

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ
MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF RUSSIA
PEOPLES' FRIENDSHIP UNIVERSITY OF RUSSIA**

**LI
ВСЕРОССИЙСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ
ПО ПРОБЛЕМАМ ДИНАМИКИ, ФИЗИКИ ЧАСТИЦ,
ФИЗИКИ ПЛАЗМЫ И ОПТОЭЛЕКТРОНИКИ**

Москва, 17–19 мая 2016 г.

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

**ABSTRACTS OF THE LI ALL-RUSSIA CONFERENCE
ON PROBLEMS IN DYNAMICS, PARTICLE PHYSICS,
PLASMA PHYSICS AND OPTOELECTRONICS**

Russia, Moscow, 17–19 May 2016

**Москва
Российский университет дружбы народов
2016**

УДК 53(063)
ББК 22.3
В85

Утверждено
РИС Ученого совета
Российского университета
дружбы народов

ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ КОНФЕРЕНЦИИ

Председатель оргкомитета –
д.ф.-м.н., профессор *Ю.П. Рыбаков*

Заместитель председателя –
к.ф.-м.н., доцент *Я.Н. Шаар*

Ответственный секретарь –
аспирант *Гоним Науар*

д.х.н., профессор, декан факультета физико-математических
и естественных наук *Л.Г. Воскресенский*;
д.ф.-м.н., профессор *В.П. Милантьев*; д.ф.-м.н., проф. *В.И. Ильгисонис*;
д.т.н., профессор, засл. деятель науки РФ *Г.П. Башарин*;
д.ф.-м.н., профессор *К.Е. Самуйлов*; д.ф.-м.н., проф. *Н.С. Ерохин*;
д.ф.-м.н., профессор *Л.А. Севастьянов*; д.ф.-м.н., профессор *А.Л. Скубачевский*;
к.ф.-м.н., профессор *И.Л. Толмачев*; д.т.н., проф. *В.А. Косоцкий*

В85 **II Всероссийская конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники** : тезисы докладов. Москва, РУДН, 17–19 мая 2016 г. – Москва : РУДН, 2016. – 220 с. : ил.

ISBN 978-5-209-07867-8

УДК 53(063)
ББК 22.3

ISBN 978-5-209-07867-8

© Коллектив авторов, 2016
© Российский университет
дружбы народов, 2016

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

ON THE PROBLEM OF DYNAMICAL STABILIZATION OF AN INVERTED TEDOS CILLATOR IN QUANTUM DOMAIN

Chistyakov V.V.^{1,2,3}, K. Olaussen⁴

¹ Scientific research university of informational technology, mechanics and optics, Russia, 197101, Saint-Petersburg (SPb), Kronverksky avenue, 49A, ² Mikhailov military academy of artillery, 195009, SPb, Komsomola str., 22, ³ Military space academy named after A.F. Mozhaisky, 197082, SPb, Zhdanovskaya str., 22, e-mail: v.chistyakov@corp.ifmo.ru, ⁴Norwegian university of science and technology, 7491, Norway, Trondheim, e-mail: Kare.Olaussen@ntnu.no

Abstract. A problem of dynamical stabilization is studied for a driven quantum inverted harmonic oscillator (IHO) with Hamiltonian $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{m\omega^2 x^2}{2} - F_0 x \sin(\Omega t + \phi)$. As an initial condition (IC) wave function (w. f.) served converging Gaussian one dimensional (1D) beam which fits well IC operator. A nonstationary Schrödinger equation (NSE) in dimensionless variables is solved both analytically and numerically by Maple 17. An effect of stabilization of wave packet center $\xi_{av}(\tau) = \overline{\hat{x}(\tau)} \cdot \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$ at short time τ was observed for all investigated frequencies $\Omega \geq \frac{\omega}{2}$; for the “resonant” frequency $\Omega = \omega$ the stabilizing phase shifts $\phi(n)$ obeyed inverted Fermi-Dyrc formula of $n = \log_2 \sigma_0$ with the $\sigma_0 = \sqrt{\xi^2(0)}$ being standard ξ -deviation at $\tau = 0$. And the shifts $\phi(\sigma_0)$ themselves served as bifurcation points separating the NSE solutions with $\xi_{av}(\tau) \rightarrow +\infty$ from those with $-\infty$. Also an interesting effect of collapse of the wave packet in extremely small domain is observed at times close to $\tau_0 = \frac{\ln(16\sigma_0^4 + 1)}{8}$ for all ϕ s just before the $\sigma(\tau)$ begun to grow up to infinity.

Key words: driven inverted oscillator, nonstationary Schrödinger equation (NSE), operator of initial conditions, phase shift, stabilization, wave function, packet collapse, bifurcation, Maple

Classical case

As a classical example may serve a famous Kapitza pendulum but commonly any standing or straight running human may be treated as an IHO from biomechanical point of view.

When harmonically driven on ‘resonant’ frequency an inverted oscillator is described by the following Hamiltonian function $H(p, q) = \frac{p^2}{2} - \frac{q^2}{2} - f_0 \sin(\tau + \phi)q$; and the dynamical equations are

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} + f_0 \sin(\tau + \phi) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1).$$

The bounded solution

$$q(\tau) = 0.5(q_0 + p_0 + 0.5(\sin\phi + \cos\phi))e^\tau - 0.5f_0 \sin(\tau + \phi) + 0.5(q_0 - p_0 + 0.5(\sin\phi - \cos\phi))e^{-\tau} \quad (2)$$

occurs when

$$q_0 + p_0 + 0.5(\sin\phi + \cos\phi) = 0 \quad (3).$$

Example. (University ITMO Olympiad on theoretical mechanics, 2015, Chistyakov V.V.) A narrow pipe of length l is rotated at angular speed of ω in vertical plane around its middle point where a little piece is kept. At what inclination angle ϕ of the pipe to horizon should be released the piece in order not to leave out the pipe?

The solution of appropriate dynamical equation with initial conditions (ICs) $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = u_0$ gives the bounded dependence $x(t) = 0.5g\omega^{-2} \sin(\omega t + \phi) + (x_0 - 0.5g\omega^{-2} \sin(\phi))e^{-\omega t}, t > 0$ provided the condition

$u_0 + \omega x_0 = \frac{g \sin\left(\phi + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\omega}, x_0 \in \left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right)$ is fulfilled. Particularly for ICs $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$ the stabilization arises at angles (phase shifts of gravity force) of $\phi = -0.25\pi; 0.75\pi$.

From fundamental viewpoint of links between classical and quantum mechanics it would be of great interest to explore whether this dynamical stabilization conserves for a quantum IHO. And if it does then what features are conserved and what are new in comparison with classical mechanics?

Quantum driven IHO

The significance of quantum inverted oscillator is extremely great in modern physics as an universal model of unstable quantum state of any particle. This model is used when studying the tunnel effect or the «short time behavior in *superfluorescence*» and so on (see e.g. [1, 2]). Commonly, any metastable quantum state anywhere may be considered as an IHO.

One dimensional “resonantly” forced inverted oscillator is described in the dimensionless variables of

$\xi = x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}, f_0 = \frac{F_0}{\omega\sqrt{\hbar m\omega}}, \tau = \omega t$ by the following NSE:

$$i \frac{\partial \Psi(\xi, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} - \frac{\xi^2}{2} \Psi(\xi, \tau) - f_0 \xi \sin(\tau + \phi) \Psi(\xi, \tau), \quad (4).$$

The chain of substitutions such as $\rho = \xi + f_0 \sin(\tau + \phi), \Psi(\rho, \tau) = \psi(\rho)g(\rho, \tau)$ and

$g(\rho, \tau) = e^{-i\left(E(\rho) + \frac{f_0^2}{4}\right)\tau + i\frac{f_0^2 \sin(2\tau + 2\phi)}{8}} z(\rho, \tau)$ with the $E(\rho) = -\frac{1}{2\psi_0(\rho)} \frac{d^2 \psi_0(\rho)}{d\rho^2} - \frac{\rho^2}{2}$ (see below) transforms

this NSE into following exactly integrable partial differential equation (PDE):

$$i \frac{\partial z(\rho, \tau)}{\partial \tau} \cdot \frac{1}{z} + \left(\frac{i}{z} \frac{\partial z(\rho, \tau)}{\partial \rho} + \frac{dE(\rho)}{d\rho} \tau \right) f_0 \cos(\tau + \phi) + i \frac{d\psi(\rho)}{d\rho} \frac{1}{\psi} f_0 \cos(\tau + \phi) + \frac{1}{z} \frac{\partial z(\rho, \tau)}{\partial \rho} \cdot \left(-i \frac{dE(\rho)}{d\rho} \tau \right) +$$

$$+ \frac{1}{2z} \frac{\partial^2 z(\rho, \tau)}{\partial \rho^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{dE(\rho)}{d\rho} \right)^2 \tau^2 - \frac{i}{2} \frac{d^2 E(\rho)}{d\rho^2} \tau + \frac{1}{z} \frac{\partial z(\rho, \tau)}{\partial \rho} \cdot \frac{d\psi}{d\rho} \cdot \frac{1}{\psi} + \left(-i \frac{dE(\rho)}{d\rho} \tau \right) \frac{d\psi}{d\rho} \cdot \frac{1}{\psi} = 0 \quad (5).$$

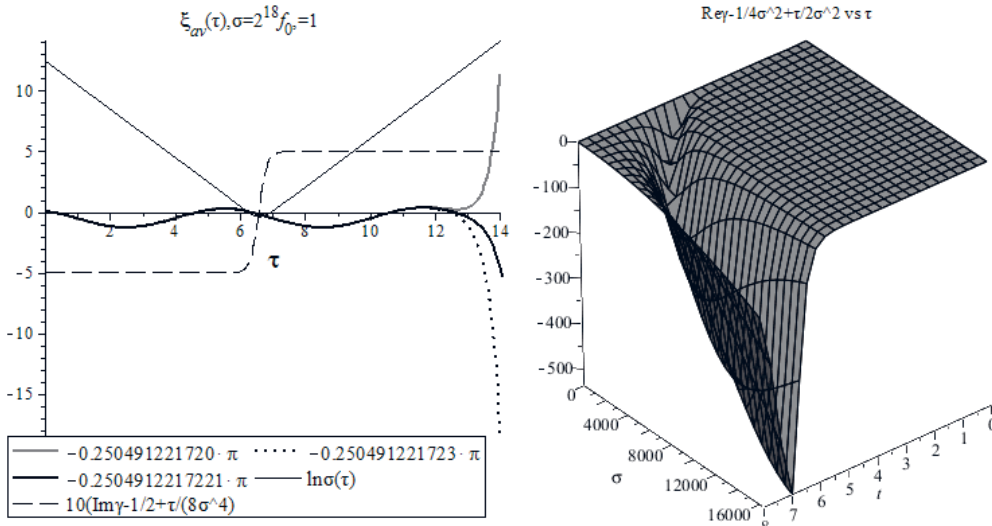


Fig. 1, Short time stabilization and bifurcation of $\xi_{av}(\tau)$ at “resonant” frequency $\Omega = \omega$ for $\sigma_0 = 2^{18}$ and $f_0 = 1$; the curves for $\ln \sigma(\tau)$ and $\text{Im} \gamma(\tau) - \frac{1}{2} + \frac{8\tau}{\sigma_0^4}$.

Fig. 2. 3D plot $\text{Re} \gamma(\tau) - 1/4\sigma_0^2 + \tau/2\sigma_0^2 \equiv -1/4\sigma^2(\tau)$

As for an initial wavefunction (w.f.) ideally it should be an eigenfunction of dimensionless ICs' operator:

$$\hat{c} = \hat{p} + \hat{\xi} = -i \frac{\partial}{\partial \xi} + \xi. \text{ But such w.f. } \psi_{eig} = C \exp(-0.5i\xi^2) \text{ doesn't correspond to}$$

whatever physical states then necessary ICs may only be fitted by choosing a converging to zero point

$$1D \text{ Gaussian “beam” } \Psi(\xi, 0) = \psi_0(\xi) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{i\xi^2}{2} - \frac{\xi^2}{4\sigma_0^2} \right), \sigma_0 = \sqrt{\xi^2(0)} \gg 1.$$

The PDE (5) may be solved by substitution $z(\rho, \tau) = \exp(\alpha(\tau) + \beta(\tau)\rho + \gamma(\tau)\rho^2)$, and for the major coefficient γ which defines the current half width $\sigma(\tau)$ (Fig. 2) of w.f. packet ($\text{Re} \gamma(\tau)$) and redistributing 1D flow $\vec{j}(\xi)$ of probability density inside it ($\text{Im} \gamma(\tau)$) it is received

$$\gamma(\tau) = \frac{1}{4\sigma_0^2} + \frac{i}{2} + \left(\frac{1}{2\sigma_0^2} - \frac{i}{8\sigma_0^4} \right) \tau + \frac{1}{2} \text{tg} \left(2i\tau - \text{arctg} \left(i + \frac{1}{2\sigma_0^2} \right) \right) \quad (6).$$

This formula describes a strong collapse of the packet at time interval $\tau \leq \tau_0$.

And the collapse is the stronger the larger is an initial halfwidth of σ_0 serving the quantum analogue of $l/2$ of the pipe (Fig. 1, 2). Just while collapsing the “beam” converts to diverging one so quick flux switching occurs.

The numerical modelling in wider range of logarithms $n = \log_2 \sigma_0 \in [-8, 21]$ for the phase values obeying

$$\text{inverted Fermi - Dyrac dependences } \phi^-(\sigma_0) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4 \cdot (1+a2^n)} \text{ and } \phi^+(\sigma_0) = \phi^-(\sigma_0) + \pi, (a = 0.076962$$

(0.001744), $adj - R^2 = 0.99965$) has revealed: a) a stabilization of the w.f. packet center $\xi_{av}(\tau) = \overline{\xi(\tau)}$

near the point close to zero during about of two time periods, b) a bifurcation of the NSE solution (3) displayed in change of the direction of final packet out coming to infinity, and c) a shift of the graph of $\xi_{av}(\tau)$ up at ϕ^+ or down at ϕ^- (Fig. 1,3) in comparison with the corresponding classical curve (2) – (3).

The picture observed allows supposing an existence of along quantum separatrices not revealed yet because of precision limitation of used program of Maple. The separatrix which is the longer the larger (not smaller!) is an initial wave packet width σ_0 and consequently the closer is the w.f. $\psi_0(\xi)$ to nonphysical one of $\psi_{eig}(\xi)$. But the paradox here seems only for the simple reason that it is the case of $\sigma_0 \rightarrow \infty$ which corresponds to classical limit and not of $\sigma_0 \rightarrow 0$ what in whole agrees completely with the behavior of $\phi^\pm(\sigma_0 \rightarrow \infty)$ -values coinciding with the classical ones $\phi^\pm = -0.25\pi; 0.75\pi$.

It's worth also to note that on similar effect of wave packet delaying near the maximum point of repelling quadratic potential had indicated the author of research [3] devoted to exactly solvable discrete Schroedinger models.

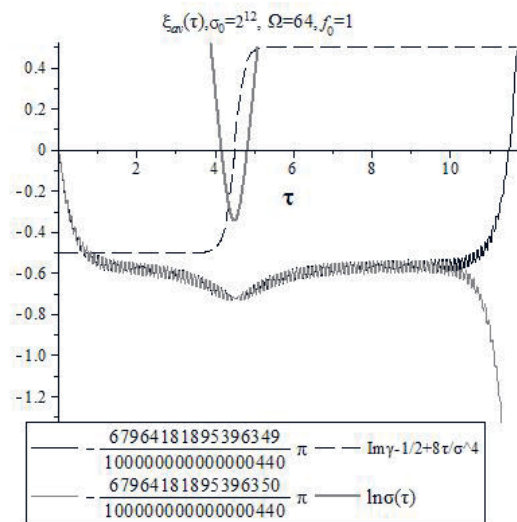
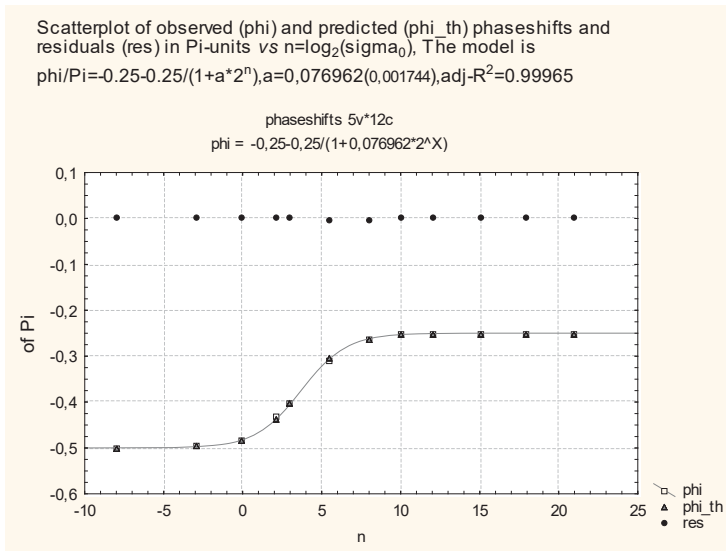


Fig. 3. An inverted $F-D$ dependence for the stabilizing phase ϕ^- vs $n = \log_2 \sigma_0$ (in units of π).

Fig. 4. Quasi-stabilization and bifurcation at non-“resonant” high frequency $\Omega = 64\omega$, $\sigma_0 = 2^{12}$.

References

1. L.A. Pedrosa, A.L. de Lima, A.M. de M.Carvalho, Gaussian wave packet states of generalized inverted oscillator with time-dependent mass and frequency// Can. J. of Physics, 93:1-5, 2015
2. Y. Nogami, F.M. Toyama, Nonlinear Schrödinger soliton in a time-dependent quadratic potential//Phys. Rev. E, v. 49, № 5, 1994, pp. 4497-4501
3. B.N. Zakhar'ev, Discrete and continuous quantum mechanics, exactly solvable models// Physicoelementary particles and atomic nuclei, V. 23, iss, 5, 1992, pp. 1387—1468 (Russian)

The research is supported by RBRF grant 16-08-00997

«Investigation of nonlinear multiple controlled mechanical systems by means of mathematical and computer modelling»

О ДИНАМИЧЕСКОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ПЕРЕВЕРНУТОГО КВАНТОВОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Чистяков В.В.^{1,2,3}, К. Олауссен⁴

¹ Научно-исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, 197101, РФ, СПб, Кронверкский просп., 49А, ² Михайловская военная артиллерийская академия, 195009, РФ, СПб, ул. Комсомола, 22, ³ Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского, 197082, РФ, СПб, ул. Ждановская, 13, ⁴ Норвежский университет науки и технологии, 7491, Норвегия, Трондхейм

ON DYNAMICAL STABILIZATION OF AN INVERTED OSCILLATOR IN QUANTUM DOMAIN

Chistyakov V.V.^{1,2,3}, K. Olaussen⁴

¹ Scientific research university of informational technology, mechanics and optics, Russia, 197101, Saint-Petersburg (SPb), Kronverksky avenue, 49A, ² Mikhailov military academy of artillery, 195009, SPb, Komsomola str., 22, ³ Military space academy named after A.F. Mozhaisky, 197082, SPb, Zhdanovskaya str., 22, e-mail: v.chistyakov@corp.ifmo.ru, ⁴ Norwegian university of science and technology, 7491, Norway, Trondheim, e-mail: Kare.Olaussen@ntnu.no

Abstract. A problem of dynamical stabilization is discussed for a driven quantum inverted harmonic oscillator (IHO) with Hamiltonian $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{m\omega^2 x^2}{2} - F_0 x \sin(\omega t + \phi)$. As an IC wave function (w. f.) served the converging Gauss 1D beam which fits well IC operator. A nonstationary Schrödinger equation (NSE) in dimensionless variables is solved both analytically and numerically by Maple 17. An effect of stabilization of wave packet center $\xi_{av}(\tau) = \overline{\hat{x}(\tau)} \cdot \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$ at short time τ was observed when phase shifts $\phi(n)$ have been chosen according to inverted Fermi-Dyrc formula of $n = \log_2 \sigma_0$ with the $\sigma_0 = \sqrt{\xi^2(0)}$ being standard ξ -deviation at $\tau = 0$. As for the shifts $\phi(\sigma_0)$ they served as bifurcation points which separate the NSE solutions with $\xi_{av}(\tau) \rightarrow +\infty$ from those with $-\infty$. Also an interesting effect of a short localization of the wave packet in extremely narrow domain is observed at the times close to $\tau_0 = 0.125 \ln(16\sigma_0^4 + 1)$ for all ϕ s just before the $\sigma(\tau)$ begun to grow up to infinity.

Key words: driven inverted oscillator, nonstationary Schrödinger equation (NSE), operator of initial conditions, phase shift, stabilization, wave function, packet compacting, bifurcation, Maple

Динамическая стабилизация в классической механике

Классическим её примером является маятник Капицы, а, вообще, — прямоходящий человек, с точки зрения биомеханики являющий собой перевернутый маятник.

Функция Гамильтона гармонически возмущаемого на «резонансной частоте» ИО в безразмерных координатах есть $H(p, q) = \frac{p^2}{2} - \frac{q^2}{2} - f_0 \sin(\tau + \varphi)q$; уравнения движения —

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} + f_0 \sin(\tau + \varphi) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1).$$

Стабилизированное решение —

$$q(\tau) = 0.5(q_0 + p_0 + 0.5(\sin \phi + \cos \phi))e^\tau - 0.5f_0 \sin(\tau + \phi) + 0.5(q_0 - p_0 + 0.5(\sin \phi - \cos \phi))e^{-\tau} \quad (2)$$

имеет место при $q_0 + p_0 + 0.5(\sin \phi + \cos \phi) = 0$ (3).

Пример. (Олимпиада УИТМО по теоретической механике, 2015, Чистяков В.В.) Трубку длиной l вращают в вертикальной плоскости с постоянной угловой скоростью ω вокруг ее середины, где удерживается креплением маленький грузик. В каком положении ϕ трубки необходимо освободить этот грузик, чтобы он не выпал в дальнейшем из нее?

Решение динамического уравнения при начальных условиях (НУ) $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = u_0$ дает стабилизированную зависимость $x(t) = 0.5g\omega^{-2} \sin(\omega t + \phi) + (x_0 - 0.5g\omega^{-2} \sin(\phi))e^{-\omega t}, t > 0$ при

выполнении соотношения $u_0 + \omega x_0 = \frac{g \sin\left(\phi + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\omega}, x_0 \in \left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right)$, и в частности при нулевых НУ $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$ стабилизация имеет место при углах $\phi = -0.25\pi; 0.75\pi$.

В фундаментальном плане взаимосвязи классической и квантовой механики, представляет интерес вопрос: имеет ли место такая стабилизация для квантового перевернутого осциллятора? Если да, то в чем проявляется ее квантовая специфика и в чём сходство с классикой?

Квантовый случай

Значимость модели перевернутого квантового осциллятора весьма велика в современной физике в плане изучения различного рода квантовых эффектов, таких как туннельный эффект, суперфлуоресценция («shorttimebehaviorinsuperfluorescence») и т.д. (см. например [1, 2]).

Одномерный «резонансно» возмущаемый перевернутый осциллятор описывается в безразмерных величинах $\left(\xi = x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}, f_0 = \frac{F_0}{\omega\sqrt{\hbar m\omega}}, \tau = \omega t \right)$ следующим NSE:

$$i \frac{\partial \Psi(\xi, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} - \frac{\xi^2}{2} \Psi(\xi, \tau) - f_0 \xi \sin(\tau + \varphi) \Psi(\xi, \tau), \quad (4).$$

Замены $\rho = \xi + f_0 \sin(\tau + \varphi), \Psi(\rho, \tau) = \psi(\rho)g(\rho, \tau)$ и $g(\rho, \tau) = e^{-i\left(E(\rho) + \frac{f_0^2}{4}\right)\tau + i\frac{f_0^2 \sin(2\tau + 2\varphi)}{8}} z(\rho, \tau)$ с

$E(\rho) = -\frac{1}{2\psi_0(\rho)} \frac{d^2 \psi_0(\rho)}{d\rho^2} - \frac{\rho^2}{2}$ (см. ниже), преобразуют его в точно интегрируемое уравнение

$$\begin{aligned}
 & i \frac{\partial z(\rho, \tau)}{\partial \tau} \cdot \frac{1}{z} + \left(\frac{i}{z} \frac{\partial z(\rho, \tau)}{\partial \rho} + \frac{dE(\rho)}{d\rho} \tau \right) f_0 \cos(\tau + \varphi) + i \frac{d\psi(\rho)}{d\rho} \frac{1}{\psi} f_0 \cos(\tau + \varphi) + \frac{1}{z} \frac{\partial z(\rho, \tau)}{\partial \rho} \cdot \left(-i \frac{dE(\rho)}{d\rho} \tau \right) + \\
 & + \frac{1}{2z} \frac{\partial^2 z(\rho, \tau)}{\partial \rho^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{dE(\rho)}{d\rho} \right)^2 \tau^2 - \frac{i}{2} \frac{d^2 E(\rho)}{d\rho^2} \tau + \frac{1}{z} \frac{\partial z(\rho, \tau)}{\partial \rho} \cdot \frac{d\psi}{d\rho} \cdot \frac{1}{\psi} + \left(-i \frac{dE(\rho)}{d\rho} \tau \right) \frac{d\psi}{d\rho} \cdot \frac{1}{\psi} = 0 \quad (5).
 \end{aligned}$$

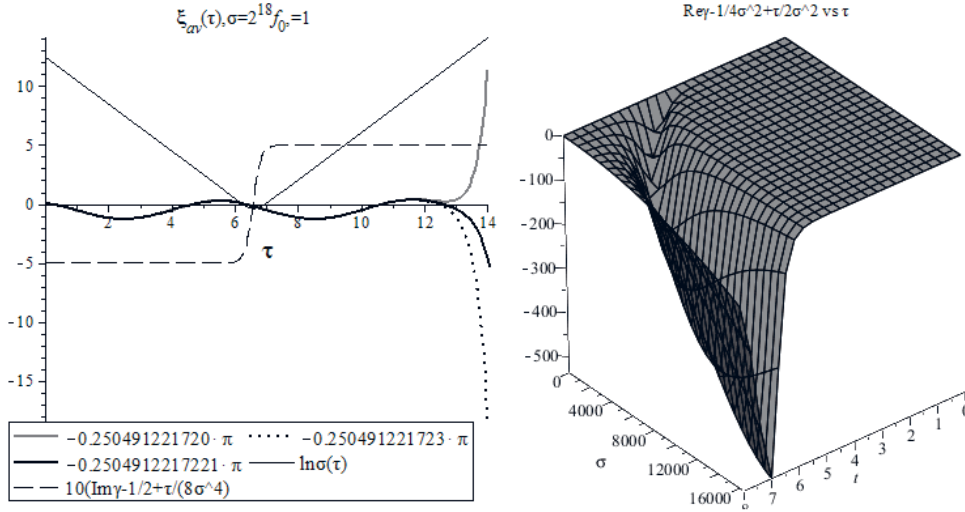


Рис. 1 Бифуркация $\xi_{av}(\tau)$ при $\sigma_0=2^{18}$ и $f_0=1$; зависимости $\ln \sigma(\tau)$ и $\text{Im} \gamma(\tau) - 1/2 + \tau/8\sigma_0^4$.

Рис. 2. 3D график $\text{Re} \gamma(\tau) - 1/4\sigma_0^2 + \tau/2\sigma_0^2 \equiv -1/4\sigma^2(\tau)$

При этом начальная волновая функция (в. ф.) $\Psi(\xi, 0)$ в идеале должна являться собственной для «обезразмеренного» оператора НУ (3): $\hat{c} = \hat{p} + \hat{\xi} = -i \frac{\partial}{\partial \xi} + \xi$. Но, т.к. такая в. ф. — $\psi_{eig} = C \exp(-0.5i\xi^2)$ не отвечает никакому физическому состоянию, то удовлетворить требованиям НУ можно лишь приближенно, взяв в качестве стартовой в. ф. сходящийся гауссовский пучок $\Psi(\xi, 0) = \psi_0(\xi) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{i\xi^2}{2} - \frac{\xi^2}{4\sigma_0^2} \right), \sigma_0 = \sqrt{\xi^2(0)} \gg 1$.

Уравнение (5) интегрируется заменой $z(\rho, \tau) = \exp(\alpha(\tau) + \beta(\tau)\rho + \gamma(\tau)\rho^2)$, , и для старшего коэффициента, определяющего ширину волнового пакета ($\text{Re} \gamma(\tau)$) и перераспределение внутри его плотности вероятности ($\text{Im} \gamma(\tau)$), получается

$$\gamma(\tau) = \frac{1}{4\sigma_0^2} + \frac{i}{2} + \left(\frac{1}{2\sigma_0^2} - \frac{i}{8\sigma_0^4} \right) \tau + \frac{1}{2} \text{tg} \left(2i\tau - \text{arctg} \left(i + \frac{1}{2\sigma_0^2} \right) \right) \quad (6).$$

Формула (6) означает а) сжатие пакета на временах $\tau \leq \tau_0$, тем более сильное, чем больше начальная его полуширина σ_0 (квантовый аналог величины $l/2$) (Рис. 1, 2), и б) дальнейшее расходящееся его поведение. То есть разворот потока плотности вероятности.

Численное моделирование показало, что в широком интервале величин $n = \log_2 \sigma_0 \in [-8, 21]$ для значений фаз, определяемых по формулам $\phi^-(\sigma_0) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4 \cdot (1+a2^n)}$ и $\phi^+(\sigma_0) = \phi^-(\sigma_0) + \pi$, $a = 0.076962$ (0.001744), $adj-R^2 = 0.99965$, имели место: а) удержание центра волнового пакета $\xi_{av}(\tau) = \overline{\xi(\tau)}$ вблизи нулевого положения, б) бифуркация решения NSE (3), проявляющаяся в изменении направления окончательного ухода центра пакета, и в) смещение графика $\xi_{av}(\tau)$ вверх либо вниз (Рис. 1,3) по сравнению с классической кривой(2)—(3).

Наблюдаемая картина позволяет предполагать существование неуловимой из-за точностных ограничений Maple длинной квантовой сепаратрисы. Тем более длинной, чем больше, а не меньше (!) начальный разброс σ_0 , а в ф. $\psi_0(\xi)$ ближе к нефизической $\psi_{eig}(\xi)$. Но парадокс здесь кажущийся, т. к. классическому пределу соответствует не $\sigma_0 \rightarrow 0$, а $\sigma_0 \rightarrow \infty$, о чем свидетельствует также предельные значения фаз стабилизации $\phi^\pm(\sigma_0 \rightarrow \infty)$.

Стоит также отметить, что на аналогичный эффект удержания волнового пакета вблизи максимума потенциала («облака, зацепившегося за вершину») указывает и автор исследования [3], посвященного решению дискретного уравнения Шрёдингера.

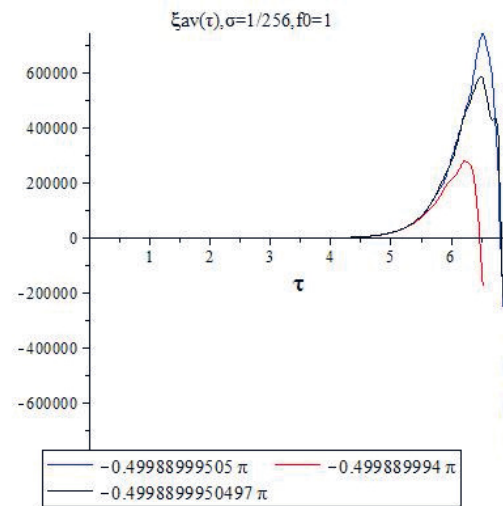
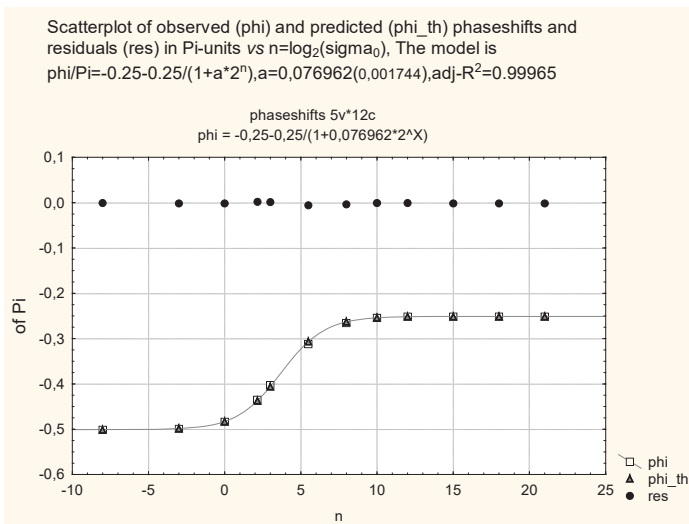


Рис. 3. Перевернутая Ферми-зависимость фазы стабилизации ϕ vs $n = \log_2(\sigma_0)$ (в ед. π).

Рис. 4. Отсутствие бифуркации $\xi_{av}(\tau)$ при малых начальных разбросах ($\sigma_0 = 2^{-8}$).

Литература

1. L.A. Pedrosa, A.L. de Lima, A.M. de M.Carvalho, Gaussian wave packet states of generalized inverted oscillator with time-dependent mass and frequency// Can. J. of Physics, 93:1-5, 2015
2. Y. Nogami, F.M. Toyama, Nonlinear Schrödinger soliton in a time-dependent quadratic potential//Phys. Rev. E, v. 49, № 5, 1994, pp. 4497-4501
3. Б.Н. Захарьев, Дискретная и непрерывная квантовая механика, точно решаемые модели// Физика элементарных частиц и атомного ядра, т. 23, вып. 5, 1992, с. 1387—1468

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 16-08-00997 «Исследование нелинейных многочленных управляемых механических систем методами математического и компьютерного моделирования»

**ФОРМИРОВАНИЕ И ЭВОЛЮЦИЯ СТАЦИОНАРНЫХ БРИЗЕРОВ
(2+1)-МЕРНОЙ O(3) НЕЛИНЕЙНОЙ σ -МОДЕЛИ**

Ф.Ш.Шокиров

Физико-технический институт им. С.У.Умарова
Академии наук Республики Таджикистан, г.Душанбе, Таджикистан

Асимптотически и численно исследован процесс формирования и эволюции стационарных бризерных (бионных) решений (2+1)-мерной O(3) нелинейной σ -модели. Получены выражения для фазовых параметров класса периодических функций. Проведено численное исследование свойств найденных решений.

**FORMATION AND EVOLUTION OF STATIONARY BREATHERS
OF (2+1)-DIMENSIONAL O(3) NONLINEAR σ -MODEL**

Shokirov F.Sh.

S.U.Umarov Physical-Technical Institute,
Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan

Formation and evolution of the breather stationary solutions of (2+1)-dimensional O(3) nonlinear σ -model is studied asymptotically and numerically. Expressions for the phase parameters of the class of periodic functions are obtained. Numerical study of the properties of the found solutions is conducted.

В настоящей работе асимптотическими и численными методами получены устойчивые периодические во времени решения (2+1)-мерной O(3) нелинейной σ -модели (НСМ), которых будем называть – бризерами [1,2]. В наших предыдущих работах [3-5] на основе бризерных решений (2+1)-мерного уравнения sin-Гордон (СГ)

$$u(x, y, t) = -4 \arctg \left(\frac{\lambda(t)}{\sqrt{1-\lambda(t)^2}} \frac{\sin(\varphi(t))}{\operatorname{ch}(\lambda(t)x) \operatorname{ch}(\lambda(t)y)} \right), \quad (1)$$

приведенных в работе [6] численными методами были получены устойчивые бризерные решения O(3) НСМ, обладающие динамикой внутренней степени свободы вектора n -поля в изопространстве S^2 . Напомним, что вэйлеровой параметризации уравнения Лагранжа-Эйлера исследуемой σ -модели имеют следующий вид [3-5]:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \left[\delta - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] \sin \theta \cos \theta = 0, \quad (2)$$

$$2 \cos \theta \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \sin \theta \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right),$$

где $\theta(x, y, t)$ и $\varphi(x, y, t)$ эйлеровы углы, связанные с изоспиновыми параметрами модели (2): $s_1 = \sin \alpha \cos \beta$, $s_2 = \sin \alpha \sin \beta$, $s_3 = \cos \alpha$, $s_i s_i = 1$, $i = 1, 2, 3$; δ – постоянная анизотропии. Отметим также, что уравнения (2) в меридианном сечении изотопического пространства ($\varphi(x, y, t) = \text{const}$) сводятся [3-5] к (2+1)-мерному уравнению СГ вида:

$$2 \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) = \delta \sin 2\theta. \quad (3)$$

Для получения решения в изопространстве сферы S^2 в качестве начального условия было задано возмущённое решение в виде (1), с дополнительной динамикой – вращением вектора A3-поля в изопространстве в виде $\varphi = \varphi_0 + \omega \tau$. В процессе эволюции определённого таким образом начального импульса сформировалось новое бризерное решение (2+1)-мерной O(3) НСМ [3-5].

В отличие от численных результатов, полученных в работах [3-5], в настоящей работе задача была исследована также асимптотическими методами и получен аналитический вид класса брызговых решений (2+1)-мерной $O(3)$ НСМ. В работе [6] задача определения выражения для пробной функции брызгового типа (2+1)-мерного уравнения СГ была исследована в лагранжевом и гамильтоновом подходах. В первом случае, при рассмотрении усредненного лагранжиана (2+1)-мерного уравнения СГ

$$L = \frac{1}{2}(u_t^2 - u_x^2 - u_y^2) - 1 + \cos u \quad (4)$$

относительно быстрой фазы $\varphi(t)$ интегральное уравнение

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L d\varphi \quad (5)$$

было решено приближенными методами, но результаты исследований в указанной работе не были представлены. Исследования пробной функции (1) в работе [6] продолжены на основе гамильтонова подхода, где были получены асимптотически и численно устойчивые осциллирующие решения (брызги) (2+1)-мерного уравнения СГ.

В настоящей работе продолжены исследования, проведенные авторами работы [6] в лагранжевом подходе. Получены точные значения интегралов группы (5) относительно фазовых и пространственных (x, y) переменных и уравнения для параметров $\lambda(t)$ и $\varphi(t)$ пробного решения (1). Усредненная плотность лагранжиана (4) уравнения СГ получена в виде

$$\mathcal{L} = \Xi(\lambda)\lambda_t^2 + \Omega(\lambda)\varphi_t^2 - \Theta(\lambda), \quad (6)$$

где

$$\Xi(\lambda) = \frac{2\psi(\lambda)}{(1-\lambda^2)^{3/2}}, \quad \Omega(\lambda) = \frac{4\lambda^2\psi(\lambda)}{\sqrt{1-\lambda^2}}, \quad \Theta(\lambda) = \frac{48}{\lambda}\psi(\lambda)\text{arth}(\lambda) - 32, \quad \lambda = \lambda(t), \quad \varphi = \varphi(t).$$

Заметим, что результаты исследований, проведенных в работе [6] (см., также ссылки, приведенные в указанной работе) показали, что динамику пробной функции (1) можно описать исследованием свойств двух фазовых параметров $\lambda(t)$ и $\varphi(t)$. В нашем случае, уравнения для указанных параметров определены в следующем виде:

$$\lambda_{tt} + f(\lambda)\lambda_t^2 + g(\lambda) = 0,$$

$$\text{где } f(\lambda) = \frac{3\lambda\Theta(\lambda)}{2(1-\lambda^2)}, \quad g(\lambda) = -\lambda(2-\lambda^2)\varphi_t^2 - \frac{12\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda^2}((1-\lambda^2)\psi(\lambda)\text{arth}(\lambda) - \lambda);$$

$$\varphi_{tt} + \psi(\lambda)\Theta(\lambda)\frac{(2-\lambda^2)}{\lambda(1-\lambda^2)}\lambda_t\varphi_t = 0. \quad (7)$$

Найдены искомые выражения для фазовых параметров $\lambda(t)$ и $\varphi(t)$ в следующем виде:

$$\lambda(t, D) = \pm \text{th} \left[\sqrt{3}D \frac{\pm \sqrt{1 + \sqrt{2}t \frac{D^2 - 288}{3D\psi(\lambda)} - 1}}{\psi(\lambda)D^2 - 288} \right] \quad (8)$$

$$\varphi(t, D) = -\frac{\sqrt{1-\lambda^2} + \lambda \Theta(\lambda) \arcsin(\lambda)}{4\lambda\psi(\lambda)} D, \quad (9)$$

где $D = D(v_{t_0})$ – константа, определенная начальной скоростью (1).

При выводе (9) было учтено, что (6) не зависит от $\varphi(t)$ и, следовательно, существует [6] сохраняющаяся величина $D = \Omega\varphi_t$:

$$\frac{d}{dt} D(v_{t_0}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{4\lambda^2\psi(\lambda)}{\sqrt{1-\lambda^2}} \varphi_t \right) = 0. \quad (10)$$

Заметим, что из (10) также следует уравнение (7) для $\varphi(t)$.

На основе методов теории конечных разностных схем [7], а также разработанных алгоритмов моделирования нелинейных теоретико-полевых моделей [5] были получены численные модели эволюции пробного решения (1) с учетом (8) и (9). Интеграл энергии численных моделей сохранялся с хорошей точностью: $\frac{\Delta E_n}{E_n} \in (10^{-5} - 10^{-4})$. В качестве тестовых моделей получены устойчивые численные бризеры уравнения СГ (3) при $D(v_{t_0}) = \text{sh}(3.69)$ (рис.1). Заметим, что полученные тестовые модели пробного решения (1), которые изначально не являются радиально-симметричными (рис.1а), эволюционируют к радиально-симметричному виду (рис.1б). Последнее свойство также было обнаружено в работе [6]. Для тестовых моделей добавлением [3-5] вращения ($\varphi = \varphi_0 + \omega\tau$, $\omega \neq 0$) вектору АЗ-поля в изотопическом пространстве S^2 , путем решения задачи Коши получены устойчивые бризерные решения (2+1)-мерной $O(3)$ НСМ (2).

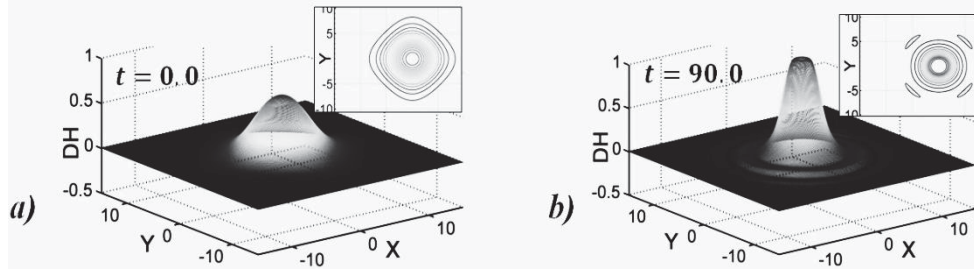


Рис.1. Эволюция бризерных решений (1) уравнения СГ(тестовая модель). Плотность энергии (DH) и проекции контурных линий при $D(v_{t_0}) = \text{sh}(3.69)$: **a)** $t = 0.0$; **b)** $t = 90.0$.

В нашем случае, в качестве пробного решения модели (2) было использовано следующее выражение:

$$\theta = -2 \arctg \left[\frac{\lambda(t) \sin \varphi(t)}{\sqrt{1-\lambda(t)^2} \text{ch}(\lambda(t)x) \text{ch}(\lambda(t)y)} \right], \quad (11)$$

где $\theta = \theta(x, y, t, \lambda(t), \varphi(t))$. Для полевых функций s_i ($i = 1, 2, 3$) имеем

$$s_1 = -2\xi \cos \varphi / (1 + \xi^2), \quad s_2 = -2\xi \sin \varphi / (1 + \xi^2), \quad s_3 = (1 - \xi^2) / (1 + \xi^2), \quad \varphi = \omega\tau, \quad \omega \neq 0.0,$$

где

$$\xi(x, y, t, \lambda(t), \varphi(t)) = \frac{\lambda(t) \sin(\varphi(t))}{\sqrt{1-\lambda(t)^2} \text{ch}(\lambda(t)x) \text{ch}(\lambda(t)y)}.$$

На рис.2ab приведены иллюстрации для плотности энергии (DH) и проекции контурных линий пробной функции (11), для $\omega = 0.5$ при $t = 0.0$ и $t = 90.0$. Проекция изоспиновчисленного бризера (11) на комплексную плоскость при $t = 0.0$ приведена на рис.2с. На рис.2d приведена эволюция плотности энергии DH пробной функции (11) в сечении (x, y_0) , $y_0 = 0.0$ при $t \in [0.0, 90.0]$. На рис.3 приведен спектр значений интеграла энергии (E_n) численных бризеров (11) в зависимости от значения параметров $D(v_{t_0})$ и $\Delta\omega$.

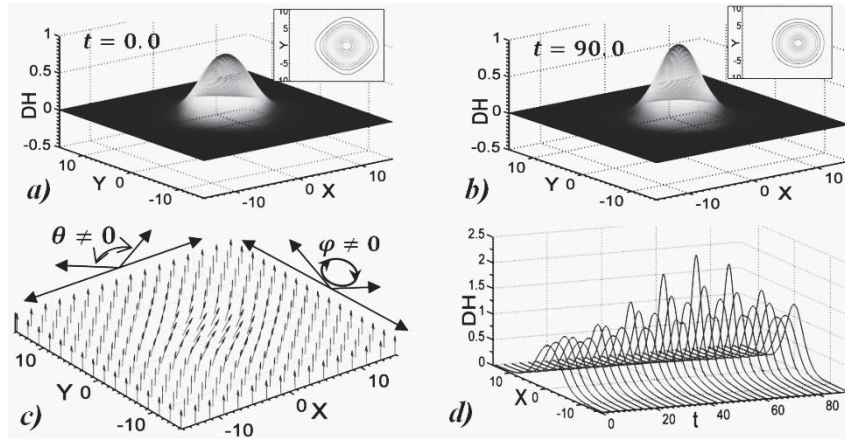


Рис.2. Эволюция бризерных решений (11) $O(3)$ HCM (2) при $\omega = 0.5$. Плотность энергии (DH) и проекции контурных линий при $D(v_{t_0}) = \text{sh}(3.69)$: *a*) $t = 0.0$; *b*) $t = 90.0$; *c*) трехмерная модель изотопических спинов решения (11) при $t = 0.0$; *d*) эволюция DH решения (11) в сечении (x, y_0) , $y_0 = 0.0$, при $t \in [0.0, 90.0]$.

В отличие от численных бризеров уравнения СГ (рис.1) бризерные решения (11) $O(3)$ HCM (2) обладают относительно большей плотностью энергии (DH) (рис.3), которая является следствием наличия вращения ($\varphi = \varphi_0 + \omega t, \omega \neq 0.0$) изотопического спина $S(s_1, s_2, s_3)$ в S^2 .

Свойства полученных численных моделей указывают, что наличие дополнительного вращения изотопических спинов в S^2 приводит к определенной диссипации амплитуды характерной бризерной динамики решений (1) уравнения СГ. При этом наблюдается увеличение значений интеграла (En), а также энергии связи. Аналогичные свойства были обнаружены нами [8] при исследовании (1+1)-мерных бризеров $O(3)$ HCM.

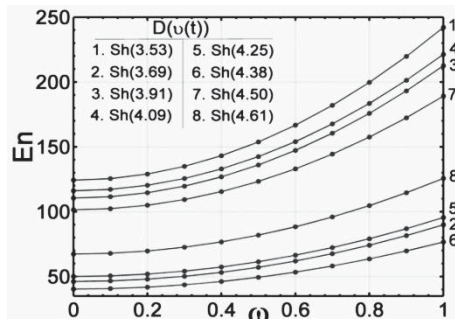


Рис.3. Интеграл энергии (En) бризеров (11) модели (2) в зависимости от значений $D(v_{t_0})$ и $\Delta\omega$.

Таким образом, в настоящей работе получены аналитически и численно бризерные решения (2+1)-мерной $O(3)$ нелинейной σ -модели. Устойчивость полученных решений подтверждена проведенными численными экспериментами при $t \in [0.0, 90.0]$. Бризерные решения $O(3)$ HCM полученные в настоящей работе, а также исследованные нами в одномерном и двумерном случаях в работах [3-5] обладают нетривиальной динамикой внутренней степени свободы, исследование природы которых представляет интерес с теоретической и прикладной точки зрения.

Литература

1. Раджараман Р. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля. Пер. с англ. – М.: Мир, 1985, 416 с.
2. Маханьков В.Г., Рыбаков Ю.П., Санюк В.И. Локлизированные нетопологические структуры: построение решений и проблемы устойчивости. – УФН, 1994, т.164, №2, с.121-148.
3. MuminovKh.Kh., ShokirovF.Sh. Dynamics of two-dimensional breathers in $O(3)$ vectorial nonlinear sigma-model. – The Book of abstracts of the International Conference Mathematical modeling and computational physics, Russia, Dubna, 2013, p.134.

4. Муминов Х.Х., Шокиров Ф.Ш. Новые двумерные бризерные решения $O(3)$ векторной нелинейной сигма-модели. – ДАН РТ, 2011, т.54, №10, с. 825-830.
5. Муминов Х.Х., Шокиров Ф.Ш. Численное моделирование бризеров 1D и 2D $O(3)$ векторной нелинейной сигма-модели. - LI Всеросс. конф. по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники. Тез.докл. – М.: Изд-во РУДН, 2015, с. 94-98.
6. Minzoni A.A., Smyth N.F., Worthy A.L. Evolution of two-dimensional standing and travelling breather solutions for the Sine-Gordon equation. – Phys. D, 2004, v.189 pp. 167-187.
7. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989, 616с.

КВАНТОВАЯ ЗАДАЧА 3-Х ТЕЛ, СВЯЗАННЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Самсоненко Н. В., Ндахайо Ф., Усман Манга А.

1. Российский Университет Дружбы Народов, Москва, Россия

2. Руандийский Университет, Кигали, Руанда

3. Университет имени Абду Мумуни, Ниамей, Нигер

e-mail: nsamson@bk.ru

Сделана попытка корректно учесть все возможные вклады электромагнитного взаимодействия. Показано, что в некоторых случаях (например, при движении всех 3-х тел в одной плоскости с их относительными вращениями и(или) осцилляциями) можно найти точные решения.

QUANTUM PROBLEM OF THREE BODIES, BOUNDED BY ELECTROMAGNETIC INTERACTION

Samsonenko N.V., Ndahayo F., Ousman Manga A.

1. Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia

2. University of Rwanda, Kigali, Rwanda

3. Abdou Moumouni University, Niamey, Niger

e-mail: nsamson@bk.ru

An attempt to take correctly into account all the possible contributions of electromagnetic interaction has been made. It is shown that in some particular cases (e. g., the motion of all the three bodies in one plane with their relative rotations and (or) oscillations) one can find exact analytical or numerical solutions.

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КИНЕМАТИКА ПРОЦЕССОВ РАССЕЙНИЯ И РАСПАДА ЧАСТИЦ С УЧАСТИЕМ БРАДИОНОВ, ТАХИОНОВ И ЛЮКСОНОВ

Самсоненко Н. В., Бадин М.А., Сёмин М. В.
РУДН, Москва, Россия

e-mail: siominmw2006@rambler.ru

В развитие идей, изложенных в работе [1], в предположении выполнения только законов сохранения энергии и импульса, без рассмотрения запретов, вытекающих из законов сохранения зарядов, изучаются процессы сильного, электромагнитного и слабого взаимодействий брадионов ($v < c$), тахионов ($v > c$) и люксонов ($v = c$). Выясняется возможность осуществления двухчастичных реакций брадионов и люксонов с участием тахионов и их дальнейшими трансформациями в другие частицы с большей или меньшей массой. Обсуждается энергетический порог рассмотренных реакций. Рассматриваются случаи наиболее парадоксальные с точки зрения теории относительности.

Литература

[1]. Терлецкий Я. П. «К кинетике реакций рождения и поглощения тахионов». Препринт ОИЯИ (Дубна) P2-11149, 1977.

RELATIVISTIC KINEMATICS OF THE PROCESSES OF PARTICLE SCATTERINGS AND DECAYS INVOLVING BRADIONS, TACHYONS AND LUKSONS

Samsonenko N.V., Badin M. A., Siomin M. V.
PFUR, Moscow, Russia

e-mail: siominmw2006@rambler.ru

In the development of the ideas represented in the work [1], assuming the validity of the energy and momentum conservation laws, without consideration of bans, arising from the charge conservation law, the strong, electromagnetic and weak interaction processes of bradions ($v < c$), tachyons ($v > c$) and luksons ($v = c$) are studied. The possibility of existing of different reactions of bradions and luksons with tachyons and their further transformations into the particles of more or less mass. The energy limit of these reactions is discussed. The most paradoxical cases in terms of the theory of relativity are considered.

Литература

[1]. Terletsky Ya. P. "Kinematics of Reactions of Tachyon Production and Absorption". JINR (Dubna) P2-11149, 1977. (in Russian)

О СИСТЕМАХ ЧАСТИЦ И ЯДЕР, СВЯЗАННЫХ МАГНИТНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Самсоненко Н. В., Ндахайо Ф., Усман Манга А.

1. Российский Университет Дружбы Народов, Москва, Россия

2. Руандийский Университет, Кигали, Руанда

3. Университет имени Абду Мумуни, Ниамей, Нигер

e-mail: nsamson@bk.ru

Показано, что корректный учет магнитного взаимодействия в квантовой теории позволяет объяснить все основные свойства ядерных сил.

ON SYSTEM OF PARTICLES AND NUCLEI BOUNDED BY MAGNETIC INTERACTIONS

Samsonenko N.V., Ndahayo F., Ousman Manga A.

1. Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia

2. University of Rwanda, Kigali, Rwanda

3. Abdou Moumouni University, Niamey, Niger

e-mail: nsamson@bk.ru

It is shown, that the correct account of magnetic interaction in quantum theory gives the possibility to explain all the basic properties of nuclear forces.

АЛГЕБРЫ, КОНТРАВАРИАНТНЫЕ ИЗОМЕТРИЯМ ЗАДАННОЙ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ, ДЛЯ ЗАДАЧ КВАНТОВОЙ ГРАВИТАЦИИ

А. В. Коганов.

Научно-исследовательский институт системных исследований (ФНУ ГНЦ НИИСИ РАН), Нахимовский пр., 36, корп. 1, 117218, Москва, Россия, koganow@niisi.msk.ru

THE CONTRAVARIANT ALGEBRAS BY THE ISOMETRY OF THE ARBITRARY GIVEN QUADRATIC FORM IN THE TASK OF QUANTUM GRAVITATION

A. V. Koganov.

Scientific research institute of system analysis (FSE GSC NIISI RAN / FSE GSC SRISA RAS), Nakhimovsky st., 36, corp. 1, 117218, Moscow, Russia, koganow@niisi.msk.ru

For the definition of the algorithm for building the quantum gravitation graph it is conveniently to use the iterations of the algebraic operations, if those operations commute with the Lorentz transformations. That is the contravariant operations relative the isometrics of the Minkowski metric. In that article we build two the class of algebras, which is contravariant relative the isometry of the arbitrary given quadratic form. We describe also the common covariant transformation of the algebra for arbitrary bijection of the algebra support.

В задачах квантовой гравитации для построения графа, вложенного в линейное пространство, требуется алгоритм, который будет коммутировать с преобразованиями Лоренца в этом пространстве. Одним из способов построения таких алгоритмов является итеративное использование алгебры, элементами которой являются векторы пространства. При этом, алгебра должна быть контравариантной преобразованиям Лоренца, что означает коммутирование операции умножения в алгебре и преобразований координат по Лоренцу. Для произвольной алгебры существует ковариантное преобразование, которое переносит операции алгебры в новые координаты без изменений. Но задача построения контравариантной алгебры оказалась нетривиальной. В разделе 1 показана общая схема ковариантного преобразования алгебры. В разделе 2 строится новая алгебра с параметрической операцией умножения контравариантная изометриям произвольной квадратичной формы. В разделе 3 строится алгебра, элементами которой являются базисные реперы пространства, операция умножения в которой ассоциативная и контравариантная в том же смысле.

1. Ковариантное преобразование алгебры.

Пусть задана произвольная алгебра универсального типа с носителем A и операциями $\varphi_1, \dots, \varphi_k$, имеющих арности $n(1), \dots, n(k)$:

$$[A] = [A | \varphi_1(x_1, \dots, x_{n(1)}), \dots, \varphi_k(x_1, \dots, x_{n(k)})].$$

Пусть имеется произвольная автобиекция носителя $U: A \leftrightarrow A$. Тогда можно ковариантно перенести алгебру на преобразованный носитель $[A]_U = [A | \varphi_1^U(x_1, \dots, x_{n(1)}), \dots, \varphi_k^U(x_1, \dots, x_{n(k)})]$, где

$$\varphi_i^U(x_1, \dots, x_{n(i)}) = U \circ \varphi_i(U^{-1} \circ x_1, \dots, U^{-1} \circ x_{n(i)}). \quad (1.1)$$

Теорема 1.1. Алгебра $[A]_U$ изоморфна алгебре $[A]$, причем изоморфизм устанавливается биекцией U . Доказательство. Для любой операции φ_i выполнено условие изоморфизма:

$$\begin{aligned} \varphi_i^U(U \circ x_1, \dots, U \circ x_{n(i)}) &= U \circ \varphi_i(U^{-1} \circ (U \circ x_1), \dots, U^{-1} \circ (U \circ x_{n(i)})) = \\ &= U \circ \varphi_i(x_1, \dots, x_{n(i)}) \end{aligned} \quad (1.2) \quad \square$$

Применительно к физике, теорема 1.1 означает возможность ковариантного перенесения произвольной алгебры на пространстве в произвольную систему отсчета, или в другую систему измерений, если этот переход осуществляется без потери информации. Ковариантное преобразование алгебры возможно при любом биективном отображении носителя алгебры. В отличие от этого, контравариантное преобразование алгебры требует неизменности алгебры при преобразовании пространства:

$$\varphi_i(U \circ x_1, \dots, U \circ x_{n(i)}) = U \circ \varphi_i(x_1, \dots, x_{n(i)}). \quad (1.3)$$

Такое соотношение возможно не всегда. Причиной такой несимметричности свойств является появление в условии ковариантности дополнительной степени свободы, точнее, биекция носителя меняет не только операнды операций, но и сами операции алгебры.

$$\varphi_i^U(U \circ x_1, \dots, U \circ x_{n(i)}) = U \circ \varphi_i(x_1, \dots, x_{n(i)}). \quad (1.4)$$

2. Изометрическая контравариантная алгебра направлений

Определим алгебру, которая контравариантна относительно изометрий квадратичной формы в векторном пространстве, умножение в которой содержит контравариантный векторный параметр, который определяет направление результата умножения двух основных операндов. Поэтому такую алгебру назовем *алгеброй направлений*. Пусть G матрица квадратичной формы в линейном пространстве \mathbf{R}^n . Определим умножение двух векторов $x, y \in \mathbf{R}^n$ с параметром $z \in \mathbf{R}^n$, который при автоморфизмах алгебры преобразуется контравариантно, формулой:

$$x * y | z = (x^T G y) z \quad (2.1)$$

Линейное преобразование пространства V является изометрией квадратичной формы, если для любых двух векторов x, y выполнено $(Vx)^T G (Vy) = x^T G y$, или

$$V^T G V = G \quad (2.2)$$

Теорема 2.1. Операция умножения (2.1) контравариантна изометриям квадратичной формы. Доказательство. Контравариантность умножения означает

$$V \circ (x * y | z) = (Vx * Vy | Vz) \quad (2.3)$$

$$(Vx * Vy | Vz) = (x^T V^T G Vy) Vz = V(x^T G y) z = V \circ (x * y | z). \quad \square$$

Теорема 2.2. Операция направленного умножения дистрибутивна и линейна по обоим операндам и по параметру. Доказательство. рассмотрим все случаи линейной композиции одного из параметров. Пусть $\alpha \in \mathbf{R}$, $u \in \mathbf{R}^n$.

$$\alpha x * y | z = (\alpha x^T G y) z = \alpha (x^T G y) z = \alpha (x * y | z);$$

$$x * \alpha y | z = (x^T G \alpha y) z = \alpha (x^T G y) z = \alpha (x * y | z);$$

$$x * y | \alpha z = (x^T G y) \alpha z = \alpha (x^T G y) z = \alpha (x * y | z).$$

$$(x + u) * y | z = ((x + u)^T G y) z = (x * y | z) + (u * y | z);$$

$$x * (y + u) | z = (x^T G (y + u)) z = (x * y | z) + (x * u | z);$$

$$x * y | (z + u) = (x^T G y)(z + u) = (x^T G y) z + (x^T G y) u = (x * y | z) + (x * y | u). \quad \square$$

Утверждение 2.1. В общем случае умножение в алгебре направлений не ассоциативно.

Пример.

$$(x * y | z) * u | v = ((x^T G y) z)^T G u v = (y^T G^T x)(z^T G u) v;$$

$$x * (y * u | v) | z = (x^T G (y^T G u) v) z = (y^T G u)(x^T G v) z. \quad \square$$

Если у векторов v, z разные направления, то не совпадают и направления результатов при разной группировке операций. \square

Утверждение 2.2. Имеются ассоциативные цепочки умножений в алгебре направлений.

Пример.

$$x * y * z_1 * \dots * z_k | y = (x^T G y)(y^T G z_1) \dots (y^T G z_k) y,$$

где все умножения производятся по направлению y . Аналогично

$$x * z_1 * \dots * z_k | x = (x^T G z_1) \dots (x^T G z_k) x. \quad \square$$

3. Изометрически контравариантная алгебра реперов.

В основе этой алгебры лежит тот же принцип, который формирует релятивистский закон сложения скоростей. Если квадратичная форма данной алгебры совпадает с метрическим тензором Минковского, то закон умножения базисных реперов совпадает с преобразованием базисов пространства Минковского при сложении скоростей. Важной особенностью этой алгебры является ассоциативность умножения. Автоморфизмы алгебры с точностью до дилатаций совпадают с линейными преобразованиями, сохраняющими значения некоторой заданной квадратичной формы, которые будем называть изометриями. Относительно этих изометрий алгебра контравариантна.

Элементом алгебры является не вектор, а базисный репер векторов в линейном пространстве \mathbf{R}^n . В этом пространстве задана квадратичная форма с матрицей G . Относительно этой матрицы можно задать скалярное произведение векторов.

$$x \cdot y = x^T G y \tag{3.1}$$

Замечание 3.1. Скалярное произведение (3.1) эквивалентно скалярному произведению с симметричной матрицей $Q = (G + G^T) / 2$:

$$x \cdot y = x^T G y = x^T Q y \tag{3.2}$$

Доказательство. Пусть v_1, \dots, v_n базис в пространстве, и $x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$, $y = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$ два вектора.

$$\begin{aligned}
 x \cdot y &= x^T G y = x = (\alpha_1 v_1^T + \dots + \alpha_n v_n^T) G (\beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n) = \\
 &= \sum_{(i,j)} \alpha_i \beta_j v_i^T G v_j = \sum_{(i)} \alpha_i \beta_i v_i^T G v_i + \sum_{i < j} \alpha_i \beta_j (v_i^T G v_j + v_j^T G^T v_i) = \\
 &= \sum_{(i)} \alpha_i \beta_i v_i^T G v_i + \sum_{i < j} \alpha_i \beta_j v_i^T (G + G^T) v_j \quad (a)
 \end{aligned}$$

Для базисных (единичных) векторов очевидно, что $v_i^T G v_i = v_i^T G^T v_i$. Поэтому

$$v_i^T G v_i = \frac{1}{2} v_i^T (G + G^T) v_i \quad (b)$$

Объединяя (a) и (b), и, обозначив $Q = (G + G^T) / 2$, получаем (3.2):

$$x \cdot y = \sum_{(i)} \alpha_i \beta_i v_i^T Q v_i + 2 \sum_{i < j} \alpha_i \beta_j v_i^T Q v_j = x^T Q y. \quad \square$$

Таким образом, без ограничения общности можно считать, что задана симметрическая квадратичная форма. Для комплексного пространства форму можно считать самосопряженной по Эрмиту.

Определение. Изометрией назовем линейное преобразование U , которое сохраняет значение квадратичной формы для любых векторов x, y : $(Ux)^T Q(Uy) = x^T Q y$, откуда следует необходимое и достаточное условие изометрии

$$U^T Q U = Q \quad (3.3)$$

Определение. Алгебра реперов. Элементами алгебры являются опорный базис $B_0 = (b_1, \dots, b_n)$ и базисы, полученные из него в форме $B = \alpha V B_0$, α — число, V — изометрия. Обозначение:

$$X = \alpha(X) V(X) B_0. \quad (3.4)$$

Введем операцию умножения реперов:

$$X \square_{\text{def}} Y = \alpha(X) \alpha(Y) V(X) V(Y) B_0 \quad (3.5)$$

Результат умножения принадлежит алгебре, поскольку $\alpha = \alpha(X) \alpha(Y)$ число, а $V = V(X) V(Y)$ изометрия. \square

Теорема 3.1. Алгебра реперов контравариантная изометриям и дилатациям.

Доказательство. Если векторы пространства преобразуются линейным невырожденным преобразованием $U: v \mapsto Ux$, то линейные операторы на пространстве преобразуются по формуле $A \mapsto UAU^{-1}$ или $U * A = UAU^{-1}$. Автоморфизм алгебры определяется условием:

$$(U * X) \square (U * Y) = U * (X \square Y) \quad (3.6)$$

Пусть $U = \beta W$, где β — число, W — изометрия. Тогда

$$(U * X) \square (U * Y) = \beta W \alpha(X) V(X) W^{-1} \beta^{-1} \beta W \alpha(Y) V(Y) W^{-1} \beta^{-1} B_0 = U * (X \square Y) \quad (3.7)$$

$\alpha(X) \alpha(Y) W V(X) V(Y) W^{-1} = \gamma W V W^{-1}$, где γ — число, W, V и $W V W^{-1}$ — изометрии. Это значит, что выражение (3.7) соответствует определению (3.4) элемента алгебры.

Из определения умножения (3.5) следует ассоциативность операции.

$$(X \square Y) \square Z = \alpha(X) \alpha(Y) V(X) V(Y) \alpha(Z) V(Z) B_0 = X \square (Y \square Z) \quad (3.8)$$

Таким образом, построена ассоциативная алгебра на базисных реперах, контравариантная изометриям заданной квадратичной формы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 16-01-00166а.

Литература

1. A. V. Koganov. Processes and Automorphisms on Inductor Spaces. Russian Journal Mathematic Physics, vol 4, nom 3, 1996, Jon Wiley and Sons, Ins., s 315-339.
2. A. V. Koganov. Faithful Representations of Groups by Automorphisms of Topologies. Russian Journal of Mathematical Physics, vol. 15, No 1, 2008, s. 66-76
3. А. В. Коганов. Класс метрических алгебр, Лоренц и Пуанкаре инвариантность операций // Десятые Юбилейные Курдюмовские чтения «Синергетика в общественных и естественных науках», материалы международной конференции, 22-26.04.2015г., часть 1, Тверь, ТвГУ, с. 94-98, (SBN978-5-7609-1012-7).
4. A. V. Koganov. THE METRIC ALGEBRA CLASS, THE LORENZ AND POINCARÉ INVARIANCE OF OPERATIONS. \ \ LI ВСЕРОССИЙСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПО ПРОБЛЕМАМ ДИНАМИКИ, ФИЗИКИ ЧАСТИЦ, ФИЗИКИ ПЛАЗМЫ И ОПТОЭЛЕКТРОНИКИ, Москва, 12-15 мая 2015 г. ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ, М.:Изд-во РУДН, 2015, с.101-104. (text in Russian).
5. A. V. Koganov. Lorenc-invariant generator of discrete space-time on the basis of a metric algebra. \ \ ICGAC-12, Abstracts of XIIth International Conference on Gravitation, Astrophysics and Cosmology, Dedicated to the centenary of Einstein's General Relativity theory, June 28-july 5, 2015, PFUR, Moscow, Russia, Moscow, RUDN, 2015, s. 49-50 (ISBN 978-5-209-06616-3) (text in Russian)
6. D.P.Rideout and R.D.Sorkin, Evidence for a continuum limit in causal set dynamics, Phys. Rev. D (3) 63 (2001), no. 10, 104011, 15 pp.
7. L.Lov'asz and B.Szegedy, Limits of dense graph sequences, J. Combin. Theory Ser. B 96 (2006), no. 6, 933–957.
8. Krugly, A. L. A sequential growth dynamics for a directed acyclic dyadic graph. Вестник Университета Дружбы Народов. Серия: Математика, Информатика, Физика. - 2014. - No 1. - с. 124-138, arXiv: 1112.1064 [gr-qc].

