯРНО-ТЕНЗОРНАЯ ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ МИНКОВСКОГО

Ю.П. Выблый, И.Г. Дудко

Институт физики имени Б.И. Степанова НАН Беларуси, Минск, Беларусь

После открытия ускоренного расширения Вселенной в литературе активно обсуждаются скалярно-тензорные теории гравитации, в которых нелинейное скалярное поле моделирует темную энергию (см., например, [1] и приведенную там литературу). Проблема, имеющаяся в этом подходе, состоит в выборе соответствующего лагранжиана. Так, например, в [2] было показано, что любое скалярное поле, находящееся в режиме медленного скатывания, может имитировать Λ -член в уравнениях Эйнштейна и, следовательно приводить к удовлетворительному космологическому сценарию.

В данной работе скалярно-тензорная теория рассматривается в рамках подхода в теории гравитации, использующего пространство Минковского. В этом подходе гравитационное взаимодействие описывается симметричным тензорным полем $h^{\mu\nu}$ в пространстве Минковского и постулируется, что источником линейного поля является метрический тензор энергии-импульса всей рассматриваемой физической системы, включая само гравитационное поле. Этот постулат приводит к уравнениям Эйнштейна для эффективной метрики $g_{\mu\nu}$, определяемой условием $\sqrt{-g}g^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma}(\gamma^{\mu\nu} + kh^{\mu\nu})$, где $\gamma^{\mu\nu}$ - метрика пространства Минковского в выбранной системе координат, k - константа гравитационного взаимодействия [3,4]. Отметим, что любое риманово пространство, согласно математическому определению многообразия, отображается на совокупность локальных карт, каждая из которых является, в данном контексте, областью пространства Минковского. Определяя топологию пространства с помощью метрики $g_{\mu\nu}$, приходим к биметрическому формализму общей теории относительности, а с помощью метрики $\gamma_{\mu\nu}$ - к релятивистской теории гравитации [4]. Хотя локальные уравнения в этих случаях одни и те же, решения будут, вообще говоря, различны, если их рассматривать на многообразии в целом.

Поскольку в силу тождеств Бианки система уравнений Эйнштейна является недоопределенной, к ней необходимо добавить еще четыре уравнения, которые можно выбрать в виде $D_\mu h^{\mu\nu} = 0$. где D_μ - ковариантная производная в пространстве Минковского. Эти уравнения обеспечивают ньютоновский предел общей теории относительности и имеют смысл ограничения поля $h^{\mu\nu}$ по спиновым состояниям. Приведенная выше связь метрики и потенциала приводит к общековариантным условиям гармоничности для метрики $D_\mu \sqrt{-g}g^{\mu\nu} = 0$. Существенно, что эти уравнения содержат не саму метрику Минковского, а построенные из нее символы Кристоффеля, что приводит, вообще говоря, к неоднозначности в задании системы координат. Для устранения этой неоднозначности в [4] вводится в рассмотрение масса гравитона, при этом соответствующий член в уравнениях поля явно сдержит метрику Минковского.

Для того, чтобы иметь возможность рассматривать самосогласованную теорию безмассового тензорного поля будем использовать линейную связь метрики и потенциала в виде $g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + kh_{\mu\nu}$, приводящую к условиям

$$\gamma^{\mu\nu} D_{\mu} g_{\nu\alpha} = 0. \quad (1)$$

Заменяя метрику Минковского на метрику $g_{\mu\nu}$ с линейной связью в лагранжиане линейного тензорного поля, мы по-прежнему приходим к уравнениям Эйнштейна. Источником будет теперь не метрический тензор энергии-импульса, а тензорное продолжение псевдотензора энергии-импульса Вейнберга [5, гл.7], что не изменит физических характеристик системы, так как на решениях полевых уравнений эти тензоры совпадают.

По аналогии с тензорным полем, постулируем, что уравнение скалярного поля φ , взаимодействующего минимальным образом с гравитационным можно представить в виде

$$(\square - m^2)\varphi = q(T^M + T^\varphi), \quad (2)$$

где $\square = -g^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \nabla_{\nu}$, m - масса скалярного поля, $T = T_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$ - след соответствующего тензора энергии импульса, q - константа скалярного взаимодействия. Лагранжиан, приводящий к уравнению (2), имеет вид [6]

$$L = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{f} \varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} g^{\mu\nu} - m^2 \varphi^2 + C f^2 \right) \sqrt{-g} + L_M(f g_{\mu\nu}, Q_M). \quad (3)$$

$f = (1 + 2q\varphi)$, C - константа, Q_M - поля материи. Отметим, что без учета взаимодействия скалярного поля с материей соответствующий лагранжиан для случая $C = 0$ был найден ранее в [7]. Постулат об источнике скалярного поля приводит к тому, что материя движется в пространстве с эффективной метрикой $f_{\mu\nu} = (1 + 2k\varphi)g_{\mu\nu}$ и, таким образом, взаимодействие со скалярным полем не меняет метрического характера теории. Из (3) следует явный вид уравнения скалярного поля

$$(\square - m^2)\varphi = q \left(-\frac{\partial_{\mu} \varphi \partial^{\mu} \varphi}{f} + 2m^2 \varphi^2 - 2C f^2 + T_M \right). \quad (4)$$

Потенциал скалярного поля

$$V = \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - \frac{C}{2} (1 + 2q\varphi)^2 \quad (5)$$

при условии $C < m^2/4k^2$ имеет минимум в точке φ_0 , являющейся постоянным решением свободного нелинейного уравнения скалярного поля

$$\varphi_0 = \frac{2kC}{m^2 - 4qC} \quad V(\varphi_0) = -\frac{m^2C}{2(m^2 - 4qC)}. \quad (6)$$

При $C < 0$ потенциал в точке минимума энергии положителен и может быть отождествлен с Λ -членом в уравнениях Эйнштейна. При $0 < C < m^2/4k^2$ потенциал $V(\varphi_0) < 0$. В этом случае член $|V(\varphi_0)|$ может быть интерпретирован как квадрат массы гравитона μ^2 , поскольку в линейном приближении уравнения Эйнштейна могут быть представлены в виде

$$(\square + V(\varphi_0))h_{\mu\nu} = V(\varphi_0)\gamma_{\mu\nu}. \quad (7)$$

Здесь, в отличие от свободного массивного уравнения Фирца-Паули в пространстве Минковского, член $V(\varphi_0)\gamma_{\mu\nu}$ представляет собой тензор энергии-импульса скалярного поля, находящегося в состоянии с минимумом энергии. Таким образом, взаимодействие со скалярным полем позволяет ввести массу гравитона без явного нарушения калибровочной инвариантности эйнштейновского лагранжиана. Полный лагранжиан с учетом гравитационной части в виде скалярной кривизны можно представить в пространстве с метрикой $f_{\mu\nu}$ и новым скалярным полем $\psi = f^{-1}$, аналогично теориям типа Бранса-Дикке. Скалярная кривизна R выражается через новые переменные следующим образом

$$\frac{1}{\psi} \bar{R} - \frac{3}{\psi^2} f^{\mu\nu} \psi_{;\mu;\nu} + \frac{3}{2\psi^3} f^{\mu\nu} \psi_{,\mu} \psi_{,\nu}, \quad (8)$$

где \bar{R} - скалярная кривизна в пространстве с метрикой $f_{\mu\nu}$, с помощью которой определены ковариантные производные. Лагранжиан теории в новых переменных принимает вид

$$L = \left[-\frac{1}{16\pi G} \psi \bar{R} + \frac{1}{8q^2 \psi^2} \left(1 - \frac{3q^2 \psi}{4\pi G} \right) f^{\mu\nu} \psi_{,\mu} \psi_{,\nu} + \frac{1}{2} \left(C - \frac{m^2}{4q^2} (\psi - 1)^2 \right) \right] \sqrt{-\phi} + L^M(f_{\mu\nu}, Q_M), \quad (9)$$

где $\phi = \det f_{\mu\nu}$. Интересно отметить, что в новый лагранжиан постоянная $C/2$ входит аналогично космологическому члену в общей теории относительности.

Рассмотрим космологические уравнения для однородной и изотропной Вселенной, в которой как тензорное, так и скалярное поле зависят только от времени. Интервал Робертсона - Уолкера должен теперь быть записан для метрики $f_{\mu\nu}$

$$ds^2 = f_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = f_{00} dt^2 - a^2 \left(\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\Omega^2 \right). \quad (10)$$

Уравнения (1) примут вид

$$\gamma^{\mu\nu} D_\mu f_{\nu\alpha} = \frac{f_{,\mu}}{f} f_{\mu\alpha} \quad (11)$$

Подставляя метрику (10) в уравнения (11) найдем, что $f_{00} = f$ и $\kappa = 0$. Таким образом, из уравнений (11) вытекает, что Вселенная является плоской на всех этапах своей эволюции. Переходя далее переход в (10) к собственному (наблюдаемому) времени, получаем обычное выражение для пространственно-плоской метрики Робертсона – Уолкера.

В современную эпоху в состав Вселенной входит барионная и темная материя и излучение, к которому отнесем фотоны и нейтрино. Пренебрегая вкладом излучения, запишем космологическую систему уравнений, состоящую из уравнения Фридмана, закона сохранения энергии и уравнения скалярного поля (точка над величиной означает дифференцирование по времени)

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - 2q \frac{\dot{\phi}\dot{a}}{fa} + \left(\frac{q\dot{\phi}}{f} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{1}{2} \frac{\dot{\phi}^2}{f} + \frac{1}{2} \frac{m^2 \phi^2}{f} - Cf + f\varepsilon \right), \quad (12)$$

$$\dot{\phi}\ddot{\phi} - 3\frac{q}{f}\dot{\phi} + m^2\phi\dot{\phi} - 4qCf\dot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi}^2 + qf\dot{\phi}\varepsilon + f^2\left(\dot{\varepsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}\varepsilon\right) = 0, \quad (13)$$

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} + 5q\frac{\dot{\phi}^2}{f} + m^2\phi - 4Cqf + qf\varepsilon = 0, \quad (14)$$

ε - плотность барионной и темной материи. Система уравнений (12) – (14) должна решаться при заданных начальных условиях:

$$a(0) = 1, H(0) = H_0, \phi(0) = \phi_{(0)}, \dot{\phi}(0) = \dot{\phi}_{(0)}. \quad (15)$$

Здесь $t = 0$ означает настоящий момент времени. Начальные условия для скалярного поля можно определить, если использовать значения параметров темной энергии [8]

$$\Omega_{DE} = \frac{\varepsilon^\phi}{\varepsilon^c} = 0,74, \quad \omega_{DE} = \frac{\varepsilon^\phi}{p^\phi} = -0,97. \quad (16)$$

и использовать выражения для плотностей энергии и давления скалярного поля

$$\varepsilon^\varphi = \frac{1}{2f}(\dot{\varphi}^2 + m^2\varphi^2 - Cf^2), \quad p^\varphi = \frac{1}{2f}(\dot{\varphi}^2 + m^2\varphi^2 + Cf^2). \quad (17)$$

Рассмотрим ограничения на параметры, приводящие к режиму медленного скатывания, который определяется условием

$$H\dot{\varphi} \sim \frac{\partial V}{\partial \varphi}. \quad (18)$$

Для квадратичного потенциала (5) соответствующее условие (18) приводит к соотношению $\frac{V}{\varphi^2} \ll H^2$ [9], что с учетом выражения для эффективного Λ -члена (6) и значений φ_0 и H_0 позволяет получить соотношение между двумя независимыми параметрами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин Ю.Л., Блохин Д.А., Лемец О.А. УФН (2013), т.182, № 9, с.941-986.
2. Scherer R.J., Sen A.A. Phys. Rev. D 77 (2008) 083515.
3. Deser S. Gen.Rel.Grav. (1970), v.1, p. 9-15.
4. Логунов А.А., Мествиришвили М.А. Релятивистская теория гравитации. М. Наука, 1989. 304 с.
5. Вейберг С. Гравитация и космология. М. Мир, 1975, 696 с.
6. Выблый Ю.П., Тарасенко А.Н. Ковариантные методы в теоретической физике. Физика элементарных частиц и теория относительности. Вып. 7, с.36-44.
7. Freund P., Nambu Y. Phys. Rev. D 174 (1968), p. 1741-1748.
8. Panotopoulos G. arXiv:astro-ph/0606249 (2006) [Preprint].
9. Горбунов Д.С., Рубаков В.А. Введение в теорию ранней Вселенной. М. URSS, 2008, 552 с.

ON THE EHRENFEST THEOREM IN PRECANONICAL QUANTIZATION OF FIELDS AND GRAVITY

Igor V. Kanatchikov

School of Physics and Astronomy, University of St Andrews, Scotland

Precanonical quantization in field theory has been put forward by the author as a generalization of canonical quantization. It uses the De Donder-Weyl (DW) Hamiltonian formulation as a starting point of quantization, rather than the canonical Hamiltonian formalism. While the latter requires a space-time decomposition, the former treats the space and time variables on the equal footing. I overview the elements of precanonical quantization starting from the mathematical structures of the DW Hamiltonian formalism, which are used for quantization, and finishing with the discussion of the relation of the resulting formalism of quantization of fields with the usual functional Schrödinger representation in quantum field theory, which results from canonical quantization. It is demonstrated that the latter emerges as a limiting case of precanonical quantization when the parameter of “elementary volume”, which appears in precanonical quantization on the dimensional grounds, is vanishing. After having introduced the subject, I show how the constructions of precanonical quantization allow to demonstrate the analogue of the Ehrenfest theorem: the classical field equations are obtained as the equations of expectation values of precanonical (Clifford algebra valued) operators, which are calculated using the precanonical (Clifford algebra valued) wave functions obeying the precanonical (Dirac-like) analogue of the Schrödinger equation. The Ehrenfest theorem is demonstrated for scalar fields in flat and curved space-time, and for Yang-Mills fields. I also present first considerations of how the Ehrenfest theorem works also within the precanonical quantization approach to quantum gravity. The talk is based on the work in progress and the previous published papers by the author:

- [1] I.V. Kanatchikov, **Ehrenfest theorem in precanonical quantization**, J. Geom. Symmetry Phys. (JGSP) 37 (2015) 43-66, [arXiv:1501.00480](https://arxiv.org/abs/1501.00480).
- [2] I.V. Kanatchikov, **On precanonical quantization of gravity**, Nonlin. Phenom. Complex Sys. (NPCS) 17 (2014) 372-376, [arXiv:1407.3101](https://arxiv.org/abs/1407.3101).
- [3] I.V. Kanatchikov, **On the precanonical structure of the Schrödinger wave functional**, [arXiv:1312.4518](https://arxiv.org/abs/1312.4518).
- [4] I.V. Kanatchikov, **Precanonical Quantization and the Schrödinger Wave Functional Revisited**, Adv. Theor. Math. Phys. (ATMP) 18 (2014) 1249-1265, [arXiv:1112.5801](https://arxiv.org/abs/1112.5801).
- [5] I.V. Kanatchikov, **De Donder-Weyl Hamiltonian formulation and precanonical quantization of vielbein gravity**, J. Phys.: Conf. Ser. 442 (2013) 012041, [arXiv:1302.2610](https://arxiv.org/abs/1302.2610).
- [6] I.V. Kanatchikov, **On a generalization of the Dirac bracket in the De Donder-Weyl Hamiltonian formalism**, [arXiv:0807.3127](https://arxiv.org/abs/0807.3127).
- [7] I.V. Kanatchikov, **On quantization of field theories in polymomentum variables**, [hep-th/981106](https://arxiv.org/abs/hep-th/981106).

СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОЕ РЕШЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ КАРТАНА–ВЕЙЛЯ

О.В. Бабурова, Е.В. Романова, Б.Н. Фролов

Московский педагогический государственный университет,

Институт физики, технологии и информационных систем,

Москва, Российская Федерация

E-mails: baburova@orc.ru, solntce_07@mail.ru, frolovbn@orc.r

В [1] был сформулирован новый вариационный принцип в пространстве Картана–Вейля SW_4 , представляющий собой модификацию вариационного принципа в этом пространстве, развитого и используемого в работах [2]–[5]. Суть модификации сводится к тому, что скалярное поле Дирака β не вводится независимо от метрического тензора, как это осуществлялось в [2]–[5], а реализуется как представление метрического тензора касательного пространства

$$g_{ab} = \beta^2(x) g_{ab}^M, \quad (1)$$

где g_{ab}^M – постоянные компоненты метрического тензора пространства Минковского, а $\beta(x)$ – произвольная функция точек пространства-времени. Такое представление метрического тензора вытекает из калибровочной теории группы Пуанкаре–Вейля, развитой в [6], [7], и соответствует лемме (Б.Н. Фролов, 2003) о метрическом тензоре общего аффинно-метрического пространства, доказанной в [8] (см. также [5]).

Результат данной работы следующий: хотя вариационные уравнения поля и отличаются от полученных в работе [5] на основе старого вариационного формализма, тем не менее, статически симметричное решение, найденное в [5], будет также решением вариационных уравнений, соответствующих модифицированному в [1] вариационному принципу.

Для упрощения проведения вариационной процедуры в 4-форму лагранжевой плотности L , построенную в [1], подставим явные выражения для неприводимых частей 2-формы кручения T^a и 1-формы неметричности $Q_{ab} = -Dg_{ab}$, взятые из обзора [9], опустим слагаемые с квадратами 2-формы кривизны R^a_b , а также слагаемое с космологической постоянной Λ (так как будет рассматриваться локальная задача). В результате получим

$$L = L_G + L_{mat} + \lambda^{ab}(g_{ab} - \beta^2 g_{ab}^M), \quad (2)$$

$$L_G = 2f_0 \left[(1/2) R^a_b \wedge \eta_a^b + \rho_1 T^a \wedge *T + \rho_2 (T^a \wedge \theta_b) \wedge *(T^b \wedge \theta_a) + \right. \\ \left. + \rho_3 (T^a \wedge \theta_a) \wedge *(T^b \wedge \theta_b) + 16\xi Q_{ab} \wedge *Q^{ab} + 4\zeta Q_{ab} \wedge \theta^a \wedge *T^b \right]. \quad (3)$$

Здесь \wedge – символ внешнего умножения, $*$ – дуальное сопряжение Ходжа, $\eta_a^b = *(\theta_a \wedge \theta^b)$, λ^{ab} – неопределенные множители Лагранжа (0-формы), $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \xi, \zeta$ – константы связи.

Для получения уравнений гравитационного поля нужно независимо варьировать (2) и (3) по базисным формам θ^a (θ -уравнение), 1-форме связности Γ^a_b (Γ -уравнение), компонентам метрического тензора касательного пространства g_{ab} (g -уравнение), скалярному полю β и множителям Лагранжа λ^{ab} . В формализме внешних форм варьирование основано на использовании леммы о результате коммутации операторов варьирования и дуального сопряжения Ходжа, сформулированной и доказанной в [9].

Вид получаемых θ^a , Γ - и g -уравнений можно получить из соответствующих вариационных уравнений, выписанных в [2], [3], если в них положить $\beta = 1$. Варьирование по β дает условие $\lambda^{ab} g_{ab} = 0$. Варьирование по λ^{ab} дает структуру метрического тензора касательного пространства (1), которая реализуется при определенном наиболее удобном выборе базиса касательного пространства в каждой точке пространства-времени. Как показано в [1], следствием (1) является условие (D -ковариантный внешний дифференциал, см. [2]):

$$Q_{ab} = -D g_{ab} = (1/4) g_{ab} Q, \quad Q = q d \ln \beta, \quad q = -8. \quad (4)$$

Так как это равенство является тензорным, то оно выполняется при любом выборе базиса касательного пространства. Это означает, что пространство-время имеет геометрическую структуру пространства Картана–Вейля SW_4 . Представления (1) и (4) следует подставить в указанные выше вариационные полевые уравнения, что приводит к проявлению взаимодействия гравитационного поля со скалярным полем Дирака β .

В сферически симметричном случае решение будем искать в виде

$$ds^2 = e^{-\mu} dt^2 - e^{\mu} (dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)),$$

где $\mu = \mu(r)$. Вследствие сферической симметрии 2-форма кручения определяется только своим следом: $\Gamma^a = (1/3) \Gamma \wedge \theta^a$. Как следствие Γ -уравнения (см. [1]), 1-форма следа кручения может быть представлена в виде $\Gamma = s d \ln \beta$, $s = \text{const}$.

Подставляя представления 2-формы кручения и 1-формы неметричности в Γ -уравнение, получаем, что оно сводится к одному алгебраическому уравнению:

$$2s(\rho_1 - 2\rho_2) + 3q(\zeta + (1/4)) = 0. \quad (5)$$

Тогда с учетом (5) все компоненты θ -уравнения сведутся к двум уравнениям:

$$r\mu'' + 2\mu' = 0, \quad \pm k\mu' = (\ln \beta)', \quad (6)$$

$$k^{-2} = q^2 \xi + (1/2)qs\zeta + (1/8)qs - (3/64)q^2. \quad (7)$$

Вычисляя след g -уравнения, находим, что он также сводится к уравнениям (6) и (7), а остальные компоненты g -уравнения позволяют вычислить компоненты λ^{ab} . Таким образом, решение вариационных полевых уравнений для метрики и скалярного поля Дирака имеет вид

$$\mu(r) = \frac{r_0}{r}, \quad \beta(r) = \beta_{\infty} \exp\left(\pm \frac{kr_0}{r}\right). \quad (8)$$

Наиболее простой случай возникает, если в (7) (как и в [1]) положить $s = -3$. Тогда (с учетом $q = -8$) последние два члена в (7) исчезают, и для простоты можно положить $\zeta = 0$.

В результате возникает пространство Картана–Вейля с метрикой

$$ds^2 = e^{-\frac{r_0}{r}} dt^2 - e^{\frac{r_0}{r}} (dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)). \quad (9)$$

Данная метрика при больших значениях r приводит к тем же самым экспериментальным результатам, как и метрика Шварцшильда, если константу интегрирования выбрать равной $r_0 = r_g = 2Gm/c^2$. Метрика (9) известна как метрика Илмаза–Розена [11]. Интерес к этой метрике [12], [13] возникает в связи с тем, что она не содержит сингулярности на гравитационном радиусе. Вместе с тем, она может содержать модифицированное решение типа черной дыры.

Согласно (8) плотность скалярного поля Дирака возрастает внутри скоплений масс, что увеличивает гравитационное поле внутри этих скоплений. В связи с этим в [2] высказана

гипотеза о том, что *скалярное поле Дирака представляет собой наряду с «темной энергией» также основную компоненту «темной материи».*

Результаты были получены в рамках выполнения государственного задания № 3.1968.2014/К Минобрнауки России.

Список литературы:

1. Бабурова О. В., Фролов Б. Н., Фебрес Е. В. //Изв. высш. уч. завед. Физика.–2015.–Т. 58.–№ 9.–С. 131–132.
2. Бабурова О. В., Фролов Б. Н. Математические проблемы современной теории гравитации.–М.: МПГУ, Издательство «Прометей», 2012.–128 с.
3. Babourova O. V., Frolov B. N., Lipkin K. N. //Gravit. Cosm.–2012.–V. 18.–No 4.–P. 225–231.
4. Бабурова О. В., Липкин К. Н., Фролов Б. Н., Щербань В. Н. //Изв. высш. уч. завед. Физика.–2013.–Т. 56.–№ 6.–С. 103–104.
5. Бабурова О. В., Фролов Б. Н., Фебрес Е. В. //Изв. высш. уч. завед. Физика.–2014.–Т. 57.–№ 9.–С. 131–132.
6. Babourova O. V., Frolov B. N., Zhukovsky V. Ch. //Phys. Rev. D.–2006.–V. 74.– P. 064012-1-12 (gr-qc/0508088).
7. Babourova O. V., Frolov B. N., Zhukovsky V. Ch. //Gravit. Cosmol.–2009.–V. 15.–No. 1.–P. 13–15.
8. Фролов Б. Н. Пуанкаре-калибровочная теория гравитации.–М.: МПГУ, 2003.–160 с.
9. Hehl F. W. et al //Phys. Rep.–1995.–V. 258.–P. 1–171 (gr-qc/9402012).
10. Babourova O. V., Frolov B. N., Klimova T. A. //Class. Quantum Grav.–1999.–V. 16.–P. 1–14 (gr-qc/9805005).
11. Yilmaz H. //Phys. Rev. – 1958.–V. 111.–P. 1417–142; Rosen N. //Gen. Rel. Grav. J. – 1973.–V. 4.–P. 435–447.
12. Wyman M. //Phys. Rev. D.–1981.–V. 24.–P. 839–841; Kaniel S., Itin Y. //ArXive: gr-qc/9707008. – 1997.
13. Muench U., Gronwald F., Hehl F. W. //ArXive: 9801.1036 [gr-qc].–1998.

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ ВО ВСЕЛЕННОЙ С ДВУХКРАТНЫМ УСКОРЕНИЕМ

Ю.Г. Игнатьев, А.М. Нигмедзянова

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия

Аннотация. Проведено численное моделирование процесса восстановления термодинамического равновесия в неравновесной космологической плазме при условии скейлинга взаимодействий в унитарном пределе и позднего космологического ускорения. Рассмотрена модель двухкратного ускорения, основанная на моделировании суммарного коэффициента баротропы трехпараметрической функцией. На основе развитого ранее метода баланса энергии проведено численное интегрирование самосогласованной системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, описывающих процесс восстановления термодинамического равновесия.

ESTABLISHING OF THERMODYNAMICAL EQUILIBRIUM IN TWICE ACCELERATED UNIVERSE

Yu.G. Ignat'ev, A.M. Nigmedzianova

Kazan (Volga region) Federal University, Kazan, Russia

Annotation. Numerical modelling of process of restoration of thermodynamic equilibrium in nonequilibrium cosmological plasma is spent under a condition scalling of interactions in unitare limit and late cosmological acceleration. The model of two-multiple acceleration based of the modelling of coefficiente barotrope by three-parametric function is considered. On the basis of the balance of energy developed before a method numerical integration of the self-consistent system of the nonlinear integro-differential equations, described process of restoration of thermodynamic equilibrium is execute.

Одним из Авторов на основе анализа результатов аксиоматической теории S - матрицы и экспериментальных данных по сечениям рассеяния частиц сверхвысоких энергий была выдвинута гипотеза о восстановлении скейлинга взаимодействий элементарных частиц при энергиях выше унитарного предела [1] и предложена формула асимптотического сечения рассеяния за унитарным пределом, имеющая скейлинговое поведение и составленная из трех фундаментальных констант - [2].

Рассматривалась аналитическая и численная модели восстановления термодинамического равновесия в условиях произвольного ускорения Вселенной. Однако в этих работах не была учтена возможность двухкратного ускорения, при которых имеется длительная космологическая эпоха с отрицательным ускорением. Поскольку до сих пор не существует адекватной аналитической модели перехода с режима ускорения и обратно, рассмотрим модельную задачу, когда коэффициент баротропы задается некоторой гладкой функцией с требуемыми свойствами. Развитый в указанных работах метод энергобаланса позволяет провести в замкнутом виде интегрирование самосогласованной системы кинетических уравнений и уравнений Эйнштейна и, тем самым, осуществить численное моделирование поставленной задачи. Для проведения численного моделирования предложена простая регулируемая модель суммарного коэффициента

баротропы, зависящая от трех параметров: t_1 – времени начала первого инфляционного ускорения, t_2 – времени перехода на второй режим ускорения, k_∞ – коэффициента баротропы на этом этапе (см. Рис. 1).

$$k(t_1, t_2, k_\infty; t) = \frac{1}{3} - \frac{4}{3} \frac{t^2}{t_1^2 + t^2} + (1 - k_\infty) \frac{t^2}{t_2^2 + t^2} \quad (1)$$

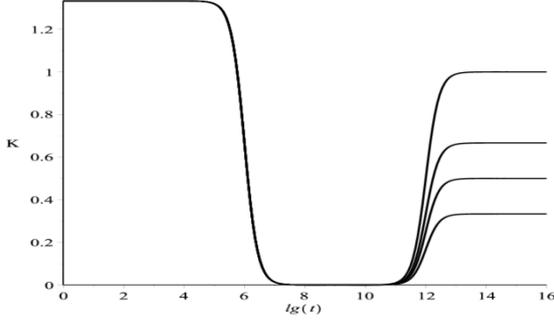


Рис.1. Эволюция суммарного коэффициента баротропы согласно (1): $\kappa(10^6, 10^{12}, -1/3; t)$, $\kappa(10^6, 10^{12}, -0.5; t)$, $\kappa(10^6, 10^{12}, -2/3; t)$, $\kappa(10^6, 10^{12}, -1; t)$

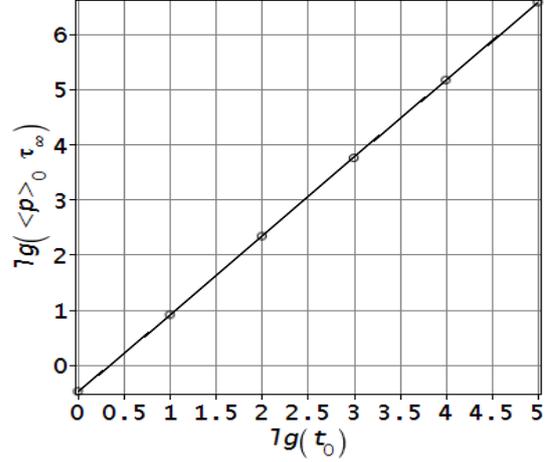


Рис.2. Зависимость безразмерного временного параметра $\tau_\infty \langle \bar{p} \rangle_0$ от космологической константы $t_0 \equiv t_c$; всюду $e_0 = 1$, $t_1 = 10^6$, $t_2 = 10^{12}$, $N_0 = 50$, $N = 50$, $p_0 = 100$.

Решая систему дифференциальных уравнений Эйнштейна с показателем баротропы (1)

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \varepsilon (1 + k(t)) = 0 \\ \frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \varepsilon \end{cases}$$

найдем

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \left(1 + \sqrt{6\pi\varepsilon_0} \left[\frac{4}{3} t_1 \arctg \frac{t}{t_1} + (1 - k_\infty) \left(t - t_2 \arctg \frac{t}{t_2} \right) \right] \right)^{-2},$$

причем,

$$\varepsilon(t, \varepsilon_0, t_1, t_2, k) \rightarrow (6\pi k^2 - 12\pi k + 6\pi)^{-1} \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

Масштабный фактор затем находится численным интегрированием. После этого задача сводится к стандартной в методе энергобаланса. В работе представлены результаты численного моделирования задачи.

Наличие неравновесного хвоста распределения неравновесных частиц на бесконечных временах и относительная доля их энергии определяются величиной $\tau_\infty \equiv \tau(t = \infty)$, где

$$\tau = 2 \int_0^t \frac{\xi}{a} dt .$$

В работах [2-5] показано, что при наличии ускорения Вселенной $\tau_\infty < \infty$, что обеспечивает сохранение неравновесного хвоста распределения частиц при бесконечно больших космологических временах. В данной работе проводится численное интегрирование τ_∞ и делаются оценки возможной доли неравновесных частиц во Вселенной с двухкратным ускорением (рис.2)

Литература

1. L.D. Landau, J. Sov. Phys. (JETP) 10, 718 (1949).
2. Yu.G. Ignat'ev, J. Sov. Phys. (Izv. Vuzov). 29, No 2, 19 (1986).
3. Yurii Ignatyev, Gravitation and Cosmology, 2013, Vol. 19, No. 4, pp. 232-239. DOI: 10.1134/S0202289313040087
4. Yu. G. Ignat'ev, Russian Physics Journal, Vol. 56, No. 6, November, 2013. - p. 693-706 DOI: 10.1007/s11182-013-0087-4
5. Yu.G. Ignatyev, Gravitation and Cosmology, 2014, Vol. 20, No. 1, pp. 99-105. DOI: 10.1134/S0202289314020066
6. Ю.Г. Игнат'ев, А.М. Нигмедзянова. Моделирование процесса восстановления термодинамического восстановления во Вселенной с двухкратным ускорением. // Международная научно-практическая конференция ИТОН-2014. Казань: изд-во «Фолиант», 2014. – с.236-239.

КВАНТОВАНИЕ ГРАВИТАЦИОННО-СВЯЗАННЫХ СИСТЕМ

М.Л. Фильченков

«QUANTIZATION OF GRAVITATIONALLY BOUND SYSTEMS»

M.L. Fil'chenkov

*Учебно-научный институт гравитации и космологии
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
e-mail: fmichael@mail.ru*

The properties of gravitationally bound systems are compared, while quantizing particle motion and extraneous fields in curved space-time, geometry as a whole and space-time itself. To these quantization levels correspond the objects and processes as follows: graviatoms, pre-de-Sitter Universe, the Universe's and particle creation, quantum gravitational collapse.

Сравниваются свойства гравитационно-связанных систем при квантовании движения частиц и сторонних полей в искривлённом пространстве-времени, геометрии в целом и самого пространства-времени. Этим уровням квантования соответствуют следующие объекты и процессы: гравиатомы, додеситтеровская Вселенная, рождение Вселенной и частиц, квантовый гравитационный коллапс [1,2].

1. Введение

Некоторые подходы к квантованию гравитации довольно хорошо разработаны. Особенно это касается квантовой теории поля в искривлённом пространстве-времени. Основными квантовыми эффектами сторонних полей в заданном гравитационном поле являются: поляризация вакуума, рождение частиц, спонтанное нарушение симметрии. Слабые гравитационные поля обычно рассматриваются в рамках теории тензорного поля в пространстве Минковского. Модели супергравитации оказываются неперенормируемыми в высших порядках теории возмущений. Теория супергравитации является низкоэнергетическим пределом теории суперструн, высшие размерности которой компактифицируются в пространствах Калаби-Яу. Петлевая квантовая гравитация обобщает квантовую геометродинамику на масштабах сравнимых с планковской длиной. Геометрические величины являются операторами, имеющими дискретные собственные значения, поэтому в петлевой квантовой гравитации нет расходимостей.

Другие подходы до сих пор не нашли применения к конкретным задачам, возникающим в релятивистской астрофизике и космологии. В основном это касается квантовой механики в гравитационном поле, квантового гравитационного коллапса и квантовой космологии, когда мы имеем дело с гравитационно-связанными квантовыми системами. Решение этих задач является весьма актуальным как с точки зрения создания последовательной теории квантования гравитации, так и в связи с построением квантовых моделей компактных астрофизических объектов и ранней Вселенной. Их значение особенно важно в виду всё возрастающего потока информации, получаемой при астрономических наблюдениях и космических экспериментах.

2. Энергия гравиатома и додеситтеровской Вселенной

Энергетические уровни гравиатома

$$E = -\frac{2B^2 m}{\hbar^2} \frac{1}{\left[2p + 1 + \sqrt{(2l + 1)^2 + \frac{8mA}{\hbar^2}}\right]^2} \quad (1)$$

где $p = n - s - 1 = 0, 1, 2, \dots$; $l \leq n$, $n = 1, 2, 3, \dots$; m – масса частицы, входящей в состав гравитатома, l – главное и орбитальное квантовые числа соответственно, причём $s(s+1) = \frac{2mA}{\hbar^2} + l(l+1)$, $A = \frac{mc^2 r_q r_g}{4}$, $B = \frac{mc^2 r_g}{2}$, где r_g – гравитационный радиус минидыры, r_q – классический радиус частиц с массой m и зарядом q , входящих в состав гравитатома.

Энергетические уровни додеситтеровской Вселенной (ср. атомом Леметра) при $n' = 3(1+w) = 4, 5, 6$

$$E = -\left(\frac{r_0}{l_{pl}}\right)^6 \frac{B_{5m_{pl}}^2 c^2}{8 \left[p + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - B_6 \left(\frac{r_0}{l_{pl}}\right)^4} \right]^2} \quad (2)$$

где $p = 0, 1, 2, \dots$; где $p = w\varepsilon$ – баротропное уравнение состояния, r_0 – горизонт де Ситтера, B_5 – вклад идеального газа, B_6 – вклад предельно жёсткой материи в плотность энергии на горизонте де Ситтера, m_{pl} – планковская масса.

При $\frac{8mA}{\hbar^2} \ll (2l + 1)^2$ и $n' = 4, 5, 6$; $B_6 \left(\frac{r_0}{l_{pl}}\right)^4 \ll \frac{1}{4}$ в обоих случаях получаем водородоподобный спектр $E = -\frac{E_a}{2n^2}$, где E_a – атомная единица энергии.

Для гравитатома $E_a \sim mc^2$. Для атома Леметра $E_a \sim 10^{54} m_{pl} c^2$.

При $\frac{8mA}{\hbar^2} \gg (2l + 1)^2$ и $n' = 0, 2, 4$ в оих случаях получаем осцилляторный спектр. Для гравитатома $\hbar\omega_{ga} \ll mc^2$. Для квантовой Вселенной

$$\hbar\omega_U = m_{pl} c^2 \sqrt{k - B_2}, \quad (3)$$

где B_2 – вклад струн в плотность энергии на горизонте де Ситтера, $k = 0 \pm 1$ – параметр модели.

3. Массы минидыр и частиц в гравитатоме и ранней Вселенной

Массы минидыр M захватываемых ими частиц в гравитатоме и массы лепто кварков, рождаемых в ранней Вселенной, m связаны одним и тем же соотношением:

$$Mm \sim m_{pl}^2, \quad (4)$$

что следует из условия совместности рождения частиц и джнсовской неустойчивости для минидыр.

Частицы рождаются после выхода Вселенной из-под потенциального барьера в результате распада неустойчивого деситтеровского вакуума.

$$m > m_{pl} \sqrt{\frac{k - B_2}{B_0}} \quad (5)$$

где B_0 – вклад деситтеровского вакуума в плотность энергии на горизонте де Ситтера.

Для плоской модели на масштабах от l_{pl} до $r_0\sqrt{k - B_2}$ справедливы петлевая квантовая гравитация и квантовая геометродинамика, а на больших масштабах: от $r_0\sqrt{k - B_2}$ до λ_c – квантовая теория поля в искривлённом пространстве-времени, переходящая в ОТО на масштабах больших λ_c . Если допустить, что образование первичных чёрных дыр может играть определённую роль при генерации начальных возмущений плотности, обусловленных дискретностью пространства, то возникает связь минидыр с петлевой квантовой гравитацией.

4. Вероятность рождения новой вселенной

Вероятность рождения вселенной в результате гравитационного коллапса

$$D \sim \left\{ -2|B_4|^{\frac{3}{4}} \left(\frac{r_0}{l_{pl}} \right)^2 \right\}, \quad (6)$$

где B_4 – вклад излучения в плотность энергии на горизонте де Ситтера.

$$|B_4| \gg 1.$$

Вероятность рождения новой вселенной в результате квантовой флуктуации

$$D \sim \left\{ -\frac{2(k - B_2)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{r_0}{l_{pl}} \right)^2}{3B_0} \right\}, \quad (7)$$

где B_0 – вклад деситтеровского вакуума в плотность энергии на горизонте де Ситтера. При $4B_0 B_4 \sim (k - B_2)^2$ формула (7) сводится к формуле (6) при $B_4 \ll 1$. Поэтому рождение вселенной в результате квантовой флуктуации намного более вероятно, чем в результате гравитационного коллапса.

5. Интерпретация полученных результатов

Общие свойства гравитационно-связанных систем связаны с тем, что в одном и том же квантовом объекте или процессе присутствуют сразу несколько уровней квантования.

Для гравиатомов играет роль квантовая механика и квантовая теория поля в искривлённом пространстве-времени. Отсюда связь между массами минидыр и частицами захватываемых. Гравиатом и атом Леметра описываются уравнением типа стационарного уравнения Шрёдингера. Для атома Леметра это следует из квадратичности по импульсу уравнения Переса, а также возможности получения уравнений Фридмана из ньютоновской теории гравитации. Связь между соотношениями для гравиаатома и образования минидыр и лептокварков в ранней Вселенной обусловлена наличием минидыр и рождением частиц в искривлённом пространстве-времени. Единая формула для рождения новой вселенной в результате гравитационного коллапса и квантовой флуктуации обусловлена тем, что оба процесса базируются на туннельном эффекте.

Рассмотрение гравитационно-связанных квантовых систем может сыграть определённую роль в создании последовательной теории квантования гравитации. Контуры такой теории уже видны в попытках согласования теории суперструн с петлевой квантовой гравитацией. В частности удалось объяснить эффект Хокинга в рамках обоих подходов. В последнее время развивается направление, объединяющее петлевую и струнную космологии. Струнная квантовая космология с помощью скалярных дилатонных полей моделирует идеальную жидкость с баротропным уравнением состояния, фиксирующим определённый тип материи, флуктуации которой задаются пространственно-временной пеной, описываемой петлевой квантовой космологией.

Литература:

1. M.L. Fil'chenkov. Quantum Gravity. Moscow. Peoples' Friendship University of Russia, 2013, 116 p.
2. М.Л. Фильченков. Квантование гравитационно-связанных систем. Докторская диссертация, РУДН. М. – 2013 г. – 171 с.

КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ ЭВОЛЮЦИЯ БОЛЬЦМАНОВСКОЙ ПЛАЗМЫ С МЕЖЧАСТИЧНЫМ ФАНТОМНЫМ СКАЛЯРНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Ю.Г. Игнатъев, М.Л. Михайлов

Казанский федеральный университет, институт математики и механики
им. Н.И. Лобачевского, Казань, Россия

ignatev_yu@rambler.ru mikhaylovml@mail.ru

Аннотация. Сформулирована полностью самосогласованная математическая модель космологической двухкомпонентной симметричной бальцмановской плазмы с межчастичным фантомным скалярным взаимодействием. На основе сформулированной математической модели построена и исследована численная модель космологической плазмы с межчастичным скалярным взаимодействием. Модель обнаруживает ряд характерных особенностей поведения, отличающих ее от стандартных минимальных моделей скалярного взаимодействия. Отличительной чертой скалярно заряженной космологической плазмы является появление фантомных всплесков космологического ускорения, сопровождающиеся одновременным разогревом плазмы, в космологические времена порядка миллиона планковских времен.

COSMOLOGICAL EVOLUTION OF THE BOLTZMAN PLASMA WITH INTERPARTICLE PHANTOM SCALAR INTERACTION

Yu.G. Ignat'ev, M.L. Mikhaylov

Abstract. The complete self-consistent mathematical model of the cosmological two-component symmetrical Boltzmann plasma with phantom scalar interparticle interaction was defined. On the basic of formulated mathematical model, the numerical model of the cosmological plasma with phantom scalar interparticle interaction was constructed and researched. The model possesses a series of behavior characteristics, which distinguish it from standard models of scalar interaction. One of the distinguishing feature of the scalar charged cosmological plasma is existence of phantom splashes of the cosmological acceleration. These splashes accompanied by synchronous plasma heating at the cosmological times of million Planck time order.

Введение

В последние годы появилось большое число работ, в которых рассматриваются скалярные поля, необходимые для объяснения ускорения Вселенной. При этом необходимо выделить модели с минимальным взаимодействием, в которых взаимодействие скалярного поля с обычной материей осуществляется только посредством гравитационного взаимодействия, и модели с неминимальным взаимодействием, в которых взаимодействие скалярного поля с обычной материей осуществляется посредством некоторой связи. В частности, модели с минимальным взаимодействием рассматривались в работе [1], где взаимодействие осуществляется лишь через гравитацию. В отличие от двухкомпонентной системы

«скалярное поле + идеальная жидкость», в которой взаимодействие компонентов осуществляется лишь через гравитацию, мы рассмотрим статистическую систему скалярно заряженных частиц, в которой некоторые сорта частиц могут прямым образом взаимодействовать со скалярным полем через некоторый *фундаментальный скалярный заряд*. С другой стороны, статистическая система, обладая, вообще говоря, ненулевым скалярным зарядом и сама являясь источником скалярного поля, может эффективно влиять на скалярное поле, управляя его поведением. Такое скалярное взаимодействие было введено в общерелятивистскую кинетическую теорию в 1983 г одним из авторов данной работы [2, 3, 4, 5] и несколько позже – Г.Г. Ивановым [6]. В частности, в работах [3, 4] на основе кинетической теории получена самосогласованная система уравнений, описывающая статистическую систему частиц со скалярным взаимодействием. В работах [7-8], основе этой теории впоследствии были построены численные модели космологической эволюции вырожденной Ферми-системы с классическим скалярным взаимодействием, обнаружившие большое разнообразие типов поведения в зависимости от констант теории. В недавних работах одного из Авторов макроскопическая модель скалярного взаимодействия была обобщена на случай фантомных скалярных полей [9-11] (см. также обзор [12]). Полученная таким образом математическая модель является строгой, но при этом, естественно, и достаточно сложной. Поэтому для исследования этой модели необходимо численное моделирование.

1. Формулировка математической модели

1.1. Математическая модель локально-равновесной космологической плазмы

В первую очередь, выпишем нетривиальные уравнения для пространственно-плоской космологической модели Фридмана:

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi(E_{pl} + E_s) \quad (1)$$

– уравнение Эйнштейна,

$$\ddot{\Phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi} + \varepsilon_2 m_s^2 \Phi = -4\pi\varepsilon_1 \sigma \quad (2)$$

– уравнение скалярного поля с источником,

$$\dot{E}_{pl} + 3\frac{\dot{a}}{a}(E_{pl} + P_{pl}) = \sigma\dot{\Phi} \quad (3)$$

– закон сохранения энергии. В уравнениях (1) – (3) введены следующие обозначения:

$\dot{x} \equiv dx/dt$, $\varepsilon_1 = +1$ поля с отталкиванием одноименно скалярно заряженных частиц,

$\varepsilon_1 = -1$ – для поля с притяжением одноименно скалярно заряженных частиц, $\varepsilon_2 = +1$ – для классических скалярных полей, $\varepsilon_2 = -1$ – для фантомных (Подробности см. в [13]). Плотность энергии и давление скалярного поля равны:

$$E_s = \frac{\varepsilon_1}{8\pi}(\dot{\Phi}^2 + \varepsilon_2 m_s^2 \Phi^2); \quad P_s = \frac{\varepsilon_1}{8\pi}(\dot{\Phi}^2 - \varepsilon_2 m_s^2 \Phi^2). \quad (4)$$

К уравнениям (1) – (3), в принципе, необходимо добавить и законы сохранения некоторых фундаментальных зарядов e_a , если таковые существуют. Такие уравнения в космологической ситуации принимают простую форму:

$$\frac{d}{dt} a^3 \sum_a e_a n_a(t) = 0 \Rightarrow a^3 \sum_a e_a n_a(t) = \text{Const}, \quad (5)$$

Неизвестными функциями являются следующие: $a(t), \Phi(t), \gamma_a(t), \theta(t)$.

Для бoльцмановской плазмы, далекой от вырождения приведенные химические потенциалы являются малыми функциями –

$$\gamma_a(t) \rightarrow 0, \quad (6)$$

что позволяет пренебречь статистическими факторами ± 1 , (см., например, [14]).

Рассмотрим идеализированную двухкомпонентную плазму, состоящую только из скалярно заряженных частиц и античастиц:

$$m_+ = |m + q\Phi|; \quad m_- = |m - q\Phi|, \quad (7)$$

у которых в условиях ЛТР суммарный химический потенциал равен нулю:

$$\gamma + \bar{\gamma} = 0 \Rightarrow \bar{\gamma} = -\gamma. \quad (8)$$

Предположим, что этим частицам соответствует также некоторый сохраняющийся фундаментальный заряд e , тогда в случае зарядово симметричной по этому заряду плазмы должен выполняться закон сохранения:

$$m_+^3 \frac{K_2(\lambda_+)}{\lambda_+} e^\gamma - m_-^3 \frac{K_2(\lambda_-)}{\lambda_-} e^{-\gamma} = 0 \Rightarrow e^{2\gamma} = \frac{m_-^3 \lambda_+ K_2(\lambda_-)}{m_+^3 \lambda_- K_2(\lambda_+)}. \quad (9)$$

В частности, при $m_- = m_+$ из (9) получим точное решение:

$$m_- = m_+ \Rightarrow \gamma = 0. \quad (10)$$

Эта ситуация реализуется только в двух крайних случаях: 1). $m = 0$ и 2). $q = 0$.

Итак, для определения трех оставшихся функций $a(t), \Phi(t), \theta(t)$ имеем 3 дифференциальных уравнения (1)–(3) – полностью определенную систему.

1.3. Масштабирование задачи

Выясним размерность введенных констант и функций. Из определения эффективной массы, а также из определения плотности энергии скалярного поля следует размерность этих величин в единицах длины $[t] = l/c = l$; $[m] = [\mu] = \hbar/lc = l^{-1}$; $[E] = \hbar c/l^4 = l^{-4}$:

$$[\Phi] = [m] = [\mu] = l^{-1}; \quad [q] = 1.$$

В обычных единицах ($[m, l, t]$ заряд q имеет размерность $[q] = m^{1/2} l^{3/2} t^{-1}$, а потенциал скалярного поля $[\Phi] = m^{1/2} l^{1/2} t^{-1}$. Таким образом, планковских единицах, которые используются в статье, значения $q\Phi \sim 1$ соответствует эффективной массе скалярно заряженных частиц порядка планковской массы.

Далее, поскольку при численном решении задачи приходится иметь дело с очень большими числами, необходимо предварительно масштабировать задачу. Введем вместо масштабного фактора безразмерную функцию:

$$\Lambda = \ln a(t); \quad \Lambda(0) = 0, \quad (11)$$

так что:

$$\dot{\Lambda} = \frac{\dot{a}}{a} = H(t) \quad (12)$$

есть постоянная Хаббла. Полагая

$$Z(t) = \dot{\Phi}$$

и разрешая полученную систему относительно производных $\dot{\Lambda}, \dot{\Phi}, \dot{Z}, \dot{\theta}$, используя при этом решение (9). В результате получается громоздкая система уравнений, которую мы здесь не будем приводить.

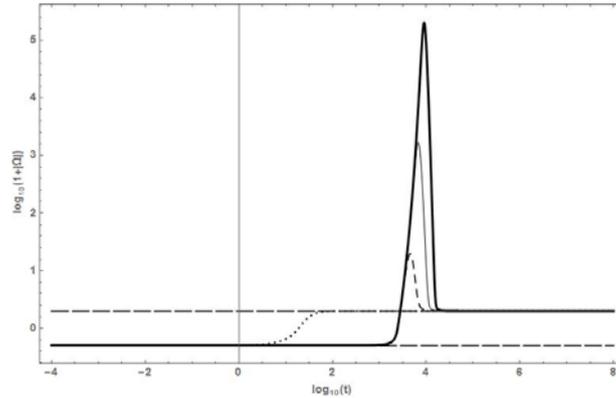


Рис. 1. Эволюция логарифмаинвариантного космологического ускорения $\lg(1+|\Omega(t)|)$.

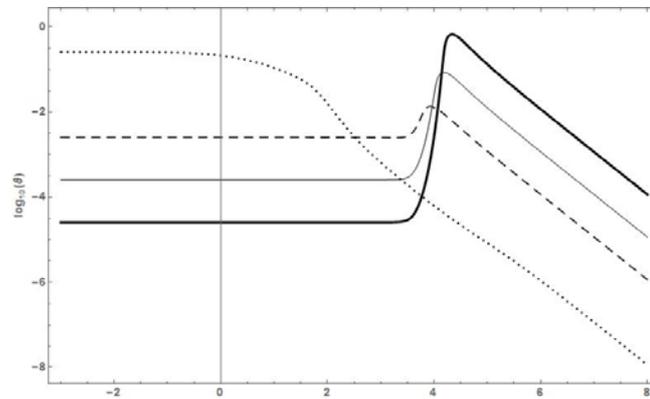


Рис. 2. Эволюция температуры плазмы, $\lg \theta(t)$

На графиках отражена зависимость от скалярного заряда частиц q . Точечная линия – $q=0,001$; пунктирная линия – $q=0,1$; сплошная тонкая линия – $q=1$; сплошная жирная линия – $q=10$. По оси абсцисс отложены значения десятичного логарифма времени.

Литература

- [1] V.M. Zhuravlev, R.R. Abbyazov. // *Gravitation and Cosmology*, bf 16, No 1, 50, (2010).
- [2] Ю.Г. Игнатъев. // *Известия вузов, Физика*. - 1982. - № 4. – С. 92-93.
- [3] Ю.Г. Игнатъев. // *Известия вузов, Физика*. - 1983. - № 8. – С. 15-19.
- [4] Ю.Г. Игнатъев. // *Известия вузов, Физика*. - 1983. - № 8. – С. 19-23.
- [5] Ю.Г. Игнатъев. // *Известия вузов, Физика*. - 1983. - № 12. – С. 9-13.
- [6] Г.Г. Иванов. // *Известия вузов, Физика*. - 1983. - № 1. – С. 32-36.
- [7] Yu. Ignat'ev, R. Miftakhov. // *Gravitation & Cosmology*. – 2006. - 12, No 2-3. – p.179 -184.
- [8] Yu.G. Ignatyev and R.F. Miftakhov. // *Gravitation and Cosmology*, 2011, Vol. 17, No. 2, pp.190–193; arXiv:1011.5774[gr-qc]
- [9] Yu. G. Ignat'ev. // *Russian Physics Journal*, Volume 55, Number 2 (2012), 166-172, DOI: 10.1007/s11182-012-9790-9
- [10] Yu. G. Ignatiev. // *Russian Physics Journal*, Volume 55, Number 5 (2012), 550-560, DOI: 10.1007/s11182-012-9847-9
- [11] Yu. G. Ignatyev. // *Russian Physics Journal*, Vol. 55, No. 11, April, 2013, p. 1345-1350.
- [12] Ю.Г. Игнатъев. // *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. – Вып. 1 – 2014. – с. 47-69.
- [13] Yu.G. Ignat'ev, A.A. Agathonov and D.Yu. Ignatyev. // *Grav. and Cosmol.* – 2014. – 20, No

4, to be publish.

[14] Ю.Г. Игнатъев, М.Л. Михайлов. Космологическая эволюция бoльцмановской плазмы с межчастичным фантомным скалярным взаимодействием. I. Симметричные случаи

Известия Вузов, Физика, 57, № 12, с. 112-119.

[15]. Н.Н. Лебедев. // Специальные функции и их приложения. М-Л: ГИФМЛ, 1963. – 360 с.

КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ ЭВОЛЮЦИЯ НЕРАВНОВЕСНЫХ ЧАСТИЦ СВЕРХВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ В СЦЕНАРИИ С ПЕРЕХОДОМ ОТ УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКОЙ СТАДИИ НА ИНФЛЯЦИОННУЮ

Ю.Г. Игнат'ев, И.А. Кох

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия

Аннотация. Дана строгая постановка задачи о космологической эволюции сверхтепловых частиц с энергиями выше унитарного предела во Вселенной, описываемой точной моделью перехода с ультрарелятивистской стадии расширения на инфляционную. На основе сформулированной математической модели получены асимптотические оценки динамического спектра частиц сверхвысоких энергий, построена и исследована численная модель космологической эволюции таких частиц на инфляционной стадии расширения Вселенной. Показано, что ряд параметров спектра частиц фиксируются на инфляционной стадии.

COSMOLOGICAL EVOLUTION OF THE NONEQUILIBRIUM PARTICLES OF THE SUPERHIGH ENERGIES IN THE SCENARIO WITH TRANSMISSION FROM ULTRARELATIVISTIC STAGE TO INFLATION

Yu.G. Ignat'ev, I.A. Kokh

Kazan (Volga region) Federal University, Kazan, Russia

Abstract. The rigorous formulation of the problem of the cosmological evolution superthermal particles with energies above the unitary limit in the Universe described by the exact model of the transition from the ultrarelativistic stage to inflation is given. On the basis of a mathematical model asymptotic estimates of the dynamic spectrum of high-energy particles are obtained. The numerical model of cosmological evolution of such particles at the inflationary stage of expansion of the universe is formulated and researched. It is shown that a series of parameters of the particle spectrum fixed at the inflationary stage.

Рассматривается процесс космологической эволюции частиц сверхвысоких энергий в ускоренной Вселенной на основе уравнения типа Фоккера - Планка, предложенный одним из соавторов в более ранних работах [1]. Исследуется задача, постановка которой была осуществлена в [2]. Задача основана на диффузионном уравнении:

$$\frac{\partial G}{\partial \tau} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} x^2 \left(\frac{\partial G}{\partial x} + 2b(\tau)G \right) \quad (1)$$

где

$$b(\tau) = \int_0^{\infty} G(\tau, x) x dx. \quad (2)$$

Решения уравнения (1) должны удовлетворять начальным и граничным условиям вида:

$$G(0, x) = G_0(x); \quad \lim_{x \rightarrow \infty} G(\tau, x) x^3 = 0, \quad (3)$$

причем функция $G_0(x)$ должна удовлетворять интегральным условиям:

$$\int_0^{\infty} G(x) x^2 dx = 1; \quad (4)$$

$$\int_0^{\infty} G(x) x^3 dx = 1. \quad (5)$$

В статьях [2]-[4] были предложены методы решения этой задачи при условии малости временной функции $b(\tau)$ и получены нулевое и первое приближения функции $G(x)$. В

цитируемых работах считалось, что Вселенная находится на ультрарелятивистской стадии, и поэтому не учитывалась возможность инфляционного процесса. Кроме того, как оказалось, полученные асимптотические оценки решений содержали неточности. Выберем в качестве начального распределения ступенчатую функцию, использованную в цитированных выше работах:

$$G_0(x) = \frac{81}{64} \chi\left(\frac{4}{3} - x\right), \quad (6)$$

где $\chi(z)$ – функция Хевисайда. В данной статье выполняется строгое решение уравнения (1) и проводится численное моделирование. Вводится временная функция

$$\tau = \frac{1}{16\pi} \int_0^t \frac{Adt}{a},$$

в определении которой используется точное решение уравнения Эйнштейна для двухкомпонентной системы – ультрарелятивистской жидкости и жидкости с уравнением состояния $\varepsilon + p = 0$ (космологическая постоянная):

$$a(t) = \frac{1}{\sqrt{2\Lambda_0}} \sqrt{\text{sh}(2\Lambda_0 t)}, \quad (7)$$

которое при $t \rightarrow 0$ переходит в ультрарелятивистское решение:

$$a(t) = \sqrt{t}, \quad (8)$$

а при $t \rightarrow \infty$ – в решение для инфляционной стадии:

$$a(t) = \frac{1}{\sqrt{2\Lambda_0}} e^{\Lambda_0 t}. \quad (9)$$

В результате для τ получается выражение:

$$\tau = \pi\sqrt{2\Lambda_0} \int_0^t \frac{1}{\left(1 + \ln^2\left(1 + \frac{4}{p_0^2 T_0^2}\right)\right) \sqrt{\text{sh} 2\Lambda_0 t}} dt, \quad (10)$$

где

$$T_0 = \frac{45^{1/4} 32^{3/4} \sqrt{2\Lambda_0}}{\sqrt{\text{sh}(2\Lambda_0 t)} (\pi^3 N_0)^{1/4}}. \quad (11)$$

Далее, при разложении функции $G(x)$ по малости временной функции $b(t)$, получили формальное решение уравнения (1) с начальными и граничными условиями (2):

$$G^0(\tau, x) = \frac{81}{128} \left[\Phi\left(\frac{x+x_0}{2\sqrt{\tau}}\right) - \Phi\left(\frac{x-x_0}{2\sqrt{\tau}}\right) \right] - \frac{81\sqrt{\tau}}{64\sqrt{\pi x}} \left[e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\tau}} - e^{-\frac{(x+x_0)^2}{4\tau}} \right], \quad (12)$$

$$G^1(\tau, x) = \frac{2}{x} \int_0^\tau b_0(t) G^0(t, x) dt, \quad (13)$$

где $x_0 = \frac{4}{3}$, $b_0(\tau) = \int_0^\infty G^0(\tau, x) x dx$.

В работе с помощью СКМ Maple проводятся численное моделирование функции $G(x)$ и проверяется выполнение закона сохранения числа частиц и закона сохранения энергии импульса.

Литература

1. Игнатъев Ю.Г. Возможность нарушения термодинамического равновесия в ранней Вселенной. //Известия Вузов, Физика. 29, No 2. – 1986, с.19-24.
2. Ю.Г. Игнатъев, Р.А. Зиятдинов. Асимптотическое приближение модели Фоккера-Планка космологической эволюции сверхтепловых ультрарелятивистских частиц при наличии скейлинга взаимодействий // Известия Вузов, Физика, 2009, № 2 , с. 87-91.
3. Yu. G. Ignatyev and R.A. Ziatdinov. Diffusion model of evolution of superthermal high-energy particles under scaling in the early universe // Gravitation & Cosmology, Vol. 12 (2006), No. 4 (48), pp. 1-12.
4. Yu. G. Ignatyev and R. A. Ziatdinov. Diffusion Model of Evolution of Superthermal High-Energy Particles under Scaling in the Early Universe. II. Early Stages // Gravitation and Cosmology, 2008, Vol. 14, No. 4, pp. 301–308.

КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ ЭВОЛЮЦИЯ ПОЧТИ ВЫРОЖДЕННОЙ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ СКАЛЯРНО ЗАРЯЖЕННОЙ ПЛАЗМЫ С МЕЖЧАСТИЧНЫМ ФАНТОМНЫМ СКАЛЯРНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Ю.Г. Игнат'ев, А.А. Агафонов

ignatev_yu@rambler.ru a.a.agathonov@gmail.com

Казанский федеральный университет, Казань, Россия

Аннотация. Сформулирована непротиворечивая, полностью самосогласованная математическая модель космологической почти вырожденной двухкомпонентной скалярно заряженной плазмы сфантомным скалярным взаимодействием в случае равенства эффективных масс частиц и античастиц. В этой модели взаимодействие плазмы со скалярным полем осуществляется посредством некоторого фундаментального скалярного заряда, индивидуального для каждого типа частиц, причем полагается, что скалярные заряды частиц и античастиц противоположны по знаку. На основе сформулированной математической модели построена компьютерная модель почти вырожденной космологической плазмы с межчастичным скалярным взаимодействием и изучены её основные свойства. На основе численных моделей показано, что в течение космологической эволюции степень вырождения одной из компонент плазмы увеличивается, т.е., с точки зрения термодинамики эта компонента становится более холодной.

COSMOLOGICAL EVOLUTION OF SEMI-DEGENERATE TWO-COMPONENT SCALAR CHARGED PLASMA WITH PHANTOM SCALAR INTERPARTICLE INTERACTION

Yu.G. Ignat'ev, A.A. Agathonov

Kazan Federal University, Kazan, Russian Federation

Abstract. We construct complete self-consistent mathematical model of cosmological semi-degenerate two-component scalar charged plasma with phantom scalar interparticle interaction in the case of equality of particles and antiparticle effective masses. In this model the interaction of plasma with a scalar field is carried out by means of fundamental scalar charge, which is individual for each type of particle, and it is assumed that the scalar charges of particles and antiparticles have opposite signs. Based on the constructed mathematical model we defined computer model of semi-degenerate cosmological plasma with phantom scalar interparticle interaction and researched its properties. On the basis of numerical simulation of cosmological evolution we showed that degree of degeneration of one plasma components increases, thus, in terms of thermodynamics this component becomes colder.

Неминимальная взаимодействие скалярного поля с статистической системой скалярно заряженных частиц было введено в общерелятивистскую кинетическую теорию в 1983 г. Ю.Г. Игнат'евым [1, 2, 3, 4] и несколько позже – Г.Г. Ивановым [5]. В частности, в работах [3, 4] на основе кинетической теории получена самосогласованная система уравнений, описывающая статистическую систему частиц со скалярным взаимодействием. В недавних работах Ю.Г. Игнат'ева [9-11] макроскопическая модель скалярного взаимодействия была обобщена на случай фантомных скалярных полей (см. также обзор [11]). Полученная строгая математическую модель ввиду своей сложности не поддается полному аналитическому исследованию, поэтому возникла необходимость применения численных методов. На основе релятивистской кинетической теории в работах [1, 2] получена полная система самосогласованных макроскопических уравнений, описывающих самогравитирующую плазму скалярно заряженных частиц для пространственно-плоской космологической модели Фридмана, состоящая из нетривиального уравнения Эйнштейна:

$$3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi(\mathcal{E}_{\text{pl}} + \mathcal{E}_s), (1)$$

уравнения скалярного поля с источником:

$$\ddot{\Phi} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\Phi} + \varepsilon_2 m_s^2 \Phi = -4\pi \varepsilon_1 \sigma (2)$$

закон сохранения энергии-импульса системы:

$$\dot{\mathcal{E}}_{\text{pl}} + 3 \frac{\dot{a}}{a} (\mathcal{E}_{\text{pl}} + \mathcal{P}_{\text{pl}}) = \sigma \dot{\Phi}, (3)$$

законы сохранения в реакциях некоторых фундаментальных зарядов e_i (если таковые существуют):

$$\frac{d}{dt} a^3 \sum_i e_i n_i(t) = 0 \Rightarrow a^3 \sum_i e_i n_i(t) = \text{Const}, (4)$$

где введены следующие обозначения: a - масштабный фактор, Φ - потенциала скалярного поля, σ - скалярная плотность заряда, $\dot{x} \equiv dx/dt$; для поля с отталкиванием одноименно скалярно заряженных частиц $\varepsilon_1 = +1$, для поля с притяжением одноименно скалярно заряженных частиц $\varepsilon_1 = -1$; для классического скалярного поля $\varepsilon_2 = +1$, для фантомного (Подробности см. в [12].) скалярного поля $\varepsilon_2 = -1$. Плотность энергии и давление скалярного поля равны:

$$\mathcal{E}_s = \frac{\varepsilon_1}{8\pi} (\dot{\Phi}^2 + \varepsilon_2 m_s^2 \Phi^2); \quad \mathcal{P}_s = \frac{\varepsilon_1}{8\pi} (\dot{\Phi}^2 - \varepsilon_2 m_s^2 \Phi^2). (5)$$

В работах [6,7], на основе кинетической теории были построены численные модели космологической эволюции вырожденной Ферми-системы с классическим скалярным взаимодействием, обнаружившие большое разнообразие типов поведения в зависимости от констант теории.

В случае вырожденной однокомпонентной плазмы было показано [15], что сохраняется число фермионов:

$$a^3 n = \text{Const}, (6)$$

и система (1)-(4) сводятся к двум нетривиальным уравнениям относительно неизвестных функций $a(t), \Phi(t)$.

В работах [13,14] рассматривалась космологическая эволюция Больцмановской плазмы с межчастичным фантомным скалярным взаимодействием. Было показано, что результаты численного моделирования весьма мало зависят от статистики частиц – для однокомпонентной вырожденной Ферми-системы и для двухкомпонентной Больцмановской плазмы получаются, фактически, почти одинаковые результаты. Численное моделирование выявило два новых характерных свойства поведения таких космологических моделей: появление гигантских всплесков инвариантного космологического ускорения и сильный разогрев Больцмановской плазмы на тех же временах. Обнаруженные всплески температуры плазмы послужили основанием для исследования влияния температуры на

космологическую эволюцию скалярно заряженной Ферми системы. Для этого в текущей работе была рассмотрена почти вырожденная двухкомпонентная скалярно заряженная плазма в случае равенства эффективных масс частиц и античастиц. Это означает, во-первых, что приведенные химические потенциалы являются большими функциями –

$$\gamma(t) > 1, \quad (7)$$

во-вторых, плазма, состоит из скалярно заряженных частиц и античастиц равной массы:

$$m_*^+ = m_*^- = m_* = |q\Phi|, \quad (8)$$

у которых в условиях ЛТР суммарный химический потенциал равен нулю:

$$\gamma + \bar{\gamma} = 0 \Rightarrow \bar{\gamma} = -\gamma. \quad (9)$$

Для почти вырожденной плазмы в состоянии локального термодинамического равновесия выражения для плотности энергии и давление принимают вид:

$$\begin{aligned} E_{pl} &= \frac{m_*^4}{8\pi^2} \left[\psi \sqrt{1+\psi^2} (1+2\psi^2) - \ln(\psi + \sqrt{1+\psi^2}) \right] + \frac{m_*^4}{6\lambda^2} \frac{\sqrt{1+\psi^2} (1+3\psi^2)}{\psi} + \\ &+ \frac{m_*^4 \exp(-\lambda \sqrt{1+\psi^2})}{\pi^2} \frac{(\lambda K_1(\lambda) + 3K_2(\lambda))}{\lambda^2}; \\ P_{pl} &= \frac{m_*^4}{24\pi^2} \left[\psi \sqrt{1+\psi^2} (2\psi^2 - 3) + 3 \ln(\psi + \sqrt{1+\psi^2}) \right] + \frac{m_*^4}{6\lambda^2} \psi \sqrt{1+\psi^2} + \\ &+ \frac{m_*^4 \exp(-\lambda \sqrt{1+\psi^2})}{\pi^2} \frac{K_2(\lambda)}{\lambda^2}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\lambda = m_* / \theta$, $\psi = p_F / m_*$, $\theta = \theta(t)$ - температура плазмы, p_F - импульс Ферми плазмы.

Таким образом для определения четырех неизвестных функций $a(t), \Phi(t), \lambda(t), \psi(t)$ имеем полностью определенную систему из четырех дифференциальных уравнения (1)–(4).

В результате численного исследования системы самосогласованных уравнений были получены решения, описывающие космологическую эволюцию почти вырожденной двухкомпонентной плазмы с фантомным скалярным взаимодействием. Было показано, что в течение космологической эволюции степень вырождения одной из компонент плазмы увеличивается, т.е., с точки зрения термодинамики эта компонента становится более холодной. Это создает предпосылки для рассмотрения скалярно заряженной плазмы в качестве возможного кандидата на темную материю. В следующей статье мы рассмотрим модификацию текущей космологической модели с учетом появления скалярно-нейтральных частиц в равновесной плазме.

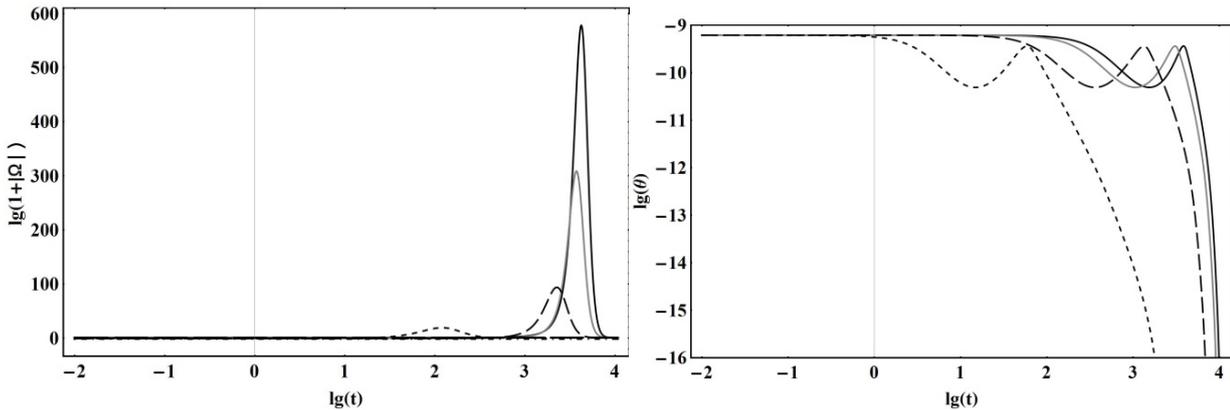


Рис.1. Эволюция логарифмаинвариантного космологического ускорения, $\lg(1+|\Omega|)$, и эволюция логарифма температуры плазмы, $\lg \theta(t)$, в зависимости от скалярного заряда частиц q . Сплошная черная линия– $q=0,01$; сплошная серая линия– $q=0,05$; средне пунктирная линия – $q=0.1$; мелко пунктирная линия– $q=0.5$. По оси абсцисс отложены значения десятичного логарифма времени. Всюду: $m_s = 0.001$, $\Phi(0) = 0.001$, $\dot{\Phi}(0) = 0$, $\psi(0) = 0.001$, $\lambda(0) = 0.1$.

Литература

- [1] Ю.Г. Игнатъев. // Известия вузов, Физика. - 1982. - № 4. – С. 92-93.
- [2] Ю.Г. Игнатъев. // Известия вузов, Физика. - 1983. - № 8. – С. 15-19.
- [3] Ю.Г. Игнатъев. // Известия вузов, Физика. - 1983. - № 8. – С. 19-23.
- [4] Ю.Г. Игнатъев. // Известия вузов, Физика. - 1983. - № 12. – С. 9-13.
- [5] Г.Г. Иванов. // Известия вузов, Физика. - 1983. - № 1. – С. 32-36.
- [6] Yu. Ignat'ev, R. Miftakhov. // Gravitation and Cosmology, 2006, Vol. 12, No 2-3, pp. 179-184.
- [7] Yu.G. Ignatyev, R.F. Miftakhov. // Gravitation and Cosmology, 2011, Vol. 17, No. 2, pp. 190–193; arXiv:1011.5774[gr-qc]
- [8] Yu. G. Ignat'ev. // Russian Physics Journal, Volume 55, Number 2 (2012), 166-172, DOI: 10.1007/s11182-012-9790-9
- [9] Yu. G. Ignatiev. // Russian Physics Journal, Volume 55, Number 5 (2012), 550-560, DOI: 10.1007/s11182-012-9847-9
- [10] Yu. G. Ignatyev. // Russian Physics Journal, Vol. 55, No. 11, April, 2013, p. 1345-1350.
- [11] Ю.Г. Игнатъев. // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. – Вып. 1 – 2014. – с. 47-69.
- [12] Yu.G. Ignat'ev, A.A. Agathonov and D.Yu. Ignatyev. // Gravitation and Cosmology, 2014, Vol. 20, No. 4, pp. 304-308.
- [13] Ю.Г. Игнатъев, М.Л. Михайлов. Космологическая эволюция бoльцмановской плазмы с межчастичным фантомным скалярным взаимодействием. I. Симметричные случаи Известия Вузов, Физика, 57, № 12, с. 112-119.
- [14] YuriIgnat'ev, AlexanderAgathonov, MikhailMikhailovandDmitryIgnatyev. // AstrophysicsandSpaceScience, 2015, to be published; arXiv:1411.6244 [gr-qc]
- [15] Yu.G. Ignat'ev, A.A. Agathonov. // GravitationandCosmology, 2015, Vol. 21, No. 2, pp. 105-112.

КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ С ПЕРЕМЕННЫМИ "КОНСТАНТАМИ" И УСКОРЕННОЕ РАСШИРЕНИЕ ВСЕЛЕННОЙ.

В.С.Рихвицкий, Б.Саха

Обсуждаются точные решения уравнений Эйнштейна с переменными гравитационными и космологическими "константами"

для однородного и изотропного пространства-времени. Предполагается, что закон сохранения материи выполняется,

это позволяет разделить уравнения идеальной жидкости и гравитационной и космологической "констант".

Рассмотрено несколько моделей. В них параметр замедления (DP) оказывается зависящим от времени и во вселенных

с радиационным доминированием либо с жестким наполнением наблюдается переход от ранней стадии замедления

расширения к ускорению в более позднее время.

Решения сопоставлены с имеющимися в литературе таблицами недавних наблюдений сверхновых типа Ia, которые,

как сейчас принято считать, свидетельствуют об ускорении расширения Вселенной в настоящее время.

БЕЗРАЗМЕРНЫЙ КОМПЛЕКС В КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ С ГРАВИТАЦИОННОЙ КОНСТАНТОЙ

Грудев П.И., Копылов С.В.

Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ).

ул. Б. Семёновская, 38, Москва, 107023, Россия, kopsv@mail.ru

A DIMENSIONLESS COMPLEX WITH THE GRAVITATIONAL CONSTANT IN CLASSICAL MECHANICS

P.I. Grudev, S.V. Kopylov

MAMI Moscow State Technical University

38 B. Semenovskaya Street, Moscow 107023, Russia, kopsv@mail.ru

Introduction.

Let the gravitational constant G enter into the problem structure. Since the dimension of G is $[T^{-2}L^3M^{-1}]$, then the product $T^2 G \rho$ is a dimensionless quantity, where T is time, L the length, M the mass, and ρ the mass density (of the dimension $[M^+1L^{-3}]$). The well-known relation, used in various fields of science and technology, is obtainable from here.

$$T = C\sqrt{1/(G\rho)}, \text{ where } C \text{ is a dimensionless constant.}$$

Below we shall exemplify the use of the dimensionless complex involving the gravitational constant in classical mechanics.

Введение

Пусть в структуру задачи входит гравитационная константа G . Поскольку размерность G – $[T^{-2}L^3M^{-1}]$, то произведение $T^2 G \rho$ – величина безразмерная. Здесь T – время, L – длина, M – масса, а ρ – плотность массы (размерность $[M^+1L^{-3}]$). Отсюда получается известное соотношение, которое находит применение в самых разных областях науки и техники.

$$T = C\sqrt{1/(G\rho)}, \text{ где } C \text{ – некоторая безразмерная константа.}$$

Широко распространённым примером является произведение скорости звука $\bar{v}_{3\theta}$ на характерное время T , т.е. характерная длина $\lambda_J = \bar{v}_{3\theta} T$ – так называемая длина Джинса [1]. Поскольку в газовой среде возмущения переносятся посредством звуковых волн, то можно найти длину, при которой газ с известной плотностью начнёт сжиматься под действием собственного притяжения. Для обычного воздуха это должен быть шар с радиусом порядка радиуса орбиты Луны. Столько воздуха и при такой плотности у нас нет. Однако существуют

межзвёздные газовые облака, которые удовлетворяют этому соотношению. В них действительно происходит гравитационное сжатие газа, что и приводит к образованию новых звёзд.

Ниже мы рассматриваем пример использования безразмерного комплекса в классической механике включающий гравитационную константу.

1. Определение объекта с плотностью ρ для уравнения движения

Поскольку мы не рассматриваем процесс звёздообразования, то первой нашей задачей будет выявление иного объекта, который характеризовался бы плотностью массы.

Известно, что масса в любом случае связана с гравитационной константой в уравнении движения. Поэтому, чтобы выяснить физическую принадлежность ρ , рассмотрим уравнение движения, включающее как массу M , так и константу G .

(2)

Второй закон Ньютона имеет вид $m \ddot{\vec{r}} = \vec{F}$. Пусть F – сила Всемирного тяготения, тогда

(2)

уравнение динамики примет вид: $m \ddot{\vec{r}} = -G m M \vec{r} / |\vec{r}|^3$. Сократим на m и введём величину

плотности массы $\rho = M / \left(\frac{4}{3} \pi |\vec{r}|^3 \right)$. В результате получим: $\ddot{\vec{r}} + \left\{ \frac{4\pi}{3} G \rho \right\} \vec{r} = 0$.

Будем считать плотность постоянной, тогда полученное уравнение является уравнением

колебаний с круговой частотой $\omega = \sqrt{\frac{4\pi}{3} G \rho}$, откуда $T = \sqrt{\frac{3\pi}{G \rho}}$. Это выражение незначительно

отличается от выражения $T = \sqrt{\frac{3\pi}{2G \rho}}$, находящегося в хорошем согласии с

экспериментальными данными при описании периода колебаний звезд типа цефеида [1].

2. Экспериментальные оценки

Период колебаний цефеид T изменяется в нашей Галактике от 1 до 68 суток [2], т.е. в пределах от $9 \times 10^{+4}$ с до $6 \times 10^{+6}$ с. В других галактиках известны цефеиды с периодом до $2 \times 10^{+7}$ с, и для таких звёзд средняя плотность ρ равна $10^{-2} \text{ м}^{-3} \text{ кг}$ [3]. Подставив известное значение константы $G = 6,7 \times 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ кг}^{-1} \text{ с}^{-2}$, получим

$$T = \sqrt{\frac{3 \times 3,14}{6,7 \times 10^{-11} \times 10^{-2}}} = 3,8 \times 10^{+6} \text{ с.}$$

Полученная оценка периода колебаний цефеид находится в согласии с известными наблюдательными данными. Этот результат можно считать удовлетворительным, учитывая, что он был получен методом размерности.

3. Обсуждение

Обычно период цефеид оценивают исходя из других соображений [1], однако наш подход представляется более прозрачным и наглядным.

Несколько слов следует сказать о противоречии между колебательным характером рассматриваемого процесса $r = r(t)$ и постулированным постоянством массовой плотности

объекта $\rho = M / \left(\frac{4}{3} \pi |\vec{r}|^3 \right)$. Это противоречие снимается предположением о том, что

расширению подвержены только верхние слои цефеид, при этом основная масса и её объём остаются постоянными, и, соответственно, постоянной остаётся плотность. Наблюдения подтверждают это предположение [1]. Таким образом, наша модель оказалась более информативной, чем предполагалось в ходе постановки задачи.

Заключение

Размерные оценки – один из мощных методов получения информации о связи величин, при этом метод не требует использования сложных математических вычислений. Метод обсуждается уже давно, и на эту тему существует обширная литература [4].

Литература

- [1] Засов А.В., Постнов К.А. Общая астрофизика. – Фрязино, 2006. с. 204.
- [2] Физическая энциклопедия. Т.5. М.: «Большая российская энциклопедия» 1998. – с. 427.
- [3] Физика космоса. М.: Советская энциклопедия. 1986. - с. 527-532.
- [4] Сена Л.А. Единицы физических величин и их размерности. М.: Наука 1988. с. 98.

WHAT'S WRONG WITH COSMOLOGICAL REDSHIFT PARAMETER

Sergey I. Kuznetsov

Web-Institute for Time Nature Explorations

www.chronos.msu.ru

Elektrogorsk, Moscow Region, Russia

e-mail: KSI@chronos.msu.ru, bitva@mail.ru

1. The redshift parameter z is a quantitative characteristic of the light wavelength growth that occurs in the expanding Universe between two events: light emission by a cosmological source and its registration by an observer on Earth. As the value of the wavelength of the emitted light λ_{em} is unknown, the registered wavelength λ_{obs} is compared with the corresponding standard value λ_0 measured in the laboratory on Earth.

The goal of the paper is to show that the direct substitution of λ_{em} with λ_0 used in practice is physically incorrect and leads to erroneous results in the calculation of the redshift parameter z .

For detecting this error we consider the physical mechanism of redshifting in each of two alternative theories: the Standard cosmological model [1] and Milne's Kinematic cosmology [2]. The first of them is based on general relativity (GR-model) and the second on special relativity (SR-model).

In order to correct the detected error a new redshift parameter z^* (called "red square") is proposed to introduce in Cosmology. Practically important substitution $\lambda_0 \rightarrow \lambda_{em}$ realized in the new parameter gets physical justification in both alternative cosmological models.

2. Assuming that the detected photon with the measured wavelength λ_{obs} had a wavelength λ_{em} at the time of emission, the redshift parameter $z (=z^{def})$ is theoretically determined as follows:

$$z^{def} = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_{em}}, \quad (1)$$

or

$$z^{def} + 1 = \frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{em}}. \quad (2)$$

The last expression shows how much the observed wavelength of the photon exceeds its wavelength at the instant of emission. In this formula the directly measured quantity is λ_{obs} only. The wavelength λ_{em} at the instant of emission t_0 (cosmic time from the beginning of the Universe at $t=0$) is unknown; it can not be measured directly, only assumptions can be made with respect to it. That is why in practice the cosmological redshift $z (=z^{pr})$ is determined by comparing the directly measured light wavelength λ_{obs} from a cosmological source with the corresponding standard wavelength λ_0 which can be measured in the laboratory on Earth at the present moment t_0 :

$$z^{pr} + 1 = \frac{\lambda_{obs}}{\lambda_0}. \quad (3)$$

3. In GR-models the growth of the light wavelength is caused by the expansion of space itself and occurs gradually during the motion of photons from the source to the receiver.

In modern cosmology when evaluating the difference $\Delta\lambda = \lambda_{obs} - \lambda_{em}$ (1) the unknown wavelength λ_{em} is replaced by the corresponding laboratory value λ_0 . The Standard cosmological model asserts the

admissibility of this replacement, giving as a reason that in the expanding space both the light wave and the ruler by which its wavelength is measured change over time in the same way (in the same scale). Therefore, according to this theory, the result of measuring of the standard wavelength λ_{00} ($\equiv \lambda_{em}$) at the instant of emission t_{00} must be the same as in the present moment t_0 .

But if so, then, making substitution of λ_0 for λ_{em} in (1), we confess that λ_{em} is measured by the ruler of the past epoch (with a division value $[l]_{00}$) while the observed wavelength λ_{obs} is measured by the longer ruler related to the present epoch (with a different division value $[l]_0$). In such a situation, after replacing $\lambda_0 \rightarrow \lambda_{em}$ the numerator of the expression for the redshift parameter (1) will contain the difference between two values λ_{obs} and λ_0 been measured by the two unequal rulers ($[l]_{00} \neq [l]_0$).

Therefore the direct replacement of λ_{em} with λ_0 in the formulae (1), (2) is not valid from the metrological standpoint and the resulting expression (3) is not correct.

4. Fortunately, this misunderstanding can be eliminated while remaining within the Standard cosmological model.

To do this, we must measure the standard wavelength of the photon emitted at t_{00} by the same ruler which is used for measuring the observed and standard wavelengths on Earth at the present time t_0 . Our concern is with the standard wavelength in the past epoch of t_{00} from the point of view of a contemporary observer.

If the standard wavelength over the range of time from t_{00} to t_0 has been increased by the factor $1+z^{pr}$ then the ruler on Earth (its division value) must also be longer by the same factor than the corresponding ruler on the Supernova at the instant of emission t_{00} . By measuring the standard wavelength λ_{00} in the distant past epoch t_{00} by the longer ruler used in the present time t_0 the observer will find its value to be less than the corresponding laboratory wavelength λ_0 , namely: $\lambda_{00} (\equiv \lambda_{em}) = \lambda_0 / (1+z^{pr})$. The resulting relation between the standard wavelength on Earth and that in the Supernova allows us to rearrange the expression (2) as follows:

$$z^* + 1 = \frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{em}} = \frac{\lambda_{obs}}{\lambda_0} \frac{\lambda_0}{\lambda_{00}} = (z^{pr} + 1)^2. \quad (4)$$

To distinguish this new parameter from the conventional one, we have supplied it with asterisk and offer to call “red square”.

5. For SR-models the space is considered to be static. The cosmological gravitationally unbound objects are moving away from each other at a certain speed in this static space. The observable shift of atomic lines in the red end of the spectrum is due to the Doppler effect.

Let us consider a measuring system “source–receiver” (see Fig. 1) destined for determining the redshift parameter z . In fact, it plays the role of a ruler in GR–models.

From observations we know that such measuring system, with the source being located in a Supernova and the receiver on Earth (“the first measuring system”), shows the spectral lines to be redshifted. We assume the source of this system to be fixed relative to the Supernova. Therefore the initial wavelength of the photon must be equal to the standard one. As the receiver is stationary on Earth and the measured wavelength λ_{obs} exceeds the standard value λ_0 we get the conclusion that the Earth is receding from the Supernova with some velocity V which can be in principal determined from the Doppler effect.

We can verify the correctness of this conclusion using a similar measuring system in the laboratory on Earth. If the receiver is moved off from the stationary source on Earth with the speed V (“the second measuring system”) we will obtain the same result λ_{obs} as in the real observation of the Supernova.

Since the wavelength of the light from the earth-based source measured by the recessive laboratory receiver exceeds the standard wavelength λ_0 by the factor $1+z^{pr}$, the wavelength of the light from the Supernova is to be also increased by the same factor. On this basis, SR-models justify the replacement of λ_{em} with λ_0 in (2).

In our view, however, as for GR-models, the direct substitution like this is impermissible in these models too. What is wrong here?

In such a situation the laboratory measuring pair “source-receiver” moves as a whole with velocity V with respect to the natural measuring pair: the cosmological source (Supernova) – the ground-based receiver (Earth). And despite the fact that the readings of the two receivers (spectrometers) for identical photons emitted by the different sources are all equal we have no right to claim that the photon emitted from the Supernova has the same wavelength that the similar photon measured in a laboratory on Earth.

The point is that the presence of a non-zero relative velocity (V) between the sources belonging to the different measuring systems should lead to physical differences in wavelengths of light from them. If we ignore this difference we arrive at the wrong idea that immediately before measurement the wavelength of a certain photon from any distant source (Supernova) with whatever speed it is receding from the Earth is equal to the same value – its standard laboratory wavelength λ_0 . This leads to a distortion of the velocity field of cosmological objects.

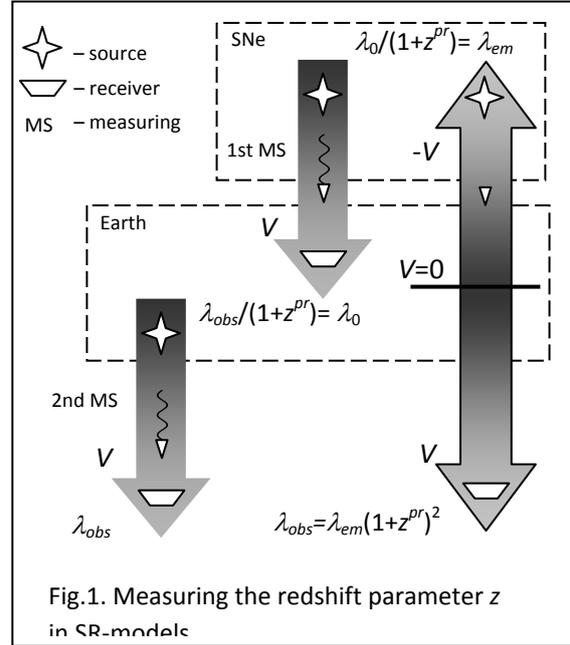


Fig.1. Measuring the redshift parameter z in SR-models

6. Fortunately, the difference in speed between the laboratory (ground-based) source and the source of a single cosmological object can be identified and taken into account.