ЛЕПТОНЫ И БАРИОНЫ В НЕЛИНЕЙНОЙ СПИНОРНОЙ МОДЕЛИ

В.И.Молотков аспирант кафедры теоретической физики и механики
Российского университета дружбы народов,
адрес электронной почты molotvi@gmail.com
научный руководитель Рыбаков Ю.П. проф., д.ф.-м.н.

Введение

В 1954 году английский физик Тони Хилтон Роил Ским (1922 — 1987) предложил использовать топологические солитоны для описания внутренней структуры барионов и легких ядер. В качестве топологического заряда $Q = \text{deg}(S^3 \rightarrow S^2)$ предложено было использовать барионное число B , которое служило генератором гомотопической группы $\pi_3(S^3) = \mathbb{Z}$. Аналогичную идею в 1972 году предложил Фаддеев для описания лептонов: использовать индекс Хопфа Q_H в качестве генератора гомотопической группы $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$.

В работе [1] было предложено объединение двух данных подходов для описания элементарных частиц. Для этого использовалась 8-спинорная модель, позволяющая рассматривать лептоны и барионы как сектора общей модели. Краеугольным камнем данной теории служит 8-спинорное тождество Бриоски :

$$j^\mu j_\mu - \tilde{j}^\mu \tilde{j}_\mu = s^2 + p^2 + \vec{v}^2 + \vec{a}^2.$$

В этом тождестве используются следующие квадратичные спинорные величины:
 $s = \bar{\psi}\psi$, $p = i\bar{\psi}\gamma_5\psi$, $\vec{v} = \bar{\psi}\lambda\psi$, $\vec{a} = i\bar{\psi}\gamma_5\lambda\psi$, $j_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi$, $\tilde{j}_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$,
где $\psi = \text{col}(\varphi, \chi, \xi, \theta)$ — 8 спинор, $\gamma_i = I_2 \otimes \sigma_i \otimes I_2$ — матрицы Дирака в представлении Вейля, $\lambda_i = \sigma_i \otimes I_4$.

Топологическое различие между барионами и лептонами в данной модели будет осуществлять потенциал Хиггса:

$$V(j^\mu j_\mu) = \frac{\sigma^2}{8} (j^\mu j_\mu - \kappa_0^2)^2, \kappa_0 = \text{const}.$$

В этом пространстве были найдены S^2 и S^3 многообразия, которые могут соответствовать лептонному и барионному сектору[2].

Группы S^2 и S^3

Рассмотрим найденные многообразия подробнее [3]. Для описания лептонов была предложена следующая группа симметрии $SU(2)$

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \theta \end{pmatrix}$$

которая сохраняет величину $s^2 + a_1^2 + a_3^2 \neq 0$. В результате получаем гомотопическую группу $\pi_3(S^2)$, которая генерирует топологический заряд типа Хопфа:

$$\begin{aligned} s &= 2(\xi^+\theta + \theta^+\xi) \\ a_1 &= 2(\theta^+\theta - \xi^+\xi) \\ a_3 &= -2i(\theta^+\xi - \xi^+\theta) \\ s^2 + a_1^2 + a_3^2 &= 4(\theta^+\theta + \xi^+\xi)^2 \end{aligned}$$

Аналогично для описания барионов рассмотрим следующую группу симметрии

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^* \\ \theta^* \end{pmatrix}$$

которая образует гомотопическую группу $\pi_3(S^3)$, сохраняющую величину $s^2 + p^2 + a_1^2 + a_2^2 \neq 0$.

$$\begin{aligned} s &= 2(\xi^+\theta + \theta^+\xi) \\ p &= 2i(\xi^+\theta - \theta^+\xi) \\ a_1 &= ((\theta^+)^2 + \theta^2 - (\xi^+)^2 - \xi^2) \\ a_2 &= i((\theta^+)^2 - \theta^2 - (\xi^+)^2 + \xi^2) \\ s^2 + p^2 + a_1^2 + a_2^2 &= 4((\theta^+\theta + \xi^+\xi)^2 - (\xi^+\theta - \theta^+\xi)^2) \end{aligned}$$

Вакуумное состояние

Для объединения двух секторов [3], мы должны найти общее вакуумное состояние, которое сохраняет лишь одну компоненту в барионном и лептонном секторах. В качестве такой компоненты можно использовать скалярную величину s :

$$s = 2(\xi^+\theta + \theta^+\xi)$$

При $\xi = \theta = C, C \in \mathbb{C}$ сохраняется лишь одна компонента в каждом из секторов. В результате, для этих многообразий построено общее вакуумное состояние $\psi_V = \text{col}(iC, iC, C, C), C \in \mathbb{C}$.

Вакуумный 2-спинор C можно найти из условия того, что вакуум обращает лагранжиан тождественно в ноль, а следовательно и потенциал Хиггса:

$$j^\mu j_\mu = \kappa_0^2$$

Откуда следует следующее условие на вакуумный спинор:

$$C^+ C = \pm \frac{\kappa_0}{4}$$

Модель предполагает на бесконечности $|r| \rightarrow \infty$ следующие граничные условия[4]:

$$\psi \rightarrow \psi_V, j_\mu j^\mu \rightarrow \kappa^2, A_\mu \rightarrow 0.$$

Для выполнения, которых требуется, чтобы генератор Γ_e удовлетворял следующим условиям:

$$\Gamma_e \psi_V = 0, \Gamma_e^2 = \Gamma_e.$$

Используя найденное выражение для вакуума, определяем вид для генератора Γ_e :

$$\Gamma_e = I_4 \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, благодаря тому что вакуум константен и $\Gamma_e \psi_V = 0$, лагранжиан тождественно равен нулю в вакуумном состоянии :

$$\mathcal{L}_{V1} \equiv 0.$$

Заключение

Подводя итог, приведём краткую формулировку полученных результатов:

- Исследована полевая модель восьмикомпонентных спиноров.
- В этой модели найдены S^2 и S^3 многообразия, которые могут служить для описания лептонов и барионов. Для них выведено условие на вакуум.
- Найден вид генератора Γ_e .

Автор благодарен научному руководителю профессору Ю. П. Рыбакову за постановку задачи и постоянную помощь при ее решении.

Литература.

1. Rybakov, Y.P. Topological solitons in 8-spinor Mie electrodynamics// (2013) Physics of Atomic Nuclei, 76 (10), pp. 1284-1288.
2. Молотков В.И. Структура нелинейной спинорной модели элементарных частиц. Физическое образование в вузах. Труды конференции-конкурса молодых физиков. Т 20, № 1С, 2014. ISSN 1609-3143.
3. Molotkov V. I. Description of Lepton and Baryon Phases in Skyrme-Faddeev Spinor Model. Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series Mathematics. Information Sciences. Physics, [S.l.], n. 2, p. 73-77, May. 2015. ISSN 2312-9743.
4. Молотков В.И. Рыбаков Ю.П. Описание барионного и лептонного секторов в 8-спинорной модели элементарных частиц. Физическое образование в вузах. Труды конференции-конкурса молодых физиков. Т 21, № 1С, 2015. ISSN 1609-3143.
5. Молотков В.И. Описание барионного и лептонного секторов в 8-спинорной модели. Физическое образование в вузах. Труды конференции-конкурса молодых физиков. Т 22, № 1С, 2016. ISSN 1609-3143.

О ПРОТЯЖЁННОМ ЭЛЕКТРОНЕ ГУСТАВА МИ МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

(государственный университет)

Долгопрудный, Российская Федерация

Блинов Сергей Викторович, студент 4 курса,

Научный руководитель: Булыженков Игорь Эдмундович

Об эквивалентности энергии и массы.

Ставший известным ещё в начале прошлого века, закон эквивалентности энергии и массы $\varepsilon = mc^2$ позволил добывать энергию из атомов, уменьшая их массу, в том числе и для атомной бомбы. Вещество, обладающее массой, обладает также и энергией, называемой энергией покоя. Этот закон также продемонстрировал и обратную связь – область пространства, заполненная электромагнитным полем обязана обладать массой, то есть поле является веществом, хотя и с очень маленькой плотностью, а также обладает импульсом и моментом импульса. Эквивалентность позволила также объединить закон сохранения массы и закон сохранения энергии. Вещество там, где концентрация энергии велика, поле там, где концентрация энергии мала. Таким образом, мы не можем определить чёткую границу между веществом и полем. Переходя на язык плотностей, мы можем утверждать, что плотность энергии пропорциональна массовой плотности.

Идеи Густава Ми.

Данная концепция непустого пространства просматривается в идеях Густава Ми по попытке объединить электродинамику и гравитацию. Основные цели теории Ми заключались в создании единого взгляда на поле и вещество, он пытался обобщить уравнения поля таким образом, чтобы внутри элементарных заряженных частиц кулоновские силы отталкивания уравновешивались другими силами электрического происхождения, а вне частиц это отклонения были незначительны. Ми полагал, что энергия и вещество имеют электромагнитное происхождение, а из свойств поля можно вывести свойства и характеристики зарядов. Он предложил изменить полевые уравнения электродинамики и получить решения соответствующие стабильным частицам без введения частиц как независимых элементов. Уравнения Максвелла будут получаться из этих уравнений в пределе малых полей, то есть вдали от частиц. Ми исходил из принципа наименьшего действия, а лагранжиан выбрал из комбинаций 4-мерного потенциала поля и тензора электромагнитного поля таким образом, чтобы он был лоренц-инвариантен:

$$\Phi = -\frac{1}{16\pi c} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - f\left(\sqrt{A_\mu A^\mu}\right).$$

Данный лагранжиан не удовлетворял калибровочной инвариантности (позднее, Борн и Инфельд исправили этот недостаток). Хотя Ми не добился реализации своих целей в полной мере, ему всё же удалось рассмотреть нелинейные полевые уравнения, а его идеи протяжённого электрона и непустого пространства легли в основу дальнейших, более успешных теорий [1]. В своей же статье [3] я не пытаюсь расширить уравнения Максвелла, я нахожу новые решения полевых уравнений в предположении ненулевой зарядовой плотности.

Возможность существования продольных волн.

Плоские волны являются решением уравнений Максвелла в условиях пустого пространства $\text{div} \vec{E} = 4\pi\rho = 0$. Принятие факта непустого пространства позволяет по-новому взглянуть на систему полевых уравнений и получить продольные электрические волны, у которых $\text{div} \vec{E} = 4\pi\rho \neq 0$ и которые не могут существовать в пустоте.

Стационарное решение для протяжённого электрона.

Предположив пропорциональность энергии электромагнитного поля не только массовой плотности, но и зарядовой $\rho = \text{const} \cdot \vec{E}^2$, можно получить стационарное решение в рамках 1-го уравнения Максвелла ($\text{div} \vec{E} = 4\pi\rho$):

$$\begin{cases} \vec{E}(r) = \frac{\hat{r}q}{r(r+r_0)}, \\ \rho(r) = \frac{\text{div} \vec{E}(r)}{4\pi} = \frac{qr_0}{4\pi r^2(r+r_0)^2}. \end{cases}$$

Произвольная постоянная r_0 , возникающая при решении дифференциального уравнения составляет запредельно малую для наблюдений величину. Электрическое поле при достаточном отдалении от центра электрона переходит в экспериментально хорошо проверенное кулоновское поле. Большая часть заряда сосредоточена в центре, на расстояниях, сравнимых с r_0 . При таком подходе не только проинтегрированная по всему объёму плотность оказывается конечной величиной (равной элементарному заряду), но и интеграл энергии оказывается конечным, в то время как точечное решение не обеспечивает сходимость интеграла энергии электрического поля [2].

Сходящиеся и расходящиеся волны (на фоне стационарного решения).

Продольное, сферически симметричное распределение электрического поля, меняющееся со временем, не приводит к созданию магнитного переменного поля, поэтому 4-е уравнение Максвелла остаётся с нулевой левой частью:

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{v} 4\pi\rho \Rightarrow 0 = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{v} \text{div} \vec{E}.$$

Густав Ми одним из первых понял, что плотность заряда электрона и ее ток должны присутствовать во всех точках полевого пространства. Именно этот факт лежит в основе получения продольных волн с $\text{div} \vec{E} = 4\pi\rho \neq 0$. Будем также считать, что сферические волновые возмущения двигаются со скоростью $\vec{v} = \pm \hat{r}s$ как от центра, так и к центру симметрии электрона. Решением полученного уравнения являются сходящиеся и расходящиеся радиальные волны [3]:

$$\begin{cases} \vec{E}_\omega^{\text{out}}(r, t) = \frac{a_{\text{out}} \hat{r}}{r^2} \cos(\omega t - kr + \varphi_{\text{out}}), \\ \vec{E}_\omega^{\text{in}}(r, t) = -\frac{a_{\text{in}} \hat{r}}{r^2} \cos(\omega t + kr + \varphi_{\text{in}}), \end{cases}$$

где $k = \frac{\omega}{s}$.

Образование стоячей волны.

Для того чтобы композиция таких волн не переносила энергию от центра на периферию или наоборот, необходимо потребовать равенство амплитуд сходящейся и расходящейся волн, а из условия конечности интеграла энергии получившейся стоячей волны следует условие на разность фаз [3].

$$\bar{E}_\omega^{st}(r, t) = \frac{2a\hat{r}}{r^2} \sin(kr) \sin(\omega t).$$

Энергия полученной стоячей волны.

Полная энергия волнового процесса, проходящего внутри электрона, оказывается пропорциональной частоте этого волнового процесса, что согласуется с волновыми представлениями о частицах – энергия волны, представляющей частицу в квантовых опытах, также пропорциональна частоте этой волны [3]:

$$\varepsilon_a = \iiint_{R^3} \langle \bar{E}_\omega^{st}(r, t) \rangle_t d^3r = \frac{\pi a^2 \omega}{s}.$$

В теории скрытой термодинамики одной частицы, движущейся со скоростью v , де Бройль интуитивно разделял ее полную релятивистскую энергию на тепловую составляющую и энергию поступательного движения [4]:

$$\frac{M_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = M_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{M_0 v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \equiv Q + E_t.$$

Можно допустить, что энергия внутренних колебаний как раз и отвечает за тепловую энергию изолированной частицы $Q = \sum_a \varepsilon_a$.

Литература:

1. Christopher Smeenk and Christopher Martin. *Mie's Theories of Matter and Gravitation*. - July 18, 2005
2. Bulyzhenkov I.E. *Int. Jour. of Theor. Phys.* — 2008. — V. 47. P.1261
3. Блинов С.В., Булыженков И.Э. Об удержании продольных волн внутри протяженного электрона. — Труды МФТИ. — 2016. (на данный момент ещё не опубликована).
4. Де Бройль Избранные научные труды. Т.4. Термодинамика изолированной частицы. Реинтерпретация волновой механики. Доклады и выступления. — М.: ПРИНТ-Ателье, 2014.

КОВАРИАНТНОЕ УРАВНЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ В СЛУЧАЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

А.А. Бейлинсон, Н. Гоним

«THE COVARIANT CONTINUITY EQUATION FOR ELECTROMAGNETIC FIELD»

A.A. Beilinson, N. Ghonim

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
e-mail: alal@m9com.ru, d.chrno@mail.ru

Аннотация. Строится единое уравнение непрерывности для электромагнитного поля из уравнений Максвелла в переменных Майорана, ковариантное при преобразованиях Лоренца системы отсчёта, используя естественное разделение состояний фотона противоположными спиральностями, и выясняется, что такие фотоны в результате лоренцевых преобразований оказываются движущимися навстречу друг другу.

Annotation. The continuity equation for the electromagnetic field of Maxwell's equations in Majorana terms is constructed, which is covariant with a Lorentz transformations of reference frame. At this naturally the photon's states with opposite helicity are separated, and it turns out that such photons as a result of the Lorentz transformations are moving towards each other.

Рассмотрим систему уравнений Максвелла в переменных Майорана $\xi = E_t(x) + iH_t(x)$ и $\eta = E_t(x) - iH_t(x)$ для поля вне источников (полагая $c = 1$)

$$\frac{\partial}{\partial t} \xi + (S, \nabla) \xi = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \eta + (-S, \nabla) \eta = 0, \quad (1)$$

где ξ, η – столбцы, а S – оператор спина фотона (см. [1]) и его компоненты представляют собой эрмитовы матрицы

$$S^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad S^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S^3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Переменные Майорана ξ и η будем считать волновыми функциями, описывающие фотон и антифотон соответственно, поскольку при преобразовании Лоренца они преобразуются взаимнообратными операторами. Поэтому мы должны толковать систему (1) как единое матричное уравнение для бивектора, состоящего из волновых функций фотона и антифотона

$$\varphi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad (3)$$

который естественно считать волновой функцией электромагнитного поля.

Так как уравнения для фотона и антифотона независимы, будем рассматривать их поотдельности. Из системы уравнений для ξ легко видеть, возникает уравнение непрерывности некоторой фиксированной инерциальной системы отсчёта:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\xi}\xi) + \text{div}(\bar{\xi}S\xi) \quad (4)$$

где $\bar{\xi}$ — комплексно-сопряжённая строка.

Раскрывая это уравнение и используя структуру спиновых матриц (2), имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}(E^2 + H^2) + 2 \text{div}([\vec{E}, \vec{H}]) = 0, \quad (5)$$

то есть локальный закон сохранения энергии для электромагнитного поля (см. [2]).

Введём теперь новую лоренцову систему отсчёта, полагая, что она движется со скоростью $v = \text{th } \beta$ вдоль оси x изначальной системы отсчёта. Тогда для вектора ξ это преобразование имеет вид (см. [2])

$$\xi' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i\beta & -\sin i\beta \\ 0 & \sin i\beta & \cos i\beta \end{pmatrix} \xi = e^{i\beta A_1} \xi = e^{\beta S^1} \xi, \quad \bar{\xi}' = \bar{\xi} e^{-\beta S^1}. \quad (6)$$

Легко видеть, вращение в плоскости xt 4-пространства (каковым и является рассматриваемое преобразование Лоренца) для вектора ξ эквивалентно вращению на мнимый угол в плоскости yz трёхмерного пространства. Здесь A_1 — матрица, отвечающая бесконечно малому повороту вокруг оси координат x в трёхмерном пространстве (см. [5]).

Легко видеть, уравнение (4) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\xi}'\xi') + \text{div}(\bar{\xi}'S'\xi') = 0, \quad (7)$$

поэтому S' следует понимать как оператор спина фотона в повернутом базисе, отчего уравнение (7) ковариантно исходному (4) при рассмотренном преобразовании Лоренца.

Отметим, что из (4) следует

$$\frac{\partial}{\partial t} \int (E^2 + H^2) dx = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \int (E'^2 + H'^2) dx = 0. \quad (8)$$

Таким образом, в каждой лоренцевой системе имеет место закон сохранения энергии для всего поля ξ , однако $\int (E^2 + H^2) dx \neq \int (E'^2 + H'^2) dx$, и энергия этого поля своя в каждой лоренцевой системе.

Рассмотрим теперь правое уравнение из (1) для поля антифотона η . Легко видеть, что рассматриваемое преобразование Лоренца действует на поле η как обратное (см. [2]):

$$\eta' = e^{-i\beta A_1} \eta = e^{-\beta S^1} \eta, \quad \bar{\eta}' = \bar{\eta} e^{\beta S^1}. \quad (9)$$

При этом, нетрудно видеть, что для поля η возникает уравнение непрерывности, аналогичное (4), ковариантное при преобразованиях Лоренца, отвечающих $-\beta$ (или $-S^1$). Также отметим, что полученные закономерности в отношении энергии поля ξ справедливы и для поля η .

Легко видеть, что всё выше сказанное, очевидно, справедливо и при произвольном лоренцевом преобразовании.

Перейдём к построению единого матричного уравнения для волновой функции (3), отвечающего уравнениям из (1), для чего введём четырёхмерный вектор f^μ ($\mu = 1, 2, 3, 4$), составляющие которого представляют собой матрицы $[6 \times 6]$, имеющие блочную структуру:

$$f^0 = \begin{pmatrix} I & O \\ O & -I \end{pmatrix}, \quad f^j = \begin{pmatrix} S^j & O \\ O & S^j \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где f^j ($j = 1, 2, 3$) составляющие трёхмерного вектора \vec{f} , а O — нулевая матрица.

Тогда системе уравнений (1) отвечает единое матричное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi + f^0(\vec{f}, \nabla) \varphi = 0, \quad (11)$$

Нетрудно видеть, что и для этого уравнения возникает уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\varphi} \varphi) + \text{div}(\bar{\varphi} f^0 \vec{f} \varphi) = 0. \quad (12)$$

Построение операторов преобразования Лоренца при которых уравнение (12) ковариантно, оказывается возможным. Для рассматриваемого преобразования вдоль оси x в силу блочной структуры матриц (10), и исходя из определения волновой функции (3), получим

$$\Lambda_{0j} = e^{\beta f^{0j}}, \quad \Lambda_{0j}^{-1} = e^{-\beta f^{0j}}, \quad (13)$$

$$f'^0 = f^0, \quad f'^j = \Lambda_{0j}^{-1} f^j \Lambda_{0j}, \quad (14)$$

где $f^{0j} = f^0 f^j$ (нет суммирования по j !).

Заметим, что уравнению (12) можно придать вид дивергенции от четырёхмерной величины $\bar{\varphi} f^0 f^\mu \varphi$. А введя наряду с S^j -матрицами единичную матрицу $S^0 = I$, образуя четырёхмерный вектор S^μ , можно и уравнениям из (1) придать подобный вид с четырёхмерными величинами $\bar{\xi} S^\mu \xi$ и $\bar{\eta} S_\mu \eta$ соответственно.

Отметим, что полученные закономерности в отношении энергии поля ξ справедливы и для единого поля φ .

В заключении необходимо подчеркнуть, что в переменных Майорана единое электромагнитное поле распадается на два «независимых» взаимопроникающих поля (фотона и антифотона), отвечающих противоположным спиральностям с производными по направлению $(\pm S, \nabla)$ – см. (1). Таким образом при преобразованиях Лоренца обнаруживается «расслоение» единого поля, поскольку на фотон и антифотон одно и то же преобразование действует так, что они становятся движущимися навстречу друг другу.

Ещё обратим внимание на то, что получающаяся конструкция $\bar{\varphi} f^\mu \varphi$ сходна той, которая получается в случае электрон-позитронного поля (см. [3]). Более того, если умножить уравнение (11) слева на f^0 , то возникает возможность толковать антифотон как частицу, движущуюся попятно по времени, аналогично интерпретации позитрона по Фейнману (см. [4]). При этом также возникает уравнение непрерывности, но для величины $\bar{\varphi} f^\mu \varphi$.

Литература

- [1] Ахиезер, А.И. Квантовая электродинамика [Книга] / А.И. Ахиезер, В.Б. Берестецкий // М.: Наука. — 1981. — С. 80–81.
- [2] Ландау, Л.Д. Курс теоретической физики [Книга]: Учеб. пособ. : Для вузов. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц // М.: физматлит. — 2003. — Т. 2: Теория поля (нерелятивистская теория). - изд. 8-е, стереот. — 536 С.
- [3] Боголюбов, Н.Н. Введение в теорию квантовых полей [Книга] / Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков // М.: Наука — 1984. — изд. 4-е, испр. — 600 С.
- [4] Фейнман, Р.П. Теория позитронов [Статья] / Р.П. Фейнман ; под ред. Д.Д. Иваненко // Новейшее развитие квантовой электродинамики [Книга]: сб. ст. — М.: И. Л. — 1954. — С. 138–160.
- [5] Гельфанд, И.М. «Представление группы вращений и группы Лоренца, их применения» [Книга] / И.М. Гельфанд, Р.А. Минлос, З.Я. Шапиро // Москва: Физматгиз. — 1958. — 368 С.

ПОЗИТОННО-НЕГАТОННАЯ СИММЕТРИЯ МАТЕРИИ

Холодов Л.И., Горячев И.В.

Лаборатория физического вакуума им. Я.П. Терлецкого. LATER UFO, Москва

POSITON-NEGATON SYMMETRY OF MATTER

L.Kholodov, I.Goryachev.

Terletski Laboratory of Physical Vacuum LATER UFO, Moscow

В настоящей работе продолжено развитие гипотезы Якова Петровича Терлецкого о позитонно-негатонной симметрии материи во Вселенной [1].

The article is dedicated to continue developing Terletski theory about positon-negaton symmetry of Universe [1].

Оливер Хевисайд, Поль Дирак и ряд других учёных допускали возможность существования свободных магнитных зарядов. На основе квадриги Терлецкого мы показываем какой может быть полностью симметричной материя по массе и по зарядам.

Мы предположили, что в КТЛ позитонные волновые пакеты $\hat{e}^+ - \hat{e}^-$ образуют электрический диполь $\bar{p}_\ominus = q_e \bar{l}$, который может рассматриваться как конденсатор с единичными зарядами.

Энергия заряженного конденсатора составляет

$$W_p = \frac{q^2}{2C}, \quad (1)$$

где $q = e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$, C – ёмкость, Φ .

Так как электрическая постоянная ϵ_0 имеет размерность удельной емкости $\Phi/\text{м}$, то ёмкость диполя единичных зарядов может быть представлена как $C = \epsilon_0 l$. Откуда энергия \hat{W} диполя позитонов $\hat{e}^+ \rightarrow \leftarrow \hat{e}^-$ может быть выражена как

$$\hat{W} = \frac{\hat{e}^2}{2\epsilon_0 l_\Lambda} \quad (17)$$

В этом случае емкостная энергия диполя КТЛ $\hat{e}^+ \rightarrow \leftarrow \hat{e}^-$ окажется в 2π раз больше энергии для точечных зарядов e^\pm , определяемой по формуле

$$W = pE = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 l} \quad (2)$$

Полагаем, что и сила взаимодействия $\hat{e}^+ \rightarrow \leftarrow \hat{e}^-$ в КТЛ (мы назвали эту силу “вакуумной”) должна определяться, как и энергия, по емкостному характеру как

$$\hat{F}_e = \frac{\hat{e}^2}{2\epsilon_0 l_\Lambda^2}, \quad (3)$$

а не по закону Кулона

$$F_k = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 l^2}. \quad (4)$$

Откуда следует, что

$$F_b = 2\pi F_k. \quad (5)$$

Мы предположили, что в КТЛ негатоны $\check{e}_\pm \rightarrow \leftarrow \check{e}_\mp$ взаимодействуют также по емкостному принципу. Исходя из этого, негатонная энергия $\check{W}_{КТЛ}$ и вакуумная сила \check{F}_e определяются как

$$\check{W} = \frac{\mu_0 (\check{e}c)^2}{2l_\nu}, \quad (6)$$

$$\tilde{F}_e = \frac{\mu_0(\tilde{e}c)^2}{2l_V^2}. \quad (7)$$

При $l_V = l_\Lambda$ и $\tilde{e}^\pm = \tilde{e}_\mp$ в КТЛ для \tilde{W} и \hat{W} будем иметь

$$\hat{W}_{КТЛ} = \frac{\tilde{e}^2}{2\varepsilon_0 l_\Lambda}, \quad (8)$$

$$\tilde{W}_{КТЛ} = \frac{\mu_0(\tilde{e}c)^2}{2l_V}, \quad (9)$$

$$\frac{\hat{W}_{КТЛ}}{\tilde{W}_{КТЛ}} = \frac{\tilde{e}^2}{2\varepsilon_0 l_\Lambda} * \frac{2l_V}{\mu_0(\tilde{e}c)^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0 c^2} = 1. \quad (10)$$

Следовательно

$$\hat{W}_{КТЛ} = \tilde{W}_{КТЛ} \quad (11)$$

Обобщённая модель позитонно-негатонной симметрии материи.

В основе симметрии физического вакуума лежит КТЛ- квадрига Терлецкого лептонная. КТЛ могут быть двух видов:

-КТЛ соответствует электро-магнитному полю: **eg-КТЛ**;

-КТЛ в то же время соответствует магнито-электрическому полю: **ge-КТЛ**.

В **eg-КТЛ** стрела времени положительная: слева направо и по часовой стрелке. В **ge-КТЛ** стрела времени отрицательная: справа налево и против часовой стрелки.

В **eg-КТЛ** электрическому полю соответствуют **е-позитоны** с положительной массой, а магнитному полю - **g-негатоны** с отрицательной массой.

В **ge-КТЛ** магнитному полю соответствуют **g-позитоны** с положительной массой, а электрическому полю - **е-негатоны** с отрицательной массой.

КТЛ обоих видов состоят из двух диполей: **е-диполя** ($\hat{e}^+ - \hat{e}^-, \check{e}_- - \check{e}_+$) и **g-диполя** ($\hat{g}^+ - \hat{g}^-, \check{g}_- - \check{g}_+$). КТЛ могут расщепляться на е- и g- диполи, которые, в свою очередь, могут распадаться на е- и g-частицы.

Подобными свойствами должны обладать и КТБ - барионные квадриги Терлецкого.

Квадриги Терлецкого являются барионно-лептонными с Ре-позитонными и Ре-негатонными частицами. Для обеспечения симметрии позитонно-негатонной материи были введены аналогичные квадриги с Рg-позитонными и Рg- негатонными частицами.

Из обобщенной позитонно-негатонной модели следуют фундаменмальные выводы, которые можно отнести к материи Вселенной в целом:

- Электрический и магнитный заряды существенно отличаются по величине (заряд $e=1,6*10^{-19}$ Кл, заряд $g=4,8*10^{-11}$ Ам), но их взаимодействия и энергии равны.

- Масса частицы с электрическим зарядом равна массе частицы с магнитным зарядом.
- Все массы частиц, положительные и отрицательные, равны между собой.
- e -позитонной частице Терлецкого соответствует e -негатонная частица, которая получается при замене положительных знаков массы, пространственной координаты и времени на отрицательные.

Введенные нами **g -частицы** получаются из **e -частиц** путем замены $e/\sqrt{\epsilon_0}$ -заряда на $\sqrt{\mu_0}g$ -заряд. При преобразовании e -позитона в g -позитон масса остается положительной, а пространственная координата и стрела времени меняют знак с положительного на отрицательный.

При преобразовании **g -позитона** в **g -негатон** масса меняет знак с **положительного** на **отрицательный**, а пространственная координата и стрела времени меняют знак с отрицательного на положительный.

- **Суммарная масса e - и g -позитонов и негатов равняется нулю.**

Позитонно-негатонные частицы материи с положительной стрелой времени соответствуют реально наблюдаемой Вселенной. Этому удовлетворяет eg -КТЛ из **e -позитонного диполя**, который устанавливается по **E -полю**, и **g -негатона диполя**, устанавливаемому по **H -полю**.

- **Положительная масса e -позитоннов является инертной массой материи, а отрицательная масса g -негатонов - её гравитационной массой.**

Взаимосвязь e -позитонов с g -негатонами в физических телах проявляется в динамике при изменении скорости движения тела. Это наглядно демонстрируется на примере взаимодействия двух тел: тела А,двигающегося с переменной скоростью, и тела В, находящегося в покое илидвигающегося с постоянной скоростью.

Когда скорость тела А превысит скорость тела В, положительный импульс тела А по-разному воспримут e -позитоны и g -негатоны в теле В: e -позитоны продолжают движение с положительным ускорением, в то время как в g -негатонах из-за отрицательной массы импульс станет отрицательным и возникнет отрицательная сила инерции, создающая отрицательную реакцию на тело А.

При торможении тела В телом А отрицательный импульс тела А, приложенный к телу В, поменяет в e -позитонах и в g -негатонах векторы импульсов, ускорений и сил инерции на противоположные. В связи с чем e -позитоны станут двигаться в одном направлении с вектором отрицательного импульса без реакции с телом А. В g -негатонах положительно направленная сила инерции станет давить на тело А. Отсюда следует, что реакции на внешние опоры взаимодействующих тел при их динамическом взаимодействии создаются g -негатонной массой тел, которая в современной физике называется гравитационной.

Взаимосвязь e -позитонной и g -негатонной масс в материальном мире удовлетворяет Эйнштейновскому принципу эквивалентности гравитационной и инерционной масс.

Литература

1. Терлецкий Я.П. «Космологические следствия гипотезы рождения из вакуума комплекса частиц положительной и отрицательной массы», В сб. Проблемы теоретической физики. УДН. - М., 1990, с. 3-7.

СООБРАЖЕНИЯ О ФИЗИЧЕСКОМ СМЫСЛЕ ПОСТОЯННОЙ ТОНКОЙ СТРУКТУРЫ

Холодов Л.И., Горячев И.В.

Лаборатория физического вакуума им. Я.П. Терлецкого. LATER UFO, Москва

PHYSICAL SENSE OF THE FINE STRUCTURE CONSTANT

L.Kholodov, I.Goryachev

Terletski Laboratory of Physical Vacuum LATER UFO, Moscow

The aim of this article is determination of the physical sense of the fundamental constant of microworld $\alpha \approx 1/137$ that was introduced in physics by Arnold Sommerfeld in the 20's for description of energy sublevels experimentally discovered in the atomic spectra.

«Понятие фундаментальной постоянной микромира $\alpha \approx 1/137$ была введена в физику в 20-е годы Арнольдом Зоммерфельдом для описания энергетических подуровней, обнаруженных экспериментально в спектрах излучения атомов. С тех пор были выявлены и множество других проявлений того же самого постоянного отношения в разнообразных явлениях, связанных с взаимодействиями элементарных частиц. Ведущие физики того времени постепенно осознали значение этой константы, как в мире элементарных частиц, так и в целом – в устройстве нашего мироздания. С этой точки зрения достаточно сказать только, что все основные свойства и характеристики объектов микромира: размеры электронных орбит в атомах, энергии связи (как между элементарными частицами, так и атомами) и, тем самым, все физические и химические свойства вещества, определяются величиной этой константы. В дальнейшем, используя названную постоянную, удалось разработать и весьма результативную формальную теорию – современную квантовую электродинамику (КЭД), с фантастической точностью описывающую квантовое электромагнитное взаимодействие.

Задача выяснения физического смысла и причинного механизма возникновения этой постоянной, является открытым вопросом в физике с тех пор, как она была обнаружена. На языке теоретиков, решение данной задачи означает: назвать ту исходную концепцию возникновения названной константы, исходя из которой последовательными выкладками можно прийти к экспериментально установленному её значению. Поставленный вопрос приобрел такое значение, прежде всего, потому, что названная постоянная непосредственно связана с проблемой понимания физической сущности элементарных частиц, поскольку она проявляется не отдельно от них, а как их глубинное свойство. Поэтому многие физики в течение долгих лет упорно пытались решить эту величайшую задачу, применяя разные подходы и методы. Но пока все их усилия не увенчались успехом.

При внимательном рассмотрении формулы постоянной структуры

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \quad (\text{в СГС}) \quad \text{и} \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \quad \text{в (СИ)} \quad (1)$$

мы заметили, что она как бы составлена из двух формул (2) и (3), описывающих энергию электрона:

$$E = \frac{e^2}{r} \quad (\text{в СГС}) \quad \text{и} \quad E = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{в (СИ)}, \quad (2)$$

$$E = \hbar\omega = \hbar 2\pi\nu = \hbar 2\pi \frac{c}{\lambda} \quad (\text{в СГС и в СИ}). \quad (3)$$

Радиус r в ф-ле (2) определяется из расширенной формулы энергии электрона (4):

$$\frac{e^2}{r} = mc^2 \quad \text{и} \quad \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = mc^2 \quad (4)$$

$$r = \frac{e^2}{mc^2} \quad \text{и} \quad r = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \quad (5)$$

Длина волны λ в ф-ле (3) определяется также из расширенной формулы энергии электрона (6):

$$\hbar 2\pi \frac{c}{\lambda} = mc^2 \quad (6)$$

$$\lambda = \frac{\hbar 2\pi}{mc} \quad (7)$$

Эта длина волны называется “комптоновской длиной волны” электрона $\lambda_{ко}$. Она определяет волновые свойства электрона.

Поделим ф-лу (5) на ф-лу (7) и перенесем 2π из правой части равенства в левую

$$\frac{2\pi r_k}{\lambda_{ко}} = \frac{e^2}{mc^2} \frac{mc}{\hbar} = \frac{e^2}{\hbar c} = \alpha, \quad (8)$$

$$\frac{2\pi r_k}{\lambda_{ко}} = \frac{2\pi r_k}{2\pi r_{ко}} = \frac{r_k}{r_{ко}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \frac{mc}{\hbar} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \frac{mc}{\hbar} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = \alpha$$

Откуда следует, что постоянная тонкой структуры α определяет отношение корпускулярного классического радиуса r_k электрона к его комптоновскому радиусу $r_{ко}$, а также показывает, насколько корпускулярная волна электрона меньше его комптоновской волны

$$2\pi r_k = \alpha \lambda_{ко} \quad (9)$$

или насколько комптоновская волна электрона больше его корпускулярной волны

$$\frac{2\pi r_k}{\alpha} = \lambda_{ко} \quad (10)$$

Из полученной формулы следует, что постоянная тонкой структуры определяет взаимосвязь корпускулярных свойств электрона с его волновыми свойствами. Это и есть первооснова постоянной тонкой структуры. Так как постоянная тонкой структуры применяется как масштабирующая величина для многих физических процессов, можно предположить, что отношение корпускулярного к волновому проявляется в материи в целом.

Понимание взаимосвязи корпускулярной и волновой характеристик материи позволило нам построить целостную картину симметрии физического вакуума, опираясь в основном на его корпускулярные свойства [1,2]. В том числе обосновать новое промежуточное состояние вакуума в виде «Иерархии качественно различных состояний материи» [3].

Литература

1. Холодов Л.И., Горячев И.В. «Соображения о симметричном физическом вакууме», «Академия Тринитаризма», М., Эл.№77-6567, публ. 20681, 01.06.2015.
2. Холодов Л.И., Горячев И.В. «Позитонно-негатонная симметрия материи». Академия Тринитаризма», М., Эл. №77-6567, публ. 21708, 24.01.2016.
3. Холодов Л.И. «Об иерархии качественно различных уровней материи». Препринт МНТЦ ВЕНТ №45, М., 1993, с.16.

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЕШЕНИЙ СПИНОРНОЙ ЧАСТИЦЫ В ПОЛЕ ШВАРЦШИЛЬДА

Е. М. Овсюк¹, О. В. Веко², Ю. А. Русак³, А. В. Чичурин³, В. М. Редьков⁴

¹Мозырский государственный педагогический университет имени И. П. Шамякина, Мозырь,
Беларусь

²Гимназия, г. Калинковичи, Беларусь

³Брестский государственный университет имени А.А. Пушкина, Брест, Беларусь

⁴Институт физики имени Б. И. Степанова НАН Беларуси, Минск, Беларусь

TO ASYMPTOTICAL ANALYSIS OF THE SPINOR PARTICLE SOLUTIONS IN SCHWARZSCHILD FIELD

E.M. Ovsyuk, O.V. Veko, Yu.A. Rusak, A.V. Chichurin, V.M. Red'kov.

For massless Dirac particle, the general mathematical study of the particle tunneling process through effective potential barrier generated by Schwarzschild black hole background is done. Results significantly differ for two situations: one when the particle falls on the barrier from within and another when the particle falls from outside. The study is based on the use of 8 Frobenius solutions of related 2-nd order differential equations with nonregular singularities of the rank 2. Mathematical structure of the derived asymptotic relations is exact, however analytical expressions for involved convergent powers series are not known. So, further study should be based on numerical summing the series.

Для безмассовых спинорных частиц в поле Шварцшильда развита общая математическая схема анализа прохождения спинорных частиц через эффективный гравитационный барьер Шварцшильда. Результаты зависят от того, откуда частицы падают на гравитационный барьер: извне или изнутри. Анализ основан на использовании 8 решений Фробениуса для уравнения с существенно особыми точками ранга 2. Математическая структура полученных асимптотических формул является точной, однако неизвестны аналитические выражения для сумм входящих в эти формулы степенных рядов. Эта часть исследования вынужденно должна базироваться на численном суммировании рядов.

Разделение переменных. Используем статические координаты Шварцшильда (радиус Шварцшильда выбран за единицу измерения длины):

$$dS^2 = \Phi dt^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 - \frac{1}{\Phi} dr^2, \quad \Phi = 1 - \frac{1}{r}. \quad (1)$$

Уравнение Дирака приводится к виду (пусть $\Psi(x) = r^{-1}\Phi^{-1/4}(r)\psi(x)$)

$$\left[\frac{\gamma^0}{\sqrt{\Phi}} \partial_t + i\sqrt{\Phi} \gamma^3 \partial_r + \frac{1}{r} \left(i\gamma^1 \partial_\theta + \gamma^2 \frac{i\partial_\phi + i\sigma^{12} \cos \theta}{\sin \theta} \right) - M \right] \psi(x) = 0. \quad (2)$$

Решения строятся как собственные функции операторов энергии, квадрата, третьей проекции полного момента и оператора пространственного отражения. В представлении уравнения Дирака (2) этому набору операторов соответствует следующая подстановка для волновой функции (собственные значения четности равны $\Pi = \delta(-1)^{j+1}$, $\delta = \pm 1$)

$$\psi(x)_{\varepsilon j m \delta} = e^{-i\varepsilon t} \begin{vmatrix} f_1(r) D_{-1/2} \\ f_2(r) D_{+1/2} \\ \delta f_2(r) D_{-1/2} \\ \delta f_1(r) D_{+1/2} \end{vmatrix}; \quad (3)$$

применяются функции Вигнера $D_\sigma = D_{-m,\sigma}^j(\phi, \theta, 0)$, $j = 1/2, 3/2, \dots$; $m \in \{-j, \dots, +j\}$. С использованием матриц Дирака в спинорном базисе находим систему уравнений для двух функций $f = (f_1 + f_2)$, $g = -i(f_1 - f_2)$:

$$\left(\sqrt{\Phi} \frac{d}{dr} + \frac{\nu}{r}\right) f + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\Phi}} + \delta M\right) g = 0, \quad \left(\sqrt{\Phi} \frac{d}{dr} - \frac{\nu}{r}\right) g - \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\Phi}} - \delta M\right) f = 0, \quad \nu = j + 1/2. \quad (4)$$

Качественный анализ уравнений, безмассовый случай. Ограничимся более простым безмассовым полем. Здесь имеем уравнения

$$\left(\Phi \frac{d}{dr} + \frac{\nu\sqrt{\Phi}}{r}\right) f + \varepsilon g = 0, \quad \left(\Phi \frac{d}{dr} - \frac{\nu\sqrt{\Phi}}{r}\right) g - \varepsilon f = 0. \quad (4)$$

Из (4) получим уравнение второго порядка для функции f :

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \left(\frac{1}{r-1} - \frac{1}{r}\right) \frac{df}{dr} + \left[\varepsilon^2 + \frac{\nu^2}{r} + \frac{\varepsilon^2}{(r-1)^2} + \frac{-\nu^2 + 2\varepsilon^2}{r-1} - \nu \frac{(2r-3)}{2r^2(r-1)} \sqrt{\frac{r}{r-1}}\right] f = 0; \quad (5)$$

уравнение для $g(r)$ будет отличаться только знаком при параметре ν . Для пояснения смысла возникающей задачи используется прием перехода к r_* -координате:

$$\Phi \frac{d}{dr} = \frac{d}{dr_*}, \quad dr_* = \frac{dr}{1-1/r}, \quad r_* = r + \ln(r-1),$$

$$r_* \in (-\infty, +\infty), \quad r \rightarrow 1, \quad r_* \rightarrow -\infty; \quad r \rightarrow \infty, \quad r_* \rightarrow +\infty. \quad (6)$$

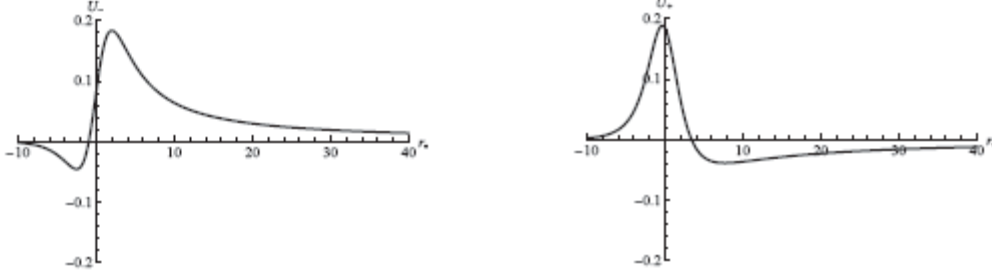
Из (4) следуют уравнения второго порядка для функций f и g (пусть $\varphi = \sqrt{\Phi}/r$):

$$\left(\frac{d^2}{dr_*^2} + \varepsilon^2 + \nu \frac{d\varphi}{dr_*} - \nu^2 \varphi^2\right) f = 0, \quad \left(\frac{d^2}{dr_*^2} + \varepsilon^2 - \nu \frac{d\varphi}{dr_*} - \nu^2 \varphi^2\right) g = 0. \quad (7)$$

Это уравнения шредингеровского типа с потенциальными функциями вида

$$U_\pm = \nu^2 \varphi^2 \pm \nu \frac{d\varphi}{dr_*} = \nu^2 \frac{r-1}{r^3} \pm \nu \frac{1}{2r-1} \frac{\sqrt{r-1}(3-2r)}{2r\sqrt{r}}. \quad (8)$$

Характерное поведение потенциальных кривых $U_\pm(r_*)$ изображено на рис. 1.


 Рис. 1 Потенциальные функции $U_-^{v=1}(r_*)$, $U_+^{v=1}(r_*)$

Т.е. имеем ситуации, в которых возможно туннелирование частиц через барьер.

Анализ дифференциальных уравнений второго порядка. Введем переменную, избавляющую уравнения (5) от квадратного корня:

$$\sqrt{\frac{r-1}{r}} = x, \quad \frac{1}{r} = 1-x^2, \quad r \rightarrow 1, \quad x \rightarrow 0, \quad r \rightarrow +\infty, \quad x \rightarrow \pm 1. \quad (9)$$

Для определенности рассматриваем уравнение для $g(x)$:

$$\frac{d^2 g}{dx^2} + \left(\frac{2}{x+1} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x} \right) \frac{dg}{dx} + \left[-\frac{2v}{x} + \frac{4\varepsilon^2}{x^2} + \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{\varepsilon^2}{(x+1)^3} + \frac{\varepsilon^2/4}{(x+1)^4} + \frac{A'}{(x-1)} + \frac{B'}{(x-1)^2} - \frac{\varepsilon^2}{(x-1)^3} + \frac{\varepsilon^2/4}{(x-1)^4} \right] g = 0,$$

где использованы обозначения

$$A = \frac{-8v^2 + 35\varepsilon^2 + 8v}{8}, \quad B = \frac{-8v^2 + 19\varepsilon^2 - 8v}{8}, \quad A' = \frac{8v^2 - 35\varepsilon^2 + 8v}{8}, \quad B' = \frac{-8v^2 + 19\varepsilon^2 + 8v}{8}.$$

Точки $x = 0, \infty$ – регулярные; точки $x = \pm 1$ – нерегулярные ранга 2. Уравнение для функции f получается заменой $v \Rightarrow -v$; достаточно детально исследовать только уравнение для $g(x)$. В соответствии со структурой сингулярностей ищем решения Фробениуса в виде [1]

$$g(x) = x^\gamma (x-1)^{\alpha'} e^{\frac{\beta'}{x-1}} (x+1)^\alpha e^{\frac{\beta}{x+1}} G(x), \quad (10)$$

где параметры подстановки нужно выбирать из перечисленных ниже возможностей:

$$\gamma = \pm 2i\varepsilon; \quad \beta' = \pm i\varepsilon/2, \quad \alpha' = \pm i\varepsilon; \quad \beta = \pm i\varepsilon/2, \quad \alpha = \mp i\varepsilon. \quad (11)$$

Для функции $G(x)$ получаем уравнение со следующей структурой (явный вид коэффициентов опускаем)

$$G'' + \left(\frac{n}{x} + \frac{n_1}{x-1} + \frac{n_2}{(x-1)^2} + \frac{n_3}{x+1} + \frac{n_4}{(x+1)^2} \right) G' + \left(\frac{m}{x} + \frac{m_1}{x-1} + \frac{m_2}{(x-1)^2} + \frac{m_3}{x+1} + \frac{m_4}{(x+1)^2} \right) G = 0.$$

Наиболее интересны три особые точки:

$$\underline{x \rightarrow 0}, \quad g(x) \sim xy \sim e^{\pm ier^*}, r^* \rightarrow -\infty; \quad (12a)$$

$$\underline{x \rightarrow +1}, \quad g(x) \approx (x-1)^{\alpha'} \exp \frac{\beta'}{(x-1)} \approx e^{\mp i\epsilon \ln r_* \mp i\epsilon r_*} \approx e^{\mp i\epsilon r_*}, \quad r^* \rightarrow +\infty; \quad (12b)$$

$$\underline{x \rightarrow -1}, \quad g(x) \approx (x+1)^\alpha \exp \frac{\beta}{(x+1)} \approx e^{\pm i\epsilon \ln r_* \mp i\epsilon r_*} \approx e^{\mp i\epsilon r_*}, \quad r^* \rightarrow +\infty. \quad (12c)$$

Решения для функции $G(x)$ ищем в виде степенных рядов: $G = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$. Получаемое 6-членное рекуррентное соотношение имеет вид (явный вид 10 коэффициентов $\{A, B, C, D, E; a, b, c, d, e\}$, определяемых квантовыми числами ϵ и ν , опускаем)

$$k = 4, 5, 6, 7, \dots$$

$$\begin{aligned} & A c_{k-4} + [B + (k-3)(k-4) + (k-3)a] c_{k-3} + [C + (k-2)b] c_{k-2} + \\ & + [D + (k-1)c - 2(k-1)(k-2)] c_{k-1} + (E + kd) c_k + (k+1)(k+e) c_{k+1} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Для анализа вопроса о радиусе сходимости ряда применим метод Пуанкаре–Перрона. Для этого соотношение (13) представим в виде

$$\begin{aligned} & A + [B + (k-3)(k-4) + (k-3)a] \frac{c_{k-3}}{c_{k-4}} + [C + (k-2)b] \frac{c_{k-2}}{c_{k-3}} \frac{c_{k-3}}{c_{k-4}} + \\ & + [D + (k-1)c - 2(k-1)(k-2)] \frac{c_{k-1}}{c_{k-2}} \frac{c_{k-2}}{c_{k-3}} \frac{c_{k-3}}{c_{k-4}} + \\ & + (E + kd) \frac{c_k}{c_{k-1}} \frac{c_{k-1}}{c_{k-2}} \frac{c_{k-2}}{c_{k-3}} \frac{c_{k-3}}{c_{k-4}} + (k+1)(k+e) \frac{c_{k+1}}{c_k} \frac{c_k}{c_{k-1}} \frac{c_{k-1}}{c_{k-2}} \frac{c_{k-2}}{c_{k-3}} \frac{c_{k-3}}{c_{k-4}} = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Радиус сходимости степенного ряда – это модуль величины, обратной к

$$r = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{c_{k+1}}{c_k}, \quad R_{conv} = \frac{1}{|r|}. \quad (15)$$

Чтобы найти алгебраическое уравнение для величины r , соотношение (14) умножаем на k^{-2} и устремляем $k \rightarrow \infty$. В результате получим

$$r - 2r^3 + r^5 = 0 \Rightarrow r(r^2 - 1)^2 = 0, r = 0, +1, -1. \quad (16)$$

Таким образом, гарантированный (минимальный) радиус сходимости степенного ряда равен $R_{conv} = 1$, что покрывает всю физическую область изменения координаты $x \in (0, +1)$.

Общая схема анализа эффекта туннелирования. Исследованные выше возможности позволяют предложить 8 решений (см. (11); учитываем сходимость всех степенных рядов):

$$\begin{aligned}
 g_1(x) &= e^{+2i\varepsilon \ln x} e^{+i\varepsilon \ln(x-1)} e^{\frac{+i\varepsilon/2}{x-1}} e^{-i\varepsilon \ln(x+1)} e^{\frac{+i\varepsilon/2}{x+1}} (R_1(x) + iI_1(x)), \\
 g_2(x) &= e^{-2i\varepsilon \ln x} e^{-i\varepsilon \ln(x-1)} e^{\frac{-i\varepsilon/2}{x-1}} e^{+i\varepsilon \ln(x+1)} e^{\frac{-i\varepsilon/2}{x+1}} (R_1(x) - iI_1(x)); \\
 g_3(x) &= e^{+2i\varepsilon \ln x} e^{-i\varepsilon \ln(x-1)} e^{\frac{-i\varepsilon/2}{x-1}} e^{+i\varepsilon \ln(x+1)} e^{\frac{-i\varepsilon/2}{x+1}} (R_3(x) + iI_3(x)), \\
 g_4(x) &= e^{-2i\varepsilon \ln x} e^{+i\varepsilon \ln(x-1)} e^{\frac{+i\varepsilon/2}{x-1}} e^{-i\varepsilon \ln(x+1)} e^{\frac{+i\varepsilon/2}{x+1}} (R_3(x) - iI_3(x)); \\
 g_5(x) &= e^{+2i\varepsilon \ln x} e^{+i\varepsilon \ln(x-1)} e^{\frac{+i\varepsilon/2}{x-1}} e^{+i\varepsilon \ln(x+1)} e^{\frac{-i\varepsilon/2}{x+1}} (R_5(x) + iI_5(x)), \\
 g_6(x) &= e^{-2i\varepsilon \ln x} e^{-i\varepsilon \ln(x-1)} e^{\frac{-i\varepsilon/2}{x-1}} e^{-i\varepsilon \ln(x+1)} e^{\frac{+i\varepsilon/2}{x+1}} (R_5(x) - iI_5(x)); \\
 g_7(x) &= e^{+2i\varepsilon \ln x} e^{-i\varepsilon \ln(x-1)} e^{\frac{-i\varepsilon/2}{x-1}} e^{-i\varepsilon \ln(x+1)} e^{\frac{+i\varepsilon/2}{x+1}} (R_7(x) + iI_7(x)), \\
 g_8(x) &= e^{-2i\varepsilon \ln x} e^{+i\varepsilon \ln(x-1)} e^{\frac{+i\varepsilon/2}{x-1}} e^{+i\varepsilon \ln(x+1)} e^{\frac{-i\varepsilon/2}{x+1}} (R_7(x) - iI_7(x)). \tag{17}
 \end{aligned}$$

Отметим, что множитель $e^{+i\varepsilon \ln(x-1)}$, $x \in (0,1)$ дает многозначную функцию

$$e^{\pm i\varepsilon \ln(x-1)} = e^{\pm i\varepsilon [\ln|x-1| + i(\pi + 2\pi n)]} = e^{\mp \varepsilon(\pi + 2\pi n)} e^{\pm i\varepsilon \ln|x-1|}.$$

Использование той или иной ветви многозначной функции влияет только на выбор вещественного множителя перед решением; для определенности пусть $n=0$. Формально соотношения (17) – это точные и везде определенные решения, поскольку ряды сходятся во всей физической области изменения переменной $x \in (0, +1)$. Отметим, что перечисления решения разбиты на пары комплексно сопряженных.

Применяя численный анализ легко убедиться, что вещественные и мнимые части функций $G(x)$, определяемых степенными рядами, ведут себя как монотонно растущие функции с явно выраженным асимптотическим стремлением к постоянным значениям, зависящим от квантовых чисел ε , $\nu = j + 1/2$.

Находим асимптотики решений g_1, g_3 и g_2, g_4 (учтена сходимость рядов):

$$x \rightarrow 0 (r_* \rightarrow -\infty), \quad g_1 = e^{-\varepsilon\pi} e^{+i\varepsilon r_*}, \quad g_2 = e^{+\varepsilon\pi} e^{-i\varepsilon r_*}, \quad g_3 = e^{+\varepsilon\pi} e^{+i\varepsilon r_*}, \quad g_4 = e^{-\varepsilon\pi} e^{-i\varepsilon r_*}; \tag{18a}$$

$$x \rightarrow +1 (r_* \rightarrow +\infty),$$

$$\begin{aligned}
 g_1 &= [e^{-i\varepsilon \ln 2} e^{+i\varepsilon/4} (R_1 + iI_1)] e^{-i\varepsilon r_*}, \quad g_2 = [e^{+i\varepsilon \ln 2} e^{-i\varepsilon/4} (R_1 - iI_1)] e^{+i\varepsilon r_*}, \\
 g_3 &= [e^{+i\varepsilon \ln 2} e^{-i\varepsilon/4} (R_3 + iI_3)] e^{+i\varepsilon r_*}, \quad g_4 = [e^{-i\varepsilon \ln 2} e^{+i\varepsilon/4} (R_3 - iI_3)] e^{-i\varepsilon r_*}. \tag{18b}
 \end{aligned}$$

Образует линейные комбинации из функций:

$$H_+ = \frac{g_3 + g_1}{2}, \quad H_- = \frac{g_3 - g_1}{2}; \quad F_+ = \frac{g_2 + g_4}{2}, \quad F_- = \frac{g_2 - g_4}{2}; \tag{19}$$

их асимптотики слева задаются равенствами

$$\begin{aligned}
 r_* \rightarrow -\infty, \quad H_+ &= \cosh \varepsilon \pi e^{+i\varepsilon r_*}, \quad H_- = \sinh \varepsilon \pi e^{+i\varepsilon r_*}; \\
 r_* \rightarrow -\infty, \quad F_+ &= \cosh \varepsilon \pi e^{-i\varepsilon r_*}, \quad F_- = \sinh \varepsilon \pi e^{-i\varepsilon r_*};
 \end{aligned} \tag{20a}$$

асимптотики справа ($r_* \rightarrow +\infty$) – соотношениями:

$$\begin{aligned}
 H_{\pm} &= \frac{1}{2}[e^{+i\varepsilon \ln 2} e^{-i\varepsilon/4} (R_3 + iI_3)] e^{+i\varepsilon r_*} \pm \frac{1}{2}[e^{-i\varepsilon \ln 2} e^{+i\varepsilon/4} (R_1 + iI_1)] e^{-i\varepsilon r_*}, \\
 F_{\pm} &= \frac{1}{2}[e^{+i\varepsilon \ln 2} e^{-i\varepsilon/4} (R_1 - iI_1)] e^{+i\varepsilon r_*} \pm \frac{1}{2}[e^{-i\varepsilon \ln 2} e^{+i\varepsilon/4} (R_3 - iI_3)] e^{-i\varepsilon r_*}.
 \end{aligned} \tag{20b}$$

Таким образом, имеем две пары решений с асимптотиками слева \rightarrow справа следующего вида:

$$H_+, \cosh \varepsilon \pi e^{+i\varepsilon r_*} \rightarrow Ae^{+i\varepsilon r_*} + Be^{-i\varepsilon r_*}, \quad H_-, \sinh \varepsilon \pi e^{+i\varepsilon r_*} \rightarrow Ae^{+i\varepsilon r_*} - Be^{-i\varepsilon r_*}; \tag{21a}$$

$$F_+, \cosh \varepsilon \pi e^{-i\varepsilon r_*} \rightarrow A^* e^{-i\varepsilon r_*} + B^* e^{+i\varepsilon r_*}, \quad F_-, \sinh \varepsilon \pi e^{-i\varepsilon r_*} \rightarrow A^* e^{-i\varepsilon r_*} - B^* e^{+i\varepsilon r_*}. \tag{21b}$$

Пара (21b) более проста для интерпретации: ее можно сопоставить ситуации, когда частица падает справа на барьер Шварцшильда, частично отражается и частично проходит сквозь него. Два варианта соответствуют разным сдвигам фаз. Если комбинировать функции в пределах пар $(H_+ - H_-)$ и $(F_+ - F_-)$, то можно получить решения, нужные для описания явления туннелирования майорановских частиц, падающих на барьер извне.