As mentioned above, according to the readings of the laboratory receiver (being moved out from the Earth with the velocity V) the wavelength of the photon from the ground-based source is λ_{obs} , while the ground-based receiver (that of the first system) detects it to be equal to the standard value λ_0 . Bearing the definition (3) in mind we conclude that the laboratory standard wavelength is shorter than the observed one by the factor $1 + z^{pr}$:

$$\lambda_0 = \lambda_{obs} / (1 + z^{pr}). \quad (5)$$

Now we need to compare the standard wavelengths from two sources (on Earth and in the Supernova). Similar to the laboratory receiver of the 2nd measuring system, the ground-based receiver of the 1st measuring system is receding from its source (in the Supernova) with the same speed V . For this reason its readings overestimate the wavelength of light from the source in the Supernova by the factor $1 + z^{pr}$.

The same overestimation should happen if, on the contrary, the source in the Supernova is assumed to be receded from the receiver at rest on Earth. A reversal like this gives us the possibility to evaluate the wavelengths of identical photons from different Supernovae by comparing them with the same laboratory wavelength λ_0 .

Since the laboratory wavelength measured by the ground-based receiver (at $V=0$) is equal to λ_0 we can say that the corresponding standard wavelength in any Supernova (at $V \neq 0$) is less than this value, namely:

$$\lambda_{00} = \lambda_0 / (1 + z^{pr}). \quad (6)$$

Thus we are able to take into account the presence of relative velocities between Supernovae that is necessary to reproduce properly the velocity field of cosmological objects.

From (5) and (6), we can finally obtain the expression for the newly-defined redshift parameter z^* (red square). It is the same as (4) obtained in the framework of GR- models.

7. As we can see, both alternative theories (GR- and SR-models) give the same result. We can say that the new parameter z^* is not related to a particular mechanism of redshifting.

Comparing (3) and (4) we see that $z^{pr} < z^*$. So, we can assume that the conventional formula (3) gives an underestimated value for the expansion rate of the Universe. This can be the reason for dark energy problem (at least for an illusion of accelerated expansion).

8. Used in practice in the theoretically-defined expression for redshift parameter z^{def} (1), the direct substitution of the standard wavelength λ_0 for the wavelength of the emitted photon λ_{em} is not valid in cosmology of the expanding Universe. Such substitution is incompatible with the concepts of the physical mechanisms of redshifting both in the models based on general relativity (the Standard cosmological model) and in those based on special relativity (Milne's Kinematic cosmology). The redshift parameter z^{pr} (3) obtained by such direct replacement leads to an underestimation of the expansion rate of the Universe which in itself can cause the appearance of dark energy problem.

It is proposed to use in practice the newly-defined redshift parameter z^* (4) where the detected error is corrected. The proposed replacement $\lambda_0 \rightarrow \lambda_{em}$ finds justification in both alternative cosmological models.

The new parameter z^* is proposed to call "red square".

[1] A. L. Maroto and J. Ramirez, A Conceptual Tour About the Standard Cosmological Model, [arXiv:astro-ph/0409280].

[2] E. A. Milne. Kinematic Relativity, Oxford, 1948.

МОДЕЛЬ ВСЕЛЕННОЙ, ЗАПОЛНЕННОЙ СПИНОРНОЙ МАТЕРИЕЙ – ПЕРЕХОД ОТ ЗАМЕДЛЕННОГО РАСШИРЕНИЯ К УСКОРЕННОМУ

THE MODEL OF UNIVERSE THAT IS FILLED OF SPINOR MATTER – THE TRANSITION FROM SLOWING EXPANSION TO ACCELERATING ONE

Г. Н. Шикин

Н. А. Ковальчуков, Л. П. Ющенко

Одним из объяснений современного ускоренного расширения Вселенной является предположение о том, что примерно 70% массы Вселенной составляет темная энергия [1]. Рассмотрена модель Вселенной, в которой темная энергия представляет собой спинорную материю. Определен вид нелинейного члена в уравнениях спинорного поля, приводящий к переходу Вселенной от замедленного расширения к ускоренному.

При моделировании материи Вселенной используется уравнение состояния вида $p=w\rho$, где p – давление, ρ – плотность энергии. При этом темной энергии соответствует значение $w = -1$, что приводит к уравнению состояния идеальной жидкости с отрицательным давлением. Этот случай соответствует космологической постоянной. Переход от замедленного расширения к ускоренному означает, что на некотором этапе эволюции Вселенной ускорение $\ddot{a}(t)$ меняет знак с отрицательного на положительный. При этом параметр w изменяется от значений $w > -1$ до значения $w = -1$.

Лагранжиан системы гравитационного и спинорного полей выбран в виде [2]:

$$L = \frac{R}{2\chi} + Z = \frac{R}{2\chi} + \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^\alpha \nabla_\alpha \psi - \nabla_\alpha \bar{\psi} \gamma^\alpha \psi) - mS - F(S), \quad (1)$$

где R – скалярная кривизна, $S = \bar{\psi} \psi$ – инвариант спинорного поля, $F(S)$ – произвольная функция S . Из (1) следуют уравнения Эйнштейна

$$R^\alpha_\beta - \frac{1}{2} \delta^\alpha_\beta R = \frac{8\pi G}{c^4} T^\alpha_\beta, \quad (2)$$

и уравнения спинорного поля

$$\begin{aligned} i\gamma^\alpha \nabla_\alpha \psi - m\psi - \frac{dF}{dS} \psi &= 0, \\ i\nabla_\alpha \bar{\psi} \gamma^\alpha + m\bar{\psi} + \bar{\psi} \frac{dF}{dS} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Метрика изотропной пространственно-плоской Вселенной имеет вид

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2). \quad (4)$$

В метрике (4) уравнения Эйнштейна имеют вид:

$$\frac{3\dot{a}^2}{a^2} = \chi T_0^0, \quad \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \chi T_1^1 = \chi T_2^2 = \chi T_3^3. \quad (5)$$

Выпишем компоненты тензора энергии-импульса спинорного поля:

$$T_{\beta}^{\alpha} = \frac{i}{4} (\bar{\psi} \gamma_{\alpha} \nabla_{\beta} \psi + \bar{\psi} \gamma_{\beta} \nabla_{\alpha} \psi - \nabla_{\alpha} \bar{\psi} \gamma_{\beta} \psi - \nabla_{\beta} \bar{\psi} \gamma_{\alpha} \psi) - g_{\alpha\beta} Z, \quad (6)$$

$$Z = S \frac{dF}{S} - F, \quad T_0^0 = mS + F(S), \quad T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -Z.$$

Установлена связь между компонентами тензора энергии-импульса спинорного поля и идеальной жидкости с уравнением состояния $p = w \varepsilon$ [3]:

$$T_{pf_0}^0 = \varepsilon, \quad T_{pf_1}^1 = T_{pf_2}^2 = T_{pf_3}^3 = -p. \quad (7)$$

Из (6) и (7) следует, что аналогом давления для спинорного поля является $Z = p$. При этом:

$$T_{pf_0}^0 = \varepsilon = \lambda S^{w+1}, \quad p = w\varepsilon = w\lambda S^{w+1}, \quad \lambda = const. \quad (8)$$

Из условия $T_{\nu;\mu}^{\mu} = 0$ установлена связь \square и p :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 a^{-3(1+w)}, \quad p = w\varepsilon_0 a^{-3(1+w)}. \quad (9)$$

Найдены решения уравнений спинорного поля $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \\ \psi_3(t) \\ \psi_4(t) \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} \psi_{1,2} &= \frac{c_{1,2}}{a^{3/2}} e^{-i(mt + \int F'(s) dt)}, \quad c_{1,2} = const, \\ \psi_{3,4} &= \frac{c_{3,4}}{a^{3/2}} e^{i(mt + \int F'(s) dt)}, \quad c_{3,4} = const. \end{aligned} \quad (10)$$

При этом $S = \frac{S_0}{a^3}$, $S_0 = c_1^2 + c_2^2 - c_3^2 - c_4^2$.

А уравнения Эйнштейна имеют решение

$$a(t) = \left[\sqrt{\frac{\chi \varepsilon_0}{3}} \frac{3(w+1)}{2} (t+t_0) \right]^{\frac{2}{3(w+1)}}, \quad w = -1, \quad t_0 = const. \quad (11)$$

Рассмотрен процесс перехода Вселенной от замедленного расширения к ускоренному на основе нелинейного спинорного поля. Показано, что при выборе $F(S)$ в виде:

$$F(S) = \lambda S^{2/3} \left\{ \frac{1}{S_0^{1/3}} + \left[\left(\frac{1}{S} \right)^{1/3} - c_0 \right]^2 \right\},$$

где λ – параметр нелинейности, $c_0 = \text{const}$, реализуется переход Вселенной из состояния с $w = -1/3$ в состояние космического вакуума с $w = -1$.

Литература:

[1] А.Д. Чернин. Космический вакуум. УФН, 2001, сс. 1153-1175.

[2] В. Soha. Spinor fields in Biansky typ-I Universe. Физика элементарных частиц и атомного ядра. 2006, т. 37, вып. 7, сс. 27-90.

[3] V. G. Krechet, M.L. Filchenkov, G.N. Shikin. Equivalence between the description of cosmological models using a spinor field and perfect fluid. Gravit. And Cosmology. 2008. v. 14, № 3, pp. 292-294.

О ВОЗМОЖНОСТИ ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛИ ГРАВИТАЦИИ И «ТЕОРИИ ВСЕГО» НА ОСНОВЕ АНАЛОГИЙ В ПОВЕДЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА И ВАКУУМА

Гневко А.И., Соловов С.Н., Янушкевич В.А.

Наиболее близкой к предлагаемой модели является упругая модель физического вакуума [1]. В модели рассматривают аналогии в поведении физического вакуума и твердого тела в части распространения упругих волн. Предполагают, что микрочастицы вещества являются дефектами (преимущественно точечными) структуры вакуума, строение которого похоже на строение твердых материалов. Считают, что в вакууме, наряду с поперечными электромагнитными волнами, существуют продольные упругие волны.

Продольные волны, как и в твердом теле, могут распространяться со скоростью, значительно превышающей скорость поперечных волн (скорость света), но неспособны передавать заметных значений энергии. Гравитацию и инерцию полагают следствиями существования продольных волн во Вселенной. Природу квантовых взаимодействий считают следствием того, что микрочастицы вещества способны излучать продольные волны на собственных частотах.

Для осуществления предлагаемого способа моделирования используют аналогии в поведении физического вакуума и сжатого вязкоупругого твердого тела при достижении телом предела текучести.

Главное положение, отличающее новую модель от известных, – предполагают, что физический вакуум упруго сжат со всех сторон до наступления микропластических деформаций. Запас упругой энергии сжатия достаточно велик для того, чтобы продольная волна в вакууме, проходя через вещество, усиливалась подобно усилению электромагнитной волны в лазере или упругой волны в твердом теле при достижении предела текучести.

Все микрочастицы вещества являются непрерывно работающими генераторами продольных волн. Усиление продольных волн веществом и диссипация энергии сжатия вакуума приводит к существованию мощного фона продольных волн во Вселенной. Вместе с тем, мощность фона ограничена тем, что волны выходят за область Метагалактики, плотность вещества и энергия сжатия вакуума имеют определенные пределы. Соответственно, исходя из аналогий с поведением твердого тела при разрушении и пластической деформации, может быть объяснена природа основных понятий в классической механике, термодинамике, теории относительности, квантовой механике.

Новые основные следствия [2].

1. Больше (в сравнении с законом Ньютона) приращение гравитационных сил при значительном увеличении масс и их упорядочивании - «сверхгравитация».
2. Ускоренное движение тел по инерции.
3. «Сверхсветовое взаимодействие» (гравитационное) объектов Вселенной посредством обмена продольными волнами.
4. Возможность управления действием сил, связанных с собственным (резонансным) излучением веществом продольных волн.
5. Существование предельных значений энергии сжатия вакуума, препятствующих неограниченному возрастанию энергии движения вещества и неограниченному возрастанию гравитационных сил.

Следствия допускают экспериментальную проверку без непомерных затрат времени и средств.

Предлагаемая модель может существенно расширить область объясняемых явлений в сравнении со стандартной моделью. Следствия обеспечивают новый подход к решению более, чем 50 сложных вопросов, над решением которых работает научное сообщество. Примерами таких вопросов служат раскрытие природы темной энергии, темной материи, гравитации,

инерции, возрастание энтропии, высокотемпературной сверхпроводимости, воздействия на биологические объекты и некоторые другие.

Литература

1. Дубровский В. А. Упругая модель физического вакуума Доклады АН СССР, т.282 1 83, 1985.
2. Гневко А. И. О моделировании гравитации и некоторых явлений с нераскрытой природой. Возможности объединенного представления классической механики, релятивизма, квантования на основе аналогий в поведении физического вакуума и вязкоупругого твердого тела. – М.: Компания Спутник +, 2007. – 77 с

ПРИНЦИП НЕВОЗМУЩАЮЩИХ ИЗМЕРЕНИЙ В МОДЕЛЯХ ПРИЧИННОСТНОГО МНОЖЕСТВА В КВАНТОВОЙ ГРАВИТАЦИИ

А.Л. Круглый

Научно-исследовательский институт системных исследований РАН, Россия, 117218, Москва, Нахимовский пр-т, 36, к. 1, E-mail: akrugly@mail.ru

THE PRICIPLE OF NONPERTURBATIVE MEASUREMENT IN CAUSAL SET MODELS IN QUANTUM GRAVITY

Alexey L. Krugly

Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Science, 117218, Nahimovskiy pr., 36, k. 1, Moscow, Russia, E-mail: akrugly@mail.ru

A causal set is locally finite partially ordered set. This is a model of a discrete spacetime on a microscopic scale. A sequential growth dynamics of a causal set is an addition of new elements one by one. An equation of motion is an algorithm of sequential growth. We consider probabilistic algorithms. The existed causal set specifies probabilities of different variants of addition of new element. This algorithm must be a consequence of some fundamental principles. Principles depend on a physical interpretation of sequential growth. We consider an addition of new element as an elementary measurement. A sequential growth is a process of reception of new information about a causal set by some ideal observer. The first principle is a causality principle. The second principle is a principle of nonperturbative measurements.

В квантовой гравитации имеются разные подходы, одним из которых является гипотеза причинностного множества (causal set hypothesis) (например, см. обзор [1]). Причинностное множество – это локально конечное частично упорядоченное множество событий. Частичный порядок идентифицируется как причинность аналогично пространству Минковского. Предполагается, что пространство-время в микромире конечно делимо, что описывается как локальная конечность. Множество Александра пары точек – это множество точек, следующих за первой и предшествующих второй. Локальная конечность означает, что множество Александра любой пары точек конечно. При этом причинностное множество, описывающее всю вселенную, может быть бесконечным, то есть счетным. Однако наблюдатель может знать только конечный объем информации, что означает рассмотрение только конечных причинностных множеств. Причинностное множество может быть представлено ациклическим ориентированным графом, то есть ориентированным графом, не имеющим ориентированных циклов. Это представление удобно при построении моделей.

Предполагается, что все наблюдаемые объекты на фундаментальном уровне сводятся к подмножествам причинностного множества вселенной, и свойства наблюдаемых объектов сводятся к структуре этих множеств. Таким образом, знание структуры конечного причинностного множества означает обладание полной информацией об этом фрагменте вселенной. Ограничимся рассмотрением только связных причинностных множеств.

Определение связности очевидно при представлении ориентированным графом. Свойства несвязанных компонент полностью независимы, и изучение несвязного множества сводится к независимому изучению каждой связной компоненты.

Задача любой динамики – это предсказание будущей эволюции рассматриваемой системы, или реконструкция ее прошлой эволюции. Для причинностного множества – это означает достройка его в будущее, или в прошлое соответственно. Достройка может осуществляться последовательно. Минимальное множество – это один элемент. Тем самым, достройка может быть сведена к последовательному добавлению элементов один за другим. Такая динамика называется динамикой последовательного роста [2]. Роль уравнения динамики играет алгоритм добавления новых элементов. Предполагается, что алгоритм имеет вероятностный характер. По известному причинностному множеству можно вычислить только вероятности различных вариантов добавления нового элемента. Для поиска этого алгоритма надо сформулировать набор принципов, из которых алгоритм можно вывести. Эти принципы существенно зависят от физической интерпретации добавления нового элемента. Возможна интерпретация, как реальное физическое рождение элемента [2]. В предлагаемой работе добавление интерпретируется, как элементарное измерение. Идеальный наблюдатель исследует вселенную, и добавление нового элемента к известному причинностному множеству есть акт получения минимальной порции новой информации [3].

В качестве первого принципа естественно использовать принцип причинности [2]. Обозначим чрез $P(a)$ множество элементов, предшествующих элементу a . Это аналог светового конуса прошлого. Аналогично обозначим через $F(a)$ множество элементов, следующих элементу a . Это аналог светового конуса будущего. Для вероятностей $p(a)$ и $p(b)$ добавления в будущее новых элементов a и b к некоторому причинностному множеству C можно записать соотношение $p(a)/p(b)=f(P(a), P(b))$. То есть отношение вероятностей является некоторой симметричной функцией световых конусов прошлого в C и не зависит от структуры других частей C , которые причинно не связаны с добавляемыми элементами. Аналогично для добавления элементов в прошлое $p(a)/p(b)=f(F(a), F(b))$.

В качестве следующего принципа можно предложить принцип не возмущающего измерения. Если рост начинается с единичного элемента, то этот элемент может быть любым элементом во всеоенной. Вероятности, с которыми в процессе последовательного роста возникают различные структуры, должны соответствовать тому, как часто эти структуры встречаются во вселенной. Таким образом, наблюдатель не делает предпочтения каким либо структурам при элементарных измерениях, а выявляет объективную структуру вселенной. Придадим этому принципу строгую форму. Мы можем ограничиться только конечными множествами и не уточнять, что значит частота, с которой структура встречается во всей вселенной. Наблюдатель может добавлять очередной элемент в прошлое или будущее по своему произволу, поскольку он волен определять, предсказывает ли он будущее рассматриваемой системы, или реконструирует ее прошлое. Начнем с пустого множества и зафиксируем некоторую последовательность из N шагов, выбрав в будущее или в прошлое делается каждый шаг. На шаге номер $N-1$ последовательного роста мы получили множество из $N-1$ элемента. В нем можно выделить различные структуры, состоящие не более чем из $N-1$ элемента. Рассмотрим две структуры X и Y , состоящие из $M \leq N-1$ элементов каждая. Для

каждого множества из $N-1$ элемента сосчитаем сколько раз каждая из этих структур встречается в этом множестве и умножим на вероятность возникновения этого множества за $N-1$ шагов. Просуммировав результаты отдельно для каждой структуры, мы получим некоторую меру λ для структур X и Y . Рассмотрим отношение $\lambda(X)/\lambda(Y)$. После добавления следующего элемента мы можем определить меру для структур X и Y на множествах из N элементов. Потребуем, чтобы отношение мер не менялось в процессе последовательного роста, и это свойство инвариантности мер выполнялось для любого выбора последовательности добавления элементов в будущее, или в прошлое. Это инвариантное отношение построенных мер при сколь угодно большом росте причинностного множества можно интерпретировать, как отношение частот, с которыми рассматриваемые структуры встречаются во вселенной. Задание инвариантных мер определяет конкретный алгоритм последовательного роста.

На шаге номер N впервые возникает мера для структур из N элементов. Поскольку эти структуры содержат в качестве своих подмножеств структуры из меньшего числа элементов, то мера для структур из N элементов должна быть согласована с мерами для структур из меньшего числа элементов. Введем ряд ограничений. Во-первых, требование инвариантности отношения мер накладывается только на структуры из одинакового числа элементов. Во-вторых, рассматриваются не все структуры. Любое подмножество причинностного множества является объединением и/или пересечением множеств Александра. Будем рассматривать только меру для множеств Александра.

Минимальным непустым является множество Александра из двух элементов, его определяющих. Оно единственно. Также единственно множество Александра из трех элементов, которые образуют линейную последовательность. Из четырех элементов имеется уже два множества Александра. В первом все элементы связаны в линейную последовательность. Во втором внутренние элементы причинно не связаны. Отношение их мер является первой константой модели.

Пронумеруем все причинностные множества из N элементов. Обозначим, через $C(iN)$ причинностное множество из N элементов номер i и через $p(S C(iN))$ вероятность его возникновения в ходе последовательности S добавления N элементов. Пусть после добавления элемента a на шаге номер N полученное множество $C(iN)$ содержит $k(a X C(iN))$ множеств Александра X . По определению получаем

$$\lambda(X S N) = \sum_{C(iN)} k(a X C(iN)) p(S C(iN)) = \sum_{C(jN-1)} p(S C(jN-1)) \sum_a k(a X C(iN)) p(a) \quad (1)$$

для меры множеств Александра X . Поскольку вероятность $p(S C(iN-1))$ есть функция вероятностей добавления соответствующих элементов на предыдущих шагах, то уравнения (1), определяют вероятности добавления новых элементов через заданные меры множеств Александра. При этом $p(S C(iN-1))$ определены на предыдущем шаге и система (1) является системой линейных уравнений для $p(a)$.

Согласно принципу не возмущающего измерения мы на каждом шаге N имеем

$$\lambda(XS N-1)/\lambda(YS N-1)=\lambda(XSN)/\lambda(YSN) \quad (2)$$

Число $k(a X C(iN))$ множеств Александрова X в причинностном множестве $C(iN)$ можно представить как число $k(a X C(jN-1))$ множеств Александрова X в причинностном множестве $C(jN-1)$ на предшествующем шаге и увеличение $\Delta k(a X C(iN))$ числа множеств Александрова X после добавления нового элемента a , которое приводит к образованию $C(iN)$, то есть $k(a X C(iN))= k(a X C(jN-1))+ \Delta k(a X C(iN))$. Учтем, что в силу нормировки $\sum_a p(a)=1$, так как какой либо новый элемент обязательно добавляется. Обозначим $\Delta \lambda(XSN)=\sum_{C(jN-1)} p(S C(jN-1)) \sum_a \Delta k(a X C(iN)) p(a)$ Из (2) получаем

$$\lambda(XS N-1)/\lambda(YS N-1)=\Delta \lambda(XSN)/\Delta \lambda(YSN) \quad (3)$$

Принцип невозмущающего измерения означает пропорциональный рост мер всех множеств Александрова в процессе последовательного роста причинностного множества.

Рассмотренный принцип является ограничением на класс возможных алгоритмов последовательного роста, что является предметом дальнейших исследований автора. Этот же принцип переводит вопрос о принципах, определяющих неизвестный единственный алгоритм, адекватно описывающий реальную вселенную, в вопрос о поиске принципов, задающих меры множеств Александрова в реальной вселенной, что также является предметом дальнейших исследований автора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. R. D. Sorkin, Causal sets: Discrete gravity, (notes for the Valdivia summer school), in Lectures on Quantum Gravity, Proceedings of the Valdivia Summer School, Valdivia, Chile, January 2002, edited by A. Gomberoff and D. Marolf, New York: Springer, 2005, pp. 305-327, (arXiv:gr-qc/0309009).
2. Rideout, D. P. and Sorkin, R. D. A classical sequential growth dynamics for causal sets// Physical Review. - 2000. - D61. - pp. 024002-1 - 024002-16. (ArXiv: gr-qc/9904062).
3. Krugly, A. L. A sequential growth dynamics for a directed acyclic dyadic graph. Вестник Университета Дружбы Народов. Серия: Математика, Информатика, Физика. - 2014. - No 1. - с. 124-138, arXiv: 1112.1064 [gr-qc].

СВОБОДНЫЕ РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ВРАЩЕНИЯ ЧЕТЫРЁХМЕРНОГО РЕЛЯТИВИСТСКОГО ПРОСТРАНСТВА

В. В. Толмачёв, Ф. В. Скрипник, Е. В. Корогодина

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, г. Москва, Россия

Движение абсолютно твердого тела в трёхмерном пространстве можно представить, как движение всего бесконечного трёхмерного евклидова пространства относительно неподвижного другого такого же пространства. При этом, если рассматривать движения с одной неподвижной точкой, то такие движения являются вращениями.

Данная работа посвящена обобщению теории вращений трехмерного евклидова пространства на случай четырехмерного псевдоевклидова пространства специальной теории относительности. При этом четырехмерное псевдоевклидово пространство специальной теории относительности будем считать подобным однородному изотропному твердому телу.

Точками релятивистского четырехмерного псевдоевклидова пространства являются мгновенные точечные события. Зафиксируем в этом пространстве некоторую псевдоортогональную систему отсчета и связанную с ней систему четырехмерных координат $0, ct, x, y, z$. Базисные векторы вдоль осей Oct, Ox, Oy, Oz обозначим e_0, e_1, e_2, e_3 .

Четырехмерный радиус–вектор x_M произвольной точки M будет иметь вид

$$x_M = x^\mu e_\mu,$$

где x^μ – координаты точки M ($x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$).

Если точку M перевести релятивистским поворотом в другую точку M' с координатами x'^μ этого же пространства, то такое перемещение можно провести с помощью формул $x'^\mu = \lambda^\mu_\nu x^\nu$, где коэффициенты λ^μ_ν являются матричными элементами матрицы релятивистского поворота Λ , а само преобразование релятивистского поворота можно представить в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad (1)$$

где

$$\Lambda_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \lambda^0_0 & \lambda^0_1 & \lambda^0_2 & \lambda^0_3 \\ \lambda^1_0 & \lambda^1_1 & \lambda^1_2 & \lambda^1_3 \\ \lambda^2_0 & \lambda^2_1 & \lambda^2_2 & \lambda^2_3 \\ \lambda^3_0 & \lambda^3_1 & \lambda^3_2 & \lambda^3_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix};$$

строки этой матрицы назовем "нулевой", "первой", "второй", "третьей"; столбцы матрицы назовем "нулевым", "первым", "вторым", "третьим".

Матрица релятивистского поворота Λ представляется в виде комбинации следующих шести простых релятивистских поворотов, характеризуемых релятивистскими углами Эйлера.

- 1) Пространственного поворота четырехмерного пространства (т. е. при неизменной временной координате) вокруг оси z на азимутальный угол ψ в направлении от оси x к оси y .
- 2) Пространственного поворота (т. е. при неизменной временной координате) вокруг новой оси x на полярный угол θ в направлении от оси y к оси z .
- 3) Пространственного поворота (т. е. при неизменной временной координате) вокруг получившейся оси z на азимутальный угол φ в направлении от оси x к оси y .
- 4) Пространственно–временного поворота по координатам z и t на угол ω .
- 5) Пространственного поворота (т. е. при неизменной временной координате) вокруг получившейся оси x на полярный угол γ в направлении от оси y к оси z .
- 6) Пространственного поворота (т. е. при неизменной временной координате) вокруг получившейся оси z на азимутальный угол α в направлении от оси x к оси y .

Указанные шесть поворотов в матричном виде запишутся следующим образом:

$$\Lambda_{\psi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_{\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_{\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_{\omega} = \begin{pmatrix} \text{ch } \omega & 0 & 0 & \text{sh } \omega \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \text{sh } \omega & 0 & 0 & \text{ch } \omega \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_{\gamma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix}, \quad \Lambda_{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Саму матрицу релятивистского поворота Λ вокруг неподвижной точки $\theta, \theta, \theta, \theta$ можно представить в виде произведения этих шести матриц:

$$\Lambda = \Lambda_{\alpha} \Lambda_{\gamma} \Lambda_{\omega} \Lambda_{\varphi} \Lambda_{\theta} \Lambda_{\psi}.$$

Из-за громоздкости выражений явный вид матричных элементов матрицы Λ мы здесь не приводим.

Считая релятивистские углы Эйлера непрерывно изменяющимися, т.е. непрерывными функциями некоторого параметра s , который будем называть собственным временем, можно

перейти от поворотов четырехмерного релятивистского пространства к вращениям этого пространства.

Продифференцируем (1) по собственному времени s , в результате получим следующие уравнения движения нашего релятивистского пространства:

$$\begin{pmatrix} c \dot{t}' \\ \dot{x}' \\ \dot{y}' \\ \dot{z}' \end{pmatrix} = \dot{\Lambda} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \dot{\Lambda} \Lambda^{-1} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$

где $\dot{\Lambda} \Lambda^{-1} = \Omega$ – тензор мгновенной угловой скорости вращения четырехмерного релятивистского пространства.

Если рассматриваемые релятивистские вращения четырехмерного релятивистского пространства являются свободными, т. е. не подверженными никаким внешним воздействиям, то такие свободные релятивистские вращения происходят с постоянной четырехмерной угловой скоростью Ω , т. е. угловой скоростью Ω , не зависящей от собственного времени s .

Расчеты показывают, что рассматриваемая матрица тензора мгновенной угловой скорости вращения выражается через два трехмерных вектора M и N , так что уравнения движения можно записать в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} c \dot{t} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & N_x & N_y & N_z \\ N_x & 0 & M_z & -M_y \\ N_y & -M_z & 0 & M_x \\ N_z & M_y & -M_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

или в трехмерных координатах:

$$\begin{cases} c \dot{t} = (\mathbf{N} \cdot \mathbf{r}), \\ \dot{\mathbf{r}} = [\mathbf{r} \cdot \mathbf{M}] + c \mathbf{N} t, \end{cases}$$

В случае релятивистского вращения с постоянной угловой скоростью (в этом случае Ω не зависит от собственного времени s и трехмерные векторы M и N являются некоторыми векторными константами) нами получены аналитические выражения для координат ct , x , y , z точек свободно вращающегося релятивистского четырехмерного пространства в зависимости от собственного времени s , а также траектории этих точек в трехмерном пространстве, в системах отсчета со специально выбранными константными векторами M и N .

КУМУЛЯТИВНЫЙ ПРОЦЕСС ПРЕОДОЛЕНИЯ КУЛОНОВСКОГО БАРЬЕРА В РЕАКЦИЯХ ХОЛОДНОЙ ТРАНСМУТАЦИИ АТОМНЫХ ЯДЕР

Ю. С. Копысов

Институт ядерных исследований РАН, Москва, Россия

e-mail: kop@akado.ru

Намечена теоретическая схема обоснования возможности формирования кумулятивного процесса преодоления кулоновского барьера заряженными нуклидами. Дальнейшая разработка этой теоретической возможности фактически означает формирование новой концепции ядерных превращений в лабораторных и астрофизических условиях. Это новое направление исследований естественно назвать нуклеохимией атомных ядер и «активированных ядерных комплексов». Теоретической основой этих исследований является обобщение понятия самосогласованного поля для активированных ядерных комплексов и для процессов гибридизации нуклонных орбиталей. Основные теоретические идеи формирования кумулятивного процесса преодоления кулоновского барьера рассмотрены на примере распада ядра ${}^6\text{Be}$ и реакций с участием ${}^9\text{Be}$, изотопов никеля ${}^{58}\text{Ni}$, ${}^{60}\text{Ni}$ и ${}^{62}\text{Ni}$ в присутствии атомов водорода и дейтерия. Обсуждается возможная роль кумулятивных эффектов в управлении процессами α -распада и в появлении временных вариаций в скоростях этих процессов.

CUMULATIVE PROCESS OF OVERCOMING COULOMB BARRIER IN REACTIONS OF COLD TRANSMUTATION OF ATOMIC NUCLEI

Yu. S. Kopysov

Institute for nuclear research RAS, Moscow, Russia

e-mail: kop@akado.ru

Theoretical scheme is planned for the possibility of cumulative process to overcome Coulomb Barrier by charged nuclides. Further development of this theoretical possibility actually means building a new concept of nuclear transformations in laboratory and Astrophysical environments. This new line of research is naturally called the nucleochemistry of atomic nuclei and “activated nuclear complexes”. The theoretical basis of this research is to generalize the notion of self-consistent field for activated nuclear complexes and hybridization processes for the nucleon orbitals. The basic theoretical ideas of formation of a cumulative process of overcoming the Coulomb Barrier are used as an example of the decay of the nucleus ${}^6\text{Be}$ and of reactions involving ${}^9\text{Be}$, isotopes of nickel ${}^{58}\text{Ni}$, ${}^{60}\text{Ni}$, and ${}^{62}\text{Ni}$ in the presence of hydrogen or deuterium atoms. The possible role of cumulative effects in management of α -decay process and in the appearance of temporal variations in the rates of these processes are discussed.

CLASSICAL GAS DYNAMICS AS A TOOL FOR DESCRIPTION OF STOCHASTIC AND QUANTUM PARTICLES

Yuri A. Rylov

Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences

Moscow, Russia

It is well known that the Schrödinger equation can be presented as a description of a nonrotational flow of some fluid [1]. D. Bohm developed connection between the quantum mechanics and dynamics of continuous medium (hydrodynamics) [2]. Unfortunately, the connection between the quantum mechanics and hydrodynamics has been one-sided in the sense, that one could obtain hydrodynamic description from the quantum mechanics, but one was not able to obtain the Schrödinger equation from hydrodynamical equations. The recent papers by E. Nelson [3] did not change this situation, although Nelson tried to consider classical stochastic particles. The reason of such a situation was the fact, that the wave function was an axiomatic object in quantum mechanics, and nobody did not know, what is the wave function.

Situation changed, when it became known, that the wave function is a description method of any nondissipative continuous medium [4]. As far as the wave function is an attribute of the continuous medium dynamics, *it seems to be more reasonable to consider classical dynamics of fluids as primary conception*. Then the quantum mechanics will be a secondary (derivative) conception, describing quantum effects.

The classical gas dynamics can be considered as a method of a stochastical particle description. Indeed, a gas molecule moves stochastically, because of interaction with other gas molecules. This interaction appears in the molecular collisions. If the collisions are absent, the gas molecules move deterministically. Character of stochasticity depends on the form of molecular interaction. It is turn out, that one can introduce such a molecular interaction, that the nonrotational flow of the gas with such an interaction between molecules will be described by the Klein-Gordon equation. This interaction changes the molecular mass m , converting it into the effective mass M by means of the relation

$$m^2 \rightarrow M^2 = m^2 + h^2 c^{-2} (g_{kl} \kappa^k \kappa^l + \partial_l \kappa^l), \quad \partial_l \equiv \frac{\partial}{\partial x^l} \quad (1)$$

where κ^l , $l=0,1,2,3$ is some force field and h is the quantum constant. Dynamic equations for the κ -field are obtained from the corresponding action. It follows from these dynamic equations, that the κ -field has potential $\kappa \quad \kappa_l = \partial_l \kappa, \quad l=0,1,2,3$

In usual gas the interaction of molecules is real in the following sense. The motion of a single molecule (outside the gas) becomes to be deterministic. If the gas dynamics is used as a method of description of the stochastic (quantum) particles motion, the interaction of particles is fictitious in the sense, that the motion of a single particle remains to be stochastic.

The classical gas dynamics describes a mean motion of a molecule. This description is rather incomplete in the sense, that it describes only mean values $\langle p \rangle$, $\langle E \rangle$ and $\langle p \times x \rangle$ of only additive quantities such as momentum p , and energy E . It is connected with the fact the quantities $u = \langle p/m \rangle$, E and the particle density ρ are used as dynamic variables. Besides, the classical gas dynamic equations were deduced from the conservation laws of matter, of momentum and of energy in that time, when the molecular structure of the gas was not known. The gas dynamic equations cannot describe the fluctuation of the molecule energy $\sqrt{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2}$. To obtain higher momenta of p , one needs to use the distribution function $f(\mathbf{x}, \mathbf{p})$. It can be obtained from the kinetic equation, which takes into account more detailed information on the molecular interaction (collisions). If formalism of the gas dynamics is used for description of the mean motion of quantum particles, it admits one to describe only mean quantities $\langle p \rangle$, and $\langle E \rangle$. It is rather incomplete description. To obtain more detailed information on the mean motion of a quantum particle, one needs to use a more detailed information on the κ -field, which is responsible for quantum effects. The distribution function $f(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ is a nonrelativistic structure, as well as the phase space, where the distribution function is defined. The quantum particle is a relativistic particle. The regular component of velocity may be nonrelativistic, whereas the stochastic component of velocity is relativistic. This circumstance is important in the relation, that the formalism of quantum mechanics, using the wave function, gives only rather incomplete description of the mean motion of a quantum particle. However, the quantum mechanics pretends, that description in terms of wave function is maximally complete. As a result the elementary particles are described as a pointlike objects, provided with different quantum numbers. A possible internal structure of elementary particles remains to be unknown.

The gas, whose molecules interact via the κ -field, is described by the action

$$A[x, \kappa] = \int (-mKc \sqrt{g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k} - \frac{e}{c} A_l \dot{x}^l) d^4 \xi, \quad \dot{x}^l = \frac{\partial x^l}{\partial \xi_0} \quad (2)$$

$$K = \frac{M}{m} = \sqrt{1 + \lambda^2 (\kappa_l \kappa^l + \partial_l \kappa^l)}, \quad \partial_l \equiv \frac{\partial}{\partial x^l} \quad (3)$$

where $\xi = \{\xi_0, \xi\}$. The variables $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ label world line of molecules, whereas ξ_0 is a parameter along the world line. Motion of the gas molecules is stochastic. Transformation of action (2) to description in terms of the wave function $\square \square \square$ contains integration [5,6,7].

After transformation the action (2) is reduced to form (Details of this transformation can be found in [7])

$$A[\psi, \psi^*] = \int \left\{ (ih\partial_k + \frac{e}{c} A_k) \psi^* (-ih\partial^k + \frac{e}{c} A^k) \psi - m^2 c^2 \rho - \frac{\hbar^2}{4} (\partial_l s_\alpha) (\partial^l s^\alpha) \rho \right\} d^4 x \quad (4)$$

where $\rho = \psi^* \psi$, $s_\alpha = \frac{\psi^* \sigma_\alpha \psi}{\rho}$, $\square \alpha = 1, 2, 3$, $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$, $\psi = (\psi_1^*, \psi_2^*)$ and σ_α are the Pauli matrices.

Variation of action (4) with respect to \square * generates dynamic equation

$$(-i\hbar\partial_k + \frac{e}{c}A_k)(-i\hbar\partial^k + \frac{e}{c}A^k)\psi - (m^2c^2 + \frac{\hbar^2}{4}(\partial_l s_\alpha)(\partial^l s^\alpha))\psi = -\hbar^2 \frac{\partial_l(\rho\partial^l s_\alpha)}{2\rho}(\sigma_\alpha - s_\alpha)\psi \quad (5)$$

The gradient of the unit 3-vector $\mathbf{s} = \{s_1, s_2, s_3\}$ describes rotational component of the gas flow. In the case of nonrotational flow, when $\partial_l s_\alpha = 0$, the equation (5) turns to the Klein-Gordon equation

$$(-i\hbar\partial_k + \frac{e}{c}A_k)(-i\hbar\partial^k + \frac{e}{c}A^k)\psi - m^2c^2\psi = 0$$

Although axiomatic conception (AC) of quantum mechanics (QM) and the gas dynamic conception (GDC) of QM lead to the same dynamic equations, the difference between AC and GDC is not only in interpretation of QM. The AC of QM is a conception, which does not admit further development. Axiomatic conception supposes that the mean value of any function $F(x, \square p)$ is determined by the formula

$$\langle F(x, p) \rangle = \int \psi^* F(x, -i\hbar\nabla) \psi d^3x$$

whereas in the gas dynamic conception it is valid only for $\Phi\square(x)$, momentum p , energy $\square\square$ and angular moment. In other words, GDC shows, that description in terms of world function is incomplete and it needs a farther development.

In nonrelativistic gas dynamics this description of the stochastic molecule motion is specified by introduction of the distribution function and kinetic equation for it. The GDC of quantum mechanics is specified by introduction of a discrete space-time geometry, where motion of free elementary particles is stochastic [8, 9]. In particular, description of the Dirac equation in terms of hydrodynamic variables leads to the particle world line, having a shape of helix [10]. This additional development leads to a possibility of investigation of the internal structure of elementary particles, whereas the axiomatic conception of QM considers an elementary particle as a pointlike object provided, by a set of quantum numbers.

REFERENCES:

- [1] E. Madelung, .Quanten theorie in hydrodynamischer Form *Z.Phys.* **40**, 322-326, (1926).
- [2] D. Bohm, On possibility of the quantum mechanics interpretation on basis of representation on hidden variables, *Phys.Rev.* **85**, 166,(1952), 180,(1952).
- [3] E. Nelson, *Journal of Physics: Conference Series* 504 (2014) 012013
doi:10.1088/1742-6596/504/1/012013
- [4] Yu. A. Rylov, .Spin and wave function as attributes of ideal .fluid., *J. Math. Phys.* **40**, 256-278, (1999).

[5] Clebsch, A. Uber eine allgemeine Transformation der hydrodynamischen Gleichungen, *J. reine angew. Math* **54**, 293-312 (1857).

[6] Clebsch, A. Ueber die Integration der hydrodynamischen Gleichungen,
J. reine angew. Math. **56**, 1-10, (1859).

[7] Rylov Yu.A. (2014)) Logical reloading. What is it and what is a profit from it? *Int. J. Theor, Phys.* **53**, iss. 7, pp.2404-2433, (2014), section 5.

[8] Yu. A. Rylov, Discrete space-time geometry and skeleton conception of particle dynamics . *Int. J. Theor. Phys.* **51**, 1847-1865, (2012), See also e-print 1110.3399v1

[9] Yu. A. Rylov, Physics geometrization in microcosm: discrete space-time and relativity theory, (Review) *Hypercomplex numbers in physics and geometry* **8**, iss.

2 (16,) pp.88-117 (2011). (In Russian). English version in e-print/1006.1254v2

[10] Yu.A. Rylov, Dirac equation in terms of hydrodynamic variables *Advances in Applied Clifford Algebras*, **5**, pp 1-40, (1995)) See also <http://arXiv.org/abs/1101.5868>

EFFECTIVE SCHROEDINGER EQUATION FOR FAST DRIVEN QUANTUM SYSTEMS

Nikolay P. Tretyakov¹ and Maximo A. Agüero²

¹ The Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration,
Prospect Vernadskogo, 82, Moscow, Russian Federation 119571

² Universidad Autonoma del Estado de Mexico, Facultad de Ciencias, Instituto
Literario 100 Toluca, Edo.Mex.50000, Mexico

"Driven systems" are dynamical systems periodically influenced by external pulses and recently have been attracting more and more attention. The visible reason for such interest is that a driven system totally changes its typical characteristics. The bright example of such changes is inverted pendulum. Fast periodical fluctuations of the point of suspension stabilize the overturned position of the pendulum, which is unstable under normal conditions. It is necessary to note that it only happens when the frequency of external pulses Ω greatly exceeds the pendulum characteristic frequency ω_0 . In other words, the stabilization effect is possible only under the influence of fast external pulses. Hence there is a special class of driven systems - fast driven systems, those systems for which the frequency of external pulses is much more significant than the system's characteristic frequency.

In general, not every system has a single time scale. In this case Ω must be much greater than the maximum characteristic frequency of the system. This is just fast pulses that bring about radical changes in the dynamics of the system; that is why the thorough investigation of the case is of particular practical interest.

In our article [1] we proposed an approach to studying the wide class of such systems based on the Hamilton formalism. The method is based on the search of solution of dynamical equations with fast oscillating parts, like:

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{Q}_i + \mu \boldsymbol{\chi}_i; \quad \mathbf{p}_i = \mathbf{P}_i + \mu \boldsymbol{\rho}_i, \quad (1)$$

where $\mathbf{Q}_i, \mathbf{P}_i$ are "slow" and "fast" parts of coordinates and impulses, which characteristic times are $2\pi/\omega_0$ and $2\pi/\Omega$ respectively and $\mu = \omega_0/\Omega \ll 1$.

In other words, dynamical trajectories of the system can be looked upon as superposition of fast pulsations and slow modulations. The physical base of relations (1) lies in the fact that due to inertia the system responds weakly to fast external pulses. In the work [1] we obtained the effective equations for mean slow trajectories. Due to external pulses these equations contain some additional terms as compared with unperturbed equations. For example, in the simple case of a pendulum we have to take into consideration the additional restoring force, which stabilizes the pendulum in its inverted position.

The scope of the present work is to apply this approach to the quantum case, i.e. to obtain an effective Schroedinger equation for the system with a hamiltonian containing fast oscillating terms. The most common case of such hamiltonian is

$$\widehat{H}(\widehat{x}, \widehat{p}, t) = \widehat{H}_0(\widehat{x}, \widehat{p}, t) + \sum_{l \geq 1} \widehat{h}^{(l)}(\widehat{x}, \widehat{p}) \cos(l\Omega t) + \sum_{l \geq 1} \widehat{g}^{(l)}(\widehat{x}, \widehat{p}) \sin(l\Omega t) \quad (2)$$

where $\widehat{H}_0(\widehat{x}, \widehat{p}, t)$ is the slow hamiltonian, not affected by fast external pulses. Generally speaking, the non-perturbed hamiltonian may depend on time, however, its characteristic period is much greater than the period of external influence.

Let us search solutions of the Schroedinger equation

$$i \hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \widehat{H} \Psi \quad (3)$$

with the hamiltonian (2) using the quantum analogue of the ansatz (1):

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \Phi(\mathbf{x}, t) + \mu \varphi(\mathbf{x}, t) \quad (4)$$

where the wave function $\Phi(\mathbf{x}, t)$ varies slowly with time and the function $\varphi(\mathbf{x}, t)$ is fast, i.e. changeable in time with frequencies multiple to Ω .

Further transformations can be made applying the technique used in the classical case [1]. Namely, we can substitute (4) into (3); divide the fast and slow parts by averaging over the fast period and solve the fast equation, obtaining $\varphi(\mathbf{x}, t)$. Finally, we may derive the efficient equation for $\Phi(\mathbf{x}, t)$ (up to terms linear in μ). The final equation will be a standard stationary Schroedinger equation with additional terms, originating from the presence of fast oscillating parts in the hamiltonian (2).

The problem of normalization of wave functions arises. The function $\Psi(\mathbf{x}, t)$ being a solution of the exact Schroedinger equation, must be normalized for each value of t . Expanding in μ we obtain

$$1 = \int \Psi(\mathbf{x}, t) \Psi^*(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \approx \int \Phi(\mathbf{x}, t) \Phi^*(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} + \mu \int (\Phi(\mathbf{x}, t) \varphi^*(\mathbf{x}, t) + \Phi^*(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x} \quad (10)$$

However, the "slow" function $\Phi(\mathbf{x}, t)$ which describes the mean motion also should be normalized: $\int \Phi(\mathbf{x}, t) \Phi^*(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = 1$ and (10) yields:

$$\int (\Phi(\mathbf{x}, t) \varphi^*(\mathbf{x}, t) + \Phi^*(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x} = 0 \quad (11)$$

The equation (11) represents the normalization condition for the function $\Phi(\mathbf{x}, t)$.

The forthcoming calculations are standard in case that the equations contain both fast and slow terms. We follow the methodology for classical dynamical systems described in [1]. The equation for functions $\Phi(\mathbf{x}, t)$ is obtained:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = & \hat{H}_0 \Phi - \frac{1}{4\hbar^2 \Omega^2} \sum_l \frac{1}{l^2} \hat{H}_0 (h_l^2 + b_l^2) \Phi + \\ & \frac{1}{2\hbar^2 \Omega^2} \sum_l \frac{1}{l^2} (\hat{h}_l \hat{H}_0 \hat{h}_l - \hat{h}_l^2 \hat{H}_0 + \hat{b}_l \hat{H}_0 \hat{b}_l - \hat{b}_l^2 \hat{H}_0) \Phi + \\ & \frac{1}{4\hbar^2 \Omega^2} \sum_{l,k} \frac{1}{l(l+k)} [h_{l+k} (h_l h_k - b_l b_k) + b_{l+k} (h_l b_k + b_l h_k)] \Phi + \\ & \frac{1}{4\hbar^2 \Omega^2} \sum_{l \neq k} \frac{1}{l(l-k)} \left[h_{|l-k|} (h_l h_k + b_l b_k) + \frac{(l-k)}{|l-k|} b_{|l-k|} (h_l b_k - b_l h_k) \right] \Phi. \end{aligned} \quad (17)$$

The equation (17) represents our main result - the effective Schroedinger equation governing the mean movement of a system influenced by fast external disturbance, as described by the hamiltonian (2). Additional components, in comparison with a standard equation, are similar to those found in the classical case [1] and they may be responsible for a variety of new interesting effects.

1. Nikolai P. Tretiakov, J.N.Teixeira Rabelo. Fast driving: effective equations of motion for classical systems // Europhysics Letters.-1999.-V.48.-2.-P.143-149.

УПРОЩЕННАЯ ОЦЕНКА УРОВНЯ МИРОВОГО ОКЕАНА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЛОГИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Л.В. Сорокин¹⁾

«SIMPLIFIED SEA LEVEL ESTIMATION BASED ON LOGISTIC EQUATION»

L.V. Sorokin¹⁾

¹⁾ *Economic and Mathematical Modeling Department, Peoples' Friendship University of Russia,
Moscow, Russia*

e-mail: leonid.plasma@gmail.com

В настоящее время не существует общепринятой модели описывающей изменение уровня Мирового океана при изменении климата Земли. Климатическая модель содержит большое число параметров и рассчитывается с применением суперкомпьютеров по сеточным технологиям. Только после этого предоставляется возможность оценки теплового и массового переноса, включая фазовые переходы (таяние льда, и испарение и замерзание воды) Однако для оценки изменения уровня Мирового океана данный подход является слишком трудоемким.

В качестве альтернативы Хансен (Hansen J.E., 2007) предложил упрощенный подход [1] к оценке уровня Мирового океана при изменении средней температуры воздуха у поверхности Земли. Модель экспоненциального роста уровня Мирового океана с периодом удвоения за 10 лет, полностью согласуется с данными наблюдения и приведет к подъему уровня океана на 5 м к 2100 г. [1].

В ряде случаев упрощенные модели показали свою высокую прогностическую ценность. Так, полуэмпирический подход [2], предложенный С. Рамсторфом (Rahmstorf S., 2007), продемонстрировал хорошее совпадение с наблюдаемым за 50 лет уровнем Мирового океана.

Для определения экономического ущерба от повышения уровня Мирового океана в модель необходимо включить стационарный уровень, до которого возможно повышение при заданном увеличении средней температуры воздуха у поверхности Земли, а также определить постоянную времени и форму переходного процесса.

В работе [3] получены регрессионные уравнения (1) и (2) связывающие стационарный уровень Мирового океана со средней температурой воздуха у поверхности Земли:

$$(SL > 0), \quad SL_{st} = 7,5 \times Ts_t - 106,875 \quad (1)$$

$$(SL < 0). \quad SL_{st} = 24,793 \times Ts_t - 353,306 \quad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) следуют следующие оценки:

средняя температура в эпоху доиндустриального развития ($SL=0$)

$$Ts_{SL=0} = 14,25 \text{ } ^\circ\text{C}; \quad (3)$$

средняя температура воздуха у поверхности Земли в настоящее время ($t=0$), которая соответствует уровню Мирового океана $SL_{t=0} = 0,21$ м;

$$Ts_{SL=0,21} = 14,278 \text{ } ^\circ\text{C}; \quad (4)$$

средняя температура воздуха у поверхности Земли в настоящее время ($t=0$)

$$Ts_{t=0} = Ts_{SL=0} + 0,8 = 15,05 \text{ } ^\circ\text{C}; \quad (5)$$

По сравнению с эпохой доиндустриального развития ($SL=0$) в настоящее время ($t=0$) считаются достигнутыми следующие показатели:

уровень Мирового океана повысился на

$$SL_{t=0} = 0,21 \text{ м}; \quad (6)$$

средняя температура воздуха у поверхности Земли возросла на

$$\Delta T = Ts_{t=0} - Ts_{SL=0} = 0,8 \text{ }^\circ\text{C}. \quad (7)$$

Однако из уравнений (1) и (5) следует, что увеличение средней температуры воздуха у поверхности Земли на $0,8^\circ\text{C}$ соответствует стационарному уровню Мирового океана в 6 м.

Из уравнений (1) и (4) следует, что для предотвращения роста уровня Мирового океана и удержании его на достигнутом значении (6) допустимое превышение средней температуры воздуха у поверхности Земли по сравнению с эпохой доиндустриального развития должно быть снижено в 10 раз

$$\Delta T = Ts_{t=0} - Ts_{SL=0,21} = 0,08 \text{ }^\circ\text{C}. \quad (8)$$

Для моделирования переходного процесса роста уровня Мирового океана при увеличении средней температуры воздуха у поверхности Земли воспользуемся логистическим уравнением:

$$LE_{(T,t)} = \frac{SL_{st} * SL_{t=0} * (1 + \Delta T)^{(t*m/k)}}{SL_{t=0} * (1 + \Delta T)^{(t*m/k)} + SL_{st} - SL_{t=0}}. \quad (9)$$

Уравнение логистической функции (9) должно отвечать следующим требованиям:

t – шкала времени ($t=0$ соответствует настоящему времени);

значение уравнения (9) в точке $t=0$ равно $LE_{t=0} = SL_{t=0} = 0,21 \text{ м}$;

при $\Delta T = 0$, $a = (1 + \Delta T) = 1$, следовательно $LE_{(T,t)} = SL_{t=0} = const$;

коэффициенты k и m определяют постоянную времени переходного процесса;

при условии (6) подбор коэффициентов $a = (1 + \Delta T)$, k , m должен на начальном этапе обеспечить рост уравнения (9) с удвоением за каждые 10 лет;

уравнение (9) достигает стационарного уровня (1) при $t \rightarrow \infty$.

Произведем оценку изменения уровня Мирового океана для достигнутых в настоящее время климатических показателей, подставив в уравнение логистической функции (9) условия (1), (5), (6), (7), $k=100$, $m=9$.

На рисунке 1 представлены графики уровня Мирового океана (9) для двух случаев: достигнутого на настоящее время повышения средней температуры воздуха у поверхности Земли в $0,8^\circ\text{C}$ по сравнению с эпохой доиндустриального развития (7), а также для значения $0,08^\circ\text{C}$ (8), которое в 10 раз меньше достигнутого.

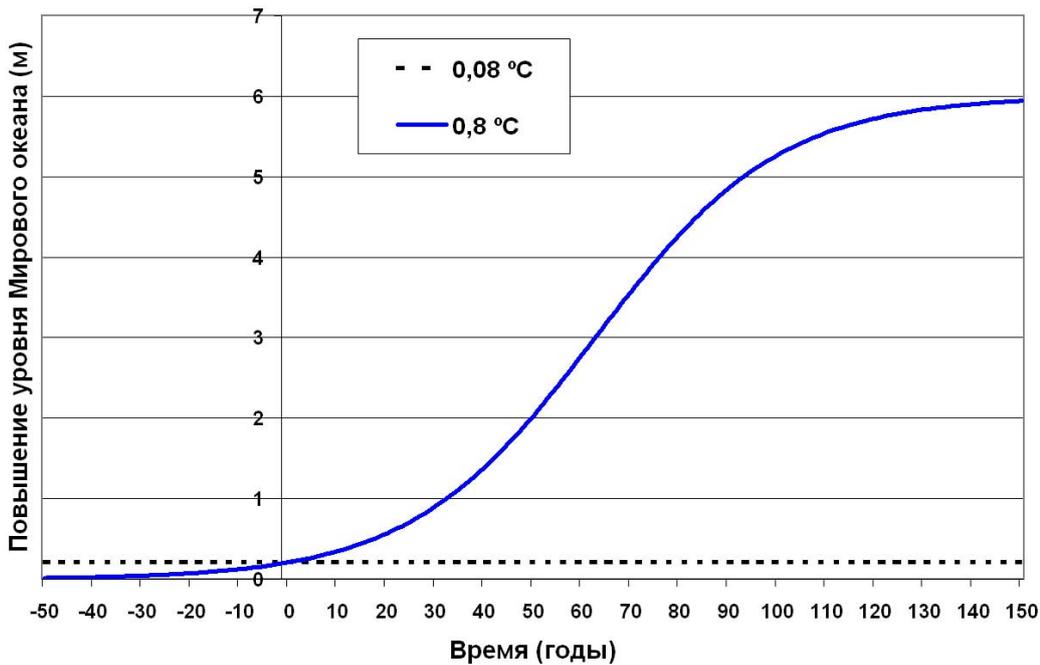


Рис. 1. Логистическая модель уровня Мирового океана при достигнутом уровне потепления климата.

Из рисунка 1 видно, что при ограничении потепления климата на современном уровне (7) в $0,8^{\circ}\text{C}$ через 95 лет уровень Мирового океана достигнет величины в +5 м, что согласуется с оценкой Хансена (Hansen J.E., 2007) [1] и в дальнейшем стабилизируется на уровне +6 м. В случае, если удастся снизить уровень потепления в 10 раз (8) в $0,08^{\circ}\text{C}$, то уровень Мирового океана удастся стабилизировать на достигнутой в настоящее время отметке в 0,21 м.

Литература

- [1]. Hansen J.E. 2007: Scientific reticence and sea level rise. *Environ. Res. Lett.*, 2, 024002 (6 pp.)
- [2]. Rahmstorf S. 2007: A semi-empirical approach to projecting future sea-level rise, *Science*, 315, 368—370.
- [3]. Сорокин Л.В., Монделло Ж. Цена политики адаптации к изменению климата // *Вестник Российского университета дружбы народов, серия Экономика*. 2013. №5. С. 63–72., ISSN 0869-8732, <http://elibrary.ru/item.asp?id=21074092>

ХАОС, СОЛИТОНЫ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ

Сидоров С.В.

CHAOS, SOLITONS AND NONLINEAR WAVES

Sidorov S.V.

Московская государственная академия водного транспорта, Москва, Россия

E-mail: sidorovsv@mail.ru

Abstract. Discusses the relationship of nonlinear traveling, including solitary waves in dissipative systems with dynamic chaos. It is shown that dynamic chaos in nonlinear wave models is a typical property of these systems, especially in the case of solutions corresponding solitary wave – a soliton. Consider the type of solutions in strange attractors.

Аннотация. Рассматривается взаимосвязь нелинейных бегущих, в том числе уединенных волн в диссипативных системах с динамическим хаосом. Показано, что динамический хаос в моделях нелинейных волн является типичным свойством этих систем, особенно в случае решений, соответствующих уединенной волне – солитону. Рассмотрен вид решений в странных аттракторах.

Появление хаотических режимов в системах, моделирующих нелинейные волны, отмечалось неоднократно (см., например, [1]). Однако отсутствие понимания механизма образования динамического хаоса в нелинейных системах долгое время препятствовало решению вопроса о взаимосвязи этих явлений.

Согласно надежно установленным результатам основу сценария перехода к динамическому хаосу составляет единый бифуркационный механизм рождения бесконечно большого числа предельных циклов различного периода (или инвариантных торов) в нелинейной диссипативной системе [2]. Начальным является каскад бифуркаций удвоения периода предельных циклов, который завершается простейшим сингулярным (хаотическим) аттрактором – аттрактором Фейгенбаума. Более сложную структуру аттрактора создает субгармонический каскад бифуркаций рождения циклов, кратность периода которых определяется порядком Шарковского. Дальнейшее усложнение хаотических аттракторов идет через гомоклинический каскад бифуркаций рождения предельных циклов, сходящихся к гомоклическому контуру – петле сепаратрисы особой точки.

В динамических нелинейных системах, имеющих размерность фазового пространства более трех, сценарий перехода к хаосу может включать бифуркации двумерных инвариантных торов, представленных топологическим произведением двух предельных циклов. В этом случае механизм образования хаотических аттракторов осуществляется через те же самые, указанные

выше каскады бифуркаций, связанных, по крайней мере, с одним из предельных циклов, входящих в топологическое произведение тора [3].

Динамический хаос – явление присущее нелинейным открытым динамическим системам. Здесь мы рассматриваем образование и распространение волн в активной и осциллирующей средах. В качестве базовой математической модели возбудимой среды принята система уравнений в частных производных

$$\begin{aligned} u_t &= Du_{xx} + f(u, v), \\ v_t &= \varepsilon g(u, v), \end{aligned} \quad (1)$$

где D – коэффициент диффузии, ε – малый параметр, $f(u, v)$ и $g(u, v)$ – нелинейные в общем случае полиномиальные функции среды. Распространенной моделью при описании осциллирующей активной среды является нестационарное обобщенное уравнение Гинзбурга-Ландау [4], которое в одномерном случае, соответствующем плоской волне, имеет вид

$$W_t(x, t) = aW(x, t) + dW_{xx} - bW(x, t)|W(x, t)|^2, \quad (2)$$

где $W(x, t) = u(x, t) + iv(x, t)$ – комплекснозначная функция, a , d , b – комплексные коэффициенты. В частности, обобщением уравнения (2) с учетом переноса является модель открытых течений в каналах [5].

Широко распространенный способ исследования системы вида (1) и (2) состоит в переходе от уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), к так называемой автомодельной задаче. В предположении, что решение систем (1) и (2) имеет вид бегущей волны

$$u(x, t) = \tilde{u}(x - ct) = \tilde{u}(\xi), \quad v(x, t) = \tilde{v}(x - ct) = \tilde{v}(\xi),$$

уравнения в частных производных преобразуются в систему ОДУ относительно независимой переменной ξ

$$\begin{aligned} D \frac{d^2 u}{d\xi^2} + c \frac{du}{d\xi} + f(u, v) &= 0, \\ \frac{dv}{d\xi} + \frac{\varepsilon}{c} g(u, v) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

При переходе к переменной ξ в системе (3) появляется дополнительный, неизвестный ранее параметр c – скорость волны. Решение в виде уединенной волны может иметь место только при выполнении в системе (3) следующих условий: $\tilde{u} \rightarrow \tilde{u}_0$ и $\tilde{v} \rightarrow \tilde{v}_0$ при $\xi \rightarrow \pm\infty$, где $(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)$ – однородное стационарное состояние системы. Наличие такого решения означает существование петли сепаратрисы особой точки $(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)$, что возможно лишь при определенном значении параметра $c = c_0$ в системе (3), т.е. скорость уединенного импульса находится из решения нелинейной задачи на собственное значение. Метод решения такой задачи разработан нами в [6].

При этом пространственно однородные состояния системы (1) переходят в особые точки системы (3), уединенные бегущие волны отображаются в гомоклинические петли сепаратрис особых точек, а решения в виде бегущих волн – в периодические решения системы (3). Как правило, периодические решения в нелинейной диссипативной системе представлены предельным циклами, с которыми неразрывно связано образование хаотических аттракторов. В нелинейной системе вида (2), имеющей размерность более трех, могут иметь место квазипериодические решения, представленные в фазовом пространстве инвариантными торами.

Бифуркационным параметром в системе (3) может служить величина скорости распространения бегущей волны. Поэтому различным значениям этого параметра соответствуют различные периодические решения системы (3) и, естественно, разный вид бегущей волны. В частности, при определенных значениях скорости $c = c^*$ этих волн решениям системы (3) отвечают хаотические аттракторы – такие состояния системы (3), при которых в узкой области фазового пространства сосредоточено бесконечно большое число предельных циклов различного периода. В этом случае под влиянием флуктуаций траектория системы (3) перескакивает с одного цикла на другой, не выходя из области притяжения аттрактора. В результате при значениях скорости c равных или близких c^* форма бегущей волны не остается постоянной, а флуктуирует случайным образом, оставаясь близкой к форме волны, соответствующей исходному предельному циклу.

Более сложным выглядит механизм образования бегущих волн в осциллирующей среде, представленной либо сетью связанных между собой колебательных элементов, либо распределенной средой, где отдельные физически малые элементы обладают автоколебательными свойствами. Очевидно, что в таких средах при значениях $\xi \rightarrow \pm\infty$ решение $(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)$ не является однородным стационарным состоянием, а представляет собой однородное в пространстве и периодическое по времени решение.

При использовании автомодельного приближения уравнения вида (2) сводятся к системе четырех ОДУ первого порядка. Нами показано, что в этом случае предельный цикл в системе ОДУ отвечает однородному по пространству и периодическому по времени решению и характеризует автоколебательные свойства осциллирующей среды. Появлению бегущих волн соответствует решение, которое появляется при потере устойчивости этого предельного цикла и рождению двумерного инвариантного тора, представленного топологическим произведением исходного (внутреннего) цикла и вторичного (внешнего) цикла, образовавшегося в результате

бифуркации Андронова-Хопфа. При дальнейшем изменении бифуркационного параметра, например, скорости бегущей волны, имеют место указанные выше каскады бифуркаций вторичного цикла. Эти бифуркации последовательно приводят сначала к появлению хаотического аттрактора Фейгенбаума на двумерном инвариантном торе, затем к субгармоническому хаотическому аттрактору и, наконец, к гомоклиническому каскаду бифуркаций рождения циклов, сходящихся к петле сепаратрисы на исходном внутреннем цикле тора. Последнее решение отвечает уединенной волне в осциллирующей среде. А все бесконечное множество решений в виде инвариантных торов, представленных топологическим произведением исходного (внутреннего) предельного цикла на внешние (вторичные) циклы различного периода с кратностью согласно порядку Шарковского, дает бесконечное множество решений в виде бегущих волн в осциллирующей среде.

Таким образом, динамический хаос в нелинейных системах, моделирующих нелинейные волны, является не уникальным, а скорее типичным явлением, отражающим синергетику образования бегущих волн в нелинейной активной среде.

Литература.

1. Инфельд Э., Роуландс Дж. Нелинейные волны, солитоны и хаос. – пер. с англ. Под ред. Е.А. Кузнецова – 2-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 400 с.
2. Magnitskii N. A., Sidorov S.V. *New Methods for Chaotic Dynamics*. – Singapore: World Scientific, 2006, 363 p.
3. Сидоров С.В. О механизме перехода к диффузионному хаосу. // Первая международная конференция "Системный анализ и информационные технологии" САИТ-2005 (12-16 сентября 2005 г., Переславль-Залесский, Россия): Труды конференции. В 2 т. Т. 1. – М.: КомКнига, 2005. С. 124 - 129.
4. Скотт Э. Нелинейная наука: рождение и развитие когерентных структур. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 560 с.
5. Deissler R.J. Turbulent bursts, spots and slugs in a generalized Ginzburg-Landau equation. // *Phys. Lett. A*. – 1987. – V.120, \No 7. – P. 334-340.
6. Магницкий Н.А., Сидоров С.В. О нахождении гомоклинических и гетероклинических контуров особых точек нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. // *Дифференциальные уравнения*, 2003, т. 39, № 11, с. 1511-1520.

АНАЛИЗ НЕГОЛОНОМНОСТИ ГАМИЛЬТОНОВЫХ ПОЛЕЙ

ANALYSIS OF NONHOLONOMICITY VALUE OF HAMILTONIAN FIELDS

И. Каспирович
I. Kaspirovich

Российский университет дружбы народов, Москва, РФ
Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, RF

В классической механике понятие неголономности применяется, как правило, лишь к связям, наложенным на систему. При этом, динамической системе с наложенной кинетической неголономной связью можно сопоставить векторное поле. Одной из характеристик такого поля является степень неголономности, которая определяет свойства геометрии данного поля. Однако использование этой характеристики в геометрии векторных полей ограничивалось полями в евклидовом пространстве. В работе ставится вопрос об обобщении понятия степени неголономности на поля, определенные в неевклидовых пространствах, например, на гамильтоновы векторные поля. Также ставится вопрос о возможности применения данного метода и о существовании механической трактовки полученных результатов.

In classical mechanics such notion as nonholonomicity is applied only to constraints putted on a dynamical system. Besides, Pfaffian nonholonomic constraints might be associated with vector fields. The Nonholonomicity value is one of the principal characteristics of such fields, which determines properties of geometry of these vector fields. However, the application of this characteristic in the geometry of vector fields was restricted only to fields in Euclidean spaces. Some generalization of nonholonomicity value of vector fields in non - Euclidean spaces is proposed in this paper. As an example, the nonholonomicity values of Hamiltonian vector fields in symplectic spaces are analyzed. Also it is important to find out whether a mechanical interpretation of the received results exists and can we actually apply this method to Hamiltonian fields.

Для обобщения понятия объекта неголономности [1] на поля, определенные в неевклидовом пространстве, необходимо связать коэффициенты 3-х линейной формы в определении самого объекта неголономности с компонентами метрического тензора того пространства, в котором задано векторное поле. Если тензор неголономности расписать в виде 3-х линейной формы:

$$\begin{aligned} \Omega_{ijk} = & \omega_{iii}\xi_i\partial_i\xi_i + \omega_{iij}\xi_i\partial_i\xi_j + \omega_{iik}\xi_i\partial_i\xi_k + \dots + \\ & + \dots + \omega_{iji}\xi_i\partial_j\xi_i + \omega_{ijj}\xi_i\partial_j\xi_j + \omega_{ijk}\xi_i\partial_j\xi_k + \dots + \\ & + \dots + \omega_{kki}\xi_k\partial_k\xi_i + \omega_{kkj}\xi_k\partial_k\xi_j + \omega_{kkk}\xi_k\partial_k\xi_k, \end{aligned} \quad (1)$$

то коэффициенты этой формы будут выражаться через компоненты метрического тензора следующим образом:

$$\omega_{ijk} = g_{il}\epsilon_{ljk}. \quad (2)$$

Такая зависимость является следствием того, что объект неголономности в трехмерном случае представляет собой скалярное произведение поля на свой ротор. Для анализа неголономности гамильтонова поля необходимо в уравнениях (1) и (2) в качестве компонент метрического тензора использовать компоненты симплектической структуры. Однако объект неголономности не будет при этом являться кососимметричным тензором. Из-за этого во всех, в том числе, и недиагональных элементах будут встречаться выражения типа:

$$F_{ij} = \partial_i\xi_j - \partial_j\xi_i,$$

где ξ_i - компоненты гамильтонова поля, а коэффициенты F_{ij} являются компонентами билинейного коварианта Фробениуса. Следовательно, для того чтобы все компоненты тензора неголономности Ω_{ijk} были равны нулю необходимо, чтобы все F_{ij} равнялись нулю (по сути

выполнение условий в теореме Фробениуса об интегрировании форм Пфаффа). Расписывая F_{ij} через определение гамильтонова поля, получим:

$$\begin{aligned} F_{12} = F_{34} &= \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial q_2} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial q_1}, \\ F_{14} = F_{23} &= \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial p_2} - \frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial q_2}, \\ F_{24} &= \frac{\partial^2 H}{\partial p_2^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial q_2^2}, \\ F_{13} &= \frac{\partial^2 H}{\partial p_1^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial q_1^2}. \end{aligned}$$

Применив полученные уравнения к гамильтониану, например, натуральной системы, можно определить метрический тензор или потенциал так, чтобы гамильтоново поле было голономным. Гамильтониан натуральной системы имеет следующий вид:

$$H = \frac{1}{2} g_{ij}(q) p_i p_j + A_i(q) p_i + V(q).$$

Тогда, исходя из того, что все компоненты коварианта Фробениуса F_{ij} должны быть равны нулю, получим следующие условия:

$$\begin{cases} A_i = a_{ij} q_j + a_{i0}, \\ a_{12} = a_{21}, \\ g_{ij} = C_{ijk} q_k + C_{ij0}, \\ C_{i12} = C_{i21}, i = 1, 2, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -V = & \frac{1}{6} C_{111} q_1^3 + \frac{1}{2} C_{121} q_1^2 q_2 + \frac{1}{2} C_{212} q_2^2 q_1 + \\ & + \frac{1}{6} C_{222} q_2^3 + \frac{1}{2} C_{110} q_1^2 + \frac{1}{2} C_{220} q_0^2 + \\ & + \frac{1}{2} C_{120} q_1 q_2 + A q_1 + B q_2 + C, \end{aligned}$$

где a_{ij}, C_{ijk}, A, B, C – произвольные константы. Таким образом, если все элементы гамильтониана натуральной системы выражены полученными равенствами, то гамильтоново поле будет голономным. Например, для евклидова пространства $g_{ij} = \delta_{ij}$ голономным гамильтоновым полем будет поле, определенное следующим гамильтонианом: $H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 - q_1^2 - q_2^2)$.

Автор благодарен проф. В.И. Санюк за научное руководство.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Аминов Ю. А. Геометрия векторного поля. М.: Наука, 1990

ИССЛЕДОВАНИЕ ЦЕНТРОВ ЗАХВАТА НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА В ПОЛИМЕРНЫХ МАТЕРИАЛАХ МЕТОДАМИ ТЕРМОСТИМУЛИРОВАННОЙ ДЕПОЛЯРИЗАЦИИ И ПРОВОДИМОСТИ

И.М. Каширский⁽¹⁾, Ю.С. Булышев⁽²⁾

<<INVESTIGATION OF TRAPPING CENTRES IN POLYMERS BY METHODS OF THE THERMOSTRIMULATED DEPOLARIZATION AND CONDUCTRIVITY >>

I.M. Kachirski⁽¹⁾, Yu.S. Bulyshev,⁽²⁾

⁽¹⁾Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
e-mail: ikachirski@yahoo.com

⁽²⁾Иркутский государственный университет, Иркутск, Россия

Abstract

Trapping centers in low conductivity polymeric materials were investigated by thermostimulated depolarization (TSD) and thermostimulated conductivity (TSC) methods. The polarization of samples was done by the application of the high voltage across the samples. It was found that the investigated materials have monoenergetic traps which control the current though the materials.

Исследование центров захвата носителей заряда в высокоомных полимерных материалах методами термостимулированной деполяризации (ТСД) и термостимулированной проводимости (ТСП) проводилось по методике, изложенной в [1-3]. Поляризация образцов осуществлялась двумя способами: либо наложением высокого напряжения, соответствующего суперлинейному участку вольтамперной характеристики (ВАХ) при температурах 40-90⁰С (условия, соответствующие наличию инъекции носителей заряда из электродов, либо наложением слабого поля, соответствующего линейному участку ВАХ при дополнительном освещении образца сильным светом из области поглощения полимера. При интерпретации результатов по исследованию ТСД и ТСП важно установление природы поляризации образца. Тот факт, что для поляризации фоточувствительных полимеров в слабых полях требуется дополнительное освещение, указывает то, что наблюдаемая поляризация обусловлена объемным зарядом носителей, локализованных на центрах захвата. Глубина залегания ловушек E_T в изученных объектах определялась по способу начального подъема кривых токов ТСД и ТСП. Достоинством этого способа является то, что он может быть использован для определения E_T как в методе ТСД, так и в методе ТСП. По характеру нарастания ТСД и ТСП установлено существование моноэнергетических центров локализации в полисопряженных полимерах (ПСС).

Обнаруженные центры являются ловушками как для неравновесных носителей заряда, генерированных светом, так и для инжектированных из электродов. В соответствии с теорией ТСД, ТСП и полученных экспериментальных результатов определена глубина залегания центров локализации в изученных объемных тонкопленочных образцах.

Анализ результатов полученных при изучении ПСС указывает на то, что локализованные состояния могут быть связаны со строением материалов. Энергетическое положение таких ловушек в большей степени определяется молекулярной, а не надмолекулярной структурой. Поскольку плотность обнаруженных локальных состояний существенно меньше плотности мономерных звеньев полимера и плотности сопряженных блоков, ловушками в наших объектах, по-видимому, являются молекулы, обладающие определенными дефектами.

Теоретические работы показывают, что энергетический спектр полисопряженных полимеров имеет зонную структуру. Конечная длина блоков сопряжения приводит к расщеплению разрешенных зон на ряд узких подзон шириной кТ. Узкие зоны проводимости и наличие центров локализации в полимерных материалах оказывают существенное влияние на величину электрического тока в стационарных условиях.

Литература

- [1]. Гутман Ф., Лайонс Л. Органические полупроводники.-М.: Мир, 1978, с.696.
- [2]. Силиньш Э.А. Электронные состояния органических молекулярных кристаллов.- Рига. Зинатне, 1978, с.344.
- [3]. Каширский И.М., Бульшев Ю.С. Влияние центров локализации носителей заряда на электрические свойства органических материалов // Тезисы докладов XLVII Всероссийской Научной конф. по проблемам физики частиц, физики плазмы и конденсированных сред, оптоэлектроники.- М.; РУДН. – 2011. С. 17.

РЕАКЦИЯ ПЕРЕЗАРЯДКИ $nd \rightarrow p(nn)$ ПОД НУЛЁМ В ПРЕДСТАВЛЕНИИ УПРУГОГО РАССЕЯНИЯ $np \rightarrow np$ НА 180° .

Шиндин Р.А., Ливанов А.Н., Юдин И.П.

АННОТАЦИЯ

Рассмотрена проблема спиновой физики, которая связана с различием представлений упругого взаимодействия нейтрона и протона. В первом случае полагается реакция перезарядки $np \rightarrow pn$ под углом θ , во втором – рассеяние $np \rightarrow np$, где нейтрон рассеивается в обратном направлении $\pi - \theta$. Метод основан на равенстве вектора состояния Ψ_{fin} двух частиц после взаимодействия в обоих представлениях. Предлагается простой вид волновой функции, главным принципом которого является запрет Паули для двух фермионов, но без дополнительной отдельной симметризации по спинам и импульсам, что делает решение наиболее эффективным. Представлен вывод теоремы о переходе из одного представление в другое. Используя этот подход в рамках импульсного приближения рассмотрена реакция квазиупругой перезарядки нейтрона на дейтроне. В представлении $nd \rightarrow p(nn)$ при рассеянии протона под углом θ выводится известная формула Дина, в другом представлении $nd \rightarrow (nn)p$ при рассеянии нейтрона под углом $\pi - \theta$ выводится новая формула. Равенство дифференциальных сечений в обоих случаях позволяет сделать утверждение о соотношении 3 к 1 между spin-flip и spin-non-flip частями дифференциального сечения реакции упругой перезарядки $np \rightarrow pn$ под нулём.

We consider the problem of a spin physics which is related with the difference of representation of the elastic interaction between the neutron and proton. In the first case we suppose the charge-exchange reaction $np \rightarrow pn$ under the angle θ , in the second - the simple elastic scattering of $np \rightarrow np$, when the neutron is going in the opposite direction $\pi - \theta$. The method is based on the equality of the state vector Ψ_{fin} of two particles after the interaction in both cases. The simple form of the wave function which is based on the Pauli principle for two fermions but no additional separate symmetrization of spin and momentum allow to achieve the effective solution. The theorem about the transition from one representation to another is presented. Using this approach in the framework of the impulse approximation it is calculated the quasi-elastic charge-exchange reaction of the neutron on the deuteron. In the frame of $nd \rightarrow p(nn)$ scattering of proton to the angle θ it gives the well-known Dean formula, in the other representation $nd \rightarrow (nn)p$ as a neutron elastic scattering under the angle $\pi - \theta$ we obtain the new formula. The equality of the differential cross sections in both cases gives the conclusion about the proportion of 3 to 1 between the spin-flip and spin-non-flip parts of the differential cross section of the elastic charge-exchange reaction $np \rightarrow pn$ at the zero angle.

ИНТЕГРАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ СВОБОДНО КОНВЕКТИВНОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Я.А.Суслов, С.Г.Черкасов

ГНЦ ФГУП «Центр Келдыша»

Уравнения свободно конвективного турбулентного пограничного слоя для осредненных величин в интегральной форме записываются в виде:

$$\frac{d}{dz} \int_0^\delta w^2 dx = g\beta \int_0^\delta \Delta T dx - \frac{1}{\rho} \tau_w \quad (1)$$

$$\frac{dT_\infty}{dz} \int_0^\delta w dx + \frac{d}{dz} \int_0^\delta w \Delta T dx = \frac{1}{\rho C} q_w \quad (2)$$

Замыкаются уравнения выражениями для q_w и τ_w .

Согласно предлагаемой модели пограничный слой представляется в виде двух областей, в первой из которых доминирует вязкое трение, а во второй выталкивающая сила. Такое деление впервые было введено Джорджем и Кэппом в 1975 году [1]. Аналогично их работе мы введем толщину вязкого подслоя как:

$$\eta = \left(\frac{v^2 \lambda}{g\beta q_w} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (3)$$

В основу нашей модели легли следующие положения:

1. Для поля скорости поперек пограничного слоя используется распределение.

$$w = w_1(z) \left(\frac{x}{\eta} \right)^{\frac{1}{7}} \left(1 - \frac{x}{\delta} \right)^4 \quad (4)$$

2. В пристеночной области $x < \eta$ и $x \ll \delta$, поэтому формула (4) примет вид:

$$w \approx w_1(z) \left(\frac{x}{\eta} \right)^{\frac{1}{7}} \quad (5)$$

Используя аналогию между известным, для вынужденного турбулентного пограничного слоя, соотношением $w = W_\infty (x/\delta)^{\frac{1}{7}}$ и формулой (5) для нахождения трения на стенке применим формулу Блазиуса:

$$\tau_w = 0.0228 \rho w_1^2 \left(\frac{v}{w_1 \eta} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (6)$$

Таким образом, область выталкивающей силы, в нашей модели, играет роль «внешнего» течения для «вынужденного» турбулентного пограничного слоя, роль которого играет вязкий подслой.

3. Согласно многочисленным исследования [2], [3] и др., поперечное распределение температуры в свободно конвективном, турбулентном пограничном слое, за исключением очень маленьких расстояний от стенки (вязкий подслой), имеет вид:

$$\Delta T = Ax^{-\frac{1}{3}} + B \quad (7)$$

На малых расстояниях от стенки, согласно тем же исследованиям распределение линейно. Критерием малости в нашей модели служит толщина вязкого подслоя η . С учетом вышесказанного, для поперечного распределения температуры в турбулентном свободно конвективном пограничном слое нами предложено использовать следующую формулу:

$$\Delta T = T_1(z) \frac{\left(\frac{\eta}{\delta}\right)^{\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{\eta}{\delta}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{x + \eta}{\delta}\right)^{-\frac{1}{3}} - \left(\frac{\eta}{\delta}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(1 + \frac{\eta}{\delta}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{\eta}{\delta}\right)^{\frac{1}{3}}} \quad (8)$$

Легко убедиться, что формула (8) обеспечивает выполнение условия (7) при $\frac{\eta}{\delta} \ll \frac{x}{\delta}$, а так же линейность распределения избыточной температуры в пристеночной области.

Из формулы (8) следует формула для связи теплового потока с температурой на стенке:

$$q_w = \frac{\lambda}{3} \frac{\left(1 + \frac{\eta}{\delta}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(1 + \frac{\eta}{\delta}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{\eta}{\delta}\right)^{\frac{1}{3}}} \frac{T_1(z)}{\eta} \quad (9)$$

С учетом формул (4) и (8) вычислим интегралы по соответствующим профилям, для подстановки в уравнения (1) и (2):

$$\int_0^\delta w^2 dx = 0.0523 w_1^2 \delta^{\frac{9}{7}} \eta^{-\frac{2}{7}} \quad (10)$$

$$\int_0^\delta w dx = 0.146 w_1 \delta^{\frac{8}{7}} \eta^{-\frac{1}{7}} \quad (11)$$

$$\int_0^\delta \Delta T dx = T_1(z) \int_0^\delta \frac{\left(\frac{\eta}{\delta}\right)^{\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{\eta}{\delta}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{x + \eta}{\delta}\right)^{-\frac{1}{3}} - \left(\frac{\eta}{\delta}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(1 + \frac{\eta}{\delta}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{\eta}{\delta}\right)^{\frac{1}{3}}} dx \quad (12)$$

$$\int_0^\delta w \Delta T dx = w_1(z) T_1(z) \int_0^\delta \left(\frac{x}{\eta}\right)^{\frac{1}{7}} \left(1 - \frac{x}{\delta}\right)^4 \frac{\left(\frac{\eta}{\delta}\right)^{\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{\eta}{\delta}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{x + \eta}{\delta}\right)^{-\frac{1}{3}} - \left(\frac{\eta}{\delta}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(1 + \frac{\eta}{\delta}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{\eta}{\delta}\right)^{\frac{1}{3}}} dx \quad (13)$$

Подставив (6), (9), (10), (11), (12) и (13) в уравнения (1) и (2) получим следующую систему:

$$0.0523 \frac{d}{dz} (\eta^{-\frac{2}{7}} w_1^2(z) \delta^{\frac{9}{7}}) = g\beta T_1(z) \int_0^\delta \frac{(\frac{\eta}{\delta})^{\frac{1}{3}} (1 + \frac{\eta}{\delta})^{\frac{1}{3}} (\frac{x}{\delta} + \frac{\eta}{\delta})^{-\frac{1}{3}} - (\frac{\eta}{\delta})^{\frac{1}{3}}}{(1 + \frac{\eta}{\delta})^{\frac{1}{3}} - (\frac{\eta}{\delta})^{\frac{1}{3}}} dx - 0.0228 w_1^2 (\frac{v}{w_1 \eta})^{\frac{1}{4}} \quad (14)$$

$$0.146 w_1 \delta^{\frac{8}{7}} \eta^{-\frac{1}{7}} \frac{dT_\infty}{dz} + \frac{d}{dz} w_1(z) T_1(z) \int_0^\delta (\frac{x}{\eta})^{\frac{1}{7}} (1 - \frac{x}{\delta})^4 \frac{(\frac{\eta}{\delta})^{\frac{1}{3}} (1 + \frac{\eta}{\delta})^{\frac{1}{3}} (\frac{x}{\delta} + \frac{\eta}{\delta})^{-\frac{1}{3}} - (\frac{\eta}{\delta})^{\frac{1}{3}}}{(1 + \frac{\eta}{\delta})^{\frac{1}{3}} - (\frac{\eta}{\delta})^{\frac{1}{3}}} dx = \frac{1}{\rho C} q_w \quad (15)$$

$$q_w = \frac{\lambda}{3} \frac{(1 + \frac{\eta}{\delta})^{\frac{1}{3}}}{(1 + \frac{\eta}{\delta})^{\frac{1}{3}} - (\frac{\eta}{\delta})^{\frac{1}{3}}} \frac{T_1(z)}{\eta} \quad (16)$$

В приближении $\frac{\eta}{\delta} \ll 1$, которое часто встречается в практике [2], [4] и др. интегралы (12) и (13) принимают вид:

$$\int_0^\delta \Delta T dx \approx \frac{1}{2} (\frac{\eta}{\delta})^{\frac{1}{3}} \left(1 + (\frac{\eta}{\delta})^{\frac{1}{3}}\right) T_1 \delta \quad (17)$$

$$\int_0^\delta w \Delta T dx \approx 0.169 (\frac{\eta}{\delta})^{\frac{4}{21}} \left(1 + (\frac{\eta}{\delta})^{\frac{1}{3}}\right) w_1 T_1 \delta \quad (18)$$

В этом случае уравнения (14)-(16) значительно упрощаются и сводятся к следующей системе ОДУ:

$$0.0523 \frac{d}{dz} (\eta^{-\frac{2}{7}} w_1^2 \delta^{\frac{9}{7}}) = \frac{1}{2} (\frac{\eta}{\delta})^{\frac{1}{3}} \left(1 + (\frac{\eta}{\delta})^{\frac{1}{3}}\right) g\beta T_1 \delta - 0.0228 w_1^2 (\frac{v}{w_1 \eta})^{\frac{1}{4}} \quad (18)$$

$$0.146 (\frac{\eta}{\delta})^{-\frac{1}{7}} w_1 \delta \frac{dT_\infty}{dz} + 0.169 \frac{d}{dz} \left((\frac{\eta}{\delta})^{\frac{4}{21}} \left(1 + (\frac{\eta}{\delta})^{\frac{1}{3}}\right) w_1 T_1 \delta \right) = \frac{1}{\rho C} q_w \quad (19)$$

$$q_w = \frac{\lambda}{3(1 - (\frac{\eta}{\delta})^{\frac{1}{3}})} \frac{T_1(z)}{\eta} \quad (20)$$

Литература:

1. **William K. George, Steven P. Capp.** A theory for natural convection turbulent boundary layers next to heated vertical surfaces // Int. J. Heat Mass Transform Vol. 22 pp. 813-826
2. **Влит, Лайю,** Экспериментальное исследование турбулентных пограничных слоев в условиях естественной конвекции. // Теплопередача №4, серия С, часть 91, ноябрь 1969. С. 73-95
3. **Ю.С. Чумаков.** Проблемы турбулентности и вычислительная гидродинамика (к 70-летию кафедры «Гидродинамика») // Научно-технические ведомости №2, 2004 С.1-27.
4. **Z. H. Qureshi and B. Gebhart.** Transition and transport in a buoyancy driven flow in water adjacent to a vertical uniform flux surface // Int. J. Heat Mass Transform Vol. 21 pp. 1467-1479

PRESSURE OPERATOR FOR THE POESCHL – TELLER OSCILLATOR

Yu. G. Rudoy, E. O. Oladimeji

Department of Theoretical Physics and Mechanics, People's Friendship University of Russia, Moscow, Russian Federation

1. THE FORMULATION OF THE MODEL

Some decades ago Poeschl and Teller [1] introduced a family of anharmonic PT -potentials $\mathcal{U}(x)$, which allowed the exact solutions of the one-dimensional Schrödinger equation in the coordinate, or x -representation [2, 3]. One of the most interesting member of the PT -family is the symmetric trigonometric potential, which is even in the variable x , where $-L < x < L$.

$$\mathcal{U}(x;L) = \mathcal{U}(-x;L) = \mathcal{U}_0 \operatorname{tg}^2[\alpha(L)x], \quad \alpha(L) = \pi/2L, \quad (1)$$

At $x = \pm L$ the potential becomes singular, which physically means the presence of a pair of impenetrable walls. They confine the movement of the non-relativistic particle with positive constant mass m . The parameters \mathcal{U}_0 and L are also positive, though the limits $\mathcal{U}_0 \rightarrow 0$ and $L \rightarrow \infty$ are also allowable and will be considered properly.