Аналогично можно исследовать ситуацию, когда частица падает на барьер Шварцшильда слева, при этом нужно комбинировать функции g_5, \dots, g_8 . Имеем асимптотики:

$$\begin{aligned}
 x \rightarrow +1, \quad g_5 &= e^{+i\varepsilon/2} e^{-i\varepsilon/4} (R_5 + iI_5) e^{-i\varepsilon r_*}, \quad g_8 = e^{+i\varepsilon/2} e^{-i\varepsilon/4} (R_7 - iI_7) e^{-i\varepsilon r_*}; \\
 x \rightarrow 0, \quad g_5 &= e^{-\varepsilon \pi} e^{i\varepsilon r_*}, \quad g_8 = e^{+\varepsilon \pi} e^{-i\varepsilon r_*};
 \end{aligned} \tag{22a}$$

$$\begin{aligned}
 x \rightarrow +1, \quad g_6 &= e^{-i\varepsilon/2} e^{+i\varepsilon/4} (R_5 - iI_5) e^{+i\varepsilon r_*}, \quad g_7 = e^{-i\varepsilon/2} e^{+i\varepsilon/4} (R_7 + iI_7) e^{+i\varepsilon r_*}; \\
 x \rightarrow 0, \quad g_6 &= e^{+\varepsilon \pi} e^{-i\varepsilon r_*}, \quad g_7 = e^{-\varepsilon \pi} e^{+i\varepsilon r_*}.
 \end{aligned} \tag{22b}$$

Введем функции $\bar{H}_{\pm} = g_5 \pm g_8$, $\bar{F}_{\pm} = g_6 \pm g_7$; они имеют асимптотики слева \rightarrow справа

$$\bar{H}_{\pm}, \quad e^{-\varepsilon \pi} e^{+i\varepsilon r_*} \pm e^{+\varepsilon \pi} e^{-i\varepsilon r_*} \rightarrow e^{+i\varepsilon/2} e^{-i\varepsilon/4} [(R_5 + iI_5) \pm (R_7 - iI_7)] e^{-i\varepsilon r_*}. \tag{23a}$$

$$\bar{F}_{\pm}, \quad e^{-\varepsilon \pi} e^{+i\varepsilon r_*} \pm e^{+\varepsilon \pi} e^{-i\varepsilon r_*} \rightarrow e^{+i\varepsilon/2} e^{-i\varepsilon/4} [(R_5 - iI_5) \pm (R_7 + iI_7)] e^{+i\varepsilon r_*}. \tag{23b}$$

Функции (23b) можно сопоставить ситуации, когда частица падает слева на барьер Шварцшильда, частично отражается и частично проходит сквозь него:

$$\bar{A} e^{+i\varepsilon r_*} \pm \bar{B} e^{-i\varepsilon r_*} \rightarrow \bar{C}_{\pm} e^{+i\varepsilon r_*}; \tag{24}$$

Литература

1. Slavyanov S.Yu., Lay W. Special functions. A unified theory based on singularities. Oxford, 2000.

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 1 И АНОМАЛЬНЫМ МАГНИТНЫМ МОМЕНТОМ В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В.В. Кисель¹, Е.М. Овсиюк², Я.А. Войнова³, О.В. Веко⁴, В.М. Редьков⁵

¹Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники,
Минск, Беларусь

²Мозырский государственный педагогический университет имени И. П. Шамякина,
Мозырь, Беларусь, e-mail: e.ovsiyuk@mail.ru

³Кочищанская средняя школа Ельского района, Беларусь, e-mail: voinyuschka@mail.ru

⁴Гимназия г. Калинковичи, Беларусь, e-mail: vekoolga@mail.ru

⁵Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси,
Минск, Беларусь, e-mail: v.redkov@dragon.bas-net.by

Обобщенное уравнение для векторной частицы с аномальным магнитным моментом задается в виде [1,2]

$$\left(\beta_{\mu} D_{\mu} + \frac{ie}{M} \lambda_3 \lambda_3^* F_{[\mu\nu]} P J_{[\mu\nu]} + M \right) \Psi = 0, \quad \Psi = \begin{vmatrix} \Psi \\ \Psi_{[\mu\nu]} \end{vmatrix} \quad (1)$$

используются 10-мерные матрицы Петье–Даффина–Кеммера; $J_{[\mu\nu]} = \beta_{\mu} \beta_{\nu} - \beta_{\nu} \beta_{\mu}$; P – проективный оператор, выделяющий из Ψ векторную составляющую Ψ_{μ} ($P + \bar{P} = I$); $D_{\mu} = \partial_{\mu} - ieA_{\mu}$. В тензорной форме уравнения имеют вид (воспользуется метрика с мнимой единицей в $x_4 = ict$)

$$D_{\mu} \Psi_{\nu} - D_{\nu} \Psi_{\mu} + M \Psi_{[\mu\nu]} = 0, \quad D_{\nu} \Psi_{[\mu\nu]} + 2 \frac{ie}{M} \lambda_3 \lambda_3^* F_{[\mu\nu]} \Psi_{\nu} + M \Psi_{\mu} = 0. \quad (2)$$

Вводим матрицу $Y = iJ_{[12]}$; она Y удовлетворяет уравнению $Y^3 = Y$, что позволяет ввести три проективных оператора и разбить волновую функцию Ψ в сумму трех составляющих:

$$P_0 = 1 - Y^2, \quad \Psi_0 = P_0 \Psi, \quad P_{\pm} = \frac{1}{2} Y(Y \pm 1), \quad \Psi_{\pm} = P_{\pm} \Psi.$$

Преобразуем уравнение (1) к цилиндрическим координатам (учитываем однородное магнитное поле); с применением подстановки

$$\Psi_0 = e^{ip_4 x_4} e^{ip_3 x_3} e^{im\phi} f_0(r), \quad \Psi_{\pm} = e^{ip_4 x_4} e^{ip_3 x_3} e^{i(m \pm 1)\phi} f_{\pm}(r) \quad (3)$$

находим радиальные уравнения

$$\begin{aligned} (ip + M) f_0 + \beta_+ a_{m+1} f_+ - \beta_- b_{m-1} f_- &= 0, \\ (ip + \Gamma P + M) f_+ - \beta_- b_m f_0 &= 0, \quad (ip - \Gamma P + M) f_- + \beta_+ a_m f_0 = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

В (4) вводятся сокращающие запись формул обозначения:

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(+ \frac{d}{dr} + \frac{m - B_0 r^2}{r} \right), \quad b_m = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(- \frac{d}{dr} + \frac{m - B_0 r^2}{r} \right), \\ eB/2 &= B_0, \quad \lambda_3 \lambda_3^* (2eB/M) = \Gamma, \quad ip_3 \beta_3 + ip_4 \beta_4 = ip. \end{aligned} \quad (5)$$

После необходимых вычислений с использованием алгебры матриц Петье–Даффина–Кеммера систему радиальных уравнений можно преобразовать к более простой форме

$$(ip + M) f_0 + \beta_+ a_{m+1} f_+ - \beta_- b_{m-1} f_- = 0,$$

$$(A+M)f_+ - \beta'_- b_m f_0 = 0, \quad (C+M)f_- + \beta'_+ a_m f_0 = 0, \quad (6)$$

где использованы обозначения

$$\frac{M+\Gamma\bar{P}}{M+\Gamma} ip = A, \quad \frac{M+\Gamma\bar{P}}{M+\Gamma} \beta_- = \beta'_-, \quad \frac{(M-\Gamma\bar{P})}{M-\Gamma} ip = C, \quad \frac{M-\Gamma\bar{P}}{M-\Gamma} \beta_+ = \beta'_+. \quad (7)$$

Введем в рассмотрение операторы со свойствами (используем обозначение $p^2 = p_3^2 + p_4^2$)

$$\overline{(ip+M)}(ip+M) = p^2 + M^2, \quad \overline{(A+M)}(A+M) = p^2 + M^2, \quad \overline{(C+M)}(C+M) = p^2 + M^2; \quad (8)$$

фактически с точностью до нормировки эти формулы определяют обратные матрицы. Тогда систему уравнений можно переписать так

$$(ip+M)(p^2+M^2)f_0 + \beta_+ a_{m+1}(p^2+M^2)f_+ - \beta_- b_{m-1}(p^2+M^2)f_- = 0, \quad (9a)$$

$$(p^2+M^2)f_+ - \overline{(A+M)}\beta'_- b_m f_0 = 0, \quad (p^2+M^2)f_- + \overline{(C+M)}\beta'_+ a_m f_0 = 0. \quad (9b)$$

Уравнение (9a) с использованием уравнений (9b) преобразуется к виду уравнения относительно компоненты f_0 :

$$(ip+M)(p^2+M^2)f_0 + \beta_+ a_{m+1} \overline{(A+M)}\beta'_- b_m f_0 + \beta_- b_{m-1} \overline{(C+M)}\beta'_+ a_m f_0 = 0. \quad (10)$$

Фактически уравнения (10)-(9b) означают, что достаточно решить уравнение (10) относительно f_0 ; две другие компоненты f_+, f_- вычисляются по f_0 с помощью уравнений из (9b). Нужно знать явный вид введенных выше обратных операторов. Для решения этой задачи достаточно установить вид минимальных полиномов [3] соответствующих матриц. После выполнения необходимых (и громоздких) вычислений устанавливаем, что требуемые (обратные) операторы должны быть квадратичными по соответствующим матрицам; они задаются соотношениями:

$$\begin{aligned} \overline{(M+ip)} &= \frac{1}{M} \left[(ip)^2 - M(ip) + (p^2 + M^2) \right], \\ \overline{(A+M)} &= \frac{p^2 + M^2}{M} \left[1 - \frac{M+\Gamma}{p^2 + M^2 + M\Gamma} A + \frac{M+\Gamma}{M(p^2 + M^2 + M\Gamma)} A^2 \right], \\ \overline{(C+M)} &= \frac{p^2 + M^2}{M} \left[1 - \frac{M-\Gamma}{p^2 + M^2 - M\Gamma} C + \frac{M-\Gamma}{M(p^2 + M^2 - M\Gamma)} C^2 \right]. \end{aligned}$$

где

$$A = \frac{M+\Gamma\bar{P}}{M+\Gamma} ip, \quad A^2 = -\frac{Mp^2}{M+\Gamma}, \quad C = \frac{M-\Gamma\bar{P}}{M-\Gamma} ip, \quad C^2 = -\frac{Mp^2}{M-\Gamma}.$$

С учетом этого уравнение для компоненты $f_0(r)$ можно привести к виду

$$\begin{aligned} & \left\{ (p^2 + M^2) + a_{m+1} b_m \frac{1}{M^2(p^2 + M^2 + M\Gamma)} \frac{1}{M+\Gamma} \times \right. \\ & \times [(p^2 + M^2 + M\Gamma)(ip)^2 \beta_+ - M(p^2 + M^2 + M\Gamma)ip\beta_+ + (p^2 + M^2)(p^2 + M^2 + M\Gamma)\beta_+ - \\ & \quad \left. - (p^2 + M^2)\beta_+ ip(M+\Gamma P) + (p^2 + M^2)\beta_+ (ip)^2] (M+\Gamma\bar{P})\beta_- + \right. \\ & \quad \left. + b_{m-1} a_m \frac{1}{M^2(p^2 + M^2 - M\Gamma)} \frac{1}{M-\Gamma} \times \right. \\ & \times [(p^2 + M^2 - M\Gamma)(ip)^2 \beta_- - M(p^2 + M^2 - M\Gamma)ip\beta_- + (p^2 + M^2)(p^2 + M^2 - M\Gamma)\beta_- - \\ & \quad \left. - (p^2 + M^2)\beta_- ip(M-\Gamma P) + (p^2 + M^2)\beta_- (ip)^2] (M-\Gamma\bar{P})\beta_+ \right\} f_0 = 0. \quad (11) \end{aligned}$$

Дальше предстоит учесть явный вид составляющих в компоненте f_0 (она зависит от функций f_3, f_4, f_{12}, f_{34}) и явный вид всех матриц. После необходимых вычислений и последующих преобразований уравнений можно привести задачу к следующему набору уравнений:

$$f_{34} = -\frac{i}{M}(p_4 f_3 - p_3 f_4), \quad (12a)$$

$$[\hat{a}_{m+1}\hat{b}_m + \hat{b}_{m-1}\hat{a}_m + p^2 + M^2](p_4 f_3 - p_3 f_4) = 0, \quad (12b)$$

$$[\hat{a}_{m+1}\hat{b}_m + \hat{b}_{m-1}\hat{a}_m + p^2 + M^2](p_3 f_3 + p_4 f_4) = p^2 \left(\frac{2B_0}{M} - \Gamma \right) f_{12}, \quad (12c)$$

$$[\hat{a}_{m+1}\hat{b}_m + \hat{b}_{m-1}\hat{a}_m + p^2 + M^2]f_{12} = \Gamma \left(-\frac{2B_0}{M} + \Gamma \right) f_{12} + \left(-\frac{2B_0}{M} + \Gamma \right) (p_3 f_3 + p_4 f_4). \quad (12d)$$

Анализ уравнений (12a) и (12b) очевиден. Система (12c)–(12d) решается через диагонализацию матрицы смешивания. Для этого введем функции

$$\Phi_1 = (p_3 f_3 + p_4 f_4) + \lambda_1 f_{12}, \quad \Phi_2 = (p_3 f_3 + p_4 f_4) + \lambda_2 f_{12}, \quad (13)$$

где λ_1, λ_2 – решения уравнения $\lambda^2 - \lambda\Gamma + p^2 = 0$:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left(\Gamma + \sqrt{\Gamma^2 - 4p^2} \right), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} \left(\Gamma - \sqrt{\Gamma^2 - 4p^2} \right). \quad (14)$$

Для функций Φ_1, Φ_2 получаем отдельные уравнения с похожей структурой:

$$(\hat{a}_{m+1}\hat{b}_m + \hat{b}_{m-1}\hat{a}_m + p^2 + M^2 + \lambda'_{1,2})\Phi_{1,2} = 0, \quad \lambda'_{1,2} = \left(\frac{2B_0}{M} - \Gamma \right) \lambda_{1,2}. \quad (15)$$

В явном виде два последних уравнения записываются так:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \varepsilon^2 - M^2 - p_3^2 - \lambda'_{1,2} - \frac{(m - B_0 r^2)^2}{r^2} \right) \Phi_{1,2} = 0. \quad (16)$$

Вводим переменную $x = |B_0| r^2$, уравнение для Φ_1 примет вид

$$\left[4|B_0| \left(x \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx} \right) - \frac{|B_0|(m - x|B_0|/|B_0|)^2}{x} + \varepsilon^2 - M^2 - p_3^2 - \lambda'_1 \right] \Phi_1 = 0.$$

Для определенности полагаем $B_0 = -|B_0|$:

$$\left[x \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx} - \frac{(m+x)^2}{4x} + \frac{\varepsilon^2 - M^2 - p_3^2 - \lambda'_1}{4|B_0|} \right] \Phi_1 = 0.$$

Используем подстановку $\Phi_1 = x^A e^{-Cx} \bar{\Phi}_1$, $A = +|m|/2$, $c = 1/2$, а результате получаем

$$\left[x \frac{d^2}{dx^2} + (|m|+1-x) \frac{d}{dx} - \left(\frac{|m|+m+1}{2} - \frac{\varepsilon^2 - M^2 - p_3^2 - \lambda'_1}{4|B_0|} \right) \right] \bar{\Phi}_1 = 0.$$

Это вырожденное гипергеометрическое уравнение; условие обрыва ряда до полинома имеет вид

$$\frac{|m|+m+1}{2} - \frac{\varepsilon^2 - M^2 - p_3^2 - \lambda'_1}{4|B_0|} = -n;$$

откуда следует правило квантования

$$\Phi_1, \quad \varepsilon_1^2 - M^2 - p_3^2 = 2|B_0|(m+|m|+1+2n) + \lambda'_1; \quad (17a)$$

для решений Φ_2 имеем спектр с похожей структурой:

$$\Phi_2, \quad \varepsilon_2^2 - M^2 - p_3^2 = 2|B_0|(m+|m|+1+2n) + \lambda'_2. \quad (17b)$$

Введем упрощающие обозначения:

$$2|B_0|(|m+|m|+1+2n) = N, \quad -p^2 = \varepsilon^2 - p_3^2 = E > 0, \quad \frac{2B_0}{M} - \Gamma = x,$$

$$\lambda'_1 = \frac{x}{2}(\Gamma + \sqrt{\Gamma^2 + 4E}), \quad \lambda'_2 = \frac{x}{2}(\Gamma - \sqrt{\Gamma^2 + 4E}),$$

тогда формулы квантования представляются в виде

$$\Phi_1, \quad B_0 = -|B_0|, \quad E_1 - M^2 = N + \frac{x}{2}(\Gamma + \sqrt{\Gamma^2 + 4E});$$

$$\Phi_2, \quad B_0 = -|B_0|, \quad E_2 - M^2 = N + \frac{x}{2}(\Gamma - \sqrt{\Gamma^2 + 4E}). \quad (17c)$$

Эти формулы легко разрешаются относительно E (следим одновременно за двумя возможностями):

$$2E - 2M^2 - 2N - x\Gamma = \pm x\sqrt{\Gamma^2 + 4E},$$

или

$$z \equiv 2N + 2M^2 + x\Gamma, \quad (2E - z)^2 = x^2(\Gamma^2 + 4E).$$

Тогда

$$E^2 - E(z + x^2) + \frac{z^2 - x^2\Gamma^2}{4} = 0,$$

и корни равны

$$E_1 = \frac{z + x^2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(z + x^2)^2 - (z^2 - x^2\Gamma^2)},$$

$$E_2 = \frac{z + x^2}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(z + x^2)^2 - (z^2 - x^2\Gamma^2)}. \quad (18)$$

Чтобы оба корня E_1, E_2 были вещественными и положительными (это отвечает физическим спектрам), нужно требовать

$$(z + x^2)^2 - (z^2 - x^2\Gamma^2) > 0, \quad z + x^2 > 0, \quad z^2 - x^2\Gamma^2 > 0; \quad (19a)$$

Рассматриваем третье неравенство в (19a):

$$z^2 - x^2\Gamma^2 = (z - x\Gamma)(z + x\Gamma) > 0 \Rightarrow (2N + 2M^2)(2N + 2M^2 + 2x\Gamma) > 0;$$

для для его выполнения при всех значениях N достаточно требовать положительности параметра $x\Gamma > 0$ (напоминаем, что сейчас рассматривается случай $B_0 = -|B_0| < 0$)

$$x\Gamma > 0 \iff \left(\frac{2|B_0|}{M} + \Gamma\right)\Gamma < 0 \iff -\frac{2|B_0|}{M} < \Gamma < 0. \quad (19b)$$

Второе неравенство из (19a) $z + x^2 = (2N + 2M^2) + x\Gamma + x^2 > 0$; с учетом (19b) выполняется автоматически. Первое неравенство $2zx^2 + x^4 + x^2\Gamma^2 > 0$ выполняется в силу положительности z : $z = 2N + 2M^2 + x\Gamma, x\Gamma > 0$. Поскольку в рассмотренном случае $B_0 = -|B_0| < 0$, и (см. (5)) имеем равенство

$$\Gamma = \pm 4 \frac{-|B_0|}{M} \lambda_3 \lambda_3^*;$$

то можно использовать только возможность с верхним знаком, когда $\Gamma < 0$.

Легко получить аналогичные результаты в случае противоположной ориентации магнитного поля $B_0 = +|B_0|$:

$$\Phi_1, \quad \varepsilon_1^2 - M^2 - p_3^2 = 2|B_0|(-m + |m| + 1 + 2n) + \lambda'_1. \quad (20a)$$

$$\Phi_2, \quad \varepsilon_2^2 - M^2 - p_3^2 = 2|B_0|(-m + |m| + 1 + 2n) + \lambda'_2. \quad (20b)$$

Используя прежние обозначения, формулы квантования представляются так же

$$\begin{aligned} \Phi_1, \quad B_0 = -|B_0|, \quad E - M^2 = N + \frac{x}{2}(\Gamma + \sqrt{\Gamma^2 + 4E}), \\ \Phi_2, \quad B_0 = -|B_0|, \quad E - M^2 = N + \frac{x}{2}(\Gamma - \sqrt{\Gamma^2 + 4E}); \end{aligned} \quad (20c)$$

эти формулы разрешаются относительно E .

$$E_1 = \frac{z+x^2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(z+x^2)^2 - (z^2 - x^2\Gamma^2)}, \quad E_2 = \frac{z+x^2}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(z+x^2)^2 - (z^2 - x^2\Gamma^2)}$$

Чтобы оба корня E_1, E_2 были вещественными и положительными (такие значения могут отвечать физическим спектрам), нужно, как и прежде, требовать

$$(z+x^2)^2 - (z^2 - x^2\Gamma^2) > 0, \quad z+x^2 > 0, \quad z^2 - x^2\Gamma^2 > 0.$$

Первое неравенство

$$z^2 - x^2\Gamma^2 = (z - x\Gamma)(z + x\Gamma) > 0 \quad \Rightarrow \quad (2N + 2M^2)(2N + 2M^2 + 2x\Gamma) > 0$$

выполняется при (напоминаем, что рассматривается случай $B_0 = +|B_0| < 0$)

$$x\Gamma > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(-\frac{2|B_0|}{M} + \Gamma\right)\Gamma > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma < 0. \quad (21)$$

Формально возможную область положительных значений $\Gamma > 0, \Gamma > 2|B_0|/M$ рассматриваем как отвечающую нефизической ситуации, поскольку в нее не попадают заведомо разрешенные как угодно близкие к нулю значения Γ . Два оставшихся неравенства выполняются автоматически:

$$\begin{aligned} z+x^2 = (2N + 2M^2) + x\Gamma + x^2 > 0; \\ 2zx^2 + x^4 + x^2\Gamma^2 > 0 \quad (z = 2N + 2M^2 + x\Gamma, x\Gamma > 0). \end{aligned}$$

Спектр энергии, отвечающий уравнению (12а) для функции $(p_4 f_3 - p_3 f_4)$, имеет вид

$$\begin{aligned} B_0 = -|B_0|, \quad \varepsilon^2 - M^2 - p_3^2 = 2|B_0|(m + |m| + 1 + 2n), \\ B_0 = +|B_0|, \quad \varepsilon^2 - M^2 - p_3^2 = 2|B_0|(-m + |m| + 1 + 2n). \end{aligned} \quad (21)$$

Таким образом спектры энергий описаны полностью.

Авторы благодарны участникам семинара Лаборатории теоретической физики ИФ НА Беларуси за полезное обсуждение и советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Shamaly A., Sapry A. Z. // Can. J. Phys. – 1973. – Vol.51, no 14. – P. 1467–1470.
2. Кисель В.В. Релятивистские волновые уравнения с расширенным набором представлений: Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук. – Минск, 1984. – 11 с.
3. Федоров Ф.И. Группа Лоренца. – М.: Наука, 1979. – 384 с.

В.В. Кисель, Е.М. Овсиюк, Я.А. Войнова, О.В. Веко, В.М. Редьков. Квантовая механика частицы со спином 1 и аномальным магнитным моментом в однородном магнитном поле

На основе матричного 10-мерного формализма Петье-Даффина-Кеммера для поля Шамали-Капри исследована задача о векторной частице с аномальным магнитным моментом во внешнем однородном магнитном поле. Найдено три серии уровней энергии, отвечающих связанным состояниям частицы в магнитном поле. Если требовать, чтобы найденные уровни энергии имели физический смысл при всех значениях главного квантового числа ($n = 0, 1, 2, \dots$), то на описывающий аномальный магнитный момент параметр необходимо накладывать ограничения – они найдены в явном виде. Если таких ограничений не накладывать, то только часть найденных уровней энергии будет соответствовать связанным состояниям.

V.V. Kisel, E.M. Ovsyuk, Y.A. Voynova, O.V. Veko, V.M. Red'kov. Quantum mechanics for vectr particle with anomalous magnetic moment in the uniform magnetic field.

On the base of matrix 10-dimensional Petiau-Duffin-Kemmer formalism applied to Shamaly-Capry field, behavior of a vector particle with anomalous magnetic moment is studied in presence of external uniform magnetic field. Three series of the energy levels, the relate to bound states of the particle, are found. To assign them physical sense for all values of the main quantum number $n = 0, 1, 2, \dots$ one must impose special restrictions – they are formulated explicitly – on the values of anomalous magnetic moment. Otherwise, only some part of the energy levels correspond to bound states.

It is time to verify Einstein's material space of continuous masses and extended electric charges

Igor E. Bulyzhenkov, bulyzhenkov.ie@mipt.ru
Moscow Institute of Physics and Technology (State University),
Lebedev Physics Institute RAS, Moscow Physical Society, Moscow, Russia

Abstract

Call for nonempty space justifications: physicists should select a proper experimental path to probe the Einstein proposition about the pure field reality without unnecessary concepts of localized charges or macroscopic substances

Einstein's directive of material fields instead of particles

Einstein's scientific heritage is still associated with the empty space geometrization of gravitation fields, which are spatially separated from point sources. But material peculiarities and black holes appeared in General Relativity not from self-contained theoretical constructions, but due to the external reference to Newtonian point-mass gravitation with the harmonic potential from the Laplace equation. Indeed, Newton (and later Coulomb) employed the harmonic radial field for well measured forces by the inverse square law. The Laplace equation and available observations of reality (the Moon is there, while tidal waves in the Moon's fields are here) seem to firmly justify the empty space paradigm of continuous fields around localized material substances.

The dual (field plus substance) dogma and the Birghoff theorem are gathering relativists around Schwarzschild-type metric solutions with singularities during the whole century of obscure studies of curved (but empty) spaces. However, Einstein claimed the inseparable coexistence of space and matter [1] since the first gravitational generalization of the Minkowski 4-interval. Later Einstein became not only "a reluctant father of black holes", but the first scientific opponent [2] of Schwarzschild singularities for physical reality.

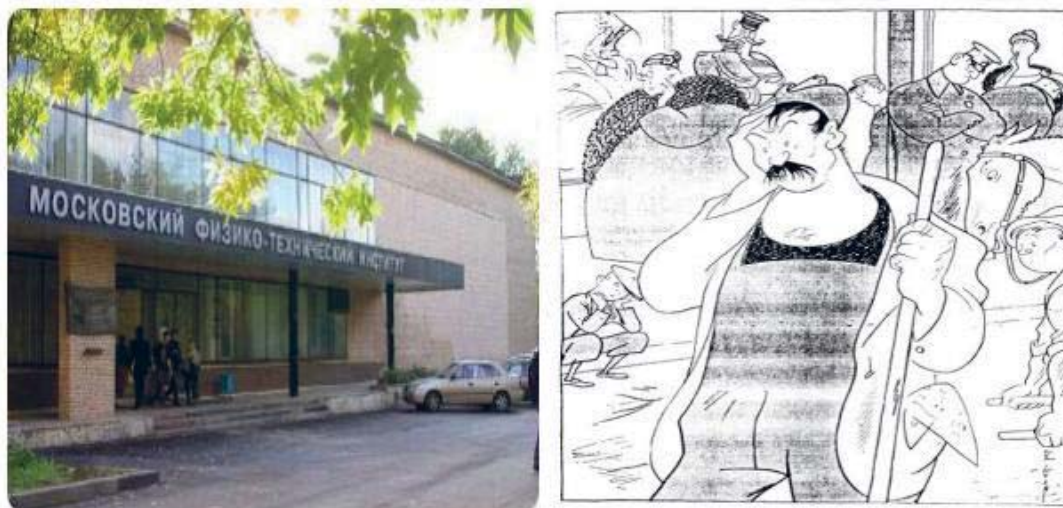


Figure 1: "People slowly accustomed themselves to the idea that the physical states of space itself were the final physical reality" - Professor Albert Einstein. The New Yorker Magazine, 1927, 1957.

People tend to look with irony on the material space idea (Figure 1), but Einstein persistently maintained the non-dual way for the evolution of physics: “The division into matter and field is, after the recognition of the equivalence of mass and energy, something artificial and not clearly defined. Could we not reject the concept of matter and build a pure field physics? What impresses our senses as matter is really a great concentration of energy into a comparatively small space. We could regard matter as the regions in space where the field is extremely strong. In this way a new philosophical background could be created. Its final aim would be the explanation of all events in nature by structure laws valid always and everywhere. A thrown stone is, from this point of view, a changing field, where the states of greatest field intensity travel through space with the velocity of the stone. There would be no place, in our new physics, for both field and matter, field being the only reality. This new view is suggested by the great achievements of field physics, by our success in expressing the laws of electricity, magnetism, gravitation in the form of structure laws, and finally by the equivalence of mass and energy. Our ultimate problem would be to modify our field laws in such a way that they would not break down for regions in which the energy is enormously concentrated.” [3]

Contest to justify nonempty space in macroscopic practice

The ontology of space-time for proper understanding and geometrization of distributed energies is in great interest for many scholars and philosophers. Mathematical matching of Gustav Mie [4] and Albert Einstein [3] ideas to redesign dual (particle+field) space in non-dual analytical terms of only material fields is one of basic challenges for the new generation of physicists. To follow the cutting edge of the Einstein non-dual proposition for the evolution physics, the base chair Quantum Physics Problems of the Moscow Institute of Physics and Technology (www.mipt.ru/en), has already started to teach Maxwell Electrodynamics in parallel terms of point and extended charges [5, 6].

Ultimately, only through an experiment, and not theory, may the empty space paradigm be replaced with the nonempty space concept. Therefore, a clear and achievable way to justify the material space continuum in question on macroscopic scales is to be suggested prior to experimental tests. It seems now, after 100 years of General Relativity, is the time to initiate an international call for proposals to verify Einstein’s physics on the next, pure field level. I encourage the Conference participants to contribute to this initiative and to submit proposals to the forthcoming open contest to distinguish nonempty space reality of Einstein from the empty space alternative of dual physics.

References

- [1] A. Einstein and M. Grossmann, *Zeits. Math. und Physik* **62**, 225 (1913)
- [2] A. Einstein, *On a Stationary System With Spherical Symmetry Consisting of Many Gravitating Masses*, *Annals of Mathematics* **40**, 922 (1939)
- [3] A. Einstein and L. Infeld, *The Evolution of Physics*, Cambridge University Press, 1938
- [4] G. Mie: *Grundlagen einer Theorie der Materie*, *Ann. der Physik.* **37**, 511 (1912); *ibid* **39**, 1 (1912); *ibid* **40**, 1 (1913).
- [5] I. Bulyzhenkov, *Pure field electrodynamics of continuous complex charges*, Tutorial of the 4th year course, MIPT, Moscow (2015, ISBN 978-5-7417-0554-4)
- [6] I. Bulyzhenkov, *Practice of nonlinear electrodynamics teaching toward unification of continuous charge and its Coulomb field*, *Physics in Higher Education* **22**, 59 (2016), <http://pinhe.lebedev.ru/>; *Complex Charge Densities Unify Particles with Fields and Gravitation with Electricity*, *Bulletin Lebedev Physics Institute*, **22**, No.4, 140 (2016)

УДК 658.567

ФОРМИРОВАНИЕ КОГЕРЕНТНЫХ СТРУКТУР В КОМПЛЕКСНОМ УРАВНЕНИИ СВИФТА-ХОЕНБЕРГА

Член-корреспондент АН Республики Таджикистан Х.Х.Муминов,
Ш.Ф.Мухамедова

*Физико-технический институт им. С.У.Умарова
АН Республики Таджикистан*

FORMATION OF COHERENT STRUCTURES OF COMPLEX SWIFT-HOHENBERG EQUATION

Kh.Kh.Muminov, Sh.F.Muhamedova

S.U.Umarov Physical-Technical Institute, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan

Numerical simulation of the behavior of nonlinear localized soliton-like objects of complex Swift-Hohenberg equation under the presence of dissipation and external pumping has been conducted. Formation of pulsing soliton with one pulsation has been established.

Проводится численное моделирование формирования когерентных структур в комплексном уравнении Свифта-Хоенберга при наличии диссипации и внешней подкачки. Обнаружено формирование хаотического солитона.

Ключевые слова: диссипативные солитоны – хаотические солитоны - диссипация - подкачка.

Адрес для корреспонденции: Муминов Хикмат Халимович,
Мухамедова Шоира Файзуллоевна. 734063, Республика Таджикистан, Душанбе, пр. Айни,
299/1, Физико-технический институт АН РТ. E-mail: muminov@phti.tj, shoira74@mail.ru.

Солитоны принадлежат к классу локализованных решений [1]. Это стационарные солитоны источники, стоки, движущиеся с фиксированной скоростью солитоны и фронты. Каждый из солитонов представляет собой устойчивую особую точку в бесконечномерном фазовом пространстве. Область притяжения зависит от параметров уравнения. В реальных физических системах (световоды, магнетики, и т.д.) солитоны возбуждаются локализованными начальными импульсами гауссовой формы [2,3]. В последние десятилетия в связи с практическими приложениями солитонов в нелинейной оптике, фотонике, начались активные исследования поведения солитонов в диссипативных средах, при наличии внешней подкачки. Выяснилось, что возможно формирование диссипативных солитонов при условии динамического равновесия в системе между притоком энергии и его диссипацией.

К числу диссипативных солитонов относится пульсирующий солитон, его можно рассматривать как предельный цикл в бесконечномерном фазовом пространстве. Пульсирующие солитоны решения диссипативных систем привлекает большое внимание, их существование было предсказано в численных экспериментах, позже они были обнаружены экспериментально в волоконной оптике [1-3]. Пульсирующие солитоны формируют набор возможных локализованных решений. Пульсирующие солитоны могут быть описаны как предельный цикл бесконечномерных диссипативных динамических систем, они отличаются от

солитонов более высокого порядка, которые обычно связаны интегрируемостью моделями, хотя численное моделирование ясно показывает возможность возбуждения солитонов в результате бифуркации, исходя из стационарных солитонов. Наиболее наглядное представление о характере эволюции системы может дать фазовый портрет системы. Для облегчения задачи мы фактически строим некоторое сечение полного фазового портрета, которое позволяет судить о поведении системы. Однако более полное представление о поведении системы может дать фазовый портрет, по координатным осям которого отложены некие обобщенные характеристики, или параметра солитона, например квадрат амплитуды и полная энергия. В результате получим фазовый портрет системы в виде траектории, которая состоит из цикла, повторяющего себя бесконечное число раз. Ясно, что пульсирующий солитон представляет предельный цикл в бесконечномерном фазовом пространстве.

Комплексное уравнение Гинзбурга-Ландау является одним из основных уравнений для исследования поведения амплитудно-модулированных волн [5], их пространственно-временной динамики испонтанного формирования когерентных структур в различных нелинейных диссипативных системах [6, 7] методами численного моделирования. Уравнение Гинзбурга-Ландау в безразмерной форме можно написать в виде

$$i\psi_z + \frac{D}{2}\psi_{tt} + |\psi|^2\psi + v|\psi|^4\psi = i\delta\psi + i\varepsilon|\psi|^2\psi + i\beta\psi_{tt} + i\mu|\psi|^4\psi \quad (1)$$

где t – время в движущейся системе координат, ψ - нормированная огибающая поля, D – коэффициент дисперсии групповой скорости, δ - коэффициент разности линейных усиления и потерь. Включение в (1) члена четвертого порядка превращает уравнение Гинзбурга - Ландау в комплексное уравнение Свифта-Хоенберга, которое, как известно, обладает солитонными решениями

$$i\psi_z + \frac{D}{2}\psi_{tt} + |\psi|^2\psi + v|\psi|^4\psi = i\delta\psi + i\varepsilon|\psi|^2\psi + i\beta\psi_{tt} + i\mu|\psi|^4\psi + iS\psi_{tttt} \quad (2)$$

В данном сообщении мы ставим задачу изучения поведения локализованных возбуждений и формирования пульсирующих солитонов в физических системах, описываемых уравнением Свифта-Хоенберга, методами численного моделирования.

Как указывалась выше, солитоны принадлежат к классу локализованных решений. Уравнение (2) также имеет ряд локализованных решений. Для решения задачи Коши в качестве начальных условий мы используем следующую функцию как решение уравнения Свифта-Хоенберга

$$\psi(x, t) = A \operatorname{sech} \left(\frac{x - x_0}{\omega} \right) e^{i[b(x-x_0) + c(x-x_0)^2]}, \quad (3)$$

где $A(t)$ -амплитуда, $w(t)$ -ширина, $x_0(t)$ - положение пульса, $b(t)$ - скорость солитона.

Для численного решения уравнения Свифта-Хоенберга написана явная разностная схема. Получены численные решения уравнения Свифта-Хоенберга в виде диссипативного т.е. в виде пульсирующего солитона с несколькими пульсациями (рис. 1-3).

Параметры $D = 1, \varepsilon = 0.1, \delta = -0.1, \beta = 0.08, \mu = 0.01, v = 0.01, S = 0.001$

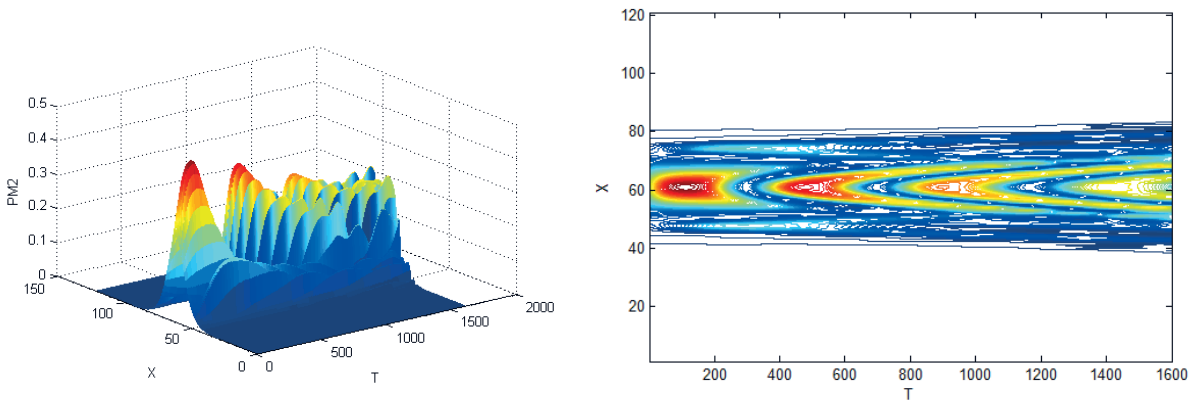


Рис.1. График эволюции плотности числа частиц диссипативного солитона.

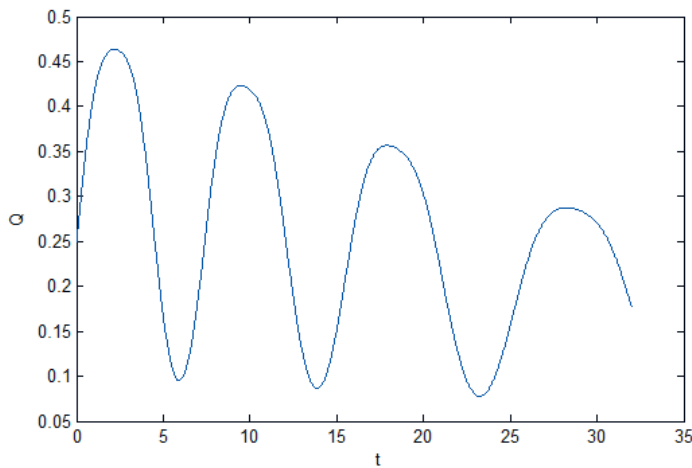


Рис.2. График зависимости интеграла числа частиц от времени диссипативного солитона

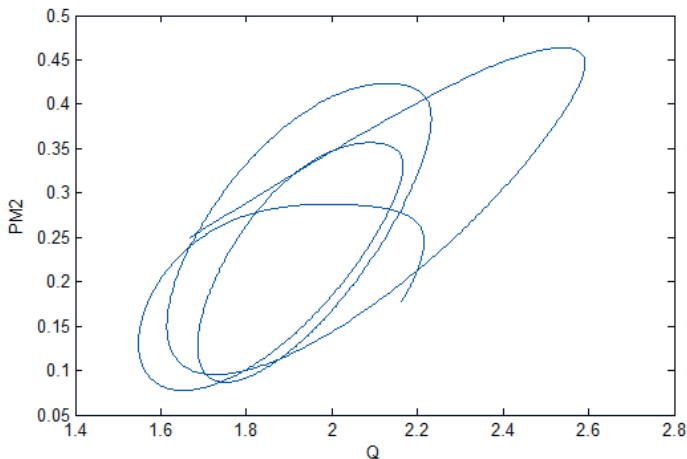


Рис.3. Фазовый портрет солитона

Фазовый портрет сформированного солитона (рис. 3) показывает, что при выбранных значениях параметров формируется хаотический солитон с несколькими пульсациями. Изменение параметров затухания и подкачки приводит к серии бифуркаций удвоения периода пульсирующего солитона и формированию хаотического солитона.

Литература:

1. Maruno K., Ankiewicz A., Akhmediev N. – Physica, 2003, D.176, pp. 44-66
2. Soto J.M., Crespo, Akhmediev N., - Phys. Rev., 2002, E.66, 066610
3. Soto J. M., Grespo, Akhmediev N., Chiang K. - Phus. Lett., 2001, A291, pp.115-123.

4. Feigenbaum M. J. Quantitative Universality for a Class of Non-Linear Transformations. - J. Stat. Phys., 1978, 19, p.25-52.
5. Tsoy E.N., Akhmediev N. Bifurcations from stationary to pulsating solitons in the cubic-quintic complex Ginzburg-Landau equation - arXiv:nlin/0602030v1 [nlin.PS] 14 Feb 2006.
6. Brusch L., Torcini A., van Hecke M., Zimmermann M.G. Modulated amplitude waves and defect formation in the one-dimensional complex Ginzburg-Landau equation - Physica D., 2001, 160, pp.127-148.
7. Zakrzewski W.J. Nontopological structures in the baby-Skyrme model - arXiv:hep-th/9710012, v1, Oct 1997.

Key words: *dissipative solitons – pulsing solitons - dissipation – pumping.*

Муминов Х.Х.
Мухамедова Ш.Ф.

ПРИНЦИП СИЛЬНОЙ ПРИЧИННОСТИ В ДИНАМИКЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО РОСТА

А.Л. Круглый

Научно-исследовательский институт системных исследований РАН, Россия, 117218, Москва,
Нахимовский пр-т, 36, к. 1, E-mail: akrugly@mail.ru

THE PRINCIPLE OF STRONG CAUSALITY IN THE SEQUENTIAL GROWTH DYNAMICS

Alexey L. Krugly

Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Science, 117218,
Nahimovskiy pr., 36, k. 1, Moscow, Russia, E-mail: akrugly@mail.ru

An x -graph is considered. The x -graph is a directed acyclic graph. Each vertex has a degree no more than $(2, 2)$. This is a model of a discrete spacetime on a microscopic scale. A particular case is considered. An x -graph is infinite to the past and finite to the future. Each vertex has indegree 2. Some vertices have outdegree less than 2. These vertices have free valences. A sequential growth dynamics of an x -graph is an addition of new vertices (sinks) one by one. We consider probabilistic algorithms of a sequential growth. The existed x -graph specifies probabilities of different variants of addition of new vertex. This algorithm must be a consequence of some fundamental principles. A set of such principles is considered. A new proposed principle is a principle of a strong causality. The probability to add some new vertex is a sum. Each summand is a function of an Alexandrov set of the new vertex and one vertex of the past set of the new vertex. In this case, the influence of vertices of the past set exponentially decreases. The following algorithm is a consequence of these principles. A new vertex will be connected with existed x -graph by a 2 new edges instead 2 free valences of existed vertices. We choose one free valence equiprobably and start some edge disjoint random walk from this valence. The end of this walk is a second free valence.

Рассматривается x -граф. X -граф – это ориентированный ациклический граф. Каждая вершина имеет степень не более чем $(2, 2)$. Это модель пространства-времени в микромире. Рассмотрен частный случай x -графа бесконечного в прошлое и конечного в будущее. Каждая

вершина имеет полустепень захода 2. Некоторые вершины имеют полустепень исхода менее чем 2. Эти вершины имеют свободные валентности. Динамика последовательного роста x -графа – это добавление новых вершин одна за другой. Рассматриваются вероятностные алгоритмы последовательного роста. Имеющийся x -граф определяет вероятности различных вариантов добавления новой вершины. Этот алгоритм должен следовать из некоторых фундаментальных принципов. Рассмотрен набор таких принципов. Предложен новый принцип сильной причинности. Вероятность добавления новой вершины является суммой. Каждое слагаемое есть функция множества Александрова новой вершины и одной из вершин в прошлом новой вершины. В этом случае влияние вершин из прошлого экспоненциально убывает. Из этих принципов следует алгоритм. Новая вершина связана с существующим x -графом двумя новыми ребрами вместо двух свободных валентностей. Мы выбираем одну свободную валентность равновероятно и начинаем случайное блуждание специального вида. Оно заканчивается во второй свободной валентности.

Любой процесс может быть описан, как частично упорядоченное множество событий, где отношение порядка интерпретируется как отношение причинности. Множеством Александрова событий α и β называется множество событий, следующих α и предшествующих β в смысле отношения порядка, включая вершины α и β . Если множество Александрова любой пары событий содержит только конечное множество событий, то такое множество событий называется локально конечным. Локально конечный процесс может быть представлен ориентированным ациклическим графом. Вершины являются образами элементарных событий, а ребра - образами элементарных причинно следственных связей. В общем случае причинно следственная связь описывается ориентированными маршрутами. Вершины α и β причинно связаны, причем вершина α является причиной, а вершина β следствием, если имеется ориентированный маршрут из α в β . Множество вершин, из которых имеется ориентированный маршрут в вершину α , назовем предшествующим множеством вершины α , или ее прошлым. Множество вершин, в которые имеется ориентированный маршрут из вершины α , назовем последующим множеством вершины α , или ее будущим.

Модель ориентированного ациклического графа может описывать любой процесс, состоящий из дискретного множества событий. Примером такого процесса является процесс выполнения любой компьютерной программы. Рассматриваемая далее частная модель предлагается в качестве возможной модели дискретного пространства-времени в микромире.

Рассмотрим алгоритм последовательного роста x -графа. X -граф - это ориентированный ациклический граф, каждая вершина которого имеет полустепени захода и исхода не более двух [1]. Последовательный рост - это добавление новых вершин по одной. Очевидно, что каждая новая вершина может быть непосредственно связана ребрами только с вершинами, имеющими до добавления этой вершины полустепени захода или исхода менее двух. Новая вершина может присоединиться к вершинам, имеющим свободные валентности. Ребро, соединяющее новую вершину с уже имеющейся, возникает вместо свободной валентности. Будем называть свободную валентность внешним ребром, поскольку в некоторых случаях ее удобно рассматривать как ребро, у которого неизвестна одна из ицидентных ему вершин.

Задачей любой динамики является предсказание будущего рассматриваемого процесса, или реконструкция его прошлого. Последовательный рост x -графа интерпретируется, как последовательное получение наблюдателем новой информации о рассматриваемом процессе. Вершина является минимальным элементом x -графа. Добавление любого нового фрагмента к имеющемуся x -графу может быть представлено как последовательность добавления вершин по одной. Таким образом, любая достройка x -графа сводится к его последовательному росту.

Ограничимся ростом в будущее. Рассматривается x -граф, у которого полустепень захода всех вершин равна двум. Очевидно, что такой x -граф бесконечен в прошлое. Однако, этот x -граф на каждом шаге последовательного роста конечен в будущее, то есть отсутствуют ориентированные маршруты, бесконечные в будущее. При этом каждая добавляемая вершина

является максимальным элементом в смысле отношения порядка и соединяется двумя ребрами с уже существующими вершинами.

Рассматриваемую модель можно интерпретировать как процесс парных взаимодействий (столкновений) некоторого множества, состоящего из n объектов. Очевидно, что число объектов при таких взаимодействиях не меняется. Таким образом, в процессе последовательного роста не меняется число n внешних ребер. Число n будем называть шириной x -графа. Ниже будут рассматриваться только x -графы конечной ширины.

Будем рассматривать стохастические алгоритмы последовательного роста. В общем случае наблюдатель не может однозначно определить, какая новая вершина будет добавлена. Он может только вычислить по известной части x -графа вероятности различных вариантов добавления новой вершины. Правила вычисления этих вероятностей и определяют алгоритм последовательного роста.

Возможен широкий произвол в выборе алгоритма последовательного роста. Однако если мы рассматриваем фундаментальный уровень пространства-времени, то алгоритм должен следовать из некоторых фундаментальных принципов. Рассмотрим эти принципы.

Ковариантность. Вероятности различных вариантов добавления новой вершины зависят только от структуры имеющегося x -графа и не зависят от последовательности, в которой были добавлены предыдущие вершины. Данный принцип имеет очевидный физический смысл. Вероятности зависят от информации, имеющейся у наблюдателя, но не зависят от истории получения этой информации.

Также рассматриваемые вероятности не зависят от способа нумерации вершин и ребер. В предлагаемой модели нумерация вершин играет роль, аналогичную системе координат в непрерывном пространстве-времени.

Слабая причинность. Вероятность добавления новой вершины с точностью до коэффициента нормировки зависит только от предшествующего множества этой вершины. Таким образом, отношение вероятностей добавления двух новых вершин зависит только предшествующих множеств этих вершин [2]. Вполне очевидно, что части x -графа, не связанные причинно с новой вершиной, могут влиять на вероятность ее добавления только через коэффициент нормировки. В противном случае неправомерна интерпретация отношения порядка вершин как причинности. Этот принцип причинности оставляет широкий произвол в выборе алгоритма последовательного роста. Поэтому назовем его принципом слабой причинности и рассмотрим более сильный принцип.

Сильная причинность. Вероятность добавления новой вершины является суммой вкладов от каждой вершины x -графа. Вклад (слагаемое) от любой вершины является функцией множества Александра этой вершины и новой вершины. Если множество Александра пусто, то вклад нулевой. Последнее условие согласует сильную причинность со слабой. Также вклад нулевой, если множество Александра пусто хотя бы с одной из вершин, смежных новой вершине. Последнее условие означает, что вклад в вероятность добавления новой вершины дают только вершины, принадлежащие пересечению предшествующих множеств вершин, смежных новой вершине.

Нормировка. Вероятности нормированы таким образом, что вероятность добавить какую-либо новую вершину равна единице. Очевидно, что вероятности зависят от ширины x -графа. Рассмотрим x -граф, состоящий из двух не связанных идентичных x -графов. Вероятность добавить новую вершину так, что она связана с обеими не связанными компонентами, равна нулю в силу принципа сильной причинности, так как у компонент отсутствует общее прошлое. В силу симметрии новая вершина равновероятно добавляется к одной из связанных компонент. Таким образом, вероятности всех вариантов в два раза меньше, чем аналогичные вероятности, в случае рассмотрения только одной из компонент. Мы видим, что нормировка должна зависеть от ширины x -графа, или иной величины, описывающей его величину.

Построим алгоритм, удовлетворяющий рассмотренным принципам. Рассмотрим следующую процедуру добавления новой вершины. Новая вершина добавляется к двум внешним ребрам. Будем выбирать их последовательно. Очевидно, что вероятность выбора первого внешнего ребра может зависеть только от структуры предшествующего подграфа в силу принципа слабой причинности. Например, эта вероятность может быть пропорциональна числу некоторых элементов предшествующего подграфа - вершин, маршрутов, или каких-то других. В простейшем случае первое внешнее ребро выбираем равновероятно, то есть эта вероятность равна $1/n$.

Алгоритмы выбора второго внешнего ребра оказываются такими, что выше вероятность добавления новой вершины к двум внешним ребрам, которые в некотором смысле сильнее связаны общим прошлым. Алгоритм выбора второго внешнего ребра однозначен, если дополнительно предположить, что при удалении в прошлое вклад вершин ослабевает наименьшим возможным образом.

Выбор второго внешнего ребра может быть представлен как результат следующего случайного блуждания. Мы стартуем из первого внешнего ребра и идем против направления ребер. В каждой вершине останавливаемся с вероятностью $1/2$. Иначе равновероятно идем по одному из двух заходящих в эту вершину ребер. В случае остановки мы разворачиваемся и продолжаем блуждание по направлению ребер. При этом блуждание не может быть продолжено по ребру, которое уже участвовало в блуждании при движении против направления ребер. Если мы находимся в вершине, из которой исходит такое ребро, то блуждание осуществляется по второму исходящему ребру. Если мы находимся в вершине, в которой оба исходящих ребра не участвовали в блуждании, то равновероятно идем по одному из этих ребер. Блуждание продолжается до того, как на очередном шаге будет выбрано внешнее ребро, которое и является искомым вторым внешним ребром. Алгоритм доказывается по индукции. Индукция используется дважды. Мы рассматриваем пересчет вероятностей при увеличении длины на одну вершину ориентированных маршрутов до и после поворота. Однозначность алгоритма следует из того, что формулы пересчета вероятностей при удлинении ориентированных маршрутов линейны.

Реальный мир наполнен устойчивыми структурами. В рассмотренной модели устойчивые структуры – это фрагменты x -графа, которые повторяются, или квазиповторяются в процессе последовательного роста. Для исследования свойств построенного алгоритма наиболее эффективно численное моделирование. Однако аналитически можно показать, что при четном n имеется ненулевая вероятность вырождения процесса в бесконечный рост $n/2$ цепочек вершин, связанных двойными ребрами. В противном случае имеются конечные цепочки вершин, связанных двойными ребрами. Таким образом, такую цепочку можно рассматривать как простейшую самоповторяющуюся структуру.

Рассмотренная модель описывает абсолютно изолированную систему. Более реалистичной является модель, допускающая взаимодействия с внешним окружением, что описывается как увеличение ширины x -графа при некоторых добавлениях новой вершины. Для вывода вероятности такого процесса нужно постулировать еще какой-то принцип, например, рассмотренный в работе [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Krugly, A. L. A sequential growth dynamics for a directed acyclic dyadic graph// Вестник Университета Дружбы Народов. Серия: Математика, Информатика, Физика. - 2014. - No 1. - с. 124-138 (arXiv: 1112.1064 [gr-qc]).
2. Rideout, D. P. and Sorkin, R. D. A classical sequential growth dynamics for causal sets// Physical Review. - 2000. - D61. - pp. 024002-1 - 024002-16. (ArXiv: gr-qc/9904062).
3. Круглый А.Л. Принцип невозмущающих измерений в моделях причинностного множества в квантовой гравитации// Российский университет дружбы народов, LI Всероссийская

конференция по проблемам физики частиц, физики плазмы и конденсированных сред, оптоэлектроники, Россия, г. Москва, 12-15 мая 2015 г. Тезисы докладов. Москва, РУДН, 2015, с. 49-52.

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ
ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ВИХРЕЙ С ДОМЕННОЙ СТЕНКОЙ
В (2+1)-МЕРНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ σ -МОДЕЛИ**

Х.Х.Муминов, Ф.Ш.Шокиров

Физико-технический институт им. С.У.Умарова
Академии наук Республики Таджикистан, г.Душанбе, Таджикистан

Методами численного моделирования проведено исследование динамики взаимодействия топологических вихрей с 180-градусной доменной стенкой неёловского типа в (2+1)-мерной O(3) нелинейной σ -модели. Выявлено свойство распада топологических вихрей на локализованные возмущения с половинными топологическими зарядами, движущиеся в вдоль плоскости доменной стенки со скоростью c .

**NUMERICAL SIMULATION OF INTERACTION OF TOPOLOGICAL VORTICES WITH
DOMAIN WALL IN (2+1)-DIMENSIONAL NON-LINEAR σ -MODEL**

Kh.Kh.Muminov, F.Sh.Shokirov

S.U.Umarov Physical-Technical Institute,
Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan

By numerical simulation the dynamics of interaction of localized (topological) vortices with 180-degree Neel type domain walls in (2+1) dimensional O(3) nonlinear σ -model is investigated. The decay of the topological vortices onto the localized perturbations with half topological charge, moving along the plane of the domain wall with velocity c is revealed.

Исследование динамики локализованных границ магнитных доменов привлекает внимание исследователей в связи с возможностью их приложений в различных современных технологических процессах, например, в спиновой электронике, при создании производительных и надежных устройств считывания, записи, хранения и обработки цифровых данных (трековая память, спиновый транзистор) и т.д., использующих связь намагниченности и электрической поляризации. Исследование динамики распределения намагниченности доменных стенок (доменных границ магнитных доменов), их движение и перестройка под действием различных внешних полей, является важным составляющим процесса создания магнитных устройств, обладающих новыми функциональными возможностями.

В настоящей работе получены модели столкновения движущихся топологических вихрей (ТВ, топологических солитонов) [1-4] с неподвижной доменной стенкой (ДС) неёловского типа в (2+1)-мерной анизотропной O(3) нелинейной σ -модели (НСМ). Уравнения Лагранжа-Эйлера исследуемой модели имеют вид [1-4]

$$\partial_\mu \partial^\mu s_i + (\partial_\mu s_a \partial^\mu s_a) s_i - s_3 (\delta_{i3} - s_i s_3) = 0, \quad (1)$$

$$i = 1, 2, 3, \quad s_a s_a = 1,$$

где

$$s_1 = \sin \theta \cos \varphi, \quad s_2 = \sin \theta \sin \varphi, \quad s_3 = \cos \theta,$$

$\theta(x, y, t)$ и $\varphi(x, y, t)$ эйлеровы углы. Напомним, что уравнения (1) в меридианном сечении изотопического пространства ($\varphi(x, y, t) = 0$) сводятся к уравнению sin-Гордон вида [1-4]:

$$2\pi\theta = \delta \sin 2\theta.$$

На основе ДС неёловского типа[5]

$$z(x, y, t) = 4\text{arctg} \left(e^{B_1\left(\frac{w}{k_1}x - \frac{w}{k_1}x_0\right) + B_2\left(\frac{w}{k_2}y - \frac{w}{k_2}y_0\right)} \right)$$

(2+1)-мерного синус-уравнения Гордон следующего вида:

$$z_{tt} - k_1^2 z_{xx} - k_2^2 z_{yy} + w^2 \sin z = 0$$

нами былаполучена численная модель ДС (2+1)-мерной O(3) НСМ (рис.1с, DW).Далеев (2+1)-мерной O(3) НСМ рассматривается взаимодействие ТВ (вихри Белавина-Полякова) с ненулевым индексом Хопфа (Q_t) вида [1,3,4,6]

$$\begin{aligned} \theta &= 2\text{arctg} \left(\frac{r}{R} \right)^{Q_t}, & \varphi &= Q_t \chi - t, \\ r^2 &= x^2 + y^2, \cos \chi = \frac{x}{r}, & \sin \chi &= \frac{y}{r} \end{aligned} \quad (2)$$

с полученной численноДС вида

$$\theta(x, y, t) = 2\text{arctg} \left(e^{B_1\left(\frac{w}{k_1}x - \frac{w}{k_1}x_0\right) + B_2\left(\frac{w}{k_2}y - \frac{w}{k_2}y_0\right)} \right). \quad (3)$$

ТВ направляются к ДС под разными углами ($\alpha = \pi/2$, $\alpha < \pi/2$, $\alpha > \pi/2$) и при разных скоростях $v(t_0) < c$ ($c = 1$ – скорость света в вакууме).Аналогичная задача для взаимодействия ТВ (скирмионов[7] с единичным топологическим зарядом: $Q_t = 1$) с ДС, рассматривалась в работахВ.Закржевского (W. Zakrzewski) (см., например [8]).В указанной работе, в частности,было показано, что при взаимодействии скирмион поглощается ДС, а топологический заряд (ТЗ) скирмиона передается волнам, которые распространяются со скоростью $c = 1$ вдоль плоскости ДС[8].

Таким образом, в настоящей работе, решалась эволюционная задача для динамических уравнений (1) использованием вихрей вида(2) и ДС вида (3) в качестве начальных ($t = 0.0$)данных. Интеграл энергии (En), полученных в процессе исследования моделей системы взаимодействующих ТВ до и после столкновения сохраняется с хорошей точностью $\frac{\Delta E n}{E n} \approx 10^{-4} - 10^{-3}$ (рис.1b).Также, во всех численных [9]экспериментах, при столкновении наблюдается излучение круговых линейных волн малоамплитудных возмущений от центра резонансной зоны.На рис.1а показаныначальное и конечное состояния численноймодели системы взаимодействующихТВ(2) и (3) при $t = 0.0$ и $t \approx 25.2$.На рис.2 приведёнпроцесс взаимодействия(динамика спинов в изотопическом пространстве)ТВ вида (2)с ТЗ равным $Q_t = -3$,движущегося (с заданной преобразованием Лоренца) начальной скоростью $v(t_0) \approx 0.45c$ неподвижной ($v_{DW} = 0.0$) ДС вида (3).Движущийся ТВ(рис.2а) при приближении к ДС постепенно теряет часть своей скорости ($v_{t=9} < v_{t=0}$). При взаимодействии с ДС происходит первый этап излучениятопологическим вихрем (2) двух локализованных возмущений(ЛВ), которые распространяются вдоль плоскости ДС со скоростью света: $u_{LV} \rightarrow 1$ (рис.2b).

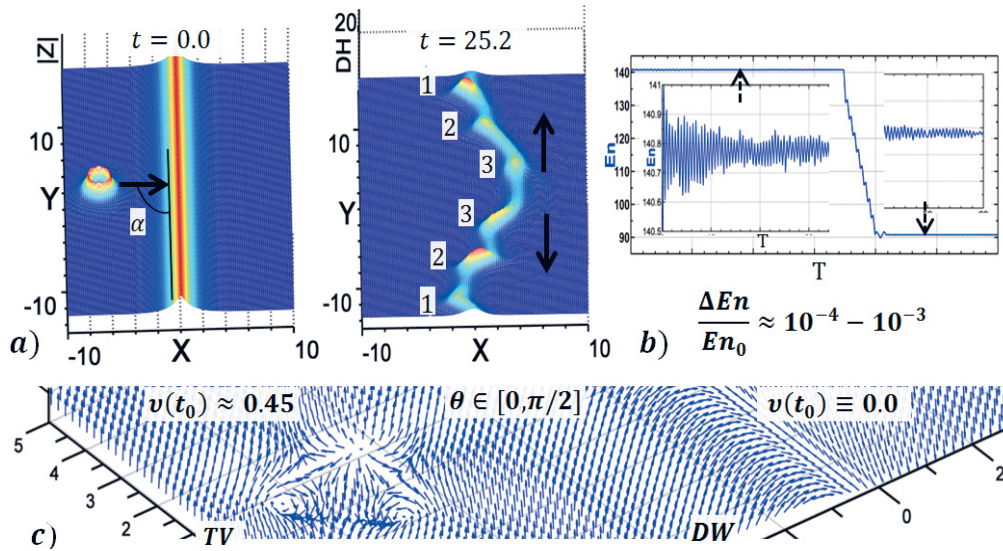


Рис.1. Численная модель эволюции лобового ($\alpha = \pi/2$) столкновения ТВ (TV) вида (2) с индексом Хопфа $Q_t = -3$ ($v_{TS} > 0.0$) с неподвижной ($v_{DW} = 0.0$) ДС (DW) вида (3) модели (1): **а)** модель столкновения ($|z|$) при $t = 0.0$ и ДН при $t \approx 25.2$ (распад ТВ на 3 пары ЛВ); **б)** интеграл энергии системы взаимодействующих солитонов при $t \in [0.0, 30.0]$; **в)** 3D-модель изоспиновой структуры ТВ ($TV, \theta \in [0, \pi/2]$) и ДС ($DW, \theta \in [\pi/2, \pi]$) при $t = 0.0$.

Анализ динамики модели спинов в изотопическом пространстве показывает, что распад на ЛВ происходит дискретно, по дробным значениям ТЗ ($Q_t = 1/2$) [1,4,8]. После первого этапа излучения пары ЛВ происходит второй этап (рис.2с, $t \approx 21.3$) излучения пары ЛВ (с ТЗ равным $|Q_{22}| = 1/2$), распространяющихся со скоростью $v_{LV} \rightarrow 1$ вдоль плоскости ДС в противоположных $\pm u$ -направлениях. На рис.2д приведён момент ($t \approx 25.2$) полного распада ТВ вследствие последнего этапа излучения пары ЛВ (с ТЗ равным $|Q_t| = 1/2$).

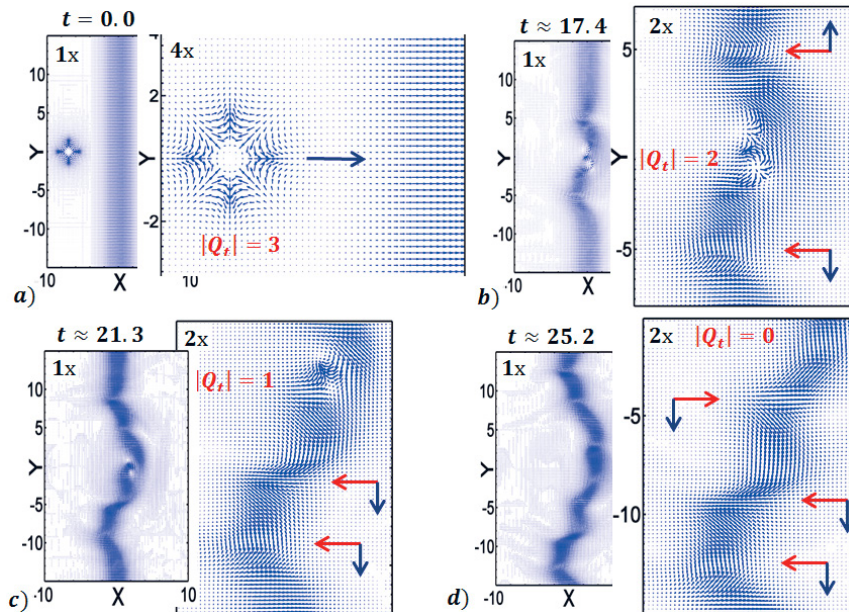


Рис.2. Изоспиновая 2D-структура системы взаимодействующих ТВ вида (2) с ТЗ равным $Q_t = -3$ и ДС вида (3) модели (1): **а)** расположение ТВ при $t = 0.0$ ($t \approx 17.4$, zoom: 1x и 4x); **б)** распад ТВ на 2 ЛВ с ТЗ $|Q_t| = 1/2$ при $t \approx 17.4$ (zoom: 1x и 2x); **в)** распад ТВ на 4 ЛВ с ТЗ $|Q_t| = 1/2$, при $t \approx 21.3$, (zoom: 1x и 2x – при $y \leq 0$); **д)** распад ТВ на 6 ЛВ с ТЗ $|Q_t| = 1/2$, при $t = 25.2$ (zoom: 1x и 2x – при $y \leq 0$).

Аналогичные результаты были получены при различных параметрах системы, в частности, при скоростях движения налетающего солитона (ТВ): $v_{TV} \in [0.28, 0.82]$; значений ТЗ: $Q_t = -2, Q_t = -4$; значений α : $\alpha < \pi/2, \alpha > \pi/2$.

Таким образом, наши исследования показали, что в (2+1)-мерной О(3) НСМ локализованные вихри вида (2) при столкновении с доменной границей вида (3) полностью распадаются путем поэтапно-излучения энергии в виде $2Q_t$ ЛВ, каждое из которых обладает ТЗ равным $|Q_t| = 1/2$. Образовавшиеся ЛВ движутся со скоростью $v_{LV} \rightarrow 1$ от центра резонансной зоны в противоположных $\pm y$ -направлениях (при движении налетающих ТВ вдоль $\pm x$ -направлениях) по поверхности ДС, образуя связанное состояние в виде поля ЛВ-ДС. Аналогичный результат был также выявлен в работе [8], где численными моделированиями был показан распад скирмиона при лобовом столкновении с ДС на две части, которые распространялись вдоль плоскости ДС со скоростью $v = c$, при этом каждая из частей обладала ТЗ равным $Q_t = 1/2$. В наших экспериментах, а также в моделях работы [8] ДС действует как носитель волн в виде локализованных возмущений с половинными топологическими зарядами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Муминов Х.Х., Шокиров Ф.Ш. Динамика взаимодействия топологических вихрей с доменной стенкой в (2+1)-мерной нелинейной сигма-модели. – ДАН РТ, 2015, №4, стр. 302-308.
2. Shokirov F.Sh. Dynamics of interaction of domain walls in (2+1)-dimensional non-linear sigma-model // European science review. – «East West» Association for Advanced Studies and Higher Education GmbH, Austria, Vienna, 9-10 (5) 2015, p.151-153.
3. Муминов Х.Х., Шокиров Ф.Ш. Динамика взаимодействий двумерных топологических солитонов в О(3) нелинейной векторной сигма-модели. – ДАНРТ, 2010, т.53, №9, с. 679-684.
4. Шокиров Ф.Ш. Численный анализ структуры топологических солитонов двумерной О(3) векторной нелинейной сигма-модели. – Современные методы теории функций и смежные проблемы: Мат-лы Воронежской зимней математической школы. – Воронеж: ВГУ, 2013, с. 290.
5. Johnson S., Suarez P., Biswas A. New Exact Solutions for the Sine-Gordon Equation. – Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2012, v. 52, №1, pp. 98–104.
6. Белавин А.А., Поляков А.М. Метастабильные состояния двумерного изотропного ферромагнетика. – ЖЭТФ, 1975, 22(10), с. 503-506.
7. Маханьков В.Г., Рыбаков Ю.П., Санюк В.И. Модель Скирма и сильные взаимодействия // УФН, т.162, №2, 1992, 1-61.
8. Kudryavtsev A., Piette V.M.A.G., Zakrjewsky W.J. Skyrmions and domain walls in (2+1) dimensions. – arXiv:hep-th/9709187v1 26 Sep 1997, DTP-97/25, 2008.
9. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977, 657 с.

КОЛЛЕКТИВНАЯ ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ ДИНАМИКА НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Владимир В. Кассандров, Ахмед Х. Мархив

COLLECTIVE POLYNOMIAL DYNAMICS ON THE COMPLEX PLANE

Vladimir V. Kassandrov, Ahmed H. Marhiev

Институт гравитации и космологии РУДН, Москва, Россия

e-mail: vkassan@sci.pfu.edu.ru

Abstract. On the C-plane, we consider the dynamics of N roots of an arbitrary complex N -degree polynomial, with coefficients polynomially dependent on time. The roots represent a set of identical particle-like point objects, and their dynamics, generally, obeys the conservation laws for the total momentum and the analogue of total energy. The extended set of N^2 roots-particles that arises under «bicomplexification» of the polynomial is also conservative and, apart of the initial complex dynamics, the total angular momentum is generally conserved. The two arising subsets exchange energy and angular momentum whereas the momentum is preserved for both subsets separately. Additional conserved quantities are discovered.

Введение. Доклад развивает концепцию единой Мировой линии (ЕМЛ) Штюкельберга-Уилера-Фейнмана [1,2] и конструкцию ансамбля тождественных точечных частиц на ЕМЛ, предложенную в предшествующих работах [3,4]. Такая конструкция основана на *невном* задании МЛ через систему алгебраических уравнений, включающую параметр времени t . В наиболее интересном случае (невырожденной, общего вида) *полиномиальной* системы (для простоты двух) уравнений

$$F(x, y, t) = \sum_{s=0}^{s=m} \sum_{i,j,k}^{i+j+k=s} A_{ijk} x^i y^j t^k = 0, \quad G(x, y, t) = \sum_{s=0}^{s=n} \sum_{i,j,k}^{i+j+k=s} B_{ijk} x^i y^j t^k = 0, \quad (1)$$

корни системы при каждом t определяют положения соответствующего числа тождественных частиц подобных образований – «предэлементов» материи. При возрастании t имеем самосогласованную (2D, плоскую) динамику этих точечных объектов, локализованных либо на одной из (несвязных) ветвей траектории (вещественные корни и отвечающие им т.н. R-частицы), определяемой (1), либо между ветвями (комплексно-сопряженные пары корней, визуализированные по общей действительной части) – т.н. C-частицы [3,4]. В некоторые моменты времени пара R-частиц «сливается», превращаясь затем в *композиционную* C-частицу, либо имеет место обратный процесс. Такие «события» могут служить моделью процессов *аннигиляции/рождения пары*.

В работе [4] было показано, что *формулы Виета* для сумм корней произвольной системы (1) либо их квадратов приводят к $SO(2)$ -инвариантным *законам сохранения* для характеристик RC- системы корней-частиц, близким по структуре к законам сохранения в классической механике Ньютона. А именно, исключая (с помощью т.н. «метода результатов») последовательно одну из неизвестных из системы (1), приходим к двум полиномиальным уравнениям степени $N=nm$,

$$R_x = \sum_{i=0}^{i=N} a_i(t) x^{N-i} = 0, \quad R_y = \sum_{i=0}^{i=N} b_i(t) y^{N-i} = 0, \quad (2)$$

где, в ситуации общего вида, старшие коэффициенты a_0, b_0 -- ненулевые константы, $a_1(t), b_1(t)$ зависят от t линейно, $a_2(t), b_2(t)$ – квадратично, и т.д. Из (2) сразу следует, что система (1) имеет ровно $N=nm$ корней-частиц (R- либо C-). Их координаты связаны формулами Виета, из которых линейные и квадратичные по корням имеют известный вид:

$$\sum_{k=1}^{k=N} x_k = -\frac{a_1}{a_0} \sim t, \quad \sum_{k=1}^{k=N} y_k = -\frac{b_1}{b_0} \sim t, \quad (3)$$

$\sum_{k=1}^{k=N} x_k^2 = \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 - \frac{2a_2}{a_0} \sim t^2$, $\sum_{k=1}^{k=N} y_k^2 = \left(\frac{b_1}{b_0}\right)^2 - \frac{2b_2}{b_0} \sim t^2$ (4). Дифференцируя теперь один раз по времени (3) и 2 раза – (4), приходим к законам сохранения проекций импульса

$$\sum_{k=1}^{k=N} \dot{x}_k = const, \sum_{k=1}^{k=N} \dot{y}_k = const, \quad (5)$$

(в предположении о равенстве масс всех частиц-корней), а также $SO(2)$ -инвариантной величины

$$\sum_{k=1}^{k=N} (\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2) + (x_k \dot{x}_k + y_k \dot{y}_k) = const, \quad (6)$$

близкой к известному в механике «полному вириалу» и являющейся в рассматриваемом подходе аналогом полной энергии RC-системы. Отметим, что закон сохранения полного момента импульса (лишь одна из компонент которого отлична от нуля в рассматриваемом 2Dслучае) также имеет место для полиномиальных систем общего вида. Т.о., коллективная динамика двух типов (R- и C-) корней-частиц на ЕМЛполиномиального вида(1) включает их взаимопревращения и, как правило, **оказывается консервативной**. Релятивистское обобщение такого «алгебродинамического» подхода рассмотрено в [5].

Комплексная динамика. Пусть теперь система двух полиномиальных уравнений (1), в случае $m=n=N^2$, допускает комплексную структуру. Это означает, что она может быть получена в результате выделения вещественной и мнимой частей из единого уравнения

$$P_N := \sum_{k=0}^{k=N} \sum_{i,j}^{i+j=k} P_{ij} z^i t^j = 0, \quad (7)$$

где $z = x + Iy$, а коэффициенты при z производящего полинома степени N , как и прежде, зависят от времени полиномиально. В этом случае имеем, во-первых, набор N вещественных корней-частиц $\{x_k(t), y_k(t)\}$ системы (1), «унаследованных» от корней полинома P_N , и, во-вторых, другую подсистему (N^2-N) комплексных корней, не связанных непосредственно с производящей структурой (7).

В качестве поясняющего примера приведем простую систему двух уравнений типа (1)

$$F = (-2x^3 + 6xy^2 - 3x^2y + y^3 - 7t^2x - t^3) - 5ty + 3y - 9t = 0, \quad (8a)$$

$$G = (x^3 - 3xy^2 - 6x^2y + 2y^3 - 7t^2y + 4t^3) - 5tx - 3x + 8 = 0. \quad (8b)$$

Эта система получена в результате разделения вещественной и мнимой частей из одного комплексного полиномиального уравнения

$$P := F + IG = (-2 + I)z^3 + (-7t^2 + 5It - 3I)z + (-1 + 4I)t^3 - 9t + 8I = 0, \quad (9)$$

и при любом t имеет $3 \times 3 = 9$ корней, из которых три корня наследуются из производящей структуры (9) и всегда (в отношении координат x и y) являются вещественными, а 6 оставшихся образуют 3 комплексно-сопряженные пары.

Расписывая соответствующие формулы Виета для уравнения (7) и, с другой стороны, для результатов «бикомплексифицированной» полной системы типа (1), приходим к следующим выводам:

1. Закон сохранения импульса имеет место не только для полной системы N^2 корней (1), но и по отдельности для каждой из двух вышеопределенных подсистем.
2. Закон сохранения (проекции) момента импульса *не выполняется* ни для подсистемы N корней, унаследованных из (7), ни для другой подсистемы, а лишь для полной системы N^2 корней основной системы (1). Заметим, что в первой подсистеме выражение для этой проекции имеет вид $\sum_{k=1}^{k=N} Im(z_k^* \dot{z}_k)$, где (*) означает комплексное сопряжение.
3. Закон сохранения полного вириала (энергии), разумеется, справедлив как для N корней первой подсистемы, так и для полной системы N^2 корней, однако выражения в этих двух случаях оказываются различными. А именно, для первой подсистемы, индуцированной (7), на самом деле имеем два закона сохранения, определяемых вещественной и мнимой частями выражения:

$$\sum_{k=1}^{k=N} \dot{z}_k^2 + z_k \ddot{z}_k = const = \sum_{k=1}^{k=N} (\dot{x}_k^2 - \dot{y}_k^2 + x_k \ddot{x}_k - y_k \ddot{y}_k) + I(2\dot{x}_k \dot{y}_k + x_k \ddot{y}_k - y_k \ddot{x}_k) \quad (10)$$

(ср. с выражением типа (6) для полной системы N^2 корней). Т.о., в первой подсистеме имеют место законы сохранения, не выполняющиеся во второй! При этом в полной системе сохраняется инвариантная величина (6), отличная по структуре от (10).