The presence of the walls is of specific interest for the future thermodynamic description of this model, placed into some thermostat. In contrast to ordinary harmonic oscillator (HO) for the PT -oscillator (PTO) it is possible to introduce the *pressure operator* $\hat{P}(\hat{x}, \hat{p}, L)$, which according to Hellmann and Feynman [4, 5] is connected with the *energy operator* or the Hamiltonian $\hat{H}(\hat{x}, \hat{p}, L) = (\hat{p}^2/2m) + \mathcal{U}(x;L)$ by the formal relation:

$$\hat{P}(\hat{x}, \hat{p}, L) = (-\partial/\partial L)\hat{H}(\hat{x}, \hat{p}, L). \quad (2)$$

Strictly speaking, one should differentiate in (2) with the volume $\mathcal{V} = L^d$, where d is dimension of the coordinate space, where $d = 1$ will be held here everywhere.

The important point is that the operation $\partial/\partial L$ may be fulfilled only after the operator \hat{H} has acted upon some wave function φ – as a rule, upon the eigenfunction $\varphi_n(x)$ of \hat{H} with eigenvalue E_n (see, e.g., the detailed analysis in [4, 5]). The importance of this sequence of operations is directly connected with the account of boundary conditions $\psi_n(\pm L) = 0$ at all values of n . In this case the formal definition (2) acquires more definite sense:

$$P_n(L) = -\partial E_n(L)/\partial L \text{ if } \psi_n(x;L) = E_n(L)\psi_n(x;L). \quad (3)$$

Note, that in this paper we won't be engaged with the eigenfunctions $\psi_n(x)$ – it is sufficient to know that all of them contain the factor $\cos \alpha x$, which ensures the fulfillment of zero boundary condition at the walls $x = \pm \pi/2\alpha = \pm L$. Following (7) one may see, in particular, that if the energy spectrum $E_n(L)$ is a uniform function of L (e.g. $E_n(L) \sim L^{-s} > 0$) so that $P_n(L) = ({}^s/L)E_n(L)$, or in the operator form

$$\hat{P}(L) = s\hat{h}(L), \quad (4)$$

where $\hat{h}(L) = \hat{H}(L)/L$ is the (linear) density of the energy; the last relation is the well known barocaloric equation of state for the ideal gas. Note that by obtaining (4) we have used Euler's uniformity property $({}^d/dL)\alpha^m(L) = ({}^m/L)\alpha^m(L)$ valid for any real value of m .

2. EXACT ENERGY AND PRESSURE SPECTRA

It is remarkable that the rather complication PT-potential (2) leads to an exact solution of the Schrödinger equation with fully discrete positive energy levels $E_n(L) > 0$ (with the ground level $E_1(L)$):

$$E_n^{\text{PT}}(L) = E_n^{\text{FP}}(L) + E_n^{\text{HO}}(L) \quad (n=1, 2, 3, \dots); \quad (5)$$

obviously, the spectrum $E_n(L)$ is unbounded from above. Two terms in (5) look like the free particle (FP) in the box and harmonic oscillator (HO) energy spectrum respectively:

$$E_n^{\text{FP}}(L) = T(L)n^2; \quad E_n^{\text{HO}}(L) = \hbar\omega(L)(n-1/2); \quad (6)$$

note, that (6) doesn't contain terms of higher order in n than the quadratic one.

The quantity $T(L)$ is equal to the well known minimal kinetic energy of the FP in the box with dimensions $[-L, L]$:

$$T(L) = E_1^{\text{FP}}(L) = (\hbar^2/2m)\alpha^2(L), \quad \alpha(L) = \pi/2L. \quad (7)$$

The quantity $\omega(L)$ is the frequency of some HO and depends upon $\alpha(L)$ in more complicated way as (7):

$$\hbar\omega(L) = T(L)\lambda(L), \quad \lambda(L) = [(2/\pi\zeta(L))^2 + 1]^{1/2} - 1, \quad (8)$$

$$\zeta^2(L) = (1/\pi^2)(T(L))/U_0 = (\hbar/\pi)^2(1/2mU_0)\alpha^2(L). \quad (9)$$

Obviously, the formal structure of the parameter $\lambda(L)$ resembles the kinetic energy of the free relativistic particle with rest mass in ($\zeta(L)$ is the like p , where p is the particle's momentum); further, $\lambda(L) \geq 0$ while $\lambda(L) = 0$ only at the point $\zeta(L) = \alpha(L) = 0$ in the limit $L \rightarrow \infty$ (note that $\omega(L)$ diverges in this limit).

Following the definition (3), one obtains from (5) the exact diagonal matrix elements of the pressure operator (2):

$$P_n^{\text{PT}}(L) = P_n^{\text{FP}}(L) + P_n^{\text{HO}}(L); \quad P_n^{\text{FP}}(L) = (2/L)E_n^{\text{FP}}(L), \quad (10)$$

$$P_n^{\text{HO}}(L) = (2/L)E_n^{\text{HO}}(L) - (1/L)T(L)\psi(L)(n-1/2), \quad (11)$$

$$\psi(L) = [\lambda(L)+1]\{1-[\lambda(L)+1]^{-2}\} \geq 0, \quad (12)$$

where we have used for $P_n^{\text{FP}}(L)$ in (10) the relation (4) with $s=2$ according to relations (6) and (7). The expressions P_n^{HO} in (11) and E_n^{HO} in (6) – (9) are much more complicated since $\lambda(L)$ is *non-uniform* function of L . Thus the pressure operator $\hat{P}(L)$ for PTO as a whole is in general not proportional to the energy operator $\hat{H}(L)$, but in extreme case for FP and HO-parts this property is restored.

At fixed L , the relative contribution of the FP and HO depends upon n and may be formally determined by the ratio:

$$\eta_n(L) = E_n^{\text{FP}}(L)/E_n^{\text{HO}}(L) = n/n_{\text{cr}}(L); \quad n_{\text{cr}}(L) = 1/\lambda(L); \quad (13)$$

Clearly, at $\eta_n(L) \ll 1, n \ll n_{\text{cr}}(L)$ i.e. for lower energy levels, the HO-part dominates, whereas at $\eta_{\text{cr}}(L) \gg 1, n \gg n_{\text{cr}}(L)$ i.e. for higher energy levels, the FP-part dominates. This is easy to understand, because at V_0 and L held constant the growth of the particle's energy E makes the potential (1) more

and more approximate the limiting potential $U(x;L) = \delta(x - L) + \delta(x + L)$, which characterizes the FP in the box. The same limit at fixed n is achieved also at V_0 going to zero when we obtain the fully free particle without any “box”, so the particle’s energy is not quantized at all. Moreover, the true FP-limit without any box is achieved also (at fixed n) at the limiting point $\alpha(L)=0$ or $1/L = 0$, $L \rightarrow \infty$, because in this case the potential (1) also is identically equal to zero. However, one should note that the limit of small, but finite $\alpha(L) \ll 1$ resembles more not the FP-, but rather the HO-case.

3. REFERENCES

- [1] *G. Poeschl, E. Teller. Z. Phys. 83, 143 (1933).*
- [2] *I.I. Goldman, V.D. Krivchenkov. Problems in Quantum Mechanics. GITTL, Moscow. 1957 (in Russian).*
- [3] *S. Flügge. Practical Quantum Mechanics. Vol. I, Springer, Berlin, 1971.*
- [4] *H. Hellmann. Einführung in die Quantenchemie. Deuticke, Leipzig, 1937.*
- [5] *R.P. Feynman. Forces in Molecules. Phys. Rev. 56, 340 (1939).*

VIOLATION OF CP INVARIANCE AT NEUTRINO OSCILLATIONS IN WEAK INTERACTIONS

Kh. M. Beshtoev

Joint Institute for Nuclear Research, Joliot Curie 6, 141980 Dubna,
Moscow region, Russia, Institute of Applied Mathematics and Automation,
Shortanov str. 89A, 360000 Nalchik, Kabardino-Balk. Republ., Russia.

Abstract

This work is devoted to the consideration of CP violation at ν_e, ν_μ neutrino oscillations. Usually Kobayashi-Maskawa matrix type is used for description of lepton numbers and CP violation for neutrinos. A new parameter - angle mixing appears in the meson sector at CP violation besides the CP phase. Obviously the angle mixing and the phase have also to appear in the neutrino sector at CP violation. They are θ_1, δ_1 for $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ neutrino transitions. It is supposed that angle mixing θ_1 are small, though phase δ_1 at that CP cannot be small. It is clear that detection of the above CP violation parameters is one of very important problems of neutrino physics.

1. Introduction

It was previously supposed that P parity is a well number, however, after theoretical [1] and experimental [2] works it has become clear that P parity is violated in weak interactions. Then in work [3] there has been made an advanced supposition that CP parity is conserved but not P parity in weak interactions. Work [4] has reported that in K_L decays with a probability of about 0.2% there is a two π decay mode which is a detection of CP parity violation.

It is obvious that violation of CP invariance has to take place also in the case of leptons and not only for quarks and mesons. It is supposed that mixing is absent in the case of charged leptons. But as in the case of quarks, neutrino mixings are present. Also as in the case of quarks [5], we will introduce a unitary 3×3 matrix V by using charged vector current J^μ for three lepton families which has the following form:

$$J^\mu = (\bar{e} \bar{\mu} \bar{\tau})_L \gamma^\mu V \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}_L, \quad (1)$$

$$V = \begin{pmatrix} V_{e\nu_e} & V_{e\nu_\mu} & V_{e\nu_\tau} \\ V_{\mu\nu_e} & V_{\mu\nu_\mu} & V_{\mu\nu_\tau} \\ V_{\tau\nu_e} & V_{\tau\nu_\mu} & V_{\tau\nu_\tau} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}_L = V \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}_L, \quad (2)$$

It is more suitable to choose parametrization of V in the form, which was proposed by L. Maiani [6]:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\gamma & s_\gamma \\ 0 & -s_\gamma & c_\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_\beta & 0 & s_\beta \exp(-i\delta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\beta \exp(i\delta) & 0 & c_\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_\theta & s_\theta & 0 \\ -s_\theta & c_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$c_\theta = \cos \theta, s_\theta = \sin \theta, c_\beta = \cos \beta, c_\gamma = \cos \gamma, \exp(i\delta) = \cos \delta + i \sin \delta.$$

where θ, β, γ are mixing angles of three neutrinos and δ is the parameter of CP violation. It is important to remark that parameter of CP violation is the same for three quark families, i.e., it is a global parameter.

2. CP violation in neutrino sector

At first for references it considers two neutrino oscillations at lepton numbers violation without CP violation. And then it considers the case of CP violation and ν_e, ν_μ neutrino oscillations which arise at that.

2.1. Neutrino oscillation without CP violation

Before passing to the detailed consideration of CP violation approach, let us remind about neutrino oscillations. At present the presence of neutrino oscillations are established [7] at violation of lepton numbers. The expressions for probabilities of neutrino transitions at oscillations in a more general form are given in [8]. Below we consider a case of two neutrino oscillations. At violation of lepton numbers l_e, l_μ neutrino states ν_e, ν_μ are transformed into the superposition states of ν_1, ν_2 neutrino states:

$$\begin{aligned} \nu_e &= \cos\theta\nu_1 - \sin\theta\nu_2, \\ \nu_\mu &= \sin\theta\nu_1 + \cos\theta\nu_2, \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}_L, \quad (4)$$

and the inverse transformation gives the following:

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \cos\theta\nu_e + \sin\theta\nu_\mu, \\ \nu_2 &= -\sin\theta\nu_e + \cos\theta\nu_\mu. \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix}_L, \quad (5)$$

For the probability of transitions (oscillations) in dependence on time t by using the standard method [9] we obtain

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_e, t) = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta [1 - \cos((E_2 - E_1)t)], \quad (6)$$

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu, t) = \frac{1}{2} \sin^2 2\theta [1 - \cos((E_2 - E_1)t)], \quad (7)$$

where $E_k^2 = (p^2 + m_k^2), k=1,2$, and m_1, m_2 are masses of ν_1, ν_2 . Length L_{12} of ν_e, ν_μ neutrino oscillations via ν_1, ν_2 is a follows:

$$L_{12} = 2\pi \frac{2p}{m_2^2 - m_1^2}. \quad (8)$$

where $(E_p = pc)$ p, c are neutrino momentum and light velocity m_1, m_2 are masses of ν_1, ν_2 .

2.2. ν_e, ν_μ neutrino transitions (oscillations) at CP violation

Now we come back to CP violation for neutrinos but in another approach than it was done in [5]. There CP violation becomes apparent by using only CP phase δ . But at consideration of CP violation in the case of K^0, \bar{K}^0 mesons we see that a new angle mixing β_1 appears and also phase δ_1 [10], while angle mixing β_1 was absent in [5]. For simplification we will consider CP violation in the neutrino sector by using three pairs of ν_e, ν_μ, ν_τ neutrinos.

For the first pair we have:

$$\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 e^{-i\delta_1} \\ \sin\theta_1 e^{i\delta_1} & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

At CP violation for the first and second families new ν_1, ν_2 neutrino states appear, which are related with CP violation [11]:

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \cos\theta_1\nu_1 + \sin\theta_1 e^{-i\delta_1}\nu_2, \\ \nu_2 &= -\sin\theta_1 e^{i\delta_1}\nu_1 + \cos\theta_1\nu_2, \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 e^{-i\delta_1} \\ -\sin\theta_1 e^{i\delta_1} & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

where θ_1 is angle mixing at CP violation and δ_1 is the CP phase.

There can be the case [12] when

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \cos\theta_1\nu_1 + \sin\theta_1 e^{-i\delta_1}\nu_2, \\ \nu_2 &= -\sin\theta_1 e^{-i\delta_1}\nu_1 + \cos\theta_1\nu_2, \end{aligned} \quad (10')$$

then at CP violation in expressions for transition probabilities the phase δ_1 will be present. Below we will use expression type (10) but not (10').

Using expressions (7) and (10) we obtain expressions for $\nu_e(t), \nu_\mu(t)$

$$\nu_e(t) = (\cos\theta\cos\theta_1 + \sin\theta\sin\theta_1 e^{-i\delta_1})\nu_1 + (\cos\theta\sin\theta_1 e^{i\delta_1} - \sin\theta\cos\theta_1)\nu_2, \quad (11)$$

$$\nu_\mu(t) = (\sin\theta\cos\theta_1 - \cos\theta\sin\theta_1 e^{-i\delta_1})\nu_1 + (\sin\theta\sin\theta_1 e^{i\delta_1} + \cos\theta\cos\theta_1)\nu_2. \quad (12)$$

Let us suppose that the angle of CP violation δ_1 is very small ($\cos\theta_1 \cong 1, \sin\theta_1 = y$), then from expr. (11) and (12) we obtain

$$\nu_e(t) = (\cos\theta + \sin\theta y e^{-i\delta_1})\nu_1(t) + (\cos\theta y e^{i\delta_1} - \sin\theta)\nu_2(t), \quad (13)$$

$$\nu_\mu(t) = -(\sin\theta - \cos\theta y e^{-i\delta_1})\nu_1(t) + (\sin\theta y e^{i\delta_1} + \cos\theta)\nu_2(t). \quad (14)$$

The obtained expressions (13) and (14) are not normalized values, then to normalize these expressions, we have to multiply them by factor $\frac{1}{(1+y^2)}$. If to take into account that y is very small, we can omit this multiplier.

Taking into account that $\nu_1(t), \nu_2(t)$ neutrino states, are free states we can factorize them

$$\nu_1(t) = e^{-iE_1 t} \nu_1(0), \quad \nu_2(t) = e^{-iE_2 t} \nu_2(0), \quad (15)$$

and then from (15), and (13, 14) ($y = \sin\theta_1$) we obtain

$$\nu_e(t) = (\cos\theta + \sin\theta y e^{-i\delta_1}) e^{-iE_1 t} \nu_1(0) + (\cos\theta y e^{i\delta_1} - \sin\theta) e^{-iE_2 t} \nu_2(0), \quad (16)$$

$$\nu_\mu(t) = (\sin\theta - \cos\theta y e^{-i\delta_1}) e^{-iE_1 t} \nu_1(0) + (\sin\theta y e^{i\delta_1} + \cos\theta) e^{-iE_2 t} \nu_2(0). \quad (17)$$

At inverse transformation of expressions (16), (18) at $t=0$ we get

$$\nu_1(0) = (\sin\theta y e^{i\delta_1} + \cos\theta)\nu_e(0) - (\cos\theta y e^{i\delta_1} - \sin\theta)\nu_\mu(0), \quad (18)$$

$$\nu_2(0) = (-\sin\theta + \cos\theta y e^{-i\delta_1})\nu_e(0) + (\cos\theta + \sin\theta y e^{i\delta_1})\nu_\mu(0). \quad (19)$$

After substitution of $\nu_1(0), \nu_2(0)$ from (18), (19) into expressions (16), (17) we obtain

$$\begin{aligned} \nu_e(t) &= [(\cos\theta + \sin\theta y e^{-i\delta_1}) e^{-iE_1 t} (\sin\theta y e^{i\delta_1} + \cos\theta) + \\ &+ (\cos\theta y e^{i\delta_1} - \sin\theta) e^{-iE_2 t} (-\sin\theta + \cos\theta y e^{-i\delta_1})] \nu_e(0) + \\ &[(\cos\theta + \sin\theta y e^{-i\delta_1}) e^{-iE_1 t} (-\cos\theta y e^{i\delta_1} + \sin\theta) + (\cos\theta y e^{i\delta_1} - \sin\theta) e^{-iE_2 t} (\cos\theta + \sin\theta y e^{-i\delta_1})] \nu_\mu(0), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \nu_\mu(t) &= [(\sin\theta - \cos\theta y e^{-i\delta_1}) e^{-iE_1 t} (\sin\theta y e^{i\delta_1} + \cos\theta) + \\ &(\sin\theta y e^{-i\delta_1} + \cos\theta) e^{-iE_2 t} (-\sin\theta + \cos\theta y e^{i\delta_1})] \nu_e(0) + \\ &[(\sin\theta - \cos\theta y e^{-i\delta_1}) e^{-iE_1 t} (-\cos\theta y e^{i\delta_1} + \sin\theta) + (\sin\theta y e^{i\delta_1} + \cos\theta) e^{-iE_2 t} (\cos\theta + \sin\theta y e^{-i\delta_1})] \nu_\mu(0). \end{aligned} \quad (21)$$

Then using the standard technique of oscillations [9] for obtaining probability $P(\nu_e \rightarrow \nu_e, t)$ at $\nu_e \rightarrow \nu_e$ neutrino transitions (oscillations) in the case of CP violation, we obtain the following expressions:

$$\begin{aligned} P(\nu_e \rightarrow \nu_e, t) &= 1 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta[1 - \cos((E'_2 - E'_1)t)] - \\ &4y\cos\delta_1\sin\theta\cos\theta(\sin^2\theta - \cos^2\theta)[1 - \cos((E'_2 - E'_1)t)], \end{aligned} \quad (22)$$

where $y = \sin\theta_1$.

And for probability $P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu, t)$ for $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ neutrino transitions (oscillations) at CP violation we obtain the following expressions:

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu, t) = 2\cos^2\theta\sin^2\theta[1 - \cos((E'_2 - E'_1)t)] + 4y\cos\delta_1\sin\theta\cos\theta(\sin^2\theta - \cos^2\theta)[1 - \cos((E'_2 - E'_1)t)], \quad (23)$$

where $E'_k = (p^2 + m'^2_k)$, $k=1,2$, and m'_1, m'_2 are masses of ν'_1, ν'_2 neutrinos. Length L'_{12} of ν_e, ν_μ neutrino oscillations via ν'_1, ν'_2 neutrinos is

$$L'_{12} = 2\pi \frac{2p}{m'^2_2 - m'^2_1}, \quad (24)$$

where p is the momentum of ν_e .

Since the value of CP violation can be very small then the change of neutrino masses will be also very small and $m'_1 \cong m_1$, $m'_2 \cong m_2$ then $m'^2_2 - m'^2_1 \cong m^2_2 - m^2_1$. And as a consequence $L'_{12} \cong L_{12}$. At $y = \sin\theta_1 = 0$ CP violation is absent then we obtain the same expressions as in (6), (7).

In expressions (22), (23) for $P(\nu_e \rightarrow \nu_e, t), P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu, t)$ the following normalization factor has to be present:

$$\frac{1}{(1+y^2)^2}. \quad (25)$$

which we can omit since we suppose that the value of y^2 is very small.

In expressions (22), (23) for neutrino transition probabilities the terms which contain small value $y = \sin\theta_1$ are responsible for CP violation. **In experiments with $\nu_e \rightarrow \nu_e$ and $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ neutrino transitions (oscillations) at detection of CP violation, it is necessary to determine the values of y and δ_1 .** Probably, the CP violation will become apparent not for the first mode of neutrino oscillations but at a higher mode of neutrino oscillations.

Transition probabilities in case of $\nu_e \rightarrow \nu_\tau$ and $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ transitions (oscillations) at CP violation we can obtain from expressions (22), (23) after substitute their mixing angles and phases into expressions (22), (23).

3. Conclusion

This work was devoted to the consideration of CP violation at ν_e, ν_μ neutrino oscillations. Usually Kobayashi-Maskawa matrix type is used for description of lepton numbers and CP violation for neutrinos. A new parameter - angle mixing appears in the meson sector at CP violation besides the CP phase. Obviously the angle mixing and the phase have also to appear in the neutrino sector at CP violation. They are θ_1, δ_1 for ν_e, ν_μ neutrino transitions. They are given by expressions (22), (23). It is supposed that angle mixing θ_1 is small, though phase δ_1 at that CP cannot be small. It is clear that detection of the above CP violation parameters is one of very important problems of neutrino physics.

References

- [1] Lee T.D., Yang C.N., Phys. Rev., 1956, v.104, p.254.
- [2] Wu C. S. et al., Phys. Rev., 1957, v.105, p.1413; Phys. Rev., 1957, v.106, p.1361.
- [3] Landau L. D., Sovet J.JETP, 1957, v.32, p.405.
- [4] Christenson J.H. et al., Phys. Rev. Lett., 1964, v.13, p.138.
- [5] Kobayashi M., Maskawa K., Prog. Theor. Phys., 1973, v.49, p.652; Okun L. B., Leptons and Quarks, M. Nauka, 1990.

-
- [6] Maiani L., Proc. Int. Symp. on Lepton-Photon Int., Hamburg, DESY, 1977, p.867; Phys. Lett. 62B, 1976, p.183.
- [7] Phys. Lett.B, Review of Part. Phys, 2008, v. 667, p.145, 733.
Phys. Rev. D, Review of Part. Phys, 2012, v. 86, 010001, p. 157, 852.
- [8] Kh. M. Beshtoev, Mathematical Models and Computer Simulations, 2007, v.19, p. 311.
- [9] Gribov V., Pontecorvo B.M., Phys. Lett.B 1969, v.28, p.493;
F. Boehm, P. Vogel, Physics of massive neutrinos, California Inst., 1987.
- [10] R. Adler et al., Phys. Lett.B, 1995, v.363, p. 243;
A. Apostolakis et al., Phys. Letters B 1999, v. 458, p. 545;
Marianna Testa (Kloe Collab.), hep-ex/0505015v.1, 2006.
- [11] Beshtoev Kh. M., Nucl. Phys.s B (Proc. Supl.), 2011, v.219-220, p.276-280; hep-ph/1401.5989v.2, Febr 2014.
- [12] Wu T.T. and Yang C.N., Phys. Rev. Lett., 1964, v.13, p.380.

INVESTIGATION OF EQUILIBRIUM STATES OF OCEANIC MASSES IN THE PRESENCE OF A NONLINEAR ELECTRIC FIELD

A. S. Rabinowitch

Moscow State University of Instrument Engineering and Computer Science
20 Stromynka str., Moscow 107996, Russia, E-mail: rabial@mail.ru

The influence of strong electric fields on pressure distributions in oceanic masses is studied which is based on a nonlinear generalization of the classical electrodynamics within the framework of the Yang-Mills theory. It is shown that because of the considered nonlinear electric field, the pressure in oceans can not only increase with depth but also decrease and reach quite small values at some depths. This result allows one to explain the unexpected existence of fishes near the bottom of the Mariana Trench.

Consider an equilibrium state of a big mass of a charged compressible fluid in the form of a parallelepiped with the area S of its base and depth H which is under the action of gravitational and electric forces. Then when the characteristics of the fluid depend only on depth, it can be described by the following equation [1]:

$$dp/dz = \rho g + \theta E, \quad (1)$$

where

$$\rho = \rho_0 + \alpha p, \quad \theta = \chi \rho, \quad (2)$$

ρ and θ are the mass and charge densities of the fluid, respectively, χ is the coefficient of proportionality between them, p is pressure, ρ_0 is the value of ρ when $p=0$, z is depth, g is the free fall acceleration, E is the electric field strength, and α is the fluid coefficient of compressibility.

Let us apply Eqs. (1)-(2) to an oceanic region for which we have

$$\rho_0 \approx 1 \text{ g/cm}^3, \quad \alpha \approx 4.3 \cdot 10^{-11} \text{ sec}^2 / \text{cm}^2. \quad (3)$$

It should be noted that below some depth in oceans, where the pressures are sufficiently large, big electric charges could arise because of ionization of oceanic salts. That is why let us take electric forces into account in big oceanic regions.

According to the classical theory of electricity,

$$E(z) = 4\pi \int_{z_*}^z \theta(z) dz = \frac{4\pi}{S} Q(z), \quad (4)$$

where z_* is the depth at which the electric field strength is equal to zero and $Q(z)$ is the charge inside the parallelepiped with the base area S and the range of depths from z_* to z .

However, as follows from Earnshaw's theorem of the classical linear theory of electricity [2], ions cannot form stable static configurations. But in oceans, where very big charges could arise because of ionization of their salts, nonlinear electric effects could take place which could realize stable configurations of ions. To describe them, some nonlinear theory of electricity should be applied. For this purpose let us use the Yang-Mills theory with $SU(2)$ symmetry [3,4] which can be regarded as a reasonable nonlinear generalization of classical electrodynamics [5-7].

As is shown in Refs. [5-7], solutions to the Yang-Mills equations obtained in these works lead to the following result: In the classical formula for an electric field outside its source, the charge Q of the

source should be replaced by the effective charge Q_{eff} which is the full one including not only the charge Q but also the charged quanta of the Yang-Mills field. These two charges are related as follows [5-7]:

$$Q_{\text{eff}} = K \sin(Q/K), \quad (5)$$

where $K \approx 10^7 \text{ coul} = 3 \cdot 10^{16} \text{ esu}$.

As a result, in the suggested nonlinear theory of electricity, formula (4) should be replaced by the following:

$$E(z) = \frac{4\pi}{S} K \sin\left(\frac{Q(z)}{K}\right), \quad K \approx 10^7 \text{ coul}. \quad (6)$$

As follows from formula (6), it practically coincides with the classical formula (4) when $|Q/K| \ll 1$. Therefore, formulas (4) and (6) can substantially differ only when the charge Q is very big.

Substituting formulas (2) and (6) into Eq. (1) and using expression (4) for $Q(z)$, we come to the following equation:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d\rho}{dz} = g\rho(z) + \frac{4\pi}{S} \chi\rho(z)K \sin\left(\frac{\chi S}{K} \int_0^z \rho(z) dz + \gamma\right), \quad (7)$$

where

$$\gamma = -\frac{\chi S}{K} \int_0^{z^*} \rho(z) dz. \quad (8)$$

Let us denote

$$\rho/\rho_0 = f, \quad z/H = x, \quad (9)$$

where H is the depth of the oceanic region under consideration.

Then Eq. (7) acquires the form

$$\frac{df}{dx} = \alpha g H f(x) + \frac{4\pi\chi\alpha H f(x)}{S} K \sin\left(\frac{\chi S \rho_0 H}{K} \int_0^x f(x) dx + \gamma\right). \quad (10)$$

Let us put

$$u = \int_0^x f(x) dx. \quad (11)$$

Then we come to the following nonlinear differential equation of the second order:

$$u'' = u'[\lambda + \mu \sin(\nu u + \gamma)], \quad u = u(x), \quad u(0) = 0, \quad (12)$$

where

$$\lambda = \alpha g H, \quad \mu = 4\pi\chi\alpha H K / S, \quad \nu = \chi S \rho_0 H / K. \quad (13)$$

For Eq. (12) numerical calculations have been performed for different values of the parameters $\lambda, \mu, \nu, \gamma$. In Figs. 1-3 three plots for the pressure p as a function of the depth z are shown in three cases with different S and H and for the initial condition $u'(0) = 1.001$.

As follows from Figs. 1-3, within the framework of the suggested nonlinear theory of electricity, there are cases in which the pressure in a charged oceanic mass not only increases with depth but also decreases and can reach quite small values at some depths.

This result can explain the unexpected existence of fishes detected near the bottom of the Mariana Trench where according to the commonly accepted notion, the pressures should be enormous and living beings could not exist [8].

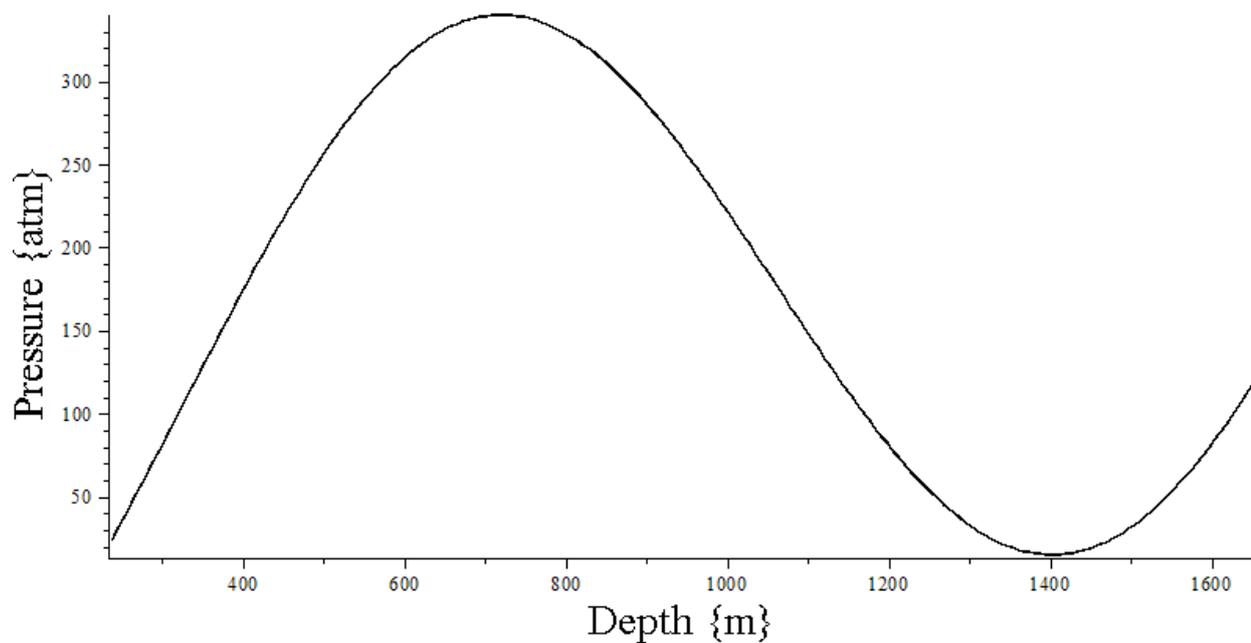


Fig. 1. The pressure versus depth in the case $S=764 \text{ km}^2$, $H=1.6 \text{ km}$

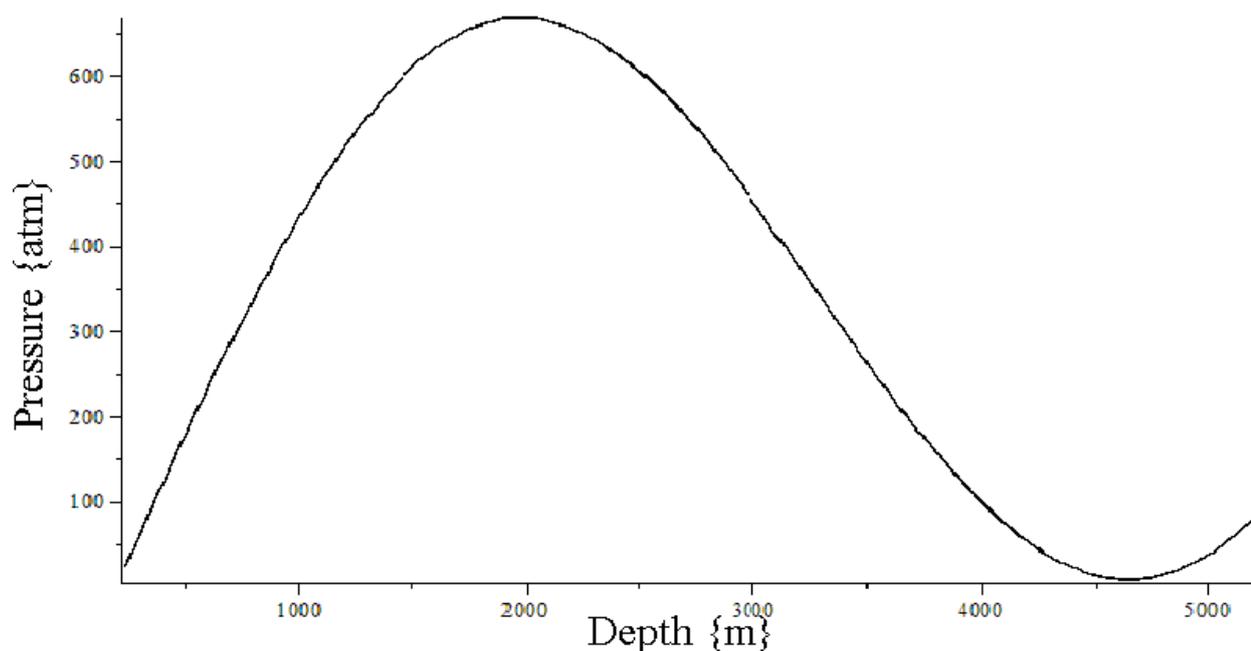


Fig. 2. The pressure versus depth in the case $S=500 \text{ km}^2$, $H=5 \text{ km}$

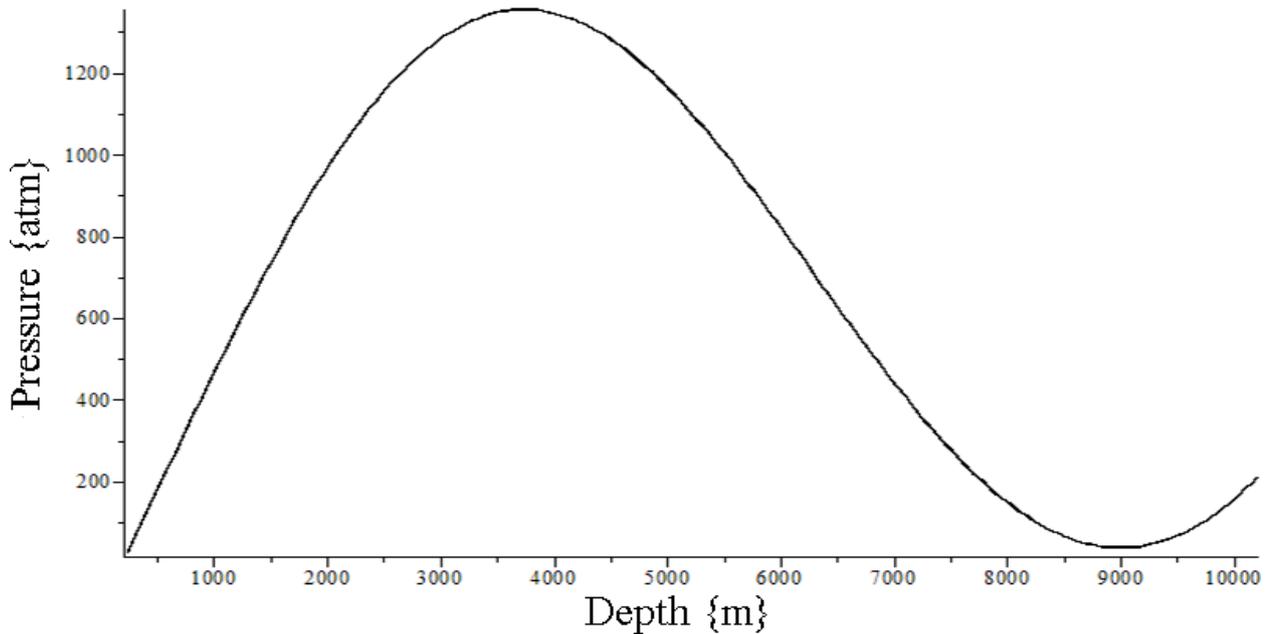


Fig. 3. The pressure versus depth in the case $S=349 \text{ km}^2$, $H=10 \text{ km}$

REFERENCES

1. Sedov L.I. Mechanics of Continuous Media, Singapore, World Scientific, 1997.
2. Tamm I.E. Osnovy teorii electrichestva, Moscow, Fizmatlit, 2003 (in Russian).
3. Ryder L.H. Quantum Field Theory, Cambridge, Cambridge University Press, 1985.
4. Faddeev L.D., Slavnov A.A. Gauge Fields: Introduction to Quantum Theory, London, Benjamin, 1990.
5. Rabinowitch A.S. Russian Journal of Mathematical Physics, 2008, Vol. 15, No. 3, p. 389-394.
6. Rabinowitch A.S. Nonlinear Physical Fields and Anomalous Phenomena, New York, Nova Science Publishers, 2009.
7. Rabinowitch A.S. Mathematical fundamentals of poorly explored anomalous physical phenomena. Nonlinear Electrodynamics, Nuclear Physics, General Relativity. Cosmology, Moscow, Librocom, 2015 (in Russian).
8. <http://www.krugozormagazine.com/show/Mars.2544.html>

ON ORBITAL MOTIONS OF ANTIPROTONS IN NONLINEAR NUCLEAR FIELDS

A .S. Rabinowitch, A. A. Tyapko

Moscow State University of Instrument Engineering and Computer Science
20 Stromynka str., Moscow 107996, Russia, E-mail: rabial@mail.ru

Orbits of antiprotons around atomic nuclei are studied within the framework of a nonlinear generalization of Yukawa's theory. They are described by a nonlinear differential equation of the second order with respect to the radial coordinate as a function of the polar angle of an antiparticle. Numerical investigations of this equation are carried out and conditions of the existence of closed orbits of antiprotons are studied.

As is well known, the first realistic theory of nuclear forces was proposed in 1935 by H. Yukawa in which the nuclear potential was described by the Klein-Gordon linear equation. The Yukawa theory achieved success in the description of nuclear forces. However, as was shown by experimental studies, because of the linearity of the Yukawa equation, this theory can be valid only for relatively small values of the nuclear potential [1,2]. For sufficiently large values of this potential, the Yukawa theory should be replaced by some nonlinear generalization of it.

One of such generalizations was proposed in Refs. [3-6]. In these works the dependence of the mass density ρ of nuclear matter on the nuclear potential $m_p\varphi$ was taken into account, where m_p is the proton rest mass, and the following formula was suggested:

$$\rho(\varphi) = \rho_0 \exp(\varphi/c^2), \quad \rho_0 = \rho(0) \quad (1)$$

It was shown in Refs. [3,6] that formula (1) accords with the following fundamental principle: The nuclear potential $m_p\varphi$ is the potential energy of a proton.

In Refs. [3,5,6] formula (1) was used and the Lagrangian and energy-momentum tensor for nuclear matter moving in nuclear and electromagnetic fields were obtained. They led to the nuclear field and dynamic equations for a relativistic nucleon or antinucleon of the following forms in an inertial reference frame

$$\partial^2 \varphi / \partial x^n \partial x_n + (m_\pi c / \hbar)^2 \varphi = -4\pi(G/m_p)^2 \rho_0 \exp(\varphi/c^2), \quad (2)$$

$$\rho_0 \exp(\varphi/c^2) \left(c^2 \frac{d^2 x^n}{ds^2} + \frac{d\varphi}{ds} \frac{dx^n}{ds} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \right) - \theta_0 F_m^n \frac{dx^m}{ds} = 0, \quad (3)$$

where x^n are space-time coordinates of a moving particle, ds is the four-dimensional interval, m_π is the rest mass of the neutral pion, G is the constant of nuclear interactions, $G^2/\hbar c = 0.080$, ρ_0 and θ_0 are the mass and charge densities of the particle, and F_m^n are components of the electromagnetic field stress tensor [3-6]. Relying on Eqs. (2) and (3), theoretical formulas for the binding energies and radii of medium and heavy nuclei were suggested in Ref. [4,6] which were in good agreement with experimental data.

Let us apply Eqs. (2) and (3) to a relativistic nucleon or antinucleon moving around an atomic nucleus. Then we come to the following differential equation:

$$\begin{aligned} & U'' + U + b \exp(-d[3U \exp(-1/U)]) \\ & \times \sqrt{1 + (d/a)(U'^2 + U^2) \exp(2dU \exp(-1/U))} \\ & = a(1 + 1/U) \exp(-1/U - 2dU \exp(-1/U)), \end{aligned} \quad (4)$$

where $U = U(\theta)$, $U = r_\pi / r$, r_π is the Compton radius of the pion, r and θ are the distance from the center of the nucleus and the polar angle, respectively, of a moving particle, a, b, d are dimensionless constants characterizing the nucleus and particle, $b > 0$ for the proton, $b = 0$ for the neutron, and $b < 0$ for the antiproton.

For the obtained nonlinear differential equation of the second order (4) a large number of numerical calculations have been carried out by using the Runge-Kutta method of the fourth order. They show that protons and neutrons can move in closed orbits only around sufficiently light nuclei. At the same time there exists a wide class of initial conditions for which antiprotons can move in closed orbits not only around light nuclei but also around medium and heavy ones.

Numerical solutions to Eq. (4) giving closed orbits were sought for different values of the parameters a, b, d , and initial values $U(0) = U_0$. As to the initial angle $\theta = 0$, it was chosen so as to have $U'(0) = 0$. It should be noted that in the case of antiprotons, only closed orbits satisfying the inequality $1/U = r/r_\pi \geq 3$ were considered. Then an antiproton can rotate at a safe distance from some nucleus with no annihilation with its proton.

Further we will consider closed orbits of antiprotons in the following two cases:

1) Case $U_0 = 0.1$

In Fig. 1 the dependence of the dimensionless radial coordinate $1/U = r/r_\pi$ on the polar angle θ of an antiproton is shown for the parameters $a = 0.2$, $b = -0.2$, and $d = 0.1$.

2) Case $U_0 = 0.2$

In Fig. 2 the dependence of the dimensionless radial coordinate $1/U = r/r_\pi$ on the polar angle θ of an antiproton is shown for the parameters $a = 0.9$, $b = -0.1$, and $d = 0.1$.

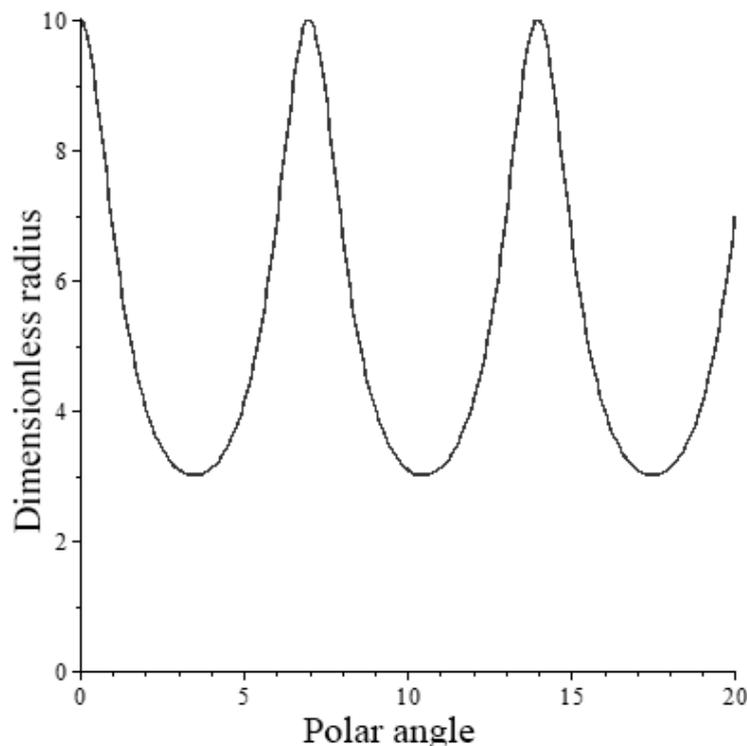


Fig. 1. The radial coordinates versus polar angles of an antiproton in the case 1

The obtained results lead to the conclusion that there can be quasi-nuclei with various masses consisting not only of protons and neutrons but also of antiprotons moving around them in closed orbits. Such quasi-nuclei can be created by means of irradiation of atomic nuclei by antiprotons with energies corresponding to the determined ranges of the parameter a .

REFERENCES

1. Naumov A.I. Physics of the atomic nucleus and elementary particles, Moscow, Prosveschenie, 1984 (in Russian).
2. Ericson, T., Weise W. Pions and Nuclei, Oxford, Clarendon Press, 1988.
3. Rabinowitch A.S. International Journal of Theoretical Physics, Vol. 33, No 10, 1994, p. 2049-2056.
4. Rabinowitch A.S. International Journal of Theoretical Physics, Vol. 36, No 2, 1997, p. 533-544.
5. Rabinowitch A.S. Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia, ser. Mathematics, Information Sciences, Physics, 2008, No. 3, p. 92-98.
6. Rabinowitch A.S. Mathematical fundamentals of poorly explored anomalous phenomena. Nonlinear Electrodynamics. Nuclear Physics. General Relativity. Cosmology, Moscow, Librocom, 2015 (in Russian).

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ БРИЗЕРОВ 1D И 2D O(3) ВЕКТОРНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИГМА-МОДЕЛИ

Муминов Х.Х., Шокиров Ф.Ш.

Физико-технический институт им. С.У.Умарова
Академии наук Республики Таджикистан, г.Душанбе, Таджикистан
E-mail: muminov@tascampus.eastera.net, farhod0475@gmail.com

NUMERICAL SIMULATION OF BREATHERS OF THE 1D AND 2D O(3) VECTOR NONLINEAR SIGMA-MODEL

MuminovKh.Kh., Shokirov F.Sh.

S.U.Umarov Physical-Technical Institute
of Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan, Dushanbe, Tajikistan
E-mail: muminov@tascampus.eastera.net, farhod0475@gmail.com

The paper is dedicated to the numerical study of the breather solutions of the 1D and 2D O(3) vector nonlinear sigma-model. By use of numerical simulation new one- and two-dimensional bion (breather) type solutions possessing internal degrees of freedom in isospace are derived. In 1D case bond energy for constituents of the breather solution is determined, the threshold of stability of numerical breather solutions depending on frequencies ω of the rotation of vector of A3-field in an isospace and velocity of the motion of soliton is revealed, and dynamics of interactions of obtained breathers are investigated.

Приведены результаты численного моделирования бризерных решений O(3) векторной нелинейной сигма-модели (ВНСМ) в одно- и двумерном случаях. Получены численно новые бризерные решения в 1D и 2D анизотропной O(3) ВНСМ, обладающие динамикой внутренней степени свободы в изопространстве. В 1D случае вычислена энергия связи полученных решений, определены пороги устойчивости бризеров в зависимости от частоты ω вращения вектора A3-поля в изопространстве и от скорости движения солитона, выявлено свойство излучения сгустка энергии движущимся бризером, получены 1D модели столкновения численных бризеров, исследованы их свойства.

Исследование бризерных решений теоретико-полевых моделей, которых можно интерпретировать как классические модели составных частиц (например, мезонов) привлекает многих исследователей. Являясь долгоживущими нелинейными возбуждениями, бризеры играют важную роль во многих физических процессах, таких как неравновесная динамика нелинейных систем, перенос энергии в запрещенной зоне спектра, а также в начальной стадии структурных фазовых переходов первого рода [1].

Наши численные модели построены в конечных областях, так как в общих случаях ограничения ставятся мощностями вычислительных процессоров и объемом их электронной памяти. Для минимизации влияния линейных волн возмущений отражающихся из границ области моделирования $L: \{-L \leq x, y \leq L\}$ применены специальные граничные условия типа «черный ящик», поглощающие волны, достигающих границ L . Разработаны трехслойные явные разностными схемы второго прядка точности $O(h^2 + \tau^2)$, с применением стереографической проекции и учетом теоретико-групповых особенностей конструкции класса O(N) ВНСМ теории поля [2,3], которые позволяют избегать сингулярности при проведении численных экспериментов [4,5]. Исходя из того, что уравнения O(3) ВНСМ в меридианном сечении

сводятся к точно интегрируемой модели уравнения \sin -Гордон, мы можем в качестве некоторого начального приближения использовать бризерные решения последней

$$\theta(x, t) = 2 \operatorname{arctg}(\operatorname{sech} \frac{x}{\sqrt{2}}), \quad \varphi(x, t) = 0 \quad (1)$$

и, соответственно, вводя в (1) некоторое специальным образом подобранное возмущение $\varphi(x, t) = \omega t$ путем численного решения задачи Коши, получить новые численные решения уравнения $O(3)$ ВНСМ. Свойства лоренц-инвариантности $O(3)$ ВНСМ позволили получить также движущиеся бризерные решения, исследовать свойства их взаимодействия (в 1D случае).

1D бризеры. Была разработана разностная схема для функции $z = a + ib, z(x, t) = \frac{s_1 + s_2}{1 \pm s_3} \operatorname{tg}(\frac{\theta}{2}) e^{i\varphi}$, которая появляется вследствие стереографической проекции $S^2 - R_{comp}^2$ [3,4]. Контроль точности схемы осуществлялся вычислением интеграла энергии, который во всех численных экспериментах после формирования устойчивого солитона сохранялся с точностью $\frac{\Delta E}{E} \approx 10^{-6} - 10^{-3}$. Для анализа результатов численных экспериментов использовались программы визуализации и прикладные программы по быстрому преобразованию Фурье. Фурье-анализ сформированного решения показывает наличие двух гармоник бризерного решения $\omega_1 \approx 1.152$, $\omega_2 \approx 1.004$. Очевидно, что кроме бризерной динамики, появляется дополнительная частота, вследствие вращения вектора АЗ-поля в изопространстве.

В результате, в анизотропном случае, нами были получены численные решения, в виде двух взаимосвязанных осциллирующих горбов, определена зависимость энергии связи компонент бризера от частоты ω вращения в изопространстве вектора АЗ-поля. Далее, установлены пороги устойчивости полученных численно бризеров $O(3)$ ВНСМ в зависимости от ω , также получены модели столкновения бризеров и исследованы свойства их взаимодействия.

На основе применения преобразования Лоренца, серия численных экспериментов с движущимися бризерными решениями $O(3)$ ВНСМ, позволила установить область устойчивости полученных бризерных решений в зависимости от двух параметров: ω и скорости (v) движения солитона. Отметим, что бризеры $O(3)$ ВНСМ вследствие дополнительной динамики изовектора обладают относительно большей энергией по сравнению с бризерами уравнения \sin -Гордон. Численные эксперименты показывают, что бризеры $O(3)$ ВНСМ, излучая определенную часть своей энергии с течением времени ($T \approx 150.0$, при $\omega = 0.5$) приобретают устойчивую динамику, интеграл их энергии при этом сохраняется с хорошей точностью $\frac{\Delta E}{E} \approx 10^{-6} - 10^{-3}$.

Моделирование столкновений бризерных решений одномерной анизотропной $O(3)$ ВНСМ осуществлялось в два этапа. На первом этапе, на основе преобразования Лоренца отдельно были моделированы движущиеся бризеры вплоть до времен их формирования $T \in [0.0, 150.0]$. На втором этапе, моделированы различные виды столкновений с уже сформировавшимися солитонами (Рис.1). Контроль точности численной схемы осуществлялся вычислением интеграла энергии (En), который во всех численных экспериментах, после формирования устойчивого солитона, сохранялся с точностью $\frac{\Delta E}{E} \approx 10^{-6} - 10^{-3}$. На границах области моделирования, для поглощения возможных излучений освобожденной энергии были использованы вышеуказанные условия типа «чёрный ящик» [4-7].

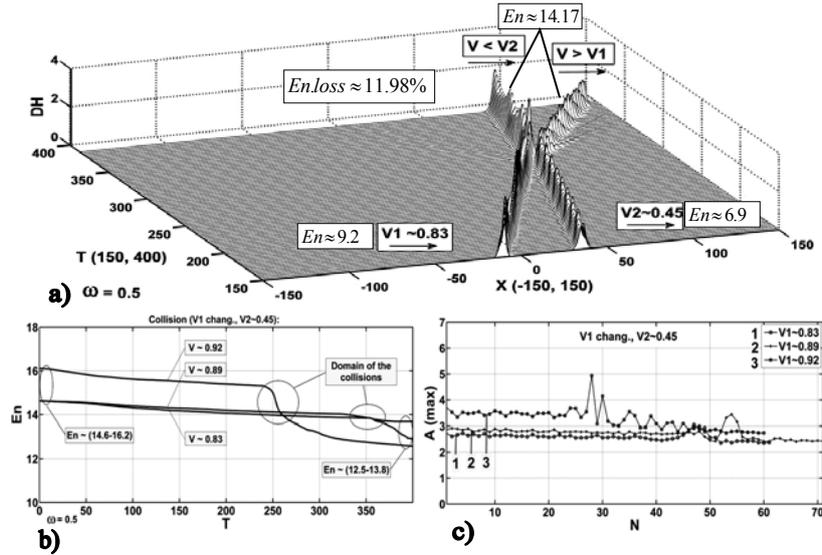


Рис. 1.а) Эволюция столкновения бризеров $O(3)$ ВНСМ, движущихся в одном направлении: $\omega = 0.5, V_1 \approx 0.83, V_2 \approx 0.45, x \in [-150, 150], T \in [150, 400]$; **б)** изменение интеграла энергии (En) столкновения бризеров «настигающего» типа для различных скоростей «настигающего» солитона ($V_1 \approx: 0.83, 0.89, 0.92; V_2 \approx 0.45$); **в)** вариации амплитуды A_{max} плотности энергии бризеров в зависимости от периода осцилляций N .

Далее, установлено свойство сброса движущимся бризером сгустка энергии, пропорциональной энергии возмущения вектора A_3 -поля [6] (Рис.2). Заметим, что скорость $V' = \frac{V}{\sqrt{1+V^2}}$, заданная бризерному решению при $\varphi > 0$ и $t = 0.0$ в наших численных моделях при $t > 0.0$ отличается от реальной скорости V_{br} движения численного бризера. Компьютерные эксперименты показали, что V_{br} численных бризеров меньше задаваемой скорости: $V_{br} < V'$. Очевидно, при $t = 0.0$ и начальной V' часть энергии распределяется для собственной динамики (осцилляций) бризеров (кинки/антикинки, в тестовых численных экспериментах движутся со скоростью V_k , равной точно заданной преобразованием Лоренца скорости: $V_k \equiv V'$).

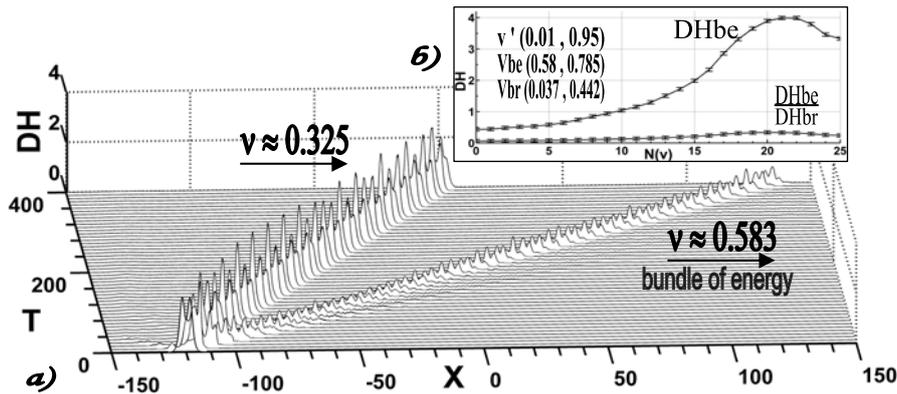


Рис. 2.а) Сброс движущимся со скоростью $V_{br} \approx 0.305$ бризером вида (1) анизотропной одномерной $O(3)$ ВНСМ ($\varphi(x, t) = \omega\tau$) сгустка энергии, которая обладает собственной динамикой движения и относительно большей скоростью $V_{be} \approx 0.583$. **б)** Изменение плотности DH_{be} сбрасываемого бризером (1) $O(3)$ ВНСМ ($\varphi(x, t) = \omega\tau$) локализованного сгустка энергии, а также соотношение $\frac{DH_{be}}{DH_{br}}$ в зависимости от реальной скорости $V_{br} \in (0.037, 0.442)$ движение бризера.

2D бризеры. В этой части приведем результаты численного моделирования двумерного решения $O(3)$ ВНСМ бризероподобного вида, т.е. обладающего динамикой внутренней степени свободы [6]. Эти исследования основываются на результатах аналитических и численных расчетов полученных в работе [8] для уравнения \sin -Гордон

$$u(x, y, t) = -4 \operatorname{arctg} \left[\frac{\xi(t)}{\sqrt{1-\xi^2(t)}} \sin(\mu(t)) \operatorname{sech}(\xi(t)x) \operatorname{sech}(\xi(t)y) \right] \quad (2)$$

Контроль точности в нашей численной схеме осуществлялся вычислением интеграла энергии, которая после сформирования устойчивого 2D бризероподобного решения сохранялся с точностью $\frac{\Delta E}{E} \approx 10^{-6} - 10^{-5}$. Параметры численного моделирования: шаг по координате $h = 0.01$; шаг по времени $\tau = 0.006$; время моделирования $T \in [0.0, 50.0)$; область моделирования $L: \{-L \leq x, y \leq L\}$; $L = 30.0$; разрешение 6001×6001 точек в каждом слое по времени.

В результате проведенной серии компьютерных экспериментов с различными значениями параметров μ , ξ , удовлетворяющих [8]

$$\left(\frac{1-\xi^2}{1-\frac{2}{3}\xi^2} \mu_t \right)_t = 0 \text{ и } Y \xi_{tt} + Y_\xi \xi_t^2 + \Lambda + \Theta \xi_t = 0$$

и введенных возмущений $\omega > 0.0$, где наблюдались, как и диссипативные локализованные периодические решения, так и нарушения устойчивости численной схемы, были получены численно новые устойчивые двумерные бризерные решения, обладающие динамикой внутренней степени свободы вектора A_3 -поля в изопространстве (Рис.3). Интеграл энергии E_I при этом почти не изменялся, осциллируя при $\xi(0) \approx 0.1$, $\mu(0) \approx 0.8$ и $\omega = 0.5$ в интервале (17.7536-17.7538) и равномерно приближаясь к промежуточному значению (Рис.3с).

Таким образом, путем введения возмущения $\omega > 0.0$ в решения уравнения \sin -Гордон вида (2) численным моделированием получены новые двумерные бризерные решения $O(3)$ ВНСМ. Следует отметить, что для получения модели движущихся бризерных решений, а также исследования свойств их взаимодействия необходима оптимизация методов динамической адаптации сетки (например, использование триангулярной координатной сетки), а также увеличение размеров области моделирования, что требует мощных вычислительных ресурсов, в частности, объема оперативной памяти.

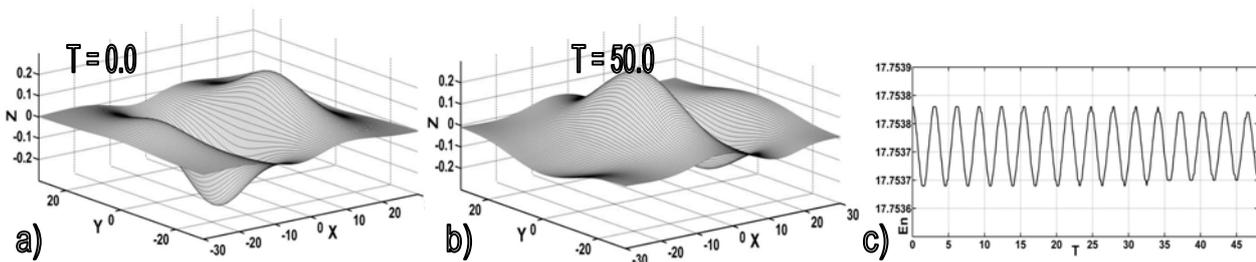


Рис.3. Эволюция двумерного бризерного решения вида (2) $O(3)$ ВНСМ при $\xi(0) \approx 0.1$, $\mu(0) \approx 0.8$ и $\omega = 0.5$: **a)** при $T = 0.0$; **b)** при $T = 50.0$; **c)** изменение интеграла энергии при $T \in [0.0, 50.0]$.

Литература

1. Браун О.М., Кившарь Ю.С. Модель Френкеля-Конторовой: концепции, методы, приложения. – М.: Физматлит, 2008, 536 с.
2. Милнор Дж., Уоллес А. Дифференциальная топология. – М.: Мир, 1972, 279 с.
3. Калиткин Н.Н. Численные методы. Под ред. Самарского А.А. – М.: Наука, 1978, 512 с.
4. Муминов Х.Х., Шокиров Ф.Ш. Численное моделирование динамики взаимодействий новых одномерных бризерных решений $O(3)$ векторной нелинейной сигма модели // Материалы 6-й Международной научно-технической конференции «ИНФОС-2011». – Вологда: ВоГТУ, 2011 г., с. 123-127.
5. Муминов Х.Х., Шокиров Ф.Ш. Динамика взаимодействий новых одномерных бризерных решений $O(3)$ векторной нелинейной сигма модели и бризеров уравнения синус-Гордона // Докл. АН Республики Таджикистан, 2011, т.54, №1, с. 35 – 41.
6. Шокиров Ф.Ш. Сброс сгустка энергии движущимся бризером $O(3)$ векторной нелинейной сигма-модели // Современные методы теории краевых задач: Материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения –XXIV». – Воронеж: ВГУ, 2013, с. 224.
7. Kh.Kh. Muminov, F.Sh. Shokirov. Dynamics of two-dimensional breathers in $O(3)$ vectorial nonlinear sigma-model // The Book of abstracts of the International Conference Mathematical modeling and computational physics, Russia, Dubna (2013), p.134.
8. Minzoni A.A., Smyth N.F., Worthy A.L. Evolution of two-dimensional standing and travelling breather solutions for the Sine–Gordon equation // Phys. D 189 (2004) 167–187.

ВОЛНЫ РИМАНА В ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ СРЕДЕ, СОДЕРЖАЩЕЙ ГАЗ ЧАПЛЫГИНА

Г. Н. Шикин

З. Лахмади, Ю. П. Рыбаков

RIEMANN WAVES IN TWO-COMPONENT MEDIUM CONTAINING CHAPLYGIN GAS

G. N. SHIKIN

Z. LAHMADI, Yu. P. RYBAKOV

*Российский университет дружбы народов,
ул. Миклухо-Маклая, д.6, Москва, Россия, 117198.*

Исследовано распространение волн Римана в двухкомпонентной среде, состоящей из идеальной жидкости с уравнением состояния $p = W\rho$ и газа Чаплыгина с уравнением состояния $p = -A/\rho$, где ρ – плотность среды, $W = const$, $A = const$. Рассмотрены баротропные движения среды, когда давление и скорость среды зависят только от плотности ρ : $p = p(\rho)$, $u = u(\rho)$. При этом система уравнений гидродинамики сводится к волновому уравнению первого порядка, описывающему волны с переменной скоростью, что приводит к деформации профиля волны и неоднозначности в определении плотности среды $\rho(x, t)$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + V(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, V(\rho) = u(\rho) + C(\rho), C(\rho) = \pm \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \pm \sqrt{W + \frac{A}{\rho^2}} \text{ – скорость звука в}$$

среде. Один из путей устранения неоднозначности в определении $\rho(x, t)$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sqrt{W} \ln R \left(\rho + \sqrt{\rho^2 + a^2} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad R = const, \quad a^2 = A/W, \quad (1)$$

состоит в добавлении к уравнению (1) члена, содержащего вторую производную по x , что аналогично учету вязкости среды:

$$\rho_t + V(\rho)\rho_x = \nu \rho_{xx}, \nu = const > 0. \quad (2)$$

В отличие от исходного уравнения (1), уравнение (2) имеет решения со стационарным профилем, и член со второй производной устраняет деформацию профиля волны. Решение уравнения (2) ищем как функцию аргумента $\xi = x - Ut$, $U = const$, где U – скорость распространения волны: $\rho(x, t) = \omega(\xi)$. Для $\omega(\xi)$ из (2) получаем уравнение:

$$-U \omega' + \sqrt{W} \ln \omega' + \sqrt{W} \ln \left(\omega + \sqrt{\omega^2 + a^2} \right) \omega' = \nu \omega'', \quad (3)$$

первый интеграл которого имеет вид:

$$(\sqrt{W} \ln R - U)\omega + \sqrt{W} \left[\omega \ln \left(\omega + \sqrt{\omega^2 + a^2} \right) - \sqrt{\omega^2 + a^2} \right] + H = \nu \omega'. \quad (4)$$

Уравнение (4) имеет решение в квадратурах:

$$\int \frac{d\omega}{(\sqrt{W} \ln R - U)\omega + \sqrt{W} \left[\omega \ln \left(\omega + \sqrt{\omega^2 + a^2} \right) - \sqrt{\omega^2 + a^2} \right] + H} = \frac{\xi}{\nu}. \quad (5)$$

Рассмотрим решение уравнения (5), удовлетворяющее граничным условиям:

$$\xi \rightarrow \pm\infty, \omega \rightarrow \omega_{1,2} = const, \omega_1 \neq \omega_2; \omega'(\xi) \rightarrow 0.$$

В этом случае из (4) выводим следующее поведение решения:

$$\omega \rightarrow \omega_1 = const.$$

$$(\sqrt{W} \ln R - U)\omega_1 + \sqrt{W} \left[\omega_1 \ln(\omega_1 + \sqrt{\omega_1^2 + a^2}) - \sqrt{\omega_1^2 + a^2} \right] + H = 0, \quad (6)$$

$\omega \rightarrow \omega_2 = \text{const}$:

$$(\sqrt{W} \ln R - U)\omega_2 + \sqrt{W} \left[\omega_2 \ln(\omega_2 + \sqrt{\omega_2^2 + a^2}) - \sqrt{\omega_2^2 + a^2} \right] + H = 0. \quad (7)$$

Из (6) и (7) определяем постоянные U и H :

$$U = \frac{\sqrt{W}}{\omega_1 - \omega_2} \left[\omega_1 \ln(\omega_1 + \sqrt{\omega_1^2 + a^2}) - \omega_2 \ln(\omega_2 + \sqrt{\omega_2^2 + a^2}) - \sqrt{\omega_1^2 + a^2} + \sqrt{\omega_2^2 + a^2} \right] + \sqrt{W} \ln R, \quad (8)$$

$$H = \frac{1}{\omega_1 - \omega_2} \left\{ \omega_1 \omega_2 \left[\ln(\omega_1 + \sqrt{\omega_1^2 + a^2}) - \ln(\omega_2 + \sqrt{\omega_2^2 + a^2}) \right] - \omega_2 \sqrt{\omega_1^2 + a^2} + \omega_1 \sqrt{\omega_2^2 + a^2} \right\}. \quad (9)$$

Предположим, что $\omega_1 > \omega_2$. Обозначим через $\sigma_1(\xi)$ значение ω в окрестности ω_1 : $\omega = \omega_1 - \sigma_1(\xi)$, $\sigma_1(\xi) = \omega_1 - \omega \geq 0$, $\sigma_1/\omega_1 \ll 1$, а через $\sigma_2(\xi)$ обозначим значение ω в окрестности ω_2 : $\omega = \omega_2 + \sigma_2(\xi)$, $\sigma_2(\xi) = \omega - \omega_2 \geq 0$, $\sigma_1(\xi)/\sigma_2(\xi) \approx 1$. Рассмотрим простейший случай, когда $\omega_1 > 0$, $\omega_2 = 0$. Обозначим через I знаменатель подынтегрального выражения в (5).

В этом случае имеем:

$$\text{при } \omega \rightarrow \omega_1, I \approx -\sigma_1(\xi) \frac{(\sqrt{\omega_1^2 + a^2} - a)}{\omega_1}, \quad (10)$$

$$\text{при } \omega \rightarrow \omega_2, I \approx -\sigma_2(\xi) \left[\ln(\omega_1 + \sqrt{\omega_1^2 + a^2}) - \ln a - \frac{(\sqrt{\omega_1^2 + a^2} - a)}{\omega_1} \right]. \quad (11)$$

Подставляем (10) в (5) и находим $\sigma_1(\xi)$:

$$\sigma_1(\xi) = K_1 \exp \xi \frac{(\sqrt{\omega_1^2 + a^2} - a)}{v \omega_1}, \quad K_1 = \text{const}. \quad (12)$$

Учитывая, что $\sigma_1(\xi) \rightarrow 0$ при возрастании ξ , из (12) выводим, что $\xi \rightarrow -\infty$ и ω_1 локализована в области $\xi \rightarrow -\infty$. При подстановке (11) в (5) определяем $\sigma_2(\xi)$:

$$\sigma_2(\xi) = K_2 \exp \left\{ -\frac{\xi}{v} \left[\ln(\omega_1 \sqrt{\omega_1^2 + a^2}) - \ln a - \frac{(\sqrt{\omega_1^2 + a^2} - a)}{\omega_1} \right] \right\}. \quad (13)$$

Из (13) следует, что $\sigma_2(\xi) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow +\infty$ и ω_2 локализована в области $\xi = +\infty$.

Изучим направление распространения волны. При $\omega_2 = 0$ скорость волны U из (8) определяется выражением:

$$U = \sqrt{W} \left\{ \left[\ln(\omega_1 + \sqrt{\omega_1^2 + a^2}) - \frac{\sqrt{\omega_1^2 + a^2} - a}{\omega_1} \right] + \ln R \right\}. \quad (14)$$

При фиксированном ω_1 скорость зависит от $\ln R$. Найдем значение R_0 , для которого $U = 0$:

$$R_0 = \frac{1}{\omega_1 + \sqrt{\omega_1^2 + a^2}} \exp \left(\frac{\sqrt{\omega_1^2 + a^2} - a}{\omega_1} \right). \quad (15)$$

Итак, при $R > R_0$ $U > 0$, а при $R < R_0$ $U < 0$. При $U > 0$ волна распространяется в положительном направлении ξ , т.е. из области $\xi = -\infty$, где $\omega = \omega_1$ в область $\xi \rightarrow +\infty$, где локализована $\omega = \omega_2$. Поскольку $\omega_1 > \omega_2$, то волна является волной сжатия. При $R < R_0$ волна распространяется в противоположном направлении, и мы получаем волну разрежения. Постоянная R определяет амплитуду автомодельной волны $B = 1/R$. При относительно больших амплитудах (малых R) автомодельной волны мы имеем волны разрежения, а при относительно малых амплитудах (больших R) - волны сжатия.

КЛАСС МЕТРИЧЕСКИХ АЛГЕБР, ЛОРЕНЦ И ПУАНКАРЕ ИНВАРИАНТНОСТЬ ОПЕРАЦИЙ.

А. В. Коганов

Научно-исследовательский институт системных исследований РАН (НИИСИ РАН), Россия, 117218, Москва, Нахимовский пр., 36, корп. 1; koganow@niisi.msk.ru

THE METRIC ALGEBRA CLASS, THE LORENZ AND POINCARÉ INVARIANCE OF OPERATIONS.

A. V. Koganov

Science Research Institute of System Analyze at Russian Science Academy (NIISI RAN), 117218, Nakhimovsky st. 36 corp. 1, Moscow, Russia.

We consider the method for the building of the algebras, which have the support on the vector space, and their operations commute with the Lorenz and Poincaré transformations. Such algebras may be used for the forming of the Space-Time models in the Theoretical Physics. The Metric Algebra has the parameter in form of arbitrary metric tensor, and the operations of that algebra commute with automorphism of that metric. We make the full description of the binary vector operations which commute with Poincaré transformations.

В этой работе рассматривается вопрос о построении алгебр с носителем на векторном пространстве, операции которых коммутируют с преобразованиями Лоренца и Пуанкаре на этом пространстве. Это означает в общем виде $F(Lx_1, \dots, Lx_m) = LF(x_1, \dots, x_m)$, где F — операция, L — преобразование, x_1, \dots, x_m — операнды. Рассматриваются обычные операции умножения на число и сложения векторов, и специально определенная операция умножения. Особое внимание уделено алгебрам, где операции суммы и произведения векторов связаны дистрибутивным законом. Интерес к этой тематике вызван появившимися в многочисленных публикациях попытками моделирования пространства-времени в физике с помощью гиперкомплексных чисел, алгебра которых не удовлетворяет условию инвариантности относительно преобразований Лоренца. Поэтому в этих теориях в каждой системе отсчета приходится вводить свою гиперкомплексную алгебру. Решение указанной задачи устраняет этот недостаток. В доказательствах теорем использован аппарат из [1][2].

Будет построена дистрибутивная алгебра размерности $n+1$ с единицей, которая инвариантна относительно всех линейных преобразований, сохраняющих заданный метрический тензор самого общего вида на подпространстве размерности n . Это означает, что ее операции коммутируют с этими преобразованиями. Для каждого метрического тензора алгебра своя (своя таблица умножения). Метрический тензор общего вида — это произвольная матрица размерности $n \times n$ вида $g = [g_{i,j}]$, где $g_{i,j} \in \mathbb{R}$.

Определение 1. Метрическая алгебра (или М-алгебра, метрические числа, М-числа) имеет образующие: $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$. Для удобства обозначим $\alpha_0 = 1$. Общий вид элемента носителя алгебры $x = (x_0\alpha_0 + x_1\alpha_1 + \dots + x_n\alpha_n) = x_0 + x_1\alpha_1 + \dots + x_n\alpha_n = x_0 + P_x$. Закон умножения образующих: $1x = x1 = x$, где $x \in \{1; \alpha_1; \dots; \alpha_n\}$; $\alpha_i\alpha_j = g_{i,j} \cdot \alpha_0 = g_{i,j}$, $i, j = \overline{1, n}$. Распространение операций на всю алгебру.

$$(x_0 + x_1\alpha_1 + \dots + x_n\alpha_n) + (y_0 + y_1\alpha_1 + \dots + y_n\alpha_n) = (x_0y_0 + x_1y_1\alpha_1 + \dots + x_ny_n\alpha_n)$$

$(x_0\alpha_0 + \dots + x_n\alpha_n)(y_0\alpha_0 + \dots + y_n\alpha_n) = \sum_{i,j=0,\dots,n} (x_i y_j)(\alpha_i \alpha_j)$. Следствия.

$$(m + P_x)(k + P_y) = \left(mk + \sum_{i,j=1,n} g_{i,j} x_i y_j \right) + mP_y + kP_x \quad (1)$$

Определение 2. Скалярное произведение: $(P_x, P_y) =_{\text{def}} \sum_{i,j=1,n} g_{i,j} x_i y_j = P_x P_y$.

Линейный оператор V на линейном пространстве M -чисел назовем метрическим изоморфизмом (M -изоморфизмом), если $\langle \alpha_0 \rangle$ и $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ его инвариантные подпространства и по оси $\langle \alpha_0 \rangle$ он осуществляет тождественное преобразование, а в подпространстве $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ сохраняет скалярное произведение любых двух векторов: $(P_x, P_y) = (VP_x, VP_y)$. \square

Теорема 1. Законы умножения и сложения M -чисел инвариантны относительно действия любого метрического изоморфизма.

Частный случай, метрика Минковского в пространстве ${}^1\mathbb{R}^{n-1}$ с метрическим тензором $g = \text{diag}(1, -1, \dots, -1)$. Соответствующая M -алгебра инвариантна относительно канонического действия группы Лоренца на подпространстве $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$. Роль оси времени играет ось $\langle \alpha_1 \rangle$, модель физического пространства $\langle \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle$. Ось $\langle \alpha_0 \rangle$ отображает скалярные произведения и не имеет аналога в пространстве-времени. Она аналогична оси действительных чисел в кватернионах. В частности, такая M -алгебра инвариантна относительно эвклидовых поворотов в подпространстве $\langle \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle$. Но для случая $n = 4$ эта алгебра не обладает такими хорошими свойствами умножения, как кватернионы.

M -алгебра имеет коммутативное умножение тогда и только тогда, когда метрический тензор симметричен. Ассоциативности в метрическом умножении нет при любом ненулевом метрическом тензоре: $(\alpha_1 \alpha_2) \alpha_3 = g_{1,2} \alpha_3$; $\alpha_1 (\alpha_2 \alpha_3) = g_{2,3} \alpha_1$. Имеются делители нуля: если M -числа ортогональны в метрике, то их произведение обнуляется ($P_x P_y = 0$).

Теорема 2. Однозначное деление на M -число y возможно, если, и только если, $\det A = (y_0)^{n-1} (2y_0^2 - y_1 w_1 - \dots - y_n w_n) \neq 0$, где $w_i = \sum_{j=1}^n (g_{i,j} + g_{j,i}) y_j$. (Это определитель системы линейных уравнений, определяющей результат деления.) В метрике Минковского $\det A = 2y_0^2 - 2y_1^2 + 2y_2^2 + \dots + 2y_n^2 = 2y_0^2 - 2\|P_y\|_M^2$, и условие делителя $y_0^2 \neq \|P_y\|_M^2$.

Определение 3. Назовем метрический тензор $[g_{i,j}]$ модульным (или модульной метрикой), если все его компоненты либо ± 1 , либо 0: $g_{i,j} \in \{-1; 0; 1\}$.

Теорема 3. Метрические алгебры с модульной метрикой, и только они в классе M -алгебр, являются модулями над конечной мультипликативной алгеброй образующих. (Остальные M -алгебры имеют бесконечную алгебру образующих по умножению.) Важные частные случаи — метрические тензоры Минковского и Эвклида.

Для M -алгебры с комплексными коэффициентами (M -твисторы) комплексная метрика $[g_{i,j}]$ модульная, если все её компоненты принадлежат конечной подгруппе G на единичном круге или являются нулем, и тогда теорема 3 сохраняется.

Теорема 4. Любой автоморфизм произвольного дистрибутивного модуля над мультипликативной алгеброй в произвольном поле коммутирует с преобразованием сдвига и с дилатацией в линейном пространстве этого модуля. (Аutomорфизмы алгебры коммутируют с

аффинными операциями над алгеброй, хотя сами операции алгебры не всегда с ними коммутируют; например, сложение не коммутирует с ненулевым сдвигом.)

Определение 4. Алгебра, построенная на линейном пространстве с помощью дополнительно введенных операций, называется Пуанкаре инвариантной (ПИ-алгебра), если ее операции коммутируют с преобразованиями Лоренца, а также с аффинными сдвигами и дилатациями.

Теорема 5. Алгебра с дистрибутивным умножением не инвариантна относительно аффинных преобразований по обеим или любой одной из операций сложения и/или умножения.

Определение 5. Класс конических алгебр. Носителем конической алгебры является действительное пространство размерности $n+1$ с образующими e_0, \dots, e_n . Элемент алгебры

обозначим как вектор $\vec{x} = x_0 e_0 + \dots + x_n e_n$. Операция параметрической дилатации ($\alpha \in \mathbb{R}$):

$\alpha \vec{x} = \alpha x_0 e_0 + \dots + \alpha x_n e_n$. Операция параметрической проективной суммы ($\alpha \in \mathbb{R}, \beta = 1 - \alpha$):

$$\vec{x} +_{\alpha} \vec{y} = \alpha \vec{x} + \beta \vec{y}.$$

Операция параметрического конического умножения связана с интервалом Минковского для двух операндов:

$$\eta(\vec{x}, \vec{y}) = (x_0 - y_0)^2 - (x_1 - y_1)^2 - \dots - (x_n - y_n)^2.$$

Обозначим $\theta = 1 + \text{sgn}(\eta)$.

Зададим характеристику пары операндов (две компоненты):

$$C(\vec{x}, \vec{y}) = (\text{sgn}(x_0 - y_0)\theta, \text{sgn}(\eta)).$$

$$C \in \{(0, -1), (-1, 0), (0, 0), (1, 0), (-2, 1), (2, 1)\} = P$$

Зададим параметр умножения в форме двух функций от характеристики:

$$\alpha[C], \alpha[\cdot]: P \rightarrow \mathbb{R};$$

$$U[C], U[\cdot]: P \rightarrow M(n+1, n+1) \text{ (действительные матрицы);}$$

$$\text{Обозначим } \beta[C] =_{\text{def}} 1 - \alpha[C];$$

(функции $\alpha[C]$ и $\beta[C]$ скалярные, функция $U[C]$ матричная).

Определим умножение:

$$\vec{x} \circ_{\langle \alpha, U \rangle} \vec{y} = g_C(\vec{x}, \vec{y}) = \alpha[C]\vec{x} + \beta[C]\vec{y} + U[C](\vec{x} - \vec{y}),$$

где $C = C(\vec{x} - \vec{y})$, инвариант преобразований Пуанкаре.

Коническая алгебра полностью определяется заданием параметров суммы и умножения. Можно ввести несколько таких операций с разными параметрами в одну алгебру. Других ПИ-операций не существует.

Определение 6. Если значения $\alpha[C]$ различны для каких-то двух значений характеристики, соответствующих разным знакам интервала η , то алгебру назовем существенно невырожденной.

Теорема 6. У существенно невырожденной конической алгебры группа автоморфизмов совпадает с группой Пуанкаре. У произвольной конической алгебры группа автоморфизмов содержит группу Пуанкаре.

Замечание 1. Операции конической алгебры имеют обратную дистрибутивность:

$$(\vec{z} +_{\alpha} \vec{x}) \circ_{\langle \alpha \rangle} (\vec{z} +_{\alpha} \vec{y}) = \vec{z} +_{\alpha} (\vec{x} \circ_{\langle \alpha \rangle} \vec{y}).$$

Замечание 2. Если параметр $\alpha[C] = \text{const} = \alpha'$, и $U[C] = \text{const} = \mathbf{0}$, то коническое умножение совпадает с проективной суммой.

Замечание 3 Можно построить алгебру с несколькими операциями умножения, имеющими разные параметры. При этом теорема 6 сохраняет силу.

Замечание 4 Характеристика $C(\vec{x}, \vec{y})$ задает максимальное разбиение множества пар векторов, которое инвариантно относительно преобразований группы Пуанкаре.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. V. Koganov. Processes and Automorphisms on Inductor Spaces. Russian Journal Mathematic Physics, vol 4, nom 3, 1996, Jon Wiley and Sons, Ins., s 315-339.
2. A. V. Koganov. Faithful Representations of Groups by Automorphisms of Topologies. Russian Journal of Mathematical Physics, vol. 15, No 1, 2008, s. 66-76

МЕТОД МАКСИМАЛЬНОЙ ЭНТРОПИИ И КВАДРАТИЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СЛУЧАЙНО-ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ

THE MAXIMUM ENTROPY METHOD AND THE RANDOM DISTURBED SYSTEMS SQUARE REPRESENTATION

Миронов П. П., Журавлев В. М.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Ульяновский государственный университет»
г. Ульяновск, Российская Федерация

В докладе излагается подход к квадратичному представлению случайно-возмущенных систем с дальнейшим замыканием полученных уравнений с помощью метода максимальной энтропии. В качестве примера выбрана модель случайно-возмущенного математического маятника. Получены и проанализированы решения, соответствующие разным состояниям математического маятника.

The approach to the random disturbed systems square representation with further closing received equations by the maximum entropy method is stated. As an example the random disturbed mathematical pendulum model is chosen. Solutions for different conditions of mathematical pendulum are received and analysed.

В предыдущих работах [1 - 4] был описан специальный вариант метода максимальной энтропии применительно к различным усредненным по методу Рейнольдса случайно-возмущенным моделям. Трудностью при использовании метода Рейнольдса в сочетании с методом максимальной энтропии является то, что для сложных нелинейностей распределение вероятностей имеет достаточно общий вид, что создает существенные сложности для анализа получившихся уравнений, которые остаются нелинейными.

Для преодоления этой трудности предлагается строить анализ стохастической динамики конечномерных систем с помощью их специального представления, которое называется далее квадратичным. Основная идея состоит в том, чтобы так ввести новые переменные нелинейной системы, чтобы она могла быть записана в форме системы уравнений только с квадратичной нелинейностью. Последнее приводит к тому, что усредненные уравнения будут содержать вторые моменты, что приводит к возможности описывать вероятностное распределение в форме многомерного нормального распределения Гаусса. Такой подход полностью стандартизирует основные выводы о состоянии системы, сделанные на основе решения задачи о максимуме энтропии для почти всех случайно-возмущенных конечномерных динамических систем.

Под случайно-возмущенной динамической системой будем понимать систему, которая описывается вектором $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t))$ в вещественном пространстве R^N размерности N , координаты которого изменяются со временем в соответствии с системой нелинейных уравнений первого порядка следующего общего вида:

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = P_\alpha(x, t) + \varepsilon_\alpha(t), \quad \alpha = 1, \dots, N, \quad (1)$$

где $P_\alpha(x, t)$ - полиномы конечного порядка не превышающего значения M : $\text{rang}\{P\}_\alpha \leq M$, $\varepsilon_\alpha(t)$ - случайные процессы, имеющие нулевое среднее по ансамблю, которое мы будем обозначать с помощью угловых скобок: $\langle \varepsilon \rangle_\alpha = 0$.

Для построения квадратичного представления системы (1) введем новые переменные $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{N \cdot M})$ по следующему правилу:

$$y_{\mathbf{a}} = x_1^{a_1} \cdot x_N^{a_N}, \quad 0 < |\mathbf{a}| \leq M; \quad y_{0,0,\dots,0} = 1. \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_N)$ - мультииндекс, $|\mathbf{a}| = a_1 + a_2 + \dots + a_N$. Каждая переменная $y_{\mathbf{a}}$ представляет собой моном степени $|\mathbf{a}|$. В таких переменных полиномы в правой части системы (2.30) представляются линейными функциями новых координат y_i :

$$P_{\alpha}(\mathbf{x}, t) = \sum_{|\mathbf{a}| \leq M} p_{\alpha}^{a_1 \dots a_N}(t) x_1^{a_1} \dots x_N^{a_N} = \sum_{|\mathbf{a}| \leq M} p_{\alpha}^{\mathbf{a}}(t) y_{\mathbf{a}} + C_{\alpha}(t) = L_{\alpha}(\mathbf{y}, t).$$

Здесь $C_{\alpha}(t) = P_{\alpha}(\mathbf{x}, t)|_{x=0}$. Для замыкания описания динамики системы в пространстве переменных $y_{\mathbf{a}}$ уравнений (1) дополним ее до следующей совокупности уравнений:

$$\frac{dy_{\mathbf{a}}}{dt} = \sum_{\alpha=1}^N a_{\alpha} y_{(\mathbf{a}|\alpha)} L_{\alpha}(\mathbf{y}, t) + E_{\mathbf{a}}, \quad (3)$$

$$y_{\mathbf{a}+\mathbf{b}} = y_{\mathbf{a}} y_{\mathbf{b}}, \quad 0 < |\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq M. \quad (4)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$(\mathbf{a} | \alpha) = (a_1, a_2, \dots, a_{\alpha} - 1, \dots, a_N), \quad \mathbf{b} = (b_1, \dots, b_N),$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_N + b_N).$$

Величины $E_{\mathbf{a}}(t)$ - случайные процессы вида:

$$E_{\mathbf{a}}(t) = \sum_{\alpha=1}^N a_{\alpha} y_{(\mathbf{a}|\alpha)} \varepsilon_{\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, N; k = 1, \dots, M.$$

Представление исходной системы в виде системы уравнений (3) - (4) будем называть ее **квадратичным представлением**.

Данное представление применяется к системем случайно-возмущенного математического маятника, записанной в следующем виде:

$$\dot{\omega} + \sin(\phi) = \varepsilon, \quad \dot{\phi} = \omega. \quad (5)$$

Здесь ω - частота движения математического маятника. Эта система содержит тригонометрическую функцию неизвестной и поэтому не относится к классу полиномиальных систем. Однако в этом случае система имеет конечномерное квадратичное представление. Введем новые переменные: $x = \sin(\phi)$, $y = \cos(\phi)$, $z = \omega$. Тогда система уравнений (5) может быть представлена в следующем виде:

$$\dot{x} = zy, \quad \dot{y} = -zx, \quad \dot{z} = -x + \varepsilon. \quad (6)$$

Первые два уравнения этой системы содержат интеграл движений, который содержит в себе обратный переход к переменной ϕ . Этот интеграл также является квадратичной формой:

$$x^2 + y^2 = 1. \quad (7)$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа (замкнутые усредненные уравнения) для системы (6) и выражения (7) следующие:

$$\begin{aligned}
\dot{Z} &= -X, \quad \dot{X} = YW + \langle z'y' \rangle, \\
\dot{Y} &= -XZ - \langle z'x' \rangle, \quad X^2 + \langle x'^2 \rangle + Y^2 + \langle y'^2 \rangle = 1, \\
\dot{U}_1 &= -YU_2 + XU_3, \quad \dot{U}_2 = U_1 + ZU_3 + 2XU_4, \\
\dot{U}_3 &= -ZU_2 + 2YU_4, \\
\frac{1}{2} \frac{\langle z'^2 \rangle \langle y'^2 \rangle - (\langle z'y' \rangle)^2}{\det \mathbf{C}} + U_4 &= 0, \quad \frac{1}{2} \frac{\langle z'^2 \rangle \langle x'^2 \rangle - (\langle z'x' \rangle)^2}{\det \mathbf{C}} + U_4 = 0, \\
\frac{\langle z'y' \rangle \langle x'y' \rangle - \langle y'^2 \rangle \langle z'x' \rangle}{\det \mathbf{C}} + U_3 &= 0, \quad \frac{\langle z'x' \rangle \langle x'y' \rangle - \langle x'^2 \rangle \langle z'y' \rangle}{\det \mathbf{C}} - U_2 = 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Здесь X, Y - усредненные значения величин тригонометрических функций угла отклонения маятника, Z - усредненное значение частоты движения математического маятника, U_1, U_2, U_3, U_4 - множители Лагранжа, $\langle x'^2 \rangle, \langle y'^2 \rangle, \langle z'^2 \rangle, \langle x'y' \rangle, \langle z'x' \rangle, \langle z'y' \rangle$ - моменты распределения, \mathbf{C} - матрица ковариаций флуктуаций.

Для системы уравнений (8) получены и проанализированы решения, соответствующие разным состояниям математического маятника (положение устойчивого равновесия и равномерное вращение маятника).

Работа выполнена при поддержке Министерства Образования и Науки РФ (в рамках Государственного задания и проекта № 14.Z50.31.0015), а так же при частичной финансовой поддержке РФФИ в рамках проекта 13-01-97067 p_поволжье_a.

Литература

1. Журавлев В.М., Миронов П.П. Динамика случайно-возмущенной системы Вольтерра-Лотки и метод максимальной энтропии // Нелинейный мир - 2011. - Т. 9, № 4. - С. 201-212.
2. В.М. Журавлев, П.П. Миронов. Случайно-возмущенные динамические модели и метод максимальной энтропии // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». - 2013. - № 1 (30). - С. 352-360.
3. Миронов П.П., Бызыкчи А.Н., Журавлев В.М. Модель солнечного ветра с учетом турбулентности плазмы и метод максимальной энтропии // Сборник тезисов II Всероссийской конференции по проблемам физики частиц, физики плазмы и конденсированных сред, оптоэлектроники. Секция «Физика плазмы и взаимодействие электромагнитного излучения с веществом». - М.: РУДН. - 2013. - С. 150-154.
4. Миронов П.П., Журавлев В.М. Метод максимальной энтропии в расширенной модели солнечного ветра с учетом турбулентных флуктуаций плазмы. Сборник тезисов I Всероссийской конференции по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и конденсированных сред, оптоэлектроники. Секция «Физика плазмы и взаимодействие электромагнитного излучения с веществом». - М.: РУДН. - 2014. - С. 168-170.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ОБРАЗОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУР В КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕДАХ С НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФУЗИЕЙ

SIMULATION OF FORMATION OF PERIODIC STRUCTURES IN CONDENSED MEDIA WITH NONLINEAR DIFFUSION

Морозов В. М., Журавлев В. М.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего профессионального образования

«Ульяновский государственный университет»

г. Ульяновск, Российская Федерация

В докладе рассматривается уравнение нелинейной диффузии точечных дефектов в твердом теле с учетом взаимодействия дефектов между собой и с внешним излучением. Для данного уравнения ищутся приближенные периодические решения с помощью метода многомасштабных разложений. Производится анализ устойчивости полученных решений и выводится условие роста периодической структуры.

Consider the equation of nonlinear diffusion of point defects in solids, taking into account the interaction of defects with one another and with external radiation. For this equation are sought approximate periodic solutions by the method of multiscale expansions. The stability of solution is analyzed and output growth condition of the periodic structure

В работе [1] были рассмотрены точные решения двумерного нелинейного уравнения диффузии. В данной работе ищутся приближенные периодические решения уравнения нелинейной диффузии точечных дефектов в твердом теле, также рассматривается система из двух взаимодействующих точечных дефектов с произвольной зависимостью коэффициентов диффузии от соответствующих концентраций.

Запишем второй закон Фика для диффузии точечных дефектов в кристалле с учетом нелинейного коэффициента диффузии $D(n) = \frac{D_0}{n + q_0 n_0}$ и добавок, учитывающих взаимодействие между дефектами и внешний источник излучения:

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{D_0}{n + q_0 n_0} \frac{\partial n}{\partial z} \right) - \mu n - \gamma n^2 + G, \quad (1)$$

где $q_0 = \sigma_0 / \sigma_1$ - отношение сечений взаимодействия дефектов между собой и с узлами кристаллической решетки, n - число атомов кристаллической решетки в единице объема, μ - коэффициент диссипации дефектов, описывающий выход дефектов на границу и взаимодействие с другими типами дефектов, γ - коэффициент рекомбинации, отвечающий за взаимное уничтожение/генерацию дефектов, а G - плотность потока излучения от внешнего источника.

Переходя к безразмерным переменным запишем уравнение диффузии в следующем виде:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \ln \xi}{\partial x^2} - \xi - \xi^2 + g. \quad (2)$$

Единственным параметром уравнения (2) является безразмерная величина g , имеющая следующий вид:

$$g = \frac{\gamma}{(\mu + 2q_0\gamma n_0)^2} (G - \mu q_0 n_0 - \gamma q_0^2 n_0^2). \quad (3)$$

Особенностью уравнения (2) и уравнений, рассматриваемых в дальнейшем является их нелинейность, не позволяющая найти аналитическое решение, поэтому решение ищется в виде ряда по методу асимптотических разложений.

Разложим неизвестную функцию в следующий ряд:

$$\xi = \xi(t, X, T, \varepsilon) = \xi_0(t, X, T, \varepsilon) + \xi_1(t, X, T, \varepsilon)\varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad (4)$$

где $X = \sqrt{\varepsilon} x$ — медленная координата, а $T = \varepsilon t$ — медленное время.

Решения могут содержать члены линейно растущие по времени, для сходимости ряда (4) необходимо потребовать их равенства нулю, в каждом порядке, это условие и будет определять зависимость постоянных интегрирования в функциях

$\xi_0(t, X, T, \varepsilon), \xi_1(t, X, T, \varepsilon), \dots$ от медленных переменных.

Решение в нулевом порядке запишется в следующем виде:

$$\xi_0 = \frac{1}{2} \frac{(1 + \lambda) e^{(\lambda - p\varepsilon)t} - A \cos(kX + \phi)(1 - \lambda)}{e^{(\lambda - p\varepsilon)t} - A \cos(kX + \phi)}. \quad (5)$$

Условие существования периодической структуры можно получить, устремив, тогда $t \rightarrow \infty$ периодичность будет сохраняться при условии:

$$\lambda - p\varepsilon = 0, \quad (6)$$

или:

$$\frac{1 + 4g - \sqrt{1 + 4g + k^2\varepsilon}}{\sqrt{1 + 4g} - 1} = 0, \quad (7)$$

чему соответствуют следующие значения k

$$k^2 = \frac{\lambda^2 - \lambda}{\varepsilon} = \frac{1 + 4g - \sqrt{1 + 4g}}{\varepsilon}. \quad (8)$$

Уравнения диффузии двух типов дефектов могут быть записаны в следующем общем виде:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \zeta_1}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(F_1(\zeta_1, \zeta_2) \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_\alpha} \right) - \mu_1 \zeta_1 - \varepsilon \gamma_1 \zeta_1 \zeta_2 + g_1 \\ \frac{\partial \zeta_2}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(F_2(\zeta_1, \zeta_2) \frac{\partial \zeta_2}{\partial x_\alpha} \right) - \mu_2 \zeta_2 - \varepsilon \gamma_2 \zeta_1 \zeta_2 + g_2.\end{aligned}\quad (9)$$

Слагаемые в правой части уравнений отвечают за рождение-уничтожение дефектов: «совместное» (слагаемые $\gamma_{1,2} \zeta_1 \zeta_2$), «самостоятельное» (слагаемое $\mu_{1,2} \zeta_{1,2}$) и под действием внешнего источника (слагаемое $g_{1,2}$).

Множитель ε учитывает малость эффектов рекомбинации по сравнению с диффузией и диссипацией.

Решения в нулевом порядке имеют следующую форму:

$$u_0 = A(X, T) e^{-\mu_1 t} + \frac{g_1}{\mu_1}, \quad v_0 = B(X, T) e^{-\mu_2 t} + \frac{g_2}{\mu_2}. \quad (10)$$

Для первого порядка условие равенства нулю растущих резонансных слагаемых можно записать в виде уравнения для амплитуд $A(X, T)$, $B(X, T)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial T} &= D_1(g) \Delta_X A - \frac{\gamma_1 g_2}{\mu_2} A, \\ \frac{\partial B}{\partial T} &= D_2(g) \Delta_X B - \frac{\gamma_2 g_1}{\mu_1} B,\end{aligned}\quad (11)$$

где коэффициенты диффузии имеют вид:

$$D_i(g) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_i^{[k]}(0)}{k!} \left(\frac{g_i}{\mu_i} \right)^{k-1} = F_i'(g_i / \mu_i) = \frac{\tau_0}{X_0^2} D_1(g_i / \mu_i), \quad (12)$$

Уравнения для амплитуд являются линейными диффузионными уравнениями с коэффициентами диффузии, зависящими от параметров g_1 и g_2 . Порядок этих уравнений совпадает с порядком исходных. Это позволяет в первом порядке теории возмущений строить решения общей краевой задачи с соответствующим образом преобразованными граничными условиями. Однако для решения поставленной в данной работе задачи основной интерес представляет анализ асимптотического роста периодических решений.

Предположим, что параметры в уравнениях (11) являются постоянными. Пространственно-периодические решения уравнений (11), являются суперпозицией решений вида:

$$A(\mathbf{X}, T) = a e^{pT} e^{i(\mathbf{K}, \mathbf{X})}, \quad B(\mathbf{X}, T) = b e^{pT} e^{i(\mathbf{K}, \mathbf{X})}. \quad (13)$$

Для системы (11) дисперсионные соотношения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\mu_2(p + \mathbf{K}^2 D_1(g_1 / \mu_1)) + \gamma_1 g_2 &= 0, \\ \mu_1(p + \mathbf{K}^2 D_2(g_2 / \mu_2)) + \gamma_2 g_1 &= 0.\end{aligned}\quad (14)$$

Периодические решения в нулевом порядке:

$$\begin{aligned}U_0 &= a e^{(p\varepsilon - \mu_1)t} \cos(\mathbf{KX}) + g_1 / \mu_1 \\ V_0 &= b e^{(p\varepsilon - \mu_2)t} \cos(\mathbf{KX}) + g_2 / \mu_2.\end{aligned}\quad (15)$$

Из (15) следует, что условие роста периодических составляющих имеет следующий вид:

$$p\varepsilon - \mu_{1,2} \geq 0 \quad (16)$$

Используя дисперсионное соотношение (14) и связь волновых векторов для быстрой и медленной переменных можно записать условие роста структуры для коэффициента диффузии:

$$F_1\left(\frac{g_1}{\mu_1}\right) \leq \frac{\gamma_1 g_2 \varepsilon - \mu_1 \mu_2}{\mu_2 \mathbf{k}^2}.\quad (17)$$

В системе будут расти структуры с волновыми числами, удовлетворяющими соотношению (17), также можно получить критическое значение волнового числа:

$$\mathbf{k}_0^2 = \frac{\gamma_1 g_2 \varepsilon - \mu_1 \mu_2}{\mu_2 F_1(g_1 / \mu_1)}.\quad (18)$$

Условие (17) накладывает ограничение на возможные значения коэффициента диффузии, в частности выражение, стоящее справа может быть отрицательным и если при зависимости $F_1(\xi)$ коэффициент диффузии должен быть величиной положительной, то в данном случае он зависит от другой переменной и может удовлетворять данному соотношению при определенных значениях переменной $\frac{g_1}{\mu_1}$.

Литература

1. Журавлев В.М. Точные решения уравнения нелинейной диффузии $U_t = \Delta \ln U + \lambda U$ в двумерном координатном пространстве. // ТМФ, 2000, Т. 124, N. 2, С. 265-278.

ОПРОКИДЫВАЮЩИЕСЯ ВОЛНЫ В ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ ФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

OVERTURNING WAVE IN LINEAR AND NONLINEAR PHYSICAL SYSTEMS

Журавлев В.М.

(Zhuravlev V.M.)

Ульяновский государственный университет

Ульяновск, Россия

zhvictorm@gmail.com

В работе излагается теория, связывающая многомерные квазилинейные уравнения первого порядка и волновые уравнения второго порядка, встречающиеся в различных линейных и нелинейных системах. Предлагается классификация уравнений и их решений, приводятся примеры использования данной теории.

In this paper we present a theory that relates the multidimensional quasilinear equations of the first order and second-order wave equations encountered in various linear and nonlinear systems. A classification of equations and some examples of the use of this theory are represented.

В работе рассматриваются многомерные квазилинейные уравнения первого порядка:

$$\frac{\partial E}{\partial x^\alpha} = \sum_{a=1}^m A_a^\alpha(E) \frac{\partial E}{\partial y^a}, \quad \alpha = 1, \dots, n, a = 1, \dots, m, \quad (1)$$

в координатном пространстве R^{n+m} общей размерности $N = n + m$ с координатами, разделенными на две группы $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$, $\mathbf{y} = (y^1, \dots, y^m)$, где $A_a^\alpha(E)$ - произвольные дифференцируемые функции одной неизвестной функции $E(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Эти системы обозначаются символом QL^{nm} . По аналогии с работами [1,2] исследуются общие решения этих уравнений и устанавливается связь между ними и уравнениями второго порядка. Именно, связь устанавливается между решениями уравнений [1] и решениями волновых уравнений второго порядка следующего общего вида:

$$\Delta E = \sum_{a=1}^m \sum_{b=1}^m \frac{\partial}{\partial y^a} \left(R^{ab}(E) \frac{\partial E}{\partial y^b} \right) \quad (2)$$

где $R^{ab}(E) = \sum_{\alpha=1}^n A_\alpha^a(E) A_\alpha^b(E)$. Общие решения уравнений (1) и (2) можно записать в виде неявного алгебраического уравнения:

$$H(E, y^1 + \Phi^1(E, \mathbf{x}), \dots, y^m + \Phi^m(E, \mathbf{x})) = 0 \quad (3)$$

с произвольной дифференцируемой функцией $H(E, z_1, \dots, z_m) = 0$ с m аргументами,

содержащими функции $\Phi^a(E, \mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^n A_\alpha^a(E) x^\alpha$, $a = 1, \dots, m$.

В работе доказывается, что решения (3) удовлетворяют уравнению типа эйконала:

$$\sum_{\alpha=1}^n \left(\frac{\partial E}{\partial x^\alpha} \right)^2 = \sum_{a=1}^m \sum_{b=1}^m R^{ab}(E) \frac{\partial E}{\partial y^a} \frac{\partial E}{\partial y^b},$$

Также доказывается, что векторное поле $U_\alpha^a = - \sum_{b=1}^m Q^{ab}(E) A_\alpha^b(E)$, где $Q^{ab}(E)$ - элементы

матрицы \mathbf{Q} , обратной \mathbf{R} с элементами $R^{ab}(E)$, удовлетворяет системе уравнений гидродинамического типа:

$$\frac{\partial U_\alpha^a}{\partial y^b} + \sum_{\beta=1}^m U_\beta^b \frac{\partial U_\alpha^a}{\partial x^\beta} = 0.$$

Уравнения (1)-(2) после введения обозначений $\rho^a = \sum_{b=1}^m R^{ab}(E) \frac{\partial E}{\partial y^b}$ принимают форму законов сохранения вида:

$$\sum_{a=1}^m \frac{\partial \rho^a}{\partial y^a} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\sum_{a=1}^m \rho^a U_\alpha^a \right) = 0.$$

Кроме этого (1)-(2) допускают и следующие законы сохранения:

$$\sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial}{\partial x^\alpha} A_\alpha^a(E) = \sum_{b=1}^m \frac{\partial}{\partial y^b} P^{ab}(E), \quad a = 1, \dots, m,$$

где $P^{ab}(E) = \int \sum_{\alpha=1}^n \frac{dA_\alpha^a}{dE} A_\alpha^b dE$. В работе рассматриваются различные типы уравнений,

соответствующие специальным выборам функций $A_\alpha^a(E)$ и матрицы \mathbf{R} .

Более подробно рассмотрены квазилинейные системы QL^{22} , QL^{31} и QL^{32} и связанные с ними уравнения второго порядка. Отдельно рассмотрено обобщение решений Риндлера-Пенроуза для уравнения Д'Аламбера в размерности 3+1 [3]. Так же рассмотрены общие решения уравнений Д'Аламбера и Лапласа в произвольной размерности. На основе работ [1,2] вводится понятие ривертонов и обсуждается их роль для различного типа нелинейных задач теоретической и математической физики.

[1] В.М.Журавлев. Многомерные нелинейные волновые уравнения с многозначными решениями. ТМФ, Т.174, N2, с. 236-246, 2013

[2] В.М. Журавлев. Многомерные нелинейные волновые уравнения и комплексные квазилинейные уравнения первого порядка. Пространство, время и фундаментальные взаимодействия, 2013, вып. 4. С. 56- 67

[3] R. Penrose, W. Rindler. Spinors and space-time. Spinor and twistor methods in space-time geometry. Cambridge University Press, 1986.

МЕХАНИЗМЫ УСИЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПРОЦЕССОВ ПРИ НИЗКИХ ЭНЕРГИЯХ

Самсоненко Н.В., Ндахайо Ф., Усман Манга А.

"MECHANISMS OF TRANSITION PROBABILITIES ENHANCEMENT IN LOW ENERGY PROCESSES"

Samsonenko N.V.¹⁾, Ndahayo F.²⁾, Ousmane Manga A.³⁾

¹⁾*Department of Theoretical Physics and Mechanics, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia*

²⁾*Department of Physics, University of Rwanda, Kigali, Rwanda*

³⁾*Department of Physics, Abdou Moumouni University, Niamey, Niger*
e-mail: nsamson@bk.ru

Все известные на сегодняшний день физические явления могут быть объяснены существованием 4-х фундаментальных типов взаимодействия элементарных частиц: сильного (СВ), электромагнитного (ЭМВ), слабого (СЛВ) и гравитационного (ГРВ). Принято считать, что их интенсивности (энергии взаимодействия) на расстояниях порядка размеров ядер ($r \sim 10^{-13}$ см) соотносятся следующим образом [1]:

$$СВ : ЭМВ : СЛВ : ГРВ \sim 1 : 10^{-2} : 10^{-5} : 10^{-38}. \quad (1)$$

В силу разной зависимости от расстояния (СВ и СЛВ являются короткодействующими, а ЭМВ и ГРВ - далекодействующими) обычно на ядерных расстояниях ($r \sim 10^{-13}$ см) учитываются только СВ и СЛВ, на расстояниях $r \sim 10^{-8} - 10^{-6}$ см - только ЭМВ, на больших расстояниях ($r \gg 10^{-6}$ см) учитывается только гравитационное взаимодействие (ГРВ). Возможно, все 4 типа взаимодействий являются проявлениями единого более фундаментального взаимодействия, теория которого до сих пор ещё не построена. К настоящему времени пока что удалось построить единую теорию электрослабого взаимодействия (модель Вайнберга - Салама - Глешоу). По этой причине при небольших энергиях взаимодействующих частиц ($E \ll 1 \text{ GeV}$) все 4 типа взаимодействий рассматриваются как совершенно независимые. В рамках квантовой теории поля это означает, что амплитуды взаимодействий всех 4-х типов не являются ортогональными. Следовательно, в силу квантового принципа суперпозиции (где складываются комплексные амплитуды, но не потенциалы взаимодействия и вероятности пропорциональны квадратам амплитуд) появляются интерференционные члены, **что приводит к усилению более слабых взаимодействий**. Поясним это на примере взаимодействия 2-х заряженных частиц (например, протонов):

$$p + p \rightarrow p' + p'. \quad (2)$$

Для большей наглядности перейдем от сравнения интенсивностей (энергий) взаимодействий к сравнению их вероятностей. Для этого введем безразмерные константы $\alpha_s, \alpha_w, \alpha_G$. Обычно они появляются автоматически при изучении связанных состояний частиц, процессов рассеяния и распада. Например, в случае электромагнитного взаимодействия в формулах совершенно естественным образом возникает безразмерный множитель $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$, называемый постоянной тонкой структуры. Этот множитель характеризует вероятность взаимодействия полей заряженных частиц (электронов, протонов) с полем фотонов.

Аналогичным образом можно ввести безразмерный множитель $\alpha_s = \frac{g_s^2}{\hbar c}$ и для сильного взаимодействия. Условно его можно назвать "константой" сильного взаимодействия, хотя он оказывается зависящим от расстояния. Далее мы положим $\alpha_s = 1$ для расстояний между протонами $r \sim 10^{-13}$ см. Аналогичным образом можем ввести [2] **безразмерные** константы слабого α_w и гравитационного α_G взаимодействий.

Очевидно, что в процессе (2) принимают участие все 4 типа взаимодействий **одновременно**, поэтому полный матричный элемент определяется формулой:

$$M_{tot} = \alpha_s M_s + \alpha M_{el} + \alpha_w M_w + \alpha_G M_G. (3)$$

Для оценки будем считать, что все матричные элементы (для расстояний $\sim 10^{-13}$ см) по порядку величины равны 1. В этом случае для отношения безразмерных констант получим формулу [2]:

$$\alpha_s : \alpha : \alpha_w : \alpha_G \sim 1 : 10^{-2} : 10^{-6} : 10^{-20}. (4)$$

Поскольку вероятности физических процессов в квантовой теории поля пропорциональны квадрату полного матричного элемента

$$W \sim |M|_{tot}^2 = M_{tot}^+ \cdot M_{tot}. (5)$$

из (3) получаем:

$$|M_{tot}|^2 = \alpha_s^2 |M_s|^2 + \alpha^2 |M_{el}|^2 + \alpha_w^2 |M_w|^2 + \alpha_G^2 |M_G|^2$$

+ интерференционные слагаемые.(6)

Для оценки относительных вкладов всех 4-х типов фундаментальных взаимодействий подставим сюда значения безразмерных констант из формулы (4). Получим общую формулу приближенно справедливую для расстояний порядка 10^{-13} см:

$$\begin{aligned} |M_{tot}|^2 = & |M_s|^2 + 10^{-4} |M_{el}|^2 + 10^{-12} |M_w|^2 + 10^{-40} |M_G|^2 \\ & + 10^{-2} (M_s^+ M_{el} + M_{el}^+ M_s) \\ & + 10^{-6} (M_s^+ M_w + M_w^+ M_s) \\ & + 10^{-8} (M_w^+ M_{el} + M_{el}^+ M_w) \\ & + 10^{-20} (M_s^+ M_G + M_G^+ M_s) \\ & + 10^{-22} (M_{el}^+ M_G + M_G^+ M_{el}) \\ & + 10^{-26} (M_w^+ M_G + M_G^+ M_w). \end{aligned} (7)$$

Даже если пренебречь гравитационным взаимодействием (что обычно и делается на малых расстояниях) и чистым слабым взаимодействием ($\sim 10^{-12} |M_w|^2$) в выражении для квадрата матричного элемента остаются интерференционные слагаемые, которые могут приводить к наблюдаемым эффектам, интенсивности которых намного выше (на порядки) чистого слабого взаимодействия, что для наблюдателя выглядит как усиление вероятностей взаимодействия частиц с неизветным (непонятым) механизмом.

Действительно, на эксперименте наблюдаются эффекты несохранения пространственной чётности в атомах, обусловленные интерференцией нейтральных слабых и электромагнитных токов протонов и электронов [3,4]. Аналогичные эффекты обусловленные интерференцией электромагнитного и слабого взаимодействий можно наблюдать и в процессе рассеяния электронов на протонах [5]:

$$e^- + p \rightarrow e'^- + p'. (8)$$

То есть, электроны дополнительно к электромагнитному будут ещё испытывать влияние слабого взаимодействия. В связи с изучением нами этого процесса [6] следует сделать важное

замечание. Если речь идёт только о наблюдении эффектов связанных с нарушением пространственной чётности (различные асимметрии, поляризационные эффекты и т.д.), то вклад чистого электромагнитного слагаемого, пропорционального $|M_{el}|^2$, строго равен нулю и главным слагаемым является **только** интерференционный член.

К оценкам, следующим из формулы (7) следует подходить с осторожностью, поскольку она приближенно справедлива только для расстояний $r \sim 10^{-13}$ см. На других масштабах в силу разной зависимости от расстояний и энергий, относительные вклады всех 4-х типов взаимодействий будут совершенно различны. Например, в феноменологической ток-токовой теории слабого взаимодействия "слабые" сечения рассеяния частиц растут с энергией квадратично (в системе центра масс), а "электромагнитные" сечения падают обратно пропорционально значениям энергии. Следовательно, если считать их независимыми, то при определенных энергиях вклад СЛВ может сравниться с вкладом ЭМВ, превысить его и даже может стремиться к бесконечности. В модели Вайнберга - Салама этот неконтролируемый рост СЛВ компенсируется вкладом соответствующих диаграмм электромагнитного взаимодействия. Именно в этом состоит главный смысл слов "Единая Теория".

В квантовой теории существуют и другие механизмы усиления вероятностей взаимодействия частиц:

1) Скорость перехода (вероятность перехода в единицу времени) пропорциональна скорости изменения квадрата амплитуды, которая в свою очередь пропорциональна скорости изменения потенциала взаимодействия :

$$\omega(t) \sim \frac{\partial}{\partial t} \int |A(\vec{k}, t)|^2 d^3k. (9)$$

Поэтому в квантовой теории сильно различаются переходы со "внезапным включением взаимодействия" и с "адиабатическим включением взаимодействия". Таким образом, увеличение вероятности перехода можно инициировать быстрым изменением во времени потенциала взаимодействия частиц [7].

2) Вероятность переходов обратно пропорциональна квадрату разности энергий начального и конечного состояний:

$$W \sim \frac{1}{(\Delta E)^2}. (10)$$

Таким образом, для близлежащих уровней (если таковые существуют) $\Delta E \rightarrow 0$ и вероятность перехода может быть очень велика.

3) В случае взаимодействия заряженных частиц потенциальный барьер может быть сильно понижен за счет существования новых связанных состояний (например, гидрино [8], "магнитных" атомов Барута - Вижье [9] и т.д.).

4) В случае отличия массы нейтрино от нуля сечения их взаимодействий с уменьшением энергии сильно возрастают ($\sigma \rightarrow \infty$ при $E_\nu \rightarrow 0$ [10]) в отличие от релятивистских нейтрино (для которых $\sigma \rightarrow \infty$ при $E_\nu \rightarrow \infty$). В обоих случаях неконтролируемый рост сечений обрезается формфакторами плотности распределения "слабого" заряда. Таким образом, нейтрино малых энергий (например, реликтовые нейтрино) могут вносить заметный вклад в наблюдаемые физические явления при малых энергиях.

Эти и другие механизмы усиления вероятностей процессов при низких энергиях будут рассмотрены в последующих наших работах.

Литература

1. Л. Б. Окунь. Слабое взаимодействие элементарных частиц. ГИФМЛ. Москва, 1963.
2. Д. Блан. Ядра, частицы, ядерные реакторы. М., Мир, 1989, 335с, стр.62.
3. Зельдович Я.Б., ЖЭТФ, 1959, Т.36, с.964.
4. Барков Л.М., Золотарев М.С., Хриплович И.Б. "Наблюдение несохранения четности в атомах". УФН, Т.132, 409 - 442 (1980).
5. Зельдович Я.Б., Переломов А.М., ЖЭТФ, Т.39, 4 (10),1115 (1960).
6. Керимов Б.К., Самсоненко Н.В. "Слабые нейтральные токи в процессе упругого рассеяния электронов на протонах". Известия АН СССР, сер.физ., Т.37, No1,32, 1973г.
7. Dougar Jabon V.D., Fedorovich G.V., Samsonenko N.V. "Catalitically Induced D-D Fusion in Ferroelectrics". Brazilian Journal of Physics, Vol. 27, No. 4, December 1997, pp.515-521.; http://en.wikipedia.org/wiki/pyroelectric_fusion.
8. Randell L. Mills. The Grand Unified Theory of Classical Physics. Blacklight Power. Inc.,2011.
9. Samsonenko N.V., Tahti D.V., Ndahayo F. "On the Barut - Vigier Model of the Hydrogen Atom". Phys. Lett. A220, 1996, pp: 297 - 301.
10. Самсоненко Н.В., Ндахайо Ф., Харелимана Э.. "Тензорный формализм описания процессов прямого и обратного β - распада, реакций рассеяния и захвата". Известия Академии наук. Т. 62, No 1, 1998. с. 12-20.

ОПИСАНИЕ БАРИОННОГО И ЛЕПТОННОГО СЕКТОРОВ В МОДЕЛИ СКИРМА-ФАДДЕЕВА

В.И.Молотков

аспирант кафедры теоретической физики и механики Российского университета дружбы народов,

адрес электронной почты molotvi@gmail.com

научный руководитель Рыбаков Ю.П. проф., д.ф.-м.н.

Введение

Модель Т.Х.Р. Скирма (1954г.) описывает внутреннюю структуру барионов и легких ядер, используя в качестве топологического заряда $Q = \deg(S^3 \rightarrow S^2)$ барионное число B . Оно служит генератором гомотопической группы $\pi_3(S^3) = \mathbb{Z}$. Аналогично модель Фаддеева (1972г.), описывающая лептоны, использует индекс Хопфа Q_H в качестве генератора гомотопической группы $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$.

Объединение этих двух подходов позволяет рассматривать лептоны и барионы как сектора в общей 8-спинорной модели. Для этого используется специальное 8-спинорное тождество Бриоски [1]:

$$j^\mu j_\mu - \tilde{j}^\mu \tilde{j}_\mu = s^2 + p^2 + \vec{v}^2 + \vec{a}^2.$$

В этом тождестве используются следующие квадратичные спинорные величины:

$$s = \bar{\psi}\psi, p = i\bar{\psi}\gamma_5\psi, \vec{v} = \bar{\psi}\lambda\psi, \vec{a} = i\bar{\psi}\gamma_5\lambda\psi, j_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi, \tilde{j}_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi,$$

где $\psi = \text{col}(\varphi, \chi, \xi, \theta)$ — 8 спинор, $\gamma_i = I_2 \otimes \sigma_i \otimes I_2$ — матрицы Дирака в представлении Вейля, $\lambda_i = \sigma_i \otimes I_4$.

В этом пространстве ищутся S^2 и S^3 многообразия, что соответствует лептонному и барионному сектору соответственно[2].

Группа $SU(2)$.

Описанию лептонов соответствует группа $SU(2)$. Для этого рассмотрим следующую группу симметрии:

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \theta \end{pmatrix},$$

которая сохраняет величину $s^2 + a_1^2 + a_3^2 \neq 0$. В результате получаем гомотопическую группу $\pi_3(S^2)$ генерирующая топологический заряд типа Хопфа:

$$s = 2(\xi^+\theta + \theta^+\xi)$$

$$a_1 = 2(\theta^+\theta - \xi^+\xi)$$

$$a_3 = -2i(\theta^+\xi - \xi^+\theta)$$

$$s^2 + a_1^2 + a_3^2 = 4(\theta^+\theta + \xi^+\xi)^2$$

Введем нормировочный вектор \tilde{A} со следующими компонентами:

$$\tilde{A}_1 = s = \frac{\xi^+\theta + \theta^+\xi}{\theta^+\theta + \xi^+\xi}$$

$$\tilde{A}_2 = a_1 = \frac{\theta^+\theta - \xi^+\xi}{\theta^+\theta + \xi^+\xi}$$

$$\tilde{A}_3 = a_3 = -i \frac{\theta^+\xi - \xi^+\theta}{\theta^+\theta + \xi^+\xi}$$

Для вектора \tilde{A} реализуется один вид киральных топологических солитонов в виде замкнутых "закрученных" струн с нетривиальным индексом Хопфа модели Фаддеева в (3+1) измерении. В силу нормированности его можно представить как отображение $\tilde{A}: S^3 \rightarrow S^2$. Соответственно, A -полевые конфигурации классифицируются элементами группы $\pi^3(S^2) = \mathbb{Z}$. Плотность лагранжиана модели имеет вид

$$\mathcal{L} = \lambda^2 (\partial_\mu \tilde{A}^i)^2 - \frac{\varepsilon^2}{4} f_{\mu\nu}^2 - m^2 (1 - \tilde{A}_3), \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3$$

где ε, λ, m - постоянные параметры.

$$f_{\mu\nu} = 2\varepsilon_{ijk} \partial_\mu \tilde{A}^i \partial_\nu \tilde{A}^j \tilde{A}^k \equiv \partial_\mu \mathfrak{K}_\nu - \partial_\nu \mathfrak{K}_\mu$$

Массовый член $m^2(1 - \tilde{A}_3)$ добавляется для обеспечения требуемого асимптотического поведения полей на бесконечности.

Топологический инвариант модели - индекс Хопфа Q_H , вычисляется по формуле

$$Q_H = -\frac{1}{(8\pi)^2} \int \mathfrak{K} \text{rot} \mathfrak{K} d^3x$$

и для энергии имеет место оценка

$$E > \varepsilon \lambda (4\pi)^2 \sqrt{23}^{3/8} |Q_H|^{3/4}$$

обеспечивающая стабильность неособых вихрей в рамках модели Фаддеева.

Группа $SU(3)$.

Для описания барионов рассмотрим следующую группу симметрии:

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^* \\ \theta^* \end{pmatrix},$$

которая образует гомотопическую группу $\pi_3(S^3)$, сохраняющую величину $s^2 + p^2 + a_1^2 + a_2^2 \neq 0$.

$$s = 2(\xi^+ \theta + \theta^+ \xi)$$

$$p = 2i(\xi^+ \theta - \theta^+ \xi)$$

$$a_1 = ((\theta^+)^2 + \theta^2 - (\xi^+)^2 - \xi^2)$$

$$a_2 = i((\theta^+)^2 - \theta^2 - (\xi^+)^2 + \xi^2)$$

$$s^2 + p^2 + a_1^2 + a_2^2 = 4((\theta^+ \theta + \xi^+ \xi)^2 - (\xi^+ \theta - \theta^+ \xi)^2)$$

Объединение двух секторов

Для объединения двух секторов [3], мы должны найти общее вакуумное состояние, которое сохраняет лишь одну компоненту в барионном и лептонном секторах. В качестве такой компоненты можно использовать скалярную величину s :

$$s = 2(\xi^+ \theta + \theta^+ \xi)$$

При $\xi = \theta = C, C \in \mathbb{C}$ сохраняется лишь одна компонента в каждом из секторов. В результате, для этих многообразий построено общее вакуумное состояние $\psi_V = \text{col}(iC, iC, C, C), C \in \mathbb{C}$.

Заключение

Подводя итог, приведём краткую формулировку полученных результатов:

- Исследована полевая модель восьмикомпонентных спиноров.
- В этой модели найдены S^2 и S^3 многообразия, которые могут служить для описания лептонов и барионов. Для них выведено условие на вакуум.

Автор благодарен научному руководителю профессору Ю. П. Рыбакову за постановку задачи и постоянную помощь при ее решении.

Литература.

1. Rybakov, Y.P. Topological solitons in 8-spinor Mie electrodynamics// (2013) Physics of Atomic Nuclei, 76 (10), pp. 1284-1288.
2. Молотков В.И. Структура нелинейной спинорной модели элементарных частиц. Физическое образование в вузах. 2014.
3. Молотков В.И. Рыбаков Ю.П. Описание барионного и лептонного секторов в 8-спинорной модели элементарных частиц. 2015.

**О ВЗАИМОСВЯЗИ КООРДИНАТНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ
ФУНКЦИИ ГРИНА
БЕЗМАССОВОЙ ЧАСТИЦЫ ДИРАКА И ЕЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФОЛДИ—
ВОУТХОУЗЕНА КАК ФУНКЦИОНАЛОВ**

А.А. Бейлинсон, Н. Гоним

Аннотация

Строится координатное представление унитарного оператора, осуществляющего построение запаздывающей функции Грина уравнения Дирака из его преобразования Фолди—Воутхоузена.

**«ON THE INTERCONNECTION BETWEEN THE COORDINATE REPRESENTATION OF
THE RETARDED GREEN FUNCTION OF A DIRAC MASSLESS PARTICLE AND ITS
FOLDY—WOUTHUYSEN REPRESENTATION AS FUNCTIONALS»**

A.A. Beilinson, N. Ghonim

*Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
e-mail: alal@m9com.ru, d.chrno@mail.ru*

Annotation

The coordinate representation of a unitary operator that builds the retarded Green's function of the Dirac equation by its Foldy-Wouthuysen representation is constructed.

В [2-4] построено импульсное представление фундаментального решения уравнения Дирака для безмассовой частицы через представление Фолди—Воутхоузена как аналитических функционалов на $Z^{(3)}$ (см. [1]). Это осуществляется с помощью унитарного (и эрмитового) оператора

$$\tilde{T}(p) = \frac{\gamma^0}{\sqrt{2}} ((\gamma, p_e) + I). \quad (1)$$

Так как в [2-4] уже построено координатное представление Фолди—Воутхоузена фундаментального решения такого уравнения Дирака

$$D_t^F(x) = \begin{pmatrix} C_{it}(x), & 0, & 0, & 0 \\ 0, & C_{it}(x), & 0, & 0 \\ 0, & 0, & C_{-it}(x), & 0 \\ 0, & 0, & 0, & C_{-it}(x) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

как функционала на финитных функциях $K^{(3)}$ (см. [1]), задача сводится к построению координатного представления $T(x)$ как функционала на финитных функциях, являющегося прообразом Фурье функционала (1).

Используя равенство Парсевала

$$\int T(x)\phi(x)dx = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \tilde{T}(p)\psi(p)dp, \quad (3)$$

(здесь $\phi(x) \in K^{(3)}$, $\psi(p) \in Z^{(3)}$), получаем

$$T(x) = \frac{\gamma^0}{\sqrt{2}} ((\gamma, x_e) + I)\delta(x). \quad (4)$$

Таким образом

$$D_t(x) = T(x) * D_t^F(x) * T(x), \quad (5)$$

где знак * – свертка обобщённых функций (см. [1]).

Легко получить, используя свойства гамма матриц Дирака, что

$$T(x) * T(x) = I\delta(x), \quad (6)$$

как и следовало ожидать.

Литература

- [1] Гельфанд, И.М. Обобщённые функции [Книга] / И.М. Гельфанд, Г.Е. Шиллов // М.: Физматгиз. — вып. 1: «Обобщённые функции и действия над ними». — изд. 2-е. — 1959. — 471 С.
- [2] Beilinson, A.A. Quantum mechanics of the free Dirac electrons and Einstein photons, and the Cauchy process [Article] / A.A. Beilinson // URL: <http://arXiv.org/abs/1412.1766> [math-ph] (submission date: 03.12.2014).
- [3] Бейлинсон, А.А. Материалы XLVII Всероссийской конференции по проблемам физики частиц, плазмы, конденсированных сред и оптоэлектроники / А.А. Бейлинсон // Москва: РУДН. — 2012. — С. 69–71.
- [4] Бесерра Бесерра, А.Р. Анализ фундаментального решения уравнения Дирака как обобщённой функции : дис. на соиск. учен. степ. канд. физ.-мат. наук : 01.04.02 / Бесерра Бесерра Ариэль Рей ; [Рос. ун-т дружбы народов] // М. — 2002. — 65 С. — Библиогр.: С. 63. : ил. РГБ ОД, 61 03-1/501-9.

АЛГЕБРА КВАТЕРНИОНОВ ДЛЯ МЕХАНИКИ ТЕЛ В ВИБРИРУЮЩИХ СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА

Т.Ф. Камалов

*Московский физико-технический институт, Москва, Россия
e-mail: timkamalov@gmail.com*

QUATERNION ALGEBRA FOR THE MECHANICS OF BODIES IN THE VIBRATING REFERENCE FRAMES

T.F. Kamalov

Abstract

Quaternion algebra is used for the classical kinematics and dynamics of bodies in the vibrating (shaking) reference frames. It is difficult to find an ideal inertial reference frame in reality due the weak external influences such as gravity fields and waves.

Предлагается использовать алгебру кватернионов для классической кинематики и динамики тел в вибрирующих (дрожящих) системах отсчета. В реальности найти инерциальную систему отсчета трудно вследствие присутствия малых влияний, как, например гравитационные возмущения.

Для такого описания это движение z разбивается на две части. Поступательное движение будем описывать действительной частью от z , т.е. $\Delta\vec{r}$, а вращательное движение комплексной частью z , т.е. $\Delta\vec{\varphi}$.

Вектор перемещения $\Delta\vec{r}$ характеризует изменение положения тела в $V(F)$ векторном пространстве R^n относительно выбранной системы отсчёта.

Угловое перемещение $\Delta\vec{\varphi}$ – это вектор в $V(F)$ векторном пространстве R^n , характеризующий изменение угловой координаты φ тела. Этот вектор ортогонален плоскости вращения.

Операции с $\Delta\vec{r}$ и $\Delta\vec{\varphi}$ часто ведут неоправданно сложным конструкциям, которые можно упростить. Для этого будем описывать положение тела в пространстве комплексным вектором, где вектор \vec{r} означает радиальное перемещение, а аксиальное перемещение задается вектором $\Delta\vec{\varphi}$. Тогда произвольное перемещение может быть записано как комплексный вектор перемещения

$$z = \vec{r} + i\lambda\vec{\varphi}, \quad (1)$$

где λ - действительный коэффициент размерности длины. Удобно выбрать $\lambda = \sqrt{\frac{J}{m}}$, где J - момент инерции тела, а m - масса тела.

Комплексный вектор скорости перемещения $\dot{z} = \dot{\vec{r}} + i\lambda\dot{\vec{\varphi}}$.

Тогда энергия тела запишется в виде

$$E = \frac{1}{2} m \dot{z}^* \dot{z} = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + \dot{\varphi}^2 \lambda^2) \quad (2)$$

Вибрирующими системами отсчета будем называть такие, координаты z которых являются гладкими дифференцируемыми функциями от времени в результате различных случайных малых влияний, превращающих систему отсчета в случайно вибрирующую (дрожашую) систему отсчета

$$\begin{aligned} z &= z(t) \\ \langle z(t) \rangle &= z_m. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\langle z(t) \rangle$ - среднее значение комплексной координаты, соответствует инерциальной системе отсчета.

$$z(t) = \frac{1}{T} \int_0^T z(t + \tau) d\tau \quad (4)$$

Рассматривая координату свободной пробной частицы и разлагая в ряд Тейлора функцию $z(t)$ запишем

$$z(t) = z_0(t) + \dot{z}(t)\tau + \frac{1}{2!} \ddot{z}\tau^2 + \frac{1}{3!} \dddot{z}\tau^3 + \dots$$

Кинематика пробной частицы в инерциальной системе отсчета с координатой z_I , комплексной скоростью \dot{z}_I и комплексным ускорением \ddot{z}_I определяется формулой

$$z_I = z_0 + \dot{z}\tau + \frac{1}{2} \ddot{z}\tau^2.$$

Тогда координата частицы в вибрирующей (дрожашей) системе отсчета по сравнению с координатой частицы в инерциальной системе отсчета определится формулой

$$z = z_I + \Delta z,$$

где Δz выражает неопределенность координаты свободной пробной частицы в дрожащей системе отсчета.

Тогда в вибрирующих (дрожаших) системах отсчета динамика частицы для функции $F = -\frac{\partial U}{\partial z}$ описывается уравнением, представляющим собой разновидность пролонгированного уравнения Ньютона для случая, когда ускорение – функция, зависящая от времени $a = a(t)$

$$F(z, \dot{z}, \ddot{z}, \ddot{\ddot{z}}, \dots, \dot{z}^{(k)}) = \dot{p}(t) + \frac{1}{2!} \dot{p}^{(3)}(t)\tau^3 + \frac{1}{4!} \dot{p}^{(5)}(t)\tau^4 + \dots$$

При усреднении по времени (4) получаем второй закон Ньютона. Из этого уравнения следует, что свободная частица в дрожащей системе отсчета сохраняет такую свою производную координаты по времени, которая определяется отличными от нуля кинематическими характеристиками системы отсчета.

Используя разложение

$$p(t \pm \Delta t) = p(t) \pm \dot{p}(t)\tau + \frac{1}{2!}\ddot{p}(t)\tau^2 + \dots + \frac{1}{n!}(\pm 1)^n \dot{p}^{(n)}(t)\tau^n + \dots$$

и усредняя по времени, получаем

$$\left\langle -\frac{\partial U}{\partial z} \right\rangle = \frac{d}{dt} \frac{[p(t+\tau) + p(t-\tau)]}{2}$$

$$\langle F(z, \dot{z}, \ddot{z}, \ddot{\ddot{z}}, \dots) \rangle = \dot{p}(t) + \frac{1}{2!}\ddot{p}(t)\tau^2 + \frac{1}{4!}\dot{p}^{(5)}(t)\tau^4 + \dots$$

Здесь третью производную можно называть комплексным рывком (complex jerk), который характеризует скорость изменения ускорения (вестибулярный аппарат человека чувствителен к рывку)

$$j = \frac{d\ddot{z}}{dt} = \frac{d^3 z}{dt^3} = \dot{z}^{(3)}.$$

Четвертую производную можно называть комплексным ударом (complex strike)

$$s = \frac{dj}{dt} = \frac{d^4 z}{dt^4} = \dot{z}^{(4)}.$$

В нашем случае функция Лагранжа имеет вид функции на пространстве бесконечных джетов (jets)

$$L = L(z, \dot{z}, \ddot{z}, \ddot{\ddot{z}}, \dots).$$

Применив принцип наименьшего действия $\delta S = 0$, получим обобщенное уравнение Эйлера – Лагранжа

$$\delta S = \delta \int L(z, \dot{z}, \ddot{z}, \ddot{\ddot{z}}, \dots) dt = \int \sum_{n=0}^N (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}^{(n)}} \delta \dot{z}^{(n)} dt = 0$$

т.е.

$$\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}^{(2)}} - \dots + \frac{d^N}{dt^N} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}^{(N)}} + \dots = 0.$$

Неопределенность функции действия частицы в дрожащей системе отсчета равна норме

$$\inf |S(z, \dot{z}, \ddot{z}, \ddot{\ddot{z}}, \dots, \dot{z}^{(n)}, \dots) - S_m(z, \dot{z})| = h.$$

Для дисперсии можно записать

$$\left\langle \sqrt{S^2(z, \dot{z}, \ddot{z}, \ddot{\ddot{z}}, \dots, \dot{z}^{(n)}, \dots) - S_{in}^2(z, \dot{z})} \right\rangle = h$$

Для $S(z, \dot{z}, \ddot{z}, \ddot{\ddot{z}}, \dots, \dot{z}^{(n)}, \dots)$ введем обозначения

$$p_z = \frac{\partial S}{\partial z}, p_{\dot{z}} = \frac{\partial S}{\partial \dot{z}}, p_{\ddot{z}} = \frac{\partial S}{\partial \ddot{z}}, p_{\ddot{\ddot{z}}} = \frac{\partial S}{\partial \ddot{\ddot{z}}}, \dots$$

Тогда для уравнения Якоби-Гамильтона в вибрирующей системе отсчета

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(z, \dot{z}, \ddot{z}, \ddot{\ddot{z}}, \dots, \dot{z}^{(n)}, \dots, \frac{\partial S}{\partial z}, \frac{\partial S}{\partial \dot{z}}, \frac{\partial S}{\partial \ddot{z}}, \frac{\partial S}{\partial \ddot{\ddot{z}}}, \dots) = 0$$

можно записать

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}\dot{z}^2 + \frac{1}{2}\ddot{z}^2 + \dots + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial \dot{z}}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial \ddot{z}}\right)^2 + \dots = 0,$$

или

$$\left[\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right] + \left[\frac{1}{2}\dot{z}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial \dot{z}}\right)^2\right] + \left[\frac{1}{2}\ddot{z}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial \ddot{z}}\right)^2\right] + \dots = 0$$

Все уравнения классической механики в дрожащих системах отсчета приобретают дополнительные слагаемые в виде высших производных координаты по времени. Например, уравнение Якоби-Гамильтона приобретает дополнительное слагаемое

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V + Q,$$

где усредняя по высшим производным $\langle Q \rangle = \left\langle Q(\ddot{z}, \ddot{\ddot{z}}, \dots, \dot{z}^{(k)}, \dots) \right\rangle_{jet} = Q(z_{in}) = 0$.

Тогда

$$\psi = \psi_0 \exp(-iS(z, \dot{z}, \ddot{z}, \ddot{\ddot{z}}, \dots, \dot{z}^{(n)}, \dots)/\hbar) = \psi_0 \exp(-iS(z)) \exp(-iS(\dot{z})) \exp(-iS(\ddot{z})) \exp(-iS(\ddot{\ddot{z}})) \dots$$

или

$$\psi = \prod_{k=1}^{\infty} \exp(-iS(\dot{z}^{(k)}))$$

Подстановкой в квантово-механическое уравнение Шредингера можно получить уравнение Якоби-Гамильтона с дополнительным членом Q , именуемым квантовым потенциалом Бома. Поэтому стохастическая механика позволяет интерпретировать квантовый потенциал как проявление неопределенностей в вибрирующих системах отсчета. При этом классическая механика получается в пределе, когда мы пренебрегаем физически неизбежной вибрацией систем отсчета вследствие воздействий случайных гравитационных полей и волн. Соответственно потенциал Бома может быть интерпретирован как вклад высших производных.

НОВЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ

М.А. Бадин.

*Кафедра теоретической физики и механики, Российский Университет
Дружбы Народов, Москва, Россия*

"NEW METHODS FOR CALCULATING MATRIX ELEMENTS IN QUANTUM THEORY"

M.A. Badin.

*Department of Theoretical Physics and Mechanics, Peoples' Friendship University of Russia,
Moscow, Russia
e-mail: badin92@mail.ru*

Abstract

Various methods for calculating matrix elements in quantum theory are discussed. It is shown, that sometimes the use of isotropic vectors ($\vec{F} = \vec{E} + i\vec{H}$, $\vec{F}^2 = 0$, $|\vec{F}|^2 \neq 0$) gives the possibility to simplify the calculation.

Вероятности процессов рассеяния частиц, их захвата и распада, а так же вероятности переходов между разными состояниями связанных систем частиц (ядра, атомы, молекулы) пропорциональны квадратам модулей матричных элементов:

$$\omega \sim |M|^2 = M^+ M.$$

Обычно матричный элемент содержит большое число γ - матриц и различных векторов состояний (скаляры, тензоры, спиноры, изотропные вектора, кватернионы, октанионы и т. д.), но после проведения алгебраических операций, перемножения векторов и матриц, а так же после операций дифференцирования, интегрирования и суммирования он представляет собой комплексное число вида:

$$M = a + ib.$$

Зная действительную «а» и мнимую «b» части комплексного числа M получаем:

$$|M|^2 = M^+ M = a^2 + b^2.$$

Однако не всегда на практике этот прямой метод является самым удобным. Тем более, что придется использовать явный вид γ - матриц векторов состояний (который зависит не только от представления, но и от выбора сигнатуры). Поэтому чаще всего используют метод сведения процедуры вычисления квадрата модуля матричного элемента к нахождению шпуров(следов) некоторой матрицы

$$|M|^2 = Sp Q_{\mu\nu} \equiv Q_{\mu\mu},$$

поскольку $\text{Spur} (T_{\text{trace}})$ является инвариантом при унитарных преобразованиях и поэтому не зависит от выбора представления (матриц, векторов состояний и т. д.).

С нашей точки зрения методов вычисления самих матричных элементов и квадратов их модулей может быть очень много. Ограничиваясь выбором в качестве векторов состояния лишь тензорами, спинорами и изотропными векторами мы можем проиллюстрировать разнообразие различных методов с помощью схемы, приведенной на рис. 1.

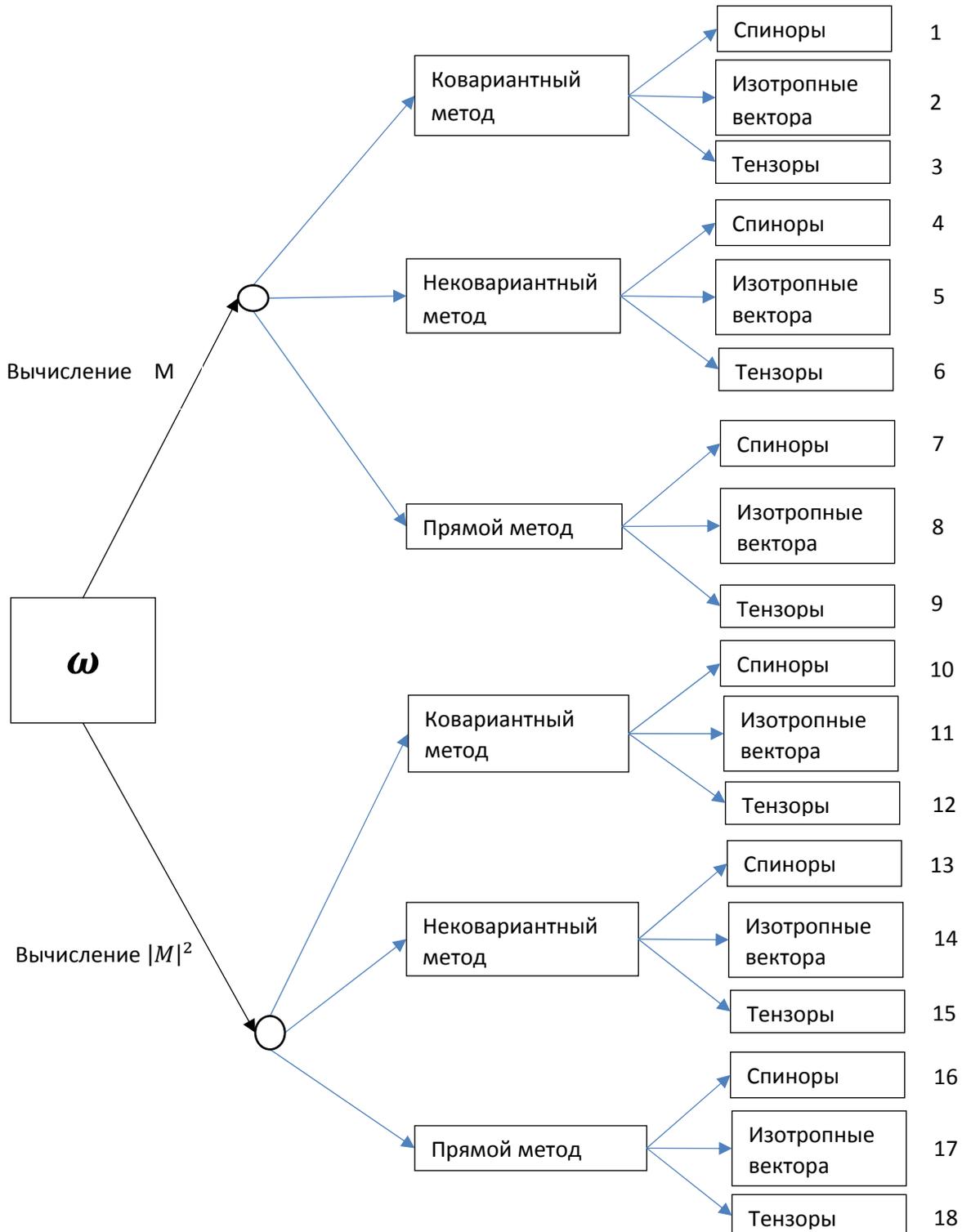


Рисунок 1

Из таблицы(рис.1) видно, что даже в этом простом случае для вычисления $|M|^2$ можно использовать 18 разных методов. Наиболее известными из них являются два метода:

1.Ковариантное вычисление $|M|^2$ (№10 и №12 на рис.1)[1].

2.Нековариантный метод вычисления $|M|^2$ (используется редко, №13 и №15 на рис.1).[2,3]

Еще реже используется метод Федорова (№1 и №3 на рис.1) [4,5] , основанный на применении комплексной параметризации группы Лоренца $\hat{L} = \hat{a} + i\hat{b}$ для ковариантного вычисления M , а затем вычисления $|M|^2 = M^+M$.

Конкретные вычисления показывают, что в случае процессов с участием поляризованных структурных частиц удобным оказывается метод, основанный на использовании изотропных векторов в качестве векторов состояний[6].

Литература

1. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. ГИФМЛ.М.1976.
- 2.Самсоненко Н.В. Эффекты формфакторов, поляризации и интерференции в полуплептонных процессах с участием заряженных и нейтральных токов. Диссертация на соискание ученой степени к.ф.м.н. РУДН. М.1973.
- 3.Соколов А.А. Введение в квантовую электродинамику. ГИФМЛ. М.1958.
4. Федоров Ф.И. Ковариантное вычисление матричных элементов. Изв.ВУЗов, физика №2. С32-45..1980.
5. Федоров Ф.И. Проективные операторы в теории элементарных частиц. ЖЭТФ.Т.35. С.493-500.1959.
- 6.Буликунзира С. Тензорный формализм описания фермионов и новый метод вычисления матричных элементов. Диссертация на соискание ученой степени к.ф.м.н. РУДН. М.1994.

К ТЕОРИИ ДВОЙНОГО РЕШЕНИЯ ДЕ БРОЙЛЯ

Сёмин М. В.¹⁾, Шутемова А. А.²⁾

¹⁾Российский университет дружбы народов, кафедра теоретической физики и механики, Москва, Россия

²⁾Российский университет дружбы народов, Учебно-научный институт гравитации и космологии, Москва, Россия

“ON THE DE BROGLIE DOUBLE SOLUTION THEORY”

Siomin M. V.¹⁾, Shutyomova A. A.²⁾

¹⁾Department of Theoretical Physics and Mechanics, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia

²⁾Academic-research Institute of Cosmology and Gravitation, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia

e-mail: siominmw2006@rambler.ru

Abstract

The basic concepts of the de Broglie double solution theory are presented. It is shown that the complex isotropic vectors $\vec{F} = \vec{E} + i\vec{H}$ ($\vec{F}^2 = 0, |\vec{F}|^2 \neq 0$) which satisfy the Reifler non-linear Maxwell-like equations for the Weyl neutrino can be understood within the framework of this double solution approach.

Аннотация

Излагаются основные положения теории двойного решения де Бройля. Показано, что комплексные изотропные вектора $\vec{F} = \vec{E} + i\vec{H}$ ($\vec{F}^2 = 0, |\vec{F}|^2 \neq 0$), удовлетворяющие нелинейным максвелоподобным уравнениям Рейфлера, можно интерпретировать в духе теории двойного решения.

Для наглядной иллюстрации сосуществования волны и частицы де Бройль предположил [1], что физическая волна $u(\vec{r}, t)$ (в отличие от фиктивной статистической волны $\psi(\vec{r}, t)$ в общепринятой квантовой механике) может быть представлена в виде суперпозиции двух физических волн:

$$u(\vec{r}, t) = u_0(\vec{r}, t) + \vartheta(\vec{r}, t). \quad (1)$$

Здесь $u_0(\vec{r}, t)$ представляет собой сильно локализованную (сингулярную) область волны с очень высокой концентрацией энергии, то есть, корпускулу, встроенную в волну.

Физическая волна $\vartheta(\vec{r}, t)$ во всей области распространения имеет очень малую амплитуду, которую можно связать с нефизической волной ψ помощью введения произвольного множителя C :

$$\psi(\vec{r}, t) = C \cdot \vartheta(\vec{r}, t) = C a(\vec{r}, t) e^{i\vec{k}\varphi(\vec{r}, t)}, \quad (2)$$

$$\int |\psi(\vec{r}, t)|^2 dV = |C|^2 \int |a(\vec{r}, t)|^2 dV = 1. \quad (3)$$

Предполагая, что $\psi(\vec{r}, t)$ (следовательно, и $\vartheta(\vec{r}, t)$) в силу уравнения (3) удовлетворяет уравнению Шрёдингера, де Бройль получает два уравнения:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - U - \frac{1}{2m} (\overrightarrow{\text{grad}} \varphi)^2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta a}{a}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} - \frac{1}{m} \text{div}(a^2 \overrightarrow{\text{grad}} \varphi) = 0. \quad (5)$$

Уравнение (4) называется «обобщенным уравнением Якоби», а уравнение (5) – «уравнением непрерывности».

Уравнение (4) отличается от классического уравнения Якоби лишь наличием в правой части квантового потенциала $U_{Quant.} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta a}{a}$. В классической механике

$$\vec{p} = m\vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}} \varphi. \quad (6)$$

Отсюда следует формула ведения частицы

$$\vec{v} = -\frac{1}{m} \overrightarrow{\text{grad}} \varphi. \quad (7)$$

Эта формула легко обобщается на релятивистский случай скалярной частицы (спин $s = 0$), движущейся во внешнем электромагнитном поле:

$$\vec{v} = -c^2 \frac{\overrightarrow{\text{grad}} \varphi + \varepsilon \vec{A}}{\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon V}. \quad (8)$$

Полезным (особенно в релятивистском случае) является введение собственной переменной массы

$$M_0 = \sqrt{m_0^2 + \frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\square a}{a}}. \quad (9)$$

Заметим, что для плоской волны (свободная частица) квантовый потенциал равняется нулю ($U_{Quant.} = 0$) и переменная собственная масса совпадает с массой покоя частицы ($M_0 = m_0$). В общем случае можно обнулить и M_0 , предположив, что амплитуда $a(\vec{r}, t)$ удовлетворяет релятивистскому волновому уравнению Клейна-Гордона с отрицательным квадратом массы (тахiony). В обычной квантовой механике амплитуда волновой функции считается нормировочной константой ($\psi = A \varphi(\vec{r}, t)$, $A = const$) и такая возможность отсутствует.

В нашей работе для описания релятивистской частицы со спином $\frac{1}{2}$ и массой $m_0 = 0$ (нейтрино) используются нелинейные максвелоподобные уравнения Рейфлера[2]

$$\text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \vartheta_k (\vec{\nabla} E_k), \quad (10)$$

$$\text{rot } \vec{H} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\vartheta_k (\vec{\nabla} H_k), \quad (11)$$

полученные из двухкомпонентного спинорного уравнения Вейля для безмассового нейтрино

$$i \frac{\partial \psi_L}{\partial t} = (\hat{p} \cdot \vec{\sigma}) \psi_L, \quad \psi_L = \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \psi. \quad (12)$$

В уравнениях (10) и (11) величина $\vartheta_k = \frac{[\vec{E} \times \vec{H}]}{|\vec{E}|^2}$ является единичным трёхмерным вектором, направленным вдоль вектора Пойнтинга. Эти уравнения можно записать в виде одного уравнения для комплексного изотропного вектора $\vec{F} = \vec{E} + i\vec{H}$ ($\vec{F}^2 = 0, |\vec{F}|^2 \neq 0$), который можно рассматривать как волновую функцию, так как величина $|\vec{F}|^2 = \vec{F}^* \vec{F} = \vec{E}^2 + \vec{H}^2$ является плотностью энергии

$$\int \vec{F}^* \vec{F} dV = \int (\vec{E}^2 + \vec{H}^2) dV = \varepsilon. \quad (13)$$

После нормировки на полную энергию ε (деление обеих частей выражения (13) на константу ε) подынтегральное выражение можно интерпретировать как плотность вероятности

$$\int \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \vec{F}^* \right) \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \vec{F} \right) dV = 1. \quad (14)$$

В соответствии с формулой (3) отнормированная величина $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \vec{F}$ может рассматриваться как статистическая волновая функция частицы.

Литература

- [1]. Луи де Бройль. Реинтерпретация волновой механики. Избранные научные труды. Том 4, с. 111-210. М., Принт – Ателье, 2014.
- [2]. Самсоненко Н. В. Ндахайо Ф., Харелимана Э. Тензорный формализм описания процессов обратного и прямого β - распада, реакций рассеяния и захвата. Известия АН СССР, сер. физ., Т. 62, №1, с. 12-20, 1998.

ANALYTICAL INVESTIGATION OF THE SATELLITE RESONANT MOTION

Kostadin Sheiretsky¹⁾, Nikolay Erokhin^{2,3)}, Rumen Shkevov⁴⁾

¹⁾ *University of National and World Economy, Sofia, Bulgaria*

²⁾ *Russian University of People Friendship, Moscow, Russia*

³⁾ *Space Research Institute of RAS, Moscow, Russia*

⁴⁾ *Space Research and Technology Institute of BAS, Sofia, Bulgaria*

e-mail: nerokhin@iki.rssi.ru

Abstract

The study of resonant dynamic systems is relevant for the selection of stable resonant trajectories of artificial satellites. The main synchronous resonance of satellite motion in the equatorial plane of planet is investigated. The asymptotic method of Krylov-Bogolyubov-Mitropolsky was used for stationary points determination, which are subsequently investigated for linear stability.

Introduction

The study of resonant motion of the satellites is essential for describing the motions of celestial bodies in the solar system. The motions of most of the planets, as well as their satellites, are in resonance ratios, and they are directly related to the stability of the Solar System. It is known that the final stage of the long term dynamic evolution of the satellite motion represents a plane motion of the satellite in synchronous resonance between the orbital motion and the motion around the center of the mass, while the axis of rotation (oscillation) coincides with the axis of the maximal momentum of the satellite [1].

Mathematical model

Let define the position of the mass center of the satellite O' using polar coordinates R , φ , where the center of the coordinate system O coincides with the center of the planet, and let mark the position of one of the central axes of momentum of the satellite towards the radius vector with an angle Θ (Fig. 1). The Euler differential equation for center of mass motion in the case of equatorial orbit is [2]:

$$B \frac{d}{dt} (\dot{\Theta} + \dot{\varphi}) + \frac{\mu}{R^3} (A - C) \left[3 + 5 \frac{3\alpha}{kR^2} \right] \sin \Theta \cos \Theta = 0. \quad (1)$$

The derivatives of the time variables are marked with the points, A , B , C - main satellite momentums, where $\alpha = \varepsilon M R_e^2 \mu / 3$, R_e is the equatorial radius of the planet, $\varepsilon = [(R_e - R_p) / 3] - (\omega_p^2 R_e / g_e)$, R_p - polar radius of the planet, ω_p - angular velocity of the rotation of the planet, g_e - planet acceleration on the equator, $\mu = \gamma (M + m)$. We choose an approximation accurate to the second-degree of the equation (1) [3], [4]:

$$n_0(1 + e n_0 \cos \nu) \Theta'' - 2e n_0^2 \sin \nu \Theta' + \frac{(A - C)}{2B} \left[3 + \frac{5(1 - n_0^2)}{2n_0^2} (1 + n_0 e \cos \nu)^2 \right] \sin 2\Theta = 2e n_0 \sin \nu \quad (2),$$

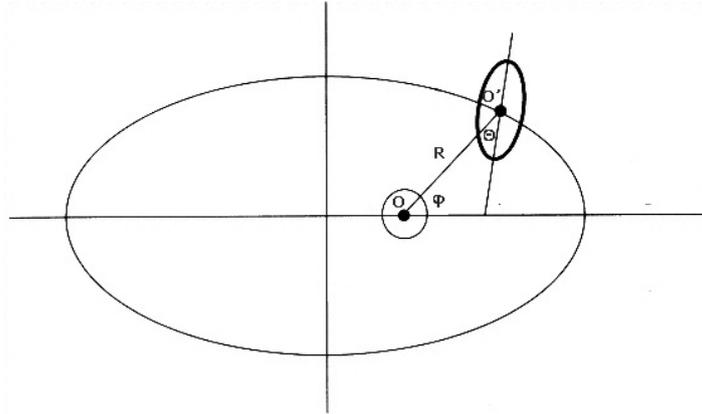


Fig.1. Scheme with the designated polar coordinates used for analysis.

where $n_0 = [1 - (6\alpha / k P^2)]^{1/2}$. The derivative by angle $\nu = n_0 \varphi$ is marked with a single quote.

Study of the main resonance

We examine the behavior of the dynamical system in main resonance. In the equation we formulate the following assumptions (2):

$$\bar{e} = n_0 e, \quad 2\Theta = \delta. \quad (3)$$

An expression is obtained, whose consideration is limited to small in absolute value, values of δ compared to 1. The task is solved for an eccentricity not higher than the first degree

$$\delta'' + \varpi_f^2 \delta = \bar{e} \left(\frac{4}{n_0} \sin \nu + 2 \sin \nu \delta' + \varpi_f^2 \cos \nu \delta + a_1 \delta^3 \right), \quad (4)$$

$$\text{where } a_1 = \frac{\varpi_f^2}{6\bar{e}}, \quad \varpi_f^2 = \frac{(A-C)}{Bn_0} \left[3 + \frac{5(1-n_0^2)}{2n_0^2} \right].$$

We examining the resulting equation (4) using the asymptotic method of Krylov-Bogolyubov-Mitropolsky for values of $\omega_f \approx 1$. According to [5] we are looking for a solution in the form of

$$\delta = X \cos Y, \quad \delta' = -\varpi_f X \sin Y. \quad (5)$$

We substitute the equation (4) with the system

$$\begin{aligned} \frac{dX}{d\tau} &= -\frac{\bar{e}}{\varpi_f} \left(\frac{4}{n_0} \sin \nu - 2 \sin \nu \sin Y \varpi_f X + \cos \nu \cos Y \varpi_f^2 X + a_1 X^3 \cos^3 Y \right) \sin Y, \\ \frac{dY}{d\tau} &= \varpi_f - \frac{\bar{e}}{\varpi_f X} \left(\frac{4}{n_0} \sin \nu - 2 \sin \nu \sin Y \varpi_f X + \cos \nu \cos Y \varpi_f^2 X + a_1 X^3 \cos^3 Y \right) \cos Y, \end{aligned} \quad (6)$$

where $dv / dt = 1$. Let $\varpi_f^2 = 1 + \bar{e}h$, $Y = \nu + Z$, where h is a deviation – a small number, compared to 1. In this case the system (6) is converted into the system

$$\frac{dX}{d\tau} = -\frac{\bar{e}}{\varpi_f} \left(\frac{4}{n_0} \sin \nu - 2 \sin \nu \sin(\nu+Z) \varpi_f X + \cos \nu \cos(\nu+Z) \varpi_f^2 X + a_1 X^3 \cos^3(\nu+Z) \right) \sin(\nu+Z),$$

$$\frac{dZ}{d\tau} = -\frac{\bar{e}}{\varpi_f X} \left(\frac{4}{n_0} \sin \nu - 2 \sin \nu \sin(\nu+Z) \varpi_f X + \cos \nu \cos(\nu+Z) \varpi_f^2 X + a_1 X^3 \cos^3(\nu+Z) \right) \cos(\nu+Z) + eh. \quad (7)$$

We transform the system (7) and average the right side of the equations. After averaging the right side of the equations and taking into account that for exact resonance, the condition $h = 0$ should be accomplished, we obtain the following equations

$$\frac{dX}{d\tau} = -\frac{2\bar{e}}{\varpi_f n_0} \cos Z, \quad \frac{dz}{d\tau} = -\frac{\bar{e}}{\varpi_f X} \left(-\frac{2 \sin Z}{n_0} + \frac{3}{8} a_1 X^3 \right). \quad (8)$$

$$Z_{01} = \frac{\pi}{2}, \quad X_{01} = 2 \left(\sqrt[3]{\frac{2}{3a_1 n_0}} \right), \quad Z_{02} = -\frac{\pi}{2}, \quad X_{02} = -2 \left(\sqrt[3]{\frac{2}{3a_1 n_0}} \right). \quad (9)$$

We define the parameters:

$$a_{11} = 0, \quad a_{12} = \frac{2\bar{e}}{\varpi_f n_0} \sin Z_{0i}, \quad a_{21} = -\frac{9\bar{e}X_{0i}a_1}{8\varpi_f}, \quad a_{22} = \frac{\bar{e}}{\varpi_f n_0 X_0} \cos Z_{0i}, \quad i = 1, 2;$$

$$K = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad \Lambda = a_{11} + a_{22}.$$

The stationary points are of the center type [6]:

$$K(Z_{01}, X_{01}) = \frac{9}{2} \frac{\bar{e}^2 a_1}{\varpi_f^2 n_0} \sqrt[3]{\frac{2}{3a_1 n_0}} > 0, \quad \Lambda(Z_{01}, X_{01}) = 0;$$

$$K(Z_{02}, X_{02}) = \frac{9}{2} \frac{\bar{e}^2 a_1}{\varpi_f^2 n_0} \sqrt[3]{\frac{2}{3a_1 n_0}} > 0, \quad \Lambda(Z_{02}, X_{02}) = 0. \quad (10)$$

Conclusion

Dynamic equations describing a motion around the center of mass of a satellite, in the central field of a planet with flattened at the poles shape, are analyzed by means of an asymptotic method. Stationary points for the case of main resonance are determined and studied for linear stability, and it was found that they are of center type.

References:

- [1]. V.V. Beletsky and A.A. Khentov. *Resonant Rotational Motions of Celestial Bodies*, Nizhegorod. Gumanit. Tsentr, Nizhnii Novgorod, 1995.
- [2]. V.V. Beletsky. *Motion of an Artificial Satellite about its Center of Mass*. Nauka, M., 1965.
- [3]. K. Sheiretsky, D. Gotchev, P.Trenchev. Nonlinear phenomena in the fluctuation of equatorial satellites. *Proceedings of Sixth Scientific Conference with International Participation SES 2010*. 2011, Sofia, Bulgaria, p.97-100.
- [4]. K. Sheyretski, M. Lazarova, R.Shkevov, N. Erokhin. Satellite dynamics in planetary equatorial plane. *Proceedings of Seventh Scientific Conference with International Participation SES 2011, 2012*, Sofia, Bulgaria, p.92-98.
- [5]. N.N. Moiseev. *Asymptotic Methods of Nonlinear Mechanics* (in Russian), Nauka, Moscow, 1969.
- [6]. D.V. Merkin. *Introduction to the Theory of the Stability of Motion* (in Russian), Nauka, Moscow, 1987.

УПРАВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ В ПРИСУТСТВИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Ананьевский И.М., Ииханян Т. А.

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем
механики им. А. Ю. Ишлинского Российской академии наук,
Московский физико-технический институт (государственный университет),
Москва, Россия

CONTROL OF THE ELECTROMECHANICAL SYSTEM IN THE PRESENCE OF PERTURBATIONS

We consider the electromechanical system consisting of two solid bodies connected by a motor. Both bodies rotate about a common axis. This system is a simplified model of the precision turntable mounted to the orbiting spacecraft and designed to reduce the apparent acceleration of the container with a payload. The control law is proposed, which, for sufficiently small friction and disturbances, in a finite time interval provides a predetermined motion of the second body relative to the first one.

Рассматривается электромеханическая система, состоящая из двух твердых тел, соединенных электродвигателем. Оба тела могут вращаться вокруг общей оси. Такая система представляет собой упрощенную модель прецизионной поворотной платформы, устанавливаемой на орбитальном космическом аппарате и предназначенной для снижения кажущегося ускорения контейнера с полезной нагрузкой, закрепленного на платформе.

Динамика системы в безразмерных переменных описывается уравнением

$$\ddot{\varphi} + \dot{\varphi} = u - \ddot{\psi}(t) + M(t, \varphi, \dot{\varphi}). \quad (1)$$

Здесь φ – угол поворота второго тела относительно первого, ψ – угол поворота первого тела относительно неподвижной системы отсчета, u – генерируемый электродвигателем момент сил, приложенный ко второму телу со стороны первого, M – неизвестный момент сил трения, действующий между первым и вторым телами.

Задача 1. Выбрать управление u так, чтобы при любых достаточно малых $\ddot{\psi}(t)$ и M после конечного переходного процесса выполнялось равенство

$$\varphi(t) \equiv \Phi_0(t). \quad (2)$$

Равенство (2) означает, что через конечный промежуток времени второе тело будет двигаться относительно первого по заданному закону. Предполагается, что в начальный момент система находится недалеко от целевой траектории, что величины $\varphi(t)$ и $\dot{\varphi}(t)$ измеряются точно, а функция $\Phi_0(t)$ известна.

Положим $z_1 = \dot{\varphi} - \dot{\Phi}_0(t)$, $z_2 = -\varphi + \Phi_0(t)$ и представим уравнение (1) в виде

$$\dot{z} = Az + b(u_0 + v), \quad (3)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

а новое управление u_0 и неизвестное возмущение v задаются выражениями

$$u_0 = u - \dot{\varphi}, \quad v = -\ddot{\psi}(t) + M - \ddot{\Phi}_0(t). \quad (4)$$

Сформулируем вспомогательную задачу управления.

Задача 2. Построить такое управление u_0 , удовлетворяющее ограничению

$$|u_0| \leq \bar{u}, \quad \bar{u} > 0, \quad (5)$$

чтобы все решения системы (3), начинающиеся в некоторой окрестности нуля, при любом достаточно малом возмущении v приходили в нуль за конечное время.

Замечание 1. В отличие от задачи 2, в задаче 1 не требуется ограниченности управления.

Для решения задачи 2 воспользуемся законом управления, предложенным в [1,2]. Этот закон управления удовлетворяет ограничению (5) и приводит все траектории системы (3) в нуль за конечное время при достаточно малых неизвестных возмущениях v .

Рассмотрим сначала систему в отсутствие возмущений:

$$\dot{z} = Az + bu_0. \quad (6)$$

Введем в рассмотрение функцию $T(z)$, которая будет задана ниже, и матрицы

$$A_1 = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -12 & 36 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$\delta(T) = \text{diag}\{T^{-1}, T^{-2}\}, \quad P = QA_1 + A_1^T Q. \quad (8)$$

Отметим, что матрица A_1 устойчива, матрица P отрицательно определена и справедливы следующие соотношения:

$$QA_1 + A_1^T Q = QM + MQ. \quad (9)$$

Сделаем замену переменных $y = \delta(T)z$ и перепишем систему (3) в виде

$$\dot{y} = T^{-1}(Ay + bu_0 + \dot{T}My) \quad (10)$$

Положим

$$u_0(y) = (a, y), \quad a^T = (a_1, a_2) = (-3, 6). \quad (11)$$

Вектор a совпадает с первой строкой матрицы A_1 . Подставив (11) в (10), получим

$$\dot{y} = T^{-1}(A_1 y + \dot{T}My) \quad (12)$$

Зададим теперь функцию $T(z)$ неявно уравнением

$$(Q\delta(T)z, \delta(T)z) = d, \quad z \neq 0, \quad (13)$$

или в переменных y – уравнением

$$(Qy, y) = d, \quad y \neq 0. \quad (14)$$

Здесь $d > 0$ – произвольная постоянная, выбором которой можно обеспечить выполнение ограничений (5).

В [1] показано, что уравнение (13) относительно T имеет единственное положительное решение для любого $z \in R^2, z \neq 0$. Функцию $T(z)$ можно доопределить в нуле $T(0) = 0$ с сохранением непрерывности.

Продифференцировав T в силу системы (12), получим $\dot{T} = -1$, откуда вытекает, что функция $T(z)$ обращается в нуль за конечное время, т. е. любая траектория системы (6) достигает начала координат за конечное время, а время движения из точки z до нуля равно $T(z)$.

Проверим теперь ограниченность управления u_0 . В силу (11) имеем

$$|u_0(y)|^2 = (a_1 y_1 + a_2 y_2)^2 = (R_1 y, y), \quad R_1 = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 \\ a_1 a_2 & a_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -18 \\ -18 & 36 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\max_{(Qy, y)=d} |u_0(y)|^2 = \max_{(Qy, y)=d} (R_1 y, y) = dr,$$

где $r = 32$ – максимальное собственное число матрицы $Q^{-1}R_1$.

Таким образом, в отсутствие возмущений закон управления (11) приводит все траектории системы (6) в нуль за конечное время из любого начального состояния, при этом управление удовлетворяет неравенству

$$|u_0| \leq \sqrt{\frac{3d}{2}}.$$

Выбрав константу d равной

$$d = \frac{2\bar{u}^2}{3}, \quad (15)$$

получим управление, удовлетворяющее условию (5).

Предположим теперь, что в системе присутствуют возмущения, задаваемые неизвестной функцией $v(t, z)$. Обозначим через \bar{v} верхнюю оценку абсолютной величины этих возмущений, т. е.

$$|v(t, z)| \leq \bar{v}, \quad \bar{v} > 0. \quad (16)$$

Применим закон управления (11) к системе (3) и выясним, при какой величине \bar{v} заведомо достигается цель управления, т. е. траектории приходят в нуль за конечное время. В рассматриваемом случае уравнения (3) в переменных y запишутся в форме

$$\dot{y} = T^{-1}(A_1 y + b_0 v + \dot{T} M y), \quad (17)$$

а выражение для производной функции T в силу системы (17) примет вид

$$\dot{T} = -\frac{(P y, y) + 2v(Q b_0, y)}{(P y, y)}. \quad (18)$$

Выберем константу d в соответствии с (15) и потребуем выполнения условия

$$\bar{v} < \frac{p\bar{u}}{6} \approx 0.211\bar{u}, \quad (19)$$

где $p = 3 - \sqrt{3}$ – минимальное собственное число матрицы $-Q^{-1}P$. Тогда, очевидно, справедливо неравенство

$$\min_{(Qy, y)=d} -(Py, y) > 2\bar{v} \max_{(Qy, y)=d} (Qb_0, y),$$

из которого следует, что числитель правой части выражения (18), а вместе с ним и вся правая часть отрицательны и отделены от нуля. Это означает, что функция $T(z)$ обращается в нуль за конечное время, т. е. любая траектория системы (3) достигает начала координат за конечное время.

Соотношение (19) представляет собой достаточное условие применимости алгоритма и показывает, насколько ресурсы управления должны превосходить максимально допустимый уровень возмущений, чтобы предложенный закон управления приводил систему в нуль за конечное время из любого начального состояния.

Запишем управляющую функцию в переменных z так:

$$u_0(z) = -\frac{3}{T(z)} z_1 + \frac{6}{T^2(z)} z_2. \quad (20)$$

Здесь функция $T(z)$ задается уравнением (13), которое, с учетом вида матриц Q и $\delta(T)$, может быть представлено в полиномиальной форме

$$dT^4 - 6z_1^2 T^2 + 24z_1 z_2 T - 36z_2^2 = 0. \quad (21)$$

В исходных переменных управление u примет вид

$$u(\varphi, t) = u_0(\varphi, t) + \dot{\varphi} = -\frac{6}{T^2(z)}(\varphi - \Phi_0(t)) - \frac{3}{T(z)}(\dot{\varphi} - \dot{\Phi}_0(t)) + \dot{\varphi}. \quad (22)$$

Замечание 2. Функция $u_0(\varphi, t)$ является ограниченной во всем фазовом пространстве, а функция $u(\varphi, t)$ ограничена при условии ограниченности угловой скорости $\dot{\varphi}$.

Замечание 3. Для работы алгоритма необходимо в каждый момент времени знать величины $\varphi(t)$, $\dot{\varphi}(t)$, $\Phi_0(t)$ и $\dot{\Phi}_0(t)$. Значения функций $\ddot{\psi}(t)$ и $M(\dot{\varphi})$ знать не нужно, достаточно, чтобы возмущение

$$v = -\ddot{\psi}(t) + M(t, \varphi, \dot{\varphi}) - \ddot{\Phi}_0(t) \quad (23)$$

удовлетворяло неравенству (16), а величина \bar{v} – неравенству (19). Если слагаемое $\ddot{\Phi}_0(t)$ предполагается известным, то его можно компенсировать дополнительным управляющим моментом $u_1 = \ddot{\Phi}_0(t)$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (14-01-00356а и 14-01-00476а) и в рамках Программы поддержки ведущих научных школ (НШ-2710.2014.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ананьевский И.М., Анохин Н.В., Овсеевич А.И.* Синтез ограниченного управления линейными динамическими системами с помощью общей функции Ляпунова // Доклады академии наук. 2010. Т. 434, No 3. с. 319–323.
2. *Ovseevich A.* A Local Feedback Control Bringing a Linear System to Equilibrium // JOTA. DOI 10.1007/s10957-014-0636-1

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКОГО РЕЗОНАНСНОГО ВРАЩЕНИЯ СПУТНИКА НА ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОРБИТЕ

Московский авиационный институт (научно-исследовательский университет)

Москва, Российская Федерация

Бардин Б.С., Чекина Е.А.,

bsbardin@yandex.ru, chekina_ev@mail.ru

ON STABILITY OF A PLANAR RESONANT ROTATION OF A SATELLITE IN AN ELLIPTIC ORBIT

Bardin B.S., Chekina E.A.

Moscow Aviation Institute (National Research University),

bsbardin@yandex.ru, chekina_ev@mail.ru

In this paper we study the Lyapunov stability problem of the resonance rotation of a satellite as a rigid body about the center of mass in an elliptical orbit. The resonance rotation is a planar motion, wherein the satellite performs one revolution in the absolute space for a time equal to two periods of its center of mass circulation in the orbit. The stability analysis of given resonance rotation was started in works [1,2]. In this paper there were obtained rigorous stability conclusions in the previously unstudied range of the parameter values. In particular, there were found new intervals of stability when eccentricity values approached to the 1. In addition some special cases were studied, where the stability analysis should be provided taking into account members not less than the sixth degree in the expansion of the Hamiltonian of the perturbed motion.

Введение. В данной работе исследуется задача об устойчивости по Ляпунову резонансного вращения спутника - твердого тела относительно центра масс на эллиптической орбите. Резонансное вращение представляет собой плоское движение, при котором спутник совершает один оборот в абсолютном пространстве за два оборота его центра масс по орбите. Исследование устойчивости данного резонансного вращения было начато в работах [1,2]. В настоящей работе получены строгие выводы об устойчивости для значений параметров, неисследованных ранее. В частности, были обнаружены новые интервалы устойчивости при значениях эксцентриситета близких к единице. Кроме того, были исследованы особые случаи, когда анализ устойчивости должен проводиться учетом членов не ниже шестой степени в гамильтониане возмущенного движения.

Ключевые слова: Гамильтонова система, симплектическое отображение, нормальная форма, резонанс.

Постановка задачи. Рассмотрим движение спутника – твердого тела в центральном ньютоновском гравитационном поле сил. Будем считать, что центр масс спутника движется по эллиптической орбите, а сам спутник совершает плоские движения относительно центра масс, т.е одна из его главных центральных осей инерции во все время движения совпадает с нормалью к плоскости орбиты.

Плоские движения спутника относительно центра масс на эллиптической орбите произвольного эксцентриситета описываются следующим дифференциальным уравнением второго порядка с периодическими коэффициентами (уравнение Белецкого)

$$(1 + e \cos v) \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} - 2e \sin v \frac{d\theta}{dv} + \alpha \sin \theta \cos \theta = 2e \sin v \quad (1)$$

где θ – угол между одной из главных центральных осей инерции спутника, лежащей в плоскости орбиты и радиусом-вектором центра масс, v – истинная аномалия, e – эксцентриситет орбиты, $\alpha = 3(J_1 - J_3)/J_2$ ($|\alpha| \leq 3$), J_i ($i=1,2,3$) – главные центральные моменты инерции спутника.

Если параметры α и e связаны соотношением $\alpha = -2e$, то данное уравнение допускает частное решение

$$\theta^* = -v/2. \quad (2)$$

Этому решению соответствует плоское вращение спутника, при котором он совершает один оборот в абсолютном пространстве за два оборота центра масс по орбите. В работе [1] в линейном приближении исследовалась устойчивость данного решения. Полученные там результаты были дополнены и уточнены в работе [2], где был также выполнен нелинейный анализ двух областей устойчивости в линейном приближении. Исследования, проведенные в упомянутых выше работах, не закрывают вопрос об устойчивости плоского вращения, т.к. они были выполнены не для всех значений параметров задачи. В частности, анализ устойчивости не проводился для значений эксцентриситета близких к единице. Кроме того, неисследованными остались два особых значения эксцентриситета, при которых для решения вопроса об устойчивости требуется проводить нелинейный анализ с учетом членов выше четвертой степени в разложении гамильтониана возмущенного движения. Целью настоящей работы является строгое решение задачи об устойчивости по Ляпунову данного решения для неисследованных ранее значений эксцентриситета.

Гамильтониан возмущенного движения. Уравнения возмущенного движения можно записать в гамильтоновой форме. С этой целью введем переменные q и p по формулам

$$\theta = \theta^* + \frac{q}{1 + e \cos v}, \quad \frac{dq}{dv} = p. \quad (3)$$

Уравнение (1) эквивалентно гамильтоновой системе дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\frac{dq}{dv} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dv} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad (4)$$

где

$$H = \frac{1}{2} p^2 - \frac{1}{2} \frac{e \cos v}{1 + e \cos v} q^2 - \frac{2}{3} \frac{e \sin v}{(1 + e \cos v)^2} q^3 + \frac{1}{3} \frac{e \cos v}{(1 + e \cos v)^3} q^4 + \frac{2}{15} \frac{e \sin v}{(1 + e \cos v)^4} q^5 - \frac{2}{45} \frac{e \cos v}{(1 + e \cos v)^5} q^6 + O(q^7). \quad (5)$$

В переменных q и p вопрос об устойчивости резонансного вращения (2) сводится к исследованию устойчивости положения равновесия $q=p=0$ гамильтоновой системы (4).