Обратим внимание, что $(N^2 - N)$ корней второй, дополнительной подсистемы сами оказываются уже комплексно сопряженными, так что соответствующие частицы-точки принадлежат уже не самой комплексной плоскости, а ее «комплексному» расширению (а именно, 4-мерному бикомплексному пространству). Тем не менее, эти объекты могут быть спроектированы на комплексную плоскость с соответствии с общей для каждой пары вещественной частью (как это имеет место и в общем случае С-частиц, см. выше).

В отличие от описанного вначале общего случая РС-динамики, для полиномиальных систем, допускающих комплексную структуру (7), число частиц каждого вида (R- и С-по отдельности), не меняется со временем: «события», определяемые появлением пары кратных корней, не приводят к последующему изменению типа корней-частиц. Иначе говоря, *контактное взаимодействие* между частицами различных типов отсутствует.

Заключительные замечания. Интересно заметить, что связь корней произвольного комплексного полинома с механикой (в статическом случае) была замечена К.Ф. Гауссом еще в 1836 году [6]. А именно, рассматривались корни $\{z_k\}$ комплексного многочлена общего вида $P_N := \sum_{i=0}^N a_i z^i = 0$ (интерпретируемые как N точек источников на С-плоскости), и производного от него многочлена $P'_N - (N-1)$ «пробная частица». Используя разложение Безу $P_N = a_0(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_N)$ и вычисляя отношение (P'_N/P_N) , легко видеть, что в точках $z = w$, совпадающих с положением одной из «пробных частиц», имеет место равенство:

$$F_x - iF_y := \frac{P'_N}{P_N} \Big|_{z=w} = 0 = \sum_{k=1}^{k=N} \frac{1}{(w-z_k)} = \sum_{k=1}^{k=N} \frac{\operatorname{Re}(w-z_k) - i \operatorname{Im}(w-z_k)}{\|w-z_k\|^2}. \quad (11)$$

Если интерпретировать величины F_x, F_y как проекции результирующей силы, действующей со стороны частиц-источников, то любая из «пробных» частиц находится в поле этих сил в равновесии. Из (11) следует, что такое поле является *радиальным*, и каждая из парциальных сил убывает как $(1/r)$, т.е. обратно пропорционально первой степени расстояния от источника до «пробной» частицы. Таким образом, алгебраически обусловленные условия равновесия позволяют определить конкретный вид взаимодействия между «частицами-источниками» и «пробными» частицами.

К сожалению, конструкция Гаусса не обобщается напрямую ни на нестационарный, ни на 3D случаи (последнее связано с отсутствием ассоциативно/коммутативной алгебры с положительной нормой в 3-мерном пространстве).

Возвращаясь к вышерассмотренной конструкции, подчеркнем, что наиболее интересным с физической точки зрения ее аспектом является естественное возникновение двух «полузамкнутых» подсистем частиц, обменивающимся моментом импульса и (аналогом) механической энергии, но изолированным в отношении импульса. Отметим, что при очень большой степени N генерирующего полинома (7) число частиц в первой из подсистем (N) чрезвычайно мало по сравнению со второй (N^2). Хотя отождествление подобных свойств со свойствами реальных классов частиц, разумеется, преждевременно, само их возникновение в рассмотренной «игрушечной» модели позволяет надеяться на возможность объяснения реалистической физики частиц на основе последовательного алгебродинамического подхода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Stueckelberg E.C.G. // Helv. Phys. Acta – 1941 – Vol.14 – Pp. 588-594
2. Фейнман Р.Ф. // УФН – 1967 – Т. 91 -- С. 29-48
3. Kassandrov V.V., Khasanov I.Sh. // J. Phys. A: Math. Theor.—2013 –Vol.46 – 175206
4. Kassandrov V.V., Khasanov I.Sh., Markova N.V. // Вестник РУДН: Мат.Инф.Физ. – 2014 – Т.2 – С. 169-180
5. Kassandrov V.V., Khasanov I.Sh., Markova N.V. // J. Phys. A: Math. Theor.—2013—Vol.48 – 395204
6. См. Прасолов В.В. Многочлены. – М., МЦНМО – 2001. – С. 21

QUASI-BLACK HOLES IN DILATON GRAVITY WITH ZERO SCALAR CHARGE DENSITY

K.A. Bronnikov^{a,b} and D. Israpilov^b

^a Russian Research Institute of Metrological Service (VNIIMS), Moscow, Russia

^b Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia

Quasi-black holes (QBHs) are hypothetic objects of nonzero mass m whose size is close to the size of a black hole (BH) horizon corresponding to m but still remaining in equilibrium and simulating BHs from the viewpoint of a distant observer. It is thus not excluded that at least some of the objects observed by the astronomers and usually interpreted as BHs can turn out to be QBHs or some other theoretically predicted objects called BH mimickers, such as gravastars, Q-balls, etc.

Well known are QBH models on the basis of the Majumdar-Papapetrou family of solutions to the Einstein equations. Their material content consists of electrically charged dust with charge density (ρ_e) equal to mass density (ρ_m) in units where the gravitational constant $G=1$. In this case, the electric repulsive forces acting on dust particles are precisely balanced by gravitational attraction between them, leading to indifferent equilibrium. Particular solutions from this family represent BHs, and QBH solutions can also be found for properly chosen density profiles. A significant shortcoming of such models is the necessary equality between the the total mass M and the absolute value of the integral charge Q of the object, which is the same as for an extreme Reissner-Nordstrom BH.

This shortcoming is avoided if one adds one more ingredient to the system, a scalar field interacting with the electromagnetic field [1-3]. Indeed, instead of the equality $Q^2 = M^2$ we now have

$$M^2 = Q^2 - \varepsilon D^2, \quad (1)$$

where D is the scalar charge of the object and $\varepsilon = \pm 1$: it is +1 for a normal, canonical scalar field and -1 for a phantom scalar field having a wrong sign of kinetic energy. The equality (1) expresses the fact that a phantom scalar field has a repulsive nature like the electric field and therefore in an equilibrium configuration we can have, for a given mass, a smaller electric charge. On the contrary, a normal scalar field is attractive, therefore to oppose is attraction along with gravity, a still larger scalar charge is needed.

Ref. [1] considered a field system with the Lagrangian

$$L = \frac{1}{16\pi} \left[R + 2\varepsilon(\partial\chi)^2 - F^2 P(\chi) \right] + L_m + A_\mu j^\mu + J\chi, \quad (2)$$

where R is the scalar curvature, χ is a scalar (dilaton) field, $F^2 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, $F_{\mu\nu}$ being the electromagnetic field tensor corresponding to the potential A_μ , j_μ is the electric 4-current density, J is the scalar charge density, and $P(\chi)$ is an arbitrary function describing the scalar-electromagnetic interaction. In [1], some properties of static equilibrium configurations corresponding to (2) were studied, including those with spherical symmetry. In the latter case, in terms of the metric written using the isotropic spherical coordinate x ,

$$ds^2 = e^{2\gamma} dt^2 - e^{-2\gamma} (dx^2 + x^2 d\Omega^2), \quad (3)$$

the field equations have the form

$$\begin{aligned}
 2\varepsilon x^{-2} e^{2\gamma} (x^2 \chi')' + P_\chi \phi'^2 &= -8\pi J(x), \\
 x^{-2} (P e^{-2\gamma} x^2 \phi')' &= 4\pi \rho_e e^{-3\gamma}, \\
 x^{-2} e^{2\gamma} (x^2 \gamma')' - P \phi'^2 &= 4\pi \rho_m, \\
 \gamma'^2 + \varepsilon \chi'^2 &= e^{-2\gamma} P \phi'^2, \\
 \rho_m \gamma' - \rho_e \phi' e^{-\gamma} &= J \chi',
 \end{aligned} \tag{4}$$

where the prime denotes d/dx and $\varphi(x) = A_0$ is the electric field potential. In [1], some examples of BH and QBH solutions to Eqs. (4) were obtained, including those with positive-definite matter density ρ_m and a canonical scalar field χ . The QBH solutions obtained there are asymptotically flat and possess a regular center; all densities, including J , and all field variables are regular functions of the radial coordinate x .

In the present study, we try to obtain similar solutions to Eqs. (4) under an additional assumption that the scalar charge density J is zero. This assumption is motivated by the absence of a scalar charge conservation law and by the fact that a scalar charge is not observed in the experiment. We show that, with a proper choice of the interaction function $P(\chi)$ and the mass and electric charge densities, it is possible to obtain globally regular configurations which, under a proper choice of the parameters, have QBH properties. In particular, such a solution is obtained if we assume, as in [1],

$$e^\gamma = \frac{z}{m + 2z - y}, \quad y := \sqrt{x^2 + a^2}, \quad z := \sqrt{x^2 + c^2}, \tag{5}$$

with certain positive constants m, a, c . At small and large x we have

$$\begin{aligned}
 x \rightarrow 0: \quad e^{2\gamma} &= \frac{c^2}{(m - a + 2c)^2} + x^2 \frac{m - a + c^2/a}{(m - a + 2c)^3} + O(x^4), \\
 x \rightarrow \infty: \quad e^{2\gamma} &= 1 - \frac{2m}{x} + \frac{3m^2 + a^2 - c^2}{x^2} + O(x^{-3}).
 \end{aligned} \tag{6}$$

Such asymptotic behaviors mean that the configuration has a regular center and is asymptotically flat, and m has the meaning of the Schwarzschild mass.

Assuming, in addition, $\chi = k\gamma$, $k = \text{const}$, it is possible to find all other quantities from Eqs. (4). In particular, assuming that the electromagnetic field is Maxwellian at spatial infinity, that is, $P \rightarrow 1$ as $x \rightarrow \infty$, we obtain

$$P = (x^2 \gamma' / m)^{2h-2}, \quad h := 1/(1 - \varepsilon k^2). \tag{7}$$

Since at a regular center $x^2 \gamma' \rightarrow 0$, we find that at such a center $P(\chi) \rightarrow 0$ if $\varepsilon = -1$ (χ is a phantom field) and, on the contrary, $P(\chi) \rightarrow \infty$ if $\varepsilon = +1$ (χ is a canonical field). We thus obtain an asymptotically singular coupling function $P(\chi)$ at a regular center if we assume $\chi = k\gamma$. It is an undesirable feature, similar to what was obtained in [3] for purely field configurations, without sources, $\rho_m = \rho_e = J = 0$. However, without the assumption $\chi = k\gamma$, solutions with $J = 0$ and a finite value of $P(\chi)$ at the center are not excluded.

In conclusion, we present plots of $\gamma(x)$ and $\rho_m(x)$ for some values of the parameters in the ansatz (4) and $\chi = k\gamma$ (Figs. 1, 2).

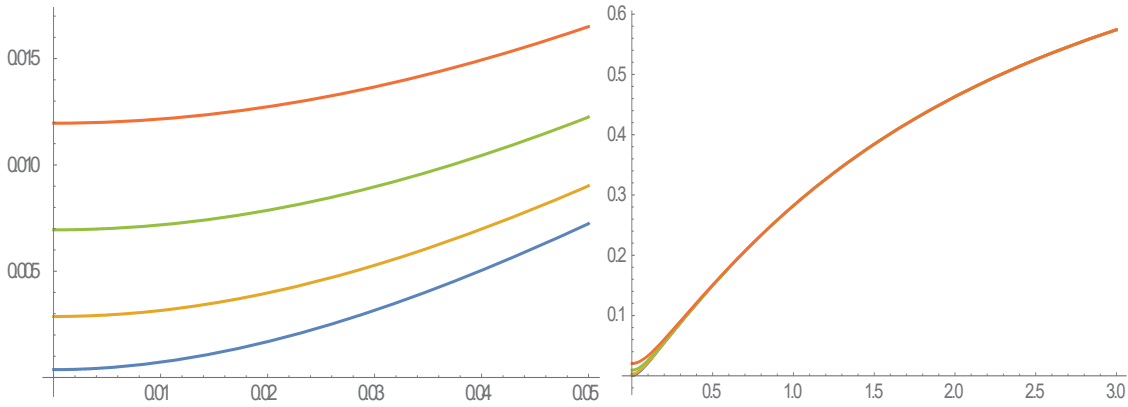


Figure 1. Plots of $e^{2\gamma(x)}$ for models (5) with $m=1$, $a = 0.5$, $k = 0.1$, $c = 0.01, 0.03, 0.05, 0.07$ (bottom up). The right panel shows that the curves almost merge at large x .

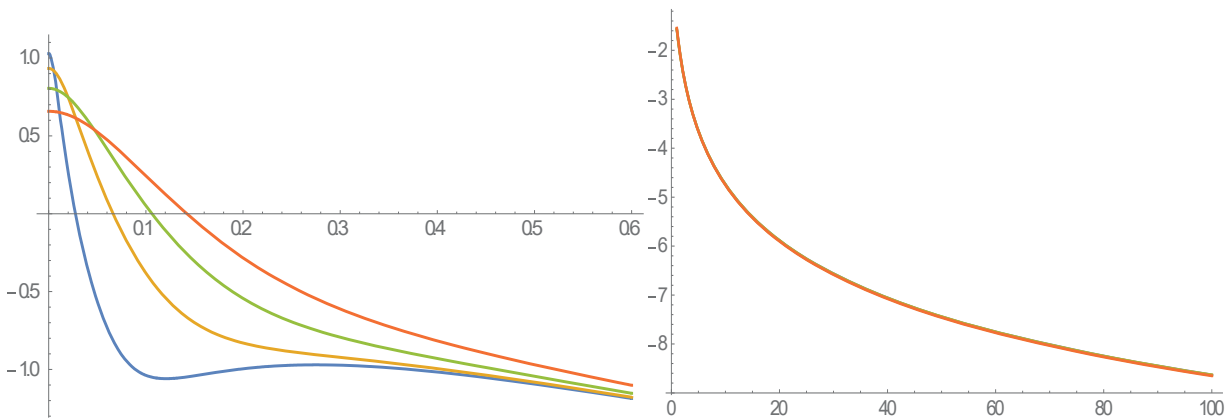


Figure 2. Decimal logarithms of $\rho_m(x)$ for models (5) with $m=1$, $\varepsilon = +1$, $a = 0.5$, $k = 0.1$, $c = 0.01, 0.03, 0.06, 0.1$ (bottom up). The curves also practically merge at large x .

Note that solutions with small values of c correspond to QBHs. Our results show that QBHs can be obtained with a canonical scalar field and positive matter density $\rho_m(x)$.

References

1. K.A. Bronnikov, J.C. Fabris, R. Silveira, and O.B. Zaslavskii, Dilaton gravity, (quasi-) black holes, and scalar charge. *Gen. Rel. Grav.* **46**, 1775 (2014); ArXiv: 1312.4891.
2. K.A. Bronnikov, J.C. Fabris, R. Silveira, and O.B. Zaslavskii, Dilaton gravity, charged dust, and (quasi-) black holes. *Phys. Rev. D* **89**, 107501 (2014); ArXiv: 1405.6116.
3. K.A. Bronnikov and O.B. Zaslavskii, Quasi-black holes: general features and purely field configurations. *Mod. Phys. Lett. A* **30**, 15550154 (2015); ArXiv: 1504.07022.

WORMHOLES AND BLACK UNIVERSES WITH VARIOUS ASYMPTOTIC BEHAVIOR

K.A. Bronnikov^{a,b} and P.A. Korolyov^b

^a Russian Research Institute of Metrological Service (VNIIMS), Moscow, Russia

^b Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia

We construct explicit examples of globally regular static, spherically symmetric solutions in general relativity with scalar and electromagnetic fields, describing traversable worm holes and regular black holes, in particular, black universes with various (flat, dS, AdS, flux tube) asymptotics. (Black universes are regular black holes with expanding, in many cases asymptotically isotropic space-times beyond the horizon.) The existence of such objects requires invoking scalars with negative kinetic energy ("phantoms", or "ghosts"), which are not observed under usual physical conditions. To account for that, the so-called "trapped ghosts" were previously introduced, i.e., scalars whose kinetic energy is only negative in a restricted strong-field region of space-time and positive outside it. This approach leads to certain problems, including instability (as we illustrate by derivation of an effective potential for spherical perturbations of such systems). To avoid that, we use for model construction what we call "invisible ghosts", i.e., phantom scalar fields sufficiently rapidly decaying in the weak-field region. The resulting configurations contain different numbers of Killing horizons, from zero to four. Their global structure has been studied with the aid of Carter-Penrose diagrams.

О ВОЗМОЖНОМ ВЛИЯНИИ ТЕМНОЙ МАТЕРИИ НА ДВИЖЕНИЕ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ В ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ ВЕЙЛЯ–ДИРАКА

О.В. Бабурова, П.Э. Кудлаев, Б.Н. Фролов

Московский педагогический государственный университет,

Институт физики, технологии и информационных систем,

Москва, Российская Федерация

E-mails: baburova@orc.ru, pavelkudlaev@mail.ru, frolovbn@orc.r

В [1] было получено сферически-симметричное решение теории гравитации Вейля–Дирака, которая представляет собой пуанкаре-вейль калибровочную теорию гравитации [2] в пространстве Картана–Вейля со скалярным полем Дирака β , которое в [3] интерпретировалось как наличие темной материи в пространстве вокруг центрального тела. Данное решение было уточнено в [4] в виде

$$ds^2 = e^{-2U-\mu} dt^2 - e^{-2U+\mu} (dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)), \quad (1)$$

где $\mu(r) = r_g/r$, $U(r) = \ln \beta(r) = \pm (k/2)\mu(r)$ (r_g – гравитационный радиус центрального тела). В простейшем случае можно выбрать $k = 1/\sqrt{l_1}$, где l_1 – константа связи при квадрате производной от поля β в гравитационном лагранжиане, предложенном в [1].

Рассмотрим движение пробного тела в метрике (1). t -компонента уравнения геодезической имеет интеграл $\exp(-(1 \pm k)r_g/r)(c dt/ds) = E_0$. Тогда после деления (1) на ds^2 и ряда преобразований получаем для радиального движения ($v = dr/dt$):

$$\frac{v^2}{c^2} = e^{-\frac{2r_g}{r}} \left(1 - \frac{1}{E_0^2} e^{-(1 \pm k) \frac{r_g}{r}} \right), \quad \frac{v_\infty^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{E_0^2}, \quad (2)$$

где v_∞ – асимптотическая скорость пробного тела на бесконечности.

Применим (2) к старту тела с Земли. В ньютоновом приближении получаем

$$\frac{v_\infty^2 - v_{\infty/0}^2}{c^2} \approx \mp k \frac{r_g}{R_3}, \quad (3)$$

где $v_{\infty/0}$ – величина скорости тела на бесконечности, рассчитанная при условии $k = 0$.

Данные по старту космических аппаратов с Земли указывают на ненулевое значение величины (3), причем $|v_\infty - v_{\infty/0}| \approx (1 \div 10) (мм / с)$ [4]. Поэтому формула (3) позволяет оценить величины k и l_1 , а тем самым и величину массы поля Дирака β .

Список литературы:

1. Бабурова О. В., Фролов Б. Н., Фебрес Е. В. // Изв. высш. уч. завед. Физика.–2014.–Т. 57.–№ .–С. 131–132.
2. Babourova O. V., Frolov B. N., Zhukovsky V. Ch. // Phys. Rev. D.–2006.–V. 74.– P. 064012-1-12 (gr-qc/0508088).
3. Бабурова О. В., Фролов Б. Н. Математические проблемы современной теории гравитации.–М.: МПГУ, Издательство «Прометей», 2012.–128 с
4. Babourova O. V., Frolov B. N., Kudlaev P. E., Romanova E.V. // In: Gravitation, Astrophysics, and Cosmology / Proc. 12th Asia-Pacific Int. Conf. (Moscow, 28 Jun-5 July 2015). – 2016. – P. 191–195.
5. Iorio L. // Int. J. Mod. Phys. D. – 2015. – V. 24, No. 6. – 1530015 (37 p.).

АТОМ ВОДОРОДА С УЧЁТОМ ГРАВИТАЦИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Ю.П. Лаптев и М.Л. Фильченков

«THE HYDROGEN ATOM WITH REGARD TO A GRAVITATIONAL INTERACTION»

Yu.P. Laptev and M.L. Fil'chenkov

*Учебно-научный институт гравитации и космологии
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
e-mail: yplaptev@rambler.ru; fmichael@mail.ru*

The hydrogen atom is considered taking account of electromagnetic as well as gravitational interaction. Its energy spectrum is presented in Pauli's approximation. The intensity of gravitationally radiation is calculated for the $3d \rightarrow 1s$ transition. The integral gravitational radiation from all hydrogen atoms in the Universe is estimated.

Рассматривается атом водорода с учётом как электромагнитного, так и гравитационного взаимодействия. Приводится его энергетический спектр в приближении Паули. Вычисляется интенсивность гравитационного излучения при $3d \rightarrow 1s$ переходе. Оценивается интегральное гравитационное излучение всех атомов водорода во Вселенной.

Атом водорода представляет собой связанную систему, состоящую из протона и электрона, которые обладают зарядом и массой, поэтому их связывает, вообще говоря, как электромагнитное, так и гравитационное взаимодействие. Потенциальная энергия такой системы с учётом движения протона имеет вид:

$$U(r) = -\frac{e^2}{r} - \frac{Gm_p\mu}{r} + \frac{Gm_p(e^2 + Gm_p\mu)}{2c^2r^2} + \frac{G\mu(e^2 + Gm_p\mu)}{2c^2r^2}, \quad (1)$$

где первый член описывает кулоновское взаимодействие между зарядами протона и электрона, второй – гравитационное взаимодействие между их массами, третий – взаимодействие между зарядом электрона и массой протона, т. н. деви́ттовское самодействие [1], четвёртый – взаимодействие заряда протона с массой электрона, которое следует из метрики Рейсснера – Нордстрёма [2], и связи временной компоненты метрики с соответствующим потенциалом [3]. В этой формуле

$$\mu = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p} \quad (2)$$

есть приведённая масса. Перепишем (1) в более компактном виде:

$$U(r) = -\frac{\widetilde{e}^2}{r} + \frac{\widetilde{e}^2 G(m_p + \mu)}{2c^2r^2}, \quad (3)$$

введя обозначение

$$\widetilde{e}^2 = e^2 + Gm_p\mu, \quad (4)$$

где поправка к квадрату заряда обусловлена гравитационным самодействием.

Энергетический спектр атома водорода с релятивистскими поправками в приближении Паули имеет вид [4]:

$$E = -\frac{\mu c^2 \alpha_e^2}{2n^2} \left[1 + \frac{\alpha_e}{n} \left(\frac{\alpha_e}{j + \frac{1}{2}} - \frac{\alpha_g}{l + \frac{1}{2}} \right) - \frac{3\alpha_e^2}{4n^2} \right], \quad (5)$$

$$j = l + s,$$

где n – главное квантовое число, l – орбитальное квантовое число, s – спин, а в константах

$$\alpha_e = \frac{\widetilde{e}^2}{\hbar c}, \quad \alpha_g = \frac{Gm_p\mu}{\hbar c}$$

заряды и массы переобозначены:

$$e^2 \rightarrow \widetilde{e}^2, \quad m_e \rightarrow \mu.$$

Поскольку

$$\frac{\alpha_g}{\alpha_e} \ll 1, \quad \frac{m_e}{m_p} \ll 1,$$

то влиянием гравитационного взаимодействия и движением протона на энергетический спектр и электромагнитное излучение атома водорода можно пренебречь.

Что касается гравитационного излучения атома водорода, то оно обусловлено квадрупольными переходами между электромагнитными уровнями. Для перехода $3d \rightarrow 1s$ интенсивность гравитационного излучения атома водорода дается формулой [5]

$$I_{gH} = \frac{3}{2^7} \alpha_e^8 \frac{l_{pl}^2 c}{\lambda_{ce}^3} m_p c^2 = 4 \cdot 10^{-46} \text{ эрг/с}, \quad (6)$$

где l_{pl} – планковская длина, λ_{ce} – комптоновская длина электрона.

Полная энергия гравитационного излучения атомов водорода во Вселенной, число которых порядка $0,05 N_{Edd}$, за время существования Метагалактики $1/H$

$$E_{gH} = I_{gH} \frac{0,05 N_{Edd}}{H},$$

где

$$N_{Edd} = \frac{4\pi \rho_{cr} R^3}{3 m_p}, \quad R = \frac{c}{H}, \quad \rho_{cr} = \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad H = 67,80 \pm 0,77 \frac{\text{км}}{\text{с} \cdot \text{Мпк}}.$$

Отсюда получаем, что

$$E_{gH} = \frac{3}{2^7} \alpha_e^8 \frac{l_{pl}^2 c}{\lambda_{ce}^3} \frac{L_{max}}{H^2} = 5 \cdot 10^{50} \text{ эрг}, \quad (7)$$

где $L_{max} = \frac{c^5}{2G}$.

Интересно отметить, что приведённая в работе [6] энергия гравитационного излучения при слиянии двух чёрных дыр на четыре порядка больше гравитационного фона, обусловленного переходами в атомах водорода.

Полная масса атомов водорода в Метагалактике $M_H = 0,05M$, где M – масса Метагалактики, радиус которой $R = \frac{2GM}{c^2}$ равен её гравитационному радиусу.

Отношение полной энергии гравитационного излучения атомов водорода к их энергии покоя

$$\frac{E_{gH}}{Mc^2} = \frac{15}{32} \alpha_e^8 \frac{l_{pl}^2 c}{\lambda_{ce}^3 H} = 2 \cdot 10^{-24}. \quad (8)$$

Отношение интенсивности гравитационного излучения атома водорода для перехода $a3d \rightarrow 1s$ к интенсивности электрического дипольного излучения для перехода $2p \rightarrow 1s$

$$\frac{I_{13}^g}{I_{12}^d} = \frac{3^7}{2^{14}} \alpha_e \alpha_g = 3 \cdot 10^{-45}. \quad (9)$$

Литература:

1. С.М. DeWitt, В.С. DeWitt, Physics. – 1964, 1, p. 3.
2. И.Д. Новиков, В.П. Фролов. Физика чёрных дыр. – М.: Наука ФМ, 1986.
3. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теория поля. – М.: Наука ФМ, 2006.
4. Г.Бете, Э. Солпитер. Квантовая механика с одним и двумя электронами. – М.: ГИФМЛ, 1960.
5. M.L. Fil'chenkov. Quantum Gravity. Moscow. PFUR Publ., 2013.
6. В.Р. Abbott et al., Phys. Rev. Lett. – 2016, 116, 061102.

ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС И КВАНТОВАЯ СТАТИСТИКА

Т.Ф. Камалов

Московский Физико-Технический Институт, Долгопрудный, ул. Институтская, 11

E-mail: timkamalov@mail.ru

Аннотация. Может ли привести учет динамического хаоса к пониманию природы квантовой статистики?

DYNAMICAL CHAOS AND QUANTUM STATISTICS

T.F. Kamalov

Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudnyi, Institutskaya str., 11

E-mail: timkamalov@mail.ru

Abstract. Can Dynamical Chaos be considered the Nature of Quantum Statistics? The answer to this question is positive here.

Нахождение частицы в динамическом хаосе означает, что малые изменения начальных условий и самих переменных не позволяют определять их точно. Рассмотрим элементы механической системы при нахождении в динамическом хаосе. Тогда связанная с пробным телом система отсчета является локально-неинерциальной системой отсчета.

Рассмотрим де-Бройлевскую волну $\psi = \psi_0 \exp(iS/\hbar)$ с минимальной функцией действия, которую можно определить из соотношения неопределенности Гейзенберга. Т.е.

$$\psi = \psi_0 e^{i \frac{\Delta p \Delta q + \Delta E \Delta t}{\hbar}} = \psi_0 e^{i \frac{\Delta t}{\hbar} \left(\frac{\Delta p}{\Delta q \Delta t} - F \right)} = \psi_0 e^{i f_0 f_Q}, \quad (1)$$

где введены обозначения $f_0 = \frac{\Delta p}{\Delta t} - F$, $f_Q = \frac{\hbar}{\Delta q \Delta t}$.

Любая система отсчета может быть подвержена случайным внешним воздействиям. Таким образом, каждая система отсчета является индивидуальной и переход от одной к другой системе отсчета может привести к скачкообразным изменениям. Инерциальные системы отсчета в классической механике существуют без учета динамического хаоса как средние от реальных систем отсчета с динамическим хаосом (динамические системы отсчета). Соответственно, относительность Галилея также является средним понятием при учете динамического хаоса. В динамическом хаосе имеется множество траекторий частиц, соответствующих различным системам отсчета. В таком подходе принцип неопределенности Гейзенберга может быть понят как неопределенность координаты и импульса в динамическом хаосе, а теорему Эрэнфеста описывает усреднение динамического хаоса.

При рассмотрении динамической системы в динамическом хаосе можно рассмотреть разложение импульса и координаты в ряд Тейлора

$$p(t + \Delta t) = p(t) + \dot{p}(t)\Delta t + \frac{1}{2!}\ddot{p}(t)\Delta t^2 + \dots + \frac{1}{n!}p^{(n)}(t)\Delta t^n + \dots \quad (2)$$

$$q(t + \Delta t) = q(t) + \dot{q}(t)\Delta t + \frac{1}{2!}\ddot{q}(t)\Delta t^2 + \dots + \frac{1}{n!}q^{(n)}(t)\Delta t^n + \dots \quad (2a)$$

Круглыми скобками здесь обозначены порядок производных координат или импульсов по времени.

В рамках представляемой картины, описывая поведение динамической системы в динамическом хаосе, производные высшего порядка координат $q^{(n)}$ и импульсов $p^{(n)}$ по времени образуют многомерное фазовое пространство. Бесконечномерное Гильбертово пространство с ψ^n можно сопоставить с бесконечномерным фазовым пространством высших производных с $\dot{q}^{(n)}$ и $\dot{p}^{(n)}$.

Переписав в (1) f_o в виде

$$f_o = \frac{\Delta p}{\Delta t} - F = \frac{p(t + \Delta t) - p(t)}{\Delta t} - F$$

И подставив в него (2) получаем

$$\begin{aligned} f_o &= \frac{\Delta p}{\Delta t} - F = \frac{p(t + \Delta t) - p(t)}{\Delta t} - F = \\ &= -F + \dot{p}(t) + \frac{1}{2!}\ddot{p}(t)\Delta t + \dots + \frac{1}{n!}p^{(n)}(t)\Delta t^{n-1} + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Величина f_o представляет собой мгновенную силу инерции, т.к. она выражает второй закон Ньютона плюс сила, зависящая от высших производных координат по времени. В динамическом хаосе второй закон Ньютона выполняется с точностью до высших производных координаты по времени.

$$f_o = \frac{\hbar}{\Delta q \Delta t}$$

Величина $f_o = \frac{\hbar}{\Delta q \Delta t}$ это по размерности некоторая квантовая сила. Тогда равенство $f_o = f_o$ позволяет вычислить постоянную Планка с помощью переменных динамического хаоса. Без учета высших производных показатель экспоненты равен нулю, т.к. в этом случае выполняется закон Ньютона. В общем случае в показателе экспоненты стоит разность между описанием Остроградского и Ньютона, выражающиеся высшими производными. Окончательно с учетом $\Delta q = q(t + \Delta t) - q(t)$ и (3a) получаем

$$\hbar = \left(\frac{1}{2!}\ddot{p}(t)\Delta t^2 + \dots + \frac{1}{n!}p^{(n)}(t)\Delta t^n + \dots \right) \left(\dot{q}(t)\Delta t + \frac{1}{2!}\ddot{q}(t)\Delta t^2 + \dots + \frac{(-1)^n}{n!}q^{(n)}(t)\Delta t^n + \dots \right)$$

Здесь первый множитель – это неопределенность импульса, а второй – неопределенность координаты.

Иными словами, неопределенность второго закона Ньютона в динамическом хаосе выполняется с точностью до постоянной Планка \hbar . Если мы хотим более высокую точность классических описаний, то необходимо учитывать высшие производные. В противном случае

они будут играть роль *скрытых параметров* существующих в реальности, но неучтенных в теории. Отметим, что эти скрытые параметры носят *нелокальный характер*, т.е. явно не зависят от координат.

Если функция действия физического объекта в динамическом хаосе $S = S(q, \dot{q}, \ddot{q}, \dots, \dot{q}^{(n)}, \dots)$ конечна и выражается сходящимся рядом с высшими степенями производных от координат по времени $\dot{q}^{(n)}$, то нижняя граница разности $\sup |S(q, \dot{q}, \ddot{q}, \dots, \dot{q}^{(n)}, \dots) - S(q, \dot{q})| = \hbar$ также конечна и ограничена постоянной Планка \hbar .

Далее введем обозначение, где высшие производные координат по времени играют роль нелокальных скрытых параметров, от которых зависит волновая функция

$$|\psi(t)\rangle = |q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t), \dots, q^{(n)}(t)\rangle = |Q(t)\rangle.$$

Интеграл Фейнмана по траекториям с учетом скрытых параметров при переходе частицы и одной точки в другую можно определить так

$$\langle Q_1, t_1 | Q_2, t_2 \rangle = \int_{t_1}^{t_2} DQ \exp\left(\frac{i}{\hbar} L(Q) dt\right)$$

где в введенных обозначениях $Q = Q(q, \dot{q}, \ddot{q}, \ddot{\ddot{q}}, \dots, \dot{q}^{(n)}, \dots)$ функция действия примет вид

$$A_{Q(R)} = \int \left\langle q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t), \dots, q^{(n)}(t) \left[i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) - H \right] q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t), \dots, q^{(n)}(t) \right\rangle dt$$

Из выше описанного можно заключить, что на поставленный в начале вопрос можно дать положительный ответ, т.е. учет динамического хаоса может привести к пониманию природы квантовой статистики.

Литература

1. T.F. Kamalov, Classical and quantum-mechanical axioms with the higher time derivative formalism, Journal of Physics: CS, 442 012051 (2013)

ДОСТИЖЕНИЕ КОНЕЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Молодцова М.О., Копылов С.В.

ACHIEVEMENT OF FINITE VALUES OF PHYSICAL QUANTITIES

M.O. Molodtsova, S.V. Kopylov

Московский политехнический университет,
ул. Б. Семёновская, 38, 107023, Москва, Россия
e-mail: kopsv@mail.ru

Введение. Рассматриваются модели физических процессов, для которых решения соответствующих дифференциальных уравнений стремятся к нулю на бесконечности. Делается попытка за счёт «физически» приемлемой модификации уравнений достичь конечных значений величин входящих в модель.

Introduction. The models of physical processes are considered, for which solutions of the corresponding differential equations tend to zero at infinity. An attempt is made to achieve finite values of the quantities involved in the model by a "physically" reasonable modification of the equations.

1. Преобразование уравнения.

Существует большое количество моделей физических процессов описываемых дифференциальными уравнениями вида $dP/dt = -(1/\tau)P$. Общим решением этого уравнения «движения», для начальных условий: $t = 0$; $P = P_0$, является выражение $P = P_0 \exp(-t/\tau)$. Легко видеть, что значение $P=0$ достигается при $t=\infty$, что конечно не «физично», и свидетельствует о неполноте выбранной модели математического описания. Нашей целью будет преобразование уравнения к виду, когда время достижения значения $P=0$ станет конечным.

Ясно, что здесь существенным преобразованиям должен подвергнуться тот участок решения, когда P становится малым. Однако малость – вещь относительная, следует решить вопрос относительно чего определять эту малость. Естественным масштабом сравнения для величины P является величина P_0 . Поэтому уравнение следует представить в виде:

$$dX/dt = -(1/\tau)X, \text{ где } X = P/P_0 \leq 1, \text{ а его решение тогда, примет вид } - X = \exp(-t/\tau).$$

1.1. Правая часть уравнения. Преобразуем уравнение к виду: $dX/dt = -(1/\tau)X^{1-\xi}$. Это преобразование делает уравнение нелинейным [6], однако получение его решений трудностей не представляет. Будем иметь: $X^\xi = 1 - (\xi/\tau)t$.

Остановка будет достигнута при $X=0$, то есть при $t_{X=0} = \tau/\xi$.

Всё это реализуется при $\xi > 0$, для $\xi \leq 0$ нулевое значение X , по прежнему, будет достигаться за бесконечное время.

1.2. Левая часть уравнения. Преобразуем уравнение к виду: $dX^{1+\xi} / dt = -(1/\tau) X$, тогда $X^\xi = 1 - (\xi/\tau(1+\xi))t$. $X=0$ будет достигнуто при $t_{X=0} = \tau(1+\xi)/\xi$. Ясно, что в п./п. 1.1. и 1.2. мы имеем дело с одним и тем же математическим преобразованием уравнения, записанным в несколько разной форме.

2. Физическое содержание рассматриваемого преобразования.

Уравнение «движения» содержит в себе: слева кинематическую составляющую, а справа «силу» – динамическую составляющую, описываемого процесса. Соответственно этому мы рассматриваем две трактовки приводящие к модификации уравнения описанные выше.

2.1. Кинематический подход. Рассмотрим стандартную задачу о средней скорости. Пусть объект двигался половину пути со скоростью $V+v$ одной скоростью, а вторую половину пути с другой $V-v$. Тогда его средняя скорость, по определению:

$\langle V \rangle = 2L/(t_1+t_2) = 2L/(L/(V+v)+L/(V-v))$, или $\langle V \rangle = V - (v^2/V)$. В этом соотношении всегда будет минус, не зависимо от того, на первой половине пути скорость выбрана меньшей или на второй. Более того, с уменьшением V средняя скорость $\langle V \rangle$ уменьшается всё более значительно. Используем этот результат. Тогда феноменологически это должно выражаться в уменьшении V . Это нами и было проделано при замене X на $X^{1+\xi}$, с учётом $X = P/P_0 \leq 1$, см. п./п. 1.2.

2.2. Динамический подход. Обращаясь к уравнению «движения», мы можем сказать, что правая часть уравнения это диссипативная сила «трения». В ситуации, когда величина P стремится к нулю, влияние флуктуаций среды на объект становится заметным уже и на фоне основных причин торможения системы. Из термодинамических соображений ясно, что такое влияние должно выражаться в дополнительной диссипации энергии «движения» системы. Феноменологически это должно выражаться в увеличении силы «трения», что нами и было проделано при замене силы «трения» в форме $-(1/\tau) X$ на силу «трения» в форме $-(1/\tau) X^{1+\xi}$, с учётом $X = P/P_0 \leq 1$, см. п/п 1.1.

Опираясь на изложенное можно сказать, что обе рассмотренные трактовки, кинематическая и динамическая, с разных точек зрения описывают один и тот же эффект - влияние малых, флуктуационных воздействий на систему. Соответственно и результат этого воздействия должен быть одним и тем же, что мы и получаем как результат нашего рассмотрения. Это подтверждается также однотипностью результатов математического рассмотрения в п./п. 1.1. и 1.2.

3. Конечная длине диффузии в реагирующих средах.

В предыдущих работах [1-5] нами рассмотрен процесс диффузии газа в облучаемый материал в основном с экспериментальной точки зрения. Облучение вызывает реакции поглощение диффундирующего газа материалом образца. В стационарном случае $C_i(x,t) = 0$, для диффузии в полупространство, такой процесс описывается уравнением:

$d^2C(x)/dx^2 = q^2 C(x)$, $q^2 = k I / D$, с решением: $C(x) = C_1 \exp(-qx) + C_2 \exp(+qx)$. Здесь: $C_{1,2}$ - константы, D – коэффициент диффузии, $C(x,t)$ – концентрация кислорода, I – интенсивность излучения, k – константа реакции.

Аналогично изложенному в п.1, уравнение следует преобразовать к виду:

$$d^2 X(x) / dx^2 = q^2 X(x), \text{ где } X = C / C_0 \leq 1, \text{ а } C_0 - \text{ концентрация при поверхности образца.}$$

Имея в виду это преобразование, для наглядности, мы всё же останемся при старых обозначениях.

3.1. Флуктуации. Граничные условия $C(0) = C_0$, $C(\infty) = 0$ приводят к значениям констант в общем решении: $C_2 = 0$, $C_1 = C_0$, и тем самым к решению вида $C = C_0 \exp(-qx)$. Зачастую считается, что этого и достаточно, так как концентрация по глубине спадает очень быстро, и на конечных глубинах достигает «не физических» величин. То есть под $x = \infty$ подразумевают «физическую» бесконечность.

Тем не менее, задача достижения нулевой концентрации диффундирующего вещества на конечной глубине, как задача физическая, а не только формально-математическая, вне зависимости от изложенного выше мнения, имеет решение.

При «малых» значениях $C(x)$ величина флуктуаций концентрации становится заметной по сравнению с величиной концентрации C . Флуктуируя, концентрация C возрастает по сравнению со средней величиной концентрации в данной области. Это, в частности, приводит к более интенсивному вступлению диффундирующего газа в реакции в данной области, чем это было бы в отсутствии флуктуаций.

Рассмотрим интервал Δx в глубине образца. Разобьем его, для простоты, на две равные части, величиной $\Delta x / 2$. Пусть часть молекул из второй части, на фоне стационарного процесса диффузии, на некоторое время флуктуировала в первую часть. Тогда концентрация в первой части стала $C + \gamma C$, то есть $C(1 + \gamma)$, а во второй, соответственно, $C - \gamma C = C(1 - \gamma)$.

Фактически можно говорить об изменении коэффициента q^2 в уравнении диффузии в первой части образца до значений $q^2(1 + \gamma)$, а во второй до $q^2(1 - \gamma)$.

Обозначим концентрацию в начале интервала Δx как C_0 . Тогда в процессе диффузии в присутствии облучения концентрация в середине образца станет $C_0 \exp\{-\sqrt{q^2(1 + \gamma)} \Delta x / 2\} = C_{1/2}$. Концентрация же на конце интервала Δx , таким образом будет $C_{1/2} \exp\{-\sqrt{q^2(1 - \gamma)} \Delta x / 2\}$. Или, что тоже, $C_0 \exp\{-\sqrt{q^2(1 + \gamma)} \Delta x / 2 - \sqrt{q^2(1 - \gamma)} \Delta x / 2\}$. Разложим в ряд выражение $\sqrt{q^2(1 \pm \gamma)}$, получим $\sqrt{q^2(1 \pm \gamma)} \approx q(1 \pm \gamma / 2 - \gamma^2 / 8)$. Таким образом, концентрация на конце интервала равна $C_0 \exp\{-q(1 - \gamma^2 / 8) \Delta x\} = C_0 [\exp\{-q \Delta x\}]^{(1 - \gamma^2 / 8)}$.

Это означает, что концентрация на конце интервала Δx при учёте флуктуаций отличается от концентрации на конце того же интервала, в случае отсутствия флуктуаций. Последняя равна $C_0 \exp\{-q \Delta x\}$, и таким образом различие заключено в степени члена в квадратных скобках.

Таким образом, наличие флуктуаций приводит к возрастанию «средней» концентрации подвергаемой облучению в каждой области Δx . Но, при «больших» концентрациях этот эффект незначителен, так как γ и тем более γ^2 пренебрежимо мало. При «малых» концентрациях этот эффект может стать существенным, так как γ , в нашей модели, возрастает вплоть до величин равных единице.

Таким образом, уравнение диффузии принимает вид: $d^2 C(x) / dx^2 = q^2 C(x)^{(1 - \gamma^2 / 8)}$ то есть становится нелинейным.

Известно [6], что решение нелинейных уравнений $d^2 C(\mathbf{x})/dx^2 = f[C(\mathbf{x})]$ имеет вид: $\int dC/\sqrt{C_1 + 2\int f(C)dC} = C_2 \pm x$. Однако, соответствующий интеграл, даже в нашем, достаточно простом случае: $f(C(\mathbf{x})) = q^2 (C(\mathbf{x}))^{(1-(\gamma^2)/8)}$, может быть представлен в аналитическом виде в основном посредством специальных функций. Но даже при этом, искомое решение - функция обратная найденной. Таким образом, аналитическое представление решения уравнения в общем виде затруднено.

Тем не менее, исходя из поставленной цели, искомое решение уравнения можно попытаться искать в виде: $C(x) = C_0 (1 - x/L_0)^k$.

Подставляя $C(x)$ в уравнение получаем, что соответствующее $C(x)$ будет его решением в случае: $k - 2 = k(1 - \gamma^2/8)$ т.е. $16/k = \gamma^2$;

$k(k-1)(-1/L_0)^2 = q^2 C_0^{-\gamma^2/8} \Rightarrow k(k-1) = q^2 C_0^{-\gamma^2/8} L_0^2$. Зная C_0 , L_0 и q^2 из этой системы уравнений можно оценить k и γ .

Если $\gamma \rightarrow 0 \Rightarrow k \rightarrow \infty \Rightarrow L_0 \rightarrow \infty$, то есть мы возвращаемся к исходному уравнению и его решению, как это и должно быть.

В предельном, для нашей модели случае $\gamma = 1 \Rightarrow k = 16$. Хотя достаточно было бы условия $k(1 - \gamma^2/8) \geq 0$, то есть условия $k - 2 \geq 0 \Rightarrow k \geq 2$.

Следует иметь, однако, в виду, что нелинейные эффекты существенны при «малых» концентрациях, диффузия же на основном участке обычно не требует учёта этого эффекта из-за малости γ . Это и приводит к хорошему совпадению экспериментальных результатов с решением исходного уравнения.

3.2. Таким образом, механизмом, обеспечивающим конечную длину диффузии в образец, в присутствии облучения, как и в выше рассмотренных примерах, является наличие флуктуаций концентрации.

Литература.

1. Копылов С.В., Плескачевский Ю.М., Селькин В.П. Решение стационарных уравнений параболического типа в реагирующих средах. М.: «МГОУ - XXI - новые технологии», № 5-6, 2004, с. 2-5.
2. Копылов С.В., Селькин В.П., Плескачевский Ю.М. Диффузия в облучаемый полиэтилен. "Инновационные технологии научного развития", сб. статей Международной научно-практической конференции (г.Пермь, 25.10.2015г.), сс. 12-15.
3. Копылов С.В., Абдурахманова Л.Э. Интенсификация реакций при облучении. "Инструменты современной научной деятельности", сб. статей Международной научно-практической конференции (г.Самара, 15.11.2015г.), сс. 15-17.
4. Копылов С.В., Селькин В.П., Плескачевский Ю.М. Равновесие на границе металл-полимер при облучении. "Роль науки в развитии общества", сб. статей Международной научно-практической конференции (г.Казань, 20.12.2015г.), сс. 30-33
5. Копылов С.В., Селькин В.П., Плескачевский Ю.М. Диффузия в полиэтилен при воздействии температуры, "Наука третьего тысячелетия", сб. статей Международной научно-практической конференции (г. Курган, 20.01.2016г.), сс. 4-7.
6. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям: - М.: Физматлит, 1993. – 464с.

CLASSICAL DYNAMICS OF MULTI-POLAR SYSTEMS

R.M.Yamaleev

Abstract.

State of the classical n-polar system is defined by n-order polynomial equations. Dynamics is described by Hamilton-Nambu equations. Inclusion of a potential field is worked out by using the Pascal matrix representation. Kinematics is described by n-order Riccati equations within the formalism of generalized complex algebras.

Basic elements of the multi-polar dynamics.

1. The state of the system is defined by n-order polynomial of the form [1-7]

$$f(x) = x^n - p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} - \dots + (-1)^n p^n \quad (1)$$

2. Coefficients of the basic polynomial

$$p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n^2 \quad (2)$$

form a set of kinetic energies. The n-th coefficient corresponds to the square of the momentum.

$$p_n = p^2 \quad (3)$$

3. Roots of the basic polynomial

$$q_1, q_2, \dots, q_{n-1}, q_n \quad (4)$$

form a set of radix kinetic energies.

4. Inclusion of the potential field $V(r)$ is accomplished by action of translation of the radices of the polynomial

$$\exp(V(r)) \frac{d}{dx} f(x) = f(x + V(r)) \quad (5)$$

$$E_k = q_k + V(r), \quad k=1,2,3,\dots,n. \quad (6)$$

Pascal matrix representation of the translation operator.

Form (n+1)-dimensional vector of the coefficients, the kinetic energies, of the state polynomial

$$[K] = (p_n, p_{n-1}, \dots, p_1, p_0)$$

Define the corresponding vector of the total energies

$$[E] = (E_n, E_{n-1}, \dots, E_1, E_0)$$

Then,

$$[E] = \exp(V(r)A^{up})[K]$$

where the matrix A(up) is a matrix of the form

5. Inclusion of the magnetic field accomplished by translation of the vector of momentum

$$p = p + eA \quad (7)$$

6. Basic example is the relativistic mechanics. Elliptic oscillator model. In that case the basic polynomial is of the form

$$f(x) = x^2 - 2p_0x + p^2 \quad (8)$$

With roots

$$q_1 = p_0 + mc, \quad q_2 = p_0 - mc \quad (9)$$

7. Direction of generalization: Nambu's extension of Hamiltonian dynamics, quantum mechanics.

8. Kinematics of the n-polar system is described by n-order Riccati equation.

Riccati equation in the case of relativistic mechanics.

Evolution equation generated by the basic polynomial

$$f(x) = x^2 - 2p_0x + p^2 \quad (10)$$

Firstly, consider an evolution generated by the companion matrix

$$f(E) = E^2 - 2p_0E + p^2I = 0 \quad (11)$$

The evolution generated by matrix E written as

$$\begin{pmatrix} 0 & -p^2 \\ 1 & 2p_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_0 \\ \Phi_1 \end{pmatrix} = \frac{d}{d\phi} \begin{pmatrix} \Phi_0 \\ \Phi_1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

This evolution can be formulated also of the form of Riccati equation

$$\frac{d}{d\phi}U = U^2 - 2p_0U + p^2 \quad (13)$$

where

$$U = \frac{\Phi_0}{\Phi_1} \quad (14)$$

In the general case, evolution is described by n-order Riccati equation of the form

$$\frac{d}{d\phi}U = U^n - p_1U^{n-1} + p_2U^{n-2} - \dots + (-1)^{n-1}p_{n-1}U + (-1)^n p^2 \quad (15)$$

References.

1. R.M.Yamaleev, Elliptic deformed Newton mechanics in three-dimensional phase space. JINR Communications, P2-94-109, 1994.
2. T.D.Frank, Oscillatory non-equilibrium Nambu system: the canonical-dissipative Yamaleev oscillator. J. Eur. Phys. B (2012) 85: 90. DOI: 10.1140/cpjb/c2012-20720-4.
3. R.M.Yamaleev, Relativistic equations of motion within Nambu formalism of dynamics. Ann. Phys. 285 (2000) 141-160.
4. R.M.Yamaleev, Generalized Lorentz-force equations. Ann. Phys. 292 (2001) 157-178.
5. R.M. Yamaleev, Pascal matrix representation of evolution of polynomials. Int.J.Appl.Comput.Math. Vol.1, Issue 4 (2015) 513-525.
6. R.M.Yamaleev, Representation of solutions of n-order Riccati equation via generalized trigonometric functions. J. Math, Anal. Appl. 420(1) (2014) 334-347.
7. R.M. Yamaleev, Klein-Gordon equations for energy-momentum of the relativistic particle in rapidity space. ЯФ Vol. 76, No.9 (2013) 1-6.

(e-mail:yamaleev@jinr.ru)

Joint Institute for Nuclear Research, LIT, Dubna, Russia.

CHIRAL OSCILLATORS FROM σ -MODEL

Author: E. Sergeeva, Y.P Rybakov, A. Islam
 Theoretical Physics & Dynamics Department
 The Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia

Chiral fields obtained already wide range of applications for example one can consider chiral fields in the Skyrme models, Sigma models, Sine-Gordon models and so on. As it can be considered chiral oscillator (in quantum-mechanical system) is a model of constrained theory with only second-class constraints (do not contribute to the transformation law of the local symmetry). Nonlinear Sigma (σ) model is an effective instrument in modeling spin wave phenomena in ferromagnets, particle-like object in field theory and much more.

Nonlinear σ -model for more than 50 years hold to be popular among theoreticians as effective instrument in modeling spin wave phenomena in ferromagnets, particle-like objects in field theory and much more. There were obtained lots of well-known results, but still we don't know some basic features of σ – models, related with integrability, hamiltoniense and so on. Therefore in this note we consider the simplest version of σ – models in the so-called point particle limit.

From the technical point of view that means the following: starting from the standard σ – model Lagrangian

$$\int = \frac{1}{2} \partial_\mu n^a \partial^\mu n^a, \quad a = 1, 2, \dots, n; \quad (1)$$

where, $n^a(\bar{x}, t)$ are under constraint $n^a n^a = 1$, or from its equivalent form ($i, j = 1, \dots, n-1$)

$$\int = \frac{1}{2} g_{ij}(n) \partial_\mu n^i \partial^\mu n^j; \quad g_{ij}(n) = \delta_{ij} + \frac{n_i n_j}{1 - n_i n_i} \quad (2)$$

Then we restrict ourselves to $n_i(\bar{x}, t) \rightarrow n_i(t) \equiv q_i(t)$ as a result of these restriction we obtain chiral oscillator Lagrangian of the form

$$\int_{ch} = \frac{1}{2} \dot{q}_i^2 + \frac{(q_i \cdot \dot{q}_i)^2}{1 - q_i^2} \quad (3)$$

Many interesting properties of chiral oscillators like (3) have been found by S. Ghosh [1, 2]. Here we point out on close analogy between chiral oscillators and circular pendulum for $n=3$, and also that with some special cases of rigid body motion.

We also study Hamiltonian structure, corresponding to (3) with momentum

$$p_i = \dot{q}_i + \frac{(q_i \cdot \dot{q}_i)}{1 - q_i^2} q_i \quad (4)$$

and Hamiltonian

$$H = \frac{1}{2} (p_i^2 - (q_i \cdot p_i)^2) \quad (5)$$

and check Hamiltonians of chiral oscillators with respect to appropriate Poisson brackets.

From the equation of motion the equation of Chiral oscillators will be:

$$\ddot{q}_k + q_k LC = 0, \quad \text{where } L \text{ is lagrangian and } C \text{ is a constant.}$$

The Hamiltonian structure of the Chiral oscillator might be:

$$H = p\dot{q} - L, \quad \text{where } L \text{ is the lagragian, } p \text{ momentum.}$$

The Chiral oscillator is the most basic example of a duality invariant model, simulating the effect of the familiar electric-magnetic duality. Due to the point particle limit, chiral oscillator can be used in cosmological space.

References:

1. Ghosh S., High Energy Physics – Theory (hep-th), Phys.Left.B, 623(2005) p 251-257, hep-th/0506084
2. Ghosh S, High Energy Physics – Theory (hep-th) Mesoscale and Nanoscale Physics (cond-mat.mes-hall); Quantum Physics (quant-ph) phys.Left.B. 638(2006) p 350 hep-th/0511302

INTERACTION OF GRAPHENE WITH EXTERNAL MAGNETIC FIELD IN CHIRAL MODEL

Yu. P. Rybakov, M. Iskandar and A. B. Ahmed
 People's Friendship University of Russia
 117198 Moscow, 6 Miklukho-Maklay str., Russia
 email: soliton4@mail.ru

Abstract:

The simplest scalar chiral model of grapheme suggested earlier and based on the $SU(2)$ order parameter is generalized by including 8-spinor field as an additional order parameter for the description of spin (magnetic) excitation in graphene. As an illustration we study the interaction of the graphene layer with the external magnetic field and find weakening of the field inside the graphene.

Keywords: Graphene, spin excitation, chiral model, 8-spinor

The s- and p- hybridization effect for the valence electrons of carbon atoms apper to the main property of the electron bonding in mono-atomic carbon layers of graphene. For realizing this effect the chiral model of graphene was suggested, the unitary $SU(2)$ matrix $V = a_0\tau_0 + i(\vec{a}\vec{\tau})$ being considered as an order parameter. Here τ_0 , $\vec{\tau}$ denote the unit matrix and the Pauli matrices respectively, scalar and vector fields a_0 , \vec{a} ; $a_0^2 + \vec{a}^2 = 1$, describing s- and p- states of the free valence electron. For the description of spin and quasi-spin excitations in graphene, the latter ones corresponding to independent excitation modes of the two triangular sub-lattices of graphene, we introduce the two Dirac spinors ψ_1, ψ_2 and consider the combined spinor field $\Psi = \xi \otimes (\psi_1 \oplus \psi_2)$, as a new order parameter, where ξ stand for the first colomn of V . The Lagrangian density L of the model,

$$L = \frac{1}{2} \overline{D_\mu \Psi} P D^\mu \Psi - \frac{\lambda^2}{2} \vec{a}^2 j_\mu j^\mu + i\mu_0 \vec{a}^2 \overline{\Psi} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \Psi \quad (1)$$

Contain the projector $P = \gamma^0 \gamma_0$ on the positive energy states, where $j_\mu = \overline{\Psi} \gamma_\mu \Psi$, $\mu=0,1,2,3$, designetes the Dirac current, $\overline{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma_0$ and γ_μ stands for Dirac matrices. The model contains the two constant parameters: the exchange energy I per lattice spacing and some characteristic inverse length $\sqrt{\lambda}$. The interaction with electromagnetic field is realized though the extension of the derivative: $D_\mu = \partial_\mu - ie_0 A_\mu \Gamma_e$, with $e_0 > 0$ being the coupling constant and $\Gamma_e = (1 - \tau_3)/2$ being the charge operator chosen in accordance with the natural boundary condition at infinity: $a_0(\infty) = 1$. However, the additional interaction term of the Pauli type should be added to take into account the proper magnetic moments of the electrons. Here $\sigma_{\mu\nu} = [\gamma_\mu, \gamma_\nu]/4$, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ and $\mu_0 > 0$ denotes the Bohr magneton per lattice spacing cubed.

Let us now consider the case with the orientation of the magnetic field \overline{B}_0 along the z- axis. Using the cylindrical coordinates r, ϕ, z we introduce the vector potential $A_\phi = A$, with the intensity of the magnetic field being $B_z = \partial_r(rA)/r$, $B_r = -\partial_z A$ and the natural boundary condition at infinity being imposed: $A(z \rightarrow \infty) = B_0 r/2$. The model in question admits the evident symmetry $\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$, γ_0 - invariance $\Psi \Rightarrow \gamma_0 \Psi$, that permits to introduce 2-spinor φ by putting $\psi_1 = \psi_2 = col(\varphi, \varphi)$, $\varphi = col(v, u)$. To simplify the calculation, let us suppose the smallness of the radial magnetic field: $B_r \ll B_z$. In this approximation the new discrete symmetry holds: $\varphi \Rightarrow -\sigma_3 \varphi$, $v \Rightarrow -v$, $u \Rightarrow u^*$, $a_{2,3} \Rightarrow -a_{2,3}$, that permits to introduce the chiral angle Θ : $a_0 = \cos \Theta$, $a_1 = \sin \Theta$ and consider the axially-symmetric configuration: $u = u(r, z)$, $\Theta = \Theta(r, z)$. As a result the new Lagrangian density takes the form:

$$L = -8I \left[R^2 (\partial_{\perp} \Theta)^2 + \frac{1}{4} (\partial_{\perp} R)^2 + e_0^2 R^2 A^2 \sin^2 \Theta \right] - 8\lambda^2 R^2 \sin^2 \Theta + 8\mu_0 R \sin^2 \Theta \frac{1}{r} \partial_r (rA) - \frac{1}{8\pi} \left[\frac{1}{r^2} (\partial_r (rA))^2 + (\partial_z A)^2 \right], \quad (2)$$

where the new variable is introduced: $R=u^2$ and ∂_{\perp} signifies the differentiation with respect to r and z . The equations of motion corresponding to (2), become

$$I \left[\frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r R) + \partial_z^2 R - 4R (\partial_{\perp} \Theta)^2 - 4e_0^2 R A^2 \sin^2 \Theta \right] = 2 \sin^2 \Theta \left[2\lambda^2 R - \mu_0 \frac{1}{r} \partial_r (rA) \right] \quad (3)$$

$$I \left[\frac{2}{r} \partial_r (r R^2 \partial_r \Theta) + 2 \partial_z (R^2 \partial_z \Theta) - e_0^2 R^2 A^2 \sin 2\Theta \right] = R \sin 2\Theta \left[\lambda^2 R - \mu_0 \frac{1}{r} \partial_r (rA) \right] \quad (4)$$

$$\frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r A) + \partial_z^2 A - \frac{A}{r^2} \right] = 16I e_0^2 R^2 A \sin^2 \Theta + 8\mu_0 \partial_r (R \sin^2 \Theta) \quad (5)$$

Let us now search for solutions to the equations (3), (4), (5) in the domain $z \rightarrow \infty$, where $\Theta \rightarrow 0$, $R=1/4 + \zeta$, $A=B_0 r/2 + \alpha$, $\zeta \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 0$. Thus, the equation (4) takes the form:

$$I \left[\frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r \Theta) + \partial_z^2 \Theta - \frac{1}{4} e_0^2 B_0^2 r^2 \Theta \right] = \Theta [\lambda^2 - 4\mu_0 B_0],$$

and its solution can be found by separation of variables:

$$\Theta = \Theta_0 \exp(-vr^2 - \kappa z), \quad \Theta_0 = const, \quad (6)$$

with the following constant parameters:

$$v = \frac{e_0 B_0}{4}, \quad \kappa^2 = \frac{B_0}{I} (e_0 I - 4\mu_0) + \frac{\lambda^2}{I} \quad (7)$$

Inserting (6) into (3) and (5), one gets the inhomogeneous equations for ζ and α :

$$\frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r \zeta) + \partial_z^2 \zeta = (\partial_{\perp} \Theta)^2 + \left[\frac{1}{4} e_0^2 B_0^2 r^2 + \frac{1}{I} [\lambda^2 - 4\mu_0 B_0] \right] \Theta^2 \quad (8)$$

$$\frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r \alpha) + \partial_z^2 \alpha - \frac{\alpha}{r^2} = 2\pi e_0 B_0 (e_0 I - 4\mu_0) r \Theta^2 \equiv \delta r \Theta^2 \quad (9)$$

with the solution of the form:

$$\zeta = \Theta_0^2 \exp(-2vr^2 - 2\kappa z) N(r); \quad \alpha = \delta \Theta_0^2 \exp(-2vr^2 - 2\kappa z) K(r) \quad (10)$$

where the radial function $N(r)$ and $K(r)$ satisfy the following equations:

$$N'' + N' \left[\frac{1}{r} - 8vr \right] + N \left[2B_0 \left(e_0 - 8 \frac{\mu_0}{I} \right) + 4 \frac{\lambda^2}{I} + e_0^2 B_0^2 r^2 \right] = \quad (11)$$

$$\frac{1}{2} e_0^2 B_0^2 r^2 + e_0 B_0 + \frac{2}{I} (\lambda^2 - 4\mu_0 B_0)$$

$$K'' + K' \left[\frac{1}{r} - 8vr \right] + K \left[4\kappa^2 - 8v + 16v^2 r^2 - \frac{1}{r^2} \right] = r \quad (12)$$

Let us now estimate the magnetic intensity:

$$B_z = B_0 + b_z, \quad b_z = \frac{1}{r} \partial_r (r\alpha), \quad B_r = b_r = -\partial_z \alpha$$

Taking into account that due to (12) at $r \rightarrow \infty$, $K \approx (e_0^2 B_0^2 r)^{-1}$ one gets from (10):

$$b_z = -2\pi (e_0 I - 4\mu_0) \Theta_0^2 \exp(-2vr^2 - 2\kappa z) \quad (13)$$

$$b_r = \frac{4\pi\kappa}{e_0 B_0 r} (e_0 I - 4\mu_0) \Theta_0^2 \exp(-2vr^2 - 2\kappa z) \quad (14)$$

As can be seen from (13) and (14) according to the sign of the multiplier our graphene material reveals diamagnetic or paramagnetic behavior. Therefore, it would be interesting to obtain numerical estimates for the parameters of the model. In view of definitions adopted one has,

$$e_0 = \frac{e}{\hbar c}, \quad \mu_0 = \frac{e\hbar}{2m_e c a^3}, \quad I = \frac{E_{exch}}{a},$$

where the exchange energy is usually adopted as $E_{exch} = 2,9eV$ and the lattice spacing as $a = 3,56 \cdot 10^{-8} cm$, with e being the absolute value of the electron charge. Finally one can find the following numerical values: $e_0 I = 2 \cdot 10^3 Gauss$, $\mu_0 = 2 \cdot 10^2 Gauss$. It means that the parameter $e_0 I - 4\mu_0$ is positive and the weakening of the magnetic field inside the graphene is predicted in accordance with (13) and (14).

References:

- [1] Rybakov Yu.P.//Solid State Phenomena, v.190.2012, P.59-62
 [2] Yu.A. Izyumov, M.I. Katsnelson and Yu.N. Skryabin. Itinerant Electron Magnetism, - Moscow: Nauka, 1994
 [3] Geim A.K.//Science, v. 324.2009, P 1530-1534
 [4] Katsnelson M.I., Novoselov K.S.//Solid State Communications, v.143. 2007, P.3-13.

ON SOME FLOWS OF VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLUIDS WITH HIGH REYNOLDS NUMBERS

A. S. Rabinowitch

Moscow Technological University
 Moscow, Russia,
 E-mail: rabial@mail.ru

A class of axially symmetric non-stationary flows of a viscous incompressible fluid is considered for which the three-dimensional Navier-Stokes equations are reduced to a system of two partial differential equations: a nonlinear of the third order and a linear of the second order. Their particular analytical solution is found and relying on it, some peculiarities of turbulent flows are studied in the case of high Reynolds numbers.

Consider a flow of a homogeneous viscous incompressible fluid with no bulk forces. As is well known, it is described by the following Navier-Stokes equations [1, 2]:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + v_1 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v_2 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + v_3 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad (1)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0, \quad (2)$$

where $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, x, y, z)$ is the vector of velocity with components v_1, v_2, v_3 , $p = p(t, x, y, z)$ is pressure, t is time, x, y, z are spatial orthogonal coordinates, ρ is the density of the considered fluid, ν is its kinematic viscosity, and Δ is the Laplace operator..

The Navier-Stokes equations are basic equations of hydrodynamics and a large number of analytical and numerical investigations are devoted to them. However, because of their substantial nonlinearity, a number of problems of mechanics of fluids remain unsolved. One of them is the problem of describing turbulent flows which can take place in the case of high Reynolds numbers. In the present work, a particular analytical solution to the Navier-Stokes equations is studied which could reflect some peculiarities of turbulent flows of viscous fluids.

Let us investigate the axially symmetric case in which solutions to the Navier-Stokes equations can be represented as

$$v_1 = -\alpha y + \beta x, \quad v_2 = \alpha x + \beta y, \quad v_3 = \gamma, \quad \alpha = \alpha(t, r, z), \quad (3)$$

$$\beta = \beta(t, r, z), \quad \gamma = \gamma(t, r, z), \quad p = p(t, r, z), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Then equations (1)-(2) acquire the form [3, 4]

$$\alpha_t + \beta(r\alpha_r + 2\alpha) + \gamma\alpha_z - \nu(\alpha_{rr} + 3\alpha_r/r + \alpha_{zz}) = 0, \quad (4)$$

$$\beta_t + \beta(r\beta_r + \beta) + \gamma\beta_z - \alpha^2 - \nu(\beta_{rr} + 3\beta_r/r + \beta_{zz}) = -(1/\rho)p_r/r, \quad (5)$$

$$\gamma_t + r\beta\gamma_r + \gamma\gamma_z - \nu(\gamma_{rr} + \gamma_r/r + \gamma_{zz}) = -(1/\rho)p_z, \quad (6)$$

$$r\beta_r + 2\beta + \gamma_z = 0, \quad (7)$$

where $\alpha_t \equiv \partial\alpha/\partial t$, $\alpha_r \equiv \partial\alpha/\partial r$, $\alpha_z \equiv \partial\alpha/\partial z$.

Further to find a particular solution to Eqs. (4)-(7), we will use the method suggested in our work [4].