Анализ устойчивости в линейном приближении. Рассмотрим сначала линейную задачу об устойчивости, т.е. исследуем вопрос об устойчивости линейной канонической системы с гамильтонианом

$$H_2 = \frac{1}{2} p^2 - \frac{1}{2} \frac{e \cos v}{1 + e \cos v} q^2 \quad (6)$$

Характеристическое уравнение этой системы имеет вид

$$\rho^2 - 2A\rho + 1 = 0, \quad (7)$$

где

$$A = X_{11}(2\pi) + X_{22}(2\pi), \quad (8)$$

функции $X_{11}(2\pi)$, $X_{22}(2\pi)$ – элементы матрицанта.

Выводы об устойчивости линейной системы с гамильтонианом (6) можно получить на основании анализа корней ее характеристического уравнения:

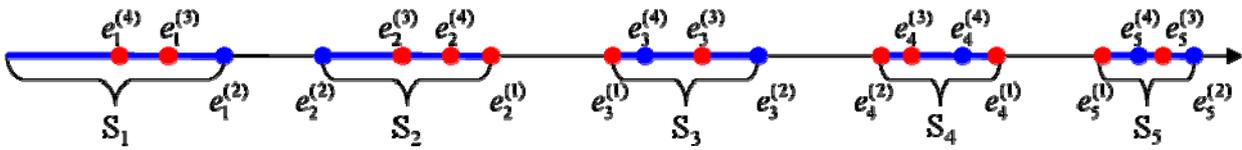
1. Если $|A| > 1$, то уравнение (7) имеет корень, модуль которого превосходит единицу, а соответствующий характеристический показатель имеет отличную от нуля вещественную часть. В этом случае линейная система с гамильтонианом (6) неустойчива. Из неустойчивости линейной системы следует неустойчивость положения равновесия полной нелинейной системы (4), а значит и неустойчивость исследуемого резонансного вращения (2).
2. Если $|A| < 1$, то оба корня уравнения (7) имеют модули равные единице, а соответствующие им характеристические показатели чисто мнимы. В этом случае линейная система устойчива. Из устойчивости в линейном приближении, однако, не следует устойчивости в полной нелинейной системе. Для строгого решения задачи об устойчивости требуется проводить нелинейный анализ.
3. Нелинейный анализ устойчивости также необходим и в резонансном случае $|A| = 1$, когда уравнение (7) имеет кратный корень $\rho = 1$ или $\rho = -1$.

На основании численного интегрирования линейной канонической системы с гамильтонианом (6) для значений эксцентриситета из промежутка $(0, 0.99994)$ вычислялся коэффициент A и были получены следующие результаты:

1. При значениях эксцентриситета из интервалов $(0.321731, 0.90010166)$, $(0.9179098746, 0.9905450175)$, $(0.9921141694, 0.99916659849)$ и $(0.99930356235, 0.999918785804)$, рассматриваемое вращение неустойчиво.
2. При значениях эксцентриситета из интервалов $(0, 0.321731)$, $(0.90010166, 0.9179098746)$, $(0.9905450175, 0.9921141694)$, $(0.99916659849, 0.99930356235)$ и $(0.999918785804, 0.999932116844)$ имеет место устойчивость резонансного вращения в линейном приближении. Чтобы получить выводы об устойчивости в полной нелинейной системе (4), в указанных интервалах необходимо выполнить дополнительный анализ, учитывая, как правило, члены не ниже четвертой степени в разложении гамильтониана (5).

Нелинейный анализ устойчивости. Нелинейный анализ устойчивости проводился на основании методики, предложенной в работе [3]. Суть которой состоит в построении симплектического отображения $T: (q_0, p_0) \Rightarrow (q_1, p_1)$, порождаемого гамильтоновой системой уравнений (4) за период 2π , и дальнейшее исследование устойчивости его неподвижной точки. Задача об устойчивости неподвижной точки данного отображения эквивалентна задаче об устойчивости положения равновесия исходной гамильтоновой системы.

На основании указанной методики было получено строгое решение задачи об устойчивости периодического движения в указанных выше интервалах линейной устойчивости. С этой целью для значений эксцентриситета из указанных областей численно определялись коэффициенты производящей функции отображения и проверялись критерии устойчивости, приведенные в [3].



На рисунке схематично показаны исследуемые интервалы S_i ($i=1,2,3,4,5$). Через $e_j^{(i)}$ обозначены точки, в которых реализуются резонансы до четвертого порядка включительно, при этом i – порядок резонанса, а j – номер интервала. Резонансы первого и второго порядков имеют место на границах интервалов, а резонансов третьего и четвертого порядков следующих внутренних точках интервалов:

$$e_1^{(3)} = 0.321731 \quad e_2^{(3)} = 0.9049395 \quad e_3^{(3)} = 0.991748982 \quad e_4^{(3)} = 0.9992031462 \quad e_5^{(3)} = 0.999929008$$

$$e_1^{(4)} = 0.2261418 \quad e_2^{(4)} = 0.909495 \quad e_3^{(4)} = 0.9913672 \quad e_4^{(4)} = 0.9992381 \quad e_5^{(4)} = 0.9999257$$

Проведенный анализ показал, что почти всюду в указанных интервалах исследуемое резонансное вращение устойчиво по Ляпунову. Исключение составляют лишь следующие резонансные точки:

$$e_1^{(3)} = 0.321731 \quad e_2^{(1)} = 0.91790987 \quad e_3^{(1)} = 0.99054501 \quad e_4^{(1)} = 0.99930356 \quad e_5^{(1)} = 0.99991878$$

$$e_1^{(4)} = 0.2261418 \quad e_2^{(3)} = 0.9049395 \quad e_3^{(3)} = 0.991748982 \quad e_4^{(2)} = 0.9991665985 \quad e_5^{(3)} = 0.999929008$$

$$e_2^{(4)} = 0.909495 \quad e_4^{(3)} = 0.9992031462$$

в которых резонансное вращение неустойчиво. Кроме того, в интервалах S_1 и S_2 имеются особые точки $e_1 = 0.23340371$ и $e_2 = 0.907502979$, в которых вопрос об устойчивости не решается членами до четвертого порядка включительно в разложении гамильтониана (5).

Анализ устойчивости в двух особых точках. В особых точках e_1 и e_2 для решения вопроса об устойчивости требуется проводить анализ с учетом членов до шестого порядка включительно в разложении гамильтониана (5). Такой анализ можно провести по следующей схеме.

1. Построение симплектического отображения $T: (q_0, p_0) \Rightarrow (q_1, p_1)$, порождаемого гамильтоновой системой уравнений (4) за период 2π , до членов пятой степени включительно. Это удобно сделать на основании методики, изложенной в работе [4]. Данная методика отличается от методики, использованной в работе [3] тем, что сначала в исходной гамильтоновой системе выполняется линейная каноническая замена переменных, а затем, для преобразованной таким образом гамильтоновой системы строится симплектическое отображение. Такой подход несколько упрощает вычисления, поскольку он позволяет сразу получить дифференциальные уравнения, интегрирование которых на интервале $(0, 2\pi)$ дает коэффициенты производящей функции искомого симплектического отображения.
2. Приведение отображения к следующей нормальной форме

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} \xi_0 + \frac{3\gamma}{4} \eta_0 (\xi_0^2 + \eta_0^2)^2 + O_6 \\ \eta_0 - \frac{3\gamma}{4} \xi_0 (\xi_0^2 + \eta_0^2)^2 + O_6 \end{pmatrix}.$$

Указанную нормальную форму можно получить на основании алгоритма, предложенного в работе [5].

3. Выводы об устойчивости делаются на основании теоремы Мозера об инвариантных кривых. В частности, если величина γ не равна нулю, в любой сколь угодно малой

окрестности неподвижной точки отображения существует охватывающая ее замкнутая инвариантная кривая. Последнее гарантирует устойчивость неподвижной точки. Вычисления показали, что при $e = e_1$, $\gamma = -1746,90414$, а при $e = e_2$, $\gamma = 129484799490$. Таким образом, в указанных особых точках резонансное вращение (2) устойчиво по Ляпунову.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-21-00068) в Московском авиационном институте (Национальном исследовательском университете).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

1. Хентов А.А. Об одном вращательном движении спутника// Космические исследования, 1984. Т. 22. Вып. 1. С. 130-131.
2. Маркеев А.П., Бардин Б.С. Об одном плоском вращательном движении спутника на эллиптической орбите// Космические исследования, 1994. Т. 32. Вып. 6. С. 43-49.
3. Маркеев А.П. Об одном способе исследования устойчивости положений равновесия гамильтоновых систем// Механика твердого тела, 2004. Вып. 6. С. 3-12.
4. Маркеев А.П. Об одном способе аналитического представления отображений, сохраняющих площадь // ПММ., 2014. Т. 78. Вып. 5. С. 611-624.
5. Boris S. Bardin, Evgeniya A. Chekina, and Alexander M. Chekin On the Stability of a Planar Resonant Rotation of a Satellite in an Elliptic Orbit – Regular and Chaotic Dynamics, 2015, Vol. 20, No. 1, pp. 63–73.

Key words: Hamiltonian system, symplectic map, normal form, resonance.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ТВЁРДОГО ТЕЛА С ГОРИЗОНТАЛЬНО ВИБРИРУЮЩЕЙ ТОЧКОЙ ПОДВЕСА

STABILITY INVESTIGATION OF PERIODIC MOTIONS OF A RIGID BODY WITH A SUSPENSION VIBRATING ALONG THE HORIZONTAL

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
кафедра теоретической механики

Беличенко М. В.

Рассматривается движение тяжёлого твёрдого тела, одна из точек которого совершает горизонтальные гармонические колебания высокой частоты и малой амплитуды. Найдены высокочастотные периодические движения тела и исследована их устойчивость в первом приближении. Рассматривались три случая геометрии масс тела: тело с центром масс на главной оси или главной плоскости инерции и динамически симметричное тело.

Уравнения движения тела рассматриваются в форме уравнений типа Эйлера – Пуассона и в каноническом виде, полученных методами теории возмущений, главная часть которых не содержит времени и соответствует автономной системе [1].

На первом этапе исследования рассматривается приближенная автономная система уравнений. С помощью уравнений Эйлера – Пуассона найдены два типа положений относительного равновесия: вертикальные и боковые. В вертикальных равновесиях центр масс тела расположен на одной вертикали с точкой подвеса, выше или ниже её (верхнее или нижнее равновесия). Для боковых равновесий центр масс лежит в вертикальной плоскости, содержащей ось действия вибраций. Для каждого случая геометрии масс тела существует по две различных группы верхних, нижних и боковых равновесий.

Были исследованы необходимые и достаточные условия устойчивости найденных равновесий. Достаточные условия были найдены как условия положительной определённости квадратичной части гамильтониана возмущенного движения. Исследование показало, что для верхних положений равновесия рассматриваемые условия не выполняются, а для нижних и боковых положений есть области устойчивости, представленные двумя условиями, одно из которых накладывает ограничение на геометрию масс тела, а другое описывает область изменения частоты вибраций.

Необходимые условия устойчивости искались как условия мнимости корней характеристического уравнения линеаризованной системы приближенных уравнений. Установлено, что верхние положения относительного равновесия неустойчивы, а области выполнения необходимых и достаточных условий для нижних и боковых равновесий совпадают. Отсюда следует, что в найденных областях эти равновесия устойчивы.

Таким образом, для тела, соответствующего рассматриваемым случаям геометрии масс, существует несколько равновесий, для которых радиус-вектор центра масс находится в плоскости, содержащей вертикаль и ось вибраций, и составляет три, в общем случае разных, угла с вертикалью (рис 1.). При этом верхнее положение равновесия 1 всегда неустойчиво. Нижнее положение равновесия возможно в случае двух различных групп ориентаций тела. При этом, в зависимости от геометрии масс тела, одна из этих групп неустойчива, а другая устойчива при значении частоты вибраций, меньшем некоторого значения Ω_1 . Если частота превосходит другое значение Ω_2 , то возникают

неустойчивые боковые равновесия 4, причём $\Omega_1 > \Omega_2$. Когда частота превосходит значение Ω_1 , появляются положения равновесия 3, устойчивые в области своего существования.

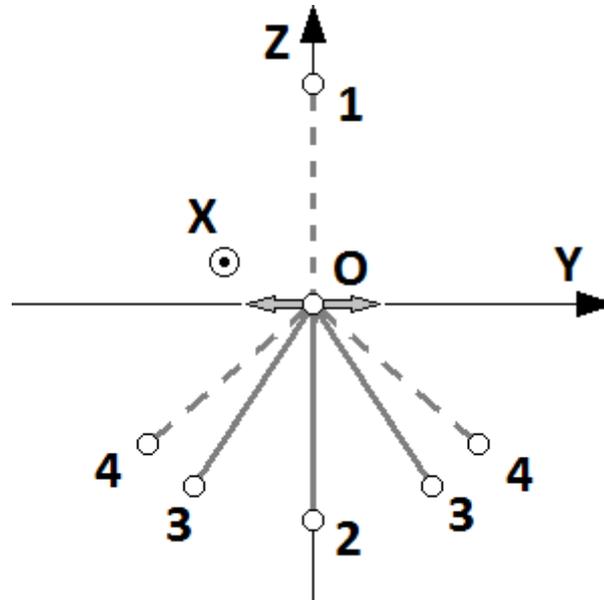


Рис. 1. Положения равновесия тела с центром масс в главной плоскости инерции.

Найденным относительным равновесиям приближенной автономной системы соответствуют периодические движения полной неавтономной системы, период которых равен периоду вибраций точки подвеса тела. Эти движения представляют собой высокочастотные «дрожания» в окрестности «средних» положений тела, описываемых положениями относительных равновесий приближенной системы. При этом неустойчивые положения равновесия приближенной системы перейдут в неустойчивые периодические движения полной системы, а устойчивые равновесия перейдут в периодические движения, устойчивые в линейном приближении. Это следует из непрерывности по малому параметру характеристических показателей линеаризованных уравнений возмущенного движения.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-21-00068) в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете).

We consider here a motion of a rigid body with a point committing fast harmonic horizontal oscillations of small amplitude. Periodic high-frequency motions are found and their linear stability is investigated. Three cases of the body mass geometry are considered when its center of mass is on the principal axis or plane of inertia and when the body is dynamically symmetric.

Литература:

1. Маркеев А. П. К теории движения твёрдого тела с вибрирующим подвесом // ДАН. 2009. Т. 427. №6. С. 771-775.

ВАРИАЦИОННЫЕ СИММЕТРИИ И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

Будочкина С.А.

Российский университет дружбы народов, г. Москва, Россия

sbudotchkina@yandex.ru

Установлена связь между симметриями действия по Гамильтону и алгебрами Ли.

VARIATIONAL SYMMETRIES AND ASSOCIATED ALGEBRAIC STRUCTURES

Budochkina S.A.

Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia

sbudotchkina@yandex.ru

Connection between symmetries of the given Hamiltonian action and Lie algebras is established.

Пусть дано операторное уравнение

$$N(u)=0, \quad u \in D(N), \quad (1)$$

где $N: D(N) \subset U \rightarrow V$ - дифференцируемый по Гато оператор, U, V - линейные нормированные пространства над полем действительных чисел \mathbb{R} , $D(N)$ - область определения оператора N .

Будем следовать обозначениям и терминологии [1-4].

Предположим, что оператор N уравнения (1) является потенциальным на $D(N)$ относительно непрерывной невырожденной билинейной формы.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times U \rightarrow \mathbb{R}$$

Соответствующее действие по Гамильтону имеет вид

$$F_N[u] = \int_0^1 \langle N(\tilde{u}(\lambda)), u - u_0 \rangle d\lambda, \quad (2)$$

где $\tilde{u}(\lambda) = u_0 + \lambda(u - u_0)$, u_0 - фиксированный элемент из $D(N)$.

Рассмотрим на $D(N)$ бесконечно малое преобразование, определяемое формулой

$$\bar{u} = u + \varepsilon S(u), \quad (3)$$

где $S: D(N) \rightarrow D(N'_u)$ - генератор преобразования, N'_u - производная Гато оператора N в точке $u \in D(N)$.

Определение. Преобразование (3) называется симметрией функционала (2), если $F_N[u + \varepsilon S(u)] = F_N[u] + r(u, \varepsilon S(u)) \quad \forall u \in D(N)$,

причем $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{r(u, \varepsilon S(u))}{\varepsilon} = 0$.

В этом случае оператор S называется также генератором симметрии функционала (2).

Отметим, что симметрия функционала называется также вариационной симметрией.

Теорема 1. Если S_1, S_2 - генераторы симметрий функционала (2), то их коммутатор

$$[S_1, S_2](u) = S'_{1u} S_2(u) - S'_{2u} S_1(u) \quad (4)$$

также является генератором симметрии функционала (2).

Теорема 2. Генераторы симметрий функционала (2) образуют алгебру Ли относительно коммутатора (4).

Таким образом, в определенных случаях теорема 1 может быть использована для построения симметрий функционала (2) по известным хотя бы двум генераторам симметрий.

Литература

1. *Савчин В.М.* Математические методы механики бесконечномерных непотенциальных систем. М.: Изд-во УДН, 1991. – 237 с.
2. *Савчин В.М., Будочкина С.А.* Симметрии и первые интегралы в механике бесконечномерных систем // Доклады Академии наук, 2009, том 425, №2, стр. 169-171.
3. *Будочкина С.А., Савчин В.М.* Вариационные симметрии эйлеровых и неэйлеровых функционалов // Дифференциальные уравнения, 2011, том 47, №6, стр. 811-818.
4. *Budochkina S.A.* Symmetries and first integrals of a second order evolutionary operator equation // Eurasian Mathematical Journal, 2012, vol.3, №1, pp. 18-28.

ВЛИЯНИЕ ВЗАИМНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПЛАНЕТ СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ НА ЭВОЛЮЦИЮ ПЕРИГЕЛИЕВ ИХ ОРБИТ

В.Г. Вильке¹, А.В. Шатина², Л.С. Шатина¹

¹ Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

² Московский государственный технический университет радиотехники,
электроники и автоматики (МГТУ МИРЭА), Москва, Россия

Рассматривается классическая задача N тел, когда масса одного тела (Солнца) намного больше массы других взаимно тяготеющих тел. Методами аналитической динамики выводится система уравнений движения в барицентрической системе координат в канонических переменных Делоне. В результате процедуры усреднения по быстрым угловым переменным – средним аномалиям получено уравнение, описывающее эволюцию долготы перигелия i -ой планеты Солнечной системы в виде суммы двух слагаемых. Первое из них отвечает за гравитационные возмущения со стороны остальных планет, как это было бы в случае неподвижного Солнца. Второе возникло из-за того, что задача решается в барицентрической системе координат и при этом учитываются наклонения орбит планет. Это слагаемое становится равным нулю, если предположить, что все планеты движутся в одной неподвижной плоскости. Второе слагаемое вносит существенный вклад в эволюцию перигелиев Меркурия и Венеры. Для остальных планет эта величина мала по сравнению с первым слагаемым. Например, для Меркурия полученные в данной работе указанные величины составляют соответственно 528,68 и 39,64 угловых секунд в столетие.

THE INFLUENCE OF THE GRAVITATIONAL PERTURBATIONS OF THE SOLAR SYSTEM PLANETS ON THE EVOLUTION OF THEIR ORBITS' PERIHELIA

V.G.Vilke¹, A.V. Shatina², L.S. Shatina¹

¹*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

²*Moscow State Technical University of Radioengineering, Electronics and Automation (MSTU
MIREA), Moscow, Russia*

We consider the classical N -bodies problem in case, when the mass of one of the bodies (the Sun) is much greater than the masses of the other mutually gravitating bodies. We use methods of analytical dynamics to derive the system of motion equations in Delaunay canonical variables with respect to the barycentric coordinate system. After the procedure of averaging over fast angular variables – the mean anomalies – we get the equation, which describes the evolution of the i -th planet perihelion as the sum of two terms. The first term corresponds to the gravitational perturbations from the other planets, as in the case of stationary Sun. The second term appears because the problem is considered in the barycentric coordinate system and the inclinations of the planets' orbits are taken into account. This term is equal to zero if we assume

that all the planets move on one fixed plane. The second term makes a considerable contribution to the perihelia evolution of Mercury and Venus. For the rest of the planets this term is small compared to the first one. For example, for Mercury these terms are equal to 528,68 and 39,64 angular seconds per century.

Рассмотрим модель Солнечной системы, состоящую из $(n+1)$ -ой материальной точки P_0, P_1, \dots, P_n . Введем инерциальную систему координат $CXYZ$ с началом в центре масс системы. Пусть \mathbf{R}_0 – радиус-вектор точки P_0 (Солнца), а $\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_n$ – радиус-векторы планет P_1, \dots, P_n , координаты которых задаются в системе отсчета $CXYZ$.

Обозначим через m_s массу Солнца, а массы планет через M_k ($k=1, \dots, n$). Введем малый параметр ε , равный отношению самой массивной планеты Солнечной системы (Юпитера) к массе Солнца: $\varepsilon = M_5 m_s^{-1}$. Тогда массы планет можно представить в виде:

$$M_k = \varepsilon m_k, \quad k=1, \dots, n, \quad \text{где } m_k = M_k M_5^{-1} m_s, \quad m_k \leq m_s.$$

Так как начало инерциальной системы координат совпадает с барицентром, то

$$m_s \mathbf{R}_0 + \varepsilon \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{R}_k = 0. \quad (1)$$

Уравнения движения механической системы выпишем в канонической форме в канонических переменных Делоне $L_k, G_k, H_k, l_k, g_k, h_k$ ($k=1, \dots, n$) [1]. Функция Гамильтона задачи с учетом (1) имеет вид:

$$\mathcal{H} = -\sum_{k=1}^n \frac{f_0^2 m_k^3}{2L_k^2} + \varepsilon \mathcal{H}_1,$$

$$\mathcal{H}_1 = -\frac{1}{2m_s} \sum_{k,i=1}^n (\mathbf{p}_k, \mathbf{p}_i) - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \frac{f m_i m_j}{R_{ij}} + \sum_{k,i=1}^n \frac{f m_i m_k (\mathbf{R}_k, \mathbf{R}_i)}{R_k^3},$$

где f – универсальная гравитационная постоянная, $f_0 = f m_s$, $R_k = |\mathbf{R}_k|$, $R_{ij} = |\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|$. Радиус-векторы \mathbf{R}_k и векторные импульсы \mathbf{p}_k выражаются через переменные Делоне следующим образом:

$$\mathbf{R}_k = R_k \boldsymbol{\xi}_k, \quad R_k = \frac{G_k^2}{f_0 m_k^2 (1 + e_k \cos \vartheta_k)}, \quad \boldsymbol{\xi}_k = (\xi_{kx}, \xi_{ky}, \xi_{kz}),$$

$$\xi_{kx} = \cos(g_k + \vartheta_k) \cos h_k - \sin(g_k + \vartheta_k) \cos i_k \sin h_k,$$

$$\xi_{ky} = \cos(g_k + \vartheta_k) \sin h_k + \sin(g_k + \vartheta_k) \cos i_k \cos h_k,$$

$$\xi_{kz} = \sin(g_k + \vartheta_k) \sin i_k,$$

$$\mathbf{p}_k = \frac{f_0 m_k^2}{G_k} \left\{ e_k \sin \vartheta_k \boldsymbol{\xi}_k + \frac{\cos i_k (1 + e_k \cos \vartheta_k)}{1 - \sin^2(g_k + \vartheta_k) \sin^2 i_k} \boldsymbol{\eta}_k + \frac{\sin i_k \cos(g_k + \vartheta_k) (1 + e_k \cos \vartheta_k)}{\sqrt{1 - \sin^2(g_k + \vartheta_k) \sin^2 i_k}} \boldsymbol{\zeta}_k \right\},$$

$$\boldsymbol{\eta}_k = (-\xi_{ky}, \xi_{kx}, 0), \quad \boldsymbol{\zeta}_k = \left(\frac{\xi_{kx} \xi_{kz}}{\sqrt{1 - \xi_{kz}^2}}, \frac{\xi_{ky} \xi_{kz}}{\sqrt{1 - \xi_{kz}^2}}, -\sqrt{1 - \xi_{kz}^2} \right).$$

Здесь $e_k = \sqrt{1 - G_k^2/L_k^2}$ – эксцентриситет орбиты k -ой планеты, $\vartheta_k = \vartheta_k(l_k, L_k, G_k)$ – истинная аномалия, зависимость которой от переменных l_k, L_k, G_k осуществляется посредством соотношений $\cos w_k = \frac{e_k + \cos \vartheta_k}{1 + e_k \cos \vartheta_k}$, $l_k = w_k - e_k \sin w_k$, i_k – наклонение орбиты k -ой планеты, $\cos i_k = H_k/G_k$, g_k – долгота перигелия от восходящего узла, h_k – долгота восходящего узла.

Канонические уравнения движения механической системы имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{L}_k &= -\varepsilon \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial l_k}, \quad \dot{G}_k = -\varepsilon \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial g_k}, \quad \dot{H}_k = -\varepsilon \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial h_k}, \\ \dot{l}_k &= \omega_k + \varepsilon \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial L_k}, \quad \dot{g}_k = \varepsilon \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial G_k}, \quad \dot{h}_k = \varepsilon \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial H_k}, \quad \omega_k = \frac{f_0^2 m_k^3}{L_k^3}, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2)$$

Правые части системы уравнений (2) зависят от канонических переменных Делоне и содержат n быстрых угловых переменных l_1, \dots, l_n , по которым функция \mathcal{H}_1 является 2π -периодической. Остальные переменные являются медленными. Предположим, что в системе отсутствуют резонансы, т.е. $k_1 \omega_1 + \dots + k_n \omega_n \neq 0$, каков бы ни был нетривиальный набор целых чисел k_1, \dots, k_n , и применим метод усреднения по быстрым угловым переменным. Операция усреднения состоит в вычислении интеграла

$$\langle \langle (*) \rangle \rangle = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} (*) dl_1 \dots dl_n = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} (*) \frac{\partial l_1}{\partial \vartheta_1} \dots \frac{\partial l_n}{\partial \vartheta_n} d\vartheta_1 \dots d\vartheta_n, \quad \frac{\partial l_k}{\partial \vartheta_k} = \frac{(1 - e_k^2)^{3/2}}{(1 + e_k \cos \vartheta_k)^2}.$$

Остановимся более подробно на уравнении, описывающем эволюцию долготы перигелия i -ой планеты $\varpi_i = g_i + h_i$. Согласно уравнениям (2)

$$\langle \dot{\varpi}_i \rangle = \varepsilon \left\langle \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial G_i} + \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial H_i} \right\rangle.$$

Учитывая в \mathcal{H}_1 только те слагаемые, которые зависят от G_i и H_i , и отбрасывая те из них, которые при усреднении дают ноль, получим:

$$\begin{aligned} \langle \dot{\varpi}_i \rangle &= \omega_i^{(R)} + \omega_i^{(p)}, \quad \omega_i^{(R)} = \sum_{k=1, k \neq i}^n \omega_{ik}^{(R)}, \quad \omega_i^{(p)} = \sum_{k=1, k \neq i}^n \omega_{ik}^{(p)}, \\ \omega_{ik}^{(R)} &= -\varepsilon \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial G_i} + \frac{\partial}{\partial H_i} \right) \frac{f m_i m_k}{R_{ik}} \right\rangle, \quad \omega_{ik}^{(p)} = -\frac{\varepsilon}{m_s} \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial G_i} + \frac{\partial}{\partial H_i} \right) (\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_k) \right\rangle. \end{aligned}$$

Таблица 1. Эволюция перигелиев орбит планет. Компоненты $\varpi_{ik}^{(R)}$ (" / 100 лет).

Источник воз-действия	Объекты воздействия							
	Мерку-рий	Венера	Земля-Луна	Марс	Юпитер	Сатурн	Уран	Нептун
Меркурий	-	- 150,9403	-13,7086	0,7675	0,0065	0,0008	0,0001	0,0000
Венера	275,8909	-	345,1473	49,4045	0,4073	0,0467	0,0040	0,0008
Земля-Луна	90,1043	- 574,4901	-	227,6136	0,9885	0,1084	0,0096	0,0019
Марс	2,4646	74,8843	97,4516	-	0,1243	0,0335	0,0029	0,0004
Юпитер	152,7710	652,7767	694,1303	1247,1513	-	1626,2826	124,7171	-0,8573
Сатурн	7,2679	8,1752	19,1886	66,6657	628,3813	-	121,1623	- 13,8167
Уран	0,1404	0,2758	0,5636	1,1962	10,7435	27,0335	-	97,2910
Нептун	0,0422	0,1119	0,1824	0,3456	2,2350	6,3321	45,2444	-
$\sum_k \varpi_{ik}^{(R)}$	528,68	10,79	1142,96	1593,14	642,89	1659,84	291,14	82,62

Получим численные значения компонент $\omega_{ik}^{(R)}$, $\omega_{ik}^{(p)}$ для каждой из восьми планет Солнечной системы на эпоху J2000, используя элементы орбит планет, приведенные в [2], а также соотношение $G_k = \sqrt{f_0 m_k^2 a_k (1 - e_k^2)}$, $k = 1, \dots, n$, где a_k – большая полуось орбиты k -ой планеты. Результаты вычислений приведены в таблицах 1, 2.

Величина $\omega_i^{(R)}$ отвечает за гравитационные возмущения со стороны остальных планет, как это было бы в случае неподвижного Солнца. Полученные численные значения $\omega_{ik}^{(R)}$ хорошо согласуются с ранее полученными расчетами У.Леверье в 1859 году [3] для Меркурия и Клеменса [4,5] для Меркурия и Земли. Компонента $\omega_{ik}^{(p)}$ возникла из-за того, что задача решается в барицентрической системе координат и при этом учитываются наклоны орбит планет. Эта компонента становится равной нулю, если предположить, то все планеты движутся в одной неподвижной плоскости. Слагаемое $\omega_i^{(p)}$ вносит существенный вклад в эволюцию перигелиев Меркурия и Венеры. Для остальных планет эта величина мала по сравнению с $\omega_i^{(R)}$.

Таблица 2. Эволюция перигелиев орбит планет. Компоненты $\varpi_{ik}^{(p)}$ (" / 100 лет).

Источ- ник воз- действия	Объекты воздействия							
	Мерку- рий	Венера	Земля-Луна	Марс	Юпи-тер	Са-турн	Уран	Неп-тун
Меркурий	-	5,2182	$-1,6043 \cdot 10^{-5}$	0,0479	0,0049	0,0585	-0,0013	0,0051
Венера	0,1116	-	$-0,1844 \cdot 10^{-5}$	0,0055	0,0006	0,0067	-0,0002	0,0006
Земля- Луна	-0,0000	-0,0000	-	-0,0000	-0,0000	-0,0000	0,0000	-0,0000
Марс	0,0374	0,2010	$-0,0619 \cdot 10^{-5}$	-	0,0002	0,0023	-0,0001	0,0002
Юпитер	5,6486	30,3690	$-9,3630 \cdot 10^{-5}$	0,2796	-	0,3415	-0,0076	0,0299
Сатурн	33,9444	182,3575	$-56,1203 \cdot 10^{-5}$	1,6749	0,1734	-	-0,0456	0,1777
Уран	-0,1241	-0,6670	$0,2054 \cdot 10^{-5}$	-0,0061	-0,0006	-0,0075	-	-0,0007
Нептун	0,0236	0,1268	$-0,0392 \cdot 10^{-5}$	0,0012	0,0001	0,0014	-0,0000	-
$\sum_k \varpi_{ik}^{(p)}$	39,64	217,61	$-67,17 \cdot 10^{-5}$	2,00	0,18	0,40	-0,05	0,21

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1) Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1975.– 800 с.
- 2) Мюррей К., Дермотт С. Динамика Солнечной системы. М.: Физматлит, 2010.– 588 с.
- 3) Роузвер Н.Т. Перигелий Меркурия: от Лавуазье до Эйнштейна. М.: Мир, 1985 – 244 с.
- 4) Clemence G.M. The Relativity Effect in Planetary Motions // Reviews of Modern Physics. 1947. Volume 19. N 4. P. 361-364.
- 5) Лоскутов Ю.М. Сопоставление теоретических и экспериментальных данных о смещении перигелия Меркурия // Вестник Московского университета. Сер. 3. Физика. Астрономия. 2011. №2. С.26-30.

**ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА,
НЕСУЩЕГО ПОДВИЖНУЮ ТОЧЕЧНУЮ МАССУ***Панёв А.С.***INVESTIGATION OF PEREODIC MOTION OF RIGID BODY WITH AN INTERNAL
MOVING POINT MASS**

Panev A.

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего
профессионального образования «Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)», Москва, Российская Федерация.****Itroduction.**

Investigation dynamic of rigid body which moving by means of relative motions of the internal components is a relevant engineering problem. So called vibrating mobile robots are simple in design, i.e. not require propulsion such as wheels or tracksand. The advantage of such type of mobile robots is that they are simple in design, i.e. not require propulsion such as wheels or tracksand and can be produced as a structurally sealed capsules that makes them resistant to aggressive external environment and creates the conditions for their application both on hard surfaces and in liquids. This circumstance makes the above devices promising for advanced space industry.

Articles [1,2,3] are devoted to investigation dynamic of rigid body which moving by means of relative motions of the internal components

Введение.

Исследование динамики тела, перемещающегося посредством относительного движения внутренней массы, представляет собой актуальную с инженерной точки зрения задачу. В последнее время широкое распространение получают так называемые вибрационные мобильные роботы, для перемещения которых не требуются колеса, гусеницы или другие специальные элементы взаимодействия с внешней средой. Такие устройства могут быть изготовлены в замкнутой оболочке, например в виде запаянной капсулы. Это делает их устойчивыми к агрессивному внешнему воздействию и позволяет использовать в недоступных для человека средах. В частности, такие устройства являются перспективными для космической отрасли.

Изучению движения тела, несущего внутренние подвижные массы посвящены работы [1,2,3].

Постановка задачи.

Рассматривается механическая система, состоящая из твердого тела (корпуса) M , находящегося на горизонтальной шероховатой плоскости, и материальной точки m , расположенной внутри тела (внутренней массы). Предполагается, что внутренняя масса совершает относительное движение по окружности, центр которой совпадает с центром масс корпуса, при этом угловая скорость ω относительного кругового движения постоянна. Внутренняя масса с внешней средой не взаимодействует, трение между корпусом и опорой описывается комбинированной моделью сухого кулонова и линейного вязкого трения.

Движение корпуса будем рассматривать в вертикальной плоскости, в которой введена абсолютная система координат OXY . С корпусом жестко связана подвижная система координат $O_1\xi\eta$ точка (рис. 1). Положение центра масс корпуса O_1 определяется координатами x и y абсолютной системы координат. Положение материальной точки

относительно корпуса задается углом φ , который изменяется по закону $\varphi = \omega t + \varphi_0$, вращение происходит против часовой стрелки, а ω – постоянная величина. Уравнения движения корпуса имеют вид:

$$\begin{cases} M\ddot{x} + m(\ddot{x} - R\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0)) = F_c - v\dot{x} \\ M\ddot{y} + m(\ddot{y} - R\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0)) = -(M + m)g + N \end{cases} \quad (1)$$

где, N – нормальная реакция, действующая на корпус со стороны плоскости, g – ускорение свободного падения, R – радиус окружности, по которой движется материальная

Между корпусом и плоскостью действуют силы сухого (кулонова) трения и сила линейного вязкого трения,

Принятая в данной работе комбинированная модель трения включает в себя силу сухого кулонова трения F_c , определяемую соотношениями (2), в которых k – коэффициент сухого трения, и силу линейного вязкого трения, заданную величиной $v\dot{x}$, где v – коэффициент вязкого трения.

$$F_c = \begin{cases} -kN \operatorname{sign}(\dot{x}), & \dot{x} \neq 0 \\ m\ddot{\xi}, & \dot{x} = 0 \text{ и } |m\ddot{\xi}| \leq kN \\ -kN \operatorname{sign}(-m\ddot{\xi}), & \dot{x} = 0 \text{ и } |m\ddot{\xi}| > kN \end{cases} \quad (2)$$

Мы предполагаем, что параметры системы выбраны так, что в момент начала движения и после него корпус совершает поступательное движение.

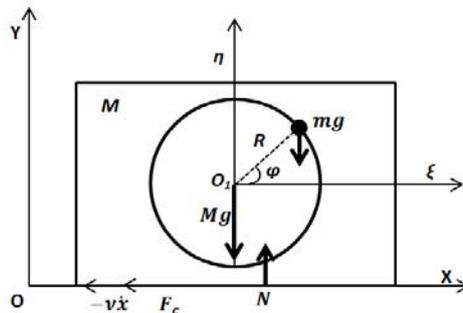


Рис. 1. Силы, действующие на систему

Для дальнейшего исследования вводятся безразмерные переменные (координата и время), функция f_c , характеризующая силу сухого трения, и дополнительный параметр μ :

$$t = \frac{t'}{\omega}, \quad x = \frac{Rmx'}{M + m}, \quad f_c = \frac{F_c}{Rm\omega^2}, \quad \mu = \frac{(M + m)g}{Rm\omega^2} \quad (3)$$

Пусть в начальный момент времени тело покоится на плоскости, а материальная точка, находится на вертикали в нижней точке $\varphi_0 = \pi/2$. Тогда уравнение движения корпуса примет вид:

$$\dot{u} + \frac{v}{(M+m)\omega} \cdot u = f_c \frac{-\pi}{2} + \sin t, \quad (4)$$

где $u = \dot{x}$, в дальнейшем обозначении безразмерного времени штрих «'» будем опускать.

$$f_c^{-\frac{\pi}{2}} = \begin{cases} -k(\mu + \cos(t))\text{sign}(u), & u \neq 0 \\ -\sin(t), & u = 0 \text{ и } |\sin(t)| \leq k(\mu + \cos(t)) \\ -k(\mu + \cos(t))\text{sign}(\sin(t)), & u = 0 \text{ и } |\sin(t)| > k(\mu + \cos(t)) \end{cases} \quad (5)$$

Пусть тело начинает движение в положительном направлении в момент времени t_1 , т.е. $u(t_1) = 0$, тогда решение (4) выглядит следующим образом:

$$u(t) = \frac{k\mu}{\alpha} (\exp\{\alpha \cdot (t_1 - t)\} - 1) + \frac{1}{1+\alpha^2} \cdot [\exp\{\alpha \cdot (t_1 - t)\} \cdot (k \cdot (\sin t_1 + \alpha \cos t_1) - \alpha \sin t_1 + \cos t_1) - k \cdot (\sin t + \alpha \cos t) + (\alpha \sin t - \cos t)], \quad (6)$$

где $\alpha = \frac{v}{(M+m) \cdot \omega}$.

Условия безотрывного движения. Зоны замедления. Для исследования движения тела по горизонтальной плоскости потребуем выполнение двух условий.

1. Условие, при котором тело сможет начать движение из состояния покоя.
2. Условие, при котором тело будет двигаться без отрыва от горизонтальной плоскости.

Первое условие будет выполнено, если существует такой момент времени, что горизонтальная составляющая силы инерции, приложенной к материальной точке, равна по абсолютной величине предельному значению силы сухого трения, т.е. если уравнение

$$\sin t = \mp k(\mu + \cos t) \quad (7)$$

имеет действительные решения. Последнее будет выполнено, если имеет место неравенство

$$k^2 \leq \frac{1}{\mu^2 - 1} \quad (8)$$

Второе условие будет выполнено, если во время движения вертикальная составляющая силы инерции по абсолютной величине не превзойдет силы тяжести, приложенной в центре масс системы, т.е. если уравнение

$$\mu + \cos t = 0 \quad (9)$$

не имеет действительных решений. Чтобы обеспечить выполнение данного условия, далее полагаем $\mu \geq 1$.

Найдем корни уравнения (7)

$$\begin{cases} t_1 = 2 \arctg\left(\frac{1 - \sqrt{1 - k^2(\mu^2 - 1)}}{k(\mu - 1)}\right) \\ t_2 = 2 \arctg\left(\frac{1 + \sqrt{1 - k^2(\mu^2 - 1)}}{k(\mu - 1)}\right) \end{cases} \quad \begin{cases} t_3 = 2\pi - t_2 \\ t_4 = 2\pi - t_1 \end{cases} \quad (10)$$

Моменты времени t_i ($i=1,2,3,4$) являются граничными точками интервалов (t_2, t_3) и (t_4, t_1), на которых ускорение тела противоположно направлению скорости или равно нулю. При прохождении первого из указанных интервалов материальная точка находится в верхней части траектории относительного движения (окружности), при прохождении второго – в ее нижней части. Указанные интервалы назовем соответственно *верхней и нижней зонами замедления*.

Анализ режимов движения корпуса. Рассмотрим один вид движения – движение с залипанием (остановкой) корпуса, при прохождении точечной массы верхней зоны замедления. В этом случае в некоторый момент времени, предшествующий моменту

времени t_3 , скорость корпуса должна обратиться в нуль. Требуя $u(t_3) \leq 0$ из уравнения (6), приходим к следующему неравенству

$$\frac{k\mu}{\alpha} (\exp\{\alpha \cdot (t_1 - t_3)\} - 1) + \frac{1}{1+\alpha^2} \cdot [\exp\{\alpha \cdot (t_1 - t_3)\} \cdot (k \cdot (\sin t_1 + \alpha \cos t_1) - \alpha \sin t_1 + \cos t_1) - k \cdot (\sin t_3 + \alpha \cos t_3) + (\alpha \sin t_3 - \cos t_3)] \leq 0 \quad (11)$$

которое гарантирует, что корпус остановится при прохождении верхней зоны замедления.

Действуя аналогично, можно показать, что условие, остановки тела в нижней зоне замедления также обеспечивается выполнением неравенства (11). Это означает, что если тело остановится при прохождении верхней зоны замедления, то оно обязательно остановится и при прохождении ею нижней зоны замедления. Кроме того, можно показать, что расстояние пройденное телом при движении вперед равно расстоянию, которое тело проходит при движении назад. Таким образом, корпус совершает движение подобно тому, как двигалось бы твердое тело по абсолютно гладкой поверхности. Данный режим является периодическим, а движение ограниченным по горизонтальной оси. Необходимо отметить, что все указанные свойства также характерны и для движения с залипаниями в зонах замедления при отсутствии вязкого трения.

Если неравенство (11) выполнено с противоположным знаком, т.е.

$$\frac{k\mu}{\alpha} (\exp\{\alpha \cdot (t_1 - t_3)\} - 1) + \frac{1}{1+\alpha^2} \cdot [\exp\{\alpha \cdot (t_1 - t_3)\} \cdot (k \cdot (\sin t_1 + \alpha \cos t_1) - \alpha \sin t_1 + \cos t_1) - k \cdot (\sin t_3 + \alpha \cos t_3) + (\alpha \sin t_3 - \cos t_3)] > 0, \quad (12)$$

то тело не останавливается при прохождении верхней зоны замедления. В этом случае корпус под действием силы инерции разгоняется так, что не остановится в верхней зоне замедления и проскакивает ее без остановки.

Определим условие, при котором тело проходит верхнюю зону замедления без остановки, но остановится при прохождении нижней зоны замедления. Для этого исследуем сначала предельный случай, когда тело остановится ровно на правой границе нижней зоны замедления. Для этого решим уравнение (4) на промежутке (t_1, t^*) и $(t^*, t_1 + 2\pi)$ при условии, что $u(t_1) = u(t^*) = u(t_1 + 2\pi) = 0$, а $t^* \in (t_3, t_4)$ и получим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{k\mu}{\alpha} (\exp\{\alpha \cdot (t_1 - t^*)\} - 1) + \frac{1}{1+\alpha^2} \cdot [\exp\{\alpha \cdot (t_1 - t^*)\} \cdot (k \cdot (\sin t_1 + \alpha \cos t_1) - \alpha \sin t_1 + \cos t_1) - k \cdot (\sin t^* + \alpha \cos t^*) + (\alpha \sin t^* - \cos t^*)] = 0, \\ -\frac{k\mu}{\alpha} (\exp\{\alpha \cdot (t^* - t_1 - 2\pi)\} - 1) + \frac{1}{1+\alpha^2} \cdot [\exp\{\alpha \cdot (t^* - t_1 - 2\pi)\} \cdot (-k \cdot (\sin t^* + \alpha \cos t^*) - \alpha \sin t^* + \cos t^*) + k \cdot (\sin t_1 + \alpha \cos t_1) + (\alpha \sin t_1 - \cos t_1)] = 0, \end{cases} \quad (13)$$

где t^* момент остановки корпуса после прохождения верхней зоны замедления. Решением данной системы будет являться условие существования периодического режима движения с остановкой на границе нижней зоны замедления. В нашей работе приведено численное решение системы (12), т.е. для различных параметров α , k , μ из первого уравнения системы найдены t^* (моменты остановки корпуса после прохождения точкой верхней зоны замедления), полученные моменты времени t^* подставлены во второе уравнение системы и найдено его значение. Показано, что в зависимости от знака полученного результата возможны следующие случаи:

1. Если данное выражение меньше или равно нулю, то тело будет совершать периодическое движение с остановкой только в нижней зоне замедления.

2. Если данное выражение больше нуля, то тело не остановится ни в нижней ни в верхней зонах замедления, то есть движение в общем случае не будет периодическим. Таким образом в работе были исследованы периодические режимы движения тела, несущего подвижную массу, в том числе найдены условия существования данных режимов. Условия изображены на графиках рисунка 2, для случаев $\alpha = 0.2$ и $\alpha = 1.5$. На графиках можно сравнить условия полученные при движении с учетом вязкого трения и при его отсутствии.

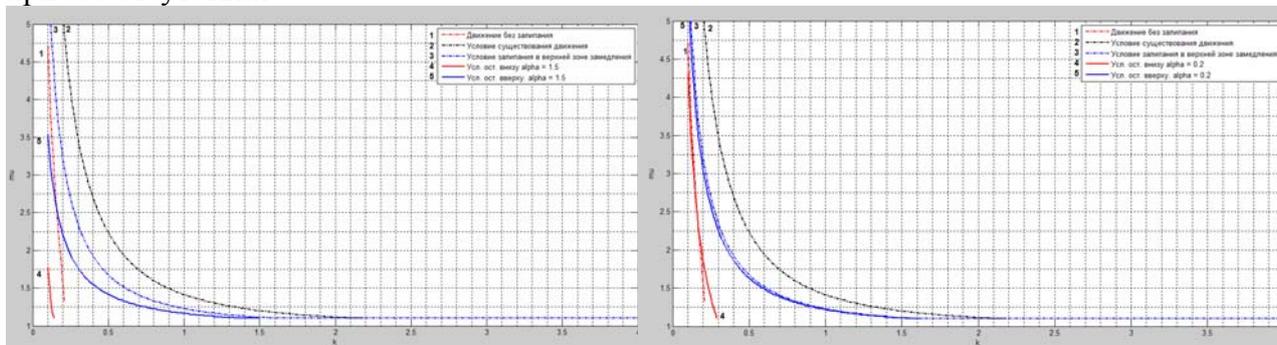


Рис. 2. Области существования движения

На графиках рисунка 3 изображены зависимости скорости от времени, при движении с залипанием (остановке) в верхней и нижней зонах замедления и только в нижней зоне замедления при различных значениях параметра α и при отсутствии вязкого трения

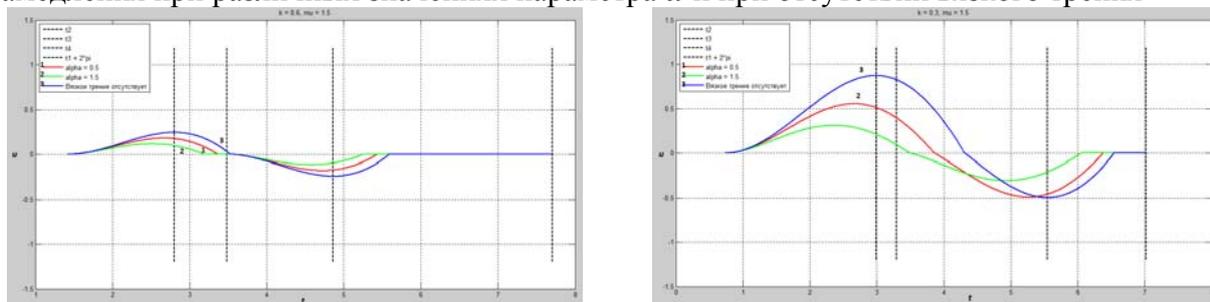


Рис. 3. Скорость движения корпуса

Автор выражает признательность научному руководителю Бардину Б. С. за постановку задачи и ряд важных замечаний.

Библиографический список

1. Болотник Н.Н., Зейдис И.М., Циммерманн К., Яцун С.Ф. Динамика управляемых движений вибрационных систем. // Изв. РАН. ТиСУ. 2006. Т.70, №5. С. 157-167.
2. Черноушко Ф.Л. Анализ и оптимизация движения тела, управляемого посредством подвижной внутренней массы. // ПММ. 2006. Т.70 Вып. 6. С. 915-946.
3. Черноушко Ф.Л. Оптимальные периодические движения двухмассовой системы в сопротивляющейся среде. // ПММ. 2008 Т.72 Вып. 2 С. 203-215

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ ПРИ НАЛИЧИИ ДВОЙНОГО РЕЗОНАНСА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

INVESTIGATION OF PERIODIC MOTIONS OF A HAMILTONIAN TWO-DEGREE-OF-FREEDOM SYSTEM IN THE PRESENCE OF THE DOUBLE THIRD-ORDER RESONANCE

А.И. Сафонов, О.В. Холостова

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

Рассматриваются движения неавтономной 2π -периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности тривиального положения равновесия, устойчивого в линейном приближении. Характеристические показатели $\pm i\lambda_j$ соответствующей линеаризованной системы уравнений возмущенного движения чисто мнимые.

Пусть величины λ_j , $2\lambda_j$ и $\lambda_1 \pm \lambda_2$ не являются целыми числами (в системе нет резонансов первого и второго порядков). Тогда в окрестности рассматриваемого равновесия гамильтониан можно представить в виде

$$H(q_j, p_j, t) = \frac{1}{2}\lambda_1(q_1^2 + p_1^2) + \frac{1}{2}\sigma\lambda_2(q_2^2 + p_2^2) + H_3(q_j, p_j, t) + H_4(q_j, p_j, t) + O_5, \quad (1)$$

где q_i и p_i ($i = 1, 2$) — канонически сопряженные координаты и импульсы, H_k — совокупности слагаемых k -й степени, а O_5 — не менее пятой степени, относительно этих величин.

Пусть величины λ_1 и λ_2 задаются одним из наборов (k_1, k_2 — целые числа) [1]

$$\lambda_1 = k_1 + 1/3, \quad \lambda_2 = k_2 + 5/6, \quad \lambda_1 = k_1 + 2/3, \quad \lambda_2 = k_2 + 1/6, \quad (2)$$

$$\lambda_1 = k_1 + 1/3, \quad \lambda_2 = k_2 + 1/6, \quad \lambda_1 = k_1 + 2/3, \quad \lambda_2 = k_2 + 5/6. \quad (3)$$

Тогда в случаях (2) и (3) величины $3\lambda_1$, $\lambda_1 + 2\lambda_2$ и $3\lambda_1$, $\lambda_1 - 2\lambda_2$ соответственно являются целыми, и в системе реализуется двойной (основной и комбинационный) резонанс третьего порядка. В каждом из этих случаев в системе имеет место также один из комбинационных резонансов четвертого порядка. Будем считать, что в гамильтониане возмущенного движения соответствующие резонансные коэффициенты малы и имеют порядок ε ($0 < \varepsilon \ll 1$).

Ранее [1] было показано, что для указанных случаев двойного резонанса третьего порядка тривиальное положение равновесия системы неустойчиво. Цель данной работы — решение вопроса о существовании и устойчивости периодических движений системы в ε -окрестности этого равновесия и, в частности, нахождение устойчивых периодических движений.

Сделаем в (1) замену переменных $q_i = \varepsilon\tilde{q}_i$, $p_i = \varepsilon\tilde{p}_i$ ($i = 1, 2$) и далее при помощи ряда канонических замен переменных приведем гамильтониан к виду, характерному для рассматриваемых резонансных случаев, в членах до четвертой степени включительно относительно возмущений. В симплектических полярных координатах Φ_i, R_i ($i = 1, 2$) преобразованный гамильтониан может быть представлен одним из следующих двух видов

$$\Gamma_1 = \alpha R_1^{3/2} \cos 3\Phi_1 + R_1^{1/2} R_2 \cos(\Phi_1 + 2\Phi_2) + \gamma_{20} R_1^2 + R_1 R_2 + \gamma_{02} R_2^2 + O(\varepsilon), \quad (4)$$

$$\Gamma_2 = \alpha R_1^{3/2} \cos 3\Phi_1 + R_1^{1/2} R_2 \cos(\Phi_1 - 2\Phi_2) + \gamma_{20} R_1^2 + R_1 R_2 + \gamma_{02} R_2^2 + O(\varepsilon). \quad (5)$$

Гамильтониан (4) отвечает случаю двух сильных (основного и комбинационного) резонансов третьего порядка, гамильтониан (5) — случаю сильного основного и слабого комбинационного резонансов. Эти гамильтонианы зависят от трех параметров: резонансные коэффициенты α в (4) и (5) считаем положительными, коэффициенты γ_{20} и γ_{02} могут принимать значения любого знака.

Отбрасывая в (4) или (5) последние слагаемые, получаем приближенные (модельные) гамильтонианы. Соответствующие им модельные системы имеют отличные от тривиального положения равновесия, для которых $\sin 3\Phi_1 = 0$, $\sin(\Phi_1 \pm 2\Phi_2) = 0$, а равновесные значения величин R_1 и R_2 для обоих гамильтонианов задаются системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{3}{2} \alpha R_1^{1/2} \delta_1 + \frac{1}{2} \frac{R_2}{R_1^{1/2}} \delta_2 + 2\gamma_{20} R_1 + R_2 = 0, \\ \delta_2 R_1^{1/2} + R_1 + 2\gamma_{02} R_2 = 0, \end{cases} \quad (6)$$

где введены обозначения $\delta_1 = \cos 3\Phi_1$, $\delta_2 = \cos(\Phi_1 \pm 2\Phi_2)$ ($\delta_i = \pm 1$).

В пространстве параметров α , γ_{20} и γ_{02} выделены области с различным числом (от нуля до двух) действительных положительных решений системы (6) для четырех наборов величин δ_1, δ_2 .

Устойчивость найденных положений равновесия модельных систем исследовалась путем рассмотрения квадратичных частей соответствующих гамильтонианов возмущенного (в окрестности этих равновесий) движения.

Выявлены два типа положений равновесия, для которых указанные квадратичные части являются знакоопределенными; в этих случаях выполнены достаточные условия устойчивости. Для первого из этих равновесий имеем $\delta_1 = \delta_2 = -1$, $\gamma_{02} > 0$, $\gamma_{20}\gamma_{02} > -1/32$, при этом параметр α принимает значения в ограниченном диапазоне. Для второго равновесия $\delta_1 = \delta_2 = 1$, $\gamma_{02} < 0$, $\gamma_{20}\gamma_{02} > 1/4$, а параметр α произволен ($\alpha > 0$).

Для остальных положений равновесия рассматривалось характеристическое уравнение линеаризованных уравнений возмущенного движения, имеющее вид $\lambda^4 + a\lambda^2 + b = 0$. При условии $b < 0$ это уравнение имеет корни с положительными вещественными частями, и указанное неравенство представляет достаточное условие неустойчивости. Выявлены положения равновесия рассматриваемых модельных систем, для которых выполнено это условие.

Согласно методу малого параметра Пуанкаре, из каждого отличного от тривиального положения равновесия модельных систем рождается единственное, аналитическое по ε , периодическое решение полных систем с гамильтонианами (4), (5). В исходных переменных им соответствуют 12π -периодические движения, происходящие в ε -окрестности неустойчивого положения равновесия. Положениям равновесия, для которых выполнены достаточные условия устойчивости или неустойчивости, соответствуют устойчивые в линейном приближении или неустойчивые периодические движения исходной системы. Это следует из непрерывности по ε характеристических показателей соответствующих линеаризованных уравнений возмущенного движения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 14-01-00380) и программы «Государственная поддержка ведущих научных школ» (НШ-2363.2014.1).

Литература

1. Холостова О.В. О движении гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при наличии кратных резонансов третьего порядка // *Нелинейная динамика*. 2012. Т. 8. №2. С. 267 – 288.

We consider here a motion of a non-autonomous time-periodic two-degree-of-freedom Hamiltonian system in the neighborhood of the trivial equilibrium in the presence of the double third-order resonance. Periodic motions of the system in a small neighborhood of the equilibrium are found. Sufficient conditions for their stability and instability are obtained.

ОБ ЭВОЛЮЦИИ ДВУХЧАСТОТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В СЛУЧАЕ ОРБИТАЛЬНЫХ ЛИНДБЛАДОВСКИХ РЕЗОНАНСОВ ПРИ УЧЁТЕ РЭЛЕЕВСКОЙ ДИССИПАЦИИ И ВЕКОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ЭКЗОПЛАНЕТ

В. С. Теплицкая

ФГБУН Всероссийский институт научной и технической информации Российской академии наук, Институт физики, технологии и информационных систем, Московский педагогический государственный университет, Москва, Россия.

e-mail: VeraTeplc@yandex.ru

ON THE EVOLUTION OF DUAL-FREQUENCY DYNAMICAL SYSTEMS IN THE CASE OF ORBITAL MEAN MOTIONS RESONANCES WITH THE INCLUSION RAYLEIGH DISSIPATION AND SECULAR PERTURBATIONS FROM EXOPLANETS

V.S. Teplitskaya

Abstract

Multiple exoplanet system with a pair of planets in mean motions resonance (2:1, 3:2, 4:3) are considered. The influence of secular perturbations from non-resonant planets on dynamic evolution of resonant two-frequency systems, moving in a viscous fluid, was taken into account.

Аннотация

Рассмотрены кратные экзопланетные системы с парой планет в резонансе средних движений (2:1;3:2;4:3). Было учтено влияние вековых возмущений от нерезонансных планет, входящих в состав звёздной системы, на динамическую эволюцию двухчастотных систем в орбитальном резонансе, движущихся в вязкой среде.

1. В настоящее время почти одна треть звёзд, у которых обнаружены планеты, являются многопланетными системами, состоящими из не менее трёх планет. Системы с планетами-гигантами встречаются преимущественно у звёзд Солнечного типа (спектральных классов K5-F5), в то время как у красных карликов их доля значительно меньше. Значительное число обнаруживаемых экзопланетных систем отличается от планет Солнечной системы тем, что массивные экзопланеты находятся вблизи звёзд. Но подобная конфигурация не прослеживается даже в спутниковых системах планет-гигантов Солнечной системы. Очевидно, что массивные и близко расположенные к звезде планеты легче обнаружить и тем более в течение непродолжительных временных интервалов наблюдений. Например, чтобы зарегистрировать (транзитным методом) повторное прохождение по диску звезды экзопланеты, имеющей схожую с Юпитером орбитальную конфигурацию, придётся ожидать почти 12 лет, а для экзопланеты типа Сатурна – целых 29 лет.

В то же время, корректный учёт компоненты барицентрического лучевого ускорения звёзд в методе лучевых скоростей приводит к существенному увеличению больших полуосей орбит обнаруживаемых кандидатов в экзопланеты, что согласуется с современной теорией образования и динамической эволюции планетных систем [1]. В

связи с этим предсказываемый некоторыми исследователями эффект миграции экзопланет после их образования к центральной звезде с орбит, находящихся в зоне возможного формирования планет-гигантов (на расстоянии, не менее 4-5 а.е.), не представляется единственным объяснением происхождения “низкоорбитальных” экзопланет. К тому же в Солнечной системе, как известно, орбиты планет-гигантов не подвержены миграции. Кроме того, моделирование планетных миграций в существенно вязких дисках указывает на уменьшение эффективности миграций с ростом массы планеты. Следовательно, значительное количество массивных экзопланет могут находиться на долгопериодических орбитах, в том числе ещё не обнаруженных, в частности, и ввиду ограниченности времени существования современных программ поиска планет.

Наблюдательные данные свидетельствуют о том, что наряду с распространённостью резонансных конфигураций и, прежде всего, орбитальных двухчастотных резонансов, в Солнечной системе (как среди больших планет: Юпитер-Сатурн, Уран - Нептун, так и в спутниковых системах, в движениях астероидов основного пояса и объектов пояса Койпера, в структуре колец Сатурна), двухчастотные орбитальные резонансы характерны и для экзопланетных систем.

2. Несмотря на даже малые априори величины рассеяния энергии в гравитирующих динамических системах (например, в экзопланетных системах или кратных звёздных системах при перетекании вещества при аккреции), учёт диссипативных факторов может существенно отразиться на динамической эволюции “гравитационно активных” компонент системы. Наличие в реальных динамических системах диссипативных факторов и связанных с ними асимптотических предельных траекторий приводит к меньшей чувствительности системы к различного рода слабым возмущениям. Так, в частности, в консервативных системах движение около сепаратрисы всегда хаотическое, в то время как для диссипативных систем это утверждение оказывается неверным.

В более ранних авторских работах [2,3] в случае рэлеевской диссипации для двухчастотных орбитальных резонансов первого порядка (линдбладовских резонансов), характеризуемых максимальными амплитудами эффекта, в рамках неограниченного планетного варианта задачи трёх тел на основании концепции частичной детерминированности было получено аналитическое решение в функциях Вейерштрасса, интерпретирующее эволюцию всех орбитальных элементов исследуемых гравитирующих тел. В настоящей работе, с учётом многокомпонентности планетных систем у звёзд, было также рассмотрено влияние на динамическую эволюцию в вязкой среде двухчастотных линдбладовских резонансных систем вековых возмущений от планет, входящих в состав звёздной системы, но движение которых не образует резонансные конфигурации.

3. Установлена классификация фазовых траекторий исследуемой динамической системы, оценены вероятности переходов траекторий из различных областей фазовой плоскости динамической системы и возможности захватов в резонанс с учётом неопределённости начальных условий, то есть при различных начальных конфигурациях гравитирующих тел (интегральных постоянных).

Показано, что при приближении эксцентриситетов орбит к своему максимальному значению движение линии апсид замедляется, что при прочих равных условиях понижает вероятность столкновений (сближений) гравитирующих тел.

Для избранных (в рамках области применимости рассматриваемой модели) экзопланетных систем на основе полученных аналитических результатов были построены соответствующие прогностические модели орбитальной эволюции.

Установлено, что исследуемое влияние вековых возмущений преимущественно проявляется в росте вековых слагаемых в аргументах перицентров орбит двухчастотных систем.

Сопоставление полученных в настоящей работе результатов с данными, основанными на результатах численного интегрирования (на обоснованных интервалах времени), продемонстрировало преимущество аналитической модели в интерпретации эволюции основных характеристик исследуемых динамических систем.

Литература

1. Б.Р. Мушаилов, В.С. Теплицкая. О надёжности определения орбитальных параметров экзопланет доплеровским методом. //Космические исследования. 2012. Т.50. №6. С.452-461.

2. Б.Р. Мушаилов, В.С. Теплицкая. «Качественные исследования эволюции орбитальных элементов впланетном резонансном варианте задачи трёх тел в случае рэлеевской диссипации» // Космические исследования. 2013. Т.51. №5. С.402-411.

3. Мушаилов Б.Р., Теплицкая В.С. Аналитические решения, интерпретирующие эволюцию двухчастотных космических систем в случае орбитального линдбладовского резонанса при учёте рэлеевской диссипации. I. // Космические исследования. 2014. Т52. №4. С. 313-321; Мушаилов Б.Р., Теплицкая В.С. Аналитические решения, интерпретирующие эволюцию двухчастотных космических систем в случае орбитального линдбладовского резонанса при учете рэлеевской диссипации. II // Космические исследования, 2015, том 53, № 2, С. 165-172.

СТАБИЛИЗАЦИЯ И УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ГОЛОНОМНОЙ СИСТЕМЫ В СИНГУЛЯРНЫХ СЛУЧАЯХ

Дересса Чернет Туге, Р.Г.Мухарлямов,

Кафедра теоретической физики и механики

Российский университет дружбы народов, ул. Миклухо-Маклая, д.6, Россия, 117198

Email: chernettuge@yandex.ru

Stabilization and Dynamic Equations of Holonomic Systems in Singular cases

Deressa Chernet Tuge and R.G. Mukharlyamov

Department of Theoretical Physics and Mechanics

Peoples' Friendship University of Russia

6, Miklukho-Maklaya str. Moscow, Russia, 117198

Abstract

The paper presents method of constructing dynamic equations of holonomic systems with singular Jacobian and/or Inertia matrices. Modification to the constraint stabilization method of Baumgart is proposed. An example is provided to show the effectiveness of the results developed.

Аннотация

В работе излагается решение задачи построения уравнений динамики голономной системы с особой матрицей Якоби и с особой матрицей инерции. Предложено модификация метода стабилизации связей, предложенного в работах Баумгарта. Приводятся результаты исследований и пример, демонстрирующий эффективность применения разработанных методов

1. Модификация метода стабилизации связей Баумгарта

Уравнения динамики n – мерной механической системы, на которую наложено m ($m < n$) голономных связей, можно представить в виде:

$$M(q)\ddot{q} + \Theta_q^T \lambda = \bar{Q}(q, \dot{q}, t), \quad (1)$$

$$\Theta(q, t) = 0. \quad (2)$$

Здесь, $\Theta = (\Theta^1, \Theta^2, \dots, \Theta^m)$, $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – обобщенная матрица инерции, $\lambda \in \mathbb{R}^m$ – вектор множителей Лагранжа, $\Theta_q \in \mathbb{R}^{m \times n}$ – матрица Якоби, $\bar{Q} \in \mathbb{R}^n$ – вектор обобщенных внешних

сил и $q \in \mathbb{R}^n$ – обобщенные координаты. Дифференцируя уравнение (2) по времени, получаем:

$$\dot{\Theta}(q, \dot{q}, t) = \Theta_q \dot{q} - \eta = 0, \quad (3)$$

где $\eta = -\Theta_t$.

Дифференцируя (3) ещё раз по времени, получаем:

$$\begin{aligned} \ddot{\Theta}(q, \dot{q}, t) &= \Theta_q \ddot{q} - \xi = 0, \\ \xi &= -(\Theta_q \dot{q})_q \dot{q} - 2\Theta_{qt} \dot{q} - \Theta_{tt} = -\dot{\Theta}_q \dot{q} - \dot{\Theta}_t. \end{aligned} \quad (4)$$

Метод Баумгарта предполагает замену величины $\ddot{\Theta}$ в уравнении (4) выражением:

$$\ddot{\Theta} + 2\alpha\dot{\Theta} + \beta^2\Theta = 0. \quad (5)$$

Равенство (5) имеет довольно ограниченное применение, определяемое только выбором параметров коррекции α и β . Поэтому целесообразно рассмотреть более общий случай.

Заменяем выражение (5) матричным соотношением:

$$\ddot{\Theta} + K_D \dot{\Theta} + K_P \Theta = 0. \quad (6)$$

Здесь K_D и K_P – постоянные положительно определенные симметричные матрицы. Выражение (6) может быть записано в виде системы:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Theta \\ \dot{\Theta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K_P & -K_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta \\ \dot{\Theta} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Для исследования устойчивости тривиального решения системы (7) используется функция Ляпунова в виде квадратичной формы:

$$\begin{aligned} V(\Theta, \dot{\Theta}) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Theta \\ \dot{\Theta} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} K_P + \varepsilon K_D & \varepsilon I \\ \varepsilon I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta \\ \dot{\Theta} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} [\dot{\Theta} + \varepsilon\Theta]^T [\dot{\Theta} + \varepsilon\Theta] + \frac{1}{2} \Theta^T [K_P + \varepsilon K_D - \varepsilon^2 I] \Theta. \end{aligned} \quad (8)$$

Постоянная величина ε определяется так, чтобы удовлетворялись условия:

$$K_D - \varepsilon I > 0, \quad K_P + \varepsilon K_D - \varepsilon^2 I > 0.$$

Производная функции $V(\Theta, \dot{\Theta})$ по времени записывается в виде

$$\dot{V}(\Theta, \dot{\Theta}) = - \begin{bmatrix} \Theta \\ \dot{\Theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon K_P & 0 \\ 0 & K_D - \varepsilon I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta \\ \dot{\Theta} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Правая часть равенства (9) является определено отрицательной величиной. Следовательно, нулевое решение $(\Theta, \dot{\Theta}) = (0, 0)$ уравнения (7) асимптотически устойчиво.

С учетом уравнения возмущений связей (6), уравнение (1) приводится к виду:

$$M\ddot{q} = \bar{Q} - \Theta_q^T (\Theta_q M^{-1} \Theta_q^T)^{-1} (\Theta_q M^{-1} \bar{Q} - \Omega) . \quad (10)$$

Здесь

$$\Omega = -(\Theta_q \dot{q})_q \dot{q} - 2\Theta_{qt} \dot{q} - \Theta_{tt} - K_D \dot{\Theta} - K_P \Theta , \quad (11)$$

Представление уравнений динамики в виде (10) составляет модификацию метода стабилизации связей Баумгарта.

Таким образом, дифференциально-алгебраические уравнения (1) и (2) приводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (10), для решения которой могут быть использованы стандартные численные методы решения, например, метод Рунге-Кутты.

Но в случае, когда матрица инерции M является особой, и матрица Якоби Θ_q не имеет полного ранга, условия существования и единственности выражения векторов \ddot{q} и λ в уравнении (10) не становятся очевидными.

Ранг матрицы Якоби становится дефицитным в случае, когда: некоторые из уравнений связей зависят от остальных, число уравнений связей больше, чем число неизвестных, когда механическая система достигает конфигурации, в которой происходит резкое изменение числа степеней свободы. Например, кривошипно-шатунный механизм достигает сингулярной конфигурации, когда два звена находятся в вертикальном положении.

Эти проблемы рассматриваются следующим образом.

2. Уравнения динамики голономной системы в сингулярных случаях

Пусть отклонения от уравнений связей обозначены векторами y и \dot{y} :

$$\Theta(q, t) = y \quad (12)$$

$$\Theta_q \dot{q} + \dot{\Theta}_t = \dot{y} . \quad (13)$$

Здесь $y = (y^1, y^2, \dots, y^m)$ и $\dot{y} = (\dot{y}^1, \dot{y}^2, \dots, \dot{y}^m)$. С учетом векторов y и \dot{y} кинематическое состояние механической системы определяется вектором обобщенных координат $u = \{q, y\}$ и обобщенных скоростей $\dot{u} = \{\dot{q}, \dot{y}\}$.

Пусть T^0 – кинетическая энергия, V^0 – потенциальная энергия, D^0 – диссипативная функция свободной механической системы, такие, что:

$$T^0 = T^0(q, \dot{q}), V^0 = V^0(q), D^0 = D^0(q, \dot{q}).$$

Динамика свободной системы описывается уравнениями Лагранжа

$$M\ddot{q} = \hat{Q}. \quad (14)$$

Здесь $\hat{Q} = L^0_q + Q_{ex} - \dot{M}\dot{q}$, $L^0_q = \frac{\partial(T^0 - V^0)}{\partial \dot{q}}$, Q_{ex} – вектор обобщенных внешних сил, приложенных к системе. Пусть теперь T – кинетическая энергия, V – потенциальная энергия, D – диссипативная функция несвободной системы, на которую наложено m голономных связей. Тогда запишем T, V, D в матричном виде:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{y}}^T \mathbf{B} \dot{\mathbf{y}}, V = V^0(\mathbf{q}) + \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{K}_P \mathbf{y}, D = D^0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{y}}^T \mathbf{K}_D \dot{\mathbf{y}}, \quad (15)$$

где $\mathbf{M} = (m_{ij})$, $\mathbf{B} = (a_{ij})$, $\mathbf{K}_P = (v_{ij})$, $\mathbf{K}_D = (c_{ij})$, $i, j = 1, 2 \dots m$. Будем считать, что коэффициенты a_{ij} , v_{ij} и c_{ij} являются постоянными, и матрицы \mathbf{B} , \mathbf{K}_D , \mathbf{K}_P имеют размер $m \times m$, являются диагональными и положительно определёнными. Составим уравнения Лагранжа относительно возмущений связей:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{y}^k} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{y}}^T \mathbf{B} \dot{\mathbf{y}} \right) \right\} - \frac{\partial}{\partial y^k} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{y}}^T \mathbf{B} \dot{\mathbf{y}} \right) + \frac{\partial}{\partial y^k} \left(\frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{K}_P \mathbf{y} \right) + \frac{\partial}{\partial \dot{y}^k} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{y}}^T \mathbf{K}_D \dot{\mathbf{y}} \right) = 0. \quad (16)$$

Упростим выражения в левой части уравнения (16) почленно и получим:

$$((\mathbf{y}^T)_{y^k}) (\mathbf{B} \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}_D \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}_P \mathbf{y}) = 0. \quad k = 1 \dots m \quad (17)$$

Модифицированные уравнения динамической системы получаются путем комбинирования уравнений динамики свободной системы (14) (принимая $D^0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0$) с уравнениями возмущений связей (17):

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + ((\mathbf{y}^T)_{y^k}) \mathbf{B} (\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}_D \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}_P \mathbf{y}) = \widehat{\mathbf{Q}}. \quad (18)$$

Из последнего равенства следует:

$$(\mathbf{M} + \boldsymbol{\theta}_q^T \mathbf{B} \boldsymbol{\theta}_q) \ddot{\mathbf{q}} = \widehat{\mathbf{Q}} - \boldsymbol{\theta}_q^T \mathbf{B} (\mathbf{K}_D \dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{K}_P \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\xi}), \quad (19)$$

$$\boldsymbol{\xi} = -(\boldsymbol{\theta}_q \dot{\mathbf{q}})_q \dot{\mathbf{q}} - 2\boldsymbol{\theta}_{qt} \dot{\mathbf{q}} - \boldsymbol{\theta}_{tt} = -\dot{\boldsymbol{\theta}}_q \dot{\mathbf{q}} - \dot{\boldsymbol{\theta}}_t. \quad (20)$$

Выражение (19) является модифицированным уравнением Лагранжа. Преимущество модифицированного уравнения Лагранжа состоит в том, что матрица коэффициентов $(\mathbf{M} + \boldsymbol{\theta}_q^T \mathbf{B} \boldsymbol{\theta}_q)$ всегда положительно определена, включая случай, когда матрица Якоби не обладает полным рангом. Это обстоятельство позволяет решить проблему стабилизации вблизи особых точек. Вопрос о стабилизации системы при использовании равенства (19) решается путем соответствующего выбора элементов матриц \mathbf{K}_D и \mathbf{K}_P .

Пример 1. Рассмотрим манипулятор, состоящий из двух звеньев, $L_1 = l, L_2 = l/2, m_2 = m, m_1 = 2m_2 = 2m$, как показано на Рис.1. Предположим, что точка P движется из положения $x = x_0$ по горизонтальной прямой $y = l/2$ с постоянной скоростью v вдоль оси Ox по направлению, противоположному направлению оси.

В этом примере проверяется, что, моделирование методом модифицированных уравнений Лагранжа (19) осуществляется без разрыва, включая точки сингулярности: $q_1 = \pi/2$ и $q_2 = \pi$ (см. рис.3). Однако, модификация методом Баумгарта стабилизации связей, определяемая равенством (10), не может осуществить моделирование в точках сингулярности (см. рис.2).

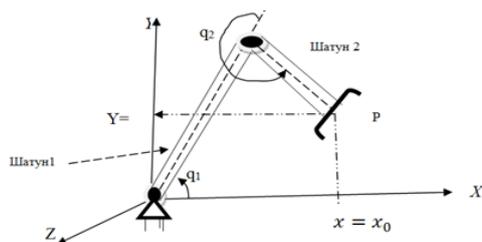
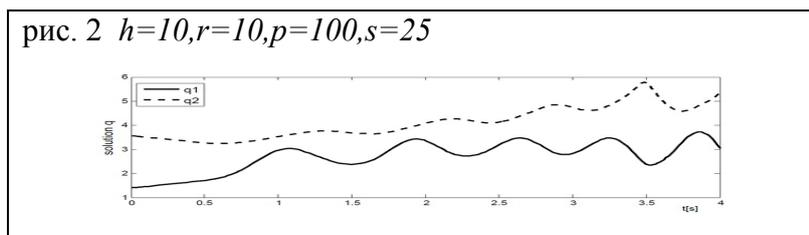
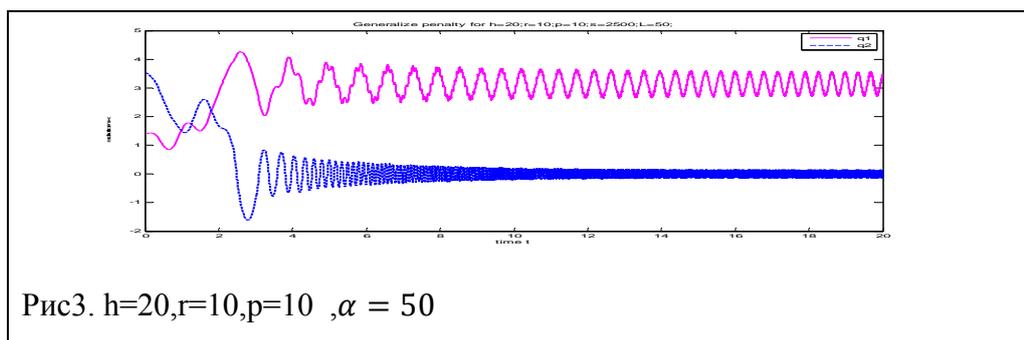


Рис.1 Манипулятор двух шатунов



На рисунке 2 видно, что решение имеет разрыв при $t = 4.067105e + 0$, свидетельствующий о том, что модифицированный метод стабилизации связей Баумгарта не в состоянии обеспечить моделирование вблизи особых точек.



Результаты численных экспериментов показывают, что при больших значениях величины α , решение системы уравнений динамики становится неустойчивым относительно уравнений связей.

Список Литературы

1. Mukharlyamov R.G. Stabilization of the motion of mechanical systems in prescribed phase- space manifolds. //Applied Mathematics and Mechanics. 2006. №. 70. С.210–222.
2. Baumgarte J. Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical system. //Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1972. №1:1–16.
3. Mukharlyamov R.G., Deressa C. T. Stabilization of redundantly constrained dynamic system // Bulletin of PFUR. Series Mathematics, Information Science, Physics. 2015. No.1, Pp.60-72.
4. Deressa C. T. Constructing dynamic equations of constrained mechanical systems. //Bulletin of PFUR. Series Mathematics, Information Science, Physics, 2013. №3, pp 92-104.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 13-08-00535

О ПОСТРОЕНИИ МНОЖЕСТВА УПРАВЛЕНИЙ В СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Тлеубергенов М. И., Ибраева Г.Т.

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

marat207@mail.ru, gulmira_ibraeva@mail.ru

Рассматривается задача восстановления в классе стохастических дифференциальных уравнений первого порядка типа Ито по заданным свойствам движения, когда управление входит в коэффициент сноса. Определяется вид управляющих параметров, обеспечивающий необходимые и достаточные условия существования заданного интегрального многообразия.

Ключевые слова: стохастические дифференциальные уравнения, интегральное многообразие, случайные возмущения, процессы с независимыми приращениями.

ON BASIC INVERSE PROBLEM IN THE PRESENCE OF RANDOM DISTURBANCES WITH INDEPENDENT INCREMENTS

Tleubergenov M.I., Ibraeva G.T.

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

marat207@mail.ru,

The problem of restoration in the class of stochastic differential Ito equations of the first order by given properties of motion, when control enters into the drift coefficient is considered. The control parameters, providing the necessary and sufficient conditions for the existence of a given integral manifold are obtained.

Key words: stochastic differential equations, integral manifold, random disturbances.

В работе Еругина [1] строится множество обыкновенных дифференциальных уравнений, которые имеют заданную интегральную кривую. Эта работа, впоследствии, оказалась основополагающей в становлении и развитии теории обратных задач динамики систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями [2-4]. Настоящая работа обобщает результаты [5,6] в плане рассмотрения более общего класса стохастических уравнений Ито и результаты [7] в плане рассмотрения более общего класса случайных возмущений, а именно случайные возмущения из класса процессов с независимыми приращениями.

Стохастическая задача с управлением сносу. Пусть задана система стохастических дифференциальных уравнений первого порядка типа Ито

$$\begin{cases} \dot{y} = f_1(y, z, v, w, t), & y \in R^l, \\ \dot{z} = f_2(y, z, v, w, t) + \sigma_1(y, z, v, w, t) \cdot \dot{\xi}, & z \in R^2, \xi \in R^k, \\ \dot{v} = f_3(y, z, v, w, t) + L_1(y, z, v, w, t) \cdot u_1, & v \in R^a, \\ \dot{w} = f_4(y, z, v, w, t) + L_2(y, z, v, w, t) \cdot u_2 + \sigma_2(y, z, v, w, t) \cdot \dot{\xi}, & w \in R^2, l_1 + l_2 + a + \rho_2 = n. \end{cases} \quad (1.1)$$

Требуется определить входящие в коэффициент сноса вектор-функции $u_1 = u_1(y, z, v, w, t) \in R^r$ и $u_2 = u_2(y, z, v, w, t) \in R^r$ по заданному интегральному многообразию

$$\Lambda(t): \lambda(y, z, v, w, t) = 0, \quad \text{где } \lambda = \lambda(y, z, v, w, t) \in C_{y z v w t}^{12121}, \quad \lambda \in R^m \quad (1.2)$$

где $C_{y z v w t}^{12121}$ обозначает множество непрерывно дифференцируемых по y, v, t и дважды непрерывно дифференцируемых по z, w функций $\gamma(y, z, v, w, t)$.

Будем говорить, что некоторая функция $g(x, t)$ принадлежит классу K , $g \in K$, если g непрерывна по $t, t \in [0, \infty]$, липшицева по x во всем пространстве $x = (y^T, z^T)^T \in R^n$, $\|g(x, t) - g(\tilde{x}, t)\| \leq B\|x - \tilde{x}\|$ и удовлетворяет условию линейного роста по x $\|g(x, t)\| \leq B(1 + \|x\|)$ с некоторой постоянной B .

Предполагается, что $f_1, f_2, f_3, f_4, L_1, L_2, \sigma_1, \sigma_2$ принадлежат классу функций K , что обеспечивает в произвольной окрестности множества (1.2) существование и единственность с точностью до стохастической эквивалентности решения $(y(t_0)^T, z(t_0)^T, v(t_0)^T, w(t_0)^T)^T = (y_0^T, z_0^T, v_0^T, w_0^T)^T$ являющегося непрерывным с вероятностью 1 строго марковским процессом [8, с.107].

Таким образом, пусть $\{\xi_1(t, \omega), \dots, \xi_k(t, \omega)\}$ - система независимых случайных процессов с независимыми приращениями, которые следуя [8], можно представить в виде суммы процессов : $\xi = \xi_0 + \int c(y)P^0(t, dy)$, ξ_0 - винеровский процесс; P^0 - пуассоновский процесс; $P^0(t, dy)$ - число скачков процесса P^0 в интервале $[0, t]$, попадающих на множество dy ; $c(y)$ -векторная функция, отображающая пространство R^{2n} в пространство значений R^k процесса $\xi(t)$ при любом t .

В настоящей работе для решения стохастической задачи восстановления используется метод квазиобращения Мухарлямова [3,4].

Для решения поставленной задачи по правилу стохастического дифференцирования Ито в случае процессов с независимыми приращениями [9, с.204] составляется уравнение возмущенного движения

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} = & \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} f_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial z} f_2 + \frac{\partial \lambda}{\partial v} f_3 + \frac{\partial \lambda}{\partial w} f_4 + \frac{\partial \lambda}{\partial v} L_1 u_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial w} L_2 u_2 + \\ & + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \sigma_1 \dot{\xi} + \frac{\partial \lambda}{\partial w} \sigma_2 \dot{\xi} + S_1 + S_2 + S_3 \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $S_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda}{\partial z} : \sigma_1 \sigma_1^T + \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda}{\partial w} : \sigma_2 \sigma_2^T$; а под $\frac{1}{2} \frac{\partial \lambda}{\partial z} : D_1$, $\frac{1}{2} \frac{\partial \lambda}{\partial w} : D_2$, следуя [9], понимается вектор, элементами которого служат следы произведений матриц вторых производных соответствующих элементов $\lambda_\mu(y, z, v, w, t)$ вектора $\lambda(y, z, v, w, t)$ по компонентам z, w на матрицы D_1, D_2 , где $D_1 = \sigma_1 \sigma_1^T$, $D_2 = \sigma_2 \sigma_2^T$;

$$S_2 = \int \left[\lambda(y, z + \sigma_1 c(x), v, w + \sigma_2 c(x), t) - \lambda(y, z, v, w, t) - \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z} \sigma_1 c(x) + \frac{\partial \lambda}{\partial w} \sigma_2 c(x) \right) \right] dx$$

;

$$S_3 = \int [\lambda(y, z + \sigma_1 c(x), v, w + \sigma_2 c(x), t) - \lambda(y, z, v, w, t)] dP^0(t, dx).$$

Введем произвольные функции Еругина [1]: m -мерную вектор-функцию A и $(m \times k)$ матрицу B , обладающие свойством

$$A(0, y, z, v, w, t) \equiv 0, \quad B(0, y, z, v, w, t) \equiv 0,$$

такие, что имеет место

$$\dot{\lambda} = A(\lambda, y, z, v, w, t) + B(\lambda, y, z, v, w, t) \dot{\xi}, \quad (1.5)$$

На основе уравнений (1.4) и (1.5) приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial v} L_1 u_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial w} L_2 u_2 = & A - \left(\frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} f_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial z} f_2 + \frac{\partial \lambda}{\partial v} f_3 + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \lambda}{\partial w} f_4 + S_1 + S_2 + S_3 \right), \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial z} \sigma_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial w} \sigma_2 = B, \quad (1.7)$$

из которых нужно определить управления u_1, u_2 . Для разрешения задачи потребуется

Лемма 1[3, с.12-13]. Совокупность всех решений линейной системы

$$H \mathcal{G} = g, \quad H = (h_{\mu k}), \quad \mathcal{G} = (\mathcal{G}_k), \quad g = (g_\mu), \quad \mu = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, n}, \quad m \leq n, \quad (1.8)$$

где матрица H имеет ранг равный m , определяется выражением

$$\mathcal{G} = s[HC] + H^+ g. \quad (1.9)$$

Здесь s -произвольная скалярная величина, $[HC] = [h_1 \dots h_m \ c_{m+1} \dots c_{n-1}]$ есть векторное произведение векторов $h_\mu = (h_{\mu k})$ и произвольных векторов $c_\rho = (c_{\rho k})$, $\rho = \overline{m+1, n-1}$; $H^+ = H^T (HH^T)^{-1}$, H^T - матрица, транспонированная к H .

Положим $u_1 = g(y, z, v, w, t)$, где g - произвольная функция из класса K .

Обозначив $\tilde{L} = \frac{\partial \lambda}{\partial w} L_2$, по формуле (1.9) леммы 1 из соотношений (1.6), (1.7)

определим искомые вектор - функцию u_2 и матрицу σ_2 в виде:

$$u_2 = s_1 [\tilde{L}C] + (\tilde{L})^+ \left[A - \left(\frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} f_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial z} f_2 + \frac{\partial \lambda}{\partial v} f_3 + \frac{\partial \lambda}{\partial w} f_4 + S_1 + S_2 + S_3 \right) - \frac{\partial \lambda}{\partial v} L_1 g \right], \quad (1.10)$$

$$\sigma_{2i} = s_2 \left[\frac{\partial \lambda}{\partial w} C \right] + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial w} \right)^+ \tilde{B}_i. \quad (1.11)$$

где σ_{2i} - i -ый столбец матрицы $\sigma_2 = (\sigma_{2vj})$, ($v = \overline{1 \dots n}$), ($j = \overline{1 \dots k}$), \tilde{B}_i - i -ый столбец матрицы $\tilde{B} = (\tilde{B}_{\mu l})$.

Следовательно, справедлива теорема:

Теорема. Для того чтобы дифференциальное уравнение первого порядка типа Ито (1.1) имело заданное интегральное многообразие (1.2) необходимо и достаточно, чтобы при произвольно заданном управлении $u_1 = g(y, z, v, w, t) \in K$, управляющая функция u_2 имела вид (1.10), а столбцы матриц диффузий σ_1 и σ_2 удовлетворяли условию (1.11).

Замечание. Данная задача при $l_1 = p_2 = \frac{n}{2}$, $l_2 \equiv p_1 \equiv 0$, $c(x) \equiv 0$ рассмотрена в работе [5], а при $l_1 = p_2 = \frac{n}{2}$, $l_2 \equiv p_1 \equiv 0$, $c(x) \neq 0$ – в [6]. Частный случай поставленной задачи исследован в [7], в котором случайные возмущения предполагаются из класса винеровских процессов.