Let us seek a particular solution to these equations in the form

$$\alpha = A(t,r)/r^2, \quad \beta = B(t,r)/r^2, \quad \gamma = C(t,r)z/r^2, \quad -p/\rho = d(t,r) + \frac{1}{2}z^2s(t). \quad (8)$$

Then Eqs. (7) and (4)-(6) give

$$C = -rB_r, \quad A_t + (v+B)A_r/r - vA_{rr} = 0, \quad (9)$$

$$B_t + B(B_r - B/r)/r - A^2/r^2 - v(B_{rr} - B_r/r) = rd_r, \quad (10)$$

$$vB_{rr} - (v+B)(B_{rr} - B_r/r)/r + B_r^2/r - B_{tr} = s(t)r. \quad (11)$$

Let us choose the following dimensionless arguments and functions:

$$\begin{aligned} \tau = (V_*/l_*)t, \quad \eta = (r/l_*)^2, \quad P(\tau, \eta) = A(t,r)/v, \quad Q(\tau, \eta) = B(t,r)/v, \\ S_0(\tau, \eta) = (d_r/r)(l_*/V_*)^2, \quad S(\tau) = s(t)(l_*/V_*)^2, \end{aligned} \quad (12)$$

where V_* is the mean absolute value of the velocity of a viscous fluid and l_* is its characteristic linear dimension.

As a result, from Eqs. (9)-(11), we obtain

$$4\eta P_{\eta\eta} - 2QP_{\eta} - \text{Re} P_{\tau} = 0, \quad \text{Re} = V_*l_*/v, \quad P = P(\tau, \eta), \quad (13)$$

$$\text{Re} Q_{\tau} - 4\eta Q_{\eta\eta} + Q(2Q_{\eta} - Q/\eta) - P^2/\eta = \text{Re}^2 S_0(\tau, \eta)\eta, \quad Q = Q(\tau, \eta), \quad (14)$$

$$4(\eta Q_{\eta\eta\eta} + Q_{\eta\eta}) - 2(QQ_{\eta\eta} - Q_{\eta}^2) - \text{Re} Q_{\tau\eta} = \frac{1}{2}\text{Re}^2 S(\tau), \quad (15)$$

where Re is the Reynolds number.

Consider Eq. (15) and let us seek its particular solution in the form

$$Q = Ke^{f(\tau)\xi}, \quad \xi = \text{Re} \eta, \quad S = 0, \quad K = \text{const}. \quad (16)$$

Then from (15), we find

$$(4f^2 - \dot{f})(1 + f\xi) = 0,$$

where $\dot{f} \equiv df/d\tau$.

This equation gives

$$\dot{f} = 4f^2, \quad f = f(\tau), \quad (18)$$

and we come to the following solution:

$$f = -\frac{1}{4\tau}, \quad (19)$$

singular at the initial time $t = 0$.

From (16) and (19), we obtain a particular solution to Eq. (15) of the form

$$Q = K \exp\left(-\text{Re} \frac{\eta}{4\tau}\right). \quad (20)$$

As to Eq. (14), it allows one to find the function $S_0(\tau, \eta)$ which determines the distribution of the fluid pressure since $s(t) = 0$ in the considered case.

Let us turn to Eq. (13) and seek its solution in the form

$$P = P(\theta), \quad \theta = \text{Re} \frac{\eta}{4\tau}. \quad (21)$$

Then substituting formulas (20) and (21) into Eq. (13), we derive

$$\theta P''(\theta) + (\theta - \frac{1}{2}Ke^{-\theta})P'(\theta) = 0. \quad (22)$$

This gives

$$P'(\theta) = M \exp\left(-\theta + \frac{1}{2}KEi(-\theta)\right), \quad Ei(x) = \int_{-\infty}^{-x} \frac{e^{-s}}{s} ds, \quad (23)$$

where $M = \text{const}$ and $\text{Ei}(x)$ is the exponential integral.

From (23), we determine the function $P(\theta)$ in the form

$$P = M \int_{\infty}^{\theta} \exp\left(-\theta + \frac{1}{2} K \text{Ei}(-\theta)\right) d\theta, \quad (24)$$

which tends to zero as $r \rightarrow \infty$.

Let us now calculate the components of the fluid velocity. As follows from (12), (20), and (21),

$$A = \nu P(\theta), \quad B = \nu K e^{-\theta}, \quad (25)$$

where, taking into account the expression for the Reynolds number in (13),

$$\theta = \text{Re} \frac{\eta}{4\tau} = \frac{r^2}{4\nu t}. \quad (26)$$

From (9), (25), and (26), we also find the following expression for the function C :

$$C = -rB_r = K \frac{r^2}{2t} e^{-\theta}. \quad (27)$$

Applying now formulas (25) and (27), from (3) and (8), we obtain

$$v_1 = \frac{\nu}{r^2} \left(-P(\theta)y + K e^{-\theta} x\right), \quad v_2 = \frac{\nu}{r^2} \left(P(\theta)x + K e^{-\theta} y\right), \quad v_3 = K e^{-\theta} \frac{z}{2t}, \quad (28)$$

where θ is defined by formula (26) and the function $P(\theta)$ is determined by formula (24).

The obtained solution satisfies the following initial and boundary conditions:

$$1) v_i = 0 \text{ when } t = 0 \text{ and } r \neq 0; \quad (29)$$

$$2) r v_i \rightarrow 0 \text{ as } r \rightarrow \infty, \quad i = 1, 2, 3. \quad (30)$$

When $r = 0$, it is singular and can be applied to regions outside the axis z .

Consider this solution in the case of high Reynolds numbers to describe some peculiarities of turbulent flows of viscous fluids. It should be noted that the nature of turbulent flows of fluids with high Reynolds numbers is one of the challenging questions of hydrodynamics [5],

As follows from formulas (26) and (28), the components v_i of the vector of velocity of a viscous fluid could substantially change inside intervals $(r - \delta r, r + \delta r)$, where $r \sim l_*$ and $\delta r \sim l_* / \text{Re}$.

When the Reynolds number $\text{Re} \sim 10^4$, $l_* \sim 1 \text{ m}$, and $\tau \sim 1$, the value $\delta r \sim 0.1 \text{ mm}$. Therefore, in this case, there can be substantial changes of velocities inside small radial intervals $\sim 10^{-4} l_*$. This peculiarity of the obtained solution to the Navier-Stokes equations can be regarded as a manifestation of turbulent flows of viscous fluids with high Reynolds numbers.

REFERENCES

1. Landau L.D., and Lifshits E.M. Fluid Mechanics, Oxford, Pergamon Press, 1987.
2. Sedov L.I. Mechanics of Continuous Media, Singapore, World Scientific, 1997.
3. Rabinowitch A.S. Journal of Mathematical Physics, Vol. 55, No 9, 2014, p. 093102-1 – 093102-11.
4. Rabinowitch A.S. Journal of Mathematical Physics, Vol. 56, No. 9, 2015, p. 093101-1 – 093101-8
5. Fisch U. Turbulence, Cambridge, Cambridge University Press, 1995.

ON THE OSCILLATION-DRIVEN COSMOLOGICAL EXPANSION AT THE POST-INFLATION STAGE

V.A. Koutvitsky, E.M. Maslov

*Pushkov Institute of Terrestrial Magnetism, Ionosphere and Radio Wave Propagation (IZMIRAN) of
the Russian Academy of Sciences, Troitsk, Moscow, Russia*

The inflaton scalar field ϕ in the Friedmann-Robertson-Walker Universe is governed by the nonlinear Klein-Gordon equation

$$\phi_{tt} + 3H\phi_t - a^{-2}\Delta\phi + U'(\phi) = 0, \quad (1)$$

where $a(t)$ is the scale factor, $H = a_t/a$ is the Hubble parameter. Assuming that the Universe is filled with the scalar field ϕ only, we perform the comparison analysis of the cosmological expansion dynamics at the post-inflation stage for three generic potentials $U(\phi)$. Namely, we consider the $\phi^2 - \phi^4$ potential,

$$U(\phi) = m^2\phi^2/2 - (\lambda/4)\phi^4, \quad (2)$$

the logarithmic potential,

$$U(\phi) = (m^2\phi^2/2)[1 - \ln(\phi/\sigma)^2], \quad (3)$$

and the fractional-power potential,

$$U(\phi) = -m^2\phi^2/2 + (3\lambda/4)\phi^{4/3}. \quad (4)$$

Note that two potentials last named have singularity at their minimum, $|U''(\phi)| \rightarrow \infty$ ($\phi \rightarrow 0$).

At the post-inflation stage the homogeneous scalar field $\phi(t)$ executes the rapid oscillations near the minimum of a potential. These damped oscillations determine growth of the scale factor $a(t)$ through the Friedmann equations

$$(a_t/a)^2 = (8\pi G/3)\rho, \quad \rho_t = -3(a_t/a)(p + \rho), \quad (5)$$

in which the effective pressure and energy density are $p = \phi_t^2/2 - U(\phi)$, $\rho = \phi_t^2/2 + U(\phi)$ [1, 2]. To describe the oscillations we make the transformation $(\phi, \phi_t) \rightarrow (\rho, \theta)$, representing the field as $\phi(t) = \varphi(\rho, \theta)$, where ρ and θ are slow and fast variables, and $\varphi(\rho, \theta)$ is 2π -periodic with respect to θ and satisfies the equation $\omega^2(\rho)\varphi_\theta^2/2 + U(\varphi) = \rho$. Averaging the Friedmann equations over $(0, 2\pi)$, in the Van der Pol approximation we obtain

$$\rho_t = -2\sqrt{6\pi G}\rho^{3/2}\gamma(\rho), \quad \theta_t = \omega(\rho), \quad (6)$$

where

$$\gamma(\rho) = 1 + \frac{\bar{p}}{\rho} = \frac{\sqrt{2}\omega(\rho)}{\pi\rho} \int_{\varphi_{\min}(\rho)}^{\varphi_{\max}(\rho)} \sqrt{\rho - U(\varphi)} d\varphi, \quad (7)$$

$$\omega^{-1}(\rho) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_{\varphi_{\min}(\rho)}^{\varphi_{\max}(\rho)} \frac{d\varphi}{\sqrt{\rho - U(\varphi)}}. \quad (8)$$

The adiabatic index $\gamma(\rho)$ determines dynamics of the cosmological expansion: the Universe expands with acceleration if $\gamma < 2/3$, and with deceleration if $\gamma > 2/3$. Let us evaluate $\gamma(\rho)$ and the field oscillation frequency $\omega(\rho)$ for each of the above potentials.

For the $\phi^2 - \phi^4$ potential we obtain

$$\gamma = \frac{2}{3\kappa^2 K(\kappa)} [(1 + \kappa^2) E(\kappa) - (1 - \kappa^2) K(\kappa)], \quad (9)$$

$$\frac{\omega}{m} = \frac{\pi}{2K(\kappa)\sqrt{1 + \kappa^2}}, \quad (10)$$

where $K(\kappa)$ and $E(\kappa)$ are full elliptic integrals,

$$\rho_{\text{exm}} = U(\phi_{\text{exm}}) = m^4/(4\lambda), \quad \phi_{\text{exm}} = m/\sqrt{\lambda}, \quad \kappa = \frac{1}{\sqrt{\rho/\rho_{\text{exm}}}} \left(1 - \sqrt{1 - \rho/\rho_{\text{exm}}}\right), \quad (11)$$

Since $0 < \rho/\rho_{\text{exm}} < 1$, one has $0 < \kappa < 1$.

The damped field oscillations are given by

$$\phi(t) = \varphi(\rho, \theta) = \phi_{\max}(\rho) \operatorname{sn} \left(\frac{2K(\varkappa)}{\pi} \theta, \varkappa \right), \quad (12)$$

where

$$\phi_{\max} = \phi_{\text{exm}} \sqrt{\frac{2\varkappa^2}{1 + \varkappa^2}}. \quad (13)$$

The calculation from Eqs. (9), (11) shows that $\gamma(\rho_{\text{cr}}) = 2/3$ with $\rho_{\text{cr}}/\rho_{\text{exm}} \approx 0.914$. At the late times $\tau = \sqrt{6\pi G \rho_{\text{exm}}} t \gg 1$ the energy density is small, $\rho/\rho_{\text{exm}} \ll 1$, so that asymptotically

$$\gamma \sim 1 - \frac{3}{32} \left(\frac{\rho}{\rho_{\text{exm}}} \right), \quad \bar{p} \sim -\frac{3\lambda}{8m^4} \rho^2; \quad (14)$$

$$\frac{\omega}{m} \sim 1 - \frac{3}{16} \left(\frac{\rho}{\rho_{\text{exm}}} \right), \quad \frac{\phi_{\max}}{\phi_{\text{exm}}} \sim \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\rho}{\rho_{\text{exm}}} \right)^{1/2}. \quad (15)$$

Integration of Eqs.(5) and (6) then gives

$$\rho/\rho_{\text{exm}} \sim \tau^{-2}, \quad a \propto \rho^{-3} \propto \tau^{2/3}. \quad (16)$$

Thus, the scalar field, oscillating near a regular minimum of the potential, behaves as a non-relativistic matter.

Consider now potential (3) having weak logarithmic singularity at the origin. In this case $\rho_{\text{exm}} = U(\phi_{\text{exm}}) = m^2 \sigma^2/2$, $\phi_{\text{exm}} = \sigma$, $\rho_{\text{cr}}/\rho_{\text{exm}} \approx 0.854$. For the late times, $\tau \gg 1$, $\rho/\rho_{\text{exm}} \ll 1$, calculation gives:

$$\gamma \sim 1 + 1/\ln(\rho/\rho_{\text{exm}})^2, \quad \bar{p} \sim \rho/\ln(\rho/\rho_{\text{exm}})^2, \quad (17)$$

$$\frac{\omega}{m} \sim \sqrt{-\ln(\rho/\rho_{\text{exm}})}, \quad \frac{\phi_{\max}}{\phi_{\text{exm}}} \sim \sqrt{\frac{\rho/\rho_{\text{exm}}}{\ln(\rho/\rho_{\text{exm}})}}. \quad (18)$$

From Eqs.(5) and (6) we then obtain

$$\rho/\rho_{\text{exm}} \sim \tau^{-2} (1 + 1/\ln \tau^2), \quad a \propto \tau^{2/3} (\ln \tau)^{1/6}. \quad (19)$$

Surprisingly, the field oscillations are still sinusoidal,

$$\phi(t) = \varphi(\rho, \theta) \sim \phi_{\max}(\rho) \sin \theta, \quad (20)$$

but with the frequency increasing as $\sqrt{\ln \tau}$. We thus conclude that expansion dynamics with potential (3) is very similar to that with potential (2).

Let us examine potential (4) having strong fractional-power singularity. In this case $\rho_{\text{exm}} = U(\phi_{\text{exm}}) = \lambda^3/(4m^4)$, $\phi_{\text{exm}} = \lambda^{3/2}/m^3$, $\rho_{\text{cr}}/\rho_{\text{exm}} \approx 0.578$. Asymptotically, at the late times,

$$\gamma \sim \frac{4}{5} \left[1 - \alpha \left(\frac{\rho}{3\rho_{\text{exm}}} \right)^{1/2} \right], \quad \bar{p} \sim -\frac{\rho}{5} \left[1 + 4\alpha \left(\frac{\rho}{3\rho_{\text{exm}}} \right)^{1/2} \right], \quad (21)$$

$$\frac{\omega}{m} \sim \beta \left(\frac{\rho}{3\rho_{\text{exm}}} \right)^{-1/4}, \quad \frac{\phi_{\max}}{\phi_{\text{exm}}} \sim \left(\frac{\rho}{3\rho_{\text{exm}}} \right)^{3/4}, \quad (22)$$

where $\alpha \approx 0.174$, $\beta \approx 1.071$. Integration of Eqs.(5) and (6) gives

$$\frac{\rho}{\rho_{\text{exm}}} \sim \frac{25}{16\tau^2} \left(1 + \frac{5\alpha \ln \tau}{2\sqrt{3} \tau} \right), \quad a \propto \tau^{5/6} \quad (23)$$

The field oscillations are essentially non-sinusoidal,

$$\phi(t) = \varphi(\rho, \theta) \sim \phi_{\max}(\rho) \cos^3 \psi(\theta, \rho), \quad (24)$$

where $\psi(\theta, \rho)$ is determined by the elliptic integrals,

$$2E \left(\psi, \sqrt{2}/2 \right) - F \left(\psi, \sqrt{2}/2 \right) = \left(\sqrt{3}/3 \right) (\omega/m)^{-1} (\phi_{\max}/\phi_{\text{exm}})^{-1/3} \theta. \quad (25)$$

It is seen that in this case the scalar field dynamics and the rate of the oscillation-driven cosmological expansion differ drastically from those for potentials (2), (3).

[1] M.S. Turner, Phys. Rev. D, **28**, 1243 (1983).

[2] T. Damour and V.F. Mukhanov, Phys. Rev. Lett., **80**, 3440 (1998).

SCALAR FIELD WITH THE SOURCE AS THE STRESS-ENERGY TENSOR TRACE AS THE DARK ENERGY MODEL

Yu. P. Vyblyi and I. G. Dudko

B. I. Stepanov Institute of Physics, Minsk, Belarus

vyblyi@gmail.com, igordudko89@gmail.com

Scalar-tensor theory of gravitation with the scalar source being the trace of stress-energy tensor of the scalar field itself and the matter, is considered. The example of numerical solution of the cosmological equations shows that at some special choice of scalar parameters slow-roll regime, in which the modern values of Hubble and deceleration parameters may be obtained, exists.

1. Introduction

As well known, that the accelerated expansion of the Universe is successfully described by the Λ CDM model. However, the nature of the Λ -term is unclear and the physical interpretation of this constant led us to the famous problem of 120 orders [1,2]. For this reason, in the literature are discussed various alternative models of the dark energy. Scalar fields are often considered as candidates for the dark energy (see, for example, [3,4,5,6] or brief but enough exhausting review in [7]). Nevertheless, there is no unambiguous criterion for the choice of the field Lagrangian in the scalar field theories. Moreover, as it was shown in [8], any scalar field in the slow-roll regime can simulate the cosmological constant and hence lead to an appropriate cosmological scenario.

As known, the Einstein equations of the gravitational field can be derived if one considers a tensor field in Minkowski space-time with the source being the total stress-energy tensor of both field and matter [9,10]. In the present work, we consider a scalar field with a similar property: assuming that the scalar field source is the trace of the stress-energy tensor of both matter and the field itself and that this scalar field minimally interacts with gravitational field.

2. Scalar field equation

We use the gravitational system of units $G = c = 1$. Let us consider a scalar field φ with the source being the total trace of the stress-energy tensor of the scalar field and matter fields. This condition implies that the scalar field equation has the following form

$$(\square - m^2)\varphi = q(T^\varphi + T^M), \quad (1)$$

where the d'Alembertian is $= -\nabla_\mu \nabla_\nu g^{\mu\nu}$, the constants m and q mean the mass and the interaction constant of the scalar field.

Equation (1) allows to determine the Lagrangian of the scalar field and matter [11]

$$L_\varphi + L_M = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi}{1 + 2q\varphi} - m^2 \varphi^2 + C(1 + 2q\varphi)^2 \right) \sqrt{-g} + L_M((1 + 2q\varphi)g_{\mu\nu}, Q_M), \quad (2)$$

where Q_M stands for matter fields. Note that in [12] the term with constant C was absent. The scalar field equation and his stress-energy tensor have the form

$$(\square - m^2)\varphi = q \left(-\frac{\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi}{1 + 2q\varphi} + 2m^2 \varphi^2 - 2C(1 + 2q\varphi)^2 + T^M \right). \quad (3)$$

$$T_\varphi^{\mu\nu} = \frac{\partial^\mu \varphi \partial^\nu \varphi}{\Phi} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial_\alpha \varphi \partial^\alpha \varphi}{\Phi} - m^2 \varphi^2 + C\Phi^2 \right). \quad (4)$$

So, the interaction between the matter and the scalar field is realized with the help of the effective metric

$$f_{\mu\nu} = (1 + 2q\varphi)g_{\mu\nu} = \Phi g_{\mu\nu}. \quad (5)$$

Let us consider the scalar field in the state with the minimal energy. The minimum of the energy is achieved at the point where the potential

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \frac{C}{2}(1+2q\varphi)^2 \quad (6)$$

has a minimum. Here φ is assumed to vary from $-1/2q$ to $+\infty$, which ensures the positivity of the denominator in Lagrangian (2). Under the condition $C < m^2/4q^2$, potential has the minimum at the point

$$\varphi_0 = \frac{2qC}{m^2 - 4q^2C}, \quad V(\varphi_0) = -\frac{m^2C}{2(m^2 - 4q^2C)}. \quad (7)$$

For $C < 0$, the minimum value of the potential is positive: $V(\varphi_0) > 0$, therefore it can be identified with the cosmological constant in the Einstein equations.

For $0 < C < m^2/4q^2$, the minimum value of the potential is negative: $V(\varphi_0) < 0$. In this case, $|V(\varphi_0)|$ can be interpreted as the squared graviton mass μ^2 , since the Einstein equations in the linear approximation can be written as [11]

$$(\square + V(\varphi_0))\psi_{\mu\nu} = V(\varphi_0)\gamma_{\mu\nu}. \quad (8)$$

Here, the term $V(\varphi_0)\gamma_{\mu\nu}$ is the stress-energy tensor of the scalar field in the ground state. Assuming that $|C|$ is small as compared with m^2/q^2 we get the estimation $\mu^2 \approx |C|/2$.

3. Cosmological solution

As a first approximation we consider the field equations without interaction of the scalar field with matter. Thus, system of cosmological equations takes the form

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{1}{2} \frac{\dot{\varphi}^2}{\Phi} + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - \frac{1}{2} C \Phi^2 + \varepsilon \right), \quad (9)$$

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} - \frac{q\dot{\varphi}^2}{\Phi} + m^2\varphi\Phi - 2Cq\Phi^2 = 0, \quad (10)$$

$$\dot{\varepsilon} + 3H(\varepsilon + p) = 0. \quad (11)$$

Here $H \equiv \dot{a}/a$ is the Hubble parameter.

Let us consider the system of equations with the massless scalar field (9–11). We can write the following relations

$$\varepsilon^\varphi = \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\varphi}^2}{\Phi} - C\Phi^2 \right), \quad p^\varphi = \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\varphi}^2}{\Phi} + C\Phi^2 \right). \quad (12)$$

If we identify the density of the dark energy at present stage with the energy density of the scalar field and specify parameter ω in the equation of state we can get the initial values φ_0 and $\dot{\varphi}_0$ for the equation of the scalar field

$$\varepsilon_0^\varphi (1 + \omega) \equiv a = \frac{\dot{\varphi}_0^2}{\Phi_0}, \quad (13)$$

$$\varepsilon_0^\varphi (1 - \omega) \equiv b = -C\Phi_0^2, \quad (14)$$

where $\Phi_0 = 1 + 2q\varphi_0$. Further, we will omit the index 0. One can consider two cases, which correspond to different parameters ω : $\omega > -1$ and $\omega < -1$. Hence, if $\omega < -1$ then $\varphi < 1/2q$. This case is not physical because for such value of scalar field φ space-time interval ds^2 becomes complex. Then from the system of equations (13), (14) we obtain solution

$$\omega > -1, \quad a > 0, \quad \varphi_q \geq -\frac{1}{2q}. \quad (15)$$

From equation (14) we get

$$\varphi_{1,2} = -\frac{1}{2q} \pm \frac{1}{2q} \sqrt{\frac{b}{C'}} \quad (16)$$

which implies that $C < 0$, and $C' \equiv -C > 0$. For $\dot{\varphi}$ we have

$$\dot{\varphi} = \pm \left(\pm a \sqrt{\frac{b}{C'}} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (17)$$

Taking into account the inequalities (15), we obtain the following initial values φ and $\dot{\varphi}$ for the $\omega > -1$:

$$\varphi_q = -\frac{1}{2q} + \frac{1}{2q} \sqrt{\frac{\varepsilon(1-\omega)}{C'}}, \quad \dot{\varphi}_q = \left(\varepsilon(1+\omega) \sqrt{\frac{\varepsilon(1-\omega)}{C'}} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (18)$$

4. Cosmological scenario investigation

At present stage, a scalar field must be in the slow roll mode when the following relation is satisfied:

$$3H\dot{\varphi} = 2Cq\Phi = V'\Phi, \quad (19)$$

where $V' \equiv \frac{\partial V}{\partial \varphi}$. This slow roll mode can be used for establishing relation between constants C and q . Then, using the dimensionless quantities \bar{C} and $\bar{\varepsilon}_\varphi$, we obtain an expression binding the constants \bar{C} and q

$$\bar{C}' = \frac{C'}{H^2} = \frac{81(1+\omega)^2}{16q^4(1-\omega)^3 \bar{\varepsilon}_\varphi} \quad (20)$$

The relation (19) allows us to establish the sign of the initial value $\dot{\varphi}$, namely $\dot{\varphi} < 0$. The rolling speed $\dot{\varphi}$ depends only on q .

For the numerical solving of system of equations (9–11) we have to pass to dimensionless quantities in this system. Let us define the dimensionless time as $T = tH_0$. The value of the parameter equals $q = 1$. The results of the numerical solution of these equations is shown below.

Moment of nearly equal contribution of energy densities of scalar field and matter in our model corresponds to dimensionless time $T = 0.672$ and red-shift $z = 0.431$. The same values for Λ CDM model are $T = 0.68$ and $z = 0.417$. For deceleration parameter our model gives $q = -0.574$ and Λ CDM model gives $q = -0.61$ for $\Omega_M = 0.26$ and $\Omega_\Lambda = 0.74$. The moment when the Universe stopped slowing down and began to accelerate $q = 0$ corresponds to $z = 0.767$ for our model and $z = 0.785$ for Λ CDM model.

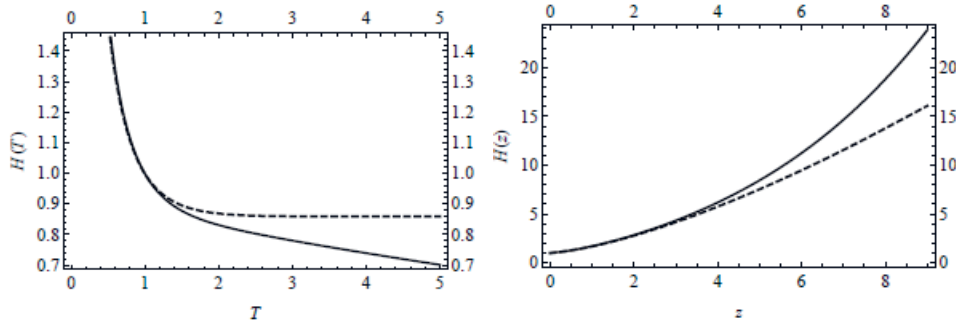


FIG. 1

The figure 1 shows Hubble parameter $H(t)$ dependence on time and $H(z)$ dependence on red-shift. Continuous line corresponds to our model and dashed line corresponds to Λ CDM model. We see that the value of the Hubble parameter at the present time which follows from our model coincides with the observed value of Hubble constant and value which follows from Λ CDM model. However previous

and further evolution of Hubble parameter in different models is different. From $H(z)$ dependence one can see that our model gives much bigger Hubble parameter in the past than Λ CDM model. On the other hand $H(t)$ dependence shows us that Hubble parameter of Λ CDM model will be constant when the contribution of energy density of matter can be neglected. This state of Universe will be corresponds to de-Sitter Universe in which the energy density of Λ -term only presents. Our model, on the contrary, gives a different result – Hubble parameter decreases with time.

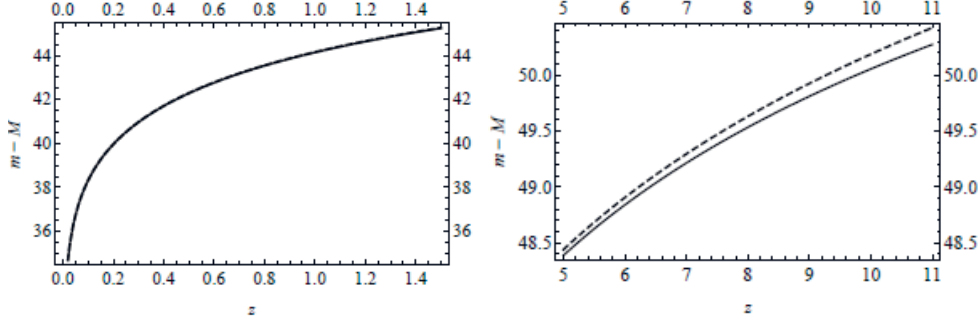


FIG. 2

The luminosity distance $D_{lum}(z)$ dependence on red-shift. The left plot shows the luminosity distance curves from $z=0$ to $z=1.5$ red-shift scale and the right plot shows the luminosity distance curves from $z=5$ to $z=11$ red-shift scale. The figure 2 shows that the plots of both model overlapping in the red-shift scale from $z=0$ to $z=1.5$. It means that our model in good agreement with the supernova observational data like Λ CDM model. On the other hand, figure 2 of large red-shift scale shows the differences between the models. In our model the supernova are brighter than in the Λ CDM model at the same large red-shift.

5. Conclusion

In present work the nonlinear scalar field interacting with the gravitational field and matter is introduced. The requirement that the source of the field is the trace of its own stress-energy tensor leads to the Lagrangian containing three arbitrary parameters. An example of numerical solution of the full system of field equations, describing the cosmological solution for the homogenous and isotropic Universe, shows that for certain restrictions on the parameters the slow-roll regime is possible. In this regime the scalar field simulates the dark energy in agreement with the modern observational data. More detailed analysis allowing for scalar field mass and interaction with the matter for different stages of cosmological expansion will be carry out in future.

- [1] V. Sahni and A. Starobinsky, Int. J. Mod. Phys. D 9 (2000), 373.
- [2] T. Padmanabhan, Phys. Rep. 380 (2003), 235
- [3] T. Matos, F.S. Guzman, D. Nunez, Phys. Rev. D 62 (2000), 061301.
- [4] T. Matos, F.S. Guzman, Class. Quant. Grav. 18 (2001), 5055.
- [5] P.J.E. Peeble and B. Rathra, Rev. Mod. Phys., 75 (2003), 559.
- [6] E.J. Copeland, M. Sami and S. Tsujikava, Int. J. Mod. Phys. D 15 (2006), 1753
- [7] J.A. Belinchon, T. Harko and K. Mak, 2015, arXiv: gr-qc/151208954 v1
- [8] R. J. Scherrer, A. A. Sen, Phys. Rev. D 77 (2008), 083515.
- [9] S. Deser, Gen. Rel. Grav. 1 (1970), 9.
- [10] S. Weinberg. Gravitation and cosmology. New York, Wiley, 1972.
- [11] Yu. P. Vyblyi and A. N. Tarasenko, Covariant Methods in Theoretical Physics, 7, (2011), Minsk, 36 (in Russian).
- [12] P. Freund, Y. Nambu. Phys Rev D 174 (1968), 1741.

THE POESCHL-TELLER OSCILLATOR FOR THE EFFICICENCY OF JOULE-Brayton cycle.

Yu. G.Rudoy, E. O.Oladimeji

Department of Theoretical Physics and Mechanics, People's Friendship University of Russia,
LII All-Russia conference on problems in Dynamics, Particle Physics, Plasma Physics and
Optoelectronics.

Russia, Moscow, 17-19 May 2016 г.

ABSTRACT

Following the application of a two-state model for a single particle of mass m confined in the one-dimensional infinite potential well with width L proposed by(1). It is possible to construct a quantum-mechanical analog of the Joule-Brayton cycle through the changes of both the width of the well and the quantum state in a specific manner as shown by (2). We applied the Poeschl-Teller Oscillator to analyze the efficiency of classical thermodynamic engines(3).

1. INTRODUCTION

Generally, the time independent Schrodinger equation for one dimension is of the form:

$$-\frac{\hbar}{2m}\psi''(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

whereas, time-independent Schrödinger equation for a system with a particle of mass m that is constrained into a one-dimensional infinite square-well of width L .

The potential of this time-independent Schrödinger equation is $V(x) = 0$ as $0 \leq x \leq L$ for a system at a particle of mass m .

$$-\frac{\hbar}{2m}\psi''(x) - E\psi(x) = 0$$

Where;

$\psi(x)$ -is required to satisfy the boundary condition $\psi(0) = 0$ and $\psi(L) = 0$.

$\Phi_n(x)$ -is linear combination of eigen functions express below.

a_n -is the coefficients the satisfy the normalization condition.

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Phi_n(x)$$

as the coefficient is constrained to: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = 1$

$$\Phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$\psi(x) = a_n \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Where; $n=1,2,3$. The corresponding eigenvalues E_n of the PT are with the potential $\mathcal{U}(x; L) = \mathcal{U}(-x; L) = \mathcal{U}_0 t g^2 [\alpha(L)x]$; are the simple square-well spectrum correspondent to $\lambda = 0$

$$E_n^{PT}(L) = \frac{\pi^2 \hbar}{8mL^2} [n^2 + \lambda(n - 1/2)] \quad (1)$$

Supposing the infinite walls of the potential well at $x=L$ moves like piston in one-dimensional cylinder for a classical thermodynamics (CTD) such that this wall is allowed to move infinitesimal amount dL , this implies that the wave function $\psi(x)$, eigenstates $\varphi_n(x)$, and the energy levels all vary infinitesimally as functions of L as stated clearly in Eq. (1). As a consequence, the expectation value of the Hamiltonian $E(L)$ also changes infinitesimally.

where;

$$\mathbf{E}(\mathbf{L}) = \langle \Psi | \hat{\mathbf{H}} | \Psi \rangle$$

Therefore, the pressure $\mathbf{P}(\mathbf{L})$ exerted on the wall of the well is:

$$\mathbf{P}(\mathbf{L}) = -\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{L}} \quad (2)$$

$$P(L) = \frac{\pi^2 \hbar}{4mL^3} \left[\mathbf{n}^2 + (\mathbf{n} - 1/2) \left(\lambda - \frac{\gamma}{2} \right) \right] \quad (3)$$

2. THE TWO STATES QUANTUM HEAT ENGINES:

To describe this cyclic process, only the Quantum Isobaric and Quantum Adiabatic process will be used. This is due to the fact that free expansion is irreversible.

We consider this in two stages; firstly, as a simple case in which two of the eigenstates of the potential well contributes to the well and secondly, as general case in which any member of the states participates.

Starting from ground-state wave function (i.e. $n = 1$) in a well with width L_1 . At this point the pressure of the wall is:

$$P(L) = \frac{\pi^2 \hbar}{4mL_1^3} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\lambda - \frac{\gamma}{2} \right) \right]$$

As expectation value of the Hamiltonian is at the ground state is:

$$E_H = \frac{\pi^2 \hbar}{8mL_1^2} [1 + \lambda]$$

STEP 1: ISOBARIC EXPANSION:

The piston expands isobarically which in turn excites to the second energy level of the system from the ground level, and keeping the expectation level of the Hamiltonian to remain constant. During this isobaric expansion, the state of the system is the linear combination of the lowest two energy eigenstate that is, when $n = 1, 2$. The wave function $\psi(x)$:

$$\psi(x) = a_1(L)\Phi_1(x) + a_2(L)\Phi_2(x)$$

Therefore, the expectation value of the Hamiltonian in this state as a function of L is:

$$E(L) = |a_1|^2 E_1 + |a_2|^2 E_2$$

Recall that, $E_n^{PT}(L)$ from Eq. (1), this implies that:

$$E(L) = |a_1|^2 \frac{\pi^2 \hbar}{8mL^2} \left[1 + \frac{\lambda}{2} \right] + |a_2|^2 \frac{\pi^2 \hbar}{2mL^2} \left[1 + \frac{3\lambda}{8} \right]$$

Since; $|a_2|^2 = 1 - |a_1|^2$;

$$E(L) = \frac{\pi^2 \hbar}{16mL^2} [8 - 3\lambda - (3 + \lambda)|a_1|^2]$$

This implies that by compares between E_H and $E(L)$; that is; Setting the expectation value of the Hamiltonian equal to E_H gives;

$$L^2 = L_1^2 \left[\frac{(8 - 3\lambda - (3 + \lambda)|a_1|^2)}{(2 + \lambda)} \right]$$

Thus, the maximum possible value of L in this isobaric expansion is $L_2 = 2L_1$, and this is achieved when $a_1 = 0$. Note that at $L = L_2$:

$$L_2^2 = L_1^2 \left[\frac{8 - 3\lambda}{2 + \lambda} \right]$$

Note at $L = L_2$; the system is purely in the second energy eigenstate. Along this is the Isobaric Expansion as the pressure is a function of L :

$$P_1(L) = |a_1|^2 P_1^{PT} + |a_2|^2 P_2^{PT}$$

$$P_1(L) = \frac{\pi^2 \hbar}{8mL^2 L} [3Q + 8 - (6 + 2Q)|a_1|^2]$$

Recall that; $L^2 = L_1^2 \left[\frac{(8-3\lambda-(3+\lambda)|a_1|^2)}{(2+\lambda)} \right]$

Therefore;

$$P_1(L) = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8mL_1^2 L} = P_B$$

STEP 2: ADIABATIC EXPANSION:

The system expands adiabatically from $L = L_2$ until $L = L_3$. During this expansion, there is no change in the state of the system. Since there is no external energy entering into the system, the system remains in the second state ($n = 2$) and the expectation value of the Hamiltonian is: $E_L = \frac{\pi^2 \hbar}{2mL^2} \left[1 + \frac{3\lambda}{8} \right]$ and the pressure as a function of L is taken;

$$P_2(L) = \frac{\pi^2 \hbar}{mL^3} \left[1 + \frac{3Q}{8} \right]$$

STEP 3: ISOBARIC COMPRESSION

The system is compressed adiabatically, from $L = L_3$ to $L = L_4$. The expectation value remains constant as energy is extracted. At the initial stage of this step, the energy is in its second excited state, that is ($n = 2$) until the system is compressed back to the ground state ($n = 1$). At this point, L_4 is half of L_3 that is, $L_4 = \frac{1}{2}L_3$. Therefore, it's expectation value maintains;

$$E_L = \frac{\pi^2 \hbar}{2mL^2}$$

And the applied pressure as a function of L is:

$$P_3(L) = \frac{\pi^2 \hbar}{mL_3^3} = P_A$$

STEP 4: ADIABATIC COMPRESSION:

Finally, as the compression continues but adiabatically from $L = L_4$ back to the starting point $L = L_1$. The system remains in ground state and the expectation value of the Hamiltonian is:

$$E_H = \frac{\pi^2 \hbar}{8mL^2} \left[1 + \frac{\lambda}{2} \right]$$

And the pressure applied on the wall of the potential well is:

$$P_4(L) = \frac{\pi^2 \hbar}{4mL^2} \left[1 + \frac{Q}{2} \right]$$

The four-step cyclic quantum process that we have just described is illustrated in fig. 1. The cycle is drawn in the (F, L) -plane, which is the one-dimensional version of the (P, V) -plane. The area of the closed loop represents the mechanical work W done in a single cycle of the quantum heat engine. To calculate W , Recall that:

$$W = PdV$$

where; P is pressure, V is volume, the work done W :

$$W = \int_{L_1}^{2L_1} P_1(L) dL + \int_{2L_1}^{L_3} P_2(L) dL + \int_{L_3}^{L_3/2} P_3(L) dL + \int_{L_3/2}^{L_1} P_4(L) dL$$

Inserting the values of P_1, P_2, P_3, P_4

$$W = \frac{\pi^2 \hbar^2}{m} \left[\frac{1}{8L_1^2} - \frac{1}{8L_3^2} \right] \ln 2$$

To determine the value of the efficiency η , the value of the energy injected into the potential well Q_H during the isobaric expansion needs to be calculated. This quantity of energy Q_H is:

$$Q_H = \int_{L_1}^{2L_1} P_1(L) dL; \quad Q_H = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8mL_1^2} \ln 2 \quad (14)$$

Recall as given $\eta = \frac{W}{Q_H}$, substitute the value of W and Q_H into the equation. Therefore, the efficiency η of the our two-state quantum heat engine is:

$$\eta = \frac{\frac{\pi^2 \hbar^2 \left[\frac{1}{8L_1^2} - \frac{1}{8L_3^2} \right] \ln 2}{m}}{\frac{\pi^2 \hbar^2}{8mL_1^2} \ln 2}; \quad \eta = 1 - 8 \left[\frac{L_1}{L_3} \right]^2 \quad (15)$$

3. CONCLUSION

The conversion of heat into work, is the main objective of a thermal engine. In our work, we have applied the Poeschl-Teller Oscillator to analyze the efficiency of thermal engine using the analogous processes that is made up of the Joule-Brayton cycle.

REFERENCES

1. Quantum-Mechanical Carnot Engine. Carl M. Bender, Dorje C. Brody and Meister, Bernhard K. UK : IOP Publishing LTD, April 6, 2000, Journal of Physics, p. 10.
2. Efficiency of simple quantum engines: The Joule-Brayton and Otto cycles. L. Guzman-Vargas, V. Grandos and Mota, R. D. [ed.] D. P. Sheehan. Mexico : s.n., 2002. CP643, Quantum limits to the second law: First International Conference.
3. Pressure operator for the Poeschl – Teller quantum oscillator. Yuri G. Rudoy, Enock O. Oladimeji. Moscow : s.n., 2015. 4-th International Conference on Theoretical Physics "Theoretical Physics and its Applications". p. 6.

В ПРОТЯЖЕННОМ ЭЛЕКТРОНЕ ГУСТАВА МИ ДОПУСТИМЫ ПРОДОЛЬНЫЕ ВОЛНЫ, ЗАПРЕЩЕННЫЕ ПУСТЫМ ПРОСТРАНСТВОМ

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(государственный университет)
Долгопрудный, Российская Федерация
Блинов Сергей Викторович, студент 4 курса,
Научный руководитель: Булыженков Игорь Эдмундович

Об эквивалентности энергии и массы.

Ставший известным ещё в начале прошлого века, закон эквивалентности энергии и массы $\varepsilon = mc^2$ позволил добывать энергию из атомов, уменьшая их массу, в том числе и для атомной бомбы. Вещество, обладающее массой, обладает также и энергией, называемой энергией покоя. Этот закон также продемонстрировал и обратную связь – область пространства, заполненная электромагнитным полем обязана обладать массой, то есть поле является веществом, хотя и с очень маленькой плотностью, а также обладает импульсом и моментом импульса. Эквивалентность позволила также объединить закон сохранения массы и закон сохранения энергии. Вещество там, где концентрация энергии велика, поле там, где концентрация энергии мала. Таким образом, мы не можем определить чёткую границу между веществом и полем. Переходя на язык плотностей, мы можем утверждать, что плотность энергии пропорциональна массовой плотности.

Идеи Густава Ми.

Данная концепция непустого пространства просматривается в идеях Густава Ми по попытке объединить электродинамику и гравитацию. Основные цели теории Ми заключались в создании единого взгляда на поле и вещество, он пытался обобщить уравнения поля таким

образом, чтобы внутри элементарных заряженных частиц кулоновские силы отталкивания уравновешивались другими силами электрического происхождения, а вне частиц это отклонения были незначительны. Ми полагал, что энергия и вещество имеют электромагнитное происхождение, а из свойств поля можно вывести свойства и характеристики зарядов. Он предложил изменить полевые уравнения электродинамики и получить решения соответствующие стабильным частицам без введения частиц как независимых элементов. Уравнения Максвелла будут получаться из этих уравнений в пределе малых полей, то есть вдали от частиц. Ми исходил из принципа наименьшего действия, а лагранжиан выбрал из комбинаций 4-мерного потенциала поля и тензора электромагнитного поля таким образом, чтобы он был лоренц-инвариантен:

$$\Phi = -\frac{1}{16\pi c} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - f\left(\sqrt{A_{\mu} A^{\mu}}\right).$$

Данный лагранжиан не удовлетворял калибровочной инвариантности (позднее, Борн и Инфельд исправили этот недостаток). Хотя Ми не добился реализации своих целей в полной мере, ему всё же удалось рассмотреть нелинейные полевые уравнения, а его идеи протяжённого электрона и непустого пространства легли в основу дальнейших, более успешных теорий [1]. В своей же статье [3] я не пытаюсь расширить уравнения Максвелла, я нахожу новые решения полевых уравнений в предположении ненулевой зарядовой плотности.

Возможность существования продольных волн.

Плоские волны являются решением уравнений Максвелла в условиях пустого пространства $\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho = 0$. Принятие факта непустого пространства позволяет по-новому взглянуть на систему полевых уравнений и получить продольные электрические волны, у которых $\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho \neq 0$ и которые не могут существовать в пустоте.

Стационарное решение для протяжённого электрона.

Предположив пропорциональность энергии электромагнитного поля не только массовой плотности, но и зарядовой $\rho = \text{const} \cdot \vec{E}^2$, можно получить стационарное решение в рамках 1-го уравнения Максвелла ($\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho$):

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}(r) = \frac{rq}{r(r+r_0)}, \\ \rho(r) = \frac{\operatorname{div} \vec{E}(r)}{4\pi} = \frac{qr_0}{4\pi r^2 (r+r_0)^2}. \end{array} \right.$$

Произвольная постоянная r_0 , возникающая при решении дифференциального уравнения составляет запредельно малую для наблюдений величину. Электрическое поле при достаточном отдалении от центра электрона переходит в экспериментально хорошо проверенное кулоновское поле. Большая часть заряда сосредоточена в центре, на расстояниях, сравнимых с r_0 . При таком подходе не только проинтегрированная по всему объёму плотность оказывается конечной величиной (равной элементарному заряду), но и интеграл энергии оказывается конечным, в то время как точечное решение не обеспечивает сходимость интеграла энергии электрического поля [2].

Сходящиеся и расходящиеся волны (на фоне стационарного решения).

Продольное, сферически симметричное распределение электрического поля, меняющееся со временем, не приводит к созданию магнитного переменного поля, поэтому 4-е уравнение Максвелла остаётся с нулевой правой частью:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{v} 4\pi\rho \Rightarrow 0 = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{v} \operatorname{div} \vec{E}.$$

Густав Ми одним из первых понял, что плотность заряда электрона и ее ток должны присутствовать во всех точках полевого пространства. Именно этот факт лежит в основе получения продольных волн с $\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho \neq 0$. Будем также считать, что сферические волновые возмущения двигаются со скоростью $\vec{v} = \pm \hat{r}s$ как от центра, так и к центру симметрии электрона. Решением полученного уравнения являются сходящиеся и расходящиеся радиальные волны [3]:

$$\begin{cases} \vec{E}_{\omega}^{\text{out}}(r, t) = \frac{a_{\text{out}} r}{r^2} \cos(\omega t - kr + \varphi_{\text{out}}), \\ \vec{E}_{\omega}^{\text{in}}(r, t) = -\frac{a_{\text{in}} r}{r^2} \cos(\omega t + kr + \varphi_{\text{in}}). \end{cases}$$

Образование стоячей волны.

Для того чтобы композиция таких волн не переносила энергию от центра на периферию или наоборот, необходимо потребовать равенство амплитуд сходящейся и расходящейся волн, а из условия конечности интеграла энергии получившейся стоячей волны следует условие на разность фаз [3].

$$\vec{E}_{\omega}^{\text{st}}(r, t) = \frac{2ar}{r^2} \sin(kr) \sin(\omega t).$$

Энергия полученной стоячей волны.

Полная энергия волнового процесса, проходящего внутри электрона, оказывается пропорциональной частоте этого волнового процесса, что согласуется с волновыми представлениями о частицах – энергия волны, представляющей частицу в квантовых опытах, также пропорциональна частоте этой волны [3]:

$$\varepsilon_a = \iiint_{R^3} \langle \vec{E}_{\omega}^{\text{st}}(r, t) \rangle_t d^3r = \frac{\pi a^2 \omega}{s}.$$

В теории скрытой термодинамики одной частицы, движущейся со скоростью v , де Бройль интуитивно разделял ее полную релятивистскую энергию на тепловую составляющую и энергию поступательного движения [4]:

$$\frac{M_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = M_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{M_0 v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \equiv Q + E_t.$$

Можно допустить, что энергия внутренних колебаний как раз и отвечает за тепловую энергию изолированной частицы $Q = \sum_a \varepsilon_a$.

Литература:

1. Christopher Smeenk and Christopher Martin. *Mie's Theories of Matter and Gravitation*. - July 18, 2005
2. Bulyzhenkov I.E. *Int. Jour. of Theor. Phys.* — 2008. — V. 47. P.1261
3. Блинов С.В., Булыженков И.Э. Об удержании продольных волн внутри протяженного электрона. — Труды МФТИ. — 2016. (на данный момент ещё не опубликована).
4. Де Бройль Избранные научные труды. Т.4. Термодинамика изолированной частицы. Реинтерпретация волновой механики. Доклады и выступления. — М.: ПРИНТ-Ателье, 2014.

МОДЕЛИРОВАНИЕ КВАНТОВО-КРИПТОГРАФИЧЕСКИХ ЗАПУТАННЫХ СИСТЕМ

Зар Ни Аунг

Московский Физико-технический институт
Московская область, г.Долгопрудный, Институтский переулок д. 9
E-mail : zarniaung.52@gmail.com

SIMULATION OF QUANTUM CRYPTOGRAPHY ENTANGLED SYSTEMS

Zarni Aung

Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudnyi, Institutskaya str., 11

Abstract. Simulation of Quantum Cryptography entangled systems is considered. Quantum cryptography is the most developed area of quantum information in terms of practical application. Quantum cryptography is a new direction in the development of the confidential transmission information. More precisely, quantum cryptography systems are a key distribution secret system between spatially separated (remote) legitimate users. They are simulated by classical computer.

Аннотация. На сегодняшний день квантовая криптография является наиболее развитой областью квантовой информатики с точки зрения практического применения. Квантовая криптография представляет собой новое направление в развитии средств конфиденциальной передачи информации. Квантовые криптографические системы представляют собой системы распределения секретных ключей между пространственно разделенными (удаленными) легитимными пользователями. Они моделируются на классическом компьютере.

В первой экспериментальной демонстрации установки квантового распределения ключей, проведенной в 1989 в лабораторных условиях [1], передача осуществлялась через открытое пространство на расстоянии тридцати сантиметров. Далее эти эксперименты были проведены с использованием оптического волокна в качестве среды распространения. После первых экспериментов Мюллера и др. В Женеве с 1995 г. до 2006 г. расстояние передачи было увеличено с 1,1 км до 184 км в работах [2,3].

1. Квантовый протокол BB84

В протоколе BB84 используются 4 квантовые состояния фотонов.

1. Алисой посылается последовательность фотонов, которые имеют случайную поляризацию (0° , 45° , 90° , 135°);
2. Бобом измеряется поляризация фотонов, при таких условиях базиса “+” (0° , 90° - линейная поляризация) или “х” (45° , 135° - диагональная линейная поляризация) по случайному закону;
3. Бобом фиксируются полученные результаты измерений, сохраняя их в секрете. Боб сообщает затем Алисе по открытому каналу, какие базисы (“+” или “х”) он использовал для каждого принятого фотона, а Алиса сообщает ему, какие базисы из использованных были правильными (но измерения в неправильных базисах отбрасываются);
4. Оставшиеся данные интерпретируются в соответствии с условленной схемой (0° и 45° декодируются как “0”, 90° и 135° - как “1”) как двоичная последовательность (11001)[5].

В нашей модели первый легитимный пользователь зашифровывает информацию реализуемом на классическом компьютере с помощью генератора случайных чисел[6]. Второй легитимный пользователь расшифровывает информацию с помощью этого же генератора. Для квантовой защиты каналов будем использовать квантовый генератор случайных чисел, воспроизводящий поляризации фотонов.

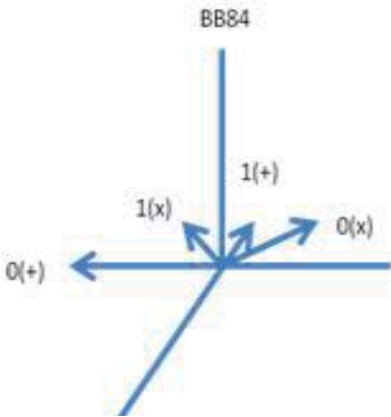


Рис. 1 – Состояния поляризации фотонов, используемые в протоколе BB84 .

Алиса	↑	↗	→	↘	←	↙	↖	↓	↓
Боб	+	+	×	×	+	×	×	×	+
	↑	→	↗	↘	←	↙	↖	↗	↓
Обсужден ие по открытому каналу	✓			✓	✓			✓	✓
Согласован ный ключ	↑		↘	→		↗		↓	↓

Рис.2. Формирование квантового ключа по протоколу BB84 .

2. Экспериментальное моделирование вероятностных квантовых состояний

Центральная идея о квантовых компьютерах, предложенных Фейнманом в том, что они не могут быть смоделированы конечным числом классических битов. Отметим, что если компьютер работает с бесконечным числом битов, то он не противоречит идее Феймана. Более того, моделирование возможно. Определим ортогональные Q-биты следующим образом:

$$|0\rangle = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x) \tag{1}$$

$$|1\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(n\pi x) \tag{2}$$

где коэффициенты a_n и b_n , которые получаются, как обычно, с помощью ортонормированных функции \sin и \cos , удовлетворяющих соотношениям

$$\langle 0|0\rangle = |a_0 / 2|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = 1 \tag{3}$$

$$\langle 1|1\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 = 1 \tag{4}$$

$$\langle 0|1\rangle = \langle 1|0\rangle = 0. \tag{5}$$

Если $q: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывная периодическая функция, то общий Q-бит удовлетворяет соотношению

$$|q\rangle = A|0\rangle + B|1\rangle, \tag{6}$$

где $|A|^2 + |B|^2 = 1$.

3. Заключение

В статье изучены протоколы квантового распределения ключа и вопрос их защищенности от прослушивания. На примере протокола BB84 показана безусловная защищенность протоколов с помощью поляризации фотонов между каналами. Секретные ключи распределяются между пространственно разделенными (удаленными) легитимными пользователями.

Литература

- [1]. С. Bennett, F. Bessette, G. Brassard, L. Salvail, and J. Smolin, "Experimental quantum cryptography" J. Cryptology 5, 3-28 (1992).
- [2]. Д.М. Голубчиков, К.Е. Румянцев, "Квантовая криптография принципы, протоколы, системы" Электронная библиотека МГУ.2013, с.2-9.
- [3]. Р.А. Hiskett, D. Rosenberg, C.G. Peterson, R.J. Hughes, S. Nam, A.E. Lita, A.J. Miller, and J.E. Nordholt, "Long-distance quantum key distribution in optical fiber", New J. Phys. 8, 193 (2006).
- [4]. С.Н. Bennett et al. Experimental Quantum Cryptography. –Journal of Cryptography, 1992, No.5. (BB84).
- [5]. М. Avila Aoki et al. "A Simulation of a Virtual Qubits on a Classical Computer Has Been Developed Recently", pp.172-173(2011).
- [6]. Ю.П. Рыбаков, Т.Ф. Камалов, "Случайная солитонная реализация квантовой механики и стохастические кубиты," Вестник РУДН, т. 2, № 2, pp.117-122 (2003).

A UNIFIED PHYSICS NOW

Ivanhoe B.Pestov

*Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, Joint Institute for Nuclear Research,
141980 Dubna, Moscow Region, Russia; E-mail: pestov@theor.jinr.ru*

The supersymmetry, the superstring theory and the M-theory, were analyzed by Steven Weinberg in his article, entitled "A Unified Physics by 2050?" We cite his general conclusion: "Observations of this kind will yield valuable clues to the unified theory of all forces, **but the discovery of this theory will probably not be possible without radically new ideas.**"

The creation of a unified geometrical theory of fundamental interactions **is motivated by two severe constraints.** It is natural to suppose that solution of the fundamental physical problems cannot be given without a more drastic revision of our fundamental concepts than any that have done before. Quite likely these innovations are so great that **direct attempts to derive new ideas from experimental data will be beyond the power of human intelligence** (P.A.M.Dirac).

And second, we need to know the origin of the laws and, hence, to formulate a new theory which considers world as a whole (as an integral structure) and gives a possibility to understand **why nature is just the way it is.**

To produce a single theory that provides understanding of the structure of our universe as a unique possible consequence of the only simple assumption (a first principle),

we abstract away from the known concepts and laws (there are weighty reasons for this but we pay attention only on the history of the Maxwell equations) and put forward the fundamental principle of unification which can be presented in the form of the grand relation: fundamental physical ideas, symmetries and equations are tightly connected with the idea of space and, hence, they have the geometrical origin and are formulated in the form completely independent of any outer and a priori

conditions (everything in the concept of space and the concept of space in everything). **Thus, the radically new idea of a uni_ed physics is a most possible generality and the outlined first principle.**

With this hypothesis as a ground, a conceptual structure of a unified physics is created and deductive derivation of its main equations is produced [1]-[12]. The formulated new system of fundamental equations of physics provides opportunity to understand the origin and nature of physical fields and local internal symmetry; time and energy; spin and charge; confinement and quark-lepton symmetry; dark energy and dark matter, giving by this solution of the fundamental physical problems and conforming together with this the existence of new physics in its unity.

The theory presented is the only one unique logically possible physical theory since it gives the solution of the most difficult and long-standing problem in the history of science - the problem of time.

A new concept of time provides the formulation of the law of energy conservation (the most fundamental law of the nature) in the form which is the most general and, hence, suitable for all cases without exclusion. When we discover connections of time with another objects, the reason of the existence of time becomes clear.

References

- [1] I.B. Pestov (1978). *Theor. and Math. Phys.* **34(1)**, 48.
- [2] I.B. Pestov (2006). *New concept of time and gravity*, In: *Symmetries and Intergrable Systems, Vol. II*, Ed. by A.N. Sissakian; Preprint No. E2-96-424, JINR (Dubna, 1996).
- [3] I.B. Pestov (2000). *J.Phys. A: Math.Gen.* **33**, 3027.
- [4] I.B. Pestov (2005). In: *Horizons in World Physics, Vol.248*, Ed. by A. Reimer, (Nova Science, New York, 2005), p.1; Preprint No.E2{2004{105 JINR (Dubna, 2004); gr-qc/0507131.
- [5] I.B. Pestov (2006). In: *Dark Matter: New Research*, Ed. by Val Blain (Nova Science, New York 2006), p. 77; Preprint No. E2{2005{51, JINR (Dubna, 2005); gr-qc/0412096.
- [6] I.B. Pestov (2011). *Physics of Atomic Nuclei*, Vol. **74**, n.7, 1084; Preprint No. E2-2008-93, JINR (Dubna, 2008).
- [7] I.B. Pestov (2012). *Geometrical Theory of Fundamental Interactions. Foundations of Uni_ed Physics*. Communication of the Joint Institute for Nuclear Research, P2-2012-140. Dubna, 2012.
- [8] I.B. Pestov (2012). *Geometrical Theory of Fundamental Interactions. Gravidynamics*. Communication of the Joint Institute for Nuclear Research, P2-2012-141. Dubna, 2012.
- [9] I.B. Pestov (2012). *Geometrical Theory of Fundamental Interactions. Spinstatics and Spindynamics*. Communication of the Joint Institute for Nuclear Research, P2-2012-142. Dubna, 2012.
- [10] I.B. Pestov (2012). *Geometrical Theory of Fundamental Interactions. Generalized Electromagnetic Field*. Communication of the Joint Institute for Nuclear Research, P2-2012-143. Dubna, 2012.
- [11] I.B. Pestov (2013). *Physics of Particles and Nuclei*, Vol. **44**, No.3, 442.
- [12] I.B. Pestov (2015). *Foundations of a Uni_ed Physics*. *J.Phys.Math.* **6**: 135. doi:10.41722090-0902.1000135.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПЛАЗМОХИМИЧЕСКОГО МОДИФИЦИРОВАНИЯ УГЛЕРОДНЫХ ВОЛОКОН ПРИ СОЗДАНИИ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ ТРИБОТЕХНИЧЕСКОГО НАЗНАЧЕНИЯ

В.П. Селькин¹, Е.М. Толстопятов¹, С.В. Копылов²

PLASMACHEMICAL MODIFICATION OF CARBON FIBERS AT DEVELOPMENT OF COMPOSITE MATERIALS OF TRIBOTECHNICAL DESTINATION

V.P. Selkin, E.M. Tolstopyatov, S.V. Kopylov

¹ ГНУ «Институт механики металлополимерных систем им. В.А. Белого НАН Беларуси»,

ул. Кирова, 32а, 246050, Гомель, Беларусь

² Московский политехнический университет,

ул. Б. Семёновская, 38, 107023, Москва, Россия

e-mail: *selkin_v@mail.ru*

Показана перспективность применения химически активной плазмы при получении содержащих углеродный наполнитель фторполимерных композиций триботехнического назначения. Приведены сравнительные характеристики (коэффициент трения, интенсивность изнашивания) композиции, содержащей подвергнутые плазмохимическому модифицированию во фторуглеродной плазме углеродные волокна, и композиции Ф-4К15М5 в условиях соответствующих работе уплотнительных узлов запорной арматуры.

Efficiency of using chemically active plasma in the technology of fluoropolymer composites of tribotechnical destination filled with carbon fibers is shown. Comparative characteristics (friction coefficient, wear intensity) are given for the composite filled with fluorocarbon plasma treated carbon fibers and F-4K15M5 composite in conditions simulating that of working sealing elements of stop valves.

Современные требования к снижению потерь на трение в уплотнительных узлах использующейся в нефтехимической промышленности запорной арматуре ставят задачу разработки новых антифрикционных композиционных материалов с повышенными триботехническими характеристиками. Одними из наиболее распространенных продуктов применяемых по данному назначению в странах СНГ являются композиции политетрафторэтилена Ф-4К20 и Ф-4К15М5 [1]. Они обладают хорошей износостойкостью, но имеют более высокий коэффициент трения по стали, чем базовый полимер. В то же время появились новые перспективные подходы при создании фторполимерных материалов, в частности, основанные на использовании высокоэнергетических технологий [2]. В настоящей работе показана перспективность применения при получении антифрикционных композиций химически активной плазмы.

Плазменная обработка позволяет изменять как физические свойства, так и химическое состояние тонкого поверхностного слоя материала без изменения его объёмных свойств. Элементарным процессом при плазменном воздействии на поверхность твёрдого тела является физическое распыление адсорбированных слоёв загрязнений, слабо связанных с поверхностью (ионная очистка поверхности). Удаление таких слоёв, происходящее при низких энергиях

ионов, уже само по себе способствует повышению адгезии поверхности к связующему, клею или краске. Поскольку процесс распыления идёт под действием ускоренных по направлению к поверхности ионов, наибольшие возможности по управлению им реализуются при обработке электропроводящих материалов при подаче на них отрицательного потенциала относительно объёма плазмы. В простейшем случае обрабатываемый объект может служить катодом в диодной разрядной системе. При достаточно высокой энергии ионов происходит и распыление основного материала, причём зёрна с различной ориентацией кристаллов могут иметь различную стойкость к ионно-плазменному распылению. В результате этого ионное воздействие приводит к повышению микронеровности поверхности. При условии контакта наполнителя со связующим это ведёт к повышению прочности композита за счёт механического сцепления компонентов.

Более сложные и многообразные процессы протекают под действием химически активной плазмы. Для её генерации используются газы, которые под действием электронного удара не только возбуждаются и ионизируются, но и диссоциируют с образованием короткоживущих химически активных по отношению к обрабатываемому материалу частиц. При этом может происходить как травление поверхности, т.е. химическое взаимодействие этих частиц с поверхностью с образованием летучих соединений, так и образование стабильных химических связей компонентов плазмы с материалом поверхности. Кроме этого, при использовании полимеризационно-способных газов возможно осаждение на поверхности объекта полимер-подобного покрытия.

Если плазменная очистка поверхности от загрязнений и травление поверхности благоприятны для наполнителей композитов любого состава, то эффект от плазмохимического модифицирования поверхности специфичен для каждого связующего, т.е. его влияние на совместимость со связующим зависит от соотношения химической природы обоих.

Плазмохимическое модифицирование углеволокна во фторуглеродной низкотемпературной плазме низкого давления было выбрано в качестве основного метода подготовки компонентов композита «углеродный наполнитель – фторполимерное связующее» при создании в ИММС НАН Беларуси нового антифрикционного композиционного материала на основе фторопласта-4 «Суперфлуфис Плюс». Адгезионное взаимодействие между исходным углеродным волокном и фторполимером очень невелико. В то же время обработка поверхности во фторуглеродной плазме приводит как к фторированию поверхности, так и к осаждению на ней фторполимерного покрытия, прочно связанного с поверхностью углеволокна. В результате этого поверхность становится в определённом смысле химически родственной материалу связующего, что повышает адгезионное взаимодействие между ними и обеспечивает повышенную прочность композита. Следует подчеркнуть, что этому способствует также удаление слабосвязанных с поверхностью углеволокна загрязнений и повышение микрошероховатости поверхности, обеспечивающее механическое зацепление со связующим.

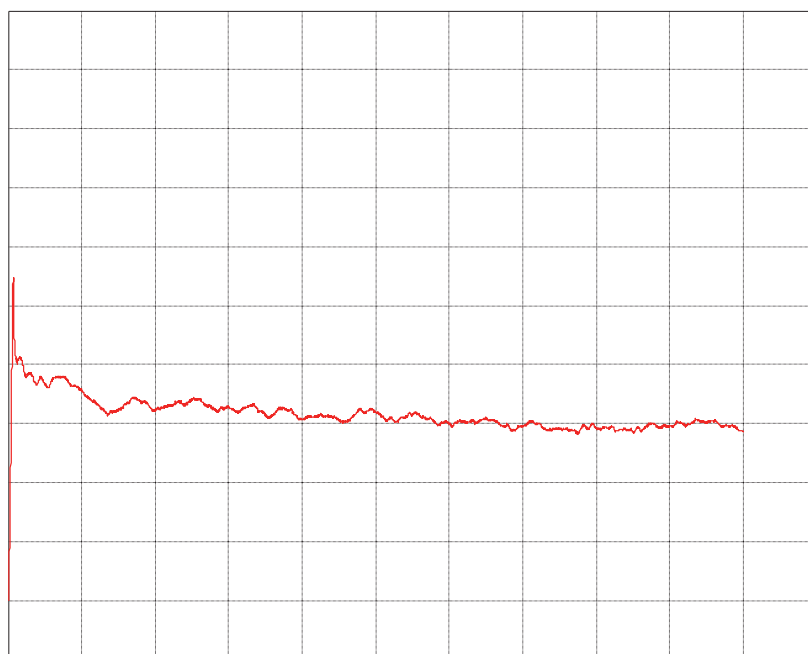
К настоящему времени установлено, что характер модифицирования поверхности в плазме полимеризационно-способных газов в большой степени зависит от режимов процесса. В число влияющих факторов входят: состав, давление и скорость протока газа, частота, плотность тока и мощность разряда, параметры импульсов, метод возбуждения электрического разряда (ёмкостной или индукционный), тип электродной системы (с открытыми или изолированными электродами), место расположения обрабатываемой поверхности по отношению к зоне разряда, и др [3,4]. Выбор оптимальных параметров обеспечивает высокую производительность обработки при достижении требуемого качества поверхности.

Для обработки углеродных материалов в ИММС НАН Беларуси используется ёмкостной плазменный реактор с плоскими электродами, электропитание которого производится импульсным или переменным напряжением килогерцовой частоты. Контроль эффективности обработки в технологическом процессе осуществляется по изменению характера смачивания поверхности углеродных волокон дистиллированной водой. Контроль всего процесса

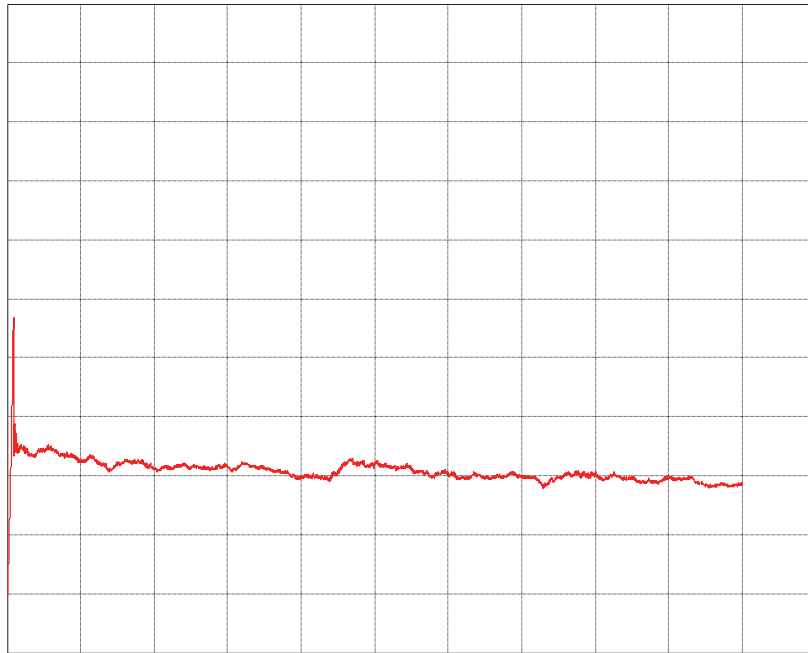
производства композита выполняется по результатам механических испытаний сформированных образцов. Об эффективности плазменной обработки углеродного наполнителя композита на основе фторопласта-4 можно судить по результатам испытаний триботехнических характеристик готовых образцов.

Были проведены сравнительные испытания композитов Ф-4К15М5 и «Суперфлуфис Плюс». Сравнивали коэффициент трения (величину трения скольжения) по стали и интенсивность изнашивания при трении без смазки.

Величину трения скольжения определяли на снабженной специальным приспособлением испытательной машине SHIMADZU Autograph AGS-1 kNX. Контртело – сталь 45, шероховатость $Ra = 0,25$ мкм. Скорость скольжения – 100 мм/мин. Образцы в виде цилиндра, площадь поверхности трения (торцевая) – 1 см^2 , шероховатость поверхности трения – $Ra = 0,25$ мкм. Нормальная нагрузка на образцы – 100 Н. Результаты приведены на рис. 1. На рис. 2 показан результат для фторопласта-4. Из зависимостей видно, что коэффициент трения «Суперфлуфис Плюс» в режиме малых скоростей скольжения в 1,5 раза меньше, чем у Ф-4К15М5 (0,04 и 0,06), и приближается по величине к значениям фторопласта-4.



а)



б)

Рис. 1. Зависимость величины силы трения скольжения от пути трения композиций Ф-4К15М5 (а) и «Суперфлувис Плюс» (б)

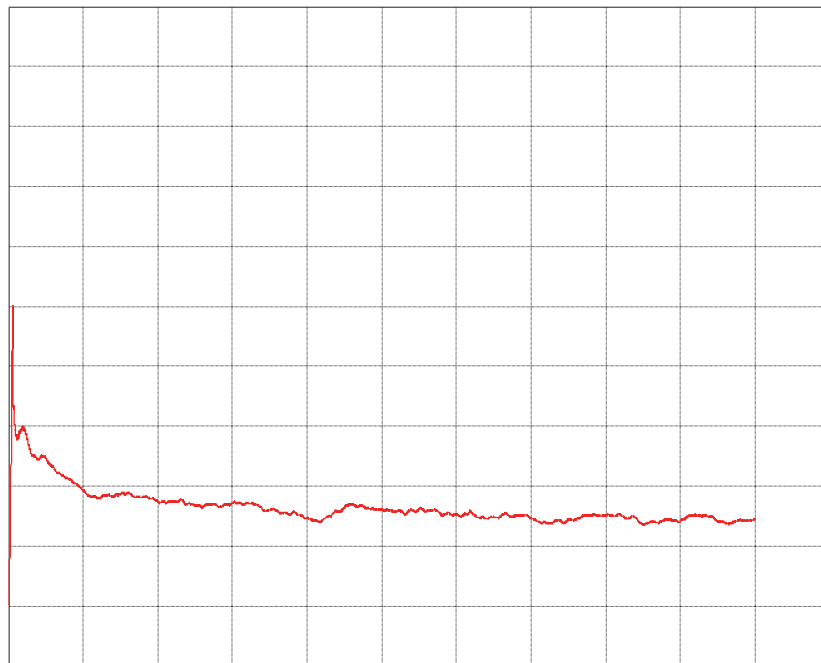


Рис. 2. Зависимость величины силы трения скольжения от пути трения фторопласта-4

Интенсивность изнашивания оценивали по отношению линейного износа к пути трения на разработанной в ИММС НАН Беларуси испытательной машине [5]. Материал контртела – сталь марки А 105 (ASTM A105), шероховатость $Ra = 0,25-0,32$ мкм. Контурное давление – 2,5

МПа. Скорость скольжения – 0,05 м/с. Путь трения – 5000 м. Количество образцов по – 4. Результаты испытаний в данных условиях показали практически одинаковую интенсивность изнашивания Ф-4К15М5 и «Суперфлувис Плюс» ($\approx 3 \cdot 10^{-9}$).

Таким образом, использование плазмохимического модифицирования углеродных волокон позволяет получать армированные ими композиции триботехнического назначения, которые при режимах соответствующих работе запорной арматуры в нефтехимической промышленности приближаются по величине коэффициента трения к фторопласту-4, а по износостойкости не уступают композиции Ф-4К15М5.

Работа выполнена в рамках контракта ЮВК-2012-5 с ОАО «ЦК МПФГ «Формаш» и ГПНИ РБ «Физматех 6.06».

Литература

1. Максимов Б.Н, Барабанов В.Г., Серушкин И.Л. и др. Промышленные фторорганические продукты / Справочник. Изд. 2-е. Л.: Химия, 1996, 544 с.
2. Бузник В.М. Состояние отечественной химии фторполимеров и возможные перспективы развития // Российский химический журнал (Ж. Рос. хим. об-ва им. Д.И. Менделеева). – 2008. Т. 12, – № 3, – С. 7–12.
3. Ясужа Х. Полимеризация в плазме / Пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 376 с.
4. Беграмбеков Л.Б. Модификация поверхности твёрдых тел при ионном и плазменном воздействии / Уч. пособие. – М.: МИФИ, 2001. – 34 с.
5. Селькин В.П., Копылов С.В. Машина трения для испытания полимеров в режиме граничной смазки // Трение и износ. – 2016. Т. 37, – № 2 – С. 234–237.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СТАБИЛИЗАЦИИ СВЯЗЕЙ К ЗАДАЧАМ НЕГОЛОНОМНОЙ МЕХАНИКИ

Каспирович И. Е, Мухарлямов Р. Г.

APPLICATION OF CONSTRAINT STABILIZATION TO NONHOLONOMIC MECHANICS

I. E. Kaspirovich, R. G. Mukharlyamov

Российский университет дружбы народов, Москва, РФ
Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, RF

В данной работе сравниваются методы решения задач динамики систем с неголономными связями. Подходящий выбор обобщенных координат для конкретной задачи позволяет составить уравнения Чаплыгина, отделив тем самым уравнения динамики от неинтегрируемых уравнений связей. Другим достаточно распространенным методом решения задач о неголономном движении является метод произвольных множителей Лагранжа. Однако, при численном интегрировании в этом случае накопление ошибок, связанных с отклонением от уравнений связей, приводит к возникновению неустойчивости в решении. Для устранения данной неустойчивости при численном интегрировании используется метод стабилизации связей. В данной статье применяется метод стабилизации связи для получения устойчивого решения уравнений движения, полученных методом множителей Лагранжа. Полученные решения сравниваются с решениями уравнений Чаплыгина для той же задачи. Численное интегрирование уравнений производится методами Рунге-Кутты и Эйлера. При этом в решении задачи стабилизации связи подбирается оптимальный набор параметров для минимизации отклонения решения, полученного методом множителей Лагранжа, от решения уравнений Чаплыгина.

In this paper some methods of solving problems of nonholonomic systems are compared. Appropriate choice of generalized coordinates allows to set up Chaplygin equations and to separate motion equations from constraints. Another common method of solving such problems is the method of Lagrange multipliers. However, using numerical integration in this case leads to error accumulation caused by deviations from the constraints equations and, as a result, to the solution instability in relation to the constraints equations. Constraint stabilization can be applied to remove this instability using numerical integration. In this paper this method of constraint stabilization is applied to build a stable solution of motion equations with Lagrange multipliers. Euler and Runge-Kutta methods are used for numerical integration. Also solving stabilization problem appropriate set of parameters can be selected to minimize the difference between the solution of Chaplygin equations and the solution of equations with Lagrange multipliers.

Некоторые задачи неголономной механики могут быть решены с помощью модификации уравнений Лагранжа-Эйлера, при которой неголономная связь учитывается в самих уравнениях. Подобные методы были рассмотрены Чаплыгиным, Маджи, Воронцом и Аппелем. Например, определенный выбор обобщенных координат $\{q_1, \dots, q_n\}$ позволяет записать m неголономных связей в следующем виде (здесь и в дальнейшем по повторяющимся индексам подразумевается суммирование):

$$dq^{m+k} = b_s^{m+k}(q) dq^s, \quad k = 1, \dots, n - m, \quad s = 1, \dots, m,$$

разделив таким образом обобщенные скорости на зависимые и независимые. Для независимых координат уравнения Лагранжа-Эйлера запишутся следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}^s} - \frac{\partial L^*}{\partial q^s} + \sum_{k=1}^{n-m} \left(\frac{\partial L}{\partial q^{m+k}} \right)^* \left[\sum_{r=1}^m \left(\frac{\partial b_r^{m+k}}{\partial q^s} - \frac{\partial b_s^{m+k}}{\partial q^r} \right) \dot{q}^r \right] = 0, \quad s = 1, \dots, m. \quad (1)$$

Как показал Чаплыгин [1], данным методом можно воспользоваться, если лагранжиан L и коэффициенты $b_s^{m+k}(q)$ определяются только независимыми координатами. Уравнения (1) называются уравнениями Чаплыгина.

Одним из наиболее распространенных методов решения задач неголономной механики является метод произвольных множителей Лагранжа, согласно которому вводится набор произвольных множителей так, чтобы уравнения движения и связей представляли собой замкнутую систему уравнений. Например, если на систему наложены неголономные связи

$$f^i = a_k^i \dot{q}^k, \quad i = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, n, \quad (2)$$

где $\dot{q} = dq/dt$, то уравнения Лагранжа-Эйлера с произвольными множителями имеют следующий вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial L}{\partial q^k} = \lambda_i a_k^i, \quad (3)$$

где λ_i произвольные множители.

Однако, при численном интегрировании уравнений с произвольными множителями возникает неустойчивость решения относительно уравнений связей. Для устранения данной неустойчивости применяется метод стабилизации связей [2]. Согласно данному методу вместо связей (2) рассматриваются следующие уравнения возмущений связей:

$$\dot{f}^i = F^i(f, q, \dot{q}, t), \quad F^i(0, q, \dot{q}, t) = 0. \quad (4)$$

Функции F^i подбираются так, чтобы при численном интегрировании уравнений (3) решение являлось асимптотически устойчивым относительно уравнений связей. В данной работе F^i выбираются в виде линейной комбинации уравнений связей:

$$F^i = k_j^i f^j, \quad k_j^i \in R. \quad (5)$$

Модификация метода множителей Лагранжа может быть использована для построения уравнений динамики в задаче о движении саней по наклонной плоскости [3]. Функция Лагранжа определяется равенством

$$L = \frac{m}{2} [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2a\dot{\phi}(\dot{y} \cos \varphi - \dot{x} \sin \varphi)] + \frac{J}{2} \dot{\phi}^2 + mg \sin \alpha, \quad (6)$$

где x, y, φ - обобщенные координаты, определяющие положение саней, J и m - момент инерции и масса, α - угол наклона плоскости, a - расстояние от центра масс до точки касания переднего колеса. Переднее колесо представляет идеальное лезвие и не может перемещаться в направлении, перпендикулярном его плоскости вращения, что соответствует неголономной связи:

$$f = \dot{y} \cos \varphi - \dot{x} \sin \varphi. \quad (7)$$

В соответствии с методом стабилизации (4), (5), связь (7) записывается в виде равенства

$$\dot{y} \cos \varphi - \dot{x} \sin \varphi = \dot{y}(k \cos \varphi + \dot{\phi} \sin \varphi) - \dot{x}(k \sin \varphi - \dot{\phi} \cos \varphi). \quad (8)$$

Уравнения динамики с произвольными множителями (3) для лагранжиана (6) имеют вид:

$$\begin{cases} m\ddot{x} - ma\ddot{\phi} \sin \varphi - ma\dot{\phi}^2 \cos \varphi = mg \sin \alpha - \lambda \sin \varphi, \\ m\ddot{y} + ma\ddot{\phi} \cos \varphi - ma\dot{\phi}^2 \sin \varphi = \lambda \cos \varphi, \\ J\ddot{\phi} + ma(\dot{y} \cos \varphi - \dot{x} \sin \varphi) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Определив выражение множителя λ с учетом уравнения (8), систему (9) можно представить в следующем виде

$$\begin{cases} \ddot{x} - a\dot{\varphi}^2 \cos \varphi + \dot{y}(k \cos \varphi + \dot{\varphi} \sin \varphi) - \dot{x}(k \sin \varphi - \dot{\varphi} \cos \varphi) = g \sin \alpha \cos^2 \varphi, \\ \ddot{y} - a\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \dot{y}(k \cos \varphi + \dot{\varphi} \sin \varphi) + \dot{x}(k \sin \varphi - \dot{\varphi} \cos \varphi) = g \sin \alpha \cos \varphi \sin \varphi, \\ J\ddot{\varphi} + ma[\dot{y}(k \cos \varphi + \dot{\varphi} \sin \varphi) - \dot{x}(k \sin \varphi - \dot{\varphi} \cos \varphi)] = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Для решения задачи о движении саней на наклонной плоскости можно также использовать уравнения Чаплыгина:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \dot{x}\dot{\varphi}tg\varphi - a\dot{\varphi}^2 \cos \varphi = g \sin \alpha \cos^2 \varphi, \\ J\ddot{\varphi} + \frac{ma\dot{\varphi}\dot{x}}{\cos \varphi} = 0, \\ \dot{y} = tg\varphi\dot{x}. \end{cases} \quad (11)$$

Численный эксперимент проведен при значениях постоянных $\alpha = 30^\circ$, $m = 1kg$, $J = 1kg \cdot m^2$, $a = 1m$ $g = 9.8m/s^2$, и начальных условиях, выбранных следующим образом:

$$\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0 = 0, \dot{\varphi}_0 = 1, x_0 = 0, \varphi_0 = 60^\circ, y_0 = 1. \quad (12)$$

Результаты численного интегрирования методом Эйлера уравнений (10) с фиксированным значением k и уравнений (11) с начальными условиями (12) представлены на рис. 1:

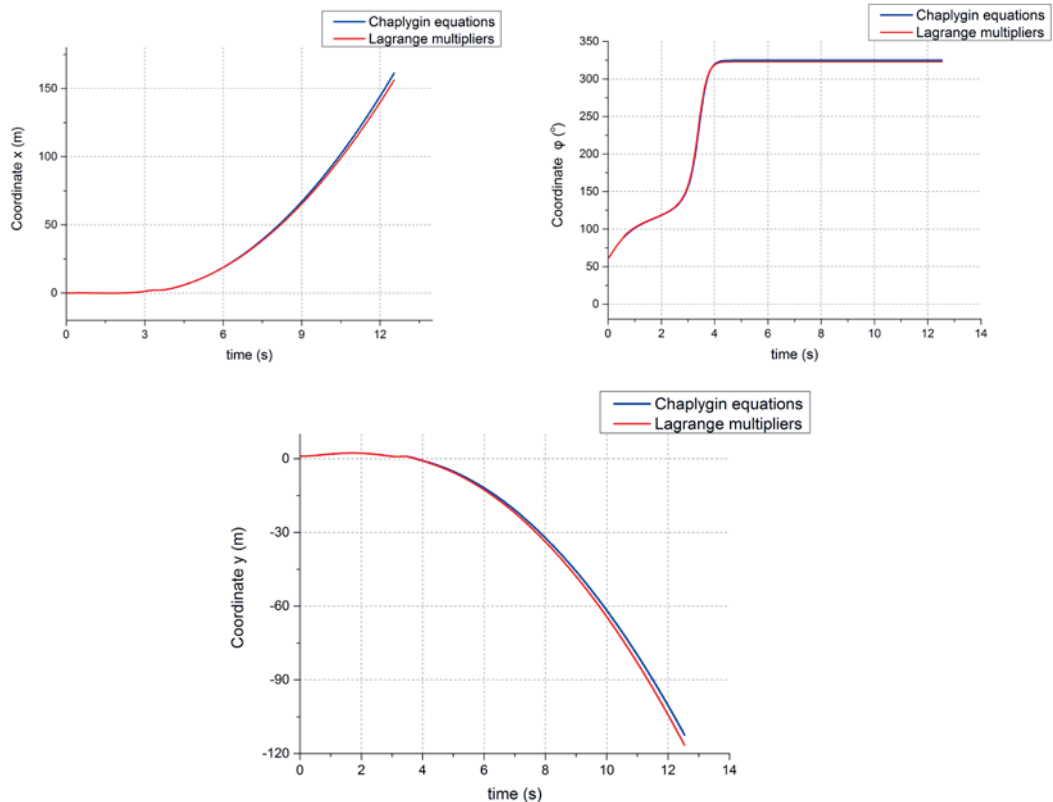


Рис.1. Зависимость координат во времени

Решение уравнений (10) оказывается неустойчивым по отношению к уравнению связи при $k \geq 2$ и $k \leq -1300$. При этом величина параметра возмущения k влияет на отклонение решения уравнений (10) от решения уравнений (11). График зависимости этого отклонения для угловой переменной представлен на рисунке 2. Таким образом, при оптимальном подборе параметра возмущения k можно не только получить устойчивое

решение относительно связей, но и добиться минимального отклонения от решения уравнений типа Чаплыгина.

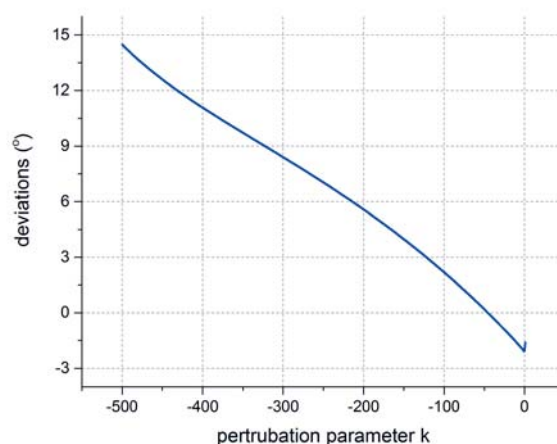


Рис.2. Зависимость отклонения от параметра возмущения

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-08-00558) и при поддержке МОН РФ в рамках госзадания ВУЗу, проект № № 3.1939.2014/К.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Чаплыгин С. А., Исследование по динамике неголономных систем, -Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1949
- [2] Мухарлямов Р. Г., Моделирование процессов управления, устойчивость и стабилизация систем с программными связями, Известия РАН. Теория и системы управления, №1, 15-28, 2015
- [3] Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А., Динамика неголономных систем, М.:Наука, 1967.

УПРАВЛЕНИЕ ПРЕЦИЗИОННОЙ ПОВОРОТНОЙ ПЛАТФОРМОЙ С ЦЕЛЮ СНИЖЕНИЯ КАЖУЩЕГОСЯ УСКОРЕНИЯ

Ананьевский И.М., Ишханян Т. А.

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского Российской академии наук,
Московский физико-технический институт (государственный университет),
Москва, Россия

CONTROL OF A PRECISION TURNTABLE AIMED TO REDUCE THE APPARENT ACCELERATION

We consider an electromechanical system consisting of three solid bodies connected by motors. The system is a simplified model of the precision turntable mounted on board of the orbiting spacecraft and designed to reduce the apparent acceleration of the container with a payload. A control law is proposed, which, for sufficiently small friction and disturbances, in a finite time interval provides a predetermined motion of the container relative to the spacecraft.

Рассматривается задача управления прецизионной поворотной платформой, предназначенной для снижения кажущегося ускорения контейнера с полезной нагрузкой на орбитальном космическом аппарате (КА).

Исследуемая система состоит из трех твердых тел, которые могут вращаться вокруг общей оси. Первое тело вращается относительно основания (КА) с помощью основного электродвигателя, а второе тело (полезная нагрузка) – относительно первого с помощью вспомогательного электродвигателя. Кроме того, второе тело связано с первым посредством крутильной пружины (торсиона).

Динамика такой системы описывается уравнениями

$$\begin{aligned} J_1(\ddot{\varphi}_0 + \ddot{\varphi}_1) &= \mu_1 + c\varphi_2 + \mu_f - \mu_2 \\ J_2(\ddot{\varphi}_0 + \ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2) &= \mu_2 - c\varphi_2 \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь введены следующие обозначения: φ_0 – угол поворота основания относительно неподвижной системы отсчета; φ_1 – угол поворота первого тела относительно основания; φ_2 – угол поворота второго тела относительно первого; J_1 и J_2 – моменты инерции первого и второго тел относительно оси вращения; c – жесткость торсиона (крутильной пружины); μ_1 – момент сил, приложенный к первому телу со стороны основания; μ_2 – момент сил, приложенный ко второму телу со стороны первого; μ_f – момент сил трения, действующий между первым телом и основанием.

Моменты μ_1 и μ_2 создаются безредукторными электроприводами постоянного тока, которые связаны с управляющими напряжениями U_j , подаваемыми на клеммы цепей якорей электродвигателей, следующими соотношениями:

$$\mu_j = \frac{k_j(U_j - k_j\phi_j)}{R_j}, \quad j = 1, 2$$

Здесь R_j – активное (омическое) сопротивление цепи якоря, k_j – постоянный коэффициент, зависящий от конструкции статора и ротора j -го двигателя.

Задача. Построить такое ограниченное управление $U = (U_1, U_2)$ в форме обратной связи, то есть как вектор-функцию фазовых координат и скоростей $\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2$, а также времени t , чтобы после конечного переходного процесса выполнялись равенства

$$\varphi_1(t) = \Phi(t), \quad \varphi_2(t) = 0 \quad (2)$$

где $\Phi(t)$ – заданная функция времени.

Равенства (2) означают, что через конечный промежуток времени торсион примет недеформированное состояние, а второе тело будет двигаться относительно основания по заданному закону. Функция $\Phi(t)$ задает желаемый закон движения второго тела относительно основания и, в частности, может описывать ориентацию вектора кажущегося ускорения относительно КА.

Ранее [1,2] аналогичная задача решена для более простой модели платформы, представляющей собой два твердых тела (КА и контейнер).

В данной работе построен закон управления в форме обратной связи, который через конечный промежуток времени обеспечивает движение второго тела относительно основания по заданной траектории. Применяемый подход использует технику линейных матричных неравенств. Как и в работе [2], полученное управление может рассматриваться как линейная обратная связь с коэффициентами, зависящими от фазовых переменных системы. Коэффициенты обратной связи бесконечно возрастают по мере приближения траектории движения к желаемой, однако управляющие моменты остаются ограниченными и удовлетворяют наложенным на них условиям.

Показано, что предложенный закон управления оказывается эффективным при наличии трения, параметры которого неизвестны и непостоянны, а также в присутствии других неконтролируемых возмущений.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (14-01-00356а и 14-01-00476а) и фонда Династия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н., Борисов А.Е., Гавриков А.А., Емельянов Г.А. Квазиоптимальное управление поворотом твердого тела вокруг неподвижной оси с учетом трения. Известия Российской Академии Наук. Теория и системы управления. 2015. №3. С. 3-21.

2. И.М. Ананьевский, Т.А. Ишиханян. Управление электромеханической системой в присутствии возмущений. LI Всероссийская конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники. Москва, 12 – 15 мая 2015 г. Тез. докладов. С. 135-138.

ВЛИЯНИЕ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ВИБРАЦИЙ ТОЧКИ ПОДВЕСА НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРМАНЕНТНЫХ ВРАЩЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ ОСЕЙ, ЛЕЖАЩИХ В ГЛАВНОЙ ПЛОСКОСТИ ИНЕРЦИИ

Вишенкова Е.А.

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
vishenkova@bk.ru*

Исследуется устойчивость перманентных вращений тяжелого твердого тела вокруг осей из главной плоскости инерции при наличии вертикальных высокочастотных гармонических вибраций точки подвеса.

Ключевые слова: устойчивость, высокочастотные вибрации, перманентное вращение, резонанс.

Введение

Влияние высокочастотных вибраций на устойчивость движений тела обнаружено более века назад. С тех пор было показано, что вибрации могут, как расширять, так и сокращать области устойчивости движений, в связи, с чем изучение их влияния является одной из актуальных задач механики.

В рамках приближенной автономной системы дифференциальных уравнений исследуется устойчивость перманентных вращений тяжелого твердого тела вокруг осей, лежащих в одной из главных плоскостей инерции. Предполагается, что центр масс тела лежит на одной из главных осей инерции для точки подвеса. Проведен подробный линейный анализ устойчивости движений. Полученные результаты сравниваются с известными результатами для неподвижной точки подвеса[1]. Для двух частных случаев геометрии масс тела проведен нелинейный анализ устойчивости.

Постановка задачи

Рассмотрим движение тяжелого твердого тела, одна из точек которого (точка O) совершает гармонические колебания вдоль вертикали по закону $O^*O = a \cos(\Omega t)$ относительно некоторой фиксированной точки O^* . Предполагаем, что амплитуда колебаний точки подвеса a мала по сравнению с приведенной длиной l , а частота колебаний Ω велика по сравнению с характерной частотой Ω_l . Считаем также, что $a\Omega \sim 1$.

Введем поступательно движущуюся систему координат $OXYZ$, ось OZ которой направлена вертикально вверх, и жестко связанную с телом систему координат $Oxyz$. Оси $Oxyz$ направим вдоль главных осей инерции тела для точки O , а ее ориентацию относительно $OXYZ$ зададим при помощи углов Эйлера ψ, θ, φ . Пусть центр масс G тела расположен на оси Ox , при этом $x_G > 0$.

Введем малый параметр ε , безразмерные частоту ω_0 и параметры α, β (A, B, C — главные моменты инерции тела для точки O) по формулам:

$$\varepsilon = a/l \quad (0 < \varepsilon \ll 1), \quad \Omega_1/\Omega = \varepsilon\omega_0, \quad \alpha = A/B, \quad \beta = A/C.$$

Заметим, что на инерционные параметры α и β действуют ограничения из неравенств треугольника для моментов инерции: $\alpha + \beta - \alpha\beta \geq 0, \alpha - \beta + \alpha\beta \geq 0, \beta - \alpha + \alpha\beta \geq 0$.

Уравнения движения тела будем рассматривать в канонической форме. При помощи методов теории возмущений приведем гамильтониан системы к виду, главная часть которого не содержит времени. Как в исходной, так и в преобразованной системе координата ψ циклическая, соответствующий ей импульс постоянен. В безразмерных переменных и параметрах приближенный гамильтониан системы примет вид:

$$H = \frac{\alpha \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}{2 \sin^2 \theta} (p_1 - p_3 \cos \theta)^2 + \frac{1}{2} p_2^2 (\alpha \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) + \frac{\beta}{2} p_3^2 + \sin \theta \sin \varphi + \quad (1)$$

$$+ \frac{(1 - \alpha) \sin \varphi \cos \varphi}{\sin \theta} (p_1 - p_3 \cos \theta) p_\theta + \frac{\xi}{2} (\alpha \cos^2 \theta + \beta \sin^2 \theta \cos^2 \varphi), \quad \xi = \frac{m x_G a^2 \Omega^2}{2 A g}.$$

Последнее слагаемое в гамильтониане представляет собой вибрационный потенциал[2]. Параметр ξ ($\xi > 0$) характеризует частоту вибрации точки подвеса.

Существуют частные движения — перманентные вращения вокруг вертикально расположенных осей из главных плоскостей инерции, примыкающих к оси Ox , ось вращения при этом не совпадает с ней. Рассмотрим далее вращения вокруг осей из плоскости Oxz . Решения описываются следующими соотношениями:

$$\theta = \theta_0 = \text{const} \neq \pi/2, \quad \varphi = \varphi_0 = \text{const} \quad (\cos \varphi_0 = 0), \quad (2)$$

$$p_1 = \eta (\sin^2 \theta_0 + \cos^2 \theta_0 / \beta), \quad p_2 = 0, \quad p_3 = \eta \cos \theta_0 / \beta, \quad \eta = \omega / \Omega_1$$

Здесь ω и η — размерная и безразмерная угловые скорости перманентного вращения.

Введенные параметры связаны соотношением:

$$(\eta^2 [\beta - 1] + \xi \alpha \beta) s \sin \theta_0 = \beta, \quad s = \text{sign}(\sin \varphi_0). \quad (3)$$

В качестве независимых примем параметры α, β, ξ, η .

Множество возможных значений параметров опишем с помощью осей, которых далее будем называть допустимыми. Каждой такой оси соответствует единственное значение угловой скорости η (с точностью до направления вращения). Допустимые оси перманентных вращений описаны в таблице 1.

Таблица 1.

	$\beta > 1$		$\beta < 1$		
	$\xi > 1/\alpha$	$\xi < 1/\alpha$	$\xi > 1/\alpha$		$\xi < 1/\alpha$
φ_0	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$	$-\pi/2$	$\pi/2$
θ_0	$(0, \arcsin(1/\xi\alpha))$	$(0, \pi/2)$	$(0, \arcsin(1/\xi\alpha))$	$(\pi/2, \pi)$	$(0, \pi/2)$
η	$\eta > 0$	$\eta^2 > \eta_1^2$	$\eta^2 < \eta_1^2$	$\eta^2 > \eta_2^2$	$\eta^2 > \eta_1^2$

Далее исследуется устойчивость решений (2) по отношению к координатам θ, φ и отвечающим им импульсам в рамках приближенной системы при фиксированном значении импульса p_ψ .

Исследование устойчивости перманентных вращений

Допустимую часть плоскости параметров α, β разобьем на 9 областей прямыми $\alpha = \beta, \beta = 2/3, \beta = 1, \beta = 4/3, \beta = 2$; они обозначены цифрами 1–9 (рис.1).

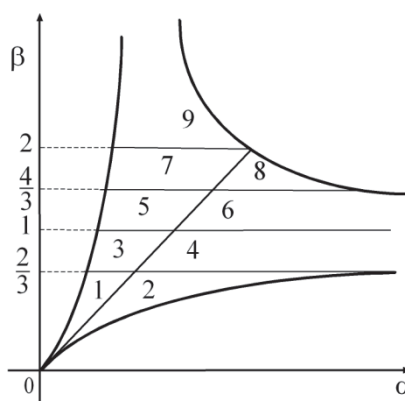


Рис.1. Области параметров α, β

На рисунке 2 приведены результаты достаточных и необходимых условий устойчивости вращений для каждой области рис.1. Ось ординат показывает изменение положительного параметра ξ , характеризующего частоту вибрации тела, а ось абсцисс – положительного параметра η , характеризующего угловую скорость вращения твердого тела. Области выполнения как необходимых, так и достаточных условий закрашены темным цветом, а области выполнения только необходимых условий устойчивости – серым. Области неустойчивости не закрашены.

Введённые далее обозначения не выписываются в силу их громоздкости.

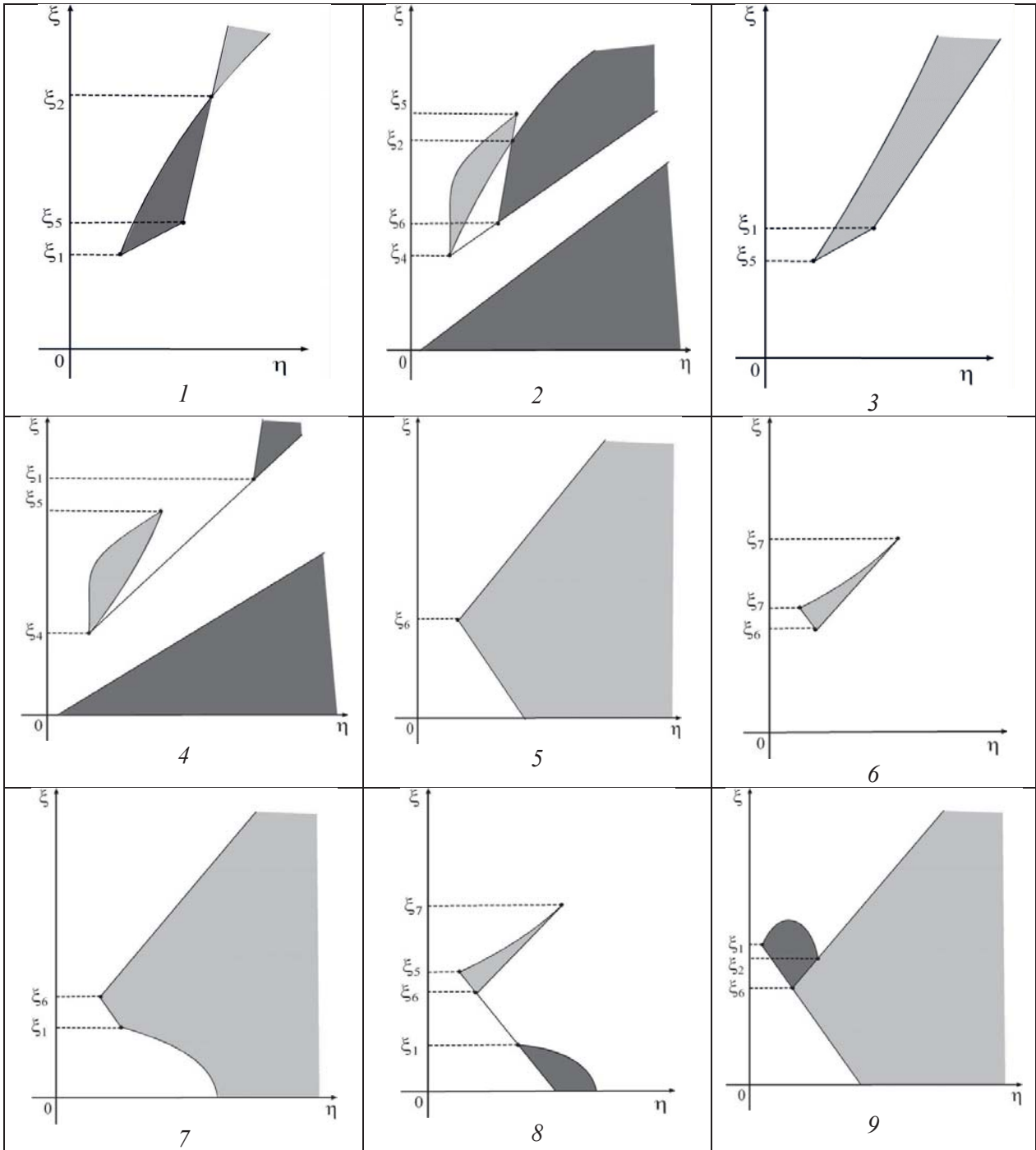


Рис.2. Области выполнения необходимых и достаточных условий устойчивости.

Рис. 2 позволяет оценить влияние частоты вибрации точки подвеса на устойчивость перманентных вращений твердого тела (случай отсутствия вибраций описан в монографии [2]). В случае отсутствия вибрации не во всех областях можно подобрать такую скорость вращения, чтобы движение было устойчивым. Однако, с введением вибрации и изменением ее частоты можно добиться стабилизации неустойчивых ранее вращений (т.е. возникают как области выполнения только необходимых условий устойчивости, так и области выполнения достаточных условий устойчивости).

Для случаев динамически симметричного тела ($\alpha=1$) и Бобылева-Стеклова ($\alpha=2$) проведен нелинейный анализ устойчивости, используя методы исследования автономных гамильтоновых систем с 2 степенями свободы [3]. Построены кривые резонанса 3 и 4 порядка и кривые вырождения. Отслежена их эволюция вместе с эволюцией области. На кривых резонанса 3 порядка исследуемое движение неустойчиво. На кривых резонанса 4 порядка выделены участки устойчивости и неустойчивости.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 14-01-00380).

Литература

1. Холостова О.В. Исследование устойчивости перманентных вращений Штауде. // М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». – 2008. – 128 с.
2. Маркеев А.П. К теории движения твердого тела с вибрирующим подвесом // Доклады Академии наук. – 2009. – Т.427 N 6. – С. 771-775.
3. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. // М. Наука – 1978 – 312 с.

THE EFFECT OF HIGH-FREQUENCY VIBRATIONS ON THE STABILITY OF THE PERMANENT ROTATIONS OF A RIGID BODY AROUND THE AXES LYING IN THE MAIN PLANE OF INERTIA.

Vishenkova E.A.

Moscow Aviation Institute (National Research University), vishenkova@bk.ru

We study the stability of the permanent rotations of a heavy rigid body around axes lying in inertia plane in the presence of the vertical high-frequency harmonical oscillations of the suspension point.

Key words: stability, high-frequency vibration, permanent rotations, resonans.

УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОМ БЕЗУДАРНОГО ЗАХВАТА НЕПРЕДСКАЗУЕМО ДВИЖУЩЕГОСЯ ОБЪЕКТА МОБИЛЬНЫМ МАНИПУЛЯЦИОННЫМ РОБОТОМ

THE CONTROL OF THE PROCESS OF NON-IMPACT CAPTURE OF UNPREDICTABLE MOVING OBJECT BY THE ARM OF THE MOBILE ROBOTIC MANIPULATOR

Мухаметзянов И.А., Чекмарева О.И.

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия, spacefrogling@mail.ru

Аннотация. Получены выражения управляющих сил и моментов для безударного захвата непредсказуемо движущейся цели схватом манипуляционного робота.

Abstract. The expressions of control forces and moments are obtained for non-impact capture of unpredictable moving target by robotic arm.

Постановка задачи. Доклад посвящён приложению методов безударной стабилизации программного многообразия механических и обобщённых систем [1–3].

Рассмотрим упакованный в корпус робота манипулятор и сам робот в целом как одну механическую систему. С главными центральными осями инерции корпуса робота жёстко свяжем систему координат $S_{хуз}$. Задача заключается в построении главного вектора сил, обеспечивающего движение центра масс C корпуса робота по принципу пропорциональной навигации [4] при погоне за непредсказуемо движущимся объектом. Одновременно с этим необходимо построить аналитическое выражение главного момента управляющих сил относительно точки C для приведения одной из главных центральных осей инерции системы $S_{хуз}$, связанной с роботом, в положение, совпадающее с линией визирования $\overline{C\Pi}$, где Π – центр масс преследуемого объекта. Далее необходимо построить аналитическое выражение дополнительной управляющей силы для безударного приведения точки O_0 крепления первого звена манипулятора с корпусом робота в положение точки O на линии визирования, находящейся на расстоянии «вытянутой руки манипулятора» от точки Π объекта преследования. Это позволяет осуществить захват цели схватом манипулятора, центр которого помещён в точку O_n конца последнего звена манипулятора. Необходимо построить также аналитическое выражение сил и моментов управления поступательно и вращательно движущимися относительно друг друга звеньями многозвенного манипулятора, которые позволяют безударно захватить преследуемый объект.

Основные результаты. Построены:

- главный вектор сил, обеспечивающий движение центра масс корпуса робота по принципу пропорциональной навигации при погоне за объектом;
- главный момент управляющих сил относительно центра масс робота для приведения одной из главных центральных осей инерции подвижной системы координат, связанной с корпусом робота, в положение, совпадающее с линией визирования;
- выражение дополнительной управляющей силы для безударного приведения точки крепления первого звена манипулятора с корпусом робота на расстояние «вытянутой руки манипулятора» от цели по линии визирования, чтобы обеспечить захват;
- выражения сил и моментов управления для поступательно и вращательно движущихся относительно друг друга звеньев манипулятора, позволяющие безударно захватить преследуемый объект.

Выводы. Применяя подход, предложенный в [1,2], и принцип обратной связи по квазиускорению в дискретные моменты времени [3] получены выражения управляющих сил и моментов для безударного захвата непредсказуемо движущейся цели схватом манипуляционного робота.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 16-08-00558а).

Литература

1. *Мухаметзянов И.А.* О построении универсального алгоритма управления процессом сближения механических систем с заданным многообразием в условиях неопределенности // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». – 2011. – №3. – С.3–14.
2. *Мухаметзянов И.А.* Безударное приведение состояния «черного ящика» в заданное многообразие // Доклады X Международной Четаевской конференции. – Казань: КНИТУ КАИ, 2012. – С.189–196.
3. *Мухаметзянов И.А.* Самонастраиваемое управление процессом безударного приведения состояния механических систем в заданное многообразие // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». – 2013. – №3. – С.105–112.
4. *Кан В.Л., Кельзон А.С.* Теория пропорциональной навигации. Л.: Судостроение, 1965. – 423 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ В ЗАДАЧАХ КЛАССИЧЕСКОЙ И НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ ПРИ НАЛИЧИИ КРАТНЫХ РЕЗОНАНСОВ ТРЕТЬЕГО И ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКОВ

О.В. Холостова

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

Аннотация

Рассматриваются две задачи по исследованию устойчивости частных движений неавтономных гамильтоновых систем при наличии кратных резонансов третьего и четвертого порядков: задача об устойчивости треугольных точек либрации плоской эллиптической ограниченной задачи трех тел и задача об устойчивости относительного равновесия двойного маятника при вертикальных гармонических колебаниях точки подвеса произвольной частоты и амплитуды.

Ключевые слова: гамильтонова система, устойчивость, кратный резонанс, треугольные точки либрации, двойной маятник.

STABILITY INVESTIGATION IN THE PROBLEMS OF CLASSICAL AND CELESTIAL MECHANICS IN THE PRESENCE OF RESONANCES OF THE THIRD AND FORTH ORDERS

O.V. Kholostova

Moscow Aviation Institute (National Research University)

Abstract

We consider here two problems on the stability investigation of the special motions of the non-autonomous Hamiltonian systems in the presence of the multiple resonances of the third and forth order. They are the problem of stability of the triangle libration point in the planar elliptic restricted three-body problem, and the problem of stability of the relative equilibrium of the

double pendulum when the suspension point performs vertical harmonic oscillations of the arbitrary frequency and amplitude.

Key words: Hamiltonian system, stability, multiple resonance, triangle libration points, double pendulum.

Критерии устойчивости неавтономных периодических по времени гамильтоновых систем с двумя степенями свободы при наличии резонанса третьего или четвертого порядка известны [1]. В то же время в задачах, зависящих от нескольких параметров, нередки случаи, когда реализуются одновременно два или более резонансов, и здесь остается еще много нерешенных вопросов.

Рассмотрим движения неавтономной, 2π -периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Пусть начало координат фазового пространства — положение равновесия системы, устойчивое в линейном приближении, и характеристические показатели $\pm i\lambda_j$ ($j=1, 2$) соответствующей линеаризованной системы уравнений возмущенного движения чисто мнимые. Если величины λ_1 и λ_2 таковы, что выполнено соотношение $m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 = N$, где m_1, m_2, N — целые числа и $|m_1| + |m_2| = \ell$, то в системе реализуется резонанс порядка ℓ .

Будем называть резонанс основным, если в резонансном соотношении присутствует только одна из величин λ_j , и комбинационным, если в нем имеются обе величины λ_1 и λ_2 . Назовем резонанс сильным, если он может привести к неустойчивости в системе, и слабым, если его наличие в системе не приводит к неустойчивости.

В докладе рассмотрены две задачи, из небесной и классической механики, в которых проводится исследование устойчивости частных решений системы при наличии кратных резонансов третьего и четвертого порядков.

В первой задаче решается вопрос об устойчивости треугольной точки либрации плоской ограниченной эллиптической задачи трех тел в двух резонансных случаях. Эти случаи реализуются для значений параметров $e = 0.165115$, $\mu = 0.0393625$, где имеет место двойной резонанс четвертого порядка $\lambda_1 + 3\lambda_2 = -1$ и $4\lambda_1 = 3$ (при этом точка находится в областях устойчивости в четвертом приближении обеих резонансных кривых), а также для значений $e = 0.1218928$ и $\mu = 0.03871614$, где реализуются слабый резонанс $\lambda_1 - 2\lambda_2 = 2$ третьего порядка и резонанс $4\lambda_1 = 3$ четвертого порядка в области устойчивости на соответствующей резонансной кривой [1]. Здесь e — эксцентриситет орбиты, $\mu = m_2 / (m_1 + m_2)$, m_1 и m_2 — массы основных притягивающих тел.

Проведена нормализация гамильтониана возмущенного движения в членах до четвертой степени включительно с учетом имеющихся резонансов. Показано, что в случае двойного резонанса четвертого порядка исследуемое движение формально устойчиво. Для второго резонансного случая проведено исследование приближенной (модельной) системы на фиксированных уровнях энергии. Показано, что все движения модельной системы ограничены. Даны оценки области ограниченности в зависимости от константы энергии системы [3, 4].

Во второй задаче рассматривается задача об устойчивости нижнего относительного равновесия на вертикали системы, состоящей из двух одинаковых шарнирно соединенных стержней с вибрирующей точкой подвеса, в случаях кратных резонансов четвертого порядка. Предполагается, что точка подвеса такого двойного маятника совершает вертикальные гармонические колебания произвольной частоты и амплитуды.

Ранее в работе [4] исследован вопрос об устойчивости четырех относительных равновесий двойного маятника на вертикали. В плоскости безразмерных параметров, характеризующих амплитуду и частоту колебаний, построено первые девять областей устойчивости в линейном приближении нижнего равновесия. В указанных областях имеются 13 точек двойных и тройных резонансов четвертого порядка, которые в работе [4] рассмотрены не были. В данных точках реализуется один из пяти вариантов комбинаций резонансов: 1) основной (сильный) и комбинационный (сильный) резонансы; 2) основной (сильный) и комбинационный (слабый) резонансы; 3) два комбинационных резонанса --- сильный и слабый; 4) три комбинационных резонанса --- два сильных и один слабый; 5) три комбинационных резонанса --- один сильный и два слабых. Во всех случаях точки кратных резонансов лежат в областях устойчивости каждого отдельного резонанса (при отсутствии других резонансов), а квадратичная форма в слагаемых четвертой степени нормализованного гамильтониана при отсутствии резонансных слагаемых является знакоопределенной. Предложен подход и критерии к исследованию знакоопределенности совокупности всех слагаемых четвертой степени нормализованного гамильтониана. В рассматриваемых точках кратного резонанса эти критерии выполняются. Продолжая нормализацию возмущенных гамильтонианов во всех степенях, получаем, в достаточно малой окрестности невозмущенного движения, знакоопределенный формальный интеграл. Следовательно, во всех рассматриваемых случаях кратных резонансов имеет место формальная устойчивость рассматриваемых относительных равновесий.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №~14-21-00068) в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете).

Литература

1. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
2. Холостова О.В. О взаимодействии резонансов третьего и четвертого порядков в гамильтоновой системе с двумя степенями свободы // Нелинейная динамика. 2015. Т. 11. № 4. С. 671-683.
3. Kholostova O.V. Stability of triangular libration points in a planar restricted elliptic three body problem in cases of double resonances // International Journal of Non-Linear Mechanics. 73(2015). 64-68.
4. Холостова О.В. Об устойчивости относительных равновесий двойного маятника с вибрирующей точкой подвеса // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 4. С. 18-30.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ВРАЩЕНИЙ ВОЛЧКА ЛАГРАНЖА С ВИБРИРУЮЩЕЙ ТОЧКОЙ ПОДВЕСА

STABILITY INVESTIGATION OF STATIONARY ROTATIONS OF THE LAGRANGE'S TOP WITH A VIBRATING SUSPENSION POINT

Беличенко М. В.

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

Рассматривается движение волчка Лагранжа, одна из точек которого (точка подвеса) совершает заданное высокочастотное периодическое движение малой амплитуды. Исследуется приближенная автономная система уравнений движения, записанная в форме канонических уравнений Гамильтона. Найдены положения равновесия приведенной системы с двумя степенями свободы, отвечающие стационарным вращениям волчка вокруг оси динамической симметрии. Проведен линейный и нелинейный анализ устойчивости этих решений.

Рассмотрим движение твердого тела с геометрией масс, соответствующей случаю Лагранжа, в однородном поле тяжести. Пусть одна из точек тела O (точка подвеса) совершает периодическое (с частотой Ω) движение, ее радиус-вектор относительно некоторой фиксированной точки O_* задается проекциями $O_*O = (u(t), v(t), w(t))'$, причем средние по времени значения этих проекций равны нулю. Далее будем рассматривать случай $\langle \dot{u} \dot{v} \rangle = 0, \langle \dot{v} \dot{w} \rangle = 0, \langle \dot{w} \dot{u} \rangle = 0$, где угловые скобки обозначают средние по времени значения стоящих в них функций.

Пусть m — масса тела A и C — экваториальный и осевой моменты инерции, радиус-вектор центра масс $OG = l$. Предположим, что наибольшее отклонение h точки подвеса от точки O_* мало по сравнению с приведённой длиной тела $L = A/ml$, а частота Ω велика по отношению к характерной частоте $\omega = \sqrt{g/L}$, при этом $h \cdot \Omega \ll 1$. Введём малый параметр $\varepsilon = h/L$. Уравнения движения волчка будем записывать в форме канонических уравнений Гамильтона. С помощью методов теории возмущений исключим из гамильтониана явно входящее время в слагаемых до четвёртого порядка по ε [1].

Гамильтониан приближенной автономной системы запишем в виде:

$$H = \frac{P_\varphi^2}{2C} + \frac{P_\theta^2}{2A} + \frac{(P_\psi - P_\varphi \cos \theta)^2}{2A \sin^2 \theta} + mgl \cos \theta + \Pi_v,$$

$$\Pi_v = -\frac{m^2 l^2}{2A} \left((a_x \sin^2 \psi + a_y \cos^2 \psi) \sin^2 \theta + a_z \cos^2 \theta \right).$$

где $\langle \dot{u}^2 \rangle = a_x, \langle \dot{v}^2 \rangle = a_y, \langle \dot{w}^2 \rangle = a_z$ (без ограничения общности считаем, что $a_x > a_y$), а последнее слагаемое представляет собой вибрационный потенциал. Дальнейшее исследование будем проводить, оставаясь в рамках приближенной системы.

В этой системе координата φ циклическая, отвечающий ей импульс постоянен.

В приведенной системе с двумя степенями свободы существуют частные решения вида

$$P_\varphi = \text{const}, P_\psi = P_\varphi \cos \theta, P_\theta = 0, \psi = \psi_0, \theta = \theta_0,$$

соответствующие стационарным вращениям волчка вокруг оси симметрии, сохраняющей неизменное положение в системе координат, движущейся поступательно вместе с точкой подвеса. Цель работы — описание указанных частных решений и исследование их устойчивости (по отношению к переменным ψ, θ, P_ψ и P_θ).

Введем безразмерные параметры

$$\alpha = \frac{(a_y - a_z)m^2 l^2}{A^2 \omega^2}, \beta = \frac{(a_x - a_z)m^2 l^2}{A^2 \omega^2}, \gamma = \frac{P_\varphi}{A\omega^2},$$

а также безразмерные импульсы и время по формулам $P_\psi = A\omega P_1, P_\theta = A\omega P_2, \tau = \omega t$ и запишем гамильтониан в виде

$$\tilde{H} = \frac{P_2^2}{2} + \frac{(P_1 - \gamma \cos \theta)^2}{2 \sin^2 \theta} + \cos \theta - \frac{\beta \sin^2 \theta \sin^2 \psi}{2} - \frac{\alpha \sin^2 \theta \cos^2 \psi}{2}.$$

Исследование будем проводить в пространстве параметров α, β и γ .

Для любых значений α, β и γ существуют решения, при которых $\theta_0 = 0$ (верхнее положение) и $\theta_0 = \pi$ (нижнее положение), для которых центр масс и точка подвеса лежат на одной вертикали; им отвечают перевернутый и висящий «спящий» волчок Лагранжа. Кроме того, при условии $|\beta| > 1$ существуют решения, при которых $\cos \theta_0 = 1/\beta, \psi_0 = \pi/2$ (боковое равновесие первого типа), а при условии $|\alpha| > 1$ — решения, при которых $\cos \theta_0 = 1/\alpha, \psi_0 = 0$ (боковое равновесие второго типа).

Достаточные условия устойчивости найденных решений получены как условия знакоопределённости квадратичной части гамильтониана возмущенного движения. Необходимые условия устойчивости рассматривались, как условия того, что корни характеристического уравнения линеаризованных уравнений возмущенного движения чисто мнимые.

Обнаружено, что для верхнего положения достаточные условия устойчивости выполняются при $\alpha < -1$ и $\beta < -1$, для нижнего — при $\alpha < 1$ и $\beta < 1$, а для бокового равновесия первого типа — при $\beta > 1$. Для бокового равновесия второго типа область выполнения достаточных условий устойчивости отсутствует.

Найдены области, где выполняются только необходимые условия устойчивости. Для верхнего положения эта область описывается неравенствами $\alpha > -1, \beta > -1$ и $\gamma^2 > \gamma_1^2$, для нижнего — неравенствами $\alpha > 1, \beta > 1$ и $\gamma^2 > \gamma_2^2$, а для бокового равновесия второго типа — неравенствами $\alpha < -1$ и $\gamma^2 > \gamma_3^2$. Здесь γ_1^2, γ_2^2 и γ_3^2 определяются формулами

$$\gamma_1^2 = \alpha + \beta + 2 + 2\sqrt{(\beta + 1)(\alpha + 1)}, \gamma_2^2 = \alpha + \beta - 2 + 2\sqrt{(\beta - 1)(\alpha - 1)},$$

$$\gamma_3^2 = \frac{1}{\alpha} \left(-2\alpha^2 + \alpha\beta + 1 - 2\sqrt{\alpha(\alpha - 1)(\alpha + 1)(\alpha - \beta)} \right).$$

Для бокового положения первого типа области выполнения только необходимых условий не существует.

В частном случае $\alpha = 0, \beta = 0$ полученные условия устойчивости для вертикальных положений равновесия совпадают с классическим условием Маиевского–Четаева устойчивости «спящего» волчка Лагранжа с неподвижной точкой подвеса. Случай равенства $a_x = a_y$ рассмотрен ранее в работе [2]. Устойчивость «спящего» волчка

Лагранжа при вертикальных гармонических колебаниях точки подвеса произвольной частоты и амплитуды исследовалась в статье [3]

В областях выполнения только необходимых условий устойчивости проведен нелинейный анализ с использованием методов исследования автономных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы [4]. В трехмерном пространстве параметров построены поверхности резонансов третьего и четвертого порядков, а также поверхность вырождения. На поверхности резонанса четвертого порядка выделены области устойчивости и неустойчивости.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-21-00068) в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете).

We consider here the motion of the Lagrange's top with a suspension point committing fast periodic vibrations with small amplitude. An approximate system of the autonomous canonical equations of motion was investigated. Equilibrium positions of the two-degree-of-freedom reduced system corresponding to the stationary rotations of the body around the symmetry axis were obtained. The linear and nonlinear stability analysis of these solutions was carried out.

Литература:

1. Маркеев А. П. К теории движения твёрдого тела с вибрирующим подвесом // ДАН. 2009. Т. 427. №6. С. 771-775.
2. Маркеев А. П. О движении тяжелого динамически симметрического твёрдого тела с вибрирующей точкой подвеса // Изв. РАН: МТТ. 2012. №4. С 3-10.
3. Холостова О.В. Об устойчивости «спящего» волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса // ПММ. Т. 64. Вып. 5. 2000.
4. Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике // М.: Наука. 1978.

О ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОМ ПОСТРОЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ СИММЕТРИЧНОГО СПУТНИКА, РОЖДАЮЩИХСЯ ИЗ ЕГО ГИПЕРБОЛОИДАЛЬНОЙ ПРЕЦЕССИИ

Сухов Е. А., Бардин Б. С.

Московский авиационный институт (государственный технический университет)
Москва, Россия

Рассматривается движение спутника — твёрдого тела относительно центра масс O на круговой орбите. Для описания движения спутника введём *орбитальную* $OXYZ$ *связанную* $Oxuz$ системы координат. Оси OZ , OX и OY направим по радиус-вектору центра масс спутника, трансверсали к орбите и нормали к плоскости орбиты соответственно, а оси Ox , Oy , Oz — вдоль главных центральных осей инерции спутника, моменты инерции относительно которых обозначим A, B, C . Взаимное расположение связанной и орбитальной систем координат будем задавать углами Эйлера. Будем считать, что спутник является динамически симметричным ($A = B$). При таком предположении угол собственного вращения φ является циклической координатой, а соответствующий импульс p_φ сохраняет постоянное значение. Уравнения движения симметричного спутника можно записать в канонической форме с гамильтонианом [1, 2]

$$H = \frac{p_\psi^2}{2 \sin^2 \theta} + \frac{p_\theta^2}{2} - \left(\frac{\alpha \beta \cos \theta}{\sin^2 \theta} + \cos \psi \operatorname{ctg} \vartheta \right) p_\psi - \sin \psi p_\theta + \frac{1}{2} \alpha^2 \beta^2 \operatorname{ctg}^2 \theta + \alpha \beta \frac{\cos \psi}{\sin \theta} + \frac{3}{2} (\alpha - 1) \cos^2 \theta, \quad (1)$$

где p_ψ и p_θ — безразмерные импульсы; $\alpha = \frac{c}{A}$ и $\beta = \frac{r_0}{\omega_0}$ — безразмерные параметры, где r_0 — проекция абсолютной угловой скорости спутника на его ось динамической симметрии Oz , а ω_0 — угловая скорость центра масс. Независимой переменной является истинная аномалия $\nu = \omega_0 t$. Уравнения движения имеют частное решение

$$\vartheta_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \cos \psi_0 = -\alpha \beta, \quad p_{\theta_0} = \sin \psi_0, \quad p_{\psi_0} = 0, \quad (2)$$

отвечающее так называемой гиперболоидальной прецессии спутника, при которой ось динамической симметрии Oz спутника лежит в плоскости, перпендикулярной радиус-вектору центра масс и составляет угол $\pi - \psi_0$ с нормалью к плоскости орбиты [1,2]. Если гиперболоидальная прецессия устойчива в линейном приближении, то уравнения движения допускают существование однопараметрического семейства периодических решений Ляпунова, рождающихся из гиперболоидальной прецессии.

В данной работе построено однопараметрическое семейство периодических движений спутника, рождающихся из его гиперболоидальной прецессии. Параметром семейства является отклонение полной механической энергии от ее значения на гиперболоидальной прецессии. При малых значениях энергии указанные периодические движения были получены методом Ляпунова в виде сходящихся рядов. Для построения периодических движений при произвольных значениях энергии была разработана программная реализация численного метода продолжения семейства решений по параметрам, предложенного А.Г. Сокольским и С.Р. Каримовым [5]. Идея метода была предложена А. Deprit и J. Henrard [4], ее суть состоит во введении локальных координат — нормального и тангенциального смещений в окрестности некоторого известного (опорного) периодического решения. Это позволяет свести краевую задачу нахождения периодического решения к задаче Коши. Следуя работе [5], коротко изложим алгоритм построения периодических решений.

Пусть задана автономная гамильтонова система с гамильтонианом $H(\bar{z}, \bar{p})$, где $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})^T$ — вектор координат и импульсов, $\bar{p} = (p_1 \dots p_K)^T$ — вектор параметров, t — независимая переменная. Пусть для данной системы известно опорное T -периодическое решение $\bar{Z} = \bar{Z}(t, \bar{P})$ с константой энергии $H(\bar{Z}) = h$ и параметрами $\bar{p} = \bar{P}$. Будем искать новое $T^*(\bar{p})$ -периодическое решение $\bar{z}(t, \bar{p})$, являющееся аналитическим продолжением (по параметрам) опорного решения, где \bar{p} — новые значения параметров, $H(\bar{z}) = h^*$ — константа энергии для нового решения. Новое решение отвечает условиям периодичности и принадлежности семейству периодических решений, порождаемых опорным решением:

$$\bar{z}(0, \bar{p}) = \bar{z}(T^*(\bar{p}), \bar{p}), \quad \lim_{\bar{p} \rightarrow \bar{P}} \bar{z}(t, \bar{p}) = \bar{Z}(t, \bar{P}), \quad \lim_{\bar{p} \rightarrow \bar{P}} T^*(\bar{p}) = T(\bar{P}).$$

Следуя [5], определим в фазовом пространстве подвижную («сопровождающую») систему координат $\bar{w} = [\bar{n}_u m_u \bar{n}_v m_v]^T$, где \bar{n}_u и \bar{n}_v — нормальные смещения, m_u , m_v — тангенциальное и энергетическое смещения. Переход к подвижной системе координат осуществляется при помощи преобразования $\bar{\xi} = S \bar{w}$, где $\bar{\xi} = \bar{z} - \bar{Z}$ — локальные координаты в окрестности опорного решения, S — ортогональная симплектическая матрица, алгоритм построения которой приводится в [5].

Поиск нового периодического решения осуществляется в два этапа: предиктор и корректор. На этапе предиктора определяются значения нормальных, тангенциального и энергетического смещений, а так же поправка к периоду τ , дающие при переходе к исходным координатам начальные условия нового решения, период которого $T^* = T + \tau$. Найденное решение будет периодическим лишь приближенно. Уточнение начальных

условий и периода нового решения выполняется на этапе корректора. Подробное описание этапов предиктора и корректора дано в [5].

Для численного построения семейства периодических решений по указанному методу требуется знать опорное решение, не являющееся положением равновесия. Критерием остановки работы алгоритма служит нахождение так называемого *критического* решения, из которого семейство не может быть продолжено данным методом из-за нарушения достаточных условий теоремы Пуанкаре о существовании периодического решения. Такая ситуация называется «*смертью*», или *естественным завершением* семейства [4, 6].

При разработке программной реализации вышеописанного метода возникла необходимость увеличить скорость работы алгоритма. Для увеличения быстродействия выбор приращений параметров и константы энергии производится в зависимости от параметров опорного решения и заданной величины погрешности ε .

Погрешность работы алгоритма определяется формулой

$$\Delta z = \Delta z(h, \bar{p}, \bar{\pi}) = |z(T) - z(0)|, \quad (3)$$

где $\bar{\pi} = (\Delta \bar{p}, \Delta h)^T$ – приращения параметров и константы энергии. Разложив Δz в ряд Тейлора и отбросив члены выше первого порядка малости, получим

$$\Delta z(h, \bar{p}, \bar{\pi}) = \Delta z_0 + \Delta z_h \cdot \Delta h + \sum_i \Delta z_{p_i} \cdot \Delta p_i + \sum_j \Delta z_{\pi_j} \cdot \Delta \pi_j,$$

где $\Delta z_h = \frac{\partial(\Delta z)}{\partial h}$, $\Delta z_{p_i} = \frac{\partial(\Delta z)}{\partial p_i}$, $\Delta z_{\pi_i} = \frac{\partial(\Delta z)}{\partial \pi_i}$. При $\bar{\pi} = const$ данное разложение принимает вид

$$\Delta z(h, \bar{p}) = \Delta z_0 + \Delta z_h \cdot \Delta h + \sum_i \Delta z_{p_i} \cdot \Delta p_i. \quad (4)$$

Исходя из (4) и учитывая, что погрешность Δz_0 предыдущего шага имеет порядок ε , величины приращений можно подобрать так, что будут выполнены следующие оценки

$$\Delta z_h \cdot \Delta h \sim \varepsilon, \quad \Delta z_{p_i} \cdot \Delta p_i \sim \varepsilon. \quad (5)$$

В программной реализации условие $\bar{\pi} = const$ обеспечивается за счёт объединения последовательных шагов в группы конечной длины, в пределах которых не применяется корректор, а приращения параметров остаются постоянными. После выполнения последнего шага группы делается проверка на соответствие критерию точности $\Delta z(h, \bar{p}) < \varepsilon$. Если данный критерий выполняется, то, принимая во внимание оценки (5), вычисляются новые значения приращений по формулам $\Delta h = \frac{\varepsilon}{\Delta z_h}$, $\Delta p_i = \frac{\varepsilon}{\Delta z_{p_i}}$, а затем выполняется этап корректора, на котором уточняется решение, полученное на последнем шаге.

Построение семейств периодических решений производилось в два этапа. На первом этапе по методу Ляпунова были найдены опорные решения системы (1) в окрестности гиперболоидальной прецессии (2) в виде сходящихся рядов по малому параметру. В общем случае существует два семейства периодических решений указанного типа с периодами, близкими к $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$ и $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}$, где ω_1 и ω_2 – частоты малых линейных колебаний ($\omega_1 > \omega_2$). В данной работе в качестве опорных выбираются так называемые короткопериодические решения с периодами, близкими к T_1 , существование которых всегда гарантируется теоремой Ляпунова о голоморфном интеграле [7]. В качестве малого параметра было выбрано отклонение полной механической энергии Δh от ее значения на гиперболоидальной прецессии. На втором этапе опорные решения были численно продолжены по параметрам с помощью приведенного выше алгоритма. В окрестности опорного ляпуновского решения при значениях константы энергии $1 \cdot 10^{-8} \leq h \leq 1 \cdot 10^{-4}$ выбор приращений параметров производился исходя из соотношения $\pi_i \approx h$. Погрешность (3) получаемых решений не превышала величину $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-5}$.

Для спутников с геометрией масс пластинки ($\alpha = 2$, $\beta = 0.3$) и с геометрией масс, близкой к стержню ($\alpha = 0.1$, $\beta = 0.3$) в аналитической форме найдены ляпуновские опорные решения и численно построены однопараметрические семейства периодических

решений. На рис. 2, 3 для принадлежащих полученным семействам решений приведены графики зависимости периода от константы энергии и характерные формы траекторий в проекции на плоскость $\psi - \theta$.

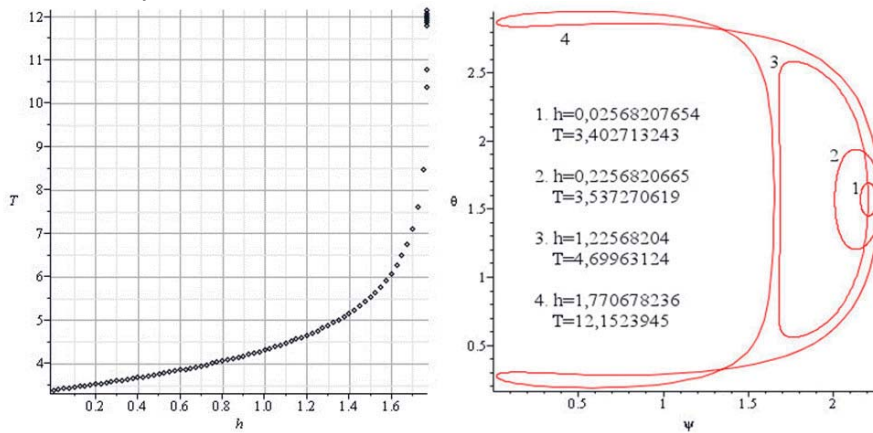


Рис. 2 Зависимость периода T от константы энергии h и характерные формы траекторий в проекции на плоскость $\psi - \theta$ для спутника-пластинки.

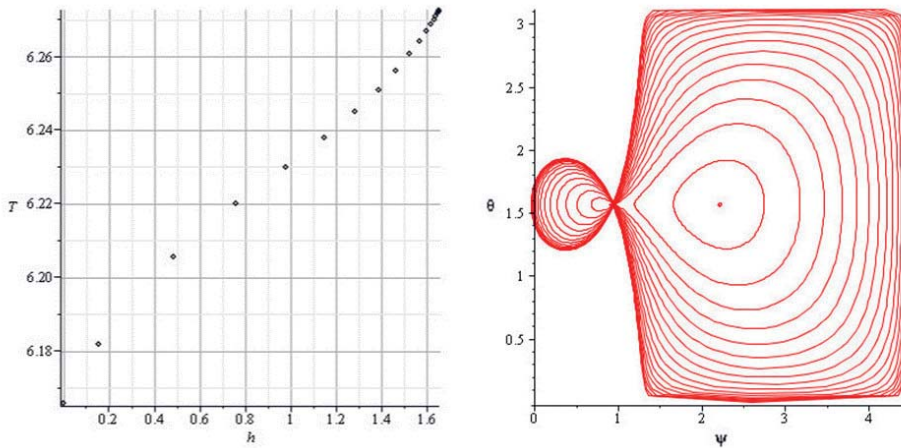


Рис. 3 Зависимость периода T от константы энергии h и характерные формы траекторий в проекции на плоскость $\psi - \theta$ для спутника, близкого по геометрии масс к стержню. Для короткопериодического ляпуновского решения со значениями параметров $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.3$ было построено двухпараметрическое семейство периодических решений с параметрами α и h (рис. 4).

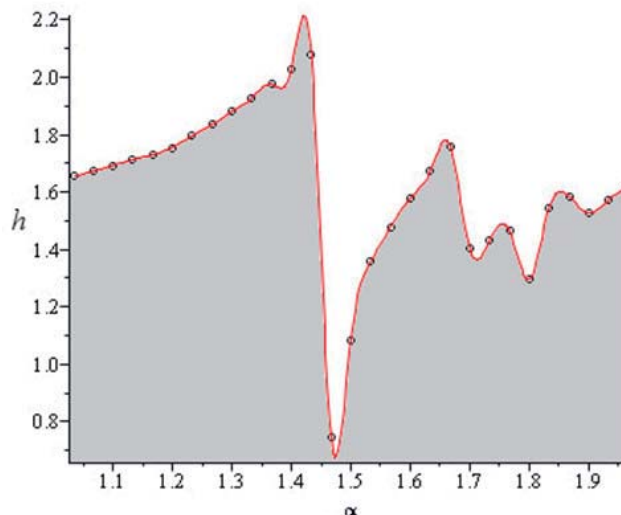


Рис. 4 Зависимость константы энергии h от инерционного параметра α .