Заключение. Получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи восстановления с вырождающейся по части переменных диффузией в общем нелинейном случае. Рассмотренная постановка обобщает ранее исследованные в [5-7] стохастические задачи восстановления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Еругин Н.П. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // ПММ. – М. - 1952. - Т.10. - В.16. - С.659-670.
2. Галиуллин А.С. Методы решения обратных задач динамики. - М., 1986. - 224с.
3. Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г. Уравнения программных движений. - М., 1986. - 88с.
4. Мухарлямов Р.Г. О построении систем дифференциальных уравнений движения механических систем // Дифференциальные уравнения. - М., - 2003. - Т.39. - № 3. - С.343-353.
5. Тлеубергенов М.И. Об обратной задаче восстановления стохастических дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения. - М., 2001. - Т.37. - № 5. - С.714-716.
6. Тлеубергенов М.И. Об обратной стохастической задаче восстановления // Известия МОН РК, НАН РК. Серия физико-математическая. - Алматы, - 2003. - № 5. - С.34-43.
7. Тлеубергенов М.И., Ибраева Г.Т. Об обратной стохастической задаче восстановления с вырождающейся диффузией // Известия МОН РК, НАН РК. Серия физико-математическая. - Алматы, - 2006. - № 1. - С.65-74.
8. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. - М., 1969. - 368с.
9. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. - М., 1990. - 632с.

КОЛЕБАНИЯ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ДУФФИНГА

И.Н. Барабанов, В.Н. Тхай

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук

OSCILLATIONS OF COUPLED DUFFING OSCILLATORS

Ivan N. Barabanov and Valentin N. Tkhai

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences

The system of coupled identical Duffing oscillators are considered. The dynamics of the system is studied in the frame of the model containing coupled subsystems. The conditions for a family of oscillations of the system to exist are found. Characteristic exponents of the members of the family are examined.

Динамика связанных осцилляторов Дуффинга описывается в рамках модели, содержащей связанные подсистемы (МССП). Такая модель используется в различных задачах классической и небесной механики, радиотехники, популяционной динамики, мехатроники и робототехники, биологии, медицины и т.д. [1,2]. МССП представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которая при отсутствии связи между подсистемами, наличие которой характеризует параметр $\varepsilon > 0$, распадается ($\varepsilon = 0$) на независимые подсистемы - динамические системы. Уравнение Дуффинга принадлежит к классу консервативных систем с одной степенью свободы. Колебания здесь образуют семейство, на котором период зависит от одного параметра.

В случае семейства $\{\varphi_s(h_s, \gamma_s)\}$ периодические решения в каждой подсистеме МССП зависят от двух параметров h_s и γ_s , причем от h_s зависит период $T_s(h_s)$, а γ_s характеризует сдвиг начальной точки вдоль траектории. При $\varepsilon = 0$ периодическое решение МССП получается, когда $h_s = h, s = 1, \dots, m$.

Вычислим производную от решения МССП при $\varepsilon > 0$ в точке $\varepsilon = 0$. Она удовлетворяет линейной неоднородной системе уравнений с нулевыми начальными условиями. Отсюда получаются необходимые условия существования при $\varepsilon > 0$ периодического решения МССП в первом по ε приближении в виде:

$$g_h(\gamma_1, \dots, \gamma_m) = 0 \quad (1)$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть уравнение (1) имеет решение, $g_h(\gamma_1^*, \dots, \gamma_m^*) = 0$, причем ранг функциональной матрицы отображения $\gamma \rightarrow g_h(\gamma)$ в точке γ^* равен $m - 1$. Тогда слабо связанная МССП имеет семейство периодических решений, на котором период монотонно зависит от одного параметра h .

Применим теорему 1 к связанным осцилляторам Дуффинга

$$\ddot{x}_s + k^2 x_s - a x_s^3 = \varepsilon f(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2), \quad s = 1, 2$$

(k, a – постоянные, $a > 0$). Тогда уравнение (1) запишется в виде системы

$$\int_0^T f(\varphi(h, t + \gamma_1), \varphi(h, t + \gamma_2), \dot{\varphi}(h, t + \gamma_1), \dot{\varphi}(h, t + \gamma_2)) \psi_s(h, \gamma_s) dt = 0, \quad s = 1, 2.$$

Видно, что в этой системе одно уравнение с точностью до обозначений совпадает с другим уравнением. Значит, ранг функциональной матрицы отображения $\gamma \rightarrow g_h(\gamma)$ не больше единицы. В случае ранга, равного единице, для системы двух слабо связанных идентичных уравнений Дуффинга по теореме 1 имеем семейство периодических решений с монотонно зависящим от параметра периодом. Используя также результат о бифуркации характеристических показателей, получаем следующее утверждение.

Теорема 2. Система двух слабо связанных уравнений Дуффинга допускает семейство периодических решений, на котором период зависит от одного параметра. Решения этого семейства имеют один простой нулевой характеристический показатель, два нулевых характеристических показателя в жордановой клетке и один ε -близкий к нулю вещественный характеристический показатель λ . В случае, когда $\lambda < 0$, семейство будет притягивающим.

Заметим, что выводы теоремы 2 зависят от конкретной связи – функции $f(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (13-01-00347, 13-01-00376).

ЛИТЕРАТУРА

1. Тхай В.Н. Колебания в автономной модели, содержащей связанные подсистемы // АиТ. 2015. № 1. С. 81-90.
2. Тхай В.Н. Модель, содержащая связанные подсистемы // АиТ. 2013. № 6. С. 32-41.

СТАБИЛИЗАЦИЯ КОЛЕБАНИЙ МНОЖЕСТВА ИДЕНТИЧНЫХ СИСТЕМ

В.Н. Тхай, И.Н. Барабанов

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук

STABILIZATION OF OSCILLATIONS OF THE SET OF IDENTICAL SYSTEMS

Valentin N. Tkhai, Ivan N. Barabanov

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences

We consider a set of m independent identical dynamical systems of order n . Each of the systems admits of a T -periodic solution, which is a member of a family Σ . The period of solutions in Σ depends on a single parameter. The nonzero characteristic exponents of the examined solution in each system are supposed to lie in the left complex half-plane. The problem is to stabilize the examined periodic solution of the set of dynamical systems by small smooth time-independent controls.

Рассматривается множество из m независимых идентичных динамических систем порядка n , каждая из которых допускает T -периодическое решение, принадлежащее семейству Σ , на котором период монотонно зависит от одного параметра. Предполагается, что в каждой системе для выбранного решения ненулевые характеристические показатели (ХП) лежат в левой полуплоскости. Ставится задача: малым гладким автономным управлением стабилизировать выбранное периодическое решение множества динамических систем.

Для колебаний динамической системы в общей ситуации справедлива следующая альтернатива [1].

Альтернатива. *В невырожденном для периодического решения случае реализуется альтернатива: система имеет или цикл, или семейство периодических решений, на котором период зависит от одного параметра. Если в уравнении реализуется альтернатива – цикл или семейство периодических решений, на котором период зависит от одного параметра, то имеем невырожденный для периодического решения случай.*

В случае семейства решения на Σ содержат два нулевых ХП. Нахождение ненулевых ХП в левой полуплоскости означает, что многообразие, отвечающее семейству Σ , будет притягивающим. Следовательно, фактически задача состоит в стабилизации малым гладким автономным управлением выбранного периодического решения на центральном многообразии, заполненном семейством Σ .

Решение поставленной задачи стабилизации основано на понятии модели, содержащей связанные подсистемы (МССП). Модель описывает динамику в различных задачах классической и небесной механики, радиотехники, популяционной динамики, мехатроники и робототехники, биологии, медицины и т.д. [1,2]. Понятие МССП введено недавно [1], эта модель интенсивно исследуется [1-7]. Связанные системы являются предметом многочисленных работ (см., например, [8]).

МССП представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которая при отсутствии связи между подсистемами распадается на независимые

подсистемы – динамические системы. Наличие связи характеризуется параметром $\varepsilon > 0$, а равенство ε нулю означает отсутствие связи.

Для решения рассматриваемой задачи стабилизации идентичные системы объединяются в МССП. Тогда в s -ой подсистеме семейство периодических решений зависит от двух параметров h_s и γ_s , второй из них – сдвиг начальной точки по траектории. При $\varepsilon = 0$ периодическое решение МССП получается, когда $h_s = h, s = 1, \dots, m$.

Вычислим производную от решения МССП при $\varepsilon > 0$ в точке $\varepsilon = 0$. Она удовлетворяет линейной неоднородной системе уравнений с нулевыми начальными условиями. Отсюда получаются необходимые условия существования при $\varepsilon > 0$ периодического решения МССП в первом по ε приближении в виде

$$g_h(\gamma_1, \dots, \gamma_m) = 0. \quad (1)$$

Справедливо утверждение.

Теорема 1. Пусть уравнение (1) имеет решение, $g_h(\gamma_1^*, \dots, \gamma_m^*) = 0$, причем ранг функциональной матрицы отображения $\gamma \rightarrow g_h(\gamma)$ в точке γ^* равен $m - 1$. Тогда слабо связанная МССП имеет семейство периодических решений, на котором период монотонно зависит от одного параметра h .

Таким образом, по теореме 1 множество идентичных систем путем использования гладких автономных связующих управлений приводится к динамической системе

$$\dot{x} = X(x), \quad x \in R^{mn},$$

допускающей семейство периодических решений, на котором период $T(h)$ монотонно зависит от одного параметра h . В этом состоит первый шаг решения поставленной задачи стабилизации.

Второй шаг заключается в анализе динамической системы

$$\dot{x} = X(x) + u(\mu, x), \quad u(0, x) = 0, \quad x \in R^{mn} \quad (2)$$

с малым управлением $u(\mu, x)$. Функция $u(\mu, x)$ выбирается таким образом, что (2) имеет асимптотически орбитально устойчивый цикл. Известно, что такое гладкое управление существует [1].

Запишем необходимые условия существования периодического решения системы (2) в первом по $\mu = 0$ приближении:

$$G(h) = 0. \quad (3)$$

Теорема 2. Пусть уравнение (3) допускает корень $h = h^*$, причем производная в этой точке $G'(h^*) < 0$. Тогда система (2) имеет асимптотически орбитально устойчивый цикл.

На основе теорем 1 и 2 получается решение поставленной задачи стабилизации.

Теорема 3. Задача стабилизации колебаний множества идентичных систем, которые допускают семейства одночастотных колебаний с зависимостью периода на нем от одного параметра, решается малым гладким автономным управлением, удовлетворяющим теоремам 1 и 2.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (13-01-00347, 13-01-00376).

ЛИТЕРАТУРА

1. Тхай В.Н. Модель, содержащая связанные подсистемы // *АиТ*. 2013. № 6. С. 32-41.
2. Тхай В.Н. Колебания в автономной модели, содержащей связанные подсистемы // *АиТ*. 2015. № 1. С. 81-90.
3. Тхай В.Н. Механические системы, содержащие связанные подсистемы // *ПММ*. 2013. Т. 77. Вып. 6. С. 822-831.
4. Tkhai V. N. and Barabanov I. N. On the Model Containing Coupled Subsystems // *Scientific publications of the state university of Novi Pazar. Ser. A: Appl. Math. Inform. and Mech.* 2014. Vol. 6,2. P. 101-106.
5. Барабанов И.Н., Турешбаев А.Т., Тхай В.Н. Основной режим колебаний в системе, содержащей связанные подсистемы // *АиТ*. 2014. № 12. С. 29-41.
6. Тхай В.Н. Периодические движения возмущенной обратимой механической системы // *ПММ*. 2015. Т. 79. Вып. 2. С. 181-195.
7. Тхай В.Н. Колебания, устойчивость и стабилизация в модели, содержащей связанные подсистемы с циклами // *АиТ*. 2015. (в печати).
8. Lazarus L. and Rand R.H. Dynamics of a System of Two Coupled Oscillators which are Driven by a Third Oscillator // *J. Appl. Nonlinear Dynamics*. 2014. 3(3). P. 271-282.

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ ПРОГРАММНОГО МНОГООБРАЗИЯ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

С.С.Жуматов

Институт математики и математического моделирования,
050010, Республика Казахстан, Алматы, 10, ул. Пушкина, 125

E-mail: sailau.math@mail.ru,

INSTABILITY OF AUTOMATIC CONTROL'S SYSTEM IN THE NEIGHBOOD OF PROGRAM MANYFOLD IN A CRITICAL CASE

Zhumatov S.S.

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
sailau.math@mail.ru

The problem of construction of stable automatic control's system equations by given program manifold is considered. The frequently conditions of instability of program manifold are obtained with respect to the given vector-function.

Key words: *automatic control's system, program manifold, instability.*

Рассмотрим задачу построения устойчивых систем автоматического управления по заданному программному многообразию $\Omega(t) \equiv \omega(t, x) = 0$ [1]:

$$\dot{x} = f(t, x) - B\xi, \quad \xi = \varphi(\sigma), \quad \sigma = P^T \omega, \quad t \in I = [0, \infty), \quad (1)$$

где $x \in R^n$ - вектор состояния объекта, $f \in R^n$ - вектор-функция, удовлетворяющая условиям существования и единственности решения $x = x(t)$, $B \in R^{n \times r}$, $P \in R^{s \times r}$ - постоянные матрицы, $\omega \in R^s$ ($s \leq n$) - вектор, $\xi \in R^r$ - разрывная вектор-функция управления по отклонению от заданного многообразия имеющая лишь изолированные точки разрыва, для которых существуют конечные верхний и нижний пределы

$$\overline{\lim}_{\sigma \rightarrow \sigma_0} \varphi(\sigma) = \varphi_+(\sigma_0), \quad \underline{\lim}_{\sigma \rightarrow \sigma_0} \varphi(\sigma) = \varphi_-(\sigma_0) \quad (2)$$

и выполняются условия

$$\varphi_-[\sigma(t)] \leq \|\xi(t)\| \leq \varphi_+[\sigma(t)], \quad (3)$$

где

$$\varphi_-(\sigma_0) = \inf_i \varphi_-(\sigma_{i0}), \quad \varphi_+(\sigma_0) = \sup_i \varphi_+(\sigma_{i0}) \quad i = 1, \dots, r.$$

В силу того, что многообразие $\Omega(t)$ является интегральным для системы (1) имеет место

$$\dot{\omega} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + H \cdot f(t, x, u) = F(t, \omega, u), \quad H = \frac{\partial \omega}{\partial x}. \quad (4)$$

Здесь $F(t, 0, u) \equiv 0$ - некоторая s -вектор-функция Еругина [2, 3].

Построению систем уравнений по заданному многообразию, обладающие свойствами устойчивости, оптимальности и установлению оценок качества показателей переходного процесса в окрестности программного многообразия, при $s < n$ посвящены множество работ. Обзор этих работ проведён в [3 - 5]. Следует отметить, что при установлении условий устойчивости будет полезно указать границы неустойчивости.

Постановка задачи: получить условие неустойчивости программного многообразия $\Omega(t)$ относительно вектор-функции ω .

Пусть в системе (4) функция Еругина имеет вид $F = F(t, \omega)$:

$$\dot{\omega} = F(t, \omega). \quad (5)$$

Обозначим через Φ множество, образованное при $t \in [t_0, \beta)$, значениями $x(t, t_0, x_0)$ всех решений $x(t)$, существующих на $[t_0, \beta)$, $t_0 \in \bar{T}$, где \bar{T} -- связное множество всевозможных начальных моментов, а через Ψ - многозначную функцию, которая обладает свойством $\Phi(t_0, t) \subset \Psi(t_0, t)$, $t_0 \leq t$. Пусть $x_u(t)$ - известное решение системы (1), без нелинейности $\xi = \varphi(\sigma)$ и $\omega(t, x_u(t)) = 0$.

Введём множества:

$$B_\varepsilon = Q(t, \varepsilon) \cap \Phi(t_0, t); \quad B_\delta(\varepsilon) = B_\delta \cap B_\varepsilon; \quad \bar{A}_\varepsilon = \bar{L}(t, \varepsilon) \cap \bar{\Psi}(t_0, t).$$

Определение 1. Программное многообразие $\Omega(t)$ называется неустойчивым относительно вектор-функции ω , если для заданных $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in T$, $T \subseteq I$ найдётся $\delta(t_0, \varepsilon) \geq 0$ такое, что $\forall x_0 \in B_\delta(\varepsilon)$, и $t_0 \leq t$ имеет место соотношение $\omega(t, t_0, x_0) \notin \bar{A}_\varepsilon$. Здесь $\bar{A}_\varepsilon(t_0) = \bar{P}(t, \varepsilon) \cap \bar{\Psi}(t_0, t)$.

Справедливо следующее утверждение [6]:

Лемма. Равносильны следующие предложения:

1. Программное многообразие $\Omega(t)$ неустойчиво относительно вектор-функции ω ;

2. Существует сектор, являющийся абсолютным экспеллером относительно вектор-функции ω ;
3. Существует абсолютный сектор, являющийся экспеллером относительно вектор-функции ω ;
4. Существует абсолютный сектор, являющийся абсолютным экспеллером относительно вектор-функции ω .

Если положим, что

$$F = -A\omega, \quad (5)$$

где $-A(s \times s)$ - гурвицева матрица, то, дифференцируя многообразие $\Omega(t)$ по времени t в силу системы (1), получим

$$\dot{\omega} = -A\omega - HB\xi, \quad \xi = \varphi(\sigma), \quad \sigma = P^T \omega. \quad (6)$$

$$\varphi_-[\sigma(t)] \leq \|\xi(t)\| \leq \varphi_+[\sigma(t)] \quad \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow \sigma_0} \varphi(\sigma) = \varphi_+(\sigma_0), \quad \underline{\lim}_{\sigma \rightarrow \sigma_0} \varphi(\sigma) = \varphi_-(\sigma_0). \quad (7)$$

Составим передаточную функцию

$$W(i\varpi) = P^T (A + i\varpi E)^{-1} HB. \quad (8)$$

Определение 2 [7]. Дополненным графиком разрывной функции $\varphi(\sigma)$ называется замкнутое множество на плоскости $\{\sigma, \xi\}$, состоящее из точек $[\sigma, \varphi(\sigma)]$, где σ - точка непрерывности функции $\varphi(\sigma)$ и из всех вертикальных отрезков с концами $[\sigma_0, \varphi_-(\sigma_0)]$, $[\sigma_0, \varphi_+(\sigma_0)]$, где σ_0 - точки разрыва функции $\varphi(\sigma)$. Если программное многообразие является интегральной для системы на $[t_1, t_2]$, то точка $[\sigma(t), \xi(t)]$ при $t_1 \leq t \leq t_2$ принадлежит дополненному графику функции $\varphi(\sigma)$.

Определение 3. Программное многообразие $\Omega(t)$ называется неустойчивым в целом относительно вектор-функции ω , если в фазовом пространстве существует неограниченная открытая область Ξ , включающая окрестность заданного многообразия и обладающая тем свойством, что все решения относительно вектор-функции ω начинающиеся в этой области, не ограничены при $t \rightarrow \infty$.

Предположим, что $\mu_1 \leq \mu_2$, $\tau \geq 0$, θ - некоторые диагональные матрицы, μ_1 и μ_2 могут принимать значения равные $\pm \infty$. Введем следующую частотную функцию

$$\pi(\varpi) = \tau \operatorname{Re} \left\{ [1 + \mu_1 W(i\varpi)][1 + \mu_2 W(i\varpi)]^T \right\} + \theta \operatorname{Re} [i\varpi W(i\varpi)] \quad \text{при } \mu_1 \neq -\infty, \mu_2 \neq +\infty,$$

$$\pi(\varpi) = -\tau \operatorname{Re} \left\{ W(i\varpi)[1 + \mu_2 W(i\varpi)]^T \right\} + \theta \operatorname{Re} [i\varpi W(i\varpi)] \quad \text{при } \mu_1 = -\infty, \mu_2 \neq +\infty,$$

$$\pi(\varpi) = \tau \operatorname{Re} \left\{ [1 + \mu_1 W(i\varpi)][W(i\varpi)]^T \right\} + \theta \operatorname{Re} [i\varpi W(i\varpi)] \quad \text{при } \mu_1 = -\infty, \mu_2 = +\infty$$

Пусть $S[\mu_1, \mu_2]$ замкнутый сектор на плоскости $\{\sigma, \xi\}$, состоящий из точек (σ, ξ) , для которых $\sigma \neq 0$, $\mu_1 \leq \xi/\sigma \leq \mu_2$ и включающий программное многообразие $\omega = 0$.

Определение 4. Замкнутый сектор $S[\mu_1, \mu_2]$, для которого при всех $0 \leq \varpi < \infty$ и некоторых $\tau \geq 0, \theta$ выполнено частотное условие $\pi(\varpi) > 0$, и если $\pi(\infty) = 0$, то $\lim_{\varpi \rightarrow \infty} \varpi^2 \pi(\varpi) > 0$, будем называть при $k = 0$ сектором абсолютной устойчивости и при $0 < k \leq s$ сектором абсолютной неустойчивости, а при $k = s$ сектором полной абсолютной неустойчивости и неполной абсолютной неустойчивости при $1 \leq k < s$.

Теорема 1. Пусть функция Еругина имеет вид (5), и выполняется частотное неравенство

$$\pi(\varpi) \geq \delta \left| (A + i\varpi E)^{-1} NB \right|^2, \quad (9)$$

а матрица $-A - NB\mu P^T$ имеет $k \geq 1$ собственных значений в правой полуплоскости и дополненный график Φ функции $\varphi(\sigma)$ лежит в секторе $S[\mu_1, \mu_2]$. Тогда программное многообразие $\Omega(t)$ неустойчиво в целом относительно вектор-функции ω . При этом в окрестности программного многообразия осуществляется одна из двух возможностей:

а) функция $\omega(t)$ не ограничена на интервале существования, а если этот интервал бесконечен, то $|\omega(t)| \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow \infty$;

б) интервал существования решения бесконечен, $|\omega(t)| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и сходятся интегралы $\int_0^\infty |\omega|^2 dt$, $\int_0^\infty |\xi|^2 dt$. Кроме того на любой сфере $\|\omega\| = \rho$ найдутся такие точки ω_0 , что при $\omega(0) = \omega_0$ для функции $\omega(t)$ имеет место случай а).

Доказательство. Пусть выполняется (9). Тогда существуют матрица $L^T = L \in R^{s \times s}$ и число $\delta > 0$ такие, что имеют место

$$V(\omega) = \omega^T L \omega + \int_0^\sigma \varphi^T(\sigma) \theta d\sigma, \quad (10)$$

$$\dot{V}(\omega) \leq -\delta \|\omega\|^2. \quad (11)$$

Возьмем произвольную ограниченную матрицу μ в удовлетворяющую условию $\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$ и нелинейность $\varphi(\sigma)$ представим в линейном виде. В этом случае из (10) получим

$$V(\omega, \mu) = \omega^T L \omega + \theta \mu \frac{\sigma^T \sigma}{2}. \quad (12)$$

Предположим, что для любого $\sigma \neq 0$ выполняется

$$\mu(\sigma) = \frac{2}{\sigma^T \sigma} \int_0^\sigma \varphi^T(\sigma) d\sigma. \quad (13)$$

В силу того, что в точках непрерывности выполняется неравенство $\mu_1 \sigma^2 \leq \sigma \varphi(\sigma) \leq \mu_2 \sigma^2$, следует справедливость $\mu_1 \leq \mu(\sigma) \leq \mu_2$ для всех σ . С учетом предположения (12), принимая во внимание (9) получим, что

$$V(\omega) = V[\omega, \mu(\sigma)], \quad \sigma = P^T \omega. \quad (14)$$

Пусть матрица линеаризованной системы (6), (7) имеет $k \geq 1$ собственных значений в правой полуплоскости. В любом шаре $\|\omega\| \leq \rho$ ($\rho > 0$) для любого μ существует такая точка ω_0 , что $V(\omega_0, \mu) < 0$. Из соотношения (14) вытекает, что для любого $\rho > 0$ на сфере $\|\omega\| = \rho$, найдется такая же точка ω_0 , что выполняется $V(\omega_0) < 0$. Отсюда следует, что при $k = s$ для любой ограниченной матрицы μ , $\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$ и любого $\omega \neq 0$, выполняется неравенство $V(\omega, \mu) < 0$. Следовательно если $k = s$, то справедливо $V(\omega) < 0$ при любом $\omega \neq 0$.

Пусть $\omega(t)$ любое решение, определяемое начальным условием $\omega(0) = \omega_0$. Из (12) имеем

$$V[\omega(t)] \leq V(\omega_0) < 0 \quad \text{при } t \geq 0. \quad (15)$$

Так как $V(\omega)$ - непрерывная функция и $V(0) = 0$, то существует такое $\rho_0 > 0$, что $\|\omega(t)\| \geq \rho_0 > 0$. Отсюда и из (12) следует, что

$$V[\omega(t)] \leq V(\omega_0) - \delta \rho_0 t. \quad (16)$$

Если интервал существования решения $\omega(t), \xi(t)$ конечен, то решение не ограничена на нем. Если же интервал существования решения $\omega(t), \xi(t)$ есть $[0, \infty[$, то из (16) следует

$$\|\omega(t)\| \rightarrow \infty \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (17)$$

В силу (15) для любого t можно указать окрестность многообразия $\|\omega - \omega(t)\| < \rho(t)$, такую, что $V(\omega) < 0$ для точек этой окрестности. Итак, любое решение, начинающееся при $t = 0$ в произвольной точке этой окрестности обладает свойством (17). Таким образом, существует область Ξ , включающая окрестность заданного многообразия и обладающая тем свойством, что все решения относительно вектор-функции ω начинающиеся в этой области, не ограничены при $t \rightarrow \infty$. Следовательно, программное многообразие $\Omega(t)$ неустойчиво в целом относительно вектор-функции ω .

Так же с помощью функции Ляпунова показано: что имеет место: а) или б).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Майгарин Б.Ж.* Устойчивость и качество процессов нелинейных нелинейных систем автоматического управления. Алма-Ата. 1981. -316 с.
2. *Еругин Н.П.* Построение всего множества систем дифференциальных уравнению, имеющих заданную интегральную кривую // Прикл. Мат. и мех., 1952. Т. 16., вып. 6. С. 653-670.
3. *Галиуллин А.С., Мухаметзянова И.А., Мухарлямов Р.Г. и др.* Построение систем программного движения. М., 1971. 352 с.
4. *Галиуллин А.С., Мухаметзянова И.А., Мухарлямов Р.Г.* Обзор исследований по аналитическому построению систем программного движения // Вестник Российского университета Дружбы народов. 1994. № 1. С. 5-21.
5. *Жуматов С.С., Крементуло В.В., Майгарин Б.Ж.* Второй метод Ляпунова в задачах устойчивости и управления движением. Алматы. 1999. 228 с.
6. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 302 с.
7. *Якубович В.А.* Частотные условия автоколебаний в нелинейных системах с одной стационарной нелинейностью // Сибирский математический журнал. 1973. Т. XIV. № 5. С.1100-1129.

АДИАБАТИЧЕСКИЙ ИНВАРИАНТ В ЗАДАЧЕ О БЫСТРЫХ ВРАЩЕНИЯХ СПУТНИКА НА ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОРБИТЕ

Маркеев А.П.

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия,
anat- markeev@mail.ru*

Изложены результаты исследования быстрых плоских вращений спутника на эллиптической орбите при помощи адиабатических инвариантов.

Ключевые слова: спутник, вращение, адиабатический инвариант.

ADIABATIC INVARIANT IN A PROBLEM OF FAST ROTATIONS OF A SATELLITE IN AN ELLIPTIC ORBIT

Markeev A.P.

A. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia

Results on investigation of fast planar rotations of a satellite in an elliptic orbit are obtained by means of the theory of adiabatic invariants.

Keywords: satellite, rotation, adiabatic invariant.

Плоские движения спутника относительно центра масс в центральном ньютоновском поле на эллиптической орбите описывается дифференциальным уравнением второго порядка [1,2]

$$(1 + e \cos \nu) \frac{d^2 \gamma}{d\nu^2} - 2e \sin \nu \frac{d\gamma}{d\nu} + \mu \sin(\gamma - \nu) \cos(\gamma - \nu) = 0. \quad (1)$$

Здесь ν — истинная аномалия, γ — угол между большой осью орбиты и одной из двух главных центральных осей инерции, лежащих в плоскости орбиты, e — эксцентриситет орбиты ($0 < e < 1$), μ — безразмерный параметр, характеризующий геометрию масс спутника; считаем, что $0 < \mu \leq 3$ (если $-3 \leq \mu < 0$, то в (1) следует заменить γ на $\pi/2 + \gamma$).

Будем рассматривать быстрые вращения, когда $d\gamma/d\nu \sim \Omega$ ($\Omega = \varepsilon^{-1}$, $0 < \varepsilon \ll 1$). Ранее такие вращения рассматривались [3] при помощи метода усреднения на большом (но конечном) интервале времени.

Величину Ω будем считать рациональным числом. Вместо ν введем новую независимую переменную $\tau = \Omega M$, где M — средняя аномалия,

$$\frac{d\nu}{d\tau} = \varepsilon \frac{(1 + e \cos \nu)^2}{(1 - e^2)^{3/2}}. \quad (2)$$

Тогда уравнение (1) запишется в виде

$$\frac{d^2 \gamma}{d\tau^2} + \varepsilon^2 \frac{\mu(1 + e \cos \nu)^3}{2(1 - e^2)^3} \sin 2(\gamma - \nu) = 0. \quad (3)$$

Положим

$$p = 2 \frac{d\gamma}{d\tau}, \quad q = 2(\gamma - \nu). \quad (4)$$

Уравнения движения можно записать в виде двух канонических уравнений с функцией Гамильтона вида

$$\Gamma = \Gamma_0 + \tilde{\Gamma}, \quad (5)$$

$$\Gamma_0 = \frac{1}{2} p^2 - \omega_*^2 \cos q, \quad \omega_* = \varepsilon \frac{\sqrt{\mu}(1 + e \cos \nu)^{3/2}}{(1 - e^2)^{3/2}}, \quad \tilde{\Gamma} = -2p \frac{d\nu}{d\tau}.$$

Вместо q, p введем новые переменные I, w при помощи соотношений

$$w = \frac{\partial S}{\partial I}, \quad p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad S = qI + \omega_*^2 \frac{\sin q}{I}.$$

Отсюда имеем

$$p = I + \omega_*^2 \frac{\cos w}{I} + O(\varepsilon^4), \quad q = w + O(\varepsilon^2).$$

В новых переменных функция Гамильтона (5) принимает вид

$$H = H_0(I) + \tilde{H}(I, w, \tau), \quad (6)$$

где $H_0 = I^2/2$, \tilde{H} аналитична при $I > 0$ и периодична по w и τ , $\tilde{H} = O(\varepsilon)$.

Так как

$$\frac{\partial H_0}{\partial I} = I \neq 0, \quad \frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} = 1 \neq 0$$

то переменная I является [4] вечным адиабатическим инвариантом. Это означает, что для любого $\delta > 0$ существует ε_0 такое, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и при всех t выполняется неравенство $|I(t) - I(0)| < \varepsilon$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14 – 21 – 00068) в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете).

Литература

1. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М. Наука, 1965. 416 с.
2. Маркеев А.П. Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009. 396 с.
3. Черноусько Ф.Л. Резонансные явления при движении спутника относительно центра масс. // ЖВММФ. 1963. Т.3. №3. С. 528 - 538.
4. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: Эдиториал УРСС, 2002. 416 с.

УПРАВЛЕНИЕ УПОРЯДОЧЕННОЙ ДИСЛОКАЦИЕЙ МОБИЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ В НЕПРЕДСКАЗУЕМО ДВИЖУЩЕМСЯ ПУНКТЕ

THE CONTROL OF ORDERED DISLOCATION OF MOBILE OBJECTS IN THE UNPREDICTABLY MOVING POINT

Мухаметзянов И.А., Чекмарева О.И.

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия, spacefrogling@mail.ru

Введение. Решена задача безударной стыковки множества подвижных объектов, являющихся управляемыми, движущимися в режиме преследующего тела по принципу пропорциональной навигации, с целью стыковки в упорядоченные моменты времени с объектом, движущимся непредсказуемым образом. При этом неуправляющие силы, в том числе сила сопротивления среды, считаются неизвестными. Для автоматического выбора оптимального значения управления предлагается самонастраиваемый способ, осуществляемый по «принципу обратной связи по квазиускорению» в дискретные моменты времени. Решение задачи получено как в случае преследующих тел постоянной, так и переменной массы, когда движение управляемых тел осуществляется реактивной силой. Во втором случае оценивается величина расходуемой в процессе управления массы.

Introduction. The problem of non-impact docking of plurality of moving objects is solved, which are controlled, moving in the mode of persecution on the basis of proportional navigation to joining in the ordered moments of time with the object moving in an unpredictable manner. In this non-control force, including force environmental resistance, considered to be unknown. To automatically select the optimal values of the control features self-adapting method, implemented by the "principle of feedback on the quasi-acceleration" at discrete points in time, is proposed. Solution of the problem is obtained as in the case of a haunting bodies of permanent mass, so as of variable mass, when the movement of the bodies is managed by reactive force. In the second case, the amount of mass, which expended in the process of control, is estimated.

Постановка задачи. Проблема управления процессом приведения механической системы из любой точки пространства фазового состояния в заданную точку за конечный промежуток времени исследовалась такими учеными, как Е.С.Пятницкий, В.И.Матюхин, И.М.Ананьевский. В работах И.А.Мухаметзянова [1,2] был предложен универсальный метод, позволяющий решить задачу безударного приведения механических систем в заданное многообразие, образованное нестационарными программными связями, за конечный промежуток времени при размерности управляющих сил, меньшей числа степеней свободы системы. При этом предполагается, что массо-инерционные параметры системы и действующие на неё неуправляющие силы, в том числе возмущающие, известны неточно. Ранее этот метод был применен для управления безударной посадкой тела на подвижную платформу. Здесь ставится задача безударной стыковки подвижных объектов за конечный промежуток времени на примере управляемых преследующих тел, имеющих или постоянную, или переменную массу, стремящихся сблизиться с преследуемым телом, движущимся непредсказуемым образом, для стыковки с ним в упорядоченные моменты времени.

Основные результаты. Решена задача безударной стыковки множества подвижных объектов на примере управляемых тел, движущихся в режиме преследования по принципу пропорциональной навигации с целью стыковки с преследуемым телом, движущимся непредсказуемым образом. Кроме того, неуправляющие силы, в частности, сила сопротивления среды, считаются неизвестными. Решение получено для управляемых тел как постоянной, так и переменной массы.

Для решения задачи используются уравнения относительного движения преследующих тел по отношению к преследуемому, в которых присутствуют случайные, но непрерывные и ограниченные силы, как активные, так и инерции. Вводится управляющая сила, представляющая собой сумму непрерывной и ступенчатой функций. Ступенчатая составляющая является величиной переменного знака, достаточно большой для того, чтобы нивелировать наличие возмущений. В результате процесс становится «квазиподобен» процессу безударной стыковки этих тел в идеальных условиях.

Такая управляющая сила строится для двух случаев, когда управляемые преследующие тела имеют или постоянную, или переменную массу. Во втором случае, когда управление осуществляется реактивной силой, оценивается величина расходуемой массы тел в процессе стыковки. Кроме того, предлагается алгоритм самонастраиваемого управления преследующими телами, позволяющий автоматически определять оптимальную величину ступенчатой управляющей силы, необходимой для безударной стыковки тел. Самонастройка осуществляется применением принципа обратной связи по квазиускорению в дискретные моменты времени, предложенного в [4].

Выводы. Применяя подход, предложенный в [2], и принцип обратной связи по квазиускорению в дискретные моменты времени решена задача самонастраиваемого управления процессом безударной стыковки множества подвижных объектов как постоянной, так и переменной массы в условиях неопределенности в упорядоченные моменты времени.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 13-08-00535а).

Литература

1. Мухаметзянов И.А. О построении универсального алгоритма управления процессом сближения механических систем с заданным многообразием в условиях неопределенности // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». – 2011. - №3. – С.3-14.
2. Мухаметзянов И.А. Безударное приведение состояния «черного ящика» в заданное многообразие // Доклады X Международной Четаевской конференции. – Казань: КНИТУ КАИ, 2012. – С.189-196.
3. Мухаметзянов И.А., Чекмарева О.И. Безударная посадка тела на подвижную платформу // Доклады X Международной Четаевской конференции. – Казань: КНИТУ КАИ, 2012. – С.197-204.
4. Мухаметзянов И.А. Самонастраиваемое управление процессом безударного приведения состояния механических систем в заданное многообразие // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». – 2013. - №3. – С.105-112.

СТАБИЛИЗАЦИИ СВЯЗИ И ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ КИНЕМАТИКИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Мухарлямов Роберт Гарабшевич, Бешау Ассайе Валелгу

Кафедра теоретической физики и механики

Российский университет дружбы народов

Ул. Миклухо-Маклая, д.6, Москва, Россия, 117198

(Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 13-08-00535-а.)

CONSTRAINTS STABILIZATION AND SOLVING KINEMATIC EQUATIONS FOR MECHANICAL SYSTEMS

This paper proposes a method for constructing the kinematic equations of the mechanical system, which imposed geometric constraints. The method is based on the consideration of kinematic constraints as particular integrals of the required system of differential equations. The developed methods allow us to estimate the range of variation of the parameters during the numerical solution which determine conditions for stabilization with respect to constraint equations. A new approach is applied in the construction and its stability of Runge-Kutta numerical methods. The Runge-Kutta numerical methods are reformulated in a new approach. Not only the technique of formulation but also the test developed for its stability is new.

Работа посвящена решению задачи стабилизации связей при численном решении дифференциальных уравнений, описывающих кинематические соотношения в механической системе. В статье предлагается метод построения системы дифференциальных уравнений, соответствующих кинематическим соотношениям в механической системе, на которую наложены геометрические связи. Предлагаемый метод основан на представлении кинематических связей в качестве частных интегралов соответствующей системы дифференциальных уравнений. Разработанный метод позволяет в процессе численного решения дифференциальных уравнений оценить границы изменения параметров управляющих воздействий, которые соответствуют условиям стабилизации решения по отношению к заданным уравнениям связей. В статье получены ограничения на коэффициенты уравнений возмущений связей, зависящие от фазовых координат системы, при решении дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутты. Подробно рассмотрены случаи разностных уравнений первого порядка, состоящих из нескольких стадий.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть кинематическое состояние механической системы определяется по обобщенным координатам положения q_1, q_2, \dots, q_n и соответствующим скоростям $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$ и описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, t), \quad \dot{\mathbf{q}} = \frac{d\mathbf{q}}{dt}, \quad \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

$$\text{где } \mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}^0. \quad (2)$$

Теперь предположим, что на систему наложено m голономных связей:

$$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{q}, t) = 0, \quad \boldsymbol{\phi}(\mathbf{q}^0, t_0) = 0. \quad (3)$$

для всех решений, системы (1), удовлетворяющих условию (3), вектор $f(q, t)$ должен быть выбран так, чтобы выполнялись условия

$$\Phi_q f + \Phi_t = 0, \quad (4)$$

где $\Phi_q = (\phi_{ij})$, $\Phi_t = (\phi_{it})$, $\phi_{ij} = \frac{\partial \phi_i}{\partial q_j}$, $\phi_{it} = \frac{\partial \phi_i}{\partial t}$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$.

чтобы компенсировать отклонения от уравнений связей при численном интегрировании дифференциальных уравнений необходимо добавить некоторые величины в (4). Пусть эта величина будет, что

$$\Phi_q f + \Phi_t = F, \quad (5)$$

где $F = F(\phi, q, t)$.

множество всех решений линейной системы (5), в котором матрица Φ_q имеет ранг r , определяется соотношением

$$\dot{q} = c[\Phi_q C] + \Phi_q^+(F - \Phi_t), \quad (6)$$

где c – произвольная скалярная величина, $[\Phi_q C] = [\phi_{q_1} \dots \phi_{q_m} C_{m+1} \dots C_{n-1}]$ является векторным произведением, матрица $C_\tau = (C_{\tau j})$, $\tau = m + 1, \dots, n - 1$, $j = 1, \dots, n$, является произвольной, $\Phi_q^+ = \Phi_q^T (\Phi_q \Phi_q^T)^{-1}$.

2. Численное решение уравнений кинематики механических систем

При моделировании реальных систем дифференциальные уравнения (6) являются нелинейными и для решения их обычно пользуются численными методами. Устойчивость метода Эйлера и Рунге-Кутты метода 2-го порядка стабилизации связей сделать разными учеными. Здесь представлены Устойчивость методом Рунге-Кутты 4-го порядка стабилизации связей.

2.1 Математическая постановка и устойчивости методов Рунге-Кутты

Методы Рунге-Кутты сводятся к оценке значения функции f в промежуточных точках между значениями аргумента t_n и t_{n+1} . Определяется выражением

$$q^{n+1} = q^n + \tau h(t_n, q^n), \quad (7)$$

$$h(t_n, q^n) = \sum_r^R c_r k_r, \quad (8)$$

$$k_r = f(t_n + \tau a_r, q^n + \tau \sum_{s=1}^{r-1} b_{rs} k_s), \quad (9)$$

где $r = 2, 3, \dots, R$, $a_r = \sum_{s=1}^{r-1} b_{rs}$, c_r, a_r, b_{rs} постоянные, подлежащие определению.

Для того, чтобы установить порядок точности, рассмотрим разложение в ряд Тейлора выражения $q(t_{n+1})$:

$$q^{n+1} = q^n + \tau \dot{q}^n + \frac{\tau^2}{2} \ddot{q}^n + \dots = q^n + \tau(\dot{q}^n + \frac{\tau}{2} \ddot{q}^n + \dots),$$

Полагая отрезок ряда Тейлора порядка p , определим значение h (8) в (7):

$$h(t, q) = f(t, q) + \frac{\tau}{2!} f^{(1)}(t, q) + \dots + \frac{\tau^{p-1}}{p!} f^{(p-1)}(t, q), \quad (10)$$

где $f^{(i)} = \frac{d^i}{dt^i} f(t, q), i = 1, 2, \dots, (p - 1)$.

Из соотношения (9) $k_2 = f(t_n + \tau a_2, q^n + \tau a_2 k_1)$,

$$k_2 = f + \tau a_2 f_t + \tau a_2 k_1 f_q + \frac{1}{2} \{ \tau^2 a_2^2 f_{tt} + 2\tau^2 a_2^2 k_1 f_{tq} + \tau^2 a_2^2 k_1^2 f_{qq} \} + \frac{1}{3!} \{ (\tau a_2)^3 f_{ttt} + 3(\tau a_2)^2 (\tau a_2 k_1) f_{ttq} + 3(\tau a_2) (\tau a_2 k_1)^2 f_{tqq} + (\tau a_2 k_1)^3 f_{qqq} \}. \quad (11)$$

В результате определения k_1 по $f(t, q)$, упрощения и обобщения (11) можно представить в виде

$$k_2 = f^n + \tau a_2 F^n + \frac{\tau^2}{2} a_2^2 G^n + \frac{\tau^3}{6} a_2^3 H^n + \tau^4 R_v^{k_4}, \quad (12)$$

где $f^n = f(t_n, q^n), F^n = f_t^n + v^n f_q^n, G^n = f_{tt}^n + 2v^n f_{tq}^n + (v^n)^2 f_{qq}^n,$

$$H^n = f_{ttt}^n + 3v^n f_{ttq}^n + 3(v^n)^2 f_{tqq}^n + (v^n)^3 f_{qqq}^n.$$

применяя тот же метод, получаем

$$k_3 = f^n + \tau a_3 F^n + \frac{\tau^2}{2} (a_3^2 G^n + 2a_2 b_{32} f_q^n F^n) + \frac{\tau^3}{6} (a_3^3 H^n + 6a_2 b_{32} a_3 I^n F^n + 3a_2^3 b_{32} f_q^n G^n) + \tau^4 R_v^{k_4}, \quad (13)$$

$$k_4 = f^n + \tau a_4 F^n + \frac{\tau^2}{2} (a_4^2 G^n + 2(a_2 b_{42} + a_3 b_{43}) f_q^n F^n + 2a_2 b_{32} (f_q^n)^2 F^n) + \frac{\tau^3}{6} (a_4^3 H^n + 3(a_2^2 b_{42} + a_3^2 b_{43}) f_q^n G^n + 6(a_2 b_{42} a_4 + a_3 b_{43} a_4) I^n F^n) + \tau^4 R_v^{k_4}, \quad (14)$$

где $I^n = f_{tq}^n + v^n f_{qq}^n.$

Используя соотношения из уравнения (7), (8):

$$\Delta q^n = \tau (c_1 k_1 + c_2 k_2 + c_3 k_3 + c_4 k_4), \quad (15)$$

$$h(q, t) = c_1 k_1 + c_2 k_2 + c_3 k_3 + c_4 k_4. \quad (16)$$

и подставляя расширенные формы k_1, k_2, k_3, k_4 в (16), получаем:

$$h(t_n, q^n) = (c_1 + c_2 + c_3 + c_4) f^n + \tau (c_2 a_2 + c_3 a_3 + c_4 a_4) F^n + \frac{\tau^2}{2} (a_2^2 c_2 + a_3^2 c_3 + a_4^2 c_4) G^n + \tau^2 (c_3 a_2 b_{32} + c_4 (a_2 b_{42} + a_3 b_{32})) f_q^n F^n + \frac{\tau^3}{6} ((c_2 a_2^3 + c_3 a_3^3 + c_4 a_4^3) H^n + 2(c_3 a_2 b_{32} a_3 + c_4 a_2 b_{42} a_4 + c_4 a_3 b_{43} a_4) I^n F^n + 3(c_3 a_2^2 b_{32} + c_4 a_2^2 b_{42} + c_4 a_3^2 b_{43}) f_q^n G^n + 6c_4 a_2 b_{32} (f_q^n)^2 F^n) + \tau^4 R_f^{k_4}. \quad (17)$$

Формулировки соответствующих методов Рунге-Кутты могут быть сделаны путем сопоставления соответственно условия (17) и (10).

2.2 Метод Рунге-Кутты четвертого порядка

Приводя в соответствие условия (17) и (10), получаем:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 + c_4 &= 1, c_2 a_2 + c_3 a_3 + c_4 a_4 = \frac{1}{2}, a_2^2 c_2 + a_3^2 c_3 + a_4^2 c_4 = 1/3, \\ c_2 a_2^3 + c_3 a_3^3 + c_4 a_4^3 &= \frac{1}{4}, c_3 a_2 b_{32} + c_4 a_2 b_{42} + c_4 a_3 b_{43} = 1/6, c_3 a_2 b_{32} a_3 + c_4 a_2 b_{42} a_4 + \\ c_4 a_3 b_{43} a_4 &= 1/8, c_3 a_2^2 b_{32} + c_4 a_2^2 b_{42} + c_4 a_3^2 b_{43} = 1/12, c_4 a_2 b_{32} = \frac{1}{24}. \end{aligned} \quad (18)$$

Из $\Delta q^n = \tau h(t_n, q^n)$, заменив h уравнением (17), получаем

$$\begin{aligned} \Delta q^n &= \tau(c_1 + c_2 + c_3 + c_4) f^n + \tau^2(c_2 a_2 + c_3 a_3 + c_4 a_4) F^n + \frac{\tau^3}{2}(a_2^2 c_2 + a_3^2 c_3 + a_4^2 c_4) G^n + \\ &\tau^3(c_3 a_2 b_{32} + c_4(a_2 b_{42} + a_3 b_{32})) f_q^n F^n + \frac{\tau^4}{6}((c_2 a_2^3 + c_3 a_3^3 + c_4 a_4^3) H^n + 2(c_3 a_2 b_{32} a_3 + \\ &c_4 a_2 b_{42} a_4 + c_4 a_3 b_{43} a_4) I^n F^n + 3(c_3 a_2^2 b_{32} + c_4 a_2^2 b_{42} + c_4 a_3^2 b_{43}) f_q^n G^n + \\ &6c_4 a_2 b_{32} (f_q^n)^2 F^n) + \\ &\tau^4 R_f^{k4}. \end{aligned} \quad (19)$$

После подстановки соответствующих значений из (18) в (19):

$$\Delta q^n = \tau f^n + \frac{\tau^2}{2} F^n + \frac{\tau^3}{6} (G^n + f_q^n F^n) + \frac{\tau^4}{24} (H^n + I^n F^n + f_q^n G^n + (f_q^n)^2 F^n) + \tau^4 R_f^{k4}. \quad (20)$$

Напомним строки разложения $\phi^{n+1} = \phi(q^{n+1}, t_{n+1})$:

$$\begin{aligned} \phi^{n+1} &= \phi^n + \phi_q^n \Delta q^n + \phi_t^n \tau + \frac{1}{2} \phi^{(n2)} + \frac{1}{3!} \phi^{(n3)} + \frac{1}{4!} \phi^{(n4)} + \tau^5 R_f^{k5}, \quad (21) \\ \text{где } \phi^{(n2)} &= (\Delta q^n)^T \phi_{qq}^n \Delta q^n + 2\phi_{qt}^n \tau \Delta q^n + \phi_{tt}^n \tau^2, \\ \phi^{(n3)} &= \phi_{qqq}^n \Delta q^n \Delta q^n \Delta q^n + 3\tau \phi_{qqt}^n \Delta q^n \Delta q^n + 3\tau^2 \phi_{qtt}^n \Delta q^n + \tau^3 \phi_{ttt}^n, \\ \phi^{(n4)} &= \phi_{qqqq}^n \Delta q^n \Delta q^n \Delta q^n \Delta q^n + 4\tau \phi_{qqqt}^n \Delta q^n \Delta q^n \Delta q^n + 6\tau^2 \phi_{qqtt}^n \Delta q^n \Delta q^n + 4\tau^3 \phi_{qttt}^n \Delta q^n \\ &+ \tau^4 \phi_{tttt}^n, \end{aligned}$$

Если F в уравнении (5) выражается как $\dot{\phi} = F = K(q, t)\phi$ и соответствующие производные:

$$\ddot{\phi} = (\dot{K} + K^2)\phi, \quad \ddot{\phi} = (\ddot{K} + 3\dot{K}K + K^3)\phi, \quad \phi^{(4)} = (\ddot{\ddot{K}} + 4\dot{\ddot{K}}K + 3\dot{K}^2 + 6\dot{K}K^2 + K^4)\phi.$$

Теорема: Если в выражении (21) используется четвертый порядок точности (20) для всех значений переменных $\phi = \phi^n, t = t_n, (n = 0, 1, 2, \dots, N)$, матрица $K(q, t)$, ϕ^0 и остаточный член $\tau^5 R_\phi^{k5}$ разложения в ряд Тейлора удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} \|\phi^0\| &\leq \varepsilon, \quad \tau^5 \|R_\phi^{k5}\| \leq (1 - \delta)\varepsilon, \\ \left\| I + \tau K^n + \frac{1}{2} \tau^2 L^n + \frac{\tau^3}{6} P^n + \frac{\tau^4}{24} Q^n \right\| &\leq \delta < 1, \end{aligned}$$

то будут выполняться ограничения

$$\begin{aligned} \|\phi^{n+1}\| &\leq \varepsilon, \text{ где } \varepsilon > 0, \delta > 0, L = \dot{K} + K^2, P = \ddot{K} + 3\dot{K}K + K^3, \text{ и} \\ Q &= \ddot{\ddot{K}} + 4\dot{\ddot{K}}K + 3\dot{K}^2 + 6\dot{K}K^2 + K^4. \end{aligned}$$

Литература

1. Абрамов Н.В., Мухарлямов Р.Г., Киргираев Ж.К., уравнение Динамикой Систем с Программными Связями (монография), юргу, 2013.
2. Мухарлямов Р.Г., Уравнение Движения Механических Систем, издательство РУДН, 2001.
3. Mukharlyamov R. G., Beshaw A. W., Solving Differential Equations of Motion for Constrained Mechanical Systems//Bulletin of PFUR. Series Maths. Info. Sc. Phy. No 3, 2013. Pp. 13–23.
4. John D. Fenton, Numerical methods//Vienna U. T. Karlsplatz 13/222, Vienna, Austria, pp 19-22, 2010.
5. Mukharlyamov R. G., On the equations of Kinematics and dynamics of constrained mechanical systems// multibody system dynamics 6:17-28, 2001.
6. Arabyan A., Wu F. An Improved Formulation for Constrained Mechanical Systems // Kluwer Academic Pub, 1998. Pp. 49–69.
7. Gonze D. Numerical Methods to Solve Ordinary Differential Equations // P. J. Brief Bioinform, 2009, Pp. 53–64.
8. Lakoba T. Runge-Kutta Methods//University of Vermont, 2006, Pp. 15–20.

PROPERTIES OF SOLITARY ION ACOUSTIC WAVES IN A QUANTIZED DEGENERATE MAGNETOPLASMA WITH TRAPPED ELECTRONS

N.L. Tsintsadze¹, H.A.Shah², M.N.S. Qureshi³, and [M.N. Tagviashvili¹]

¹Faculty of Exact and Natural Sciences, Andronikashvili Institute of Physics, Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia.

²Department of Physics, Forman Christian College, Ferozepur Road, Lahore 54600, Pakistan. (hassanshah@fccollege.edu.pk and hashah.gcl@gmail.com)

³Department of Physics, GC University, Katchery Road, Lahore 54000, Pakistan.

Abstract

We have undertaken the investigation of ion acoustic solitary waves in both weakly and strongly quantized degenerate magnetoplasmas. It is seen that a singular point clearly demarcates the regions of weak and strong quantization due to the ambient magnetic field. The effect of the magnetic field is taken into account via the parameter $\eta_0 = \hbar\omega_{ce}/\varepsilon_{Fe}$ and the Mach number, and their effect on the formation of solitary structures is investigated in both cases and some results are presented graphically.

The nonlinear dynamics of plasma waves in isotropic as well as magnetoactive plasmas has been fairly well studied in the last four decades^[1].

In the present work, we wish to undertake the investigation of ionacoustic solitary waves in a degenerate electron-ion plasma by considering the effect of Landau quantization. In an earlier paper it was shown by Tsintsadze^[2] that when Landau quantization is taken into account in the non-relativistic and weak magnetic field limit the electron number density and Fermi energy are determined by

$$n_e = \frac{p_F^3}{3\pi^2\hbar^3} \left\{ \frac{3}{2}\eta + (1-\eta)^{3/2} \right\} \text{ and } \varepsilon_{Fe} = \frac{(3\pi^2)^{2/3}\hbar^2 n^{2/3}}{2m_e \left(\frac{3}{2}\eta + (1-\eta)^{3/2} \right)^{2/3}} \quad (1)$$

where $\eta = \hbar\omega_{ce}/\varepsilon_{Fe}$ and $\omega_{ce} = |e|H/m_e c$ is the electron cyclotron frequency, n_e is the electron number density and p_F and ε_{Fe} are the electron Fermi momentum and energy, respectively when the electrons are quantized by the magnetic field.

We see that it is more useful to introduce new parameters $\eta_0 = \hbar\omega_{ce}/\varepsilon_{F0}$ and $\gamma = \varepsilon_{Fe}/\varepsilon_{F0}$ where $\varepsilon_{F0} = \frac{(3\pi^2)^{2/3}\hbar^2 n_0^{2/3}}{2m_e}$ is the Fermi energy and n_0 is the equilibrium number density in the absence of the magnetic field. We now note that η_0 explicitly depends on the magnetic field only via the electron cyclotron frequency ω_{ce} . The relationship between η_0 and η is given by $\eta = \eta_0/\gamma$ and Eq.(2) can be rewritten in the following manner

$$\frac{3}{2}\eta_0\gamma^{1/2} + (\gamma - \eta_0)^{3/2} = \sigma = \frac{n_e}{n_0} \quad (2)$$

We note here that if $\sigma = 1$ (as may be the case in metals or semiconductors) then Eq.(2) reduces to

$$\frac{3}{2}\eta_0\gamma^{1/2} + (\gamma - \eta_0)^{3/2} = 1 \quad (3)$$

From Eq.(3) it can be seen that the singular point occurs when $\hbar\omega_{ce} = \varepsilon_{Fe}$ ($\eta = 1$) or when

$$\gamma^* = \eta_0^* = \left(\frac{2}{3} \right)^{2/3} \quad (4)$$

For the case of a strong magnetic field $\gamma < \eta_0$ the Fermi energy depends on the magnetic field in the following manner^[2]

$$\gamma = \left(\frac{2}{3\eta_0} \right)^2 \quad (5)$$

In the case of a weak magnetic field we have for linear ion acoustic waves

$$v_{\phi}^2 = \left(\frac{\omega'}{k}\right)^2 = \frac{m_e}{3m_i} v_{Fe}^2 \frac{3\eta+2(1-\eta)^{3/2}}{\eta+2\sqrt{1-\eta}} \quad (6)$$

If $\eta = 0$ i.e. in the absence of the magnetic field we obtain the standard expression for the phase velocity $v_{\phi 0} = \sqrt{\frac{m_e}{3m_i}} v_{F0}$, where v_{F0} is the Fermi velocity in the absence of the magnetic field.

However, in the case of a strong magnetic field $\eta > 1$ we obtain a new type of a phase velocity $v_{\phi} = \sqrt{3} v_{\phi 0}$.

Using Eq.(6), we can obtain an expression for the Mach number for the weak magnetic field

$$M^2 = \left(\frac{u}{v_{\phi}}\right)^2 = \left(\frac{u}{v_{\phi 0}}\right)^2 \frac{\eta+2\sqrt{1-\eta}}{3\eta+2(1-\eta)^{3/2}} = M_0^2 \frac{\eta+2\sqrt{1-\eta}}{3\eta+2(1-\eta)^{3/2}} = \frac{M_0^2 \left(\eta_0+2\gamma^{\frac{1}{2}}\sqrt{\gamma-\eta_0}\right)}{2\gamma^{1/2}} \quad (7)$$

where $M_0 = u/v_{\phi 0}$ is the Mach number without the magnetic field.

However if the magnetic field is strong $\eta_0 > \gamma$ is satisfied then the Mach number becomes

$$M^2 = \frac{3}{4} M_0^2 \eta_0^2 \quad (8)$$

We now derive the nonlinear evolution equation. We consider first the ion dynamics (classical) and obtain, from the equations of motion and continuity^[3,4] the following expression (by shifting to comoving frame of reference $X = \frac{\sqrt{2}\omega_{pi}}{u}(x - ut)$)

$$n_i = \frac{n_0}{\sqrt{1 - \frac{2e\phi}{m_i u^2}}} = n_0 (1 - \Phi)^{-1/2} \quad (9)$$

where $\Phi = \frac{2e\phi}{m_i u^2}$, u is the ion velocity at $\phi = 0$, and ω_{pi} is the ion plasma frequency.

On the other hand we have for the electron number density^[3], in the weak magnetic field limit $\eta < 1$

$$n_e = \left\{ \frac{3}{2} \frac{\eta_0}{\gamma} \left(1 + \frac{M_0^2}{3\gamma} \Phi\right)^{\frac{1}{2}} + \left(1 - \frac{\eta_0}{\gamma} + \frac{M_0^2}{3\gamma} \Phi\right)^{\frac{3}{2}} \right\} \quad (10)$$

We now use Eqs. (9) and (10) and casting them into dimensionless form we obtain from the Poisson equation

$$\frac{d^2}{dX^2} \Phi = \left\{ \frac{3}{2} \eta_0 \left(\gamma + \frac{M_0^2}{3} \Phi\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\gamma - \eta_0 + \frac{M_0^2}{3} \Phi\right)^{\frac{3}{2}} \right\} - (1 - \Phi)^{-1/2} \quad (11)$$

The above can be rewritten in the form of an energy integral of a particle moving in a pseudopotential or Sagdeev potential. Thus, expressions for the Sagdeev potentials in the weak and strong field limits are given by $V_W(\Phi)$ and $V_S(\Phi)$, respectively.

Thus for the weak magnetic field case^[4]

$$V_W(\Phi) = \frac{3\eta_0}{M_0^2} \left[\gamma^{\frac{3}{2}} - \left(\gamma + \frac{M_0^2}{3} \Phi\right)^{\frac{3}{2}} \right] + \frac{6}{5} M_0^2 \left\{ (\gamma - \eta_0)^{\frac{5}{2}} - \left(\gamma - \eta_0 + \frac{M_0^2}{3} \Phi\right)^{\frac{3}{2}} \right\} - 2[1 - (1 - \Phi)^{1/2}] \quad (12)$$

Equation (12) is complete only when read with Eq.(8) and $\eta_0 > \left(\frac{2}{3}\right)^{2/3}$.

For the strong magnetic field we have^[2]

$$n_e = \frac{v_F^3 \eta}{3\pi^2 \hbar^3} \quad (13)$$

In order to obtain the expression for the Sagdeev potential in the strong magnetic field limit, we obtain from Eqs.(9) and (13) and Poisson's equation

$$V_S(\Phi) = 3\eta_0 \left[-\left(\frac{3}{2\eta_0}\right)^3 - \left(\left(\frac{3}{2\eta_0}\right)^2 + \frac{M_0^2}{3} \Phi\right)^{\frac{3}{2}} \right] - 2[1 - (1 - \Phi)^{1/2}] \quad (14)$$

Further we note here that Eq.(14) is valid only when $\eta_0 > \left(\frac{2}{3}\right)^{2/3}$

We have investigated the dependence of the dependence of the Sagdeev potentials in both the weak and strong magnetic field regions and these are shown in Figs. 1 and 2, respectively. In both cases the depth and the maximum value of the potential increase with increasing Mach number M , but the relative value of the Sagdeev potential is larger for the weak field case and so is the maximum value of the potential for the same Mach number M . A similar trend can be seen in Fig.3 where the maximum value of the potential Φ_{max} is plotted against the magnetic field strength η_0 for different values of M_0 . Here we see that in the weak field region Φ_{max} decreases with increasing η_0 (i.e. with increasing magnetic field strength), at first slowly then rather rapidly as it approaches the singular point. However, in the strong field limit when $\eta_0 > \gamma$ the maximum value of the potential Φ_{max} increases with increasing magnetic field strength i.e. with increasing η_0 . This increase is quite fast as it increases from the singular point but then the increase becomes more gradual. We also note the maximum value of the potential Φ_{max} increases with increasing M_0 as shown in Fig. 4. The trend was observed in Figs.3 and 4 also where Sagdeev potential plots were shown for different values of the Mach number for the weak and strong field regions, respectively.

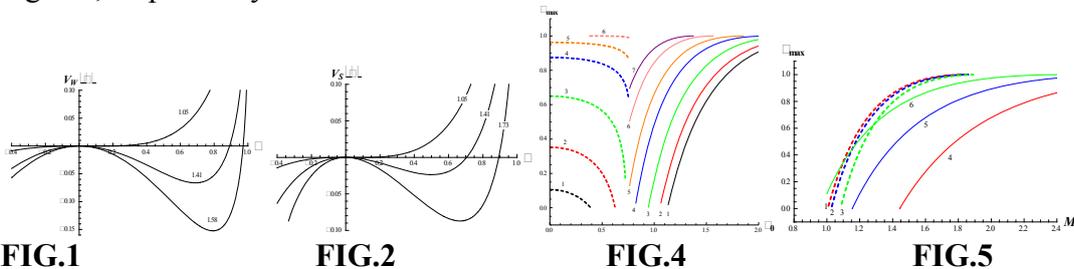


FIG.1

FIG.2

FIG.4

FIG.5

We feel that the results presented in this work can find applications in astrophysical and laser plasma interactions when high powered lasers are employed. Specifically in neutron stars where surface magnetic fields can be of the order of $H \sim 10^{11} - 10^{13} G$ and internal fields can be higher still (additional effect of the order of $H \sim 10^5 G$ as rotation effect are taken into account there effects of Landau quantization would be expected to play a very important role. Also the effects of adiabatic trapping make the inclusion of nonlinearities more realistic. The results presented here have been published in detail in Ref [5]

References

1. P.K. Shukla and B. Eliasson, Phys. Uspekhi **53**, 51 (2010).
2. N.L. Tsintsadze and N.L. Tsintsadze, *From Leonardo to ITER: Nonlinear and Coherence Aspects*, (Ed. J. Weiland), AIP Proc. No. CP1177, New York (2009).
3. H.A. Shah, W. Masood, M.N.S. Qureshi and N.L. Tsintsadze, Phys. Plasmas **18**, 102306 (2011).
4. H.A. Shah, M.J. Iqbal, N. L. Tsintsadze, W. Masood and M.N.S. Qureshi, Phys. Plasmas **19**, 092304 (2012).
5. N. L. Tsintsadze, H. A. Shah, M. N. S. Qureshi, and M. N. Tagviashvili, Phys. Plasmas **22**, 022303 (2015);

RELATIVISTIC PLASMA-BASED MAGNETICALLY INSULATED TRANSMISSION LINE OSCILLATOR

I.L. Bogdankevich^{1,2}, V.O. Litvin³, O.T. Loza^{3,4}

¹A.M.Prokhorov General Physics Institute, Moscow, Russia

²Moscow State Institute of Radio Engineering, Electronics and Automation, Moscow, Russia

³Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia

⁴National Research Centre "Kurchatov Institute", Moscow, Russia

Abstract. A new high-power microwave (HPM) source is proposed in numerical model. The contrivance combines properties of the broadband plasma maser and the monochromatic magnetically insulated transmission line oscillator (MILO). Tunable microwave frequency in the range of 2 to 15 GHz and the peak power ~ 1 GW are defined by an interaction of relativistic electrons with plasma. The device operates without strong external magnetic field.

РЕЛЯТИВИСТСКИЙ ПЛАЗМЕННЫЙ МАЗЕР НА ЛИНИИ С МАГНИТНОЙ САМОИЗОЛЯЦИЕЙ

И.Л. Богданкевич^{1,2}, В.О. Литвин³, О.Т. Лоза^{3,4}

¹Институт общей физики им. А.М. Прохорова, г. Москва

²Московский государственный технический университет радиотехники, электроники и автоматики, г. Москва

³Российский университет дружбы народов, г. Москва

⁴Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт», г. Москва

В численной модели предложен способ генерации СВЧ-импульсов с мощностью ~ 1 ГВт и частотой, управляемой в полосе от 2 до 15 ГГц, при взаимодействии релятивистских электронов с плазмой без сильного внешнего магнитного поля. Комбинация свойств широкополосного плазменного релятивистского СВЧ-генератора — черенковского плазменного мазера — и монохроматического СВЧ-генератора на линии с магнитной самоизоляцией (magnetically insulated transmission line oscillator, MILO) [1]) позволяет создать прибор, сочетающий достоинства обоих прототипов.

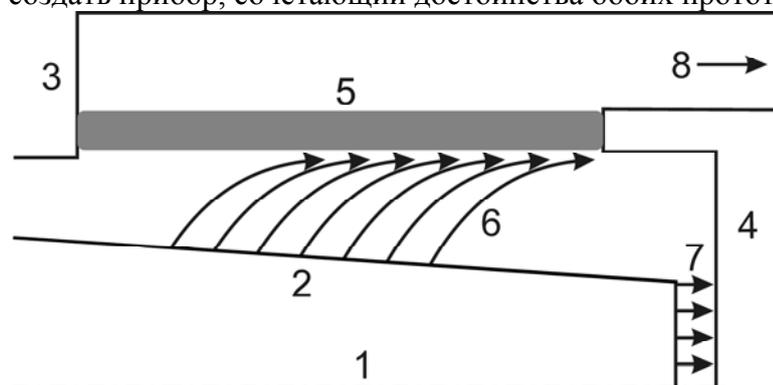


Рис.1. РМИЛО: плазменный СВЧ-генератор на линии с магнитной самоизоляцией: 1 — ось симметрии; 2 — катод; 3 — анод; 4 — коллектор; 5 — плазма; 6 — электроны с боковой поверхности катода; 7 — электроны с торцевой поверхности катода; 8 — выход СВЧ-волны.

Схема плазменного релятивистского СВЧ-генератора на линии с магнитной самоизоляцией (плазменного мазера с MILO или РМИЛО) показана на Рис.1. Ось 1 определяет аксиальную симметрию всей системы. На катод 2 подается импульс высокого напряжения относительно заземленных анода 3 и коллектора электронов 4. Трубочатая плазма 5 играет роль замедляющей структуры. Ток электронов с катода состоит из токов с его боковой поверхности

6 и с торцевой поверхности 7. Электроны с боковой поверхности катода 6 дрейфуют в скрещенных полях: азимутальном магнитном поле тока катода и радиальном электрическом поле. Эти электроны взаимодействуют с плазмой и возбуждают в ней медленную волну, частота которой определяется концентрацией плазмы.

Отличия данного прибора от MLO следующие. Во-первых – это трубчатая плазма вместо диафрагмированного волновода в качестве замедляющей структуры, как в плазменных лазерах. Во-вторых, отличен принцип действия генератора: MLO работает как лампа обратной волны, а PMLO, как и все плазменные лазеры [1] — как лампа бегущей волны, т.е. усилитель с обратной связью за счет отражений волн на левой и правой границах волновода. Третьим отличием от MLO является коническая форма катода. Традиционно в конструкциях MLO используются цилиндрические катоды, первые расчеты PMLO проводились также с цилиндрическими катодами [2]. Проведенный анализ форм траекторий электронов и их оптимизация с целью повышения эффективности СВЧ-излучения привели к необходимости изменения формы катода.

Численные расчеты проводились с помощью кода Карат [2]. Электроны задавались как крупные частицы (PIC-методом, particle-in-cell), плазма – согласно модели Друде [4] как неизменная по геометрии среда с определенными свойствами. Использование модели Друде позволяет получать решения, хорошо сочетающиеся с результатами расчетов по более точному, но значительно более ресурсоемкому PIC-методу моделирования плазмы. Таким образом, метод Друде дает существенный выигрыш по времени расчета, что очень важно при поисковых исследованиях.

Потенциал катода задавался равным -500 кВ, полный ток, определяемый в значительной степени током электронов с торца катода 7 на коллектор 4, был равен примерно 25 кА. Длина плазменно-пучкового взаимодействия определялась длиной плазменного цилиндра 25 см при радиусах катода примерно 1.5 см, коллектора 4 см и анодной трубы 5.5 см.

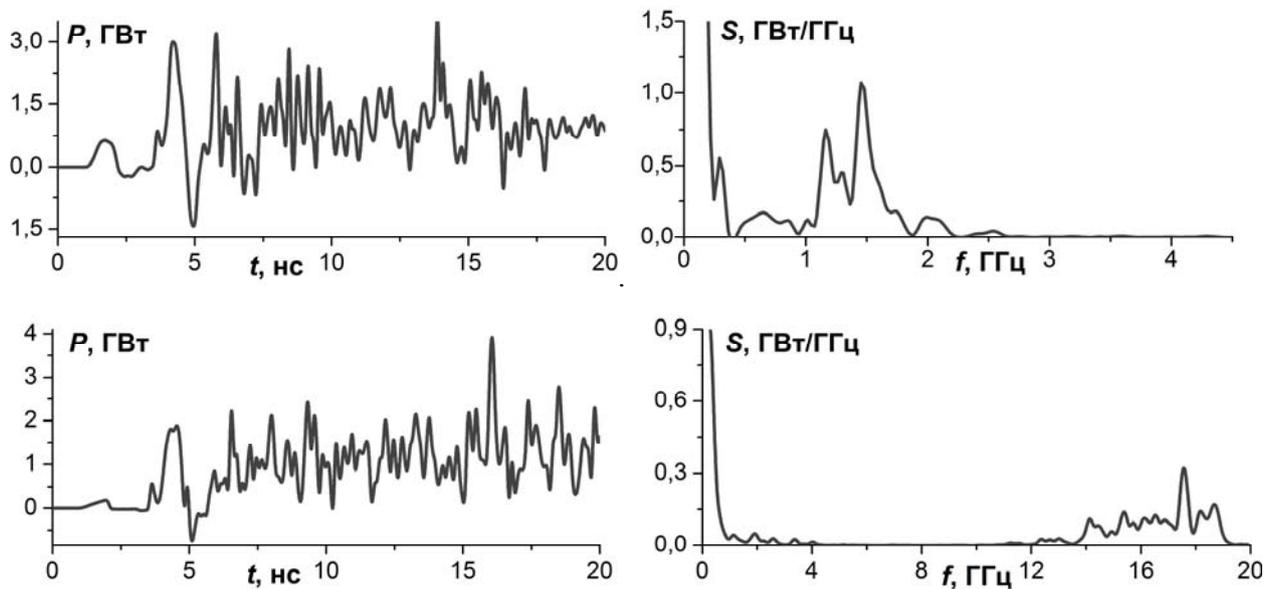


Рис.2. Зависимости мощности СВЧ-излучения P от времени t (слева) и спектры СВЧ-излучения (справа) при концентрации плазмы $0.5 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}$ (вверху) и $7.0 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}$ (внизу)

На Рис.2 (слева вверху) показана зависимость мощности СВЧ-излучения на выходе PMLO от времени для концентрации плазмы $0.5 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}$, мощность выходит на уровень приблизительно 1.2 ГВт, что соответствует КПД 9%. На этом же рисунке справа вверху представлен спектр излучения, которое состоит из низкочастотной (< 1 ГГц) и высокочастотной фракций. Частота высокочастотной фракции излучения определяется

концентрацией плазмы, как и во всех плазменных релятивистских СВЧ-генераторах, и в дальнейшем только эта часть излучения будет учитываться при подсчете мощности и эффективности СВЧ-генератора. Зависимость мощности СВЧ-излучения от времени для концентрации плазмы $7.0 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}$ и спектр излучения, отображены в правой части рисунка 2.

На Рис.3 показаны зависимости частоты и мощности излучения от концентрации плазмы. При изменении концентрации в диапазоне $(0.8 \dots 7.0) \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}$ мощность высокочастотной, управляемой по частоте части излучения остается примерно на постоянном уровне ~ 0.9 ГВт, тогда как частота меняется примерно от 3 ГГц до 17 ГГц. Ширине спектра излучения соответствует длина вертикальных линий на графике, при разных концентрациях плазмы она принимает значения от 0.2 до 1.5 ГГц. Во всем диапазоне частот мощность излучения приблизительно одинакова и равна 0.9 ГВт, что соответствует КПД около 7%.

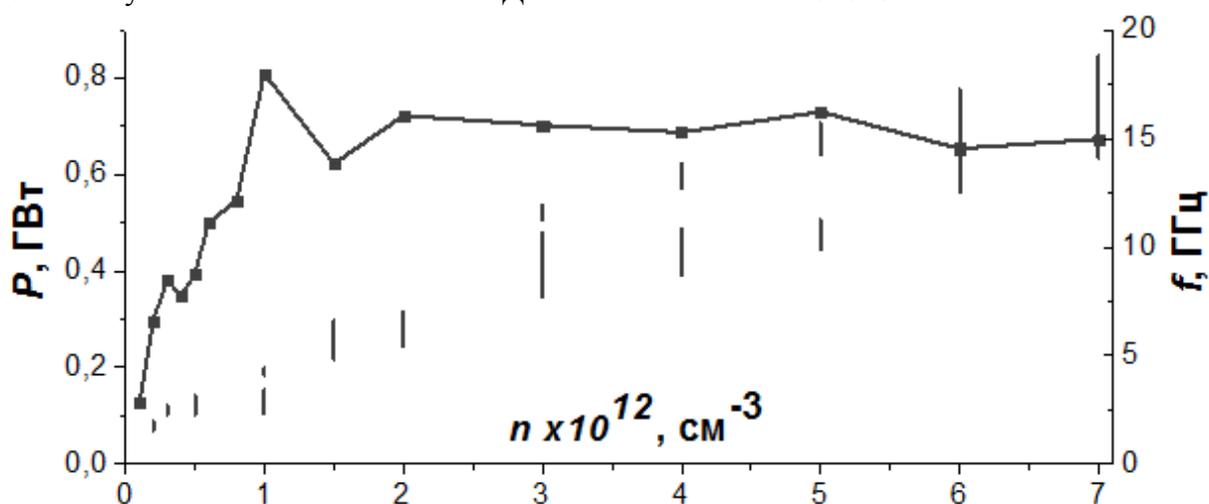


Рис.3. Зависимости мощности P и частоты f СВЧ-излучения от концентрации плазмы n

Предлагаемый способ генерации СВЧ-импульсов в широкой полосе частот не требует формирования сильноточного потока релятивистских электронов, однако требует формирования трубчатой плазмы. Такая плазма может быть создана специальным электронным пучком (600 эВ, 30 А), ионизирующим газ при давлении ~ 0.1 Па в течении 10...100 мкс [Ошибка! Закладка не определена.]. Для этого необходимо продольное магнитное поле, в котором диаметр ларморовской окружности электрона с энергией 600 эВ соответствует толщине плазмы 0.5 см, т.е. индукцией поля равна приблизительно 200 Гс. Это магнитное поле значительно слабее, чем в плазменных СВЧ-генераторах (~ 1 Тл), и даже меньше азимутального магнитного поля тока по катоду. Расчеты показали, что добавление такого слабого продольного магнитного поля в систему практически не меняет ни мощность, ни спектр излучения при небольшой корректировке геометрии.

Более точные расчеты, ориентированные на практическое воплощение предлагаемого СВЧ-генератора, будут проводиться с учетом указанного слабого продольного магнитного поля по методу крупных частиц для всех электронов и ионов плазмы, учитывающим их движение, как это делалось, напр., в [2]. Тем не менее, возможность создания мощного СВЧ-генератора без сильного магнитного поля, т.е. со сравнительно высокой эффективностью и, одновременно, с широкой перестройкой частоты излучения, демонстрируется показанными здесь результатами.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, грант № 13-08-00414.

Библиографический список

- 1 M. C. Clark, B. M. Marder and L. D. Bacon. Magnetically insulated transmission line oscillator // Appl. Phys. Lett. 52, 78 (1988).
- 2 Loza O.T., Shkvarunets A.G., Strelkov P.S. Experimental Plasma Relativistic Microwave Electronics // IEEE Trans. on plasma science, 1998, Vol 26, # 3, pp. 615-627.
- 3 Богданкевич И.Л., Литвин В.О., Лоза О.Т. Плазменный СВЧ-генератор с магнитной самоизоляцией // XLII Международная Звенигородская конференция по физике плазмы и УТС, 9 – 13 февраля 2015 г., с. 364.
- 4 Tarakanov V.P. User's Manual for Code KARAT // BRA Inc. Va. USA. 1992.
- 5 Drude P. Zur Elektronentheorie der Metalle // Ann.d.Phys. 1900. V. 1. P. 566.
- 6 Ернылева С.Е., Литвин В. О., Лоза О.Т., Богданкевич И.Л. Перспективный источник мощных широкополосных СВЧ-импульсов с изменяемой до двух октав частотой излучения // ЖТФ, 2014, т.84, вып.8, с. 127-131.

АВТОРЕЗОНАНСНОЕ УСКОРЕНИЕ УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ В ПОЛЕ МОЩНОГО ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

AUTORESONANT ACCELERATION OF ULTRARELATIVISTIC ELECTRONS BY INTENSE LASER RADIATION

Н. Абдулов
N. Abdulov

Российский университет дружбы народов, Москва, РФ
Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, RF

Рассматривается движение ультрарелятивистского электрона в поле импульсного лазерного излучения с длиной волны 1 мкм при выполнении условия циклотронного авторезонанса.

The motion of an ultrarelativistic electron in the field of pulsed laser radiation with the wave length 1 μm under the condition of cyclotron autoresonance is considered.

Режим циклотронного авторезонанса заключается в том, что выражение

$$\gamma - P_z = \frac{\omega_{co}}{\omega} \equiv \Omega \quad (1)$$

сохраняется во всё время движения электрона в поле электромагнитной волны, распространяющейся в направлении внешнего магнитного поля [1]. Здесь γ – гамма-фактор, P_z – продольный безразмерный импульс электрона, ω_{co} – классическая циклотронная частота, ω – частота лазерного излучения. При постоянном внешнем магнитном поле величина Ω зависит только от длины волны лазера. Она определяет минимальную начальную энергию электрона, которая требуется для осуществления резонанса

$$\gamma_{\min} = \frac{\Omega^2 + 1}{2\Omega}.$$

Во внешнем магнитном поле $B_0 = 10 Tl$ и длине волны лазера $\lambda = 1$ мкм параметр $\Omega = 9.3 \cdot 10^{-4}$, так что начальная энергия электрона должна быть не менее $W_0 \sim 268$ МэВ. Это значит, что инжектируемые электроны должны быть ультрарелятивистскими.

Мощное лазерное излучение является импульсным с короткой длительностью. Его описание, в общем, представляет собой довольно сложную задачу. Мы ограничимся рассмотрением импульсов, протяженность которых превышает длину волны излучения: $c\Delta t \gg \lambda$. В этом случае для описания излучения можно использовать параксиальное приближение, в котором излучение представляется в виде гауссовых пучков произвольной моды [2]. В параксиальном приближении отношение длины волны лазера к сужению пучка a_0 (его размер в фокальной плоскости) представляет собой малый параметр $\mu = \lambda/a_0 \ll 1$. В нашем случае $a_0 = 10\lambda$. Рассматривается лазерное излучение основной моды круговой поляризации с длиной волны $\lambda = 1$ мкм, интенсивностью пучка $\sim 10^{18} Bm/cm^2$ и длительностью импульса $\Delta t = 34\phi c$.

В нулевом приближении по параметру μ векторы поля излучения имеют только поперечные составляющие. Поперечные компоненты электрического поля основной моды описываются формулами:

$$\begin{aligned} E_x &= f(\sigma)E_0(r, z)\sin(\psi_0) \\ E_y &= f(\sigma)E_0(r, z)\cos(\psi_0) \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь функция $f(\sigma)$ описывает импульсный характер излучения, где $\sigma = \frac{t-z}{\Delta t}$. В частности, эта функция может задаваться в виде [3]: $f(\sigma) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\sigma\right)$. Амплитуда

$$E_0(r, z) = \frac{E(0)}{\sqrt{1+Z^2}} e^{-\frac{\rho^2}{1+Z^2}},$$

где $E(0)$ – амплитуда волны при $t = 0$, $x = y = z = 0$. Величины $\rho^2 = \frac{x^2+y^2}{a_0^2}$, $Z = \frac{z}{z_R}$, $z_R = ka_0^2/2$ – рэлеевская длина, $k = \omega/c$ – волновое число.

Фаза волны основной моды

$$\psi_0 = kz - \omega t + \frac{\rho^2 Z}{1+Z^2} - \arctg Z.$$

В первом приближении возникают продольные составляющие электрического и магнитного полей, которые играют важную роль в характере движения электрона. Эта составляющая для электрического поля имеет вид:

$$E_z = f(\sigma)(E_1(r, z) \sin(\psi_0) + E_2(r, z) \cos(\psi_0)), \quad (3)$$

где

$$E_1 = \frac{2E_0}{ka_0(1+Z^2)}(y - xZ) \quad (3a)$$

$$E_2 = -\frac{2E_0}{ka_0(1+Z^2)}(x + yZ) \quad (3б)$$

Здесь и далее поперечные координаты являются безразмерными в единицах сужения a_0 . Компоненты вектора магнитного поля излучения определяются с помощью уравнений Максвелла.

Было проведено численное решение релятивистских уравнений движения электрона по методу Рунге-Кутты в среде Matlab. Движение частиц в авторезонансном режиме рассматривается на расстоянии до $(2.5-3)z_R$. Далее лазерное гауссово излучение сильно расплывается, и его интенсивность существенно ослабляется.

На рис.1 изображена зависимость энергии электрона от $Z = z/z_R$ при разных начальных положениях электрона в плоскости сужения лазерного гауссова пучка.

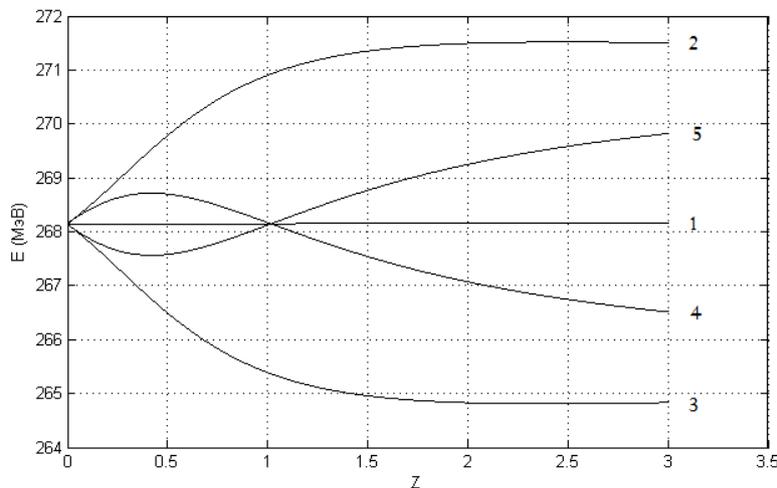


Рис. 1

На рисунке 1:

- | | |
|------------------------|-----------------------|
| 1) $x=0; y=0;$ | 4) $x=0.15; y=-0.15;$ |
| 2) $x=0.15; y=0.15;$ | 5) $x=-0.15; y=0.15;$ |
| 3) $x=-0.15; y=-0.15;$ | |

Из рисунка видно, что частицы, находящиеся в первой четверти плоскости сужения лазерного пучка 2), монотонно ускоряются, и на расстоянии 1.5-2 рэлеевских длин наступает насыщение. Частицы в третьей четверти 3) также монотонно, но замедляются. Энергия частиц, инжектируемых на оси лазерного излучения, никак не меняется. При длине волны $\lambda = 1$ мкм и сужении $a_0 = 10\lambda$ рэлеевская длина $z_R = 0.031$ см можно найти, что прирост средней энергии пучка электронов на единицу длины составляет $d = 0.23$ МэВ/см.

Необычный характер движения резонансных частиц (существенная зависимость от начальной разности фаз между волной и частицей) объясняется, возможно, тем, что движение электрона является ультрарелятивистским и происходит на достаточно малом расстоянии порядка рэлеевской длины, на котором лазерное излучение существенно ослабляется.

Из рисунка 1 следует, что для эффективного ускорения ультрарелятивистских электронов необходимо инжектируемые частицы сосредоточить в первой четверти плоскости сужения лазерного пучка. На рис.2 изображен характер изменения набора энергии электронами, инжектируемых с одинаковой энергией, при разных их начальных положениях в этой четверти.

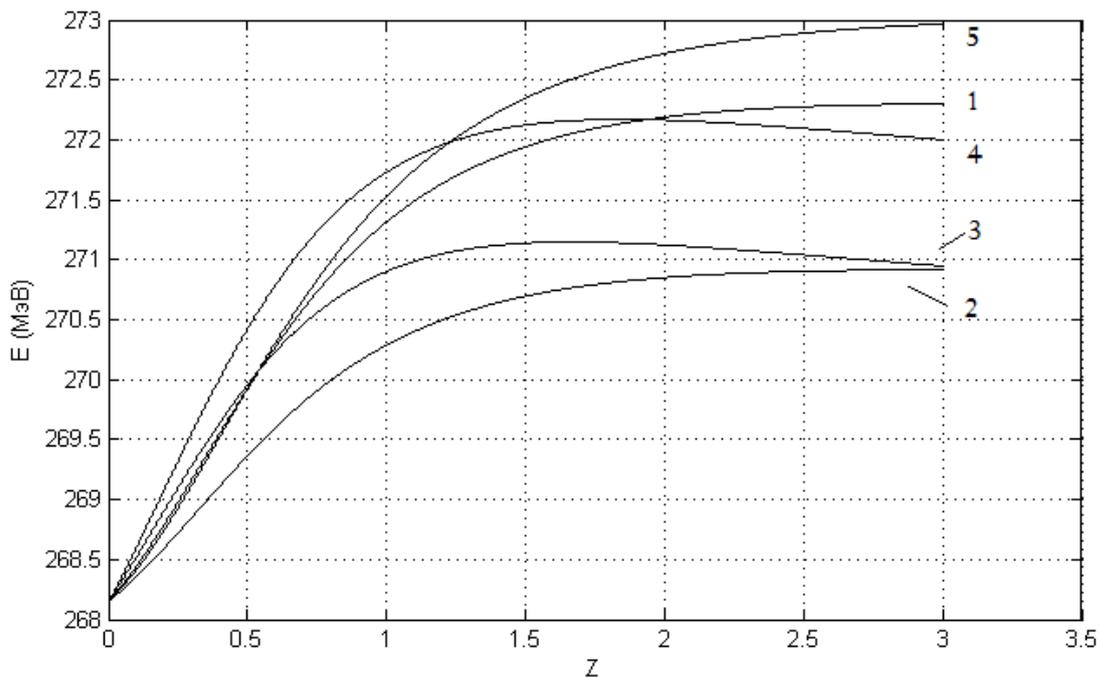


Рис. 2

Здесь:

- | | |
|---------------------|----------------------|
| 1) $x=0.15; y=0.2;$ | 4) $x=0.25; y=0.15;$ |
| 2) $x=0.1; y=0.13;$ | 5) $x=0.13; y=0.25;$ |
| 3) $x=0.2; y=0.1;$ | |

Видно, что у разных частиц происходит тенденция к насыщению на разных уровнях энергии, и, в общем, средний прирост энергии в этом случае составляет $d = 58.3$ МэВ/см.

Таким образом, проведенные расчеты показывают, что возможность эффективного авторезонансного ускорения ультрарелятивистских электронов мощным лазерным излучением существенно зависит от условий их инжекции: пучок ускоряемых электронов должен быть асимметричным относительно оси гауссова пучка. Отметим, что режим ускорения электронов действительно является авторезонансным, поскольку начальное

условие циклотронного резонанса (1) сохраняется во все время движения с достаточно высокой точностью. Вместе с тем, это – особый резонанс, в котором циклотронная частота намного меньше частоты волны. Поскольку параметр Ω в (1) очень мал, то вся энергия частицы приходится на продольную компоненту импульса. Поэтому можно ожидать, что движение резонансных частиц определяется, в основном, продольной компонентой электрического поля. Его структура в поперечной плоскости согласно формулам (3) является асимметричной. Возможно, что с этой асимметрией лазерного излучения связаны особенности движения электрона, изображенные на рис.1.