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-21-00068) в Московском авиационном институте (Национальном исследовательском университете).

Литература

1. Белецкий В. В. (1975). Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. – М.: Изд-во МГУ. – 308 с.
2. Маркеев А. П. (2009). Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований. – 369 с.
3. Малкин И. Г. (1956). Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. – М.: ГИТТЛ. – 491 с.
4. Deprit A., Henrard J. Natural Families of Periodic Orbits // The Astronomical Journal. – 1967. – V.72. – №2. – P. 158-172.
5. Каримов С. Р., Сокольский А. Г. Метод продолжения по параметрам естественных семейств периодических движений гамильтоновых систем. – Препринт ИТА АН СССР. – 1990. – №9. – 32 с.
6. Уинтнер А. (1967). Аналитические основы небесной механики. – М.: Наука. – 524 с.
7. Дубошин Г. Н. (1976). Справочное руководство по небесной механике и астеродинамике. – М.: Наука. – 864 с.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКОГО РЕЗОНАНСНОГО ВРАЩЕНИЯ СИММЕТРИЧНОГО СПУТНИКА НА ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОРБИТЕ

Московский авиационный институт (научно-исследовательский университет)

Москва, Российская Федерация

Бардин Б.С., Чекина Е.А.,

bsbardin@yandex.ru, chekina_ev@mail.ru

ON STABILITY OF A PLANAR RESONANT ROTATION OF A SATELLITE IN AN ELLIPTIC ORBIT

Bardin B.S., Chekina E.A.

Moscow Aviation Institute (National Research University),

bsbardin@yandex.ru, chekina_ev@mail.ru

We deal with the stability problem of a resonant rotation of a symmetric rigid body about its center of mass in an elliptical orbit. The resonant rotation is a planar motion such that the body completes one rotation in absolute space during two orbital revolutions of its center of mass. In [1,2,3] the stability analysis of the above resonant rotation with respect to planar perturbations have been performed in detail.

In this paper we study the stability of the resonant rotation in an extended formulation taking into account both planar and spatial perturbations. By analyzing linearized equations of perturbed motion there were found eccentricity intervals, where the resonant rotation is unstable. Outside of this intervals a nonlinear stability study has been performed and subintervals of formal stability and stability for the most of initial data have been found. In addition, the instability of the resonant rotation was established at several eccentricity values corresponding to the third and fourth order resonances.

Key words: Hamiltonian system, symplectic map, normal form, resonance.

Введение. В данной работе исследуется задача об устойчивости резонансного вращения симметричного твердого тела относительно центра масс на эллиптической орбите. Резонансное вращение представляет собой плоское движение, при котором спутник совершает один оборот в абсолютном пространстве за два оборота его центра масс по орбите. Вопрос об устойчивости данного резонансного вращения с учетом плоских возмущений был полностью решен в работах [1,2,3].

В настоящей работе изучается устойчивость данного резонансного вращения с учетом как плоских, так и пространственных возмущений. Исследование линеаризованной системы возмущенного движения выявило интервалы неустойчивости резонансного вращения. За границами этих интервалов был проведен нелинейный анализ, который был выполнен как для нерезонансного случая, так и для случаев резонансов третьего и четвертого порядков.

Ключевые слова: Гамильтонова система, симплектическое отображение, нормальная форма, резонанс.

Постановка задачи. Рассмотрим движение спутника, моделируемого динамически-симметричным твердым телом, движущемся в центральном ньютоновском гравитационном поле сил. Для описания движения спутника относительно центра масс введем орбитальную систему координат OXYZ, ось OX которой направлена по радиус-вектору центра масс спутника, и жестко связанную систему координат Oxyz, оси которой направлены вдоль главных осей инерции твердого тела. В качестве обобщенных координат выберем углы Эйлера (ψ , θ , φ), определяющие ориентацию системы Oxyz относительно системы OXYZ. Вводя соответствующие безразмерные импульсы p_ψ , p_θ , p_φ , и учитывая, что в силу динамической симметрии спутника φ является циклической координатой, уравнения движения можно записать в канонической форме с гамильтонианом:

$$H = \frac{1}{2} \frac{p_\psi^2}{\sin^2 \theta (1 + e \cos \nu)^2} + \frac{1}{2} \frac{p_\theta^2}{(1 + e \cos \nu)^2} - p_\psi + \frac{1}{2} (1 + e \cos \nu) \alpha \sin^2 \psi \sin^2 \theta, \quad (1)$$

где $\alpha = 3(C - A)/A$; A и C – соответственно экваториальный и полярный моменты инерции; e – эксцентриситет орбиты; ν – истинная аномалия; далее полагаем. Если параметры α и e удовлетворяют соотношению $\alpha = -2e$, то данная система имеет частное решение [4]

$$\psi^* = -\frac{\nu}{2}, \quad \theta^* = \frac{\pi}{2}, \quad p_\psi^* = \frac{1}{2}(1 + e \cos \nu)^2, \quad p_\theta^* = 0. \quad (2)$$

Этому решению соответствует плоское вращение спутника, при котором он совершает один оборот в абсолютном пространстве за два оборота центра масс по орбите. Вопрос об устойчивости данного резонансного вращения с учетом плоских возмущений был полностью решен в работах [1,2,3].

В настоящей работе изучается устойчивость данного резонансного вращения с учетом как плоских, так и пространственных возмущений.

Гамильтониан возмущенного движения. Введем возмущения q_i и p_i ($i=1,2$) по формулам

$$\begin{aligned} \psi &= \psi^* + \frac{q_1}{1 + e \cos \nu}, & p_\psi &= p_\psi^* + p_1(1 + e \cos \nu) + e \sin \nu q_1, \\ \theta &= \theta^* + \frac{q_2}{1 + e \cos \nu}, & p_\theta &= p_\theta^* + p_2(1 + e \cos \nu) + e \sin \nu q_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Переменные q_i и p_i ($i=1,2$) удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dq_i}{d\nu} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{d\nu} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (i = 1,2). \quad (4)$$

В переменных q_i и p_i ($i=1,2$) вопрос об устойчивости резонансного вращения (2) сводится к исследованию устойчивости положения равновесия $q_i = p_i = 0$ ($i=1,2$) гамильтоновой системы (4). Разложение гамильтониана в ряд в окрестности $q_i = p_i = 0$ ($i=1,2$) имеет вид:

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \dots, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} H_2 &= \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2 - \frac{1}{2} \frac{e \cos \nu q_1^2}{1 + e \cos \nu} + \frac{1}{8} \frac{(e \cos \nu + 4e + 1)q_2^2}{1 + e \cos \nu}, \\ H_3 &= \frac{1}{2} \frac{p_1 q_2^2}{1 + e \cos \nu} - \frac{1}{2} \frac{e \sin \nu q_1 q_2^2}{(1 + e \cos \nu)^2} - \frac{2}{3} \frac{e \sin \nu q_1^3}{(1 + e \cos \nu)^2}, \\ H_4 &= \frac{1}{2} \frac{q_2^2 p_1^2}{(1 + e \cos \nu)^2} + \frac{1}{12} \frac{(3e \cos \nu - 2e + 1)q_2^4}{(1 + e \cos \nu)^2} - \frac{2}{3} \frac{e \sin \nu q_1 q_2^2 p_1}{(1 + e \cos \nu)^2} + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{e(e \cos^2 \nu + 2 \cos \nu + e)q_1^2 q_2^2}{(1 + e \cos \nu)^4} + \frac{1}{3} \frac{e \sin \nu q_1^4}{(1 + e \cos \nu)^3}, \end{aligned} \quad (6)$$

Анализ устойчивости в линейном приближении. Рассмотрим сначала линейную задачу об устойчивости, т.е. исследуем вопрос об устойчивости линейной канонической системы с гамильтонианом H_2 . В нашем случае эта система распадается на две независимые линейные подсистемы, первая из которых описывает изменение переменных q_1, p_1 , а вторая q_2, p_2 . Обозначим через $X_i(2\pi)$ матрицанты этих подсистем. Характеристические уравнения этих систем имеют вид:

$$\rho^2 - 2a_i \rho + 1 = 0, \quad (a_i = x_{11}^{(i)} + x_{22}^{(i)}, \quad i = 1, 2) \quad (7)$$

Где $x_{11}^{(i)}, x_{22}^{(i)}$ – диагональные элементы матрицанта $X_i(2\pi)$.

На основании анализа корней характеристического уравнения (7), можно сделать следующие выводы об устойчивости данных линейных систем:

1. Если $|a_1| > 1$ или $|a_2| > 1$, то уравнение (7) имеет корень, модуль которого превосходит единицу, а соответствующий характеристический показатель имеет отличную от нуля вещественную часть. В этом случае линейная система с гамильтонианом H_2 неустойчива. Из неустойчивости линейной системы следует неустойчивость положения равновесия полной нелинейной системы (4), а значит и неустойчивость исследуемого резонансного вращения (2).
2. Если $|a_1| < 1$ и $|a_2| < 1$, то все корни уравнения (7) имеют модули равные единице, а соответствующие им характеристические показатели чисто мнимы. В этом случае линейная система устойчива. Из устойчивости в линейном приближении, однако, не следует устойчивости в полной нелинейной системе. Для строгого решения задачи об устойчивости требуется проводить нелинейный анализ.

На основании численного интегрирования линейной канонической системы с гамильтонианом H_2 для значений эксцентриситета из промежутка (0, 0.99994) вычислялись коэффициенты a_1 и a_2 , и были получены следующие результаты:

1. При значениях эксцентриситета из интервалов $U1=(0.32173093, 0.90010166)$, $U2=(0.9179098746, 0.9905450175)$, $U3=(0.9921141694, 0.99916659849)$ и $U4=(0.99930356235, 0.999918785804)$, рассматриваемое вращение неустойчиво.
2. При значениях эксцентриситета из интервалов $S1=(0, 0.32173093)$, $(0.90010166, 0.9179098746)$, $S2=(0.9905450175, 0.9921141694)$, $S3=(0.99916659849, 0.99930356235)$ и $S4=(0.999918785804, 0.999932116844)$ имеет место устойчивость резонансного вращения в линейном приближении. Чтобы получить выводы об устойчивости в полной нелинейной системе (4), в указанных интервалах необходимо выполнить

дополнительный анализ, учитывая, как правило, члены не ниже четвертой степени в разложении гамильтониана (5).

Отметим, что интервалы устойчивости и неустойчивости в линейном приближении совпадают с соответствующими интервалами, полученными в работе [3].

3. **Нелинейный анализ устойчивости.** Нелинейный анализ устойчивости проводился на основании методики, предложенной в работе [5]. Суть которой состоит в построении симплектического отображения $T: (q_i^{(0)}, p_i^{(0)}) \rightarrow (q_i^{(1)}, p_i^{(1)})$, порождаемого гамильтоновой системой уравнений (4) за период 2π . Выводы об устойчивости делаются на основе известных критериев, представляющих собой неравенства на коэффициенты нормальной формы гамильтониана. Поскольку линейные уравнения, описывающие плоские и пространственные возмущения разделяются на две подсистемы, то линейную нормализацию можно выполнить на основании методики, разработанной в [6] для систем с одной степенью свободы.
4. На основании указанной методики в каждом из интервалов устойчивости в линейном приближении были получены подобласти формальной устойчивости и устойчивости для большинства начальных условий (БНУ) или неустойчивости. Результаты этого исследования приведены в Таблице 1.

Таблица 1.

Область	Подобласть	Выводы об устойчивости
S1	$F_1^{(1)} = (0, 0.233403708695)$	Формальная устойчивость
	$I_1^{(1)} = [0.233403708695, 0.277745200267)$	Устойчивость для БНУ
	$F_2^{(1)} = (0.2777452002667, 0.319208905863)$	Формальная устойчивость
	$I_2^{(1)} = [0.319208905863, 0.320454576027)$	Устойчивость для БНУ
	$F_3^{(1)} = (0.320454576027, 0.321730933612)$	Формальная устойчивость
S2	$F_1^{(2)} = (0.90010166, 0.904939507752)$	Формальная устойчивость
	$I_1^{(2)} = (0.904939507752, 0.907502978981]$	Устойчивость для БНУ
	$F_2^{(2)} = (0.907502978981, 0.910006114426)$	Формальная устойчивость
	$I_2^{(2)} = ((0.907502978981, 0.910006114426)$	Устойчивость для БНУ
	$F_3^{(2)} = (0.910612130546, 0.9179098746)$	Формальная устойчивость
S3	$F_1^{(3)} = (0.9905450175, 0.991195569585)$	Формальная устойчивость
	$I_1^{(3)} = [0.991195569585, 0.991200641049)$	Устойчивость для БНУ
	$F_2^{(3)} = (0.991200641049, 0.991748883717)$	Формальная устойчивость
	$I_2^{(3)} = [0.991748883717, 0.991748982745)$	Устойчивость для БНУ
	$F_3^{(3)} = (0.991748982745, 0.9921141694)$	Формальная устойчивость
S4	$F_1^{(4)} = (0.99916659849, 0.999202847433)$	Формальная устойчивость
	$I_1^{(4)} = [0.999202847433, 0.999203146262)$	Устойчивость для БНУ
	$F_2^{(4)} = (0.999203146262, 0.999273038606)$	Формальная устойчивость
	$I_2^{(4)} = [0.999273038606, 0.999273087492)$	Устойчивость для БНУ
	$F_3^{(4)} = [0.999273087492, 0.999302309869)$	Формальная устойчивость
	$I_3^{(4)} = (0.999302309869, 0.999303460061]$	Устойчивость для БНУ
	$F_4^{(4)} = (0.999303460061, 0.999303562350)$	Формальная устойчивость

S5	$F_1^{(3)} = (0.999918785804, 0.999924064238)$	Формальная устойчивость
	$I_1^{(3)} = [0.999924064238, 0.999924064476)$	Устойчивость для БНУ
	$F_2^{(3)} = (0.999924064476, 0.999929008016)$	Формальная устойчивость
	$I_2^{(3)} = [0.999929008016, 0.999929008033)$	Устойчивость для БНУ
	$F_3^{(3)} = (0.999929008033, 0.999932116844)$	Формальная устойчивость

Также была исследована устойчивость в точках отвечающих резонансам третьего и четвертого порядков, и комбинационному резонансу резонанса второго порядка. С этой целью для значений эксцентриситета численно определялись коэффициенты производящей функции отображения и проверялись критерии устойчивости, приведенные в [5]. Проведенное исследование показало, что хотя в линейном приближении пространственные возмущения не оказывают влияния на устойчивость рассматриваемого резонансного вращения, в нелинейной системе они могут привести к неустойчивости для ряда резонансных значений эксцентриситета.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-21-00068) в Московском авиационном институте (Национальном исследовательском университете).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

1. Хентов А.А. Об одном вращательном движении спутника// Космические исследования, 1984. Т. 22. Вып. 1. С. 130-131.
2. Маркеев А.П., Бардин Б.С. Об одном плоском вращательном движении спутника на эллиптической орбите// Космические исследования, 1994. Т. 32. Вып. 6. С. 43-49.
3. Boris S. Bardin, Evgeniya A. Chekina, and Alexander M. Chekin On the Stability of a Planar Resonant Rotation of a Satellite in an Elliptic Orbit – Regular and Chaotic Dynamics, 2015, Vol. 20, No. 1, pp. 63–73.
4. Резонансные вращения спутника при взаимодействии магнитного и гравитационного полей: Препринт / Белецкий В.В., Шляхтин А.Н. – М: Препринт № 46. Институт Прикладной математики АН СССР, 1980. – 30 с.
5. Маркеев А.П. Конструктивный алгоритм нормализации периодического гамильтониана // ПММ. 2005. Т. 69. Вып. 3. С. 355-371.
6. Маркеев А.П. Об одном способе исследования устойчивости положений равновесия гамильтоновых систем// Механика твердого тела, 2004. Вып. 6. С. 3-12.

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ СО ВТОРОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕНИ В ФОРМЕ ГАМИЛЬТОНА-ДОПУСТИМОГО УРАВНЕНИЯ

Будочкина С.А.

Российский университет дружбы народов, г. Москва, Россия sbudotchkina@yandex.ru

ON A REPRESENTATION OF AN OPERATOR EQUATION WITH THE SECOND TIME DERIVATIVE IN THE FORM OF A HAMILTONIAN-ADMISSIBLE EQUATION

Budochkina S.A.

Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia sbudotchkina@yandex.ru

The given operator equation with the second time derivative is represented in the form of a Hamiltonian-admissible equation.

Операторное уравнение со второй производной по времени представлено в форме Гамильтона-допустимого уравнения.

Рассматривается операторное уравнение со второй производной по времени

$$N(u) \equiv P_{2u,t}u_{tt} + P_{3u,t}u_t^2 + P_{1u,t}u_t + Q(t,u) = 0, \quad (1)$$

$$u \in D(N) \subseteq U \subseteq V, \quad t \in [t_0, t_1] \subset R, \quad u_t \equiv \frac{d}{dt}u, \quad u_{tt} \equiv \frac{d^2}{dt^2}u.$$

Здесь $\forall t \in [t_0, t_1], \forall u \in U_1$ операторы $P_{iu,t}: U_1 \rightarrow V_1$ ($i = \overline{1,3}$) являются линейными;

$Q: [t_0, t_1] \times U_1 \rightarrow V_1$ – произвольный оператор, вообще говоря, нелинейный; $D(N)$ – область определения оператора N ,

$$D(N) = \{u \in U : u(t) \in W \quad \forall t \in [t_0, t_1], \quad u|_{t=t_0} = \varphi_1,$$

$$u|_{t=t_1} = \varphi_2, \quad u_t|_{t=t_0} = \varphi_3, \quad u_t|_{t=t_1} = \varphi_4, \quad \varphi_i \in U_1 \quad (i = \overline{1,4})\};$$

$U = C^2([t_0, t_1], U_1)$, $V = C([t_0, t_1], V_1)$, U_1, V_1 – действительные линейные нормированные пространства, $U_1 \subseteq V_1$. Множество W определяется внешними связями, наложенными на систему.

Будем следовать обозначениям и терминологии работ [1-3].

Получены следующие результаты.

1. В терминах необходимых и достаточных условий определена структура операторного уравнения (1) с квазипотенциальным оператором N .
2. Построено действие по Гамильтону.
3. Доказано, что при выполнении некоторых условий операторное уравнение (1) является Гамильтона-допустимым уравнением.

Литература

1. Савчин В.М. Математические методы механики бесконечномерных непотенциальных систем. М.: Изд-во УДН, 1991. – 237 с.

2. Будочкина С.А., Савчин В.М. О квазипотенциальных операторах и Гамильтона-допустимых уравнениях в механике бесконечномерных систем // Доклады Академии наук, 2015, том 464, №3, стр. 267-269.

3. Будочкина С.А., Савчин В.М. Операторное уравнение со второй производной по времени и Гамильтона-допустимые уравнения // Доклады Академии наук, 2016, том 470, №1, стр. 7-9.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОГРАММНОГО МНОГООБРАЗИЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Жуматов С.С.

*Институт математики и математического моделирования,
050010, Республика Казахстан, Алматы, 10, ул. Пушкина, 125
E-mail: sailau.math@mail.ru,*

Получены достаточные условия абсолютной устойчивости программного многообразия систем автоматического управления, обладающих компактной окрестностью.

Ключевые слова: программное многообразие, система автоматического управления, абсолютная устойчивость, функция Ляпунова.

ON A STABILITY OF AUTOMATIC CONTROL SYSTEM'S PROGRAM MANIFOLD

Zumatov S.S.

*Institute of mathematics and mathematical modelling,
050010, Almaty, 10, Pushkin str. 125, Republic of Kazakhstan
E-mail: sailau.math@mail.ru*

Sufficient conditions of automatic control system's program manifold's absolute stability, possessing by the compact neighborhood were received.

Key words: program manifold, automatic control system, absolute stability, Ltapunov's function.

Пусть управляемая система [1-5]

$$\dot{x} = f(t, x, u), t \in I = [0, \infty[\quad (1)$$

где x - n -вектор состояния объекта; u - r -вектор управления ; f - n -вектор-функция , обладает $(n - s)$ -мерным интегральным многообразием

$$\Omega \equiv \omega(t, x) = 0, \quad (2)$$

где ω - s -вектор.

В силу того, что многообразие $\Omega(t)$ является интегральным для системы (1) имеет место

$$\dot{\omega} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \cdot f(t, x, u) = F(t, \omega, u), \quad (3)$$

где $F(t, 0, u) \equiv 0$ - некоторая s -вектор-функция ; при $F = F(t, \omega, \xi(\omega, t))$ система (3) называется замкнутой ; $\xi = \xi(\omega, t)$ - множество законов обратной связи [5].

В данной работе рассматривается задача определения устойчивости программного многообразия систем автоматического управления, обладающей компактной окрестностью.

Введем следующие определения [2-3]:

Определение 1. Расстоянием от точки x до многообразия $\Omega(t)$ назовем $\rho(x, \Omega(t)) = \inf_{y(t) \in \Omega(t)} \rho(x, y(t))$.

Определение 2. ε -окрестностью $\Omega_\varepsilon(t)$ многообразия $\Omega(t)$ называется множество точек x удовлетворяющих условию $\rho(x, \Omega(t)) \leq \varepsilon$ при всех $t \geq t_0$.

Определение 3. Многообразие $\Omega(t)$ обладает компактной окрестностью $\Omega_\varepsilon(t)$, если существует такое $h > 0$, что множество точек $\Omega_h(t)$ является компактом при всех $t \geq t_0$.

Определение 4. Ограниченная вектор-функция ω допускает бесконечно малый высший предел, если для всякого сколь угодно малого $\delta > 0$ существует такое $\gamma > 0$, что при всех $\rho(x, \Omega(t)) \leq \gamma$ и $t \geq t_0$ выполняется неравенство $\|\omega\| \leq \delta$.

Определение 5. Если ограниченная функция $V(t, x, \omega)$ такова, что для всякого сколь угодно малого $l > 0$ найдется такое отличное от нуля $\delta < \delta_1$, если существует, что для t, x, ω , подчиненных неравенствам

$$\|\omega\| \leq \delta, \rho(x, \Omega(t)) \leq L, t \geq t_0,$$

будет выполняться ограничение $|V| < l$, то функция V допускает бесконечно малый высший предел.

Постановка задачи: получить условие абсолютной устойчивости программного многообразия систем автоматического управления, обладающей компактной окрестностью $\Omega_\varepsilon(t)$.

Мы будем исследовать случай, когда $\|\omega\| = \rho(x, \Omega(t))$.

Рассмотрим задачу построения устойчивых систем автоматического управления по заданному программному многообразию $\Omega(t) \equiv \omega(t, x) = 0$.

Пусть система (1) имеет вид

$$\dot{x} = f(t, x) - B\xi, \quad \xi = \varphi(\sigma), \quad \sigma = P^T \omega, \quad t \in I = [0, \infty), \quad (4)$$

где $x \in R^n$ - вектор состояния объекта, $f \in R^n$ - вектор-функция, удовлетворяющая условиям существования и единственности решения $x = x(t)$, $B \in R^{n \times r}$, $P \in R^{s \times r}$ - постоянные матрицы, $\omega \in R^s$ ($s \leq n$) - вектор, $\xi \in R^r$ - вектор управления по отклонению от заданной программы, удовлетворяющий условиям

$$\varphi^T \theta (\sigma - K^{-1} \varphi) > 0, \theta = \text{diag} \|\theta_1, \dots, \theta_r\|, K = K^T > 0. \quad (5)$$

Возьмем две сферы $\|\omega_0\| = R; \omega_0 = \omega(t_0); \|\omega(t_0^*)\| = \varepsilon; R \gg \varepsilon$. Рассмотрим все множество решений уравнения (3), начинающихся на сфере R , называемых R - решениями. Для асимптотически устойчивых систем $\forall \omega_0$ на R сфере существует t_0^* , при котором соблюдаются условия

$$\|\omega(t_0^*, t_0, \omega_0)\| = \varepsilon; \|\omega(t, t_0, \omega_0)\| < \varepsilon \forall t > t_0^*. \quad (6)$$

Пусть $t^* = \sup_{\omega_0} t_0^*$.

Если положим, что $F = -A\omega$, $-A(s \times s)$ - гурвицева матрица, то, проинтегрировав многообразие (2) по времени t в силу системы (4) с учетом соотношения (3), получим

$$\dot{\omega} = -A\omega - HB\xi, \xi = \varphi(\sigma), \sigma = P^T \omega, H = \frac{\partial \omega}{\partial x}. \quad (7)$$

В системе (7) произведя замену $\varphi(\sigma) = h\sigma$; $h \leq K$, получим систему

$$\dot{\omega} = -(A + HBhP^T)\omega \quad \forall h \in (0, K] \quad (8).$$

Для системы (8) составим характеристическое уравнение

$$\delta(p, \lambda) = |A + HBhP^T + \lambda E| = 0. \quad (9)$$

Пусть $\delta(p, \lambda) = \sum_{i=0}^s a_i(h)\lambda^{s-i}$. Из коэффициентов характеристического многочлена составим матрицу Гурвица

$$\Gamma(h) = \begin{vmatrix} a_1(h) & 1 & \dots & 0 \\ a_3(h) & a_2(h) & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & a_s(h) \end{vmatrix}.$$

Теорема 1. Программное многообразие системы автоматического управления (1), обладающее компактной окрестностью $\Omega_\varepsilon(t)$, асимптотически устойчиво в целом, тогда и только тогда, если выполняются условия

$$\Delta_j(h) > 0 \quad \forall j_1^s. \quad (10)$$

Теперь для системы (7) построим функцию Ляпунова

$$V = \omega^T L \omega + \int_0^\sigma \varphi^T \beta d\sigma; L = L^T > 0; \beta = \text{diag}\{\beta_1, \dots, \beta_r\}. \quad (11)$$

При замене $\varphi(\sigma) = h\sigma$; $h \leq K$ второе слагаемое $J = \frac{\sigma^T h \beta \sigma}{2}$. Производная функции (11) после применения s -процедуры примет вид

$$-\dot{V} = \omega^T G \omega + 2\omega^T C \varphi + \varphi^T C_1 \varphi + S > 0, \quad (12)$$

$$G = A^T L + LA, C = LN - \Gamma, C_1 = \beta P^T N + \theta K^{-1},$$

$$\Gamma = \frac{1}{2}(P\theta - A^T P \beta), S = \varphi^T \theta (\sigma - K^{-1} \varphi), N = HB.$$

Пусть $l_1(h), l_s(h); \gamma_1, \gamma_{s+r}$ - действительные наименьшие и наибольшие корни уравнений

$$|L(h) - IE| = 0, L(h) = L + \frac{Ph\beta P^T}{2},$$

$$|Q - \gamma E| = 0, Q = \begin{vmatrix} G & C \\ C^T & C_1 \end{vmatrix}.$$

Тогда в силу соотношений (11), (12) имеем

$$l_1(h)R^2 \leq V \leq l_s(h)R^2, R^2 = \|\omega\|^2, \quad (13)$$

$$\gamma_1 (\|\omega\|^2 + \|\varphi\|^2) \leq z^T Q z \leq \gamma_{s+r} (\|\omega\|^2 + \|\varphi\|^2), z = \begin{vmatrix} \omega \\ \varphi \end{vmatrix}. \quad (14)$$

Из свойства (5) вытекает неравенство

$$\frac{\beta_1}{c_s} \|\omega\|^2 \leq \|\varphi\|^2 \leq \frac{\beta_s}{c_1} \|\omega\|^2. \quad (15)$$

Здесь $\beta_1, \beta_s; c_1, c_s$ - действительные наименьшие и наибольшие корни уравнений

$$|B_1 - \beta E| = 0, B_1 = Ph\theta P^T; |C_2 - cE| = 0, C_2 = \theta K^{-1}.$$

Приняв во внимание неравенства (14), (15), получим

$$\mu_1 R^2 \leq -\dot{V} \leq \mu_s R^2, \quad (16)$$

где

$$\mu_1 = \gamma_1 \left(1 + \frac{\beta_1}{c_s} \right); \mu_s = \gamma_{s+r} \left(1 + \frac{\beta_s}{c_1} \right) + \beta_s.$$

Из соотношений (13) и (16) имеем

$$\frac{\mu_1}{l_s} dt \leq -\frac{dV}{V} \leq \frac{\mu_s}{l_1} dt. \quad (17)$$

Проинтегрировав неравенства (17) от t_0 до t и учтя соотношение (13), получим

$$l_s^{-1} V_0 \exp \alpha_1 (t - t_0) \leq R^2 \leq l_1^{-1} V_0 \exp \alpha_2 (t - t_0), \quad (18)$$

где

$$V_0 = \omega^T(t_0) L(h) \omega(t_0); \alpha_1 = -\mu_s / l_1; \alpha_2 = -\mu_1 / l_s.$$

Так как неравенства (2.1.10) справедливы для из (2.1.15) получим на сфере R оценки

$$\|\omega\|^2 \leq R^2 \exp \alpha_2 (t - t_0) \quad (19)$$

при $t = t_0, \|\omega(t_0)\|^2 = R^2$.

Теорема 2. Программное многообразие системы автоматического управления (1), обладающее компактной окрестностью $\Omega_\varepsilon(t)$ абсолютно устойчиво при выполнении условий (13), (14) и (19).

ЛИТЕРАТУРА

1. Майгарин Б.Ж. Устойчивость и качество процессов нелинейных нелинейных систем автоматического управления. Алма-Ата. 1981. -316 с.
2. Еругин Н.П. Построение всего множества систем дифференциальных уравнению, имеющих заданную интегральную кривую // Прикл. Мат. и мех., 1952. Т. 16., вып. 6. С. 653-670.
3. Галиуллин А.С., Мухаметзянова И.А., Мухарлямов Р.Г. и др. Построение систем программного движения. М., 1971. 352 с.
4. Галиуллин А.С., Мухаметзянова И.А., Мухарлямов Р.Г. Обзор исследований по аналитическому построению систем программного движения // Вестник Российского университета Дружбы народов. 1994. № 1. С. 5-21.
5. Жуматов С.С., Крементуло В.В., Майгарин Б.Ж. Второй метод Ляпунова в задачах устойчивости и управления движением. Алматы. 1999. 228 с.

О РЕШЕНИИ ОСНОВНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ПРИ НАЛИЧИИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Тлеубергенов М. И., Ибраева Г.Т.

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

marat207@mail.ru, gulmira_ibraeva@mail.ru

Методом квазиобращения получены необходимые и достаточные условия разрешимости основной по классификации А.С. Галиуллина обратной задачи в классе стохастических дифференциальных уравнений Ито первого порядка со случайными возмущениями из класса процессов с независимыми приращениями, с вырождающейся относительно части переменных диффузией и с заданными свойствами, зависящими от части переменных.

Ключевые слова: стохастические дифференциальные уравнения, интегральное многообразие, случайные возмущения, процессы с независимыми приращениями.

ON SOLVING OF MAIN INVERSE PROBLEM IN THE PRESENCE OF RANDOM DISTURBANCES

Tleubergenov M.I., Ibraeva G.T.

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

marat207@mail.ru, gulmira_ibraeva@mail.ru

Using the quasi-inversion method we obtain necessary and sufficient conditions for the solvability of the main (according to A.S. Galiullin's classification) inverse problem in the class of first-order Ito stochastic differential systems with random perturbations from the class of processes with independent increments, with diffusion degenerate in a part of variables and with given properties, depending on a part of variables.

Key words: stochastic differential equations, integral manifold, random disturbances.

Основы теории и общие методы решения обратных задач дифференциальных систем достаточно полно разработаны в [1-4 и др.] для детерминированных систем, уравнения которых являются обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ). Так, в работе Еругина [1] строится множество ОДУ, которые имеют заданную интегральную кривую. Эта работа, впоследствии, оказалась основополагающей в становлении и развитии теории обратных задач динамики систем, описываемых ОДУ. В работах [2-4] изложены постановка, классификация обратных задач дифференциальных систем и их решение в классе ОДУ. Следует отметить, что один из общих методов решения обратных задач динамики в классе ОДУ метод квазиобращения предложен в работах [3,4], позволяющий получить необходимые и достаточные условия разрешимости.

В работах [5,6] рассматривается одна из обратных задач при дополнительном предположении о наличии случайных возмущений - задача построения множества стохастических дифференциальных уравнений Ито первого порядка по заданному

интегральному многообразию в предположении, что 1) строящееся уравнение является уравнением с вырождающейся диффузией; 2) заданное интегральное многообразие зависит от всех переменных. В предположении, что случайные возмущения принадлежат классу независимых винеровских процессов (как частный случай процессов с независимыми приращениями), в [5] поставленная задача решается методом квазиобращения [3, с.12-13], а в [6] - методом разделения [3, с.21].

В данной работе методом квазиобращения решается стохастическая основная обратная задача - задача построения стохастического дифференциального уравнения первого порядка типа Ито по заданным свойствам движения. И в отличие от предыдущих работ [5,6] исследуется в предположении, что, во-первых, заданное интегральное многообразие зависит лишь от части переменных, и, во-вторых, случайные возмущения принадлежат классу процессов с независимыми приращениями.

1. Постановка общей задачи построения стохастических дифференциальных систем и ее решение. Пусть задано множество

$$\Lambda(t): \lambda(y, z, t) = 0, \text{ где } \lambda \in R^m, \lambda = \lambda(y, z, t) \in C_{yzt}^{121}. \quad (1)$$

Требуется построить уравнение движения в классе стохастических дифференциальных уравнений Ито первого порядка вида

$$\begin{cases} \dot{y} = f_1(y, z, t) \\ \dot{z} = f_2(y, z, t) + \sigma(y, z, t)\dot{\xi} \end{cases} \quad (2)$$

так, чтобы множество (1) было интегральным многообразием уравнения (2).

Здесь $y \in R^l, z \in R^p, l + p = n; \xi \in R^k, \sigma(y, z, t)$ - матрица размерности $(p \times k), \{\xi_1(t, \omega), \dots, \xi_k(t, \omega)\}$ - система случайных процессов с независимыми приращениями, которую, следуя [7], можно представить в виде суммы процессов: $\xi = \xi_0 + \int c(y)P^0(t, dy), \xi_0$ - винеровский процесс; P^0 - пуассоновский процесс; $P^0(t, dy)$ - число скачков процесса P^0 в интервале $[0, t]$, попадающих на множество dx ; $c(x)$ - векторная функция, отображающая пространство R^n в пространство значений R^k процесса $\xi(t)$ при любом t .

Будем говорить, что некоторая функция $g(y, z, t)$ из класса $K, g \in K$, если g непрерывна по t и липшицева по y и z во всем пространстве $x \in R^n$, где $x = (y^T, z^T)^T$.

Предполагается, что вектор-функции f_1, f_2 и $(p \times k)$ -матрица σ из класса K , что обеспечивает в R^n существование и единственность до стохастической эквивалентности решения $(y(t)^T, z(t)^T)^T$ уравнения (2) с начальным условием $(y(t_0)^T, z(t_0)^T)^T = (y_0^T, z_0^T)^T$, являющегося непрерывным с l

Для решения поставленной задачи используется метод квазиобращения Р.Г. Мухарлямова [3,4], в основе которого лежит

Лемма 1 [3, с.12-13]. Совокупность всех решений линейной системы

$$H\mathcal{G} = g, \quad H = (h_{\mu k}), \quad \mathcal{G} = (\mathcal{G}_k), \quad g = (g_\mu), \quad \mu = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, n}, \quad m \leq n, \quad (3)$$

где матрица H имеет ранг равный m , определяется выражением

$$\mathcal{G} = s[HC] + H^+ g. \quad (4)$$

Здесь s - произвольная скалярная величина, $[HC] = [h_1 \dots h_m c_{m+1} \dots c_{n-1}]$ есть векторное произведение векторов $h_\mu = (h_{\mu k})$ и произвольных векторов $c_\rho = (c_{\rho k})$, $\rho = \overline{m+1, n-1}$; $H^+ = H^T (HH^T)^{-1}$, H^T - матрица, транспонированная к H .

Для решения поставленной задачи построения множества систем уравнений вида (2) по заданному интегральному многообразию (1) продифференцируем вектор-функцию $\lambda = \lambda(y, t)$ по правилу Ито дифференцирования сложной функции в случае процесса с независимыми приращениями [3, с.201]

$$\ddot{\lambda} = M_1 + 2 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y \partial t} f_1 + f_1^T \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y \partial y} f_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial f_1}{\partial y} f_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial f_1}{\partial z} f_2 + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial f_1}{\partial z} \sigma \dot{\xi}, \quad (5)$$

где $M_1 = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial f_1}{\partial t} + S_1 + S_2 + S_3$; $S_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial^2 f_1}{\partial z \partial z} : \sigma \sigma^T$;

$$S_2 = \int \left\{ \frac{\partial \lambda}{\partial y} [f_1(y, z + \sigma c(x), t) - f_1(y, z, t) + \frac{\partial f_1}{\partial x} \sigma c(x)] \right\} dx;$$

$$S_3 = \int \frac{\partial \lambda}{\partial y} [f_1(y, z + \sigma c(x), t) - f_1(y, z, t)] P^0(t, dx), \text{ а под выражением } \frac{\partial^2 f_1}{\partial z \partial z} : D, \text{ следуя [7],}$$

понимается вектор, элементами которого служат следы произведений матриц вторых производных соответствующих элементов $f_{1\mu}(y, z, t)$ вектора $f_1(y, z, t)$ по компонентам z на матрицу D

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial z \partial z} : D = \begin{bmatrix} \text{tr} \left(\frac{\partial^2 f_{11}}{\partial z \partial z} D \right) \\ \vdots \\ \text{tr} \left(\frac{\partial^2 f_{1l}}{\partial z \partial z} D \right) \end{bmatrix}, \quad D = \sigma \sigma^T.$$

Далее, вводятся произвольные типа Еругина [1]: m -мерная вектор-функция $A(\lambda, \dot{\lambda}, y, z, t)$ и $(m \times \kappa)$ матрица $B(\lambda, \dot{\lambda}, y, z, t)$, обладающие свойством $A(0, 0, y, z, t) \equiv 0$, $B(0, 0, y, z, t) \equiv 0$, такие, что имеет место равенство

$$\ddot{\lambda} = A(\lambda, \dot{\lambda}, y, z, t) + B(\lambda, \dot{\lambda}, y, z, t) \dot{\xi}. \quad (6)$$

Сравнивая уравнения (5) и (6), приходим к соотношениям

$$\left(2 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y \partial t} + f_1^T \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y \partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) f_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial f_1}{\partial z} f_2 = A - \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial f_1}{\partial t} + S_1 + S_2 + S_3\right), \quad \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial f_1}{\partial z} \sigma = B,$$

которые перепишем в виде

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial f_1}{\partial z} f_2 = A - M_1 - \left(2 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y \partial t} + f_1^T \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y \partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) f_1, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial f_1}{\partial z} \sigma = B. \quad (7)$$

Из соотношений (7) по формуле (4) леммы 1 определим вектор-функцию f_2 и столбцы σ_i матрицы σ в вид

$$f_2 = s_1 \left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial f_1}{\partial z} \right) \tilde{C} \right] + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial f_1}{\partial z} \right)^+ A_1, \quad \sigma_i = s_2 \left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial f_1}{\partial z} \right) \tilde{C} \right] + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial f_1}{\partial z} \right)^+ B_{1i}, \quad (8)$$

Следовательно справедлива

Теорема. Для того чтобы дифференциальное уравнение типа Ито (2) имело заданное интегральное многообразие (1) необходимо и достаточно, чтобы вектор-функция f_2 и столбцы σ_i матрицы σ уравнения (2) имели вид (8).

Таким образом, в общем нелинейном случае решена основная обратная задача динамики при наличии случайных возмущений, а именно, по заданному интегральному многообразию построено множество стохастических дифференциальных уравнений Ито первого порядка при следующих предположениях: 1) наличие случайных возмущений из класса процессов с независимыми приращениями; 2) диффузия вырождается по части переменных; 3) заданное интегральное многообразие зависит лишь от части переменных. Полученные результаты иллюстрируются на примере стохастической задачи Еругина на плоскости с вырождающейся диффузией.

Литература

1. Еругин Н.П. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // Прикладная математика и механика. - М., 1952. - Т.10, вып. 6. - С.659-670.
2. Галиуллин А.С. Методы решения обратных задач динамики. - М.: Наука, 1986. - 224 с.
3. Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г. Уравнения программных движений. -М., 1986. - 88 с.
4. Мухарлямов Р.Г. О построении систем дифференциальных уравнений движения механических систем // Дифференциальные уравнения. - М., 2003. - Т. 39, № 3. - С. 343-353.
5. Ибраева Г.Т., Тлеубергенов М.И. Об основной обратной задаче дифференциальных систем с вырождающейся по части переменных диффузией // Математический журнал. - Алматы, 2004. - Т.4, № 4(14). - С. 86-92.
6. Ibraeva G.T., Tleubergenov M.I. Main inverse problem for differential systems with degenerate diffusion // Ukrainian Mathematical Journal. 2013. Vol.65, No.5, pp.787-792.
7. Пугачев В.С., Сеницын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. -М., 1990. -632 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ В ЛИНЕЙНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ ПРИ НАЛИЧИИ ДВОЙНОГО РЕЗОНАНСА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

А.И. Сафонов

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
Москва, Российская Федерация

INVESTIGATION OF THE EVOLUTION OF THE REGIONS OF STABILITY IN THE LINEAR APPROXIMATION OF HAMILTONIAN SYSTEM PERIODIC MOTIONS IN THE PRESENCE OF THE DOUBLE THIRD-ORDER RESONANCE

We consider here a motion of a non-autonomous time-periodic two-degree-of-freedom Hamiltonian system in the neighborhood of the trivial equilibrium in the presence of the double third-order resonance. Periodic motions of the system in a small neighborhood of the equilibrium are found. The conditions for their stability in the linear approximation are found, as well as the regions satisfying these conditions in the space of the parameters of the problem are constructed and their evolution is investigated.

Рассматривается поставленная ранее [1] задача движения неавтономной 2π -периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности тривиального положения равновесия, устойчивого в линейном приближении. Предполагается, что в рассматриваемой системе реализуется двойной (основной и комбинационный) резонанс третьего порядка, причем в гамильтониане возмущенного движения соответствующие резонансные коэффициенты малы и имеют порядок ε ($0 < \varepsilon \ll 1$). В [2] было показано, что для рассматриваемых случаев двойного резонанса третьего порядка тривиальное положение равновесия системы неустойчиво.

С помощью серии канонических замен изначальный гамильтониан был представлен одним из следующих двух видов

$$\Gamma_1 = \alpha R_1^{3/2} \cos 3\Phi_1 + R_1^{1/2} R_2 \cos(\Phi_1 + 2\Phi_2) + \gamma_{20} R_1^2 + R_1 R_2 + \gamma_{02} R_2^2 + O(\varepsilon), \quad (1)$$

$$\Gamma_2 = \alpha R_1^{3/2} \cos 3\Phi_1 + R_1^{1/2} R_2 \cos(\Phi_1 - 2\Phi_2) + \gamma_{20} R_1^2 + R_1 R_2 + \gamma_{02} R_2^2 + O(\varepsilon). \quad (2)$$

где Φ_i, R_i ($i = 1, 2$) – симплектические полярные координаты, резонансные коэффициенты α в (1) и (2) считаем положительными, а коэффициенты γ_{20} и γ_{02} могут принимать значения любого знака. Гамильтониан (1) отвечает случаю двух сильных (основного и комбинационного) резонансов третьего порядка, гамильтониан (2) — случаю сильного основного и слабого комбинационного резонансов. При этом слагаемые $O(\varepsilon)$ 2π -периодичны по Φ_i ($i = 1, 2$) и периодичны по времени. Отбрасывая в (1) и (2) данные слагаемые, получаем приближенные (модельные) гамильтонианы. Соответствующие им модельные системы имеют отличные от тривиального положения равновесия, для которых $\sin 3\Phi_1 = 0, \sin(\Phi_1 + 2\Phi_2) = 0$, а

$$R_1 = \left(-\frac{3(2\alpha\delta_1\gamma_{02} - \delta_2) \pm \sqrt{36\gamma_{02}^2\alpha^2 - 36\delta_1\delta_2\gamma_{02}\alpha + 32\gamma_{02}\gamma_{20} + 1}}{4(4\gamma_{02}\gamma_{20} - 1)} \right)^2, \quad R_2 = -\frac{R_1^{1/2}}{2\gamma_{02}} (\delta_2 + R_1^{1/2}), \quad (3)$$

при этом введены обозначения $\delta_1 = \cos 3\Phi_1, \delta_2 = \cos(\Phi_1 \pm 2\Phi_2)$ ($\delta_i = \pm 1$) ($i = 1, 2$).

Ранее [1] в пространстве параметров α , γ_{20} и γ_{02} были выявлены положения равновесия и условия, налагаемые на параметры задачи, для их существования, а также исследовались достаточные условия устойчивости и достаточные условия неустойчивости найденных положений равновесия. При этом вопрос об устойчивости решался путем рассмотрения квадратичных частей соответствующих гамильтонианов возмущенного (в окрестности этих равновесий) движения, а вопрос о неустойчивости — из условия отрицательности свободного члена характеристического уравнения линеаризованных уравнений возмущенного движения.

Цель данной работы — продолжение предыдущей задачи, рассмотрение вопроса об устойчивости оставшихся положений равновесия и соответствующих им движений полной системы в ε -окрестности тривиального положения равновесия.

Указанное характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^4 + p\lambda^2 + q = 0$. Система трех неравенств $p > 0$, $q > 0$, $D = p^2 - 4q > 0$ определяет необходимые условия устойчивости, для которых корни уравнения чисто мнимые. Ниже выписаны положения равновесия P_i ($i = 1...5$) (совпадающие для обеих модельных систем), для которых не выполнены достаточные условия устойчивости и при этом удовлетворяются условие $q > 0$:

$g = \gamma_{02}\gamma_{20}$	$\gamma_{02} < 0$	$\gamma_{02} > 0$
$\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$	Корень R_{10}^- : $P_3: (1, -1), 0 < \alpha < \alpha_1;$ $P_4: (-1, 1), \alpha \geq \alpha_2;$	—
$\left(0, \frac{1}{8}\right)$	Корень R_{10}^- : $P_5: (1, -1), 0 < \alpha < \alpha';$ $P_4: (-1, 1), \alpha \geq \alpha_2;$	—
$\left(-\frac{1}{32}, 0\right)$	Корень R_{10}^- : $P_4: (-1, 1), \alpha \geq \alpha_2;$	Корень R_{10}^- : $P_1: (1, -1), 0 < \alpha < \alpha';$
$\left(-\infty, -\frac{1}{32}\right)$	Корень R_{10}^- : $P_4: (-1, 1), \alpha \geq \alpha_2;$	Корень R_{10}^+ : $P_2: (1, -1), \alpha_1 < \alpha < \alpha';$

Таблица 1. Положения равновесия, удовлетворяющие условию $q > 0$.

где пара чисел в скобках во втором и третьем столбцах определяет пару (δ_1, δ_2) , $\alpha_1 = -\frac{1}{2}\gamma_{02} + \frac{1}{3}\gamma_{02}\sqrt{2(1-4g)}$, $\alpha_2 = -\frac{1}{2}\gamma_{02} - \frac{1}{3}\gamma_{02}\sqrt{2(1-4g)}$, $\alpha' = -\frac{4g}{3\gamma_{02}}$, а R_{10}^\pm соответствует корню (3) с плюсом или минусом перед знаком квадратного корня.

В пространстве параметров задачи выявлены области, соответствующие гамильтонианам (1) и (2), для которых выполнены все необходимые условия устойчивости положений равновесия (табл.1) рассматриваемых модельных систем. Строились сечения этих областей при фиксированных значениях параметра g . Для каждого случая был построен характерный вид сечений в плоскости параметров γ_{02} , α , где отслеживалось взаимное расположение графиков неявных функций $p = 0$ и $D = 0$, их эволюция и находились области выполнения только необходимых условий устойчивости (на рис. 1, 2 эти области заштрихованы). Границами областей устойчивости во всех случаях является кривые граничных условий, накладываемых на параметр α (на рис. 1, 2 эти кривые — серые линии с обозначениями α_{\min} и α_{\max}), а также кривые дискриминанта D (на рисунках они обозначены черными линиями).

Приведем некоторые результаты.

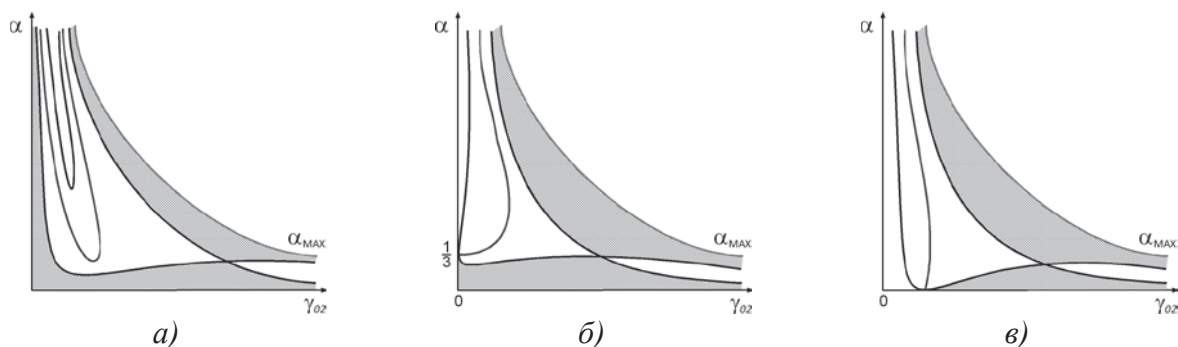


Рис. 1. Характерный вид сечения при $g = \text{const}$ для гамильтониана Γ_1 случая P_1 при
 а) $g \in (-1/32, -1/36)$; б) $g = -1/36$; в) $g \in (-1/36, 0)$, где $\alpha_{\max} = -4g/3\gamma_{02}$.

Для случая, изображенного на рис.1, имеется характерная точка $g = -1/36$, при переходе через которую имеется скачкообразное изменение областей устойчивости.

На (рис. 2) изображен характерный вид исследуемых сечений при $g = -1/32$ для гамильтониана Γ_2 .

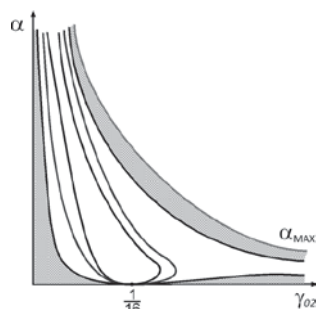


Рис. 2. Характерный вид сечения при $g = -1/32$ для гамильтониана Γ_2 .

Согласно методу малого параметра Пуанкаре, из каждого отличного от тривиального положения равновесия модельных систем рождается единственное, аналитическое по ε , периодическое решение полных систем с гамильтонианами (1), (2). В исходных переменных им соответствуют 12π -периодические движения, происходящие в ε -окрестности неустойчивого положения равновесия. Получен явный вид их главной части. Положениям равновесия, для которых выполнены достаточные или только необходимые условия устойчивости, соответствуют устойчивые в линейном приближении периодические движения исходной системы. Неустойчивым положениям равновесия отвечают неустойчивые периодические движения исходной системы. Это следует из непрерывности по ε характеристических показателей соответствующих линеаризованных уравнений возмущенного движения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 14-01-00380).

Литература

1. Сафонов А.И., Холостова О.В. Исследование периодических движений гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при наличии двойного резонанса третьего порядка // LI Всероссийская конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники: тезисы докладов. Москва, РУДН, 12-15 мая 2015 г. – Москва: РУДН, 2015. С. 158-160.
2. Холостова О.В. О движении гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при наличии кратных резонансов третьего порядка // Нелинейная динамика. 2012. Т. 8. №2. С. 267 – 288.

АЛГОРИТМЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ И УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ МОБИЛЬНОГО РОБОТА KUKA YOUNOT

PARAMETER IDENTIFICATION AND CONTROL ALGORITHMS FOR KUKA YOUNOT MOBILE ROBOT

Адамов Б.И.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва, Россия

Построена математическая модель мобильной платформы всенаправленного движения KUKA youBot в псевдоскоростях. Разработан алгоритм идентификации параметров модели робота. Рассмотрена задача управления роботом с целью отработки программного движения, согласованного с дополнительными неголономными связями. Управляющие обобщенные силы отождествлены с реакциями этих связей.

The mathematical model of KUKA youBot omnidirectional mobile platform is obtained using quasi-velocities approach. The algorithm of parameter identification of the robot model is designed. The problem of the robot control to realize program motion coordinated with addition non-holonomic constraints is considered. Control generalized forces are equated to reactions of these constraints.

Описание мобильной платформы. Робот KUKA youBot представляет собой мобильную платформу всенаправленного движения, оснащённую двумя парами соосных роликонесущих колёс Илона (*mesanum*-колёс) радиуса R . На внешней окружности диска такого колеса расположено несколько роликов, оси которых составляют с его плоскостью угол 45° . Подробное описание мобильного робота приведено на ресурсах [1,2].

Свяжем с геометрическим центром платформы O подвижную систему координат $OXYZ$, причём OX является её продольной осью симметрии, направленной вперёд, а OY - осью поперечной симметрии, направленной влево; ось OZ нормальна плоскости платформы. Обе колёсные пары платформы соосны OY . Обозначим угол поворота переднего левого колеса φ_1 , переднего правого - φ_2 , заднего левого - φ_3 , а заднего правого - φ_4 . Расстояние между осями передних и задних колёс составляет $2h$, центры соосных колёс удалены друг от друга на величину $2l$.

Мобильный робот youBot моделируется как система абсолютно твёрдых тел: платформы с перевозимым оборудованием и грузом, а также колёс. Масса платформы с нагрузкой равна m ; а их центр масс приходится на точку C , абсцисса и ордината которой в системе координат $OXYZ$ равны a_x и a_y соответственно. Обозначим момент инерции платформы с грузом относительно оси CZ I_C . Масса каждого из колёс составляет m_w , её распределение однородно; массами роликов пренебрегаем. Моменты инерции колеса относительно осей, проходящих через его центр равны I_{w_y} и I_{w_z} .

Кинематика робота. Рассмотрим движение робота по горизонтальной плоскости, с которой связана неподвижная прямоугольная система координат $X'Y'$. Такое движение описывается семью обобщёнными координатами: курсовым углом платформы $\Psi = \angle(X', X)$, абсциссой и ординатой её центра X'_O и Y'_O , углами поворота колёс φ_i , $i = 1..4$.

Считаем, что ролики каждого *тесалит*-колеса контактируют с подстилающей поверхностью без отрыва и проскальзывания, причём точки контакта находятся точно под его центром. Выражения относительных угловых скоростей колёс, полученные из условия непроскальзывания, имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 &= \frac{1}{R}[V_X - V_Y - (l+h)\Omega], & \dot{\phi}_2 &= \frac{1}{R}[V_X + V_Y + (l+h)\Omega], \\ \dot{\phi}_3 &= \frac{1}{R}[V_X + V_Y - (l+h)\Omega], & \dot{\phi}_4 &= \frac{1}{R}[V_X - V_Y + (l+h)\Omega], \end{aligned} \quad (1)$$

где $V_X = \dot{X}'_O \cos \Psi + \dot{Y}'_O \sin \Psi$ и $V_Y = -\dot{X}'_O \sin \Psi + \dot{Y}'_O \cos \Psi$ - продольная и поперечная компоненты вектора скорости центра платформы O ; $\Omega = \dot{\Psi}$ - угловая скорость курса робота. Уравнения (1) задают четыре неголономные связи, налагаемые на движение системы.

В рассматриваемой задаче все обобщённые скорости выражаются через три независимые псевдоскорости (квазискорости) V_X , V_Y и Ω , образующие вектор-столбец

$$\dot{\mathbf{\pi}} = (V_X \quad V_Y \quad \Omega)^T,$$

где T - символ транспонирования, а точка означает дифференцирование по времени.

Динамика мобильного робота. Для вывода уравнений динамики рассматриваемой неголономной системы использовались уравнения Аппеля [3]:

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{\mathbf{\pi}}} = \mathbf{\Pi}, \quad \frac{\partial S}{\partial \dot{\mathbf{\pi}}} \equiv \left(\frac{\partial S}{\partial \dot{V}_X} \quad \frac{\partial S}{\partial \dot{V}_Y} \quad \frac{\partial S}{\partial \dot{\Omega}} \right)^T,$$

где S - функция Аппеля (энергия ускорений) робота [3-5], $\mathbf{\Pi}$ - столбец обобщённых сил, приведённых к псевдоскоростям.

При составлении уравнений движения робота считалось, что силы трения в подшипниках линейны по скоростям, а ролики и вращающиеся детали механических передач колёс невесома.

С учётом введённых выше допущений, динамика мобильного робота *youBot* описывается следующей системой уравнений:

$$m_{rb}(\dot{V}_X - V_Y\Omega) + \frac{4I_{wy}}{R^2}\dot{V}_X - ma_Y\dot{\Omega} - ma_X\Omega^2 + \frac{4\mu_w}{R^2}V_X = F_X, \quad (2a)$$

$$m_{rb}(\dot{V}_Y + V_X\Omega) + \frac{4I_{wy}}{R^2}\dot{V}_Y + ma_X\dot{\Omega} - ma_Y\Omega^2 + \left(\frac{4\mu_w}{R^2} + \frac{8\mu_r}{R_r^2} \right) V_Y = F_Y, \quad (2б)$$

$$(I_{rb} + 4I_{wy}\eta_w^2)\dot{\Omega} - ma_Y(\dot{V}_X - V_Y\Omega) + ma_X(\dot{V}_Y + V_X\Omega) + (4\mu_w\eta_w^2 + 8\mu_r\eta_{r_1}^2)\Omega = M_\Omega, \quad (2в)$$

где $m_{rb} = m + 4m_w$ - общая масса робота;

$I_{rb} = I_C + m\{a_X^2 + a_Y^2\} + 4(I_{wz} + m_w\{h^2 + l^2\})$ - его момент инерции относительно оси OZ ;

μ_r и μ_w - коэффициенты вязкого трения в подшипниках роликов и механических передач колёс; R_r - радиус ролика; $\eta_w = (l+h)/R$, $\eta_{r_1} = h/R_r$ - безразмерные коэффициенты; F_X ,

F_Y и M_Ω - управляющие обобщённые силы, которые выражаются через моменты приводов колёс M_i , $i = 1..4$, по формулам:

$$F_X = \frac{M_2 + M_1 + M_4 + M_3}{R}, \quad F_Y = \frac{M_2 - M_1 - M_4 + M_3}{R}, \quad M_\Omega = \eta_w[M_2 - M_1 + M_4 - M_3].$$

В работе [6] исследована динамика мобильной платформы *NEXUS robot*, имеющую общую кинематическую схему с роботом *youBot*. В [6] уравнения движения получены в

обобщённых координатах с применением формализма Лагранжа с множителями связей. Они с одной стороны более громоздки, чем система (2), а с другой позволяют определить координаты платформы, не привлекая кинематических соотношений.

Использование полученных уравнений движения для построения законов управления мобильным роботом невозможно, так как значения некоторых коэффициентов в системе (2) неизвестны. В паспортных данных робота [1,2] приведены значения параметров l, h, R, R_r и m_w , остальные коэффициенты в уравнениях движения системы подлежат оцениванию.

Идентификация параметров модели робота. Исходными данными в задаче идентификации параметров робота *youBot* являются измерения скоростей вращения колёс $\dot{\varphi}_i(t)$, $i = 1...4$, и моментов $M_i(t)$ на некотором движении робота. Значения $V_X(t)$, $V_Y(t)$ и $\Omega(t)$ вычисляются путём решения уравнений кинематики (1). Построим рекуррентный алгоритм идентификации системы. Такой алгоритм вырабатывает оценки параметров в процессе работы системы и позволяет отслеживать их медленную эволюцию.

Для удобства построения алгоритма идентификации, введём новые переменные:

$$V_X = (l+h)\Omega_{V_X}, \quad V_Y = (l+h)\Omega_{V_Y},$$

и перепишем систему (2) в следующей форме:

$$J_{rb}(\dot{\Omega}_{V_X} - \Omega_{V_Y}\Omega) + 4I_{wy}\eta_w^2\dot{\Omega}_{V_X} - J_Y\dot{\Omega} - J_X\Omega^2 + 4\mu_w\eta_w^2\Omega_{V_X} = M_{V_X}, \quad (3a)$$

$$J_{rb}(\dot{\Omega}_{V_Y} + \Omega_{V_X}\Omega) + I_{wy}\eta_w^2\dot{\Omega}_{V_Y} + J_X\dot{\Omega} - J_Y\Omega^2 + (4\mu_w\eta_w^2 + 8\mu_r\eta_{r_2}^2)\Omega_{V_Y} = M_{V_Y}, \quad (3б)$$

$$(I_{rb} + 4I_{wy}\eta_w^2)\dot{\Omega} - J_Y(\dot{\Omega}_{V_X} - \Omega_{V_Y}\Omega) + J_X(\dot{\Omega}_{V_Y} + \Omega_{V_X}\Omega) + (4\mu_w\eta_w^2 + 8\mu_r\eta_{r_1}^2)\Omega = M_{\Omega}, \quad (3в)$$

где $J_{rb} = m_{rb}(l+h)^2$, $J_X = ma_X(l+h)$, $J_Y = ma_Y(l+h)$, $\eta_{r_2} = (l+h)/R_r$;
 $M_{V_X} = (l+h)F_X = \eta_w[M_2 + M_1 + M_4 + M_3]$, $M_{V_Y} = (l+h)F_Y = \eta_w[M_2 - M_1 - M_4 + M_3]$.

Приведённые соотношения содержат неизмеряемые производные. Для их исключения, представим функции, линейно, входящие в систему (3) следующим образом:

$$\Omega_{V_X} = \frac{\dot{\alpha}_1}{a_f} + \alpha_1, \quad \Omega_{V_Y} = \frac{\dot{\alpha}_2}{a_f} + \alpha_2, \quad \Omega = \frac{\dot{\alpha}_3}{a_f} + \alpha_3, \quad \Omega_{V_X}\Omega = \frac{\dot{\alpha}_{13}}{a_f} + \alpha_{13}, \quad \Omega_{V_Y}\Omega = \frac{\dot{\alpha}_{23}}{a_f} + \alpha_{23},$$

$$\Omega^2 = \frac{\dot{\alpha}_{33}}{a_f} + \alpha_{33}, \quad M_{V_X} = \frac{\dot{\beta}_1}{a_f} + \beta_1, \quad M_{V_Y} = \frac{\dot{\beta}_2}{a_f} + \beta_2, \quad M_{\Omega} = \frac{\dot{\beta}_3}{a_f} + \beta_3,$$

где $a_f > 0$ - постоянный коэффициент. Подставив эти соотношения в систему (3), после перегруппировки слагаемых и исключения производных новых переменных получаем:

$$\beta_1 = J_{rb}(a_f[\Omega_{V_X} - \alpha_1] - \alpha_{23}) + 4I_{wy}\eta_w^2 a_f[\Omega_{V_X} - \alpha_1] -$$

$$- J_Y a_f[\Omega - \alpha_3] - J_X \alpha_{33} + 4\mu_w\eta_w^2 \alpha_1 - \varepsilon_1,$$

$$\beta_2 = J_{rb}(a_f[\Omega_{V_Y} - \alpha_2] + \alpha_{13}) + I_{wy}\eta_w^2 a_f[\Omega_{V_Y} - \alpha_2] +$$

$$+ J_X a_f[\Omega - \alpha_3] - J_Y \alpha_{33} + (4\mu_w\eta_w^2 + 8\mu_r\eta_{r_2}^2)\alpha_2 - \varepsilon_2,$$

$$\beta_3 = (I_{rb} + 4I_{wy}\eta_w^2) a_f[\Omega - \alpha_3] - J_Y(a_f[\Omega_{V_X} - \alpha_1] - \alpha_{23}) +$$

$$+ J_X(a_f[\Omega_{V_Y} - \alpha_2] + \alpha_{13}) + (4\mu_w\eta_w^2 + 8\mu_r\eta_{r_1}^2)\alpha_3 - \varepsilon_3,$$

где функции ε_i , $i = 1...3$, удовлетворяют уравнениям $\dot{\varepsilon}_i + a_f \varepsilon_i = 0$.

Пренебрегая экспоненциально убывающими величинами $\varepsilon_i, i = 1 \dots 3$, перепишем полученные соотношения в векторно-матричном виде:

$$\mathbf{y} = \mathbf{N}^T \boldsymbol{\theta}^*, \quad \mathbf{y} = (\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3)^T,$$

где $\boldsymbol{\theta}^* = (J_{rb} \quad I_{rb} \quad I_{wy} \quad J_X \quad J_Y \quad \mu_w \quad \mu_r)^T$ - вектор оцениваемых параметров.

Вычисление вектора оценок параметров $\boldsymbol{\theta}$ проведём с помощью рекуррентного метода наименьших квадратов в непрерывном времени [7]:

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{P} \mathbf{N} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{N}^T \boldsymbol{\theta}), \quad \dot{\mathbf{P}} = -\mathbf{P} \mathbf{N} \mathbf{N}^T \mathbf{P}; \quad \boldsymbol{\theta}|_{t=0} = \boldsymbol{\theta}_0, \quad \mathbf{P}|_{t=0} = \mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_0^T > 0,$$

где $\mathbf{P} = (\mathbf{P}_0^{-1} + \int_0^t \mathbf{N} \mathbf{N}^T dt)^{-1}$ - симметричная матрица усиления алгоритма

идентификации.

Управление движением мобильной платформы. Рассмотрим задачу расчёта управляющих сил, обеспечивающих требуемый вектор скорости движения точки платформы:

$$V_{BX} = V_X - b_Y \Omega = V_{BX}^*(t), \quad V_{BY} = V_Y + b_X \Omega = V_{BY}^*(t), \quad (4)$$

где $V_{BX}^*(t)$ и $V_{BY}^*(t)$ - требуемый закон изменения компонент скорости точки B в подвижной системе координат $OXYZ$, b_X и b_Y - её абсцисса и ордината в $OXYZ$. Матричная форма системы (4) имеет вид:

$$\mathbf{B} \dot{\boldsymbol{\pi}} = \mathbf{V}_B^*(t), \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -b_Y \\ 0 & 1 & b_X \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}_B^* = \begin{pmatrix} V_{BX}^* \\ V_{BY}^* \end{pmatrix}.$$

Представим уравнения движения системы в следующей форме:

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\boldsymbol{\pi}}} = \mathbf{\Pi}_{uc} + \mathbf{\Pi}_{cn},$$

где $\mathbf{\Pi}_{cn} = (F_X \quad F_Y \quad M_\Omega)^T$ - столбец управляющих обобщённых сил, $\mathbf{\Pi}_{uc}$ - столбец обобщённых сил на неуправляемом движении системы.

Три управляющие обобщённые силы на программном движении (4) не могут быть найдены из уравнений движения однозначно, так как число дополнительных соотношений (4) меньше числа степеней свободы исследуемой системы.

Рассмотрим соотношения (4) как дополнительные связи, налагаемые на динамику робота. Уравнения неуправляемого движения системы с такими связями имеет вид [8,9]:

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\boldsymbol{\pi}}} = \mathbf{\Pi}_{uc} + \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda}, \quad (5)$$

где $\boldsymbol{\lambda}$ - двумерный столбец множителей связей. Решив замкнутую систему (4)-(5), найдём зависимость $\boldsymbol{\lambda}(t)$ на программном движении, и, отождествив реакции дополнительных связей (4) с управляющими силами найдём вектор $\mathbf{\Pi}_{cn}$:

$$\mathbf{\Pi}_{cn} = \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda}(t).$$

Программно-аппаратное обеспечение робота *youBot* позволяет реализовать управление платформой на кинематическом уровне – контроллеры двигателей обрабатывают заданные скорости вращения колёс. Такой принцип регулирования позволяет обойтись без вычисления управляющих моментов, а, следовательно, и множителей связей.