Для увеличения эффективности ускорения ультрарелятивистских электронов, очевидно, необходимо использовать каскадный механизм. Однако для этого требуются дополнительные исследования.

Автор благодарен проф. В.П. Милантьеву за научное руководство.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Милантьев В. П. // УФН. 1997. Т. 167 (1). С. 3.; // УФН. 2013. Т.183 (8). С.875
- [2] Милантьев В.П., Шаар Я.Н. Об описании мощного лазерного излучения. Тезисы докладов L Всеросс. Конф. по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники. РУДН. 13-16 мая 2014 г.
- [3] Quesnel B., Mora P. // Phys. Rev. E. 1998. Vol.58 (3). P.3719-3732.

АНАЛИЗ ЗАВИСИМОСТИ СЕРФОТРОННОГО УСКОРЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ В ПЛАЗМЕ ОТ ФАЗОВОЙ СКОРОСТИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

Ерохин А.Н.¹⁾, Зольникова Н.Н.²⁾, Ерохин Н.С.^{1,2)}, Михайловская Л.А.²⁾

THE ANALYSIS OF ELECTRONS SURFATRON ACCELERATION IN PLASMA IN THE DEPENDENCE ON ELECTROMAGNETIC WAVE PHASE VELOCITY

Erokhin A.N.¹⁾, Zolnikova N.N.²⁾, Erokhin N.S.^{1,2)}, Mikhailovskaya L.A.²⁾

¹⁾ *Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*

²⁾ *Институт космических исследований РАН, Москва, Россия*

e-mail: benkatz2x2@gmail.com

Abstract

On the basis of numerical calculations it is considered ultrarelativistic acceleration of electrons in space plasma by the electromagnetic wave propagating across the external magnetic field. The dependence of acceleration efficiency on wave phase velocity is studied and it has been shown that the acceleration efficiency is much more for the large value of wave phase velocity. The transition from small wave phase velocity to the large one takes place under small decreasing of wave frequency. The dynamics of accelerated electron velocity and impulse components are investigated also.

Введение

Исследование механизмов генерации потоков ультрарелятивистских частиц входит в число актуальных задач физики космической плазмы. Например, это важно для проблемы происхождения космических лучей (КЛ) включая динамику формирования спектров КЛ, возникновение вариаций потоков КЛ в зависимости от характеристик космической плазмы и др. Серфотронное ускорение зарядов электромагнитными волнами рассматривался ранее, в частности, в работах [1-11]. Было показано, что это эффективный механизм генерации потоков ультрарелятивистских частиц в относительно спокойной космической плазме с энергиями $(1 \div 10^6)$ ГэВ и более. Анализ серфинга зарядов на электромагнитных волнах необходим, например, для оценки числа ультрарелятивистских ускоренных частиц, характерных размеров области ускорения, энергетических спектров и их вариаций, что требует детального анализа условий захвата заряженных частиц в режим серфотронного ускорения, выявления благоприятных для захвата заряженных частиц параметров, эффективности ускорения частиц при воздействии пространственно локализованных волновых пакетов и т.д. При поперечном распространении электромагнитной волны р-поляризации для квадрата показателя преломления плазмы $N^2 = (c k / \omega)^2$ на частоте верхнего гибридного резонанса ω имеем: $N^2 = 1 - [v(1-v)] / (1 - u^2 - v)$, $u = \omega_{He} / \omega$, $v = (\omega_{pe} / \omega)^2$, где $\omega_{He} = eH_0 / m_e c$ - гирочастота нерелятивистских электронов плазмы, $\omega_{pe} = (4\pi e^2 n_0 / m_e)^{1/2}$ - электронная ленгмю-ровская частота, n_0 плотность плазмы.

В работе рассматривается случай $u^2 \ll 1$, когда фазовая скорость электромагнитной волны меньше скорости света в вакууме для следующей области безразмерной плотности плазмы $v : 1 - u^2 < v < 1$, что соответствует частотам верхнего гибридного резонанса. Захват в режим серфинга происходит при поле волны E_0 выше критического значения, когда выполняется условие $\sigma \equiv e E_0 / m_e c \omega > \sigma_c = u \gamma_p = u / (1 - \beta_p^2)^{1/2}$, $\beta_p = \omega / c k$.

Отметим, что нелинейные эффекты взаимодействия ускоряющей волны с плазмой малы, если амплитуда E_0 существенно ниже характерного поля релятивистской нелинейности т.е. при $\sigma^2 \ll 1$.

Постановка задачи и результаты численных расчетов

Рассмотрим релятивистские уравнения движения электрона массы m_e в поле электромагнитной волны $E_x = E_0 \cos \Psi$, где $\Psi = \omega t - kx$. При численных расчетах серфинга задачу упростим пренебрегая вихревыми компонентами волновых полей E_y, H_z . Расчеты показали, что их учет не существен. Введем безразмерные величины $\beta = v/c$, $\tau = \omega t$, $\xi = \omega x/c$. Тогда имеем $\beta_x = \beta_p (1 - d\Psi/d\tau)$, $\Psi = \tau - (\xi/\beta_p)$. Уравнения движения электрона имеют интегралы $h = \gamma \beta_z = \text{const}$, $J = \gamma \beta_y - u \beta_p \cdot (\tau - \Psi) = \text{const}$ т.е. $\gamma \beta_y = J + u \beta_p (\tau - \Psi)$. Релятивистский фактор электрона γ вычисляется по формуле $\gamma^2 = \{1 + h^2 + [J + u \beta_p \cdot (\tau - \Psi)]^2\} / (1 - \beta_x^2)$. Для фазы волны на траектории электрона получаем нелинейное, нестационарное уравнение

$$\Psi_{\tau\tau} - [\sigma \cdot (1 - \beta_x^2) \cdot \cos \Psi] / (\beta_p \cdot \gamma) - (u / \beta_p \cdot \gamma^2) / [J + u \beta_p \cdot (\tau - \Psi)] = 0. \quad (1)$$

Нелинейное уравнение (1) решалось численно с начальными данными в виде $\Psi(0) = \Psi_0$, $\Psi_\tau(0) = a$. При этом $\beta_x(0) = \beta_p (1 - a)$, где параметр a должен удовлетворять условию $1 - (1/\beta_p) < a < 1 + 1/\beta_p$. При захвате электрона волной в эффективную потенциальную яму на достаточно больших временах ускорения численное решение должно выходить на асимптотики $\beta_x \approx \beta_p$, $\beta_y \approx 1/\gamma_p$, $d\gamma/d\tau \approx u \beta_p \gamma_p$. Как видим, темп роста энергии ускоряемого электрона не зависит от амплитуды поля волны E_0 , определяющей параметр среднего темпа ускорения $\langle \cos \Psi(\tau) \rangle \approx \sigma_c / \sigma$ т.е. асимптотику положения дна эффективной потенциальной ямы, которое для захваченного электрона на фазовой плоскости является особой точкой типа устойчивый фокус. Для нахождения диапазона начальных фаз $\Psi(0)$, при которых происходит захват электрона в режим ультрарелятивистского ускорения волной (благоприятные фазы), фиксировалась фазовая скорость волны β_p , полагалось $|\Psi(0)| < \pi$. Безразмерная амплитуда волны σ выбиралась несколько выше порогового значения σ_c : $\sigma = 1.5 \sigma_c$. Затем численными расчетами на временах $\tau \leq 70000$ определялся диапазон начальных фаз, в котором имел место захват электрона волной.

Приведем результаты расчетов для следующего варианта параметров задачи $h = 150$, $\gamma(0)\beta_y(0) = 10$, $\beta_p = 0.199$, $u = 0.45$, $a = 0$, соответствующего релятивистскому электрону с $\gamma(0) \approx 153.404$. Начальная фаза $\Psi(0)$ выбиралась в интервале $(-3.1 \div 3.1)$. Результаты численных расчетов показали, что для начальных фаз из интервала $(-3.1, 0.1)$ с шагом $\delta\Psi(0) = 0.1$ захват частицы в эффективную потенциальную яму отсутствует на временах счета $\tau < 10^5$, электрон совершает ларморовское вращение. Однако для начальных фаз $\Psi(0)$ из интервала $(0.2 \div 3)$ электрон захватывается сразу с последующим ультрарелятивистским ускорением. Так для $\tau = 7 \cdot 10^4$ его релятивистский фактор достигает значения $\gamma \approx 6409$, что соответствует энергии 3.375 ГэВ. Темп ускорения $d\gamma/d\tau$ равен 0.0914.

В случае $u = 0.49$, $h = 150$, $\gamma(0)\beta_y(0) = 10$, $a = 0$ при высокой фазовой скорости волны $\beta_p = 0.9$, когда $\gamma(0) \approx 344.895$ темп ускорения захваченного электрона $d\gamma/d\tau \approx 1.012$ т.е. повышается на порядок величины и к моменту времени $\tau = 7 \cdot 10^4$ релятивистский фактор γ достигает гораздо большего значения $\gamma \approx 70880$, что соответствует энергии электрона 7.622 ТэВ. Таким образом, для достаточно высоких фазовых скоростей электромагнитной волны эффективность ускорения захваченных электронов (темп роста энергии) резко возрастает. Здесь необходимо отметить важное обстоятельство. Для значений параметра

$u^2 \ll 1$ большое увеличение фазовой скорости электромагнитной волны для рассматриваемого верхнего гибридного резонанса колебаний плазмы происходит при малом изменении частоты – порядка 8 процентов !! Отметим также, что для поперечных (к внешнему магнитному полю) компонент импульса захваченного электрона темпы их роста при ускорении практически постоянны и соответствуют асимптотикам $\gamma\beta_x \approx \gamma\beta_p$, $\gamma\beta_y \approx \gamma / \gamma_p$. Приведем графические иллюстрации по материалам численных расчетов. На рис.1 показана динамика фазы волны на траектории захваченного электрона для $\beta_p = 0.9$, $\Psi(0) = 2.5$.

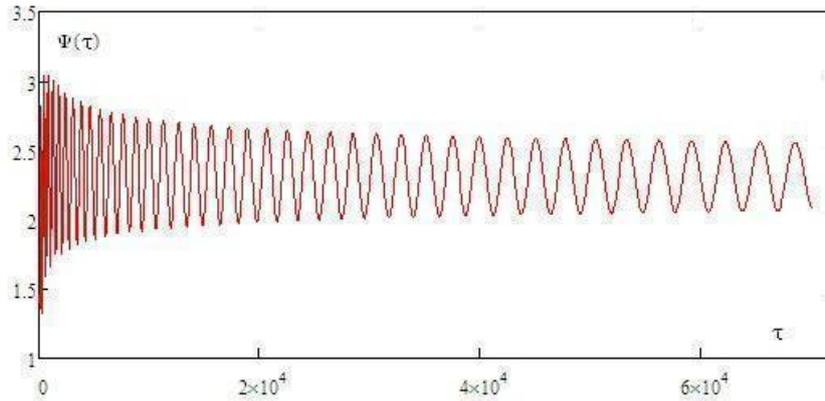


Рис.1. Динамика фазы волны на траектории электрона.

Как видим, по мере ускорения амплитуда осцилляций фазы плавно уменьшается, а их период возрастает, что соответствует асимптотикам решения уравнения (1). Результат расчета $\gamma(\tau)$ представлен на рис.2.

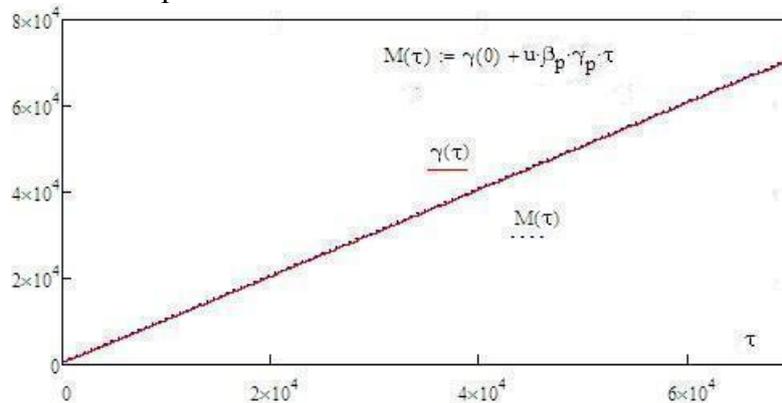


Рис.2. Динамика роста энергии захваченного электрона.

Согласно рис.2, график релятивистского фактора $\gamma(\tau)$ хорошо описывается линейной по времени аппроксимацией $M(\tau)$, что соответствует ускорению с постоянным темпом роста энергии электрона. Аналогичные графики получаются и для поперечных компонент импульса захваченного электрона.

Заключение

Результаты проведенных численных расчетов серфотронного ускорения релятивистских электронов электромагнитной волной в плазме можно сформулировать следующим образом. В случае релятивистских начальных энергий структура области начальных фаз, благоприятных для реализации серфинга, существенно упрощается. Наиболее эффективно ускорение при высоких фазовых скоростях электромагнитной волны, когда $\beta_p \approx 1$. Для волн с малой β_p темп ускорения значительно меньше (на порядок и более). Для верхнего гибридного резонанса различие частот волн с высоким и низким темпами ускорения может быть невелико. Естественно ожидать, что

эффективность серфотронного ускорения будет зависеть от фоновой обстановки. Серфинг является локальным источником дополнительной генерации космических лучей как в солнечной гелиосфере, так и плазме межзвездных облаков до энергий порядка 10^{15} эВ и выше.

Литература

- [1]. N. Katsouleas, J.M. Dawson. *Physical Review Letters*. 1983, 51, 392.
- [2]. C. Joshi. *Radiation in plasmas*. 1984, 1, Issue 4, 514.
- [3]. Б.Э. Грибов, Р.З. Сагдеев, В.Д. Шапиро, В.И. Шевченко. *Письма в ЖЭТФ*. 1985, 42, № 2, 54.
- [4]. С.В. Буланов, А.С. Сахаров. *Письма в ЖЭТФ*. 1986, 44, Вып. 9, 421.
- [5]. Н.С. Ерохин, А.А. Лазарев, С.С. Моисеев, Р.З. Сагдеев Р.З. *Доклады Академии наук*. 1987, 295, № 4, 849.
- [6]. Н.С. Ерохин, С.С. Моисеев, Р.З. Сагдеев. *Письма в Астрономический журнал*. 1989, 15, № 1, 3.
- [7]. Г.Н. Кичигин. *ЖЭТФ*. 2001, 119, Вып. 6, 1038.
- [8]. М.Е. Dieckmann and P.K. Shukla. *Plasma Physics and Controlled Fusion*. 2006, 48, Issue 10, 1515.
- [9]. А.И. Нейштадт, А.В. Артемьев, Л.М. Зеленый, Д.Л. Вайнштейн. *Письма в ЖЭТФ*. 2009, 89, Вып. 9, 528.
- [10]. В.М. Лозников, Н.С. Ерохин. *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Плазменная электроника*. 2010. № 4 (68), с.121.
- [11]. А.Н. Ерохин, Н.С. Ерохин, В.П. Милантьев. *Физика плазмы*. 2012, 38, № 5, 435.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КОРОТКОВОЛНОВЫХ ВГВ С ЗОНАЛЬНЫМИ ВЕТРАМИ В АТМОСФЕРЕСуслов А.И.¹⁾, Ерохин Н.С.^{1,2)}**THE INTERACTION OF SHORT WAVELENGTH IGW WITH ZONAL WINDS IN THE ATMOSPHERE**Suslov A.I.¹⁾, Erokhin N.S.^{1,2)}¹⁾ *Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*²⁾ *Институт космических исследований РАН, Москва, Россия**e-mail: chench0@yandex.ru***Abstract**

On the basis of numerical calculations it is considered the interaction of internal gravity waves (IGW) having short wavelength with vertically inhomogeneous zonal winds in the atmosphere under IGW propagation to the ionospheric plasma. The possibility for IGW passage up to the ionospheric altitudes are analyzed. It has been shown that IGW having small enough wavelength can't propagate to the ionospheric plasma altitudes due to the presence of vertical reflection layers and the critical one appearing due to the zonal winds with large enough velocity maximum magnitude. Thus the vertical reflection layers and the critical one are blocking the IGW propagation to the ionospheric altitudes. So the generation of ionospheric plasma perturbations by short wavelength IGW is absent. Thus the appearance of indicators of tropospheric crisis processes in ionospheric plasma due to short wavelength IGW is becomes impossible.

Содержание работы

На основе численных расчетов лучевых траекторий рассмотрено прохождение коротковолновых внутренних гравитационных волн (ВГВ) из тропосферы через вертикально неоднородные ветровые структуры до ионосферных высот. ВГВ могут возбуждаться в тропосфере за счет разнообразных процессов, например, кризисных явлений, включая сейсмическую активность. При достижении ионосферных высот ВГВ могут значительно усилиться по амплитуде вследствие существенного снижения плотности нейтральной составляющей среды. В результате на ионосферных высотах будут возникать предвестники и индикаторы как сейсмических событий, так и других кризисных явлений в приземной атмосфере.

Для различных вариантов выбора параметров ВГВ и ветровых структур изучены особенности лучевых траекторий, связанные с возникновением на трассе распространения ВГВ слоев горизонтального и вертикального отражений волн, а также критического слоя, в окрестности которого происходит сильное уменьшение вертикальной компоненты групповой скорости ВГВ за счет роста вертикальной компоненты волнового вектора, а также резко возрастает поглощение волны за счет вязкости.

Показано, что для коротковолновых внутренних гравитационных волн невозможно их прохождение из тропосферы до ионосферных высот, которому препятствуют слои вертикального отражения и критические слои, возникающие при достаточно большой скорости ветрового потока. Для конкретного вертикального профиля скорости ветра и частоты Вейселя-Брента вычислены характерные значения длин волн ВГВ, при которых блокируется прохождение ВГВ в ионосферную плазму, величины горизонтального смещения ВГВ по достижении ими слоев вертикального отражения и критического слоя.

Исследование процессов генерации возмущений ионосферной плазмы за счет кризисных процессов в тропосфере относится к числу актуальных задач и представляет большой интерес, в частности, для наблюдений индикаторов и предвестников кризисных атмосферных явлений спутниковой аппаратурой, корректной интерпретации данных наблюдений возмущений ионосферной плазмы.

ЗАХВАТ И УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКОЕ УСКОРЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ ПАКЕТОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В КОСМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЕ ПРИ РЕЛЯТИВИСТСКИХ НАЧАЛЬНЫХ ЭНЕРГИЯХ ЧАСТИЦ

Н. С. Ерохин^{1,2}, Н. Н. Зольникова¹, Р. Шкевов³, Л. А. Михайловская¹

THE CAPTURE AND HIGHLY RELATIVISTIC ACCELERATION OF ELECTRONS BY ELECTROMAGNETIC WAVE IN SPACE PLASMA FOR RELATIVISTIC INITIAL ENERGY OF PARTICLES

Erokhin N.S.^{1,2}, Zolnikova N.N.¹, Shkevov R.³, Mikhailovskaya L.A.¹

¹Институт космических исследований РАН, Москва, Россия

²Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

³Институт космических исследований и технологий БАН, София, Болгария

e-mail: nerokhin@iki.rssi.ru

Abstract

On the basis of numerical calculations it is considered ultrarelativistic acceleration of electrons in space plasma by the electromagnetic wave packet propagating across the external magnetic field. The conditions for electrons capture by wave packet, the dynamics of velocity components and the particle momentum are considered in the dependence on problem incoming parameters including the wave packet size. The structure of phase plane of the accelerated electrons is considered also. The optimal conditions for the realization of ultra-relativistic surfatron acceleration of electrons by spatially localized wave packet are formulated. It is discussed the possibility of appearance of differences in the accelerated electrons from the standard power dependences.

Введение

Анализ механизмов формирования потоков релятивистских и ультрарелятивистских частиц входит в число актуальных задач физики космической плазмы, например, это представляет большой интерес для проблемы генерации космических лучей (КЛ) в астрофизике, возникновения вариаций потоков КЛ, их зависимости от космической погоды, а также для корректной интерпретации данных наблюдений. Одним из эффективных механизмов генерации потоков ультрарелятивистских частиц является серфотронное ускорение зарядов электромагнитными волнами, которое рассматривалось ранее, например, в работах [1-17]. Анализ другого - диффузионного механизма ускорения заряженных частиц в космической плазме дан, в частности, в [18-19]. Следует отметить, что серфотронное ускорение зарядов обусловлено реализацией в магнитоактивной плазме черенковского резонанса при взаимодействии волна-частица, что возможно в случае волны р-поляризации. При этом оказывается, что для амплитуд волны выше некоторого порогового значения циклотронное вращение зарядов подавлено, а частица в среднем движется в ускоряющем волновом поле (возникновение за счет магнитного поля эффективной потенциальной ямы для захваченных частиц). При этом подходящей ветвью колебаний являются, например, волны на частотах верхнего гибридного резонанса плазмы. Исследование серфинга необходимо, в частности, для оценки числа ускоренных частиц, размеров областей ускорения, энергетических спектров, что требует детального анализа условий захвата заряженных частиц в режим серфотронного ускорения, выявления благоприятных для захвата заряженных частиц параметров, эффективности ускорения частиц при воздействии с пространственно локализованным волновым пакетом и т.д. При поперечном распространении электромагнитной волны р-поляризации для квадрата показателя преломления плазмы $N^2 = (c k / \omega)^2$ на частоте верхнего гибридного резонанса ω имеем: $N^2 = 1 - [v(1 - v)] / (1 - u^2 - v)$, $u = \omega_{He} / \omega$, $v = (\omega_{pe} / \omega)^2$, где $\omega_{He} = eH_0 / m_e c$ - гирочастота нерелятивистских электронов плазмы, $\omega_{pe} = (4\pi e^2 n_0 / m_e)^{1/2}$ - электронная ленгмюровская частота, n_0 плотность плазмы. В работе рассматривается

случай $u^2 \ll 1$. Тогда фазовая скорость электромагнитной волны меньше скорости света в вакууме для следующей области параметра v : $1 - u^2 < v < 1$. Захват в режим серфинга происходит при поле волны выше критического значения т.е. для $\sigma \equiv e E_0 / m_e c \omega > \sigma_c = u \gamma_p = u / (1 - \beta_p^2)^{1/2}$, $\beta_p = \omega / c k$. Согласно ранее проведенным расчетам можно пренебречь вихревыми компонентами волновых полей E_y , H_z . Нелинейные эффекты взаимодействия ускоряющей волны с плазмой малы, если амплитуда волны E_0 существенно ниже поля релятивистской нелинейности т.е. при условии $\sigma^2 \ll 1$.

Основное уравнение и результаты численных расчетов

Рассмотрим релятивистские уравнения движения электронов массы m_e в поле электромагнитной волны $E_x = E_0 \cos \Psi$, $\Psi = \omega t - k x$. Пусть $\beta = v / c$, $\tau = \omega t$ безразмерное время, $\xi = \omega x / c$. Тогда $\beta = v / c$, $\beta_x = \beta_p (1 - d\Psi / d\tau)$. Уравнения движения электронов $J = \gamma \beta_y - u \beta_p \cdot (\tau - \Psi)$ т.е. поперечный импульс $\gamma \beta_y = J + u \beta_p (\tau - \Psi) \equiv g$. Релятивистский фактор электрона равен $\gamma = (1 + h^2 + g^2)^{1/2} / (1 - \beta_x^2)^{1/2}$. Электрическое поле локализованного в пространстве волнового пакета с лоренцовской огибающей имеет вид $E_x(x,t) = \{ E_0 / [1 + \zeta^2 / L^2] \} \cos(\omega_0 t - k_0 x)$, где $\zeta = x - v_g(k_0) t$, $L = 1 / k_p$ полуширина волнового пакета, распространяющегося с групповой скоростью, $2 k_p$ характерный размер пакета в k -пространстве, $\beta_g = v_g / c \ll 1$. Для фазы волны на траектории частицы имеем уравнение

$$\gamma \beta_p d^2 \Psi / d\tau^2 - \{ \sigma / [1 + (\tau - \Psi)^2 / \rho^2] \} (1 - \beta_x^2) \cos \Psi - u \beta_y = 0, \quad (1)$$

где $\rho = \omega L / c \gg 1$. Для нахождения начальных фаз $\Psi(0)$, при которых происходит захват электрона в режим сильного ускорения пакетом, в расчетах фиксировались исходные параметры задачи h , $g_y(0) = \gamma(0)\beta_y(0)$, β_p , u , a , σ . Амплитуда волны σ выбиралась выше порогового значения σ_c . Затем численными расчетами на умеренных временах $\tau \leq 40000$ определялись диапазоны начальных фаз, в которых имел место захват электрона в режим ускорения пакетом. Рассмотрим результаты расчетов для следующего варианта параметров задачи $h = 25.1$, $g_y(0) = 1$, $\beta_p = 0.9$, $u = 0.2$, $\sigma = 1.6 \sigma_c$, $\sigma_c = u \gamma_p$, $a = 0$, $\rho = 5 \cdot 10^4$, соответствующего релятивистскому значению импульса электрона, $\gamma(0) \approx 8.212$. Начальная фаза $\Psi(0) = 2\pi \cdot 4165 + \delta\Psi(0)$ соответствовала левому краю волнового пакета, шаг по $\delta\Psi(0)$ в численных расчетах составлял 0.1. Согласно расчетам захват частицы волновым пакетом был до большей части положительных значений $\delta\Psi(0)$ сразу и затем имело место ультрарелятивистское ускорение. Для отрицательных значений $\delta\Psi(0)$ в основном захвата не было на временном интервале порядка $\tau_m = 6 \cdot 10^4$, но при нескольких значениях $\delta\Psi(0)$ захват был при τ_c порядка $3 \cdot 10^4$, что приводило к существенно меньшему приросту энергии частиц. Типичная структура траекторий на фазовой плоскости для благоприятных начальных фаз дана на рис.1.

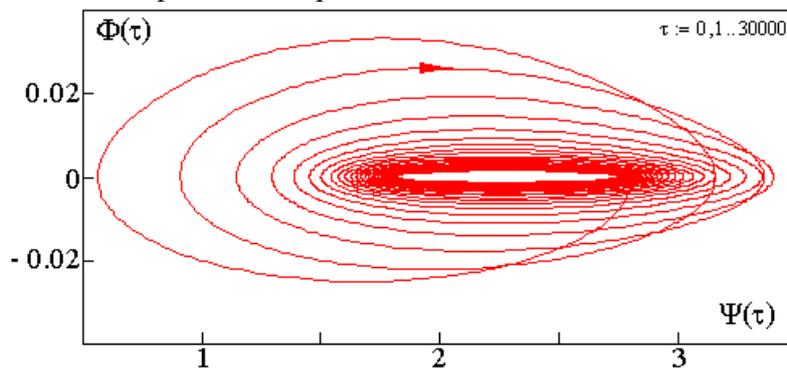


Рис.1. Фазовая плоскость для захваченных частиц.

Как видим, имеет место движение по сжимающейся спирали к особой точке типа устойчивый фокус. После пересечения волнового пакета изображающая точка на фазовой

плоскости движется по расширяющейся спирали, что соответствует незахваченной частице с конечным размером вариаций $\Phi(\tau) = d\Psi(\tau) / d\tau$. Аналогичные результаты получаются в случае выбора $h = 100$ и для других вариантов выбора величины $g(0)$.

Необходимо отметить, что вследствие сохранения компоненты импульса частицы вдоль внешнего магнитного поля при ускорении продольная скорость захваченной частицы β_z будет уменьшаться.

Заключение

В настоящей работе изложены результаты численных расчетов захвата и серфотронного ускорения электронов электромагнитной волной с плавной огибающей амплитуды. Показано, что набор энергии захваченных частиц пропорционален эффективной толщине волнового пакета и в космической плазме может быть весьма большим. Для релятивистских начальных энергий электронов структура области благоприятных для серфинга начальных значений фазы волны (на несущей частоте) становится весьма простой и это сильно упростит оценку числа захваченных частиц, их влияние на затухание волнового пакета при серфотронном ускорении. Необходимо в последующем исследовании рассмотреть серфотронное ускорение позитронов для больших значений их начальной энергии, а также ядер гелия. В целом это потребует проведения весьма большого объема длительных расчетов. Важно также отметить, что реализация серфотронного ускорения частиц в космической плазме должна приводить к вариациям потоков КЛ, которые будут зависеть от присутствия электромагнитных волн достаточной амплитуды т.е. от космической погоды.

Литература

- [1]. N. Katsouleas, J.M. Dawson. *Physical Review Letters*. 1983, 51, 392.
- [2]. С. Joshi. *Radiation in plasmas*. 1984, 1, Issue 4, 514.
- [3]. Б.Э. Грибов, Р.З. Сагдеев, В.Д. Шапиро, В.И. Шевченко. *Письма в ЖЭТФ*. 1985, 42, № 2, 54.
- [4]. С.В. Буланов, А.С. Сахаров. *Письма в ЖЭТФ*. 1986, 44, Вып. 9, 421.
- [5]. Н.С. Ерохин, А.А. Лазарев, С.С. Моисеев, Р.З. Сагдеев Р.З. *Доклады Академии наук*. 1987, 295, № 4, 849.
- [6]. М.И. Ситнов. *Письма в ЖТФ*. 1988, 14, Вып. 1, 89.
- [7]. Н.С. Ерохин, С.С. Моисеев, Р.З. Сагдеев. *Письма в Астрономический журнал*. 1989, 15, № 1, 3.
- [8]. Г.Н. Кичигин. *ЖЭТФ*. 2001, 119, Вып. 6, 1038.
- [9]. M.E. Dieckmann and P.K. Shukla. *Plasma Physics and Controlled Fusion*. 2006, 48, Issue 10, 1515.
- [10]. De-Yu Wang, Lu Quan-Ming. *Advances in Space Research*. 2007, 39, Issue 9, 1471.
- [11]. А.И. Нейштадт, А.В. Артемьев, Л.М. Зеленый, Д.Л. Вайнштейн. *Письма в ЖЭТФ*. 2009, 89, Вып. 9, 528.
- [12]. В.М. Лозников, Н.С. Ерохин. *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Плазменная электроника*. 2010. № 4 (68), с.121.
- [13]. Н.С. Ерохин, Н.Н. Зольникова, Е.А. Кузнецов, Л.А. Михайловская. *Вопросы атомной науки и техники. Сер.Плазменная электроника*. 2010, № 4 (68), 116.
- [14]. А.Н. Ерохин, Н.С. Ерохин, В.П. Милантьев. *Физика плазмы*. 2012, 38, № 5, 435.

О ВОЗМОЖНОСТИ ДРЕЙФОВОГО ДВИЖЕНИЯ ВДОЛЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Н.А. Марусов, Е.А. Сорокина

Российский университет дружбы народов

НИЦ «Курчатовский институт»

sorokina.ekaterina@gmail.com

nn.marusov@gmail.com

Аннотация

Проанализировано дрейфовое движение заряженных частиц в электромагнитном поле, имеющем сильную электрическую компоненту и неоднородном вдоль направления скорости электрического дрейфа. Показано, что даже в простейших стационарных электромагнитных конфигурациях роль дополнительных членов модифицированного уравнения движения ведущего центра может быть значительна и даже превосходить роль членов, приводящих к классическим дрейфам. Важная особенность рассмотренного эффекта заключается в том, что он приводит к дополнительному дрейфу заряженной частицы преимущественно вдоль электрического поля, и, следовательно, к изменению кинетической энергии частицы.

Известно, что заряженная частица в скрещенных однородных электрическом и магнитном полях дрейфует в направлении перпендикулярном направлениям электрического и магнитного полей; такое движение называется электрическим дрейфом. В настоящей работе анализируется ранее не рассмотренная возможность дрейфа частицы вдоль направления электрического поля как следствие специального вида неоднородности электрического и магнитного полей, а именно неоднородности вдоль направления скорости классического электрического дрейфа $\mathbf{V}_E = (c/B^2)[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]$; \mathbf{B} и \mathbf{E} – напряженности магнитного и электрического полей соответственно, c – скорость света.

Рассмотрим задачу о движении ведущего центра заряженной частицы в магнитном и сильном электрическом полях простой конфигурации. Под сильным электрическим полем здесь подразумевается поле, задающее скорость электрического дрейфа, сопоставимую со скоростью частицы. В этом случае уравнение динамики ведущего центра имеет вид [3]:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}_d}{dt} = & \left(v_{\parallel} + \frac{u_{\perp}^2}{2\Omega} (\mathbf{b} \cdot \text{rot } \mathbf{b}) \right) \mathbf{b} + \mathbf{V}_E + \frac{u_{\perp}^2}{2\Omega} \left[\mathbf{b} \times \frac{\nabla B}{B} \right] + \frac{v_{\parallel}^2}{\Omega} [\mathbf{b} \times (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b}] + \\ & + \frac{c}{\Omega B} \dot{\mathbf{E}}_{\perp} + \frac{v_{\parallel}}{\Omega} \left([\mathbf{b} \times (\mathbf{V}_E \cdot \nabla) \mathbf{b}] - c \frac{\mathbf{E}_{\perp}}{B^2} (\mathbf{b} \cdot \nabla B) \right) - \frac{c \mathbf{E}_{\perp}}{\Omega B^2} (\mathbf{V}_E \cdot \nabla B), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$, $\Omega = -(Ze/mc)\mathbf{B}$ – циклотронная частота, $\mathbf{V}_E = (c/B^2)[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]$ – скорость электрического дрейфа, $u_{\perp}^2 = v_{\perp}^2 - V_E^2$; v_{\parallel} и v_{\perp} – компоненты скорости вдоль и поперек силовых линий магнитного поля соответственно.

Для вывода уравнения (1) используется предположение о малости изменения магнитной и электрической компонент поля на ларморовской длине ρ_L :

$$\frac{|(\rho_L \cdot \nabla) \mathbf{B}|}{B} \ll 1, \quad \frac{|(\rho_L \cdot \nabla) \mathbf{E}|}{E} \ll 1, \quad (2)$$

Уравнение (1) отличается от *стандартного дрейфового уравнения* [1,2] наличием членов (вторая строчка уравнения (1)) пропорциональных E/l и E^2/l (l – характерная длина изменения электрического/магнитного поля), вклад которых традиционно считается малым. При их отсутствии движение ведущего центра складывается из движения вдоль силовой линии магнитного поля, электрического дрейфа, и двух дрейфов, связанных с неоднородностью магнитного поля по величине (градиентный дрейф) и по направлению (центробежный дрейф).

Для анализа вклада в движение ведущего центра членов второй строчки уравнения (1), связанных с неоднородностью электромагнитного поля вдоль направления скорости электрического дрейфа, были рассмотрены поля простой геометрии двух типов:

- 1) $\mathbf{B} = \text{const}$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$, $\mathbf{E} = -\nabla\phi$;
- 2) $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r})$, $\mathbf{E} = \text{const}$,

где ϕ – электростатический потенциал.

В качестве демонстрационных примеров приведены результаты расчетов для следующих конфигураций:

- 1) Конфигурация А: $\tilde{\phi}_1 = -x \sin y$, $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z$, $\mathbf{E} = E_0 \sin y \mathbf{e}_x + E_0 x \cos y \mathbf{e}_y$, $v_{\parallel} = 0$.
- 2) Конфигурация В:
 $\tilde{\phi}_2 = -x$, $\mathbf{B} = B_0(a y + b) \mathbf{e}_z$, $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{e}_x$, $v_{\parallel} = v_0$, $v_{\perp} = 0$.

Здесь $\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2$ – безразмерные потенциалы; a, b – произвольные постоянные; $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ – единичные векторы декартовой системы координат; x, y, z – безразмерные координаты.

Соответствующие модификации уравнения (1):

Конфигурация А:

$$\frac{d\mathbf{r}_d}{dt} = \mathbf{V}_E + \frac{c}{\Omega B} (\mathbf{V}_E \cdot \nabla) \mathbf{E}_{\perp}. \quad (3)$$

Конфигурация В:

$$\frac{d\mathbf{r}_d}{dt} = v_{\parallel} \mathbf{b} + \mathbf{V}_E + \frac{u_{\perp}^2}{2\Omega} \left[\mathbf{b} \times \frac{\nabla B}{B} \right] - \frac{c \mathbf{E}_{\perp}}{\Omega B^2} (\mathbf{V}_E \cdot \nabla B). \quad (4)$$

Уравнения

(3), (4) интегрировались численно. Результаты их решения были сопоставлены с решениями точных трехмерных уравнений движения заряженной частицы и результатами классической дрейфовой теории в рассматриваемых электромагнитных конфигурациях.

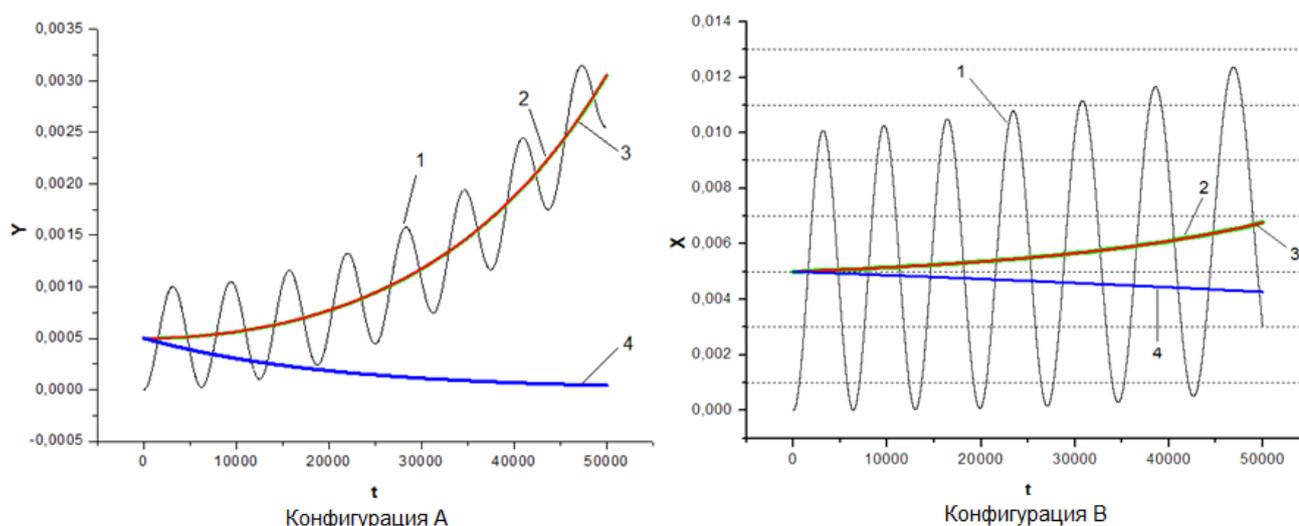


Рис. 1: Проекция траекторий частицы (1) и дрейфового центра (2–4) для конфигураций А и В соответственно: 1,2 – решение точных уравнений движения, 3 – решение уравнения (1), 4 – решение стандартного дрейфового уравнения (первая строчка уравнения (1)). $a = 0.01$, $b = 1$, $v_0 E_0 / c B_0 = 0.05$.

На рис. 1 представлены временные зависимости проекций траекторий ведущего центра на те направления, в которые дают вклад дополнительные члены уравнения (1): слева – конфигурация А, проекция на e_y ; справа – конфигурация В, проекция на e_x . В обоих случаях точная траектория частицы (решение точного уравнения движения) совпадает с решением модифицированного уравнения (1) и значительно расходится с результатами классической дрейфовой теории. Для конфигурации А классическая теория (первый член в правой части уравнения (3)) предсказывает одно лишь равномерное движение дрейфового центра заряженной частицы поперек силовых линий \mathbf{E} и \mathbf{B} со скоростью электрического дрейфа \mathbf{V}_E . В действительности, в сильном электрическом поле существует дополнительный дрейф, связанный с неоднородностью электрического поля вдоль направления скорости электрического дрейфа и направленный вдоль \mathbf{E} (второй член в правой части уравнения (3)). Его наличие приводит к росту кинетической энергии частицы и заметному отклонению траектории от предсказаний классической теории. В конфигурации В согласно классической теории (три первые члена в правой части уравнения (4)) ведущий центр заряженной частицы наряду с продольным движением испытывает электрический и градиентный дрейфы. Дополнительный дрейф опять же направлен вдоль \mathbf{E} , но связан с неоднородностью уже магнитного поля. Его учет приводит к изменению направления движения частицы вдоль оси e_x .

Суммируя сказанное, подчеркнем еще раз, что рассмотренные эффекты неоднородности электрического и магнитного поля приводят к качественным отличиям движения заряженной частицы от обычного электрического дрейфа.

Работа частично поддержана грантом № 13-02-00645 Российского фонда фундаментальных исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сивухин Д.В. Вопросы теории плазмы, вып. 1 / под ред. акад. М.А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1963, с. 7-97
2. Морозов А.Н., Соловьев Л.С. Вопросы теории плазмы, вып. 2 / под ред. акад. М.А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1963, с. 177-258
3. В.И. Ильгисонис. Классические задачи физики горячей плазмы. – М.: Издательский дом МЭИ, 2014. – 319 с.

ОЭС-ДИАГНОСТИКА ПЛАЗМЫ ЭЦР-РАЗРЯДА В ОБЛАСТИ ПРОМЕЖУТАЧНЫХ ДАВЛЕНИЙ

И. Василеска, М.А. Корнеева

Российский университет дружбы народов, Москва, РФ, e-mail: ivonavasileska@yahoo.com

OES-PLASMA DIAGNOSTICS ECR DISCHARGE AT INTERMEDIATE PRESSURE

I.Vasileska, M.A. Korneeva

Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, RF, e-mail: ivonavasileska@yahoo.com

Abstract

In this work were made out absolute measurements of the electron density (n_e) in the ECR discharge plasma at moderate pressures by optical emission spectroscopy (OES). Received The dependences of plasma density - n_e on pressure and input HF were obtained.

Аннотация

В работе были проведены абсолютные измерения концентрации электронов (n_e) в плазме ЭЦР-разряда в области умеренных давлений методами оптической эмиссионной спектроскопии (ОЭС). Изучено поведение концентрации плазмы разряда от давления и вкладываемой в разряд мощности СВЧ.

Введение

Плазма микроволнового электронного циклотронного разряда (ЭЦР), является типичным примером микроволновой плазмы в магнитном поле [1]. Исследование явлений резонансного взаимодействия плазмы с электромагнитным излучением по-прежнему продолжают представлять интерес как с фундаментальной, так и прикладной точек зрения

Первоначальное изучение ЭЦР разряда было связано с экспериментами в области управляемого термоядерного синтеза. В дальнейшем после открытие магнитных ловушек, ЭЦР разряд начал применяться также и в ядерной физике, физики ионных источников, включая и многозарядные ионные источники, и в настоящее время широко используется в плазменных технологиях [2].

Методы ОЭС играют значительную роль в диагностике плазмы для определения плазменных параметров. Исследуемые параметрами ОЭС являются: измерение интенсивности в континууме, измерение временной зависимости интенсивности спектральных линий, измерения относительной интенсивности спектральных линий, изучение контуров линий спектрального излучения, измерение интенсивности линий излучения.

Экспериментальная установка и средства диагностики

Генерация плазмы ЭЦР-разряда осуществляется на экспериментальном стенде, состоящем из микроволнового цилиндрического TE_{111} -резонатора, которой был помещен в магнитное поле пробочной ловушки создаваемой постоянными магнитами (Рис. 1). Разряд создавался в цилиндрической кварцевой колбе (КУ), помещенной в резонаторе. Резонатор возбуждался от магнетронного СВЧ генератора на частоте 2.45 ГГц. Добротность резонатора с кварцевой колбой составляла 600. Для изучения основных физических процессов, имеющих место в создаваемой плазме, был предусмотрен импульсно-периодический режим работы магнетронного генератора. Реализованная схема модулятора позволяла варьировать длительность и частоту повторения прямоугольных

импульсов нагрева в широких пределах: длительность импульса от 0.07 мс до 6 мс, пауза от 0.2 мс до 7 мс (скважность от 5 до 10).

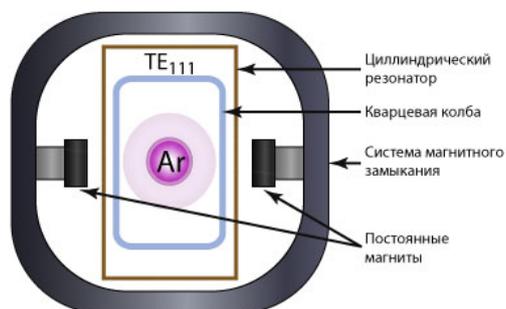
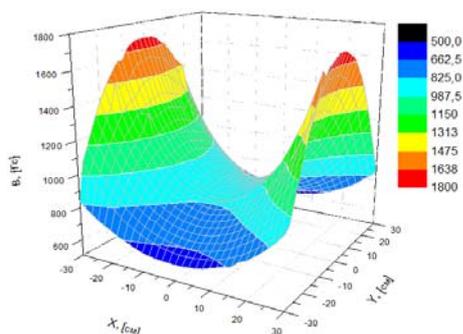
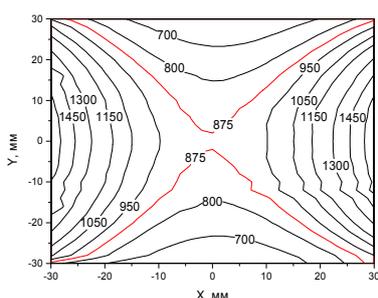


Рис. 1 Принципиальная схема эксперимента

Магнитное поле пробочного типа (Рис. 2), создавалось постоянными дисковыми магнитами (полюсами) из SmCo_5 с кольцевой системой магнитного замыкания, изготовленного из магнитомягкого материала (пермалой). Изменение величины и профиля магнитного поля осуществлялось перемещением полюсов при помощи микрометрической подачи (рис.1). На рис.2 представлена картина линий равного поля (а) и пространственного распределения индукции в межполюсном пространстве (б) в одном из рабочих режимов, когда значение индукции в минимуме ловушки соответствует значению ЭЦР (875 Гс).



а

б

Рис. 2 Магнитное поле: а – линии равного магнитного поля, б - 3D распределение магнитного поля

Разрядная камера была снабжена вакуумно-плотным портом с увиолевым окном, используемым для регистрации и измерений в видимой области спектра излучения плазмы разряда, а также портами для масс-спектрометрических, вакуумных и зондовых измерений. Камера откачивалась диффузионным насосом до давления $4 \cdot 10^{-5}$ Торр, а затем напускалась рабочая газовая смесь, и давление в разрядной камере поддерживалось в диапазоне $1 \cdot 10^{-2} - 1 \cdot 10^{-4}$ Торр. В качестве плазмообразующего газа использовался аргон.

Спектральные измерения в видимой части спектра проводились с помощью монохроматора-спектрографа MS3504i. Регистрации спектра излучение из рабочей камеры проводилась через порт спектрометрических измерений, отстоящий на расстоянии 30 см от плазменной границы с помощью кварцевого световода с рабочей апертурой 22° , сопряженного с MS3504i. Спектрограф был оснащен зеркальным объективом с фокусным расстоянием $f = 301,3$ мм и имел обратную линейную дисперсию 2,37 нм/мм. Диагностика плазмы проводилась с решеткой 1200 штр/мм и шириной щели 30 мкм. Спектр регистрировался с помощью ФЭУ, при фиксированном значении напряжения питания и времени накопления данных. Спектрометрический тракт с сохранением всех рабочих параметров был откалиброван по длине волны (ртутная лампа ДРС 50-1) и по абсолютной интенсивности (малогабаритная вольфрамовая ленточная лампа СИРШ 6-40).

Экспериментальные результаты и их обсуждение

Спектр излучения аргона, зарегистрированный монохроматором, в видимом диапазоне при различных рабочих давлениях и фиксированном значении мощности СВЧ-генератора (420 Вт) и значении индукции магнитного поля 875 Гс в минимуме магнитной ловушки приведен на рис. **Рис. 3.**

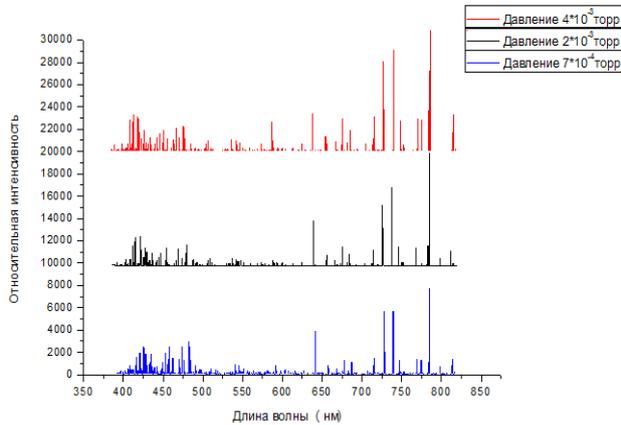


Рис. 3 Обзорные спектры от давления

Для изучения распределения атомов по возбужденным состояниям была построена зависимость заселенности уровней от энергии (рис.4). Видно, что линии группы переходов 4s-5d и группы 4p-4d лежат на одной прямой (на рис.4 обозначены черным). При этом линии группы переходов 4s-4p лежат ниже, т.е. отклоняются от равновесного распределения. Это означает, что в плазме процессы ионизации преобладают над процессами рекомбинации [3]. Соответственно, ни модель термодинамического равновесия (ТР), ни модель локального ТР не применимы. Применение же только столкновительно-радиационной или только корональной модели к низкотемпературной аргоновой плазме в условиях ЭЦР оказывается так же некорректным, поскольку ни одна из этих моделей не дает полного описания. Тем не менее, данные модели могут быть применены отдельно для различных групп уровней аргона [4].

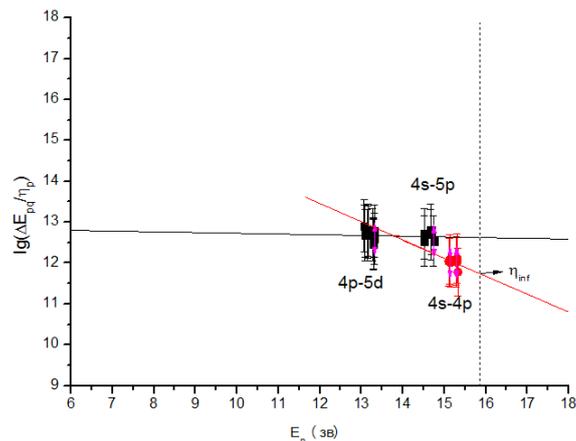


Рис. 4 Зависимость заселенности уровней атомов от энергии

Для определения n_e , в первую очередь определим η_∞ , как значение аппроксимирующей функции для линий группы переходов 4s-4p (на рис. 4 обозначено красным) при энергии, соответствующей энергии ионизации аргона - 15,7 эВ.

Для определения значения η_∞ , воспользуемся выражением, полученным из формулы Саха [4]:

$$\eta_{\infty} \equiv \eta_e \eta_i \left(\frac{h^2}{2\pi m_e k_B T_e} \right)^{3/2}, \quad (1.1)$$

где $\eta_e = n_e/g_e$, $\eta_i = n_i/g_i$, n_i и n_e это концентрации электронов и ионов соответственно, g_e , g_i - статистический вес электронов ионов соответственно, h - постоянная Планка, а k_B - коэффициент Больцмана, m_e масса электрона. и T_e - температура электронов. В предположении соблюдения условия квазинейтральности $n_e = n_i$ и при известном значении температуры электронов можно рассчитать n_e . Температура электронов в диапазоне рабочих параметров была оопределена по зондовым измерениям в [5] и составляла в среднем 5.2 эВ. Обработка экспериментальных результатов показала, что с изменением давления n_e в рабочем диапазоне не изменяется, но растет при увеличениии вкладываемой в разряд СВЧ мощности (рис.5).

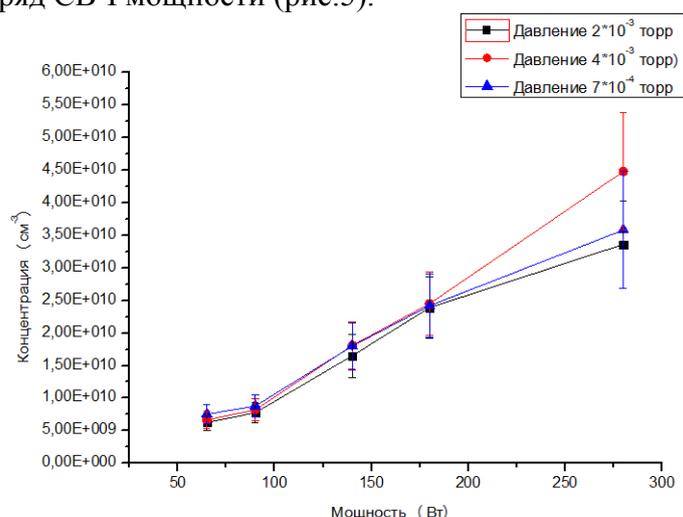


Рис 5. Зависимость концентрации от мощности

Заключение

Определены зависимости поведения концентрации электронов плазмы ЭЦР-разряда от давления и вкладываемой мощности методом ОЭС. Выявлено, что в пределах изучаемых давлений концентрация электронов практически не изменяется, но сильно зависит от вкладываемой в разряд СВЧ мощности.

Список литературы

- [1] R. Geller «Electron Cyclotron Resonance Ion Sources and ECR Plasmas», *IOP, Bristol, UK, 1996*
- [2] Lieberman M.A., Lichtenberg A.J. «Principles of plasma discharges and materials processing», *John Wiley&Sons, Inc, New York, 2005*
- [3] Л. М. Биберман, В. С. Воробьев и И. Т. Якубов, «Кинетика неравновесной низкотемпературной плазмы», *Наука: Москва, 1982.*
- [4] Vries N. D. «Spectroscopic study of microwave induced plasmas exploration of active and passive methods». – *Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven, 2008*
- [5] В.В. Андреев, И. Василеска, М.А. Корнеева «Спектроскопия аргоновой плазмы импульсно-периодического микроволнового резонансного разряда»- *XLII Международная Звенигородская конференция по физике плазмы и управляемому термоядерному синтезу, Сборник тезисов докладов с.320, Россия, Москва, ЗАО НТЦ «ПЛАЗМАИОФАН», 2015*

ПАРАМЕТРЫ ИМПУЛЬСНОЙ ИНЖЕКЦИИ В ПЛАЗМЕННЫЙ УСКОРИТЕЛЬ

Ндонг Ондо Д.Д., ¹⁾Новицкий А.А.¹⁾

PARAMETERS THE PULSE INJECTION INTO THE PLASMA ACCELERATOR

¹⁾Российский университет дружбы народов
temple18@mail.ru, dimitridorleans@yandex.ru

Abstract

In work the presents a periodic pulse injector low-energy electrons. The dependence of the beam current from the anode voltage, the pressure in the chamber and to determine the form factor of the beam. Controlling the injection to determine the optimal parameters for efficient operation in axially symmetric magnetic field and beam transport in the extended mirror-type magnetic trap.

Введение

Пучки заряженных частиц (электронов) различной интенсивности широко используются в научных исследованиях и являются эффективным инструментом современных вакуумно-плазменных технологий. В работах, связанных с разработкой семейства плазменных ускорителей [1] поддержание условий стабильности выходных характеристик требует обеспечить режим надежной и эффективной инжекции пучка частиц с определенными характеристиками (энергия, ток) в рабочую область взаимодействия.

Целью данной работы являлось определение требований, предъявляемых к параметрам внешней инжекции, а также разработка и апробация импульсно-периодического инжектора, обеспечивающего оптимальные рабочие режимы разрабатываемого плазменного ускорителя.

Экспериментальный стенд и описание инжектора

Экспериментальная установка представляет собой цилиндрический СВЧ резонатор (мода колебаний TE_{118} , резонансная частота 2,45 ГГц), помещенный в осесимметричное магнитное поле протяженной пробочной конфигурации (пробочное соотношение $R=1.2$, $L=80$ см) с индукцией магнитного поля в минимуме ловушки 1200 Гс.

Для надежного ввода пучка низкоэнергетичных электронов в камеру плазменного накопителя, была разработана электронная пушка типа пушки Пирса с катодом на основе гексаборидалантана (LaB_6), который был сопряжен с полем пробочной магнитной ловушки (рис. 1.).

Конструкция ЭОС (рис. 1, вставка) представляет собой: катод, (диаметр $d = 3,5$ мм), помещенный в оправу с молибденовым тепловым отражателем (2), электрод Пирса (1) и анод с центральным отверстием (3). Электрод Пирса имеет потенциал, равный потенциалу катода, и располагается так, что его поверхность является продолжением поверхности катода. Нагрев катода осуществляется косвенным нагревателем резистивного типа из танталовой фольги и обеспечивал его эффективный нагрев до рабочих температур 1500-1800 С.

Рис.2. Принципиальная электрическая схема модулятора(а) и осциллограммы анодного напряжения(б) где синий-задающий импульс, зелёный-анодное напряжение

Принципиальная схема модулятора представлена на рис.2.а. Анодное напряжение, подаваемого на вытягивающий электрод (А) модулировалось прямоугольными импульсами, длительность и скважность которых задавалась генератором типа N5752A. Сигнал от генератора по входной цепи U_{in} поступал на оптопару (CNY65). Ток, протекающий в цепи транзистора, приводил к срабатыванию высоковольтного ключа MOSFET IRFPG50, обеспечивающего подачу напряжения на анод инжектора. Канал OUT, подключенный к делителю напряжения (R_1 и R_2), позволял подключить осциллограф для измерения амплитуды напряжения, длительности импульса и времени фронтов нарастания и спада. Данные полученные в результате измерений сопоставлялись с результатами токовых измерений, полученных с помощью цилиндра Фарадея, размещенного в магнитной пробке, противоположной инжектору. Диагностика пучка и создаваемой им плазмы проводилось с помощью коллекторов, цилиндра Фарадея, одиночного зонда и многосеточного энергоанализатора. Цилиндр Фарадея был снабжен диафрагмой, размер отверстия которой был определен по автографу пучка на коллекторе, помещенном в противоположной инжектору магнитной пробке

Экспериментальные результаты и их обсуждение

Инжектор был подвергнут испытаниям в импульсном режиме и проведены измерения его характеристик, представляющих интерес для функционирования ускорителя. На Рис.2.б представлены результаты измерений временных характеристик импульсной работы инжектора: луч 2 – напряжение задающего генератора, луч 4 – амплитуда анодного напряжения. Измерения показали, что временная зависимость тока с цилиндра Фарадея, полностью повторяет временные характеристики импульса анодного напряжения. Отмечен факт задержки анодного напряжения (тока инжекции) относительно амплитуды напряжения задающего генератора, которая не превышает во всех режимах величины в 2,5 мкс, которая определяется задержкой в работе оптопары. Испытания показали, что инжектор устойчиво функционирует в импульсно-периодическом режиме, обеспечивая следующие временные характеристики: длительность импульса может изменяться от 20 мкс до 10 мс с частотой от 1 до 100 Гц.

Токовые измерения показали, что при щадящей мощности накала (350 Вт) величина тока, проведенного сквозь магнитную ловушку, составила 10 мА, при напряжении на аноде – 600 В. Ресурс накала при данной мощности составляет более 300 часов. Увеличение мощности накала позволяло поднять величину тока до максимально зарегистрированного значения 35 мА, однако ресурс его работы резко сокращался. Измерения спектра электронов с помощью многосеточного анализатора, помещенного в магнитной пробке, показало, что в условиях нижней границы рабочих давлений энергетический разброс пучка составляет не более 10 % от его энергии.

Проведенные измерения показали, что разработанный инжектор обеспечивает следующие характеристики и параметры пучка: величина первеанса пучка составляет $6 \text{ мкА/В}^{3/2}$, эммитанс пучка $1,75 \cdot 10^{-5} \text{ м}$.

Зондовые измерения, проведенные в области минимума магнитной ловушки, позволили определить зависимость поперечного размера пучка в диапазоне рабочих давлений. Полученные результаты были сопоставлены с результатами, полученными по автографам пучка на коллекторе и фотометрировании поперечного сечения с помощью ПЗС камеры. Анализ полученных результатов показал, что поперечные размеры пучка определяются величиной давления при рабочих значениях стационарного магнитного поля ловушки. В диапазоне рабочих давлений поперечные размеры изменялись от 4 мм

при $2,5 \cdot 10^{-5}$ Торр до 7 мм при $1 \cdot 10^{-4}$ Торр. Видно, что увеличение давления приводит к увеличению поперечного размера пучка.

Параметры создаваемой при транспортировке пучка плазмы, температура и концентрация, были определены из характеристик одиночного зонда. Для обработки использовались ионные части зондовых характеристик.

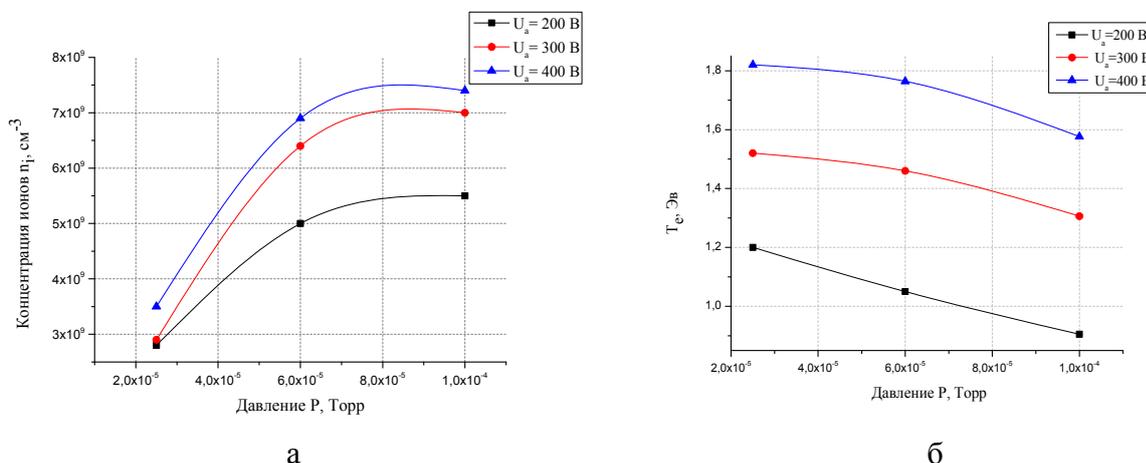


Рис.3. Зависимости концентрации ионов(а) и температуры электронов от давления(б)

Из приведенных зависимости, концентрация увеличивается с ростом давления и с ростом анодного напряжения. Измерения также показали, что, температура электронов уменьшается с ростом давления и увеличивается с ростом анодного напряжения инжектора.

Заключение

Данная работа позволила определить конструкцию и разработать импульсно-периодический инжектор низкоэнергетичных электронов для эффективной работы в условиях аксиальносимметричного магнитного поля и их транспортировки в протяженную магнитную ловушку пробочного типа.

Проведен анализ поведения параметров пучка в диапазоне рабочих параметров разрабатываемого ускорителя. Установлены зависимости тока пучка электронов от вытягивающего напряжения на аноде, величины давления в камере ускорителя и определены форм факторы пучка. Применяемые диагностические средства позволили определить поведение параметров плазмы создаваемой пучком. Разработанный инжектор и способы управления режимом инжекции позволяют исследовать в дальнейшем влияние параметров инжекции на число захваченных в режим ускорения числа частиц, определить пространственную область захвата и тем самым определить оптимальные параметры, определяющие выходные, качественные и количественные, характеристики ускорителя.

Литература:

1. Андреев В.В., Новицкий А.А., Умнов А.М., Чупров Д.В. Гирорезонансный импульсно-периодический плазменный ускоритель // ПТЭ - 2012, № 3, с. 5–16
2. Ершов А. П. Метод электрических зондов Ленгмюра, Описание задачи спекпрактикума. М.: Физический факультет МГУ. 2007. 26.

СЕРФИНГ ЭЛЕКТРОНОВ НА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЕ В ПЛАЗМЕ ПРИ УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКОМ НАЧАЛЬНОМ ИМПУЛЬСЕ ЧАСТИЦЫ

Мкртчян Г.С.¹⁾, Ерохин Н.С.^{1,2)}

SURFING OF ELECTRONS AT THE ELECTROMAGNETIC WAVE IN PLASMA FOR HIGHLY RELATIVISTIC INITIAL IMPULSE OF PARTICLE

Mkrtichyan G.S., Erokhin N.S.^{1,2)}

¹⁾ Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

²⁾ Институт космических исследований РАН, Москва, Россия

e-mail: hay-13@mail.ru

Abstract

It is performed the numerical analysis of trajectories structure on phase plane for electrons during their relativistic surfatron acceleration by an electromagnetic wave in a space plasma. The electromagnetic wave is propagating across the magnetic field. The conditions for electrons capture by wave, the dynamics of velocity components and the particle momentum are considered in the dependence on initial wave phase on the electron trajectory. The structure of phase plane of accelerated electrons is considered and it is corresponding to the particles motion in nonstationary effective potential wall with presence of stable focus point. It is shown that for positive values of wave phase the electrons are captured immediately by the wave into a surfatron acceleration regime.

Введение

Исследование генерации потоков ультрарелятивистских частиц относится к числу актуальных задач физики космической плазмы и представляет большой интерес, в частности, для проблемы происхождения космических лучей (КЛ), понимания механизмов формирования их, возникновения вариаций потоков КЛ и зависимости от космической погоды. Серфинг зарядов на электромагнитных волнах рассматривался ранее, например, в работах [1-9] применительно к электронам. Было показано, что это эффективный механизм генерации потоков ультрарелятивистских частиц электромагнитными волнами в космической плазме. Исследование динамики серфинга частиц на волнах необходимо, в частности, для оценки числа ускоренных частиц, размеров областей ускорения, энергетических спектров. Ясно, что для этого необходим детальный анализ условий захвата заряженных частиц в режим серфотронного ускорения, выявления благоприятных для захвата заряженных частиц параметров, эффективности ускорения частиц при воздействии пространственно локализованных волновых пакетов. При поперечном распространении электромагнитной волны р-поляризации для квадрата показателя преломления плазмы $N^2 = (c k / \omega)^2$ на частоте верхнего гибридного резонанса ω имеем: $N^2 = 1 - [v(1-v)] / (1-u^2-v)$, $u = \omega_{He} / \omega$, $v = (\omega_{pe} / \omega)^2$, где $\omega_{He} = eH_0 / m_e c$ - гирочастота нерелятивистских электронов плазмы, $\omega_{pe} = (4\pi e^2 n_0 / m_e)^{1/2}$ - электронная ленгмю-ровская частота, n_0 плотность плазмы.

Ниже рассматривается случай $u^2 \ll 1$. При этом фазовая скорость электромагнитной волны меньше скорости света в вакууме, возможен черенковский резонанс волна-частица для значений $v : 1 - u^2 < v < 1$. Захват в режим серфинга происходит при поле волны выше критического значения т.е. при $\sigma \equiv e E_0 / m_e c \omega > \sigma_c \equiv u \gamma_p = u / (1 - \beta_p^2)^{1/2}$, $\beta_p = \omega / c k$. При численных расчетах серфинга электронов задачу упростим пренебрегая вихревыми компонентами волновых полей E_y , H_z . Согласно расчетам их учет не существен.

Постановка задачи и результаты численных расчетов

Рассмотрим релятивистские уравнения движения электрона массы m_e в поле электромагнитной волны $E_x = E_0 \cos \Psi$, $\Psi = \omega t - kx$. Внешнее магнитное поле направлено по оси z . Пусть $\beta = v/c$, $\tau = \omega t$ безразмерное время, $\xi = \omega x/c$. Тогда имеем $\Psi = \tau - (\xi / \beta_p)$, $\beta = v/c$, $\beta_x = \beta_p [1 - \Phi(\tau)]$, $\Phi(\tau) = d\Psi / d\tau$. Уравнения движения релятивистского электрона имеют интеграл $J = \gamma \beta_y - u \beta_p \cdot (\tau - \Psi)$ т.е. $\gamma \beta_y = J + u \beta_p (\tau - \Psi) \equiv g$. Релятивистский фактор равен $\gamma = (1 + h^2 + g^2)^{1/2} / (1 - \beta_x^2)^{1/2}$. В итоге получаем нелинейное уравнение для фазы волны на траектории электрона $\Psi_{\tau\tau} - [\sigma \cdot (1 - \beta_x^2) \cdot \cos \Psi] / (\beta_p \cdot \gamma) - (u / \beta_p \cdot \gamma^2) / [J + u \beta_p \cdot (\tau - \Psi)] = 0$. (1) Данное уравнение решается численно, с начальными данными в виде $\Psi(0) = \Psi_0$, $\Psi_\tau(0) = a$. При этом $\beta_x(0) = \beta_p (1 - a)$. На достаточно больших временах ускорения численное решение для электрона должно выходить на асимптотики $\beta_x \approx \beta_p$, $\beta_y \approx 1 / \gamma_p$. Для нахождения диапазона начальных фаз $\Psi(0)$, при которых происходит захват электрона в режим сильного ускорения волной, фиксировалась фазовая скорость волны β_p , полагалось $|\Psi(0)| < \pi$. Амплитуда волны σ выбиралась несколько выше порогового значения σ_c , а именно $\sigma = 1.6 \sigma_c$. Затем численными расчетами на сравнительно малых временах $\tau \leq 6 \cdot 10^4$ определялся диапазон начальных фаз, в котором имел место захват электрона в режим ультрарелятивистского ускорения волной. Если для некоторых фаз $\Psi(0)$ захвата не было, счет выполнялся до $\tau \leq 4 \cdot 10^5$.

Приведем результаты расчетов для следующего варианта выбора параметров задачи $u = 0.32$, $\beta_p = 0.39$, $h = 200$, $g(0) = 8$, $a = 0$, что соответствует ускорению сильнорелятивистского электрона $\gamma(0) \approx 217.375$. Начальная фаза $\Psi(0)$ выбиралась в следующем интервале $(-3.1, 3.1)$. Результаты расчетов захвата электрона волной в режим серфинга показали, что для начальных фаз из интервала $0 < \Psi(0) < 3.1$ захват частицы в эффективную потенциальную яму с последующим ультрарелятивистским ускорением происходит сразу. Однако для фаз $-3.1 < \Psi(0) \leq 0$ в расчетах с шагом $\delta\Psi(0) = 0.1$ на интервале времени $\tau < 10^4$ захват электрона волной в режим серфотронного ускорения не происходит. Следовательно, для ультрарелятивистского электрона реализуется более простая структура эффективной потенциальной ямы. Согласно расчетам для захваченного электрона амплитуда осцилляций фазы волны на траектории частицы весьма медленно уменьшается с ростом времени, а период осцилляций медленно возрастает. На фазовой плоскости (Φ, Ψ) траектория захваченной частицы имеет особую точку типа устойчивый фокус. Приведем ряд графиков для значения начальной фазы $\Psi(0) = 1$, когда захват частицы волной происходит сразу. На рис.1 показан график $\Psi(\tau)$ для $\tau < 25000$.

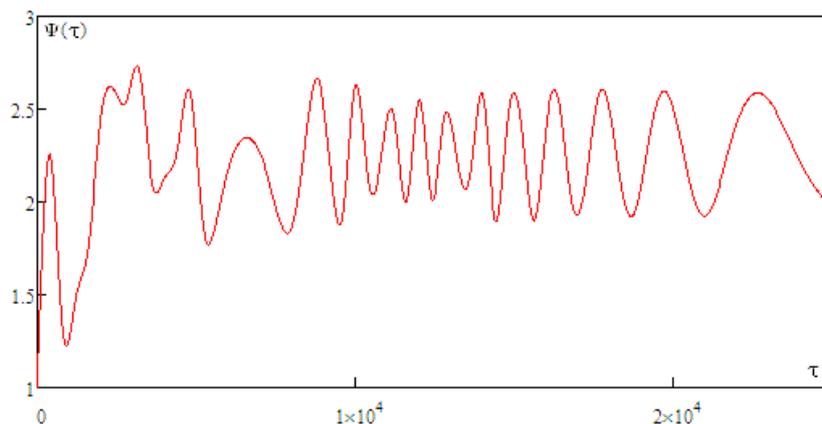


Рис.1. График фазы волны на траектории электрона.

Как видим, вначале движение электрона соответствует сложной структуре потенциальной ямы, а влияние устойчивого фокуса будет на больших временах, что демонстрируется фазовой плоскостью на рис.2, рис.3.

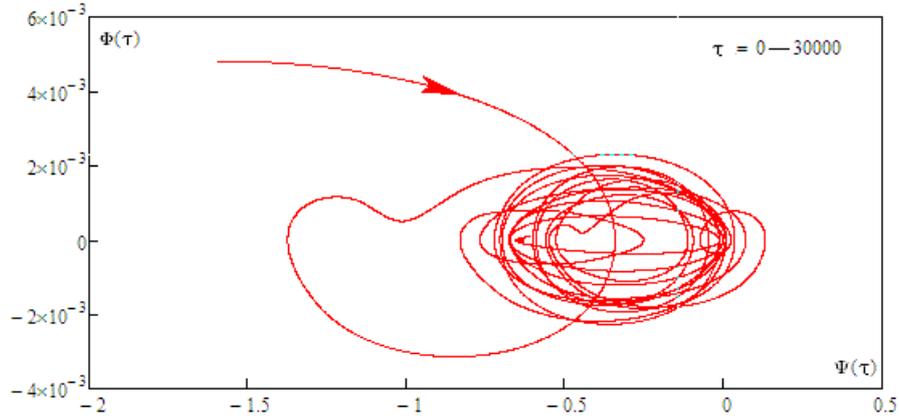


Рис.2. Структура фазовой плоскости на начальном этапе ускорения.

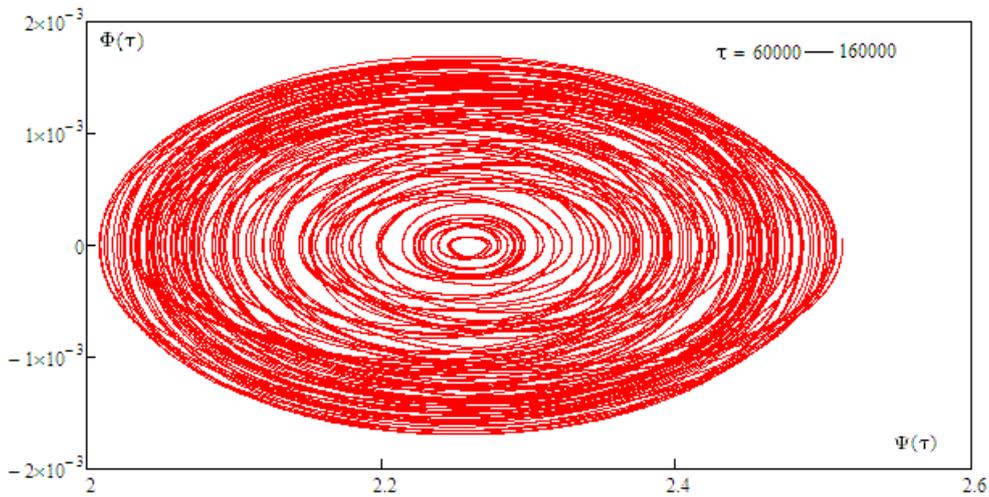


Рис.3. Фазовая плоскость на больших временах.

Графики поперечных (к магнитному полю) компонент импульса и релятивистского фактора захваченного электрона даны на рис.4. Отметим, что рост этих характеристик происходит практически с постоянными темпами. Для $\tau = 3 \cdot 10^5$ релятивистский фактор электрона равен $\gamma \approx 40660$.

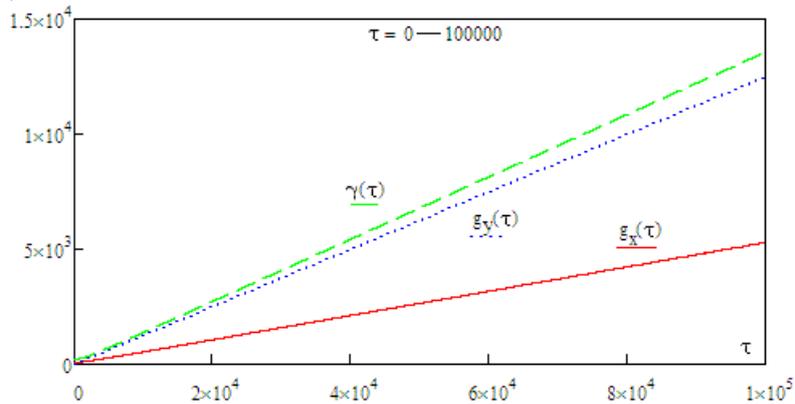


Рис.4. Графики компонент импульса и релятивистского фактора.

Заключение

В работе на основе численных расчетов исследовано серфотронное ускорение электронов с большой начальной энергией электромагнитной волной в космической плазме. Показано существенное упрощение структуры области начальных фаз волны на траектории частицы, благоприятных для реализации захвата частицы волной и сильного ускорения. Структура траекторий на фазовой плоскости соответствует движению по сжимающейся спирали к особой точке типа устойчивый фокус. Темпы роста поперечных компонент импульса захваченного электрона и его энергии практически постоянны. При сильном ускорении поперечные компоненты скорости захваченного электрона выходят на асимптотические значения. Для условий космической плазмы серфотронное ускорение в относительно спокойных условиях может приводить к генерации потоков частиц с энергиями более 10^{12} эВ.

Литература

- [1]. N. Katsouleas, J.M. Dawson. *Physical Review Letters*. 1983, 51, 392.
- [2]. C. Joshi. *Radiation in plasmas*. 1984, 1, Issue 4, 514.
- [3]. С.В. Буланов, А.С. Сахаров. *Письма в ЖЭТФ*. 1986, 44, Вып. 9, 421.
- [4]. Н.С. Ерохин, А.А. Лазарев, С.С. Моисеев, Р.З. Сагдеев Р.З. *Доклады Академии наук*. 1987, 295, № 4, 849.
- [5]. Н.С. Ерохин, С.С. Моисеев, Р.З. Сагдеев. *Письма в Астрономический журнал*. 1989, 15, № 1, 3.
- [6]. M.E. Dieckmann and P.K. Shukla. *Plasma Physics and Controlled Fusion*. 2006, 48, Issue 10, 1515.
- [7]. А.И. Нейштадт, А.В. Артемьев, Л.М. Зеленый, Д.Л. Вайнштейн. *Письма в ЖЭТФ*. 2009, 89, Вып. 9, 528.
- [8]. В.М. Лозников, Н.С. Ерохин. *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Плазменная электроника*. 2010. № 4 (68), с.121.
- [9]. А.Н. Ерохин, Н.С. Ерохин, В.П. Милантьев. *Физика плазмы*. 2012, 38, № 5, 435.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СПЕКТРАЛЬНО-ФОТОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ИСТОЧНИКОВ СВЕТА БЫТОВОГО НАЗНАЧЕНИЯ

Василеска Ивона¹, Степин В. П.², Тимофеев Г.В.³, Тюняткин А.А.³, Салий А.И.³, Пестерева В.Н.³

1. Российский университет дружбы народов, 2. СОШ №547, 3. СОШ №444, Москва, РФ, e mail: ivonavasileska@yahoo.com

COMPARATIVE ANALYSIS OF SPECTRAL AND PHOTOMETRIC CHARACTERISTIC OF LIGHT SOURCES FOR HOUSEHOLD PURPOSE

Vasileska Ivona¹, Stepin V. P.², Timofeev G.V.³, Tyunyatkin A.A.³, Saliy A.I.³, Pestereva V.N.³

1. Peoples' Friendship University of Russia, 2. SS № 547, 3. SS № 444, Moscow, RF, e-mail: ivonavasileska@yahoo.com

Abstract

In this work are researched characteristics of household light sources (LS): emission spectra, illumination created by them, power consumption, color rendering, efficiency. For the research were selected the most common LS: matt and ordinary incandescent lamp, halogen lamp, compact fluorescent lamp (CFL) with warm light (2400K color temperature) CFL with cold light (color temperature 4200 K) and LED lamps. Analysis of the results from the research, comparing the performance of different LS, their conformity SanPiN 2.2.1 / 2.1.1.1278-03 and SNiP 23-05-95 allowed to determine their feasibility for a particular uses based on the spectral and integral efficiency (sensitivity) of human eye. The results will be useful for the average consumer, and for the professionals in the field of light technology.

Аннотация

В работе исследуются характеристики бытовых источников света (ИС): спектры излучения, создаваемая ими освещенность, потребляемая мощность, цветопередача, экономичность. Для исследования были выбраны наиболее распространенные ИС: матовая и обыкновенная лампа накаливания, галогенная лампа, компактная люминесцентная лампа (КЛЛ) с теплым светом (заявленная производителем цветовая температура 2400 К), КЛЛ с холодным светом (заявленная производителем цветовая температура 4200 К) и светодиодная лампы. Анализ полученных результатов, сопоставление характеристик различных ИС, их соответствие СанПиН 2.2.1/2.1.1.1278-03 и СНиП 23-05-95 позволили определить целесообразность их конкретного применения с учетом спектральной и интегральной эффективности (чувствительности) человеческого зрения. Полученные результаты будут полезны как для обычного потребителя, так и для специалистов в области светотехники.

Введение

Свет является одним из важнейших явлений природы, влияющих на жизнедеятельность человека, т.к. более чем 80% информации об окружающем мире и происходящих процессах человек получает через зрительные ощущения. Таким образом, разработка искусственных источников света (ИС) являлась неотъемлемой частью развития техногенной цивилизации. Современные ИС являются электрическими приборами, в которых электрическая энергия преобразуется в излучение в различных спектральных диапазонах и с различной энергетической эффективностью. Естественно, что в различных областях целевого использования к ИС предъявляются различные требования по освещенности и ее пульсациям, спектральному составу излучения, энергетической эффективности, рабочему ресурсу. В большинстве вариантов ИС не

удовлетворяют этим требованиям одновременно, поэтому разработка эффективных ИС для различных сфер применения является по-прежнему актуальной задачей [1].

Основным назначением ИС является создание требуемых для человека световых условий, на основе которых разработаны общие нормы (Сан ПиН 2.2.1/2.1.1.1278-03 и СНиП 23-05-95), регламентирующие параметры естественного и искусственного освещения, для соблюдения условий оптимальной рабочей среды [1]. Однако в области бытового применения ИС эти правила достаточно часто не соблюдаются, кроме того в них не отражены факторы, влияющие на психо-физическое восприятие зрительной информации и в них не учитывается ряд специфических особенностей человеческого зрения:

- зрительные ощущения человека связаны со световым излучением в видимой части спектра (длины волны 380-780 нм) с диапазоном яркостей от $2 \cdot 10^{-6}$ до $2 \cdot 10^5$ кд/м²;
- максимальная разрешающая способность глаза наблюдается при освещенности 50 лк и длине волны излучения $\lambda=550$ нм;
- максимальная чувствительность глаза проявляется к желто-зеленому цвету с $\lambda=555$ нм, а в сумерках $\lambda=510$ нм;
- расстояние наилучшего зрения составляет – 250 мм при освещенности 50 лк.

Зрительные ощущения белого света возникают только в случае, если регистрируемое глазом излучение имеет непрерывный спектр в видимой области с распределением энергии близким к распределению энергии в солнечном излучении. Отмечена особенность, что глаза меньше всего утомляются и при желто-зеленом либо белом и зеленом освещении, а больше всего при красном и фиолетовом.

Постановка и проведение экспериментов

Для исследований были отобраны серийно выпускаемые для цепей с напряжением 220 В лампы бытового назначения:

- А. матовая лампа накаливания (60 Вт, цветовая температура 2700 К)
- В. обыкновенная лампа накаливания (40 Вт, цветовая температура 2700 К),
- С. галогенная лампа (40 Вт, цветовая температура 2700 К),
- Д. светодиодная лампа (40 Вт, цветовая температура 2700 К),
- Е. компактная люминесцентная лампа (40 Вт, цветовая температура 2400 К),
- Ф. компактная люминесцентная лампа (40 Вт, цветовая температура 4200 К).

Экспериментально были определены следующие параметры: спектральный состав излучения, создаваемая освещенность, электрические характеристики.

Регистрация спектров производилась с помощью монохроматора-спектрографа MS3500I с дифракционной решеткой 1200 шт/мм, входная и выходная щели составляли 40 мкм. В качестве детектора использовался ФЭУ с фиксированным напряжением 1000В. Регистрация спектров проводилась для каждого типа ИС на трех фиксированных расстояниях от световода: на 30 см, 40 см и на 50 см.

Измерение освещенность проводилось при помощи люксметра ТКА-ПКМ С051, предназначенного для измерения освещенности в видимой области спектра с диапазоном от 10 до 200000 лк, предел допускаемой основной относительной погрешности ± 8.0 . Распределение освещенности на масштабированной поверхности 100 x 100 см проводилось для каждого ИС при трех фиксированных расстояниях 25 см, 50 см и 100 см.

Измерение электрических характеристик и светового потока проводилось с помощью осциллографа (TDS 2024 В с пропускной способностью 200 МГц и частотой дискретизации 2 ГГц). Величина тока определялась по падению напряжения на измерительном шунте (0,47 Ом), напряжение питания измерялось с помощью активного делителя (Pintek DP-50, с полосой частоты 50 МГц и напряжением входа 6,5 КВ), а величина светового потока регистрировалась прецизионным фотодиодом (быстрый

кремниевый фотоприемника APDF), с максимальной чувствительностью в диапазоне 730-830 нм, рабочий диапазон 320-1000 нм при фиксированном расстоянии между ИС и диодом.

Экспериментальные результаты и их обсуждение

На рис.1 представлены спектры ламп накаливания и светодиодной. Все спектры нормированы на максимально регистрируемое значение интенсивности и аппроксимированы.

Видно, что все лампы имеют сплошной спектр. Заявленная производителями температура для всех ламп равна 2700 К. Полученные спектральные зависимости были сравнены со спектром калибровочной лампы СИРШ 6-40 имеющей цветовую температуру 2840К. Видно, что спектры ламп (за исключением светодиодной лампы) удовлетворительно совпадают со спектром лампы СИРШ. Это означает, что они имеют

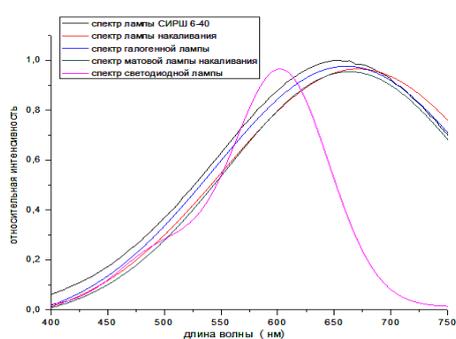


Рис 1. Спектры ламп А, В, С, D на расстоянии 50 см от световода

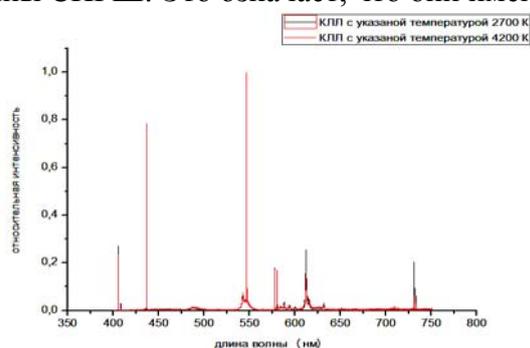


Рис 2. Спектр ламп Е, F на расстоянии 50 см от световода

близкую цветовую температуру. Существенные отличия в спектре светодиодной лампы означают, что ее спектр не соответствует спектру черного тела, следовательно, говорить о ее цветовой температуре нельзя.

На рис.2 представлены спектры двух типов КЛЛ. Несмотря на заявленную цветовую температуру, данные лампы имеют обедненный линейчатый спектр в пределах видимого диапазона, что существенно снижает качество и цветопередачу света создаваемого на рабочем месте.

Кроме спектрометрических измерений была измерена освещенность, создаваемая каждой ИС на фиксированных расстояниях. Несмотря на то, что отобранные для анализа ИС были одной мощности освещенность поверхности площадью 1 м^2 была различной. На рис.3 представлены освещенности ламп на расстоянии 50 см с градацией освещенности в 10%.

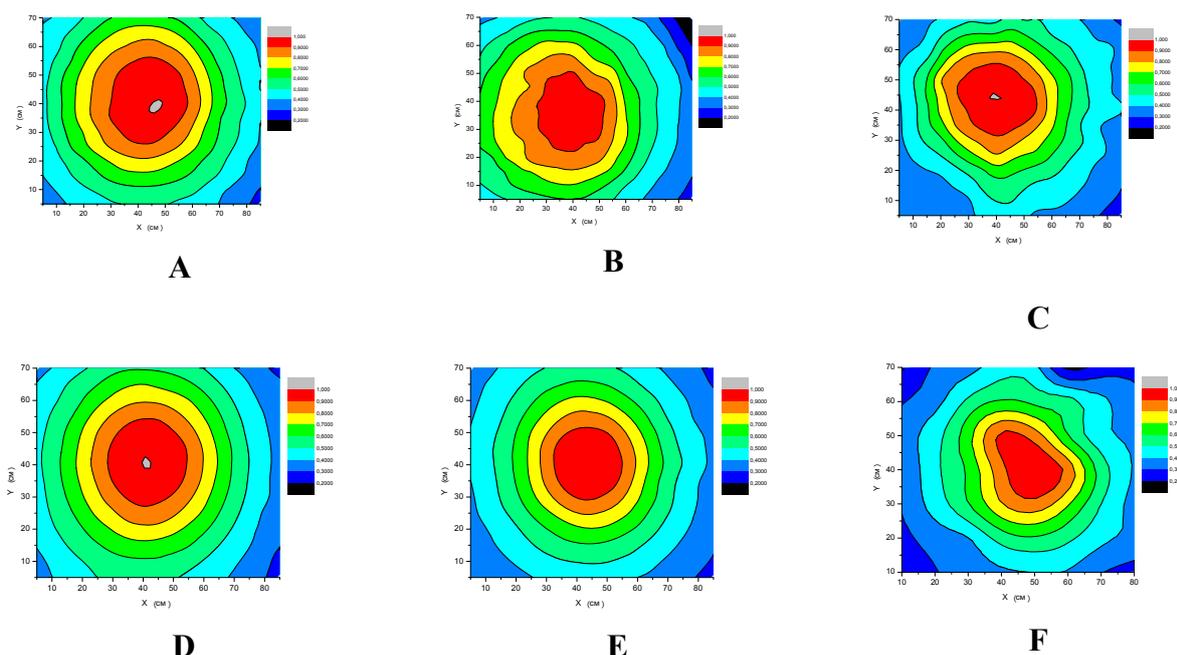


Рис 3. Освещенности ламп (А, В, С, D, Е, F) на расстоянии 50 см от люксметра

Обработка полученных результатов показала что, несмотря на одинаковую заявленную мощность, все лампы имеют разную площадь с равномерной освещенностью. Максимальной площадью однородной освещенности обладает галогенная лампа 706.5 см^2 . Остальные лампы расположились в порядке убывания светодиодная лампа - 615.44 см^2 , лампа накаливания имеет - 530.66 см^2 , матовая лампа накаливания - 415.26 см^2 и КЛЛ - 314 см^2 .

Одномоментные осциллографические измерения интенсивности света и электрических параметров (напряжение питания, ток) позволили определить коэффициент пульсации освещенности, коэффициент преобразования ламп, потребляемую мощность. Результаты измерений и расчетов представлены в таблице ниже.

Тип лампы	Измеренная мощность	Заявленная мощность	Освещенность (50 см)	Эффективность	Кэф. пульсации
Лампа накаливания	32 Вт	40 Вт	340 лк	10,625 лк\Вт	7%
Матовая лампа накаливания	57,24 Вт	60 Вт	481 лк	8,403 лк\Вт	3.5%
Галогенная лампа	32 Вт	40 Вт	381 лк	11,906 лк\Вт	4.6%
Светодиодная лампа	32 Вт	40 Вт	464 лк	14,500 лк\Вт	5.5%
КЛЛ	32 Вт	40 Вт	460 лк	14,375 лк\Вт	20%

Экспериментально измеренная потребляемая мощность оказалась меньше заявленной производителем. Наибольшая эффективность оказалась у ламп КЛЛ и светодиодной, что соответствует информации, представленной производителем.

К отрицательным характеристикам тестируемых ламп необходимо отнести низкую эффективность ламп накаливания, а также то, что светодиодная лампа обладает урезанным сплошным спектром, а КЛЛ и вовсе линейчатым. Кроме того, тестируемые образцы КЛЛ, имеют очень высокий процент пульсации (20%, что в 4 раза больше чем у

других образцов). Для качественного сравнения цветопередачи были сделаны фотографии тестовой таблицы (рис. 4) в свете всех ИС на расстоянии 50 см от источника при одинаковых настройках фотоаппарата (диафрагмирование, экспозиция, чувствительность, стиль (натуральный) и баланс (дневной свет)). Видно, что цветопередача всех представленных ламп значительно отличается от цветопередачи дневного света.

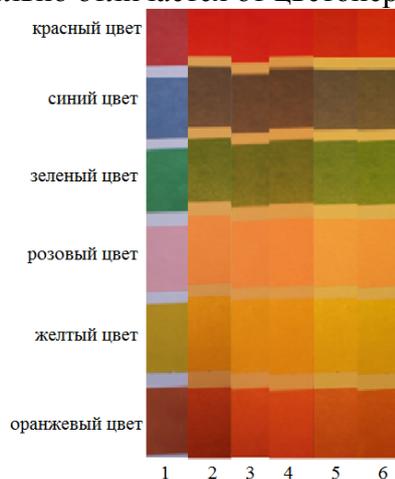


Рис 4. Цветопередача
1. Дневной свет, 2. С, 3. А, 4. В, 5. D, 6. Е

Заключение

Полученные результаты свидетельствуют о том, что светодиодная лампа и КЛЛ имеют существенные отклонения от заявленных производителем характеристик, что свидетельствует о низком выходном контроле качества продукции. Кроме того, к негативным факторам следует отнести существенный коэффициент пульсации и линейчатый спектр излучения ламп КЛЛ. При этом из всех исследованных образцов галогенная лампа обладает наилучшими параметрами по однородности освещенности на расстоянии наилучшего зрения (50 см) и спектру излучения, который близок спектру черного тела.

Список литературы

[1] «Энергоэффективное электрическое освещение под ред.» Л.П. Варфоломеева. — М.: Издательский дом МЭИ, 2013. 288 с.

УВЕЛИЧЕНИЯ ПОТОКА ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ВОДОРОДНЫХ ИОНОВ ИЗ ЭЦР ИСТОЧНИКА ПЛАЗМЫ С ПОМОЩЬЮ НИЗКОТЕМПЕРАТУРНЫХ ЭЛЕКТРОНОВ

В. Д. Дугар-Жабон¹, В. И. Каряка²

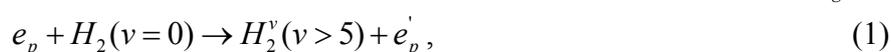
¹ Индустриальный университет Сантанде, АА 678 Букараманга, Колумбия

² Российский университет дружбы народов, В-117198 Москва, Россия

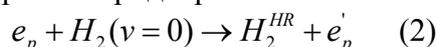
Abstract

A method for improvement of the negative hydrogen ion yield in the electron cyclotron resonance source with driven plasma rings is proposed. In the source the negative ion production is realized in two stages. First, the hydrogen molecules are excited in collisions with plasma electrons to high-laying Rydberg and high vibration levels in the plasma volume. The second stage leads to negative ion production through the process of repulsion attachment of low-energy electrons by the excited molecules. The low-energy electrons originate due to the bombardment of the plasma electrodes surface by ions of the driven ring. The calculation data on the negative ion production demonstrate that additional very low-energy thermoelectrons significantly enhance the negative ion production. As a first step to investigate the phenomenon the tungsten filaments were placed in the source. It is found that the heating of the tungsten filaments placed in the source chamber improves the discharge stability and extend the pressure operation range. The filaments system heating is accompanied by enhancing the extracted current by 5%. The low efficiency of the filament thermoelectrons owes to the fact that they provides conditions for the negative ion formation in the plasma volume where the extraction field does not penetrate.

Интерес к источникам отрицательных водородных ионов вызван их широким использованием для различных научных и технических целей [1]. В исследуемом источнике [2] плазмы, работающем на электронно-циклотронном резонансе, отрицательные водородные ионы возникают в несколько стадий. На первой стадии вследствие электронных ударов в объеме плазмы происходит образование высоковозбужденных колебательных состояний молекул водорода $X^1\Sigma_g^+$

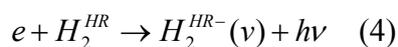


и высоковозбужденных электронных ридберговских состояний

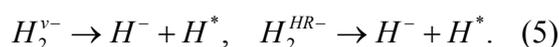


Здесь e_p - электрон плазмы, H_2^v - колебательно возбужденная молекула водорода, $H_2(v=0)$ молекула в невозбужденном колебательном состоянии $X^1\Sigma_g^+(v=0)$, v - колебательное квантовое число. Оптимальная температура для обеих реакций около 50-60 эВ.

На второй стадии низкоэнергетические электроны присоединяются к возбужденным молекулам



Полученные возбужденные отрицательно заряженные молекулы водорода нестабильны и диссоциируют на отрицательно заряженные атомы водорода H^- и возбужденные атомы H^* :



В ЭЦР источниках исследуемого типа уже на ранних этапах исследований было зафиксировано возникновение колец горячих электронов, возникающих вследствие явления циклотронного авторезонанса [3]. Энергичные частицы из этих колец, бомбардируя электроды в плазме, создают вблизи поверхностей электродов слои вторичных низкоэнергетичных электронов. В этих слоях и возникают отрицательные ионы [2]. Максимум распределения вторичных электронов составляет примерно 20 эВ, что значительно превышает оптимальную температуру для реакций (3) и (4). В силу этих причин в экспериментах предполагалось, что дополнительные вольфрамовые эмиттеры низкоэнергетичных термоэлектронов будут основными поставщиками электронов с оптимальной энергией, так как температура термоэлектронов такая же как и температура эмиттера. В экспериментах температура вольфрамовых электродов поддерживалась на уровне 2000 К, что примерно соответствует 0,16 эВ. Возбужденные молекулы водорода могут эффективно захватывать эти электроны, осуществляя в дальнейшем реакцию (5).

В экспериментах использовался цилиндрический резонатор радиусом 13 см и 8 см длиной, в котором магнитное поле в 0,34 Тл создавалось $SmCo_5$ магнитными дисками. В резонаторе, работающем на частоте 2,45 МГц, создавалась мода TE₁₁₁. Магнитное поле было направлено по оси резонатора. Магнитное поле, соответствующее основному резонансу, составляло 0,0875 Тл. Для создания низкоэнергетичных термоэлектронов, с целью оптимизации условий образования отрицательных ионов, использовалась система из четырех вольфрамовых электродов длиной 8 см каждая, попарно установленных с двух сторон резонатора на расстоянии 0,2 см от его стенок. Электроды были ориентированы перпендикулярно силовым линиям электрического СВЧ поля в резонаторе. Для вытяжки отрицательных ионов использовалась подвижная двухэлектродная система, установленная в нижней части резонатора, детально описанная в [2].

Включение нагрева вольфрамовых термоэмиттеров электронов приводило к увеличению области давлений, при которых существовал разряд в резонаторе, с (2,0-3,3) 10^{-2} до (1,2-5,4) 10^{-2} Па, а плотность плазмы увеличивалась с $1,0 \cdot 10^{11}$ до $1,2 \cdot 10^{11}$ $см^{-3}$. Разряд в указанном диапазоне давлений был стабилен, а нагрев термоэмиттера не влиял на температуру электронов плазмы, которая равнялась (55 ± 7) эВ. Нагрев вольфрамовых термоэмиттеров приводил к увеличению экстракции отрицательных ионов водорода, но оно составляло не более 5%. Низкая эффективность термоэмиттеров объясняется тем, что они создавали низкоэнергетические электроны в плазменной области, куда поле электродов экстракции практически не проникало. Таким образом, для увеличения эффективности вытяжки отрицательных ионов следует усовершенствовать конструкцию источника с целью обеспечения проникновения низкоэнергетичных электронов непосредственно в область расположения электродов экстракции.

Литература

[1] Ishikawa J. 2008, Rev.Sci.Instrum. **79**, 02C506

[2] Dougar-Jabon V.D. 2004, Phys.Scr. **69**, 313

[3] Golovanivsky K. S., Dougar-Jabon V.D. and Reznikov D. V., 1995, Phys. Rev., **E52**, 2969.

УДЕРЖАНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ТОКАМАКЕ С МАГНИТНЫМИ ОСТРОВАМИ

О.И. Подтурова^{1,2}, Е.А. Сорокина^{1,2}

¹Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

²НИЦ «Курчатовский институт», Москва, Россия

Аннотация

Исследовано поведение заряженных частиц в магнитной конфигурации токамака с расщепленными магнитными поверхностями в виде островов. Такая конфигурация может быть наглядно описана с использованием общего представления магнитного поля в терминах функции Гамильтона [1]. Рассчитаны траектории движения пролетных и запертых частиц в островной магнитной конфигурации. Особое внимание уделено случаю, когда ширина острова в радиальном (по малому радиусу) направлении превышает характерную ширину «банановой» орбиты запертых частиц. Показано, что наличие магнитного острова не оказывает качественного влияния на вид банановой орбиты: запертая частица в своем движении может пересекать сепаратрису, отделяющую магнитный остров от системы вложенных магнитных поверхностей. Аналогичным образом ведет себя и пролетная частица. При этом в зависимости от величины питч-угла сечение Пуанкаре для траекторий движения таких частиц может иметь стандартную овальную форму и форму с островной структурой.

Литература

[1] V.I. Ilgisonis, A.A. Skovoroda, JETP 110, 890 (2010)

CONFINEMENT OF CHARGED PARTICLES IN A TOKAMAK WITH MAGNETIC ISLANDS

O.I. Podturova^{1,2}, E.A. Sorokina^{1,2}

¹Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia

²National Research Centre "Kurchatov Institute", Moscow, Russia

Abstract

The behavior of charged particles in a tokamak magnetic configuration with split magnetic surfaces in the form of islands is studied. Such configuration can be clearly described in terms of Hamiltonian function [1] using general representation of the magnetic field. The trajectories of the motion of passing and trapped particles in the magnetic configuration with islands are calculated. Particular attention is paid to the case when the width of the island in the radial (along the minor radius) direction is greater than the characteristic width of the "banana" orbit of trapped particle. It is shown that existence of magnetic island has no significant influence on the shape of banana orbit: trapped particle in its motion can cross the separatrix between the magnetic island and nested magnetic surfaces. Passing particle has a similar behavior. Depending on the value of the pitch angle, the Poincare cross-section of the motion trajectories for passing particles may have the standard oval shape and the shape with island structure.

Literature

[1] V.I. Ilgisonis, A.A. Skovoroda, JETP 110, 890 (2010)

ЯДЕРНО-МОЛЕКУЛЯРНЫЙ КАТАЛИЗ В ПРОЦЕССАХ ХОЛОДНОЙ ТРАНСМУТАЦИИ АТОМНЫХ ЯДЕР

Ю. С. Копысов

Институт ядерных исследований РАН, Москва, Россия
e-mail: kop@akado.ru

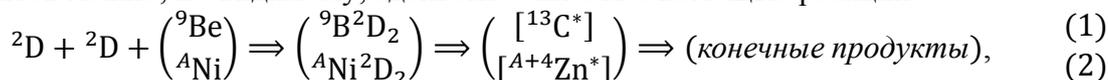
1. Введение

В работе [1] обсуждалась возможность ускорения протон-протонной реакции при столкновении двух протонов с третьей частицей — нуклоном, в результате которого формировался бы так называемый активированный ядерный комплекс (АЯК). Такой нуклид мог бы служить катализатором pp -реакции. В [1] отмечалось, что для реализации каталитического процесса АЯК должен представлять собой рыхлое ядро, обеспечивающее существенное снижение кулоновского барьера между взаимодействующими нуклидами.

В настоящей работе поставлена проблема разработки «классической» теории холодной трансмутации атомных ядер (ХТЯ) и намечен путь её решения посредством дальнейшего развития идей, обсуждавшихся в [1]. Термин «классическая» теория означает, что в ней *ad hoc* не вводятся новые сущности, однако постулируется существование новых протяжённых (рыхлых) состояний, которые не запрещены какими-либо принципами и могут быть получены посредством решения соответствующих уравнений. Будем называть такие состояния ядерно-молекулярными активированными комплексами (ЯМАК).

2. О природе ядерно-молекулярных активированных комплексов

В недавних работах [2] и [3] подробно описаны эксперименты по исследованию ХТЯ с участием ядер ${}^9\text{Be}$ и изотопов Ni , помещённых в атмосферу водорода. Результаты этих экспериментов можно, по-видимому, адекватно описать с помощью реакций:



где $[{}^{13}\text{C}^*]$ и $[A+4\text{Zn}^*]$ — ядерно-молекулярные активированные комплексы.

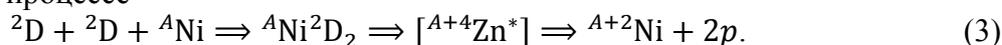
Таким образом, предполагается, что: (I) процесс ХТЯ протекает в три этапа: (1) образование дейтерированных гидридов ${}^9\text{Be}$ и изотопов Ni : ${}^2\text{D} - {}^9\text{Be} - {}^2\text{D}$ и ${}^2\text{D} - A\text{Ni} - {}^2\text{D}$, молекулы которых имеют линейную форму; (2) превращение этих молекул в активированные ядерно-молекулярные комплексы $[{}^{13}\text{C}^*]$ и $[A+4\text{Zn}^*]$; (3) превращение (распад) ЯМАК в конечные продукты. Далее, предполагается, что (II) обычное молекулярное состояние и состояние ЯМАК описываются одним и тем же гамильтонианом и существует оператор взаимодействия, молекулярное состояние в состоянии ЯМАК, причём возможен резонанс между этими состояниями.

Ключевым моментом модели является гипотеза о существовании вытянутого веретенообразного ЯМАК, в котором отчётливо выделено центральное компактное ядро-катализатор и веретенообразное нуклонное гало, размеры которого в направлении оси могут достигать размеров молекулы. Обоснование возможности существования таких состояний удаётся получить в рамках метода Бракнера исследования свойств ядерной материи с использованием анизотропного осцилляторного ядерного потенциала и спин-орбитально-го взаимодействия.

3. Основные результаты

В экспериментальной работе [3] удивительные результаты: Основные изотопы никеля ${}^{58}\text{Ni}$ и ${}^{60}\text{Ni}$ с естественной распространённостью 67% и 26,3% перешли в состояние ${}^{62}\text{Ni}$ с весовым содержанием 98,7%. Начальная естественная распространённость этого изотопа

составляла 3,9%! Можно предположить, что в каждом элементарном акте трансмутации изотопов ^{58}Ni и ^{60}Ni атомный вес изменялся на $\Delta A = 2$. Но именно такой результат следует ожидать в процессе



При этом испускаются два протона с энергией $E_p \approx 10 \text{ МэВ}$. Реакция этих быстрых протонов с ядром ^7Li приводит к исчезновению лития-7. Этот эффект также наблюдался в [3]. См. также [4].

Следует отметить, что реакция (3) происходит благодаря процессу кумулятивного преодоления кулоновского барьера [5]. Процесс испускания двух быстрых нейтронов запрещён и не наблюдался в эксперименте. Такого запрета нет в случае реакций с участием ^9Be , в работе [3], в которой нейтроны регистрировались.

4. Заключение

Необходимы дальнейшие эксперименты для подтверждения предложенной модели ХТЯ. Хорошим подтверждением могло быть обнаружение атомов ^4He , регистрирующихся при разрушении ядра ^7Li .

Литература

1. Yu. S. Kopysov. Solar Neutrino and the Catalytic Role of a Third Particle in Hydrogen Burning. AIP Conf. Proc. **52**, 28 New York, 1979.
2. Ю. Н. Бажутов, В. П. Корецкий, А. Г. Пархомов. Экспериментальная проверка эффекта Росси с гидридами металлов. Изобретательство, т. XIII, №5, с. 51–59, 2013.
3. G. Levi, E. Foschi, H. Essen. Observation of abundant heat production from a reactor device and of isotopic changes in the fuel. <http://www.sifferkoll.sc/sifferkoll/wp-content/uploads/2014/10/LuganoReportSubmit.pdf>.
4. А. Г. Пархомов. Отчёт международной комиссии об испытании высокотемпературного теплогенератора Росси. ЭКФНН, 2(6): 57–61, 2014.
5. Ю. С. Копысов. Кумулятивный процесс преодоления кулоновского барьера в реакциях холодной трансмутации атомных ядер. Настоящий сборник. Москва, РУДН, с. ..., 2015.

**ПОВЫШЕНИЕ КАЧЕСТВА ОПТИЧЕСКОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ
ДИФРАКЦИОННЫХ ОПТИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ,
ОТОБРАЖАЕМЫХ НА ЖК ПВМС**

В.В. Краснов, Р.С. Стариков, С.Н. Стариков, И.Ю. Эрькин

**«INCREASING OPTICAL RECONSTRUCTION QUALITY OF DIFFRACTIVE
OPTICAL ELEMENTS DISPLAYED WITH LIQUID CRYSTAL
SPACE-TIME LIGHT MODULATORS»**

V.V. Krasnov, R.S. Starikov, S.N. Starikov, I.Yu Er'kin

*Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ,
Москва, Россия
e-mail: holo@pico.mephi.ru*

Предложена методика улучшения качества оптического восстановления дифракционных оптических элементов (ДОЭ) отображаемых на жидкокристаллических (ЖК) пространственно-временных модуляторах света (ПВМС) имеющих временные флуктуации фазового сдвига.

Фазовые ЖК ПВМС широко используются в различных областях науки: в дифракционной оптике, цифровой голографии и др. Для многих научных и практических применений требуется временная стабильность фазовой модуляции. В большинстве современных модуляторов используется цифровая адресация сигналов, что позволяет реализовывать компактные контролеры при большом количестве пикселей. Однако, при этом неизбежны флуктуации фазы, вызванные ступенчатым профилем управляющего напряжения [1-4]. Это приводит к снижению дифракционной эффективности и качества оптического восстановления отображаемых на ПВМС ДОЭ. Поскольку флуктуации носят детерминированный характер, знание их характеристик может быть использовано в процессе синтеза ДОЭ для минимизации их негативного воздействия на качество оптического восстановления ДОЭ. Более всего от наличия флуктуаций страдает дифракционная эффективность ДОЭ, что проявляется в возникновении интенсивного нулевого порядка дифракции [5], в результате чего необходимо пространственное разделение информативного первого и нулевого дифракционных порядков. Для этого изображение-оригинал помещалось в углу расчетного поля восстановления, так чтобы оно не пересекалось с центральным нулевым дифракционным порядком. То есть на поле восстановления выделяется целевая область, куда помещается само изображение, а остальная часть поля восстановления не контролируется. Далее, для получившегося дополненного черными полями изображения, методом Герчберга-Сэкстона синтезируется ДОЭ, который является заготовкой для дальнейшего синтеза. Дальнейший синтез, с учетом имеющейся зависимости фазового сдвига от уровня сигнала и времени от начала кадра, производится методом прямого поиска со случайной траекторией (ППСТ) [5]. В качестве первоначального фазового распределения используется ранее синтезированный методом Герчберга-Сэкстона ДОЭ. После этого начинается итерационный процесс: значение каждого элемента ДОЭ, поочередно изменяется так чтобы обеспечить минимальное значение целевой функции. В качестве целевой функции используется сумма нормированного

среднеквадратического отклонения целевой области поля восстановления от исходного изображения (НСКО) и отношение интенсивности пика нулевого дифракционного порядка к средней интенсивности восстановленного изображения (ОПС). Для изменения величины вклада каждого из критериев вводится нормировочный коэффициент α перед ОПС:

$$\text{Целевая функция} = \text{НСКО} + \alpha \times \text{ОПС} \quad (1)$$

Если текущее значение элемента массива обеспечивает минимальное значение целевой функции этого массива, тогда данный элемент остается без изменения. После того как все элементы обработаны, итерация повторяется до тех пор, пока не будет достигнута стагнация целевой функции. После окончания всей процедуры получаем ДОЭ, оптимизированный с учетом наличия флуктуаций фазы в ПВМС.

Пример синтезированного таким образом ДОЭ приведен на рис. 1а. Результат его восстановления представлен – на рис. 1б. В правом нижнем углу находится целевая область, отвечающая первому порядку дифракции. В центре интенсивный пик нулевого порядка дифракции. Остальную область занимает черное поле, на котором в процессе синтеза скапливались шумы.

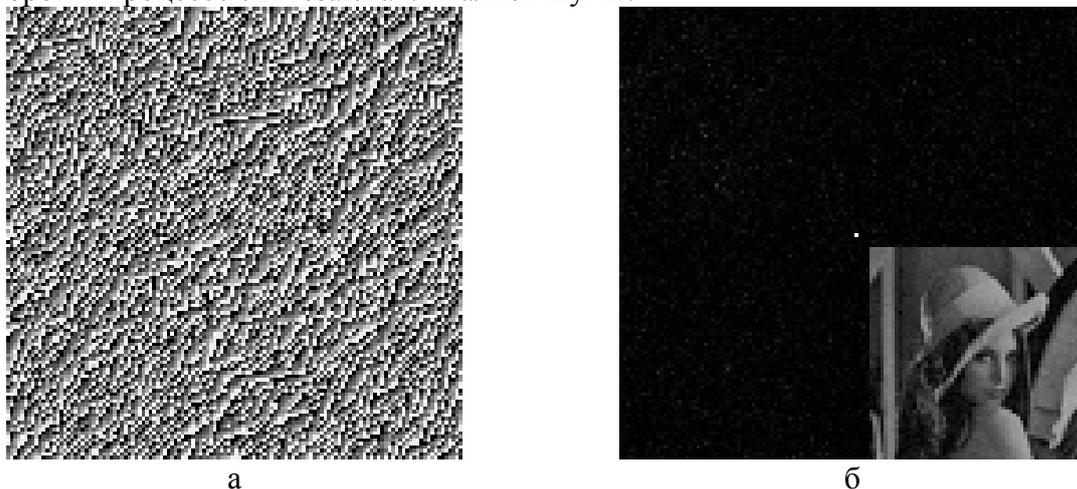


Рис. 1. Синтезированный ДОЭ (а) и восстановленное с него изображение (б)

Размещая фотосенсор камеры в области восстановленного изображения, которая несет только полезную информацию, получаем восстановленное изображение с высокой степенью схожести с оригиналом (рис. 2).



Рис. 2. Исходное (а) и восстановленное (б) изображения.

Зависимость значения целевой функции и её составляющих от номера итерации в процессе синтеза ДОЭ методом ППСТ представлена на рис. 3.

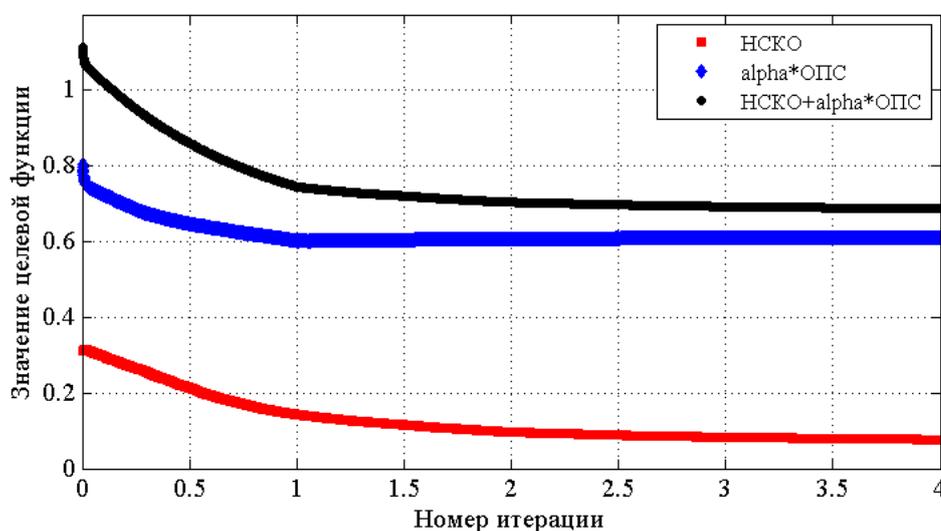


Рис. 3. Зависимость значения целевой функции и её составляющих от номера итерации

Таким образом, пространственное разделение паразитного нулевого и полезного первого дифракционных порядков, в совокупности с итерационным методом, позволило значительно улучшить качество оптического восстановления ДОЭ. Значение целевой функции было снижено на 39%. При этом НСКО снизилось на 75%, а ОПС на 25%.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (РНФ), грант № 14-19-01751.

Литература

1. Lizana A., Moreno I., Marquez A., Lemmi C., Fernandez E., Campos J., Yzuel M. time fluctuations of the phase modulation in a liquid crystal on silicon display: effects in diffractive optics // Optics Express. – 2008. – V. 16. – P. 16711-16722.
2. Zwick S., Haist., Warber M., Osten S. Wave front generation modulating liquid-crystal based micro-display with HDTV resolution // Proceedings of SPIE. – 2007. – V. 6584. – P. 65840E.
3. Cheremkhin P.A., Evtikhiev N.N., Krasnov V.V., Rodin V.G., Starikov S.N. Reduction of phase temporal fluctuations caused by digital voltage addressing in LC SLM “HoloEye PLUTO VIS” for holographic applications // Proceedings of SPIE. – 2014. – V. 9006. – P.900615.
4. Bondareva A.P., Cheremchin P.A., Evtikhiev N.N., Krasnov V.V., Starikov R.S., Starikov S.N. Measurement of characteristics and phase modulation accuracy increase of LC SLM “HoloEye PLUTO VIS” // Journal of Physics:Conference Series. – 2014. – V. 536. – P. 012011.
5. Cheremkhin P.A., Evtikhiev N.N., Krasnov V.V., Rodin V.G., Starikov S.N. Increasing reconstruction quality of diffractive optical elements displayed with LC SLM// Proceedings of SPIE. – 2015. – V. 9386. – P. 93860R.

ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ КРАЯ ТОНКИХ ПЛЁНОК НА ОТКЛИК ГЕТЕРОДИННОГО МИКРОСКОПА

И. М. Ахмеджанов, Д. В. Баранов, Е. М. Золотов

«INFLUENCE OF EDGE PARAMETERS OF THIN FILMS ON THE RESPONSE OF HETERODYNE MICROSCOPE»

I. M. Akhmedzhanov, D. V. Baranov, E. M. Zolotov

Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН, Москва, Россия

e-mail: zolotov@kapella.gpi.ru

Актуальность исследования отклика гетеродинного микроскопа в зависимости от параметров субмикронного края тонких плёнок связана как с фундаментальными задачами повышения разрешения в оптической микроскопии [1], так и целым рядом прикладных задач, в частности, разработкой оптоэлектронных датчиков линейных перемещений [2] и характеристикой тонких плёнок [3]. Преимуществом гетеродинного микроскопа является возможность получения комплексного фазово-амплитудного отклика с высокой чувствительностью и помехоустойчивостью.

Основными параметрами отклика микроскопа на одиночный объект типа размытой ступеньки или резкого края плёнки являются его размах и ширина. Именно они определяют чувствительность и разрешающую способность микроскопа. При этом важно, что эти параметры могут зависеть не только от геометрии края, но и характеристик материала плёнки и подложки. В случае гетеродинного микроскопа соответствующий эффект был нами впервые продемонстрирован экспериментально в работе [4], однако не был подробно исследован.

Целью работы является детальное сравнение экспериментальных и расчетных откликов гетеродинного микроскопа на субмикронном крае металлических и диэлектрических плёнок. В качестве экспериментальных образцов используются аттестованные объекты [5]. Моделирование откликов микроскопа проводится с помощью разработанной нами теории формирования сигнала [6], в основе которой лежит строгий метод связанных волн [7]. Обнаружено как в эксперименте, так и при моделировании, сужение фазовой составляющей отклика для диэлектрической плёнки (рис. 1, 2), что можно интерпретировать как увеличение разрешающей способности микроскопа, в то же время для амплитудной составляющей отклика данный эффект не проявляется. Обнаруженный эффект подробно обсуждается в докладе с точки зрения возможных приложений и в связи с работами других авторов по данной тематике [8].

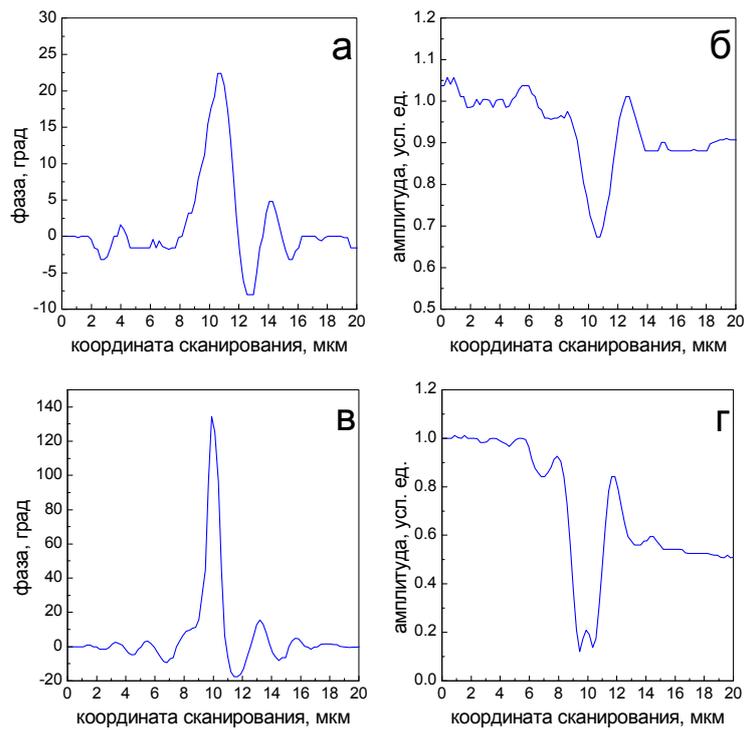


Рис. 1. Экспериментальные комплексные отклики микроскопа на край металлической плёнки (а, б) и край диэлектрической плёнки (в, г) с параметрами: толщина 0,35 мкм, ширина края 0,3 мкм.

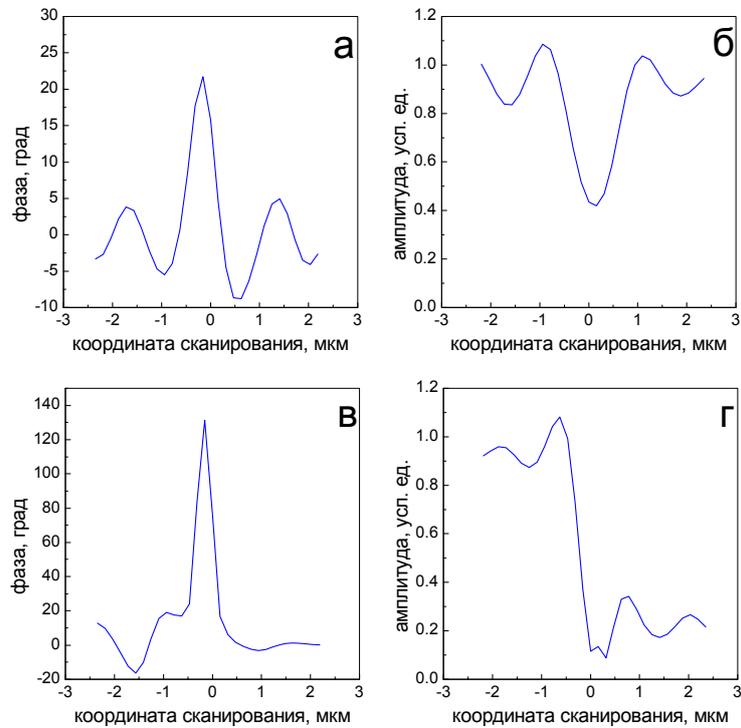


Рис. 2. Расчётные комплексные отклики микроскопа на край металлической плёнки (а, б) и край диэлектрической плёнки (в, г) с параметрами: толщина 0,3 мкм, ширина края 0,3 мкм.

Литература

1. Wilson T., Sheppard C. J. R. Theory and Practice of Scanning Optical Microscopy. – London, Academic Press, (1984).
2. Басистый Е. В. Измерительные устройства, основанные на дифракционных эффектах лазерных пучков: Дисс....канд. физ.-мат. наук (01.04.21). – М., 2014. – 124 с.
3. Ахмеджанов И.М., Баранов Д.В., Золотов Е.М. Характеризация тонких оптических золь-гель плёнок методом сканирующей микроскопии // I Всероссийская конференция по проблемам динамики и физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники, 13-16 мая 2014 года. Тезисы докладов. – М.: РУДН, 2014. – С. 265.
4. Akhmedzhanov I. M., Baranov D. V., Zolotov E. M. Object characterization with a differential heterodyne microscope // J. Opt. A. – 2003. – V. 5. P. S200.
5. Новиков Ю. А., Озерин Ю. В., Плотников Ю. И., Раков А. В., А. В. Тодуа А. В. Линейная мера микрометрового и нанометрового диапазонов для растровой электронной и атомно-силовой микроскопии // Труды ИОФАН, Т. 62. – М.: Наука, 2006. – С. 36.
6. Akhmedzhanov I. M., Baranov D. V., Zolotov E. M. Characterization of V-shaped plasmon polariton waveguides using a differential heterodyne microscope at single polarization // Las. Phys. – 2014. – V. 24. P. 085901.
7. Moharam M. G., Pommet D. A., Grann E. B. Stable implementation of the rigorous coupled-wave analysis for surface-relief gratings: enhanced transmittance matrix approach // JOSA A. – 1995. – V. 12. – P. 1077.
8. Tychinsky V. P., Masalov I. N., Pankov V. L., Ublinsky D. V. Computerized phase microscope for investigation of submicron structures // Opt. Comm. – 1989. – V. 74. – P. 37.

**ВЛИЯНИЕ УФ-ОБЛУЧЕНИЯ НА СВОЙСТВА ГЕЛЬ ПЛЁНОК TiO₂,
ЛЕГИРОВАННЫХ ЗОЛОТОМ**

С.А. Алиев¹⁾, Н.С. Трофимов¹⁾, Т.К. Чехлова¹⁾,
И.М. Ахмеджанов²⁾, Д.В. Баранов²⁾

**«INFLUENCE OF UV-RADIATION ON THE PROPERTIES OF TiO₂ GEL FILMS WITH GOLD
ADDITIVES»**

S.A. Aliev¹⁾, N.S. Trofimov¹⁾, T.K. Chekhlova¹⁾,
I.M. Akhmedzhanov²⁾, D.V. Baranov²⁾

¹⁾Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

²⁾Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН, Москва, Россия

e-mail: tcchkhlova@sci.pfu.edu.ru

Диоксид титана находит широкое применение при производятся активных катализаторов на его основе, фотокатализаторов, в том числе и для очистки воды; материал используется для производства H₂. Плёнки диоксида титана обеспечивают хорошие оптические свойства, что предполагает их использование для создания элементов фотоники и информационной оптики; они химически инертны, обладают стабильностью и прочностью. Пористая структура плёнок позволяет легировать их различными веществами и создавать активные элементы интегральной оптики, такие как лазеры, усилители и др. Введение различных элементов, в том числе и металлов, чрезвычайно важно с точки зрения создания спектро-селективных материалов для поглощения солнечной энергии, для использования их в качестве катализаторов химических реакций, а также в медицине и биологии.

Последние годы отмечены быстрорастущим спросом на высокочистый нанодиоксид титана в форме анатаза, который обладает уникальными фотокаталитическими свойствами и имеет широкие возможности применения в устройствах фотовольтаики [1]. Под действием облучения на поверхности плёнки образуется ряд радикалов или парамагнитных центров (ПЦ), которые способны вступать во вторичные реакции. Это свойство TiO₂ широко используется для создания фильтров для очистки воды и воздуха от токсичных органических примесей [2]. За счет наноструктурирования диоксид титана обладает большой площадью удельной поверхности, которая может достигать сотен квадратных метров на грамм вещества. Увеличение площади удельной поверхности характерно для мелкокристаллической структуры TiO₂ в форме анатаза. Это позволяет увеличить выход реакции фотоокисления на несколько порядков по сравнению с объёмным материалом.

Настоящая работа посвящена исследованию влияния УФ-облучения на свойства плёнок диоксида титана, легированных золотом, сформированных гель-методом. Гель-метод [3] позволяет получать плёнки с содержанием анатаза до 100%.

Получение TiO₂ производилось по гелевой технологии из тетрабутоксид титана (ТБТ) в присутствии триэтиленгликоля (ТЭГ) и н-бутанола. Время синтеза составляло 3-5 мин, через 2 мин в смесь ТБТ+ТЭГ добавляли н-бутанол. Использовались различные соотношения ТБТ:ТЭГ, представленные в таблице 1. Далее плёнки диоксида титана формировались на кварцевых подложках методом вытягивания.

Таблица 1.

№	V, мл ТЭГ	V, мл ТБТ	V, мл н-бутанол	Мольное отношение ТЭГ: ТБТ
1	10	50	30	1 : 2
2	16	40	28	1 : 1
3	24	30	26	2 : 1

Полученные образцы исследовались методами электронного парамагнитного резонанса (ЭПР), комбинационного рассеяния (КР) и оптической спектрофотометрии. Примеры полученных зависимостей приведены на рис. 1-3. ЭПР спектры были получены на установке SENS ESR 70-03 XD/2. Как видно из рис. 1, УФ-облучение привело к изменению в спектре ЭПР, а именно – амплитуда сигнала существенно возросла.

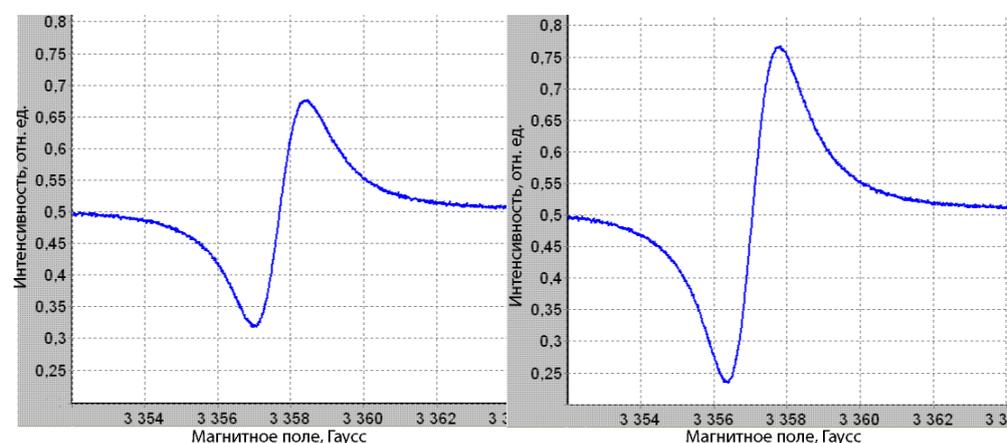


Рис. 1. Спектры ЭПР плёнки диоксида титана до и после воздействия УФ-облучения.

Спектры комбинационного рассеяния были получены на установке NTegra Spectra. На КР-спектре образца, отожженного при температуре 450⁰С, наблюдались 4 пика, положение которых соответствуют анатазу [4], а при температуре 700⁰С появляются пики, характерные для рутила. Установлено, что с повышением доли ТЭГ в исходном растворе, а также при введении золота в раствор, температура фазового перехода анатаз-рутил возрастает.

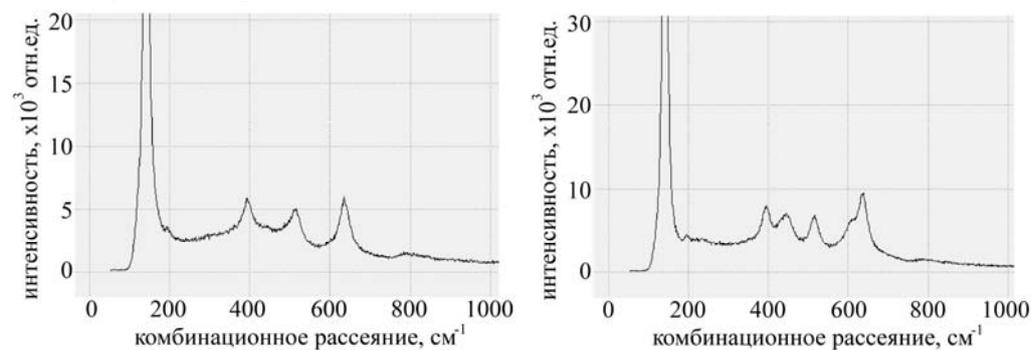


Рис. 2. Спектры комбинационного рассеяния плёнок при температуре отжига 450⁰С

(слева) и 700⁰С (справа).

Исследования оптических свойств плёнок TiO₂ были проведены при помощи монохроматора-спектрографа MS 3504I и Банд-лампы СИРШ 6-100, решетка 1200 шт/мм, шаг измерений 1 нм, цветовая температура лампы 2840 К. Результаты исследования спектров поглощения сведены в таблицу 2, в которой приведены полосы поглощения плёнок, легированных золотом в зависимости от температуры отжига и концентрации Au.

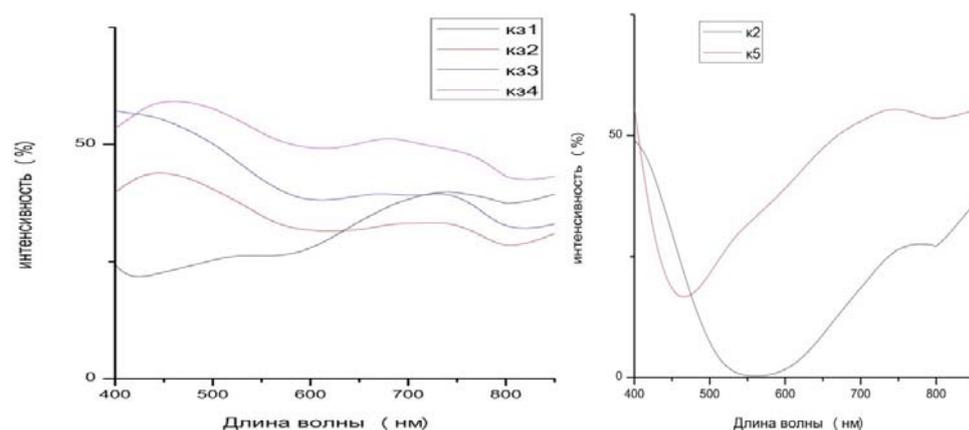


Рис. 3. Оптические спектры поглощения плёнок TiO₂ с золотом (слева) и без золота (справа)

Таблица 2.

Полосы поглощения золота в плёнках TiO₂ с разным содержанием Au и разной температурой отжига.

№ (образец)	Темп. отжига, °С 1 – 50:1 2 – 100:1	λ_1 ,	λ_2 ,	λ_3 ,
		нм	нм	нм
1 (кз4)	1 / 700 ⁰	460	680	750
2 (кз3)	2 / 700 ⁰	460	660	730
3 (кз2)	1 / 450 ⁰	ниже 400	680	730
4 (кз1)	2 / 450 ⁰	520		730

Согласно литературе [5], изменения в спектрах и положении полос поглощения можно сопоставить размерам и форме наночастиц (НЧ) Au: ниже 400 нм – заряженные кластеры золота Au_n, 460 нм – поляризованные НЧ, 520 нм – спектр плазмонного резонанса изолированных НЧ диаметром 10-15 нм (коллоидные частицы); 660 – 680 нм – предположительно агрегаты из сферических НЧ или частицы неправильной формы: треугольной, квадратной; 730 – 760 нм – 1D агрегаты – цепочки НЧ золота. Форма частиц может быть уточнена с помощью электронной микроскопии.

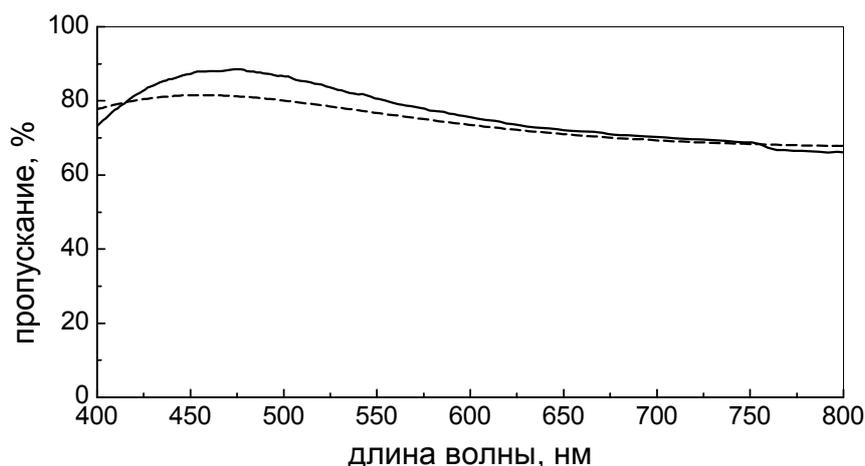


Рис. 4. Спектр пропускания плёнки TiO_2 с золотом, полученные на спектрофотометре Spesord (сплошная линия) и его теоретическая аппроксимация (штриховая линия).

Литература

1. V. Gayvoronsky, V. Timoshenko, M. Brodyn, A. Galas, S.A. Nepijko, Th. Dittrich, F. Koch, I. Petrik, N. Smirnova, A. Eremenko, M. Klimenkov. Giant nonlinear optical response application for nanoporous titanium dioxide photocatalytic activity monitoring // *Phys. Status Solidi C*. – 2005. – V. 2. – P. 3303-3307.
2. A. Fujishima, K. Hashimoto, T. Watanabe. *TiO₂ Photocatalysis. Fundamentals and Applications*. – Tokyo: VKC Inc., 1999.
3. Евтушенко Ю.М., Ловецкий К.П., Павлов С.В., Ромашкин С.В., Трофимов Н.С., Чехлова Т.К. Оптические свойства плёнок на основе TiO_2 , изготовленных по гель технологии // Тезисы 5-я Всерос. Конф. «Химия пов. и нанотехн.». Санкт-Петербург (Хилово) 24-30 сент. 2012 г. – С. 275-276.
4. Ю.М. Шульга, Е.Н. Кабачков, Д.В. Матюшенко, Е.Н. Куркин, И.А. Домашнев. Термостимулированные превращения в брукитсодержащих нанопорошках TiO_2 , полученных гидролизом TiCl_4 // *Журнал технической физики*. – 2011. – Т. 81, Вып. 1. – С. 101-105.
5. Ю.А. Крутяков, А.А.Кудринский, А.Ю.Оленин, Г.В.Лисичкин Синтез и свойства наночастиц серебра: достижения и перспективы // *Успехи химии*. – 2008. – Т. 77, № 3. – С. 242-269.

СОЗДАНИЕ СОЛНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ОСНОВЕ ГЕЛЬ ПЛЁНОК ДИОКСИДА ТИТАНА

С.А. Алиев, И.Ф. Вега, Н.С. Трофимов, Т.К. Чехлова

«CREATION OF SOLAR CELLS BASED ON TITANIUM DIOXIDE GEL FILMS»

S.A. Aliev, I.F. Vega, N.S. Trofimov, T.K. Chekhlova

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

e-mail: tcchkhlova@sci.pfu.edu.ru

Нанокристаллический диоксида титана со структурой анатаза обладает фоточувствительностью, фотокаталитической активностью в УФ-части солнечного света, характеризуется высокой химической стабильностью, прекрасными оптическими свойствами и в связи с этим является высокоперспективным материалом для создания солнечных фотоэлементов, активных в видимой области спектра.

Большая площадь удельной поверхности диоксида титана делает его перспективным также для создания эффективных солнечных фотоэлементов, так как при наноструктурировании увеличивается поглощательная способность материала. Кроме того, поскольку диоксид титана является пористым материалом и может быть активирован молекулами красителя, например родамина 6Ж. Это позволило разработать на основе пористого диоксида титана солнечные фотоэлементы инжекционного типа [1], так как энергетическое положение зоны проводимости TiO_2 совпадает с энергией возбуждения многих красителей.

Анализ, как считает большинство исследователей [2], проявляет наибольшую фотоактивность по сравнению с рутилом и брукитом, что делает его наиболее востребованным материалом для создания фоточувствительных элементов на его основе.

Целью настоящей работы является исследование свойств плёнок диоксида титана, изготовленных по гель технологии, направленное на увеличение их фоточувствительности.

Гель технология [3] позволяет получать плёнки диоксида титана, содержание анатаза в объеме которых близко к 100%. Для изготовления плёнок в настоящей работе использовали тетрабутоксититана (ТБТ), триэтиленгликоль (ТЭГ), н-бутанол марки х.ч. Соотношение компонент раствора ТБТ:ТЭГ показано в следующей таблице:

Таблица 1.

№	V, мл ТЭГ	V, мл ТБТ	V, мл н-Б	Мольное отношение ТЭГ:ТБТ
1	10	50	30	1:2
2	16	40	28	1:1
3	24	30	26	2:1

Плёнки изготавливались путем вытягивания стеклянной подложки из раствора. По указанной технологии была изготовлена серия образцов плёнок диоксида титана, параметры которых, а именно толщина и показатель преломления, варьировались путем изменения соотношения компонент раствора, скорости вытягивания подложки из раствора, температуры раствора и температуры и времени отжига.

Параметры плёнок были исследованы методами интегральной оптики, которые заключались в волноводном распространении излучения вдоль плёнки. Таким образом, были определены показатель преломления и толщина плёнок.

Проведённое исследование микроструктуры изготовленных плёнок показало, что плёнки диоксида титана имеют структуру анатаза (рис. 1).

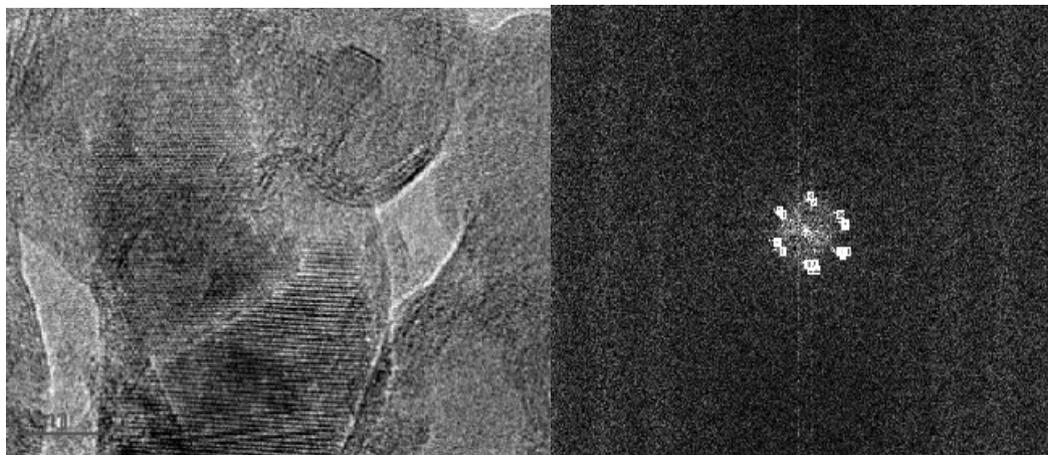


Рис. 1. Микроструктура участка плёнки и Фурье-образ.

Для исследования фоточувствительности полученных образцов был выбран метод ЭПР-спектроскопии в силу своей высокой чувствительности к радикалам, так как известно [4], что под действием ультрафиолетового (УФ) излучения в плёнках на основе диоксида титана образуются свободные радикалы. Более того метод ЭПР позволяет получить информацию о ближайшем локальном окружении парамагнитного центра. Показано, что УФ облучение образцов приводит к увеличению амплитуды сигнала ЭПР, связанное с увеличением числа парамагнитных центров (рис. 2).

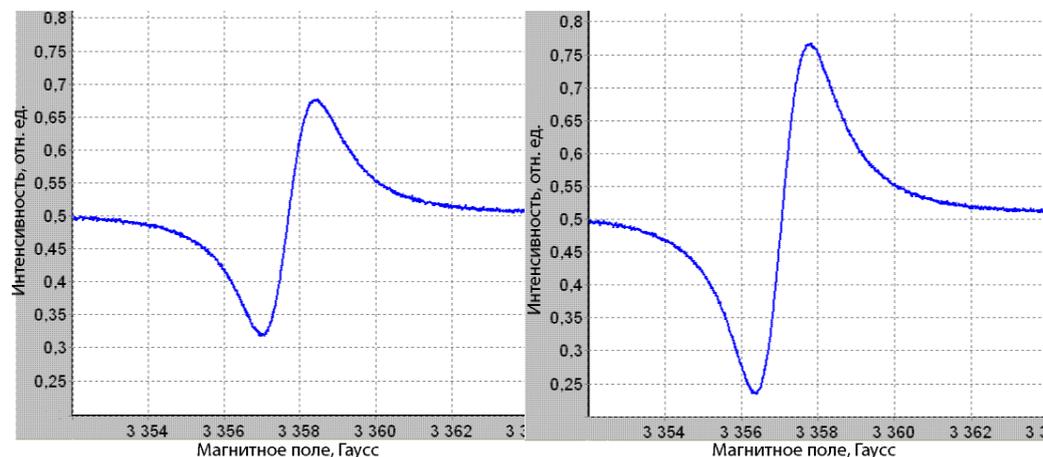


Рис. 2. Спектры ЭПР плёнки диоксида титана до и после воздействия УФ-излучением

Фотоактивность TiO_2 основана на полупроводящих свойствах материала, электронная структура которого обусловлена существованием дефектов на поверхности кристаллической структуры. Поглощение кванта света вызывает перенос электрона из валентной зоны в зону проводимости полупроводника с образованием электрона и дырки, приводящий к образованию парамагнитных центров. Квантовый выход процесса во многом определяется, размером и геометрией материалов вследствие

исключительно поверхностных явлений. Увеличение площади удельной поверхности позволяет повысить степень фотоактивности материала. В связи с этим анатаз, обладающий большой удельной поверхностью, проявляет более высокую фотокаталитическую активность по сравнению с рутилом. Усиление фотоактивности объясняется, в частности, более высоким положением уровня Ферми у анатаза (3,3 – 3,4 эВ) по сравнению с рутилом (3,1 – 3,2 эВ).

Исследование фотовольтаики, т. е. изменение сопротивления плёнки под действием УФ-облучения подтверждает генерацию заряженных частиц.

Проведённые исследования показали возможность использования диоксида титана, получаемого по указанной выше методике, для создания фоточувствительных элементов. Возможно, путем надлежащего легирования удастся расширить диапазон поглощения материала и увеличить эффективность фотоактивности.

Литература

1. Weidmann J., Dettrich Th., Konstantinova E., Lauermann I., Uhlandorf I., Koch F. Influence of oxygen and water related surface defects on the dye sensitized TiO₂ solar cell // Sol. Energy Mater. Solar Cells. – 1999. – V. 56. – P. 153-165.
2. Thompson T. L., Yats J. T. jr. Surface Science Studies of the Photoactivation of TiO₂ – New Photochemical Processes. // Chem. Rev. – 2006. – V.106, No 10. – P. 4428-4453.
3. Евтушенко Ю.М., Ловецкий К.П., Павлов С.В., Ромашкин С.В., Трофимов Н.С., Чехлова Т.К. Оптические свойства плёнок на основе TiO₂, изготовленных по гель технологии // Тезисы 5-я Всерос. Конф. «Химия пов. и нанотехн.». Санкт-Петербург (Хилово) 24-30 сент. 2012 г. – С. 275-276.
4. Константинова Е.А., Гайворонский В.Я., Тимошенко В.Ю., Кашкаров П.К. Исследование спиновых центров в нанокристаллическом диоксиде титана с высокой степенью фотокаталитической активности // Физика и техника полупроводников. – 2010. – Т. 44, Вып. 8. – С. 1093-1097.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИФРАКЦИИ ВОЛН 10,6 МКМ НА ГЛУБОКОЙ ОТРАЖАЮЩЕЙ ДИФРАКЦИОННОЙ РЕШЁТКЕ

Д.Б. Иштимиров, В.А. Комоцкий, Н.В. Суетин

«EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF 10.6 μM WAVE DIFFRACTION
ON DEEP REFLECTIVE DIFFRACTION GRATING»

D.B. Ishtimirov, V.A. Komotskii, N.V. Suetin

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

e-mail: ponama911@gmail.com, bboydes@mail.ru

Задача данной работы состоит в изучении возможности управления мощностью ИК излучения 10,6 мкм с применением глубокой отражающей дифракционной решётки (ДР).

Теоретическое обоснование метода модуляции дано в [1]. Сущность метода заключается в следующем: когерентное излучение от лазера направляется на глубокую отражающую ДР, глубина h которой составляет более половины длины волны λ . При изменении угла падения оптического пучка на решётку интенсивность нулевого и первых порядков дифракции изменяется вследствие изменения эффективной оптической глубины решётки. Зависимость мощности нулевого и первых дифракционных порядков от угла падения Θ можно выразить формулами [2]:

$$P_0 = P_{\text{эфф}} \cos^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda} h \cos \Theta \right)$$

$$P_{\pm 1} = \left(4/\pi^2 \right) P_{\text{эфф}} \sin^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda} h \cos \Theta \right)$$

Для примера на рис. 1 приведена расчётная зависимость при глубине решётки 15 мкм и длине волны $\lambda = 10,6$ мкм. Как видно из графика, зависимость имеет осциллирующий характер, при этом мощность в нулевом порядке меняется от нуля до максимального значения, равного мощности падающего излучения, умноженного на коэффициент отражения поверхности решётки. В соответствии с данным графиком, изменяя угол в диапазоне от 27 до 43 градусов, можно осуществить изменение мощности отраженного пучка в пределах от 0 до P_0^{max} .

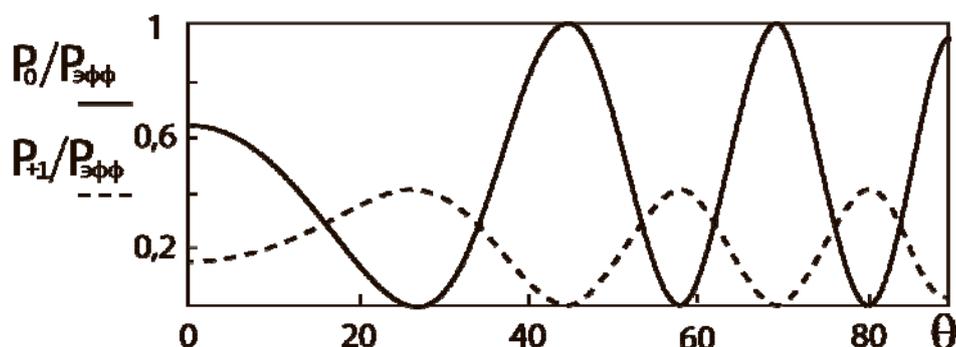


Рис. 1. Зависимости приведённых мощностей в нулевом и первых порядках дифракции от угла падения пучка

Эксперимент

Экспериментальные ДР были изготовлены на полированной медной пластинке. На полированной поверхности был изготовлен набор канавок шириной 100 мкм, расположенных на расстоянии 100 мкм друг от друга. Глубина канавок при различных режимах гравировки составляет от 10 до 15 мкм. В результате был получен ряд рельефных решёток, которые в дальнейшем использовались в эксперименте. Профиль одной из решёток, измеренный на бесконтактном профилометре фирмы Alicona, приведён на рис. 2.

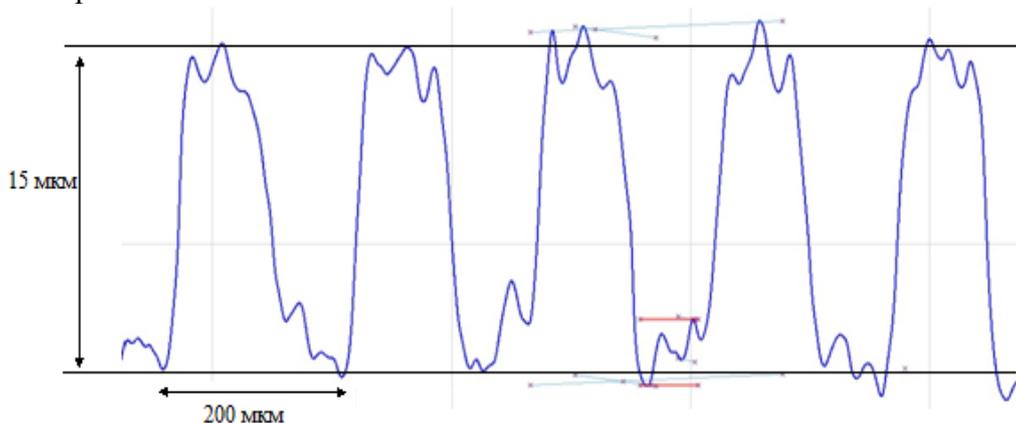


Рис. 2. Профиль рельефа одной из исследуемых отражающих ДР

Неоднородности на канавке составляли порядка $1 \pm 1,5$ мкм, что, однако, значительно меньше длины волны лазерного излучения 10,6 мкм. Форма канавок была достаточно близка к прямоугольной, и, несмотря на некоторые несовершенства, дифракционная картина, полученная в отраженном свете, была достаточно четкой. Данная решётка помещалась в пучок CO_2 лазера. Для улучшения пространственной когерентности луч лазера пропускаться через диафрагму диаметром 2 мм. В отраженном пучке наблюдалась дифракционная картина. Визуальное наблюдение проводилось с помощью жидкокристаллической плёнки, которая изменяет цвет при нагревании.

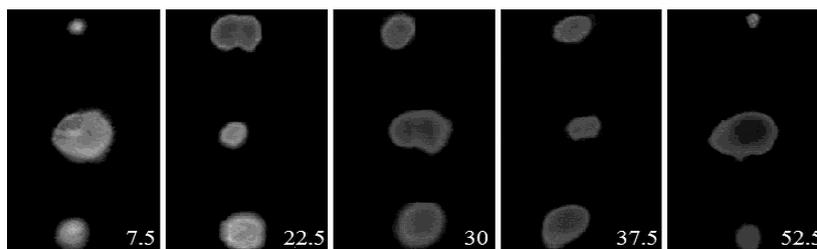


Рис. 3. Картина, показывающая соотношения интенсивностей в нулевом и первых порядках дифракции при различных углах падения

Помимо визуального наблюдения проводились измерения с помощью болометра, построенного на основе термочувствительных элементов – полупроводниковых диодов. Здесь D_1 и D_2 – термочувствительные элементы.

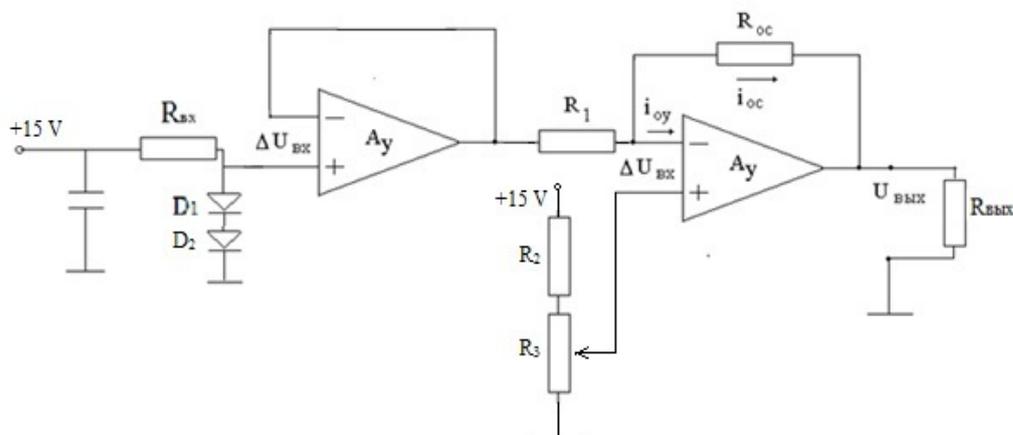


Рис 4. Схема детектора

Экспериментальная установка для исследования модуляции ИК излучения (рис 5) включает в себя источник ИК излучения, отражающую дифракционную решётку, детектор. В качестве источника ИК излучения используется CO_2 лазер с длиной волны 10,6 мкм. Изменение угла падения осуществляется путем поворота решётки в плоскости падения-отражения лазерного луча.

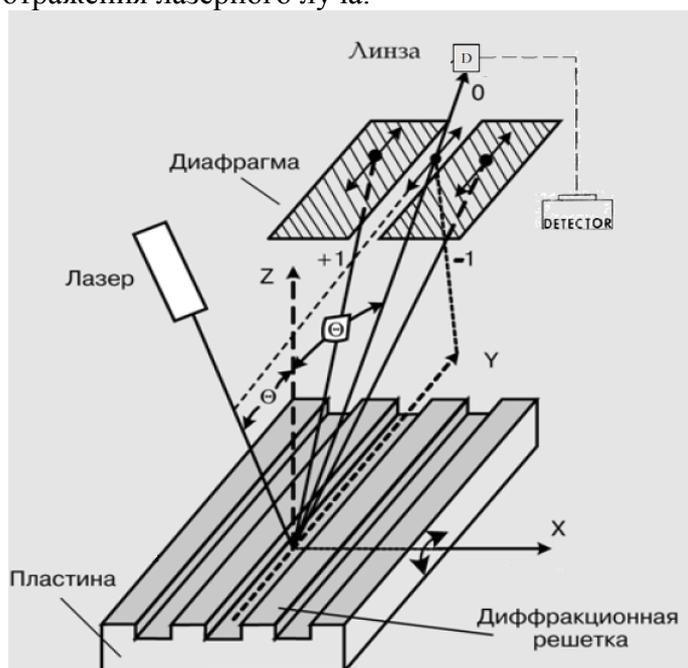


Рис 5. Схема экспериментальной установки

Экспериментальная зависимость мощностей в порядках дифракции от угла падения приведена на рис. 6.

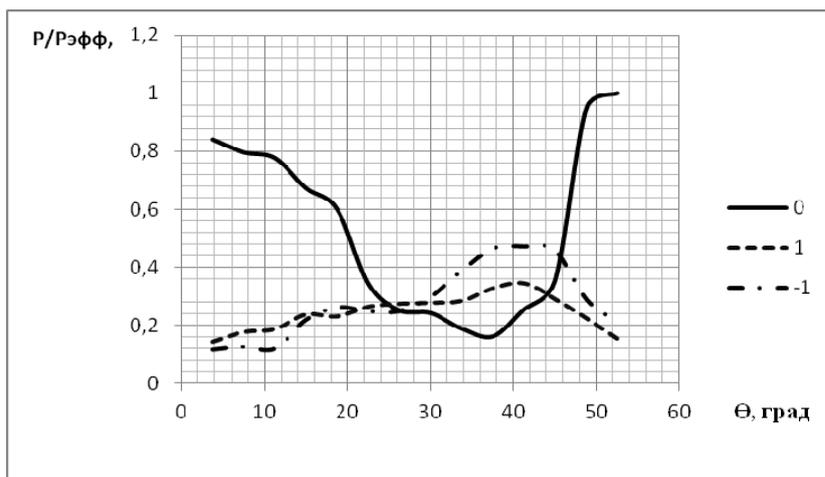


Рис 6. Экспериментальные зависимости приведённых мощностей в нулевом и первых порядках дифракции от угла падения лазерного пучка на ДР с глубиной 15 мкм

Как видно из рис. 6, экспериментальная зависимость соответствует расчётной. На основании эксперимента можно сделать следующие выводы:

- 1) Глубокая отражающая ДР может быть использована для модуляции излучения 10,6 мкм.
- 2) ДР для модуляции ИК излучения может быть изготовлена на медной пластине методом лазерной гравировки.

Литература

1. Комоцкий В.А., Соколов Ю.М. Басистый Е.В. Модулятор лазерного излучения // Радиотехника и электроника. – 2012. – Т. 57, № 6. – С. 1-4.
2. Комоцкий В.А., Корольков В.И., Соколов Ю.М. Оптоэлектронные дифракционные датчики малых угловых перемещений // Фотоника. – 2011. – № 1. – С. 16-19.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

F(R, T) THEORY OF GRAVITY: SOME REMARKS

Vijan Saha (3)

ГЕОМЕТРИЯ, ТОПОЛОГИЯ И УРАВНЕНИЯ ИНДУКЦИИ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ

Журавлев В.М. (5)

СКАЛЯРНО-ТЕНЗОРНАЯ ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ МИНКОВСКОГО

Ю.П. Выблый, И.Г. Дудко (8)

ON THE EHRENFEST THEOREM IN PRECANONICAL QUANTIZATION OF FIELDS AND GRAVITY

Igor V. Kanatchikov (13)

СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОЕ РЕШЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ КАРТАНА-ВЕЙЛЯ

О.В. Бабурова, Е.В. Романова, Б.Н. Фролов (14)

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ ВО ВСЕЛЕННОЙ С ДВУХКРАТНЫМ УСКОРЕНИЕМ

Ю.Г. Игнатьев, А.М. Нигмедзянова (17)

КВАНТОВАНИЕ ГРАВИТАЦИОННО-СВЯЗАННЫХ СИСТЕМ

М.Л. Фильченков (20)

КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ ЭВОЛЮЦИЯ БОЛЬЦМАНОВСКОЙ ПЛАЗМЫ С МЕЖЧАСТИЧНЫМ ФАНТОМНЫМ СКАЛЯРНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Ю.Г. Игнатьев, М.Л. Михайлов (24)

КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ ЭВОЛЮЦИЯ НЕРАВНОВЕСНЫХ ЧАСТИЦ СВЕРХВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ В СЦЕНАРИИ С ПЕРЕХОДОМ ОТ УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКОЙ СТАДИИ НА ИНФЛЯЦИОННУЮ

Ю.Г. Игнатьев, И.А. Кох (29)

КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ ЭВОЛЮЦИЯ ПОЧТИ ВЫРОЖДЕННОЙ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ СКАЛЯРНО ЗАРЯЖЕННОЙ ПЛАЗМЫ С МЕЖЧАСТИЧНЫМ ФАНТОМНЫМ СКАЛЯРНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Ю.Г. Игнатьев, А.А. Агафонов (32)

КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ С ПЕРЕМЕННЫМИ "КОНСТАНТАМИ" И УСКОРЕННОЕ РАСШИРЕНИЕ ВСЕЛЕННОЙ.

В.С.Рихвицкий, Б.Саха (36)

-
- БЕЗРАЗМЕРНЫЙ КОМПЛЕКС В КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ
С ГРАВИТАЦИОННОЙ КОНСТАНТОЙ**
Грудев П.И., Копылов С.В. (37)
- WHAT'S WRONG WITH COSMOLOGICAL REDSHIFT PARAMETER**
Sergey I. Kuznetsov (40)
- МОДЕЛЬ ВСЕЛЕННОЙ, ЗАПОЛНЕННОЙ СПИНОРНОЙ МАТЕРИЕЙ –
ПЕРЕХОД ОТ ЗАМЕДЛЕННОГО РАСШИРЕНИЯ К УСКОРЕННОМУ**
Г. Н. Шикин, Н. А. Ковальчуков, Л. П. Ющенко (44)
- О ВОЗМОЖНОСТИ ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛИ ГРАВИТАЦИИ И «ТЕОРИИ
ВСЕГО» НА ОСНОВЕ АНАЛОГИЙ В ПОВЕДЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА И
ВАКУУМА**
Гневко А.И., Соловов С.Н., Янушкевич В.А. (47)
- ПРИНЦИП НЕВОЗМУЩАЮЩИХ ИЗМЕРЕНИЙ В МОДЕЛЯХ
ПРИЧИННОСТНОГО МНОЖЕСТВА В КВАНТОВОЙ ГРАВИТАЦИИ**
А.Л. Круглый (49)
- СВОБОДНЫЕ РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ВРАЩЕНИЯ ЧЕТЫРЁХМЕРНОГО
РЕЛЯТИВИСТСКОГО ПРОСТРАНСТВА**
В. В. Толмачёв, Ф. В. Скрипник, Е. В. Корогодина (53)
- КУМУЛЯТИВНЫЙ ПРОЦЕСС ПРЕОДОЛЕНИЯ КУЛОНОВСКОГО БАРЬЕРА
В РЕАКЦИЯХ ХОЛОДНОЙ ТРАНСМУТАЦИИ АТОМНЫХ ЯДЕР**
Ю. С. Копысов (56)
- CLASSICAL GAS DYNAMICS AS A TOOL FOR DESCRIPTION OF STOCHASTIC
AND QUANTUM PARTICLES**
Yuri A. Rylov (57)
- EFFECTIVE SCHROEDINGER EQUATION FOR FAST DRIVEN QUANTUM
SYSTEMS**
Nikolay P. Tretyakov and Maximo A. Aguero (61)
- УПРОЩЕННАЯ ОЦЕНКА УРОВНЯ МИРОВОГО ОКЕАНА
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЛОГИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ**
Л.В. Сорокин (63)
- ХАОС, СОЛИТОНЫ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ**
Сидоров С.В. (66)
- АНАЛИЗ НЕГОЛОНОМНОСТИ ГАМИЛЬТОНОВЫХ ПОЛЕЙ**
И. Каспирович (70)

- ИССЛЕДОВАНИЕ ЦЕНТРОВ ЗАХВАТА НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА
В ПОЛИМЕРНЫХ МАТЕРИАЛАХ МЕТОДАМИ
ТЕРМОСТИМУЛИРОВАННОЙ ДЕПОЛЯРИЗАЦИИ И ПРОВОДИМОСТИ**
И.М. Каширский, Ю.С. Булышев (72)
- РЕАКЦИЯ ПЕРЕЗАРЯДКИ $nd \rightarrow p(nn)$ ПОД НУЛЁМ В ПРЕДСТАВЛЕНИИ
УПРУГОГО РАССЕЙЯНИЯ $np \rightarrow np$ НА 180° .**
Шиндин Р.А., Ливанов А.Н., Юдин И.П. (74)
- ИНТЕГРАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ СВОБОДНО КОНВЕКТИВНОГО
ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ**
Я.А.Суслов, С.Г.Черкасов (75)
- PRESSURE OPERATOR FOR THE POESCHL – TELLEROSCILLATOR**
Yu. G.Rudoy, E. O.Oladimeji (78)
- VIOLATION OF INVARIANCE AT NEUTRINO OSCILLATIONS IN WEAK
INTERACTIONS**
Kh. M. Beshtoev (81)
- INVESTIGATION OF EQUILIBRIUM STATES OF OCEANIC MASSES IN THE
PRESENCE OF A NONLINEAR ELECTRIC FIELD**
A.S. Rabinowitch (86)
- ON ORBITAL MOTIONS OF ANTIPROTONS IN NONLINEAR NUCLEAR FIELDS A**
.S. Rabinowitch, A. A. Туарко (90)
- ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ БРИЗЕРОВ
1D И 2D O(3) ВЕКТОРНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИГМА-МОДЕЛИ**
Муминов Х.Х., Шокиров Ф.Ш. (94)
- ВОЛНЫ РИМАНА В ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ СРЕДЕ, СОДЕРЖАЩЕЙ ГАЗ
ЧАПЛЫГИНА**
Г. Н. Шикин, З. Лахмади, Ю. П. Рыбаков (99)
- КЛАСС МЕТРИЧЕСКИХ АЛГЕБР, ЛОРЕНЦ И ПУАНКАРЕ ИНВАРИАНТНОСТЬ
ОПЕРАЦИЙ.**
А. В. Коганов (101)
- МЕТОД МАКСИМАЛЬНОЙ ЭНТРОПИИ И КВАДРАТИЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ
СЛУЧАЙНО-ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ**
Миронов П. П., Журавлев В. М. (105)
- МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ОБРАЗОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ
СТРУКТУР В КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕДАХ С НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФУЗИЕЙ**
Морозов В. М., Журавлев В. М. (108)

- ОПРОКИДЫВАЮЩИЕСЯ ВОЛНЫ В ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ ФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ**
Журавлев В.М. (112)
- МЕХАНИЗМЫ УСИЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПРОЦЕССОВ ПРИ НИЗКИХ ЭНЕРГИЯХ**
Самсоненко Н.В., Ндахайо Ф., Усман Манга А. (114)
- ОПИСАНИЕ БАРИОННОГО И ЛЕПТОННОГО СЕКТОРОВ В МОДЕЛИ СКИРМА-ФАДДЕЕВА**
В.И. Молотков (118)
- О ВЗАИМОСВЯЗИ КООРДИНАТНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ ГРИНА БЕЗМАССОВОЙ ЧАСТИЦЫ ДИРАКА И ЕЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФОЛДИ—ВОУТХОУЗЕНА КАК ФУНКЦИОНАЛОВ**
А.А. Бейлинсон, Н. Гоним (120)
- АЛГЕБРА КВАТЕРНИОНОВ ДЛЯ МЕХАНИКИ ТЕЛ В ВИБРИРУЮЩИХ СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА**
Т.Ф. Камалов (122)
- НОВЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ**
М.А. Бадин (126)
- К ТЕОРИИ ДВОЙНОГО РЕШЕНИЯ ДЕ БРОЙЛЯ**
Сёмин М. В., Шутемова А. А. (129)
- ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА**
- ANALYTICAL INVESTIGATION OF THE SATELLITE RESONANT MOTION**
Kostadin Sheiretsky, Nikolay Erokhin, Rumen Shkevov (132)
- УПРАВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ В ПРИСУТСТВИИ ВОЗМУЩЕНИЙ**
Ананьевский И.М., Ишханян Т. А. (135)
- ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКОГО РЕЗОНАНСНОГО ВРАЩЕНИЯ СПУТНИКА НА ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОРБИТЕ**
Бардин Б.С., Чекина Е.А. (139)
- ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ТВЁРДОГО ТЕЛА С ГОРИЗОНТАЛЬНО ВИБРИРУЮЩЕЙ ТОЧКОЙ ПОДВЕСА**
Беличенко М. В. (144)
- ВАРИАЦИОННЫЕ СИММЕТРИИ И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ**
Будочкина С.А. (146)

- ВЛИЯНИЕ ВЗАИМНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПЛАНЕТ СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ НА ЭВОЛЮЦИЮ ПЕРИГЕЛИЕВ ИХ ОРБИТ**
В.Г. Вильке, А.В. Шатина, Л.С. Шатина (148)
- ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА, НЕСУЩЕГО ПОДВИЖНУЮ ТОЧЕЧНУЮ МАССУ**
Панёв А.С. (153)
- ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ ПРИ НАЛИЧИИ ДВОЙНОГО РЕЗОНАНСА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА**
А.И. Сафонов, О.В. Холостова (158)
- ОБ ЭВОЛЮЦИИ ДВУХЧАСТОТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В СЛУЧАЕ ОРБИТАЛЬНЫХ ЛИНДБЛАДОВСКИХ РЕЗОНАНСОВ ПРИ УЧЁТЕ РЭЛЕЕВСКОЙ ДИССИПАЦИИ И ВЕКОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ЭКЗОПЛАНЕТ**
В. С. Теплицкая (161)
- СТАБИЛИЗАЦИЯ И УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ГОЛОНОМНОЙ СИСТЕМЫ В СИНГУЛЯРНЫХ СЛУЧАЯХ**
Дересса Чернет Туге, Р.Г.Мухарлямов, (164)
- О ПОСТРОЕНИИ МНОЖЕСТВА УПРАВЛЕНИЙ В СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ**
Тлеубергенов М. И., Ибраева Г.Т. (169)
- КОЛЕБАНИЯ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ДУФФИНГА**
И.Н. Барабанов, В.Н. Тхай (174)
- СТАБИЛИЗАЦИЯ КОЛЕБАНИЙ МНОЖЕСТВА ИДЕНТИЧНЫХ СИСТЕМ**
В.Н. Тхай, И.Н. Барабанов (176)
- НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ ПРОГРАММНОГО МНОГООБРАЗИЯ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ**
С.С.Жуматов (179)
- АДИАБАТИЧЕСКИЙ ИНВАРИАНТ В ЗАДАЧЕ О БЫСТРЫХ ВРАЩЕНИЯХ СПУТНИКА НА ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОРБИТЕ**
Маркеев А.П. (185)
- УПРАВЛЕНИЕ УПОРЯДОЧЕННОЙ ДИСЛОКАЦИЕЙ МОБИЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ В НЕПРЕДСКАЗУЕМО ДВИЖУЩЕМСЯ ПУНКТЕ**
Мухаметзянов И.А., Чекмарева О.И. (187)
- СТАБИЛИЗАЦИИ СВЯЗИ И ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ КИНЕМАТИКИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ**
Мухарлямов Роберт Гарабшевич, Бешау Ассайе Валелгу (189)

ФИЗИКА ПЛАЗМЫ И ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ С ВЕЩЕСТВОМ

- PROPERTIES OF SOLITARY ION ACOUSTIC WAVES IN A QUANTIZED
DEGENERATE MAGNETOPLASMA WITH TRAPPED ELECTRONS**
N.L. Tsintsadze, H.A.Shah, M.N.S. Qureshi, and [M.N. Tagviashvili] (194)
- RELATIVISTIC PLASMA-BASED MAGNETICALLY INSULATED TRANSMISSION
LINE OSCILLATOR**
I.L. Bogdankevich, V.O. Litvin, O.T. Loza (197)
- АВТОРЕЗОНАНСНОЕ УСКОРЕНИЕ УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКИХ
ЭЛЕКТРОНОВ В ПОЛЕ МОЩНОГО ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ**
Н. Абдулов. (201)
- АНАЛИЗ ЗАВИСИМОСТИ СЕФОТРОННОГО УСКОРЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ В
ПЛАЗМЕ ОТ ФАЗОВОЙ СКОРОСТИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ**
Ерохин А.Н., Зольникова Н.Н., Ерохин Н.С., Михайловская Л.А. (205)
- ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КОРОТКОВОЛНОВЫХ ВГВ С ЗОНАЛЬНЫМИ ВЕТРАМИ В
АТМОСФЕРЕ**
Суслов А.И., Ерохин Н.С. (209)
- ЗАХВАТ И УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКОЕ УСКОРЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ ПАКЕТОМ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В КОСМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЕ ПРИ
РЕЛЯТИВИСТСКИХ НАЧАЛЬНЫХ ЭНЕРГИЯХ ЧАСТИЦ**
Н. С. Ерохин , Н. Н. Зольникова , Р. Шкевов , Л. А. Михайловская (210)
- О ВОЗМОЖНОСТИ ДРЕЙФОВОГО ДВИЖЕНИЯ ВДОЛЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО
ПОЛЯ**
Н.А. Марусов, Е.А. Сорокина (213)
- ОЭС-ДИАГНОСТИКА ПЛАЗМЫ ЭЦР-РАЗРЯДА В ОБЛАСТИ
ПРОМЕЖУТАЧНЫХ ДАВЛЕНИЙ**
И. Василеска, М.А. Корнеева (216)
- ПАРАМЕТРЫ ИМПУЛЬСНОЙ ИНЖЕКЦИИ В ПЛАЗМЕННЫЙ УСКОРИТЕЛЬ**
Ндонг Ондо Д.Д., Новицкий А.А. (220)
- СЕРФИНГ ЭЛЕКТРОНОВ НА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЕ В ПЛАЗМЕ
ПРИ УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКОМ НАЧАЛЬНОМ ИМПУЛЬСЕ ЧАСТИЦЫ**
Мкртчян Г.С. ,Ерохин Н.С. (224)

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СПЕКТРАЛЬНО-ФОТОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ИСТОЧНИКОВ СВЕТА БЫТОВОГО НАЗНАЧЕНИЯ
Василеска Ивона, Степин В. П., Тимофеев Г.В., Тюняткин А.А., Салий А.И.,
Пестерева В.Н. (228)

УВЕЛИЧЕНИЯ ПОТОКА ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ВОДОРОДНЫХ ИОНОВ ИЗ ЭЦР ИСТОЧНИКА ПЛАЗМЫ С ПОМОЩЬЮ НИЗКОТЕМПЕРАТУРНЫХ ЭЛЕКТРОНОВ
В. Д. Дугар-Жабон, В. И. Каряка (233)

УДЕРЖАНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ТОКАМАКЕ С МАГНИТНЫМИ ОСТРОВАМИ
О.И. Подтурова, Е.А. Сорокина (235)

ЯДЕРНО-МОЛЕКУЛЯРНЫЙ КАТАЛИЗ В ПРОЦЕССАХ ХОЛОДНОЙ ТРАНСМУТАЦИИ АТОМНЫХ ЯДЕР
Ю. С. Копысов (236)

ОПТОЭЛЕКТРОНИКА И ИНТЕГРАЛЬНАЯ ОПТИКА

ПОВЫШЕНИЕ КАЧЕСТВА ОПТИЧЕСКОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ ДИФРАКЦИОННЫХ ОПТИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ, ОТОБРАЖАЕМЫХ НА ЖК ПВМС
В.В. Краснов, Р.С. Стариков, С.Н. Стариков, И.Ю. Эрркин (238)

ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ КРАЯ ТОНКИХ ПЛЁНОК НА ОТКЛИК ГЕТЕРОДИННОГО МИКРОСКОПА
И. М. Ахмеджанов, Д. В. Баранов, Е. М. Золотов (241)

ВЛИЯНИЕ УФ-ОБЛУЧЕНИЯ НА СВОЙСТВА ГЕЛЬ ПЛЁНОК TiO₂, ЛЕГИРОВАННЫХ ЗОЛОТОМ
С.А. Алиев, Н.С. Трофимов, Т.К. Чехлова, И.М. Ахмеджанов, Д.В. Баранов (244)

СОЗДАНИЕ СОЛНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ОСНОВЕ ГЕЛЬ ПЛЁНОК ДИОКСИДА ТИТАНА
С.А. Алиев, И.Ф. Вега, Н.С. Трофимов, Т.К. Чехлова (248)

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИФРАКЦИИ ВОЛН 10,6 МКМ НА ГЛУБОКОЙ ОТРАЖАЮЩЕЙ ДИФРАКЦИОННОЙ РЕШЁТКЕ
Д.Б. Иштимиров, В.А. Комоцкий, Н.В. Суетин (251)

Научное издание

**II
ВСЕРОССИЙСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ
ПО ПРОБЛЕМАМ ДИНАМИКИ,
ФИЗИКИ ЧАСТИЦ, ФИЗИКИ ПЛАЗМЫ
И ОПТОЭЛЕКТРОНИКИ**

Издание подготовлено в авторской редакции

Технический редактор *Н.А. Ясько*
Дизайн обложки *М.В. Рогова*

Подписано в печать 24.09.2015 г. Формат 60×84/8.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 33,0. Тираж 100 экз. Заказ 1252.

Российский университет дружбы народов
115419, ГСП-1, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3

Типография РУДН
115419, ГСП-1, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, тел. 952-04-41

Для заметок