Для определения закона изменения псевдоскоростей $V_X(t)$, $V_Y(t)$ и $\Omega(t)$ на программном движении соотношения (4) необходимо дополнить уравнением динамики,

одним в рассматриваемой задаче, не содержащим множителей связей. Выбрав в качестве независимой переменной угловую скорость платформы Ω , это уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial S^*}{\partial \dot{\Omega}} = \Pi_{uc\Omega}^*, \quad S^* = S|_{V_X=b_Y\Omega+V_{BX}^*(t), V_Y=-b_X\Omega+V_{BY}^*(t)}, \quad \Pi_{uc\Omega}^* = (b_Y \quad -b_X \quad 1)^T \cdot \Pi_{uc},$$

где $S^* = S^*(\dot{\Omega}, \Omega, t)$ и $\Pi_{uc\Omega}^*$ - соответственно, функция Аппеля и обобщённая сила на программном движении (4).

Другие методы исключения множителей связей из уравнений (5) приведены в статьях [8,9]. В их основе лежат принципы, используемые при выводе уравнений Маджи [10] и Воронца [3,10].

Отметим, что достаточно часто для решения задач управления такого рода используются уравнения Лагранжа второго рода с множителями [5, 11-15], причём в работах [11-15] рассматриваются вопросы стабилизации программных движений. Лагранжев формализм, с одной стороны делает процедуру исключения множителей связей (4) в рассматриваемой задаче более громоздкой, а с другой позволяет реализовать программное движение не только за счёт реакции λ , но и за счёт управления инерцией системы [11].

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 16-01-00429-а.

Литература

1. YouBot Detailed Specifications [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.youbot-store.com/wiki/index.php/YouBot_Detailed_Specifications – Заглавие с экрана. – (Дата обращения: 09.05.2016)
2. YouBot 3D Model [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.youbot-store.com/wiki/index.php/YouBot_3D_Model – Заглавие с экрана. – (Дата обращения: 09.05.2016)
3. Маркеев, А.П. Теоретическая механика. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 2009. – 416 с.
4. Голубев, Ю.Ф. Функция Аппеля в динамике систем твердых тел // Препринты ИПМ им. Келдыша. – 2014. - № 58 – С. 1-16.
5. Zimmermann, K. Mechanics of Terrestrial Locomotion. With a Focus on Non-pedal Motion Systems / K. Zimmermann, I. Zeidis, C. Behn. – London: Springer, 2010 – 292 p.
6. Becker, F. An approach to the kinematics and dynamics of a four-wheel mecanum vehicle / F. Becker, O. Bondarev, I. Zeidis, K. Zimmermann, M. Abdelrahman, B. Adamov // Scientific journal of IFToMM “Problems of Mechanics”, special issue. - № 2(55) – pp. 27-37.
7. Ioannou, P.A. Robust Adaptive Control / P.A. Ioannou, J. Sun – Courier Corporation, 2012. – 821 p.
8. Мартыненко, Ю.Г. Программное управление движением телескопического манипулятора на подвижной платформе / Ю.Г. Мартыненко, И.В. Орлов // Вестник МЭИ. – 2003. - № 5. – С. 60-70.
9. Адамов, Б.И. Управление мобильным манипулятором, работающим в цилиндрической системе координат / Б.И. Адамов, И.В. Орлов // Вестник МЭИ. – 2012. - № 1. – 28-35.
10. Мартыненко, Ю.Г. Управление движением мобильных колёсных роботов // Фундаментальная и прикладная математика. – 2005. – Том 11. - № 8. – С. 29-80.
11. Козлов, В.В. Принципы динамики и сервосвязи // Нелинейная динамика. – 2015. Том 11. - № 1. – С. 169-178.
12. Мухарлямов, Р.Г. Стабилизация движения механических систем на заданных многообразиях фазового пространства // ПММ. – 2006. – Том 70. - № 2. – С. 235-249.

13. Мухарлямов, Р.Г. Дифференциально-алгебраические уравнения программных движений лагранжевых динамических систем // Известия РАН. МТТ. - № 4. – 2011. С. 50-61.
14. Мухарлямов, Р.Г. Моделирование процессов управления, устойчивость и стабилизация систем с программными связями // Известия РАН. Теория и системы управления. - № 1. – 2015. – С. 15-28.
15. Мухарлямов, Р.Г. Управление динамикой манипулятора с программными связями / Р.Г. Мухарлямов, Н.В. Абрамов // Проблемы механики и управления: нелинейные системы. - № 43. – 2011. – С. 90-102.

ПРИБЛИЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА НА КРУГОВОЙ ОРБИТЕ ПРИ БЫСТРОМ ОТНОСИТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ НЕСОМОЙ ИМ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Маркеев А.П.

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия,
anat-markeev@mail.ru*

Получена приближенная система уравнений движения твердого тела относительно его центра масс на круговой орбите. Указана оценка точности, с которой решения приближенных уравнений аппроксимируют решения точной системы уравнений движения.

Ключевые слова: твердое тело, вращение, асимптотика.

EQUATIONS OF MOTION OF A SOLID IN A CIRCULAR ORBIT AT FAST RELATIVE MOTION OF ITS CARRIED MATERIAL POINT

Markeev A.P.

A. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia

An approximated set of equations of motion of a solid with respect to its center of mass is obtained. The estimate from which the solutions of rough equations approximate the solutions of an exact set of equations of motion is determined.

Keywords: solid, rotation, asymptotic behavior.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему, образованную твердым телом массы M и материальной точкой P , движущейся вдоль некоторой кривой, жестко скрепленной с телом по заданному закону. Система движется в центральном ньютоновском гравитационном поле. Полагая ее линейные размеры малыми по сравнению с характерным размером орбиты, считаем, что движение системы относительно центра масс C не влияет на движение самого центра масс [1]. Будем предполагать, что центр масс системы движется по круговой орбите с периодом $2\pi/n$ (n — среднее движение точки C по орбите).

Пусть $CX_cY_cZ_c$ — орбитальная система координат; ее ось CZ_c направлена вдоль радиус-вектора точки C относительно притягивающего центра, оси CX_c и CY_c

направлены соответственно по касательной и бинормали к орбите. Введем еще две системы координат $Ox_oY_oZ_o$ и $Oxyz$ с началом в центре масс O твердого тела. Оси системы координат $Ox_oY_oZ_o$ параллельны соответствующим осям орбитальной системы координат, а оси системы координат $Oxyz$ направлены по главным центральным осям инерции тела.

Положение несомой телом точечной массы P в системе координат $Oxyz$ определяется вектором OP , компоненты которого x, y, z — заданные дважды непрерывно дифференцируемые функции времени t . Эти функции предполагаются периодическими с периодом $2\pi/s$ или условно-периодическими с частотами s_1, s_2, \dots, s_ℓ . В последнем случае частоты считаются величинами одного порядка (если через s обозначить наибольшую из частот, то s_k/s ($k = 1, 2, \dots, \ell$) — величины порядка единицы).

В данной работе получена приближенная система дифференциальных уравнений, описывающая движение твердого тела относительно его центра масс O , в предположении о том, что масса несомой телом материальной точки P мала, а ее движение относительно тела является быстрым:

$$m \ll M, \quad n \ll s. \quad (1)$$

Указана погрешность, с которой решения приближенной системы аппроксимируют решения точной системы дифференциальных уравнений движения.

Отметим, что некоторые задачи о движении твердого тела (спутника), несущего точечную массу, исследованы ранее [2, 3].

УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА - ПУАССОНА

Уравнения вращательного движения твердого тела относительно его центра масс запишем в форме уравнений Эйлера - Пуассона.

В системе координат $Ox_oY_oZ_o$ единичные векторы осей Ox, Oy, Oz и вектор ω угловой скорости тела задаются соотношениями $e_x^T = (\lambda_{11}, \lambda_{21}, \lambda_{31})$, $e_y^T = (\lambda_{12}, \lambda_{22}, \lambda_{32})$, $e_z^T = (\lambda_{13}, \lambda_{23}, \lambda_{33})$ и $\omega^T = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ (T — операция транспонирования). Пусть J_x, J_y и J_z — моменты инерции тела относительно осей Ox, Oy и Oz соответственно, а $\mu = mM/(m + M)$ — приведенная масса системы.

Динамическую часть системы уравнений Эйлера - Пуассона можно получить из теоремы об изменении кинетического момента. Имеем следующие три уравнения (точкой обозначается дифференцирование по времени):

$$\begin{aligned} & [J_x + \mu(y^2 + z^2)]\dot{\omega}_x - \mu xy\dot{\omega}_y - \mu xz\dot{\omega}_z + (J_z - J_y)\omega_y\omega_z + \\ & + \mu[(x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z)(y\omega_z - z\omega_y) + 2(y\dot{y} + z\dot{z})\omega_x - 2\dot{x}(y\omega_y + z\omega_z) + y\ddot{z} - z\ddot{y}] = \\ & = 3n^2[(J_z - J_y)\lambda_{32}\lambda_{33} + \mu(\lambda_{31}x + \lambda_{32}y + \lambda_{33}z)(\lambda_{33}y - \lambda_{32}z)] \quad (x, y, z; 31, 32, 33). \quad (2) \end{aligned}$$

Здесь и далее невыписанные уравнения получаются из выписанных круговой перестановкой символов, указанных в круглых скобках.

Кинематические уравнения Пуассона, замыкающие уравнения (2), запишем в матричной форме. Обозначим через Λ матрицу направляющих косинусов λ_{ij} ; первый, второй и третий столбцы этой матрицы — единичные векторы e_x, e_y и e_z соответственно. Уравнения Пуассона записываются в виде

$$\dot{\Lambda} = \Lambda\Omega + n\Gamma. \quad (3)$$

Здесь

$$\Omega = \begin{vmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{vmatrix}, \quad \Gamma = \begin{vmatrix} -\lambda_{31} & -\lambda_{32} & -\lambda_{33} \\ 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Величины λ_{ij} связаны шестью соотношениями

$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x = 1, \quad \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y = 0 \quad (x, y, z).$$

Поэтому из двенадцати скалярных уравнений (2),(3) независимы только шесть.

При отсутствии несомой точки (т.е. при $\mu = 0$) уравнения (2),(3) переходят в известные уравнения вращательного движения спутника - твердого тела относительно центра масс [1].

Учитывая предположения (1), введем в уравнения движения малый параметр, положив

$$m = \varepsilon^2 M, \quad \mathbf{n} = \varepsilon S \boldsymbol{\omega}_0 \quad (0 < \varepsilon \ll 1),$$

и сделаем в (2),(3) замену переменных

$$\tau = st, \quad \boldsymbol{\omega}_x = \varepsilon S \boldsymbol{\sigma}_x \quad (x, y, z) \quad (5)$$

Следуя [4], будем рассматривать уравнения движения в новых переменных как условие минимума функции Ψ второй степени относительно переменных $\sigma'_x, \sigma'_y, \sigma'_z, \lambda'_{ij}$ (штрихом обозначается производная по новой независимой переменной τ). Эта функция имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{1}{2} \sum_{(x,y,z)} \sigma_x'^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{(1,2,3)} \lambda_{i1}'^2 + \varepsilon \Psi_1 + \varepsilon^2 \Psi_2 + O(\varepsilon^3), \\ \Psi_1 &= \sum_{(x,y,z)} \sigma_x' \frac{J_z - J_y}{J_x} \sigma_y \sigma_z + M \sum_{(x,y,z)} \sigma_x' \frac{yz'' - zy''}{J_x} - 3\omega_0^2 \sum_{(x,y,z;31,32,33)} \sigma_x' \frac{J_z - J_y}{J_x} \lambda_{32} \lambda_{33} - \\ &\quad - \sum_{i=1}^3 \sum_{(x,y,z;1,2,3)} \lambda_{i1}' (\lambda_{i2} \sigma_z - \lambda_{i3} \sigma_y) + \omega_0 \sum_{i=1}^3 (\lambda_{1i}' \lambda_{3i} - \lambda_{1i}' \lambda_{3i}'), \\ \Psi_2 &= 2M \sum_{(x,y,z)} \frac{\sigma_x'}{J_x} [(yy' + zz') \sigma_x - x'(y\sigma_y + z\sigma_z)], \end{aligned}$$

а уравнения движения записываются в форме следующих двенадцати равенств:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_x'} = 0 \quad (x, y, z), \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_{i1}'} = 0 \quad (1, 2, 3), \quad i = 1, 2, 3 \quad (6)$$

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ УРАВНЕНИЙ (6)

Упрощение системы уравнений (6) при малых ε сводится к преобразованию одной функции Ψ . Если сделать близкую к тождественной замену переменных

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \lambda_{ij} \rightarrow \mu_x, \mu_y, \mu_z, \beta_{ij}, \quad (7)$$

то функция Ψ преобразуется в функцию Φ , при малых ε мало отличающуюся от Ψ , а уравнения

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mu_x'} = 0 \quad (x, y, z), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \beta_{i1}'} = 0 \quad (1, 2, 3), \quad i = 1, 2, 3 \quad (8)$$

при малых ε будут эквивалентны уравнениям (6).

Замена (7) была построена в виде многочленов второй степени относительно ε . Коэффициенты многочленов можно выбрать периодическими (или условно-периодическими) по τ и такими, что уравнения (8) не будут содержать τ в членах до

второй степени ε включительно. Сама замена будет такой (члены порядка ε^2 явно не выписываем):

$$\sigma_x = \mu_x + \varepsilon \frac{M}{J_x} (zy' - yz') + O(\varepsilon^2) \quad (x, y, z), \quad \lambda_{ij} = \beta_{ij} + O(\varepsilon^2) \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (9)$$

Функция Φ имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2} \sum_{(x,y,z)} \mu_x'^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{(1,2,3)} \beta_{i1}'^2 + \varepsilon \Phi_1 + \varepsilon^2 \Phi_2 + O(\varepsilon^3), \\ \Phi_1 &= \sum_{(x,y,z)} \mu_x' \frac{J_z - J_y}{J_x} \mu_y \mu_z - 3\omega_0^2 \sum_{(x,y,z; 31,32,33)} \mu_x' \frac{J_z - J_y}{J_x} \beta_{32} \beta_{33} - \\ &\quad - \sum_{i=1}^3 \sum_{(x,y,z; 1,2,3)} \beta_{i1}' (\beta_{i2} \mu_z - \beta_{i3} \mu_y) + \omega_0 \sum_{i=1}^3 (\beta_{1i}' \beta_{3i} - \beta_{1i} \beta_{3i}'), \\ \Phi_2 &= \frac{2M}{s} \left[\sum_{(x,y,z)} \frac{\mu_x'}{J_x} \left(\frac{J_y}{J_z} \mu_y \chi_z - \frac{J_z}{J_y} \mu_z \chi_y \right) + \sum_{i=1}^3 \sum_{(x,y,z; 1,2,3)} \beta_{i1}' \left(\frac{\beta_{i2}}{J_z} \chi_z - \frac{\beta_{i3}}{J_y} \chi_y \right) \right]. \end{aligned}$$

Здесь

$$\chi_x = \langle \dot{z} y \rangle \quad (x, y, z).$$

Угловыми скобками обозначается усреднение по времени t .

ПРИБЛИЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пренебрежем в уравнениях (8) слагаемыми выше второй степени относительно ε , сделаем замену переменных, обратную замене (5):

$$\mu_x = \frac{p}{\varepsilon s} \quad (x, y, z; p, q, r), \quad t = \frac{\tau}{s},$$

и введем обозначения

$$\omega_x^* = 2 \frac{m}{J_x} \chi_x \quad (x, y, z), \quad \beta_{ij} = a_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

В результате получим приближенную систему уравнений движения в виде

$$J_x \dot{p} + (J_z - J_y) q r = 3n^2 (J_z - J_y) a_{32} a_{33} + J_z \omega_y^* r - J_y \omega_z^* q \quad (x, y, z; 31, 32, 33; p, q, r) \quad (10)$$

$$\dot{A} = AB + nC \quad (11)$$

Здесь A и C — это матрицы Λ и Γ из (3), (4), в которых величины λ_{ij} заменены на a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), а B — матрица Ω из (4), в которой $\omega_x = p - \omega_x^*$ ($x, y, z; p, q, r$).

На интервале времени порядка $\varepsilon^{-1/2}$ решения системы (10), (11) аппроксимируют решения исходной системы (2), (3) с погрешностью, определяемой равенствами

$$\omega_x = p + \frac{m}{J_x} (zy - yz) + O(\varepsilon^{3/2}) \quad (x, y, z; p, q, r), \quad \lambda_{ij} = a_{ij} + O(\varepsilon^{3/2}) \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Уравнения (11) тождественно удовлетворяются, если положить

$$p = \dot{\psi} a_{31} + \dot{\theta} \cos \varphi + n a_{21} + \omega_x^*, \quad q = \dot{\psi} a_{32} - \dot{\theta} \sin \varphi + n a_{22} + \omega_y^*, \quad r = \dot{\psi} a_{33} + \dot{\varphi} + n a_{23} + \omega_z^*; \quad (12)$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta, \quad a_{12} = -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi \cos \theta, \quad a_{13} = \sin \psi \sin \theta, \\ a_{21} &= \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \cos \theta, \quad a_{22} = -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \cos \theta, \quad a_{23} = -\cos \psi \sin \theta, \\ a_{31} &= \sin \varphi \sin \theta, \quad a_{32} = \cos \varphi \sin \theta, \quad a_{33} = \cos \theta. \end{aligned}$$

Поэтому вместо системы двенадцати уравнений (10),(11) можно рассматривать только шесть независимых уравнений (10),(12).

Отметим, что приближенные уравнения (10),(11) (или (10),(12)) допускают первый интеграл

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}[J_x(p - \omega_x^*)^2 + J_y(q - \omega_y^*)^2 + J_z(r - \omega_z^*)^2] - n(J_x p a_{21} + J_y q a_{22} + J_z r a_{23}) + \\ & + \frac{3}{2}n^2(J_x a_{31}^2 + J_y a_{32}^2 + J_z a_{33}^2) = const \end{aligned} \quad (13)$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14 – 21 – 00068) в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете).

Литература

1. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
2. Roberson R.E. // Journal of Applied Mechanics. 1958. V. 25. №2. P. 196 -200.
3. Асланов В.С., Безгласный С.П. // ПММ. 2012. Т.76. В.4. С.563 –573.
4. Маркеев А.П. // ПММ. 2011. Т.75. В.2. С.193 – 203.

**ФИЗИКА ПЛАЗМЫ
И ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО
ИЗЛУЧЕНИЯ
С ВЕЩЕСТВОМ**

УЛУЧШЕНИЕ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ ЭЦР ИСТОЧНИКА ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ВОДОРОДНЫХ ИОНОВ С ПОМОЩЬЮ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ЭМИТТЕРОВ НИЗКОТЕМПЕРАТУРНЫХ ЭЛЕКТРОНОВ.

В. Д. Дугар-Жабон¹, В. И. Каряка²

¹ Индустриальный университет Сантанде, АА 678Букараманга, Колумбия

² Российский университет дружбы народов, В-117198 Москва, Россия

Abstract

The data on the negative ion production in the electron cyclotron resonance source demonstrate that additional very low-energy thermoelectrons significantly enhance the negative ion production. As a first step to investigate the phenomenon the tungsten filaments were placed in the source. It is found that the heating of the tungsten filaments placed in the source chamber improves the discharge stability and extend the pressure operation range. The filaments system heating is accompanied by enhancing the extracted current by 5%. The low efficiency of the filament thermoelectrons owes to the fact that they provides conditions for the negative ion formation in the plasma volume where the extraction field does not penetrate. Feather it is demonstrated that the appropriately positioned LaB_6 emitter forms a layer of low-energy thermoelectrons in the vicinity of the plasma electrode surface that results in a significant enhancement of the negative ion production.

Исследование механизмов получения отрицательных водородных ионов в источнике плазмы, работающем на электронно-циклотронном резонансе [1] выяснило несколько принципиальных моментов, влияющих на производительность источника этого типа. На первом этапе вследствие столкновений с электронами в объеме плазмы происходит образование высоковозбужденных колебательных состояний молекул водорода и высоковозбужденных электронных ридберговских состояний. Оптимальная температура для этих реакций около 50-60 эВ. На втором этапе к возбужденным молекулам присоединяются низкоэнергетические электроны. Полученные возбужденные отрицательно заряженные молекулы водорода нестабильны и диссоциируют с образованием отрицательно заряженных атомов водорода [2].

В ЭЦР источниках исследуемого типа уже на ранних этапах исследований было зафиксировано возникновение колец горячих электронов, возникающих вследствие явления циклотронного авторезонанса. Энергичные частицы из этих колец, бомбардируя электроды в плазме, создают вблизи поверхностей электродов слои вторичных низкоэнергетичных электронов. В этих слоях и возникают отрицательные ионы. Максимум распределения вторичных электронов составляет примерно 20 эВ, что значительно превышает оптимальную температуру для реакций ассоциации электронов и высоковозбужденных молекул. В силу этих причин для повышения выхода отрицательных ионов были проведены эксперименты [3], в которых для получения низкотемпературных электронов использовались термоэлектроны вольфрамовых эмиттеров, нагреваемых до 2000 К. Нагрев вольфрамовых термоэмиттеров приводил к увеличению экстракции отрицательных ионов водорода, но оно составляло не более 5%.

Низкая эффективность термоэмиттеров объясняется тем, что они создавали низкоэнергетические электроны в плазменной области, куда поле электродов экстракции практически не проникало. Для создания условий, благоприятствующих генерации отрицательных ионов водорода, дополнительно использовались два дисковых эмиттера из гексаборида лантана LaB_6 (диаметром 4 мм), установленные на стенках плазменной камеры. Выбор LaB_6 в качестве материала для эмиссии электронов связан с низкой работой выхода электронов (2,7эВ), устойчивостью к ионной бомбардировке и долговечностью. Нагрев LaB_6 эмиттеров осуществлялся с их тыльной стороны с помощью вольфрамовой спирали до температуры 1650 К. Термоэлектроны LaB_6 эмиттеров образовывали поток, распространяющийся вдоль магнитных силовых линий в область, расположенную в непосредственной близости от электродов экстракции. Сами электроды погружались в разрядную камеру на глубину 1,2 см, и не находились в непосредственном контакте ни с термоэлектронами, ни с кольцами горячих электронов. Таким образом решалась проблема доставки низкоэнергетичных электронов непосредственно в область экстракции.

Плотность термоэлектронов, рассчитанная для области, близкой к электроду экстракции, соответствовала $5 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}$, что в 5,5 раз больше, чем плотность вторичных электронов от колец горячих электронов[4]. Экспериментальное значение тока отрицательных ионов при этих условиях равнялось 10,2 мА, что в 3,2 раза превышало значение тока при не нагретом эмиттере.

Эксперименты при вариации магнитного поля в резонаторе и изменении положения электродов экстракции показали, что на процесс образования отрицательных ионов водорода термоэлектроны эмиттера оказывают более сильное влияние чем, вторичные электроны. Для дальнейшего увеличения производительности источника следует увеличивать плотность термоэлектронов вблизи электродов экстракции.

Литература

- [1] Dougar-Jabon V.D., Chacon A.J., Umnov A.M., Kariaka V.I. 1999, Phys.Scr. **60**, 250.
- [2] Dougar-Jabon V.D., 2004, Phys.Scr. **69**, 313.
- [3] Дугар-Жабон В.Д., Каряка В.И. ЛІВсероссийская конф. по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники. М. 2115, 233.
- [4] Dugar-Zhabon V.D., Murillo M.T., Karyaka V.I. 2013, Phys.Scr. **88**, 1.

ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОНА В ПОЛЕ МОЩНОГО ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ И ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Никола Маркоски

*Российский университет дружбы народов, г. Москва, РФ, e-mail:
manmacedonia@yahoo.com*

MOTION OF ELECTRON IN THE INTENSE LASER PULSE AND IN THE GUIDING MAGNETIC FIELD

Nikola Markoski

Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, RF

Introduction

Motion of charged particles in a powerful magnetic field in different conditions was studied in the papers [1-4]. The peculiarity of such a radiation is that the ratio of the amplitude of the oscillatory velocity of a particle to the speed of light is not small. Therefore, the conventional method for the expansion of this parameter is not applicable. While describing the laser radiation in the paraxial approximation a small parameter is used - the ratio of the wavelength of the laser field to the narrowing of the Gaussian beam [5]. In [4], the motion of a particle is considered in the field of laser radiation with the help of expansions by this parameter and averaging over the fast phase. The external magnetic field was not taken into account.

In this paper we consider the motion of an electron in the field of high-power pulsed laser radiation propagating along the external magnetic field. Laser radiation is given as Gaussian beam of circular polarization taking into account the modifications of the first approximation [5]. To eliminate the high amplitude, rapidly oscillating terms in the relativistic equations of motion similar to [4] the transverse components of the momentum vector is being transformed in the absence of the cyclotron resonance conditions. An approximate integral of motion was found. Equations, describing the averaged impact on the particle, by a powerful femtosecond pulse were obtained.

Введение

Движение заряженных частиц в поле мощного лазерного излучения в разных условиях рассматривалось в работах [1-4]. Особенность такого излучения состоит в том, что отношение амплитуды осцилляторной скорости частицы к скорости света не является малым. Поэтому обычный метод разложения по этому параметру не применим. При описании лазерного излучения в параксиальном приближении используется малый параметр - отношение длины волны к сужению лазерного гауссова пучка [5]. В работе [4] рассматривалось движение частицы в поле лазерного излучения с помощью разложений по этому параметру и усреднения по быстрой фазе. При этом внешнее магнитное поле не учитывалось.

В данной работе рассматривается движение электрона в поле мощного лазерного импульсного излучения, распространяющегося вдоль внешнего постоянного магнитного поля. Лазерное излучение задается в виде гауссова пучка круговой поляризации с учетом поправок

первого приближения [5]. Для устранения больших быстро осциллирующих членов в релятивистских уравнениях движения аналогично [4] проводится преобразование поперечных компонентов вектора импульса при отсутствии условия циклотронного резонанса. Найден приближенный интеграл движения. Получены уравнения, описывающие усредненное воздействие на частицу мощного импульса фемтосекундной длительности.

1. Векторы поля мощного лазерного излучения

Рассматривается мощное лазерное излучение фемтосекундной длительности, которое в параксиальном приближении [5] задается в виде гауссова пучка с учетом членов первого порядка в разложении по указанному выше малому параметру:

$$\begin{aligned} E_x &= \Phi_0(z, \rho, t) \sin \psi_0 - \Phi_1(z, \rho, t) \sin \psi, \\ E_y &= \Phi_0(z, \rho, t) \cos \psi_0 - \Phi_1(z, \rho, t) \cos \psi, \end{aligned}$$

где амплитуды Φ_0 , Φ_1 и фазы ψ_0 , ψ описываются формулами:

$$\begin{aligned} \Phi_0(z, \sigma, \rho, t) &= f(\sigma) \frac{E_0^0(0)}{\sqrt{1+z^2}} \exp\left[\frac{-\rho^2}{1+z^2}\right] \\ \Phi_1(z, \sigma, \rho, t) &= \frac{\lambda z}{\pi c \Delta t} \frac{E_0^0(0)}{(1+z^2)^{3/2}} f'(\sigma) \sqrt{(1-\rho^2)^2 + z^2} \exp\left[\frac{-\rho^2}{1+z^2}\right] \\ \psi_0 &= \theta + \frac{\rho^2 z}{1+z^2} - \text{arctg}(z) \\ \psi &= \theta + \frac{\rho^2}{1+z^2} - 3\text{arctg}(z) + \text{arctg}\left(\frac{z}{1-\rho^2}\right). \end{aligned}$$

В приведенных формулах введены безразмерные координаты: $z = \frac{z}{z_r}$, $\rho = \frac{r}{a}$, где a - размер фокального пятна, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ - расстояние от оси гауссова пучка, z_r - рэлеевская длина, определяющая его дифракционное расплывание.

Предполагается, что излучение распространяется вдоль оси z , при этом $\theta = (-\omega t + kz)$ является «быстрой» фазой волны. Функция $f(\sigma)$, где $\sigma = \frac{(t - \frac{z}{c})}{\Delta t}$, определяет импульсный характер излучения, Δt - длительность импульса. В данной работе, форма импульса задается в виде [1]:

$$f(\sigma) = \cos^2\left(\frac{\pi\sigma}{2}\right).$$

В нулевом приближении излучение является поперечным, а в первом приближении возникает продольная составляющая электрического поля:

$$E_z^1 = f \left[\frac{1}{k} \left(\frac{\partial E_0}{\partial x} + E_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \right) \cos \psi_0 - \frac{1}{k} \left(\frac{\partial E_0}{\partial y} - E_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \right) \sin \psi_0 \right].$$

Компоненты магнитного поля определяются формулами:

$$\begin{aligned} B_x &= -E_y; \quad B_y = E_x \\ B_z^1 &= f \left[-\frac{1}{k} \left(\frac{\partial E_0}{\partial x} + E_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \right) \cos \psi_0 - \frac{1}{k} \left(\frac{\partial E_0}{\partial y} - E_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \right) \sin \psi_0 \right]. \end{aligned}$$

2. Уравнения движения электрона

Рассматривается движение релятивистского электрона во внешнем постоянном магнитном поле \mathbf{B}_0 , направленном вдоль оси z , и заданном поле лазерного излучения. Стандартные уравнения движения электрона дополняются уравнением для фазы волны:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\omega \left(1 - \frac{v_z}{c}\right).$$

2.1 Поперечное движение электрона

Удобно рассматривать поперечное движение электрона, вводя поперечный импульс частицы в комплексной форме: $p = p_x + ip_y$:

$$\frac{dp}{dt} = -iq \left(1 - \frac{v_z}{c}\right) (\Phi_0 e^{-i\psi_0} - \Phi_1 e^{-i\psi}) + iq \frac{p}{mc\gamma} (B_0 + B_z^1).$$

Это уравнение содержит быстро осциллирующие члены с большой амплитудой, определяемой полем излучения нулевого приближения. В таком случае непосредственно проводить усреднение по быстрой фазе θ нельзя [4]. Чтобы исключить такие члены, аналогично [4] сделаем замену:

$$p = \pi + Ae^{-i\psi_0}.$$

Амплитуда A не должна зависеть от быстрой фазы и должна определяться полем излучения нулевого приближения. Быстро осциллирующие члены с большой амплитудой, пропорциональной Φ_0 , исключаются с использованием соотношения:

$$\left(1 - \frac{v_z}{c}\right) = \frac{G}{\gamma},$$

где γ – релятивистский фактор (безразмерная энергия частицы), а $G \equiv \gamma - \frac{p_z}{mc}$ (p_z -продольная составляющая импульса электрона). Тогда

$$A = \frac{q\bar{G}\bar{\Phi}_0}{\omega_{co} - \omega\bar{G}}.$$

Здесь $\omega_{co} = \frac{qB_0}{mc}$ – классическая циклотронная частота, $\bar{G} = \bar{\gamma} - \frac{\bar{p}_z}{mc}$.

Условия циклотронного резонанса исключаются.

Для выделения циклотронного вращения частицы вводим замену

$$\pi = \pi_{\perp} e^{i\theta_c},$$

где $\pi_{\perp} = \sqrt{\pi_x^2 + \pi_y^2}$, θ_c – фаза циклотронного вращения.

Для получения усредненных уравнений поперечного движения представим импульс в виде:

$$\pi_{\perp} = \Pi_{\perp} + \tilde{\pi}_{\perp}$$

где Π_{\perp} содержит медленное циклотронное вращение, а $\tilde{\pi}_{\perp}$ быстро осциллирующая составляющая, зависящая от быстрой фазы волны. После усреднения получаем:

$$\begin{aligned} \Pi_{\perp} = \Pi_{\perp 0} + \frac{q\bar{G}}{(\omega_{co} - \omega\bar{G})} \left\{ -\frac{q\Phi_0 f}{2mck\omega_{co}} \left[\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial x} + \Phi_0 \frac{\partial\psi_0}{\partial y} \right) \cos\theta_c - \left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial y} - \Phi_0 \frac{\partial\psi_0}{\partial x} \right) \sin\theta_c \right] \right. \\ \left. - \frac{\Phi_0 A(\bar{\mathbf{r}})}{at\omega_{co}(1+z^2)^2} (\bar{x}^0 \sin\theta_c + \bar{y}^0 \cos\theta_c) \right\} + o(\mu^2) \end{aligned}$$

Выражение для $\tilde{\pi}_{\perp}$ имеет сложный вид и здесь не выписывается.

2.2 Продольное движение

После усреднения по быстрой фазе излучения, получаем уравнение для усредненного продольного импульса:

$$\frac{d\bar{p}_z}{dt} = \frac{q^2 \bar{G} \lambda \bar{z} E_0^0(0) \bar{f}(\sigma) \bar{f}'(\sigma) \sqrt{(1 - \bar{\rho}^2)^2 + \bar{z}^2}}{\bar{\gamma} m c^2 (\omega_{co} - \omega \bar{G}) \pi \Delta t (1 + \bar{z}^2)^2} \exp \left[\frac{-2\bar{\rho}^2}{1 + \bar{z}^2} \right] \sin \left[\text{arctg} \left(\frac{\bar{z}}{1 - \bar{\rho}^2} \right) - 2\text{arctg}(\bar{z}) + \frac{\bar{\rho}^2}{1 + \bar{z}^2} (1 - \bar{z}) \right]$$

Правая часть этого уравнения представляет собой силу, действующую на электрон в направлении распространения волны (и направлении внешнего магнитного поля). Эта сила обусловлена импульсным характером излучения: если импульсная функция $\bar{f}(\sigma) = 1$, то в первом приближении никакой силы не возникает.

Заключение

Получены усредненные по фазе волны уравнения движения релятивистского электрона в поле мощного лазерного импульсного излучения, распространяющегося вдоль внешнего постоянного магнитного поля при отсутствии циклотронного резонанса. Показано, что осциллирующие добавки к усредненным компонентам вектора импульса являются величинами второго порядка малости. Показано, что учет поправок первого приближения к поперечным компонентам поля приводит к наличию усредненной силы, действующей на частицу в поле излучения. Без учета этих поправок усредненная сила является эффектом второго приближения.

Благодарность научному руководителю профессору В. П. Милантьеву.

Литература

1. *Quesnel B., Mora P.* // Phys. Rev. E. Vol.58. 1998. P.3719.
2. *Бочкарев С.Г., Бычков В.Ю.* // Квантовая электроника. Т.37. 2007. С.273.
3. *Galkin A.L., Korobkin V.V., Romanovsky M.Yu., Shiryayev O.B.* // Phys. Plasmas. Vol.15. 2008. P.023104.
4. *Милантьев В.П., Кастильо А.Х.* // ЖЭТФ. Т.143. 2013. С. 642.
5. *Милантьев В.П., Карнилович С.П., Шаар Я.Н.* // Квантовая электроника. Т.45. 2015. С.1063
6. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М.: Наука

ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ МЕХАНИЗМА СЕРФОТРОННОГО УСКОРЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ПОЗИТРОНОВ В КОСМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНОЙ

Мкртчян Г.С.¹⁾, Ерохин Н.С.^{1,2)}

THE NUMERICAL MODEL OF THE MECHANISM SURFOTRON ACCELERATION OF RELATIVISTIC POSITRONS IN SPACE PLASMA BY AN ELECTROMAGNETIC WAVE

Mkrtichyan G.S., Erokhin N.S.^{1,2)}

¹⁾ *Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*

²⁾ *Институт космических исследований РАН, Москва, Россия*

e-mail: hay-13@mail.ru

Abstract

There is creating the numerical model of the positrons' surfatron acceleration by an electromagnetic wave; are formulated the optimal conditions for the realization of an ultra relativistic acceleration of positrons by electromagnetic waves in space plasma. As a result of numerical calculations are obtained the asymptotic characteristics of positrons at the hard acceleration. It is shown that the phase plane for the trapped positron trajectory look like a spiral and gradually approach the singular point of the type of stable focus.

Введение

Серфинг зарядов на электромагнитных волнах (см. [1-9]) это эффективный механизм генерации потоков ультррелятивистских частиц электромагнитными волнами в космической плазме. Исследование динамики серфинга частиц на волнах необходимо, в частности, для оценки числа ускоренных частиц, размеров областей ускорения, энергетических спектров. Ясно, что для этого необходим детальный анализ условий захвата заряженных частиц в режим серфотронного ускорения, выявления благоприятных для захвата заряженных частиц параметров, эффективности ускорения частиц при воздействии пространственно локализованных волновых пакетов.

Постановка задачи и результаты численных расчетов

Рассмотрим релятивистские уравнения движения электрона массы m_e в поле электромагнитной волны $E_x = E_0 \cos \Psi$, $\Psi = \omega t - k x$. Внешнее магнитное поле направлено по оси z . Пусть $\beta = v/c$, $\tau = \omega t$ безразмерное время, $\xi = \omega x/c$. Тогда имеем $\Psi = \tau - \xi$, $\beta_p = \omega / c \cdot k$, $\beta_x = \beta_p [1 - d\Psi / d\tau]$. Уравнения движения релятивистского электрона имеют интеграл

$$\begin{aligned} d(\gamma \cdot \beta_x) / d\tau &= \sigma \cdot \cos \Psi + u \cdot \beta_y, & d(\gamma \cdot \beta_y) / d\tau &= -u \cdot \beta_x, & h &= \gamma \cdot \beta_z = \text{const}, \\ d\gamma / d\tau &= \sigma \cdot \beta_x \cdot \cos \Psi \\ J &= \gamma \cdot \beta_y + u \cdot \beta_p \cdot (\tau - \Psi) \end{aligned}$$

Релятивистский фактор равен $\gamma = (1 + h^2 + g^2)^{1/2} / (1 - \beta_x^2)^{1/2}$. В итоге получаем нелинейное уравнение для фазы волны на траектории электрона

$$\Psi_{\tau\tau} + [\sigma \cdot (1 - \beta_x^2) \cdot \cos \Psi] / (\beta_p \cdot \gamma) + (u / \beta_p \cdot \gamma^2) / [J_1 - u \cdot \beta_p \cdot (\tau - \Psi)] = 0. \quad (1)$$

Данное уравнение решается численно, с начальными данными в виде $\Psi(0) = \Psi_0$, $\Psi_\tau(0) = a$; $\beta_x(0) = \beta_p (1 - a)$. На достаточно больших временах ускорения численное решение для электрона должно выходить на асимптотики $\beta_x \approx \beta_p$, $\beta_y \approx -1 / \gamma_p$, $d\gamma / d\tau \approx u \cdot \beta_p \cdot \gamma_p$, $\cos \Psi \approx \sigma_c / \sigma$, $\sigma_c = u \cdot \gamma_p$. Таким образом в асимптотике имеем $\beta_x \cdot \beta_y \approx -\beta_p / \gamma_p < 0$. Итак, для электронов и позитронов асимптотики импульсов вдоль волнового фронта имеют разные знаки, так по фазам: $\cos \Psi_\infty \approx -\sigma_c / \sigma$ для электронов и $\cos \Psi \approx \sigma_c / \sigma$ для позитронов в соответствии со знаками заряда.

Численные расчеты проведены для следующих значениях исходных параметров $u = 0.23$, $\beta_p = 0.37$, $h = 70$, $g(0) = -250$, $a = 0$, $a = d\Psi / d\tau$ при $\tau = 0$. $\Psi(0)$ начальная фаза брадась в интервале $(-3.1 \div 3.1)$ с шагом $\delta\Psi(0) = 0.2$ на временном интервале $\tau < 70\,000$. В данной работе брали $\sigma = 1.6 \sigma_c$,

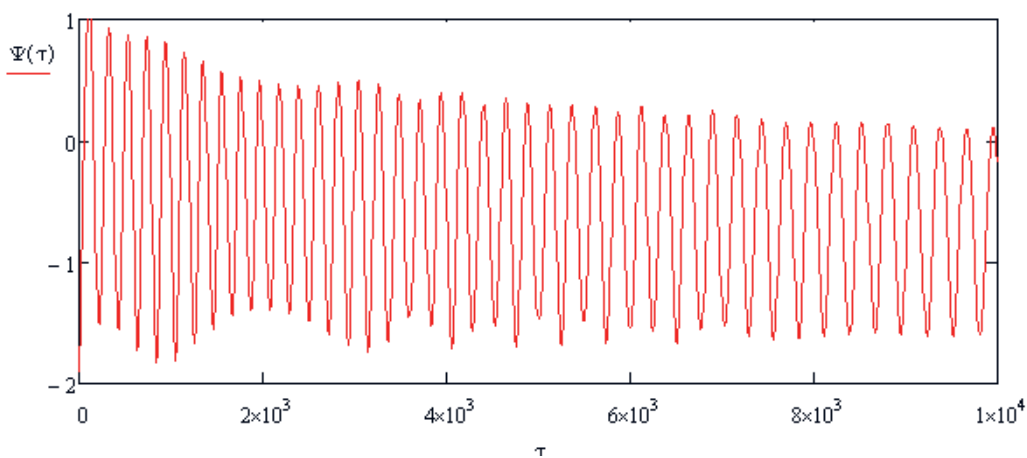


Рис.1. График фазы волны на траектории электрона для $\tau < 70\,000$.

Вначале движение позитрона соответствует сложной структуре потенциальной ямы, а влияние устойчивого фокуса будет на больших временах.

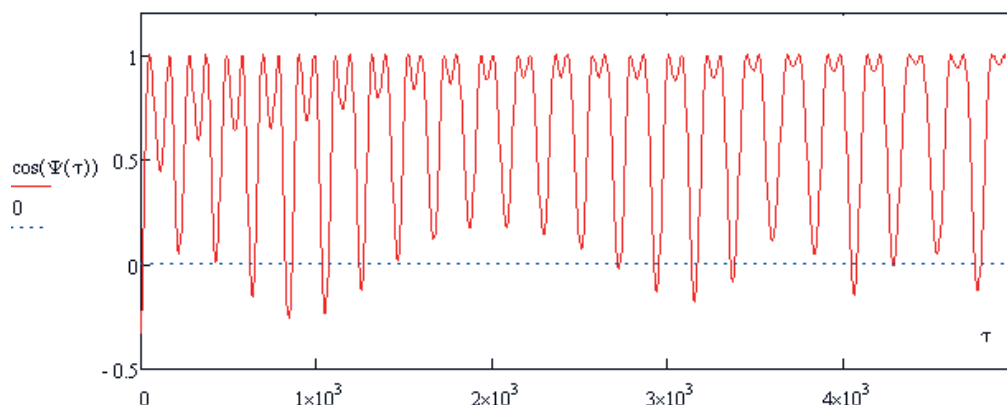


Рис.2. Темп ускорения.

График релятивистского фактора захваченного позитрона дан на рис.3. Релятивистский фактор растет с постоянным темпом.

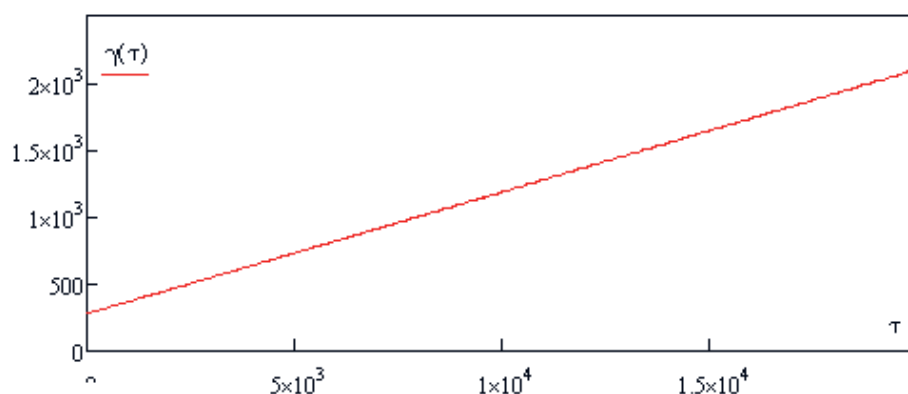


Рис.3. Графики релятивистского фактора.

Заключение

Получены асимптотики характеристик позитрона при сильном ускорении (релятивистского фактора, компонент импульса и скорости захваченной частицы, положение дна эффективной потенциальной ямы и др.). Показано, что на фазовой плоскости для захваченных позитронов траектории имеют вид спирали и постепенно приближаются к особой точке типа устойчивый фокус. Положение дна эффективной нестационарной потенциальной ямы для захваченных позитронов и электронов различно поскольку оно зависит от знака заряда ускоряемой частицы. Для захваченных позитронов графики фазы волны на траектории частицы соответствуют колебаниям с возрастающим периодом и убывающей амплитудой по мере роста энергии частицы. Дно эффективной нестационарной потенциальной

ямы достигается захваченной частицей асимптотически. Таким образом захваченные позитроны с различными начальными фазами волны на их траектории постепенно конденсируются на дно эффективной нестационарной потенциальной ямы.

Важно отметить, что механизм серфотронного ускорения может приводить в сравнительно спокойной космической плазме (в отсутствие взрывных и других кризисных процессов) к возникновению в спектре космических лучей (КЛ) существенных отклонений от стандартных степенных скейлингов. Так в плазме местных (вблизи солнечной системы) межзвездных облаков энергия захваченных волнами частиц может увеличиться на 5-6 порядков величины (при начальной их энергии порядка от десятков ГэВ до ТэВ и более). Следовательно, переброс малой доли частиц КЛ в область гораздо более высоких энергий и вызывает значительные вариации потоков КЛ, например, в области колена с характерными энергиями порядка тысяч ТэВ. В солнечной гелиосфере генерируемые при вспышках потоки частиц с энергиями порядка ГэВ могут доускоряться электромагнитными волнами до энергий в сотни ГэВ – десяток ТэВ.

Литература

- [1]. N. Katsouleas, J.M. Dawson. *Physical Review Letters*. 1983, 51, 392.
- [2]. С. Joshi. *Radiation in plasmas*. 1984, 1, Issue 4, 514.
- [3]. С.В. Буланов, А.С. Сахаров. *Письма в ЖЭТФ*. 1986, 44, Вып. 9, 421.
- [4]. Н.С. Ерохин, А.А. Лазарев, С.С. Моисеев, Р.З. Сагдеев Р.З. *Доклады Академии наук*. 1987, 295, № 4, 849.
- [5]. Н.С. Ерохин, С.С. Моисеев, Р.З. Сагдеев. *Письма в Астрономический журнал*. 1989, 15, № 1, 3.
- [6]. M.E. Dieckmann and P.K. Shukla. *Plasma Physics and Controlled Fusion*. 2006, 48, Issue 10, 1515.
- [7]. А.И. Нейштадт, А.В. Артемьев, Л.М. Зеленый, Д.Л. Вайнштейн. *Письма в ЖЭТФ*. 2009, 89, Вып. 9, 528.
- [8]. В.М. Лозников, Н.С. Ерохин. *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Плазменная электроника*. 2010. № 4 (68), с.121.
- [9]. А.Н. Ерохин, Н.С. Ерохин, В.П. Милантьев. *Физика плазмы*. 2012, 38, № 5, 435.

МГД-УРАВНЕНИЯ ГЛОБАЛЬНЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ АКУСТИЧЕСКИХ МОД В ТОРОИДАЛЬНО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПЛАЗМЕ ТОКАМАКА

Е.А. Сорокина^{1,2}, В.П. Лахин¹, Л.В. Коновальцева²

¹НИЦ "Курчатовский институт", Москва, Россия

²Российский университет дружбы народов, Москва,
Россия

MHD-EQUATIONS FOR GLOBAL GEODESIC ACOUSTIC MODES IN TOROIDALLY ROTATING TOKAMAK PLASMAS

Во многих современных экспериментах на токамаках наблюдаются низкочастотные колебания электрического потенциала плазмы с частотой не зависящей от радиуса плазменного шнура – см., например, [1]. Эти колебания интерпретируются как глобальные геодезические акустические моды (ГГАМ) – собственные моды осесимметричных колебаний в неоднородной тороидальной плазме. Для описания наиболее существенных характеристик низкочастотных волн естественно использовать редуцированные МГД-модели, в которых быстрые магнитозвуковые возмущения исключены из рассмотрения априори. Вместе с тем, плазма в современных токамаках, как правило, вращается, причём скорости её тороидального вращения в экспериментах с дополнительным нагревом могут достигать значительных величин (вплоть до звуковых). В данной работе построена редуцированная МГД-модель, пригодная для описания ГГАМ в токамаке с тороидальным вращением плазмы.

Считаем токамак осесимметричным и при описании равновесия плазмы, вращающейся в тороидальном направлении, используем стандартные цилиндрические координаты $\{R, \varphi, z\}$, при этом $\partial/\partial\varphi = 0$. Для такого равновесия магнитное поле и скорость плазмы определяются выражениями (см., например, [2]):

$$\mathbf{B} = I(\Psi)\nabla\varphi + [\nabla\varphi \times \nabla\Psi], \quad \mathbf{V} = R^2\Omega(\Psi)\nabla\varphi,$$

где Ω — угловая частота тороидального вращения. В дальнейшем предполагаем, что скорость тороидального вращения плазмы порядка или меньше скорости звука c_s , $R\Omega \sim c_s$. Функция $\Psi = \Psi(R, z)$ соответствует полоидальному магнитному потоку и является меткой магнитной поверхности; $I(\Psi)$ характеризует полоидальный ток. Уравнение баланса сил имеет вид

$$\nabla p - \frac{\rho\Omega^2}{2}\nabla R^2 = [\text{rot } \mathbf{B} \times \mathbf{B}], \quad (1)$$

где P — равновесное давление плазмы, ρ — равновесная массовая плотность. Магнитное поле нормировано таким образом, что $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}/\sqrt{4\pi}$.

Аналогично работе [3] будем рассматривать такие равновесия, для которых давление связано с плотностью посредством поверхностной энтропийной функции $\Pi(\Psi)$:

$$p = \rho^\alpha \Pi(\Psi). \quad (2)$$

Для такого класса равновесий из уравнения баланса сил (1) вдоль магнитного поля следует (при $\alpha \neq 1$)

$$\frac{p}{\rho} = \frac{(\alpha - 1) \Omega^2 R^2}{\alpha} + H(\Psi), \quad (3)$$

где введена поверхностная функция $H(\Psi)$, имеющая смысл удельной энтальпии в отсутствие вращения плазмы.

В случае же равновесия с изотермическими магнитными поверхностями, $\alpha = 1$,

$$\rho = \rho_0(\Psi) \exp\left(\frac{\Omega^2 R^2}{2\Pi}\right),$$

где $\rho_0(\Psi)$ — функция магнитной поверхности.

Для описания возмущений стандартным образом вводим смещение плазмы ξ , так что возмущение скорости плазмы \mathbf{V}' записывается в виде

$$\mathbf{V}' = \frac{\partial \xi}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \xi - (\xi \cdot \nabla) \mathbf{V}.$$

Будем рассматривать осесимметричные возмущения с частотой ω , пропорциональные $\exp(-i\omega t)$. Тогда в рамках идеальной МГД-модели плазмы с уравнением состояния в виде адиабаты (с показателем адиабаты γ) смещение плазмы ξ описывается уравнением (см., например, [4])

$$\begin{aligned} & -\rho\omega^2 \xi - 2i\rho\omega[\nabla z \times \xi] + \nabla R^2 \operatorname{div}\left(\frac{\rho\Omega^2}{2}\xi\right) = \\ & = \nabla(\xi \nabla p + \gamma p \operatorname{div} \xi) + \operatorname{rot} \operatorname{rot} [[\xi \times \mathbf{B}] \times \mathbf{B}] + [\operatorname{rot} \mathbf{B} \times \operatorname{rot} [\xi \times \mathbf{B}]]. \end{aligned} \quad (4)$$

Рассматриваем низкочастотные возмущения с частотой $\omega \sim \delta V_A / a$, где a — малый радиус токамака, $V_A = B / \rho^{1/2}$ — альфвеновская скорость, а $\delta \ll 1$ — малый параметр.

Такое предположение позволяет отделить характерные частоты альфвеновских возмущений от быстрых (высокочастотных) магнитозвуковых волн. При этом будем полагать, что для возмущенных величин $\nabla_{\perp} \sim 1/a$, $\nabla_{\parallel} = \mathbf{B} \cdot \nabla / B \sim \delta/a$. Кривизну магнитных силовых линий считаем малой

$$\mathbf{K} \equiv \frac{1}{B} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{B}}{B} = \frac{1}{B^2} \left(\nabla_{\perp} \left(p + \frac{B^2}{2} \right) - \frac{\rho \Omega^2}{2} \nabla_{\perp} R^2 \right) \sim \frac{\delta}{a},$$

что заведомо справедливо для токамака с большим аспектным отношением $a/R_0 \sim \delta$ и давлением плазмы $\beta = 2p/B^2 \sim \delta$ (R_0 — большой радиус токамака). Также полагаем, что градиенты равновесного магнитного поля и кривизны малы $\nabla_{\perp} B \sim \delta B/a$, $\nabla_{\parallel} B \sim \delta^2 B/a$, $\nabla \cdot \mathbf{K} \sim \delta^2/a^2$, но допускаем, что поперечные градиенты остальных равновесных величин могут быть достаточно большими, $\nabla_{\perp} \sim 1/a$. Кроме того, считаем, что по порядку величины поперечные и продольные равновесные плотности токов, $\mathbf{j} \sim \text{rot } \mathbf{B}$, таковы, что $j_{\perp} \sim j_{\parallel} \sim \delta B/a$.

В принятых предположениях из выражения, описывающего возмущение магнитного поля,

$$\mathbf{B}' = \text{rot}[\xi \times \mathbf{B}] = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \xi_{\perp} - (\xi_{\perp} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \mathbf{B} \text{div } \xi_{\perp}, \quad (5)$$

следует оценка для величины возмущенного поперечного магнитного поля $B'_{\perp} \sim \delta(\xi B/a)$. Оценивая члены в поперечных компонентах уравнения (4), можно показать, что $B'_{\parallel} \sim \delta(\xi B/a)$, $\text{div } \xi_{\perp} \sim \text{div } \xi \sim \delta(\xi/a)$, $B B'_{\parallel} - \xi \cdot \nabla p \sim \delta^2(\xi B^2/a)$. С учётом уравнения (5) это означает, что с необходимой для дальнейшего точностью смещение плазмы можно представить в виде

$$\xi = \frac{1}{B^2} [\mathbf{B} \times \nabla \Phi] + \frac{\zeta}{B^2} \mathbf{B}, \quad (6)$$

где ζ/B — продольное смещение плазмы, а Φ — величина, пропорциональная потенциалу электрического поля, $\mathbf{E}_{\perp} = (i\omega/c) \nabla \Phi$ (c — скорость света).

Ограничимся рассмотрением плазмы с низким давлением, $\beta \sim \delta^2$. Помимо этого, будем считать аспектное отношение токамака большим ($a/R_0 \sim \delta$), а магнитные поверхности токамака круглыми с радиусом r , так что $R = R_0 + r \cos \theta$, $z = r \sin \theta$ и $\Psi = \Psi(r)$. При этом величина равновесного магнитного поля $B \approx B_0 R_0 / R$. Тогда из уравнений (2), (3) получаем

$$p = p_0(r) \left(1 + \gamma M^2 \frac{r}{R_0} \cos\theta \right), \quad \rho = \rho_0(r) \left(1 + \frac{\gamma M^2}{\alpha} \frac{r}{R_0} \cos\theta \right),$$

где $p_0(r)$, $\rho_0(r)$ — давление и массовая плотность плазмы в отсутствие вращения, а M — звуковое число Маха: $M^2 = \rho_0 \Omega^2 R_0^2 / \gamma p_0$. Вращение плазмы приводит к полоидальной стратификации плазмы на магнитных поверхностях, которая мала как r/R_0 по сравнению с полными давлением и массовой плотностью плазмы.

Проецируя уравнение (4) на направление равновесного магнитного поля и подставляя выражение для смещения (6), а также учитывая уравнения равновесия, в указанных предположениях получаем

$$\left(\omega^2 + \frac{\omega_s^2}{q^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \zeta = 2 \left(iM\omega\omega_s + \frac{\omega_s^2}{q} \left(1 + \frac{M^2}{2} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \cdot \left(\sin\theta \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right). \quad (7)$$

Второе уравнение получаем, применяя операцию $\text{div} B^{-2} \mathbf{B} \times$ к уравнению (4). Соответствующее уравнение эквивалентно условию квазинейтральности возмущений, $\text{div} \mathbf{j}' = 0$, где $\mathbf{j}' \sim \text{rot} \mathbf{B}'$ — возмущение плотности тока. В результате получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{qR_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \nabla_{\perp}^2 \left(\frac{\Phi}{q} \right) + \text{div} \left\{ \frac{\rho_0}{B_0^2} \left(\omega^2 \nabla_{\perp} \Phi + 2(\cos\theta \nabla r + r \sin\theta \nabla \theta) \cdot \right. \right. \\ & \left. \left. \left[\left(iM\omega\omega_s + \frac{\omega_s^2}{q^2} \left(1 + \frac{M^2}{2} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \zeta + \frac{[\mathbf{B} \times \nabla \Phi]}{R_0 B_0} \left(\omega_s^2 \left(1 + \frac{M^2}{2} \right) \nabla_{\perp} R^2 + \frac{1}{\rho_0} \nabla_{\perp} \left((p - p_0) \left(1 + \frac{\gamma M^2}{2\alpha} \right) \right) \right) \right] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $\omega_s = c_s / R_0 = (\gamma p / \rho)^{1/2} / R_0$ — частота звука, $q = q(r)$ — коэффициент запаса устойчивости токамака, а $\nabla_{\perp} = \nabla r \partial / \partial r + \nabla \theta \partial / \partial \theta$. При выводе уравнений (7), (8) сохранялись лишь ответственные за возникновение ГАМ эффекты, то есть эффекты, обусловленные кривизной магнитных силовых линий и стратификацией плазмы на магнитных поверхностях. Уравнения (7), (8) образуют замкнутую систему уравнений на функции Φ и ζ для описания низкочастотных осесимметричных возмущений в токамаке с тороидальным вращением плазмы.

Подобно [5], будем искать решение этих уравнений в виде собственной геодезической акустической моды. Ограничиваясь конечным числом полоидальных мод, представляем Φ и ζ в виде:

$$\Phi = \Phi_0(r) + \Phi_{2c} \cos 2\theta + i\Phi_{2s} \sin 2\theta, \quad \zeta = \zeta_c \cos \theta + \zeta_s \sin \theta.$$

Такой подход оправдан, если $q^2 c_s^2 / V_A^2 \ll 1$ и $M^2 \leq 1$, что, в частности, обеспечивает $|\Phi_0| \gg |\Phi_{2c}|, |\Phi_{2s}|$. Тогда, исключая ζ с помощью уравнения продольного движения (7), можно получить следующую систему уравнений для Φ_0 , Φ_{2c} и Φ_{2s} :

$$\frac{d}{dr} \left\{ \frac{\rho_0 r}{B_0^2 (\omega^2 - \omega_s^2 / q^2)} \left[D \frac{d\Phi_0}{dr} + \frac{G_c}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \Phi_{2c}) + \frac{1}{\rho f} \left(\omega^2 - \frac{\omega_s^2}{q^2} \right) \Phi_{2c} \frac{df^2}{dr} + \frac{G_s}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \Phi_{2s}) \right] \right\} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{1}{q} \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2 \Phi_{2c}}{q} \right) \right] - \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{2\omega_A^2 r} \frac{G_c}{(\omega^2 - \omega_s^2 / q^2)} \frac{d\Phi_0}{dr} \right) = 0, \quad (10)$$

$$\frac{1}{q} \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2 \Phi_{2s}}{q} \right) \right] - \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{2\omega_A^2 r} \frac{G_s}{(\omega^2 - \omega_s^2 / q^2)} \frac{d\Phi_0}{dr} \right) = 0, \quad (11)$$

где

$$D = \omega^4 - \omega_s^2 \omega^2 \left(2 + \frac{1}{q^2} + 4M^2 + \frac{\gamma M^4}{2\alpha} \right) + \omega_s^4 \frac{\gamma - \alpha}{\alpha} \frac{M^4}{2q^2},$$

$$G_c = \frac{1}{2} \left(\omega^2 \left(\omega^2 - \frac{\omega_s^2}{q^2} \right) - D \right), \quad G_s = \frac{2M\omega\omega_s^3}{q} \left(1 + \frac{M^2}{2} \right), \quad f = \rho\omega_s^2 \frac{M^2}{2} \left(1 + \frac{\gamma M^2}{2\alpha} \right), \quad \omega_A = \frac{V_A}{R_0}.$$

При выводе (10), (11) мы заведомо предполагали $(\omega^2 - \omega_s^2 / q^2) \sim \omega_s^2$.

В пренебрежении вторыми полоидальными гармониками потенциала Φ , т.е. при $(\Phi_{2c}, \Phi_{2s}) = 0$, уравнение (9) описывает непрерывный спектр ГАМ, который определяется уравнением $D = 0$ и был ранее получен в таком виде в работе [3]:

$$\omega^2 = \frac{\omega_s^2}{2} \left\{ 2 + \frac{1}{q^2} + 4M^2 + \frac{\gamma M^4}{2\alpha} \pm \left[\left(2 + \frac{1}{q^2} + 4M^2 + \frac{\gamma M^4}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\gamma - \alpha}{\alpha} \frac{2M^4}{q^2} \right]^{1/2} \right\}. \quad (12)$$

Высокочастотная ветка (12) соответствует геодезическим акустическим модам и в отсутствие вращения переходит в стандартное дисперсионное соотношение ГАМ: $\omega_{geo}^2 = \omega_s^2 (2 + 1/q^2)$; низкочастотная ветка отвечает зональным течениям, частота которых в статическом равновесии равна нулю. Очевидно, что низкочастотная ветвь спектра неустойчива при $\alpha > \gamma$. Механизм этой неустойчивости связан с полоидальной стратификацией плазмы на магнитных поверхностях [6].

Как было показано ранее [5], для равновесий плазмы без вращения тороидальное зацепление ГАМ с электромагнитными возмущениями с $m = 2$ делает возможным существование собственной моды в виде ГГАМ. Представляется, что аналогичный эффект будет иметь место и в рассматриваемой проблеме ГАМ в плазме с тороидальным вращением. В работе [7] на основании уравнений (9) — (11) для "итэроподобного" профиля коэффициента запаса устойчивости были получены интегральные условия существования собственной геодезической акустической моды в плазме с тороидальным вращением. В общем случае уравнения (9) — (11) могут быть использованы как для последующего аналитического рассмотрения ГГАМ, так и в численных кодах.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A.V. Melnikov et. al. // Nucl. Fusion. 2015. V. 55. P. 063001.
- [2] В.И. Ильгисонис, Ю.И. Поздняков // Физика плазмы. 2002. Т. 28. С. 99.
- [3] J.W. Haverkort, H.J. de Blank, B. Koren // J. Comp. Phys. 2012. V. 231. P. 981.
- [4] B. van der Holst, A.J.C. Beliën, J.P. Goedbloed // Phys. Plasmas. 2000. V. 7. P. 4208.
- [5] В.И. Ильгисонис, Л.В. Коновальцева, В.П. Лахин, Е.А. Сорокина // Физика плазмы. 2014. Т. 40. С. 955.
- [6] V.P. Lakhin, V.I. Ilgisonis, A.I. Smolyakov // Phys. Lett. A. 2010. V. 374. P. 4872.
- [7] В.П. Лахин, Е.А. Сорокина, В.И. Ильгисонис, Л.В. Коновальцева, // Физика плазмы. 2015. Т. 41. С. 1054.

О СОХРАНЕНИИ ФАЗОВОГО ОБЪЁМА ПРИ ДВИЖЕНИИ ВЕДУЩЕГО ЦЕНТРА В СИЛЬНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ.

Н.А. Марусов^{1),2)}, Е.А. Сорокина^{1),3)}

¹⁾НИЦ "Курчатовский институт", Москва, Россия

²⁾Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия

³⁾Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Аннотация

В настоящей работе получена полная система дрейфовых уравнений, обобщенная на случай сильного электрического поля. Показано, что интегралы движения в такой системе возможно получить лишь в ограниченном классе рассматриваемых полей. Получены поправки второго порядка к уравнениям на компоненты скорости частицы, благодаря которым выполняется условие сохранения фазового объема.

Уравнение движения ведущего центра в сильном электрическом поле, скорость электрического дрейфа в котором сопоставима по величине с полной скоростью частицы, имеет вид [1,2]:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}_d}{dt} = & \left(v_{\parallel} + \frac{u_{\perp}^2}{2\Omega} (\mathbf{b} \cdot \text{rot } \mathbf{b}) \right) \mathbf{b} + \mathbf{V}_E + \frac{u_{\perp}^2}{2\Omega} \left[\mathbf{b} \times \frac{\nabla B}{B} \right] + \frac{v_{\parallel}^2}{\Omega} [\mathbf{b} \times (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b}] + \frac{c}{\Omega B} \dot{\mathbf{E}}_{\perp} \\ & + \frac{v_{\parallel}}{\Omega} \left([\mathbf{b} \times (\mathbf{V}_E \cdot \nabla) \mathbf{b}] - c \frac{\mathbf{E}_{\perp}}{B^2} (\mathbf{b} \cdot \nabla B) \right) - \frac{c \mathbf{E}_{\perp}}{\Omega B^2} (\mathbf{V}_E \cdot \nabla B), \end{aligned} \quad (1)$$

где \mathbf{V} и \mathbf{E} – напряженности магнитного и электрического полей, $\mathbf{b} = \mathbf{V}/B$, $\Omega = -(Ze/mc)\mathbf{V}$ – циклотронная частота, $\mathbf{V}_E = (c/B^2)[\mathbf{E} \times \mathbf{V}]$ – скорость электрического дрейфа, $\mathbf{u}_{\perp} = \mathbf{v}_{\perp} - \mathbf{V}_E$; v_{\parallel} и v_{\perp} – компоненты скорости вдоль и поперек силовых линий магнитного поля соответственно; точкой обозначена полная производная по времени t .

Для замыкания системы дрейфовых уравнений, необходимо также получить уравнения для продольной и поперечной компонент скорости частицы, которые с точностью до членов первого порядка малости имеют вид:

$$\frac{dv_{\parallel}}{dt} = \frac{Ze}{m} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{E}) + \frac{u_{\perp}^2}{2} \text{div } \mathbf{b} + \left(\mathbf{b} \cdot \frac{d\mathbf{V}_E}{dt} \right), \quad (2)$$

$$\frac{du_{\perp}}{dt} = -\frac{v_{\parallel} u_{\perp}}{2} \text{div } \mathbf{b} - \frac{u_{\perp}}{2} (\text{div } \mathbf{V}_E - \mathbf{b} \cdot (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{V}_E). \quad (3)$$

При выводе (2), (3) в качестве малого параметра, как и в стандартной дрейфовой теории, используется слабая неоднородность электромагнитного поля на ларморовской длине. Уравнения (2) и (3) в *стандартной дрейфовой теории* лишены слагаемых с \mathbf{V}_E в правых частях, и могут быть заменены *интегралами движения: энергией и магнитным моментом* соответственно [1,3]. Однако в случае сильного электрического поля это возможно сделать лишь при условии $\mathbf{b} \cdot \text{rot } \mathbf{b} = 0$, то есть в отсутствие продольного тока.

Известно, что уравнения стандартной дрейфовой теории обладают гамильтоновой структурой и, как следствие, сохраняют фазовый объем [4]. В пятимерном пространстве $\{\dot{\mathbf{r}}_d, v_{\parallel}, u_{\perp}^2\}$ это эквивалентно выполнению дифференциального тождества [3]:

$$\text{div}_r \dot{\mathbf{r}}_d + \frac{\partial \dot{v}_{\parallel}}{\partial v_{\parallel}} + \frac{\partial \dot{u}_{\perp}^2}{\partial u_{\perp}^2} = 0. \quad (4)$$

Легко убедиться, что модифицированная система дрейфовых уравнений (1) – (3) не удовлетворяет такому тождеству. Очевидно, что для выполнения (4) в правой части (2), (3) должны содержаться члены на порядок малости выше, чем в правой части уравнения (1). Соответствующие уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{dv_{\parallel}}{dt} = & \frac{Ze}{m} (\mathbf{bE}) + \frac{u_{\perp}^2}{2} \operatorname{div} \mathbf{b} + v_{\parallel} c \frac{\mathbf{E}}{B} [\mathbf{b} \times (\mathbf{b} \nabla) \mathbf{b}] - \frac{v_{\parallel} u_{\perp}^2}{2\Omega} \frac{\nabla B}{B} [\mathbf{b} \times (\mathbf{b} \nabla) \mathbf{b}] - \frac{v_{\parallel} u_{\perp}^2}{2\Omega} \mathbf{b} \\
 & \cdot \operatorname{rot} (\mathbf{b} \nabla) \mathbf{b} + \mathbf{V}_E \cdot (\mathbf{V}_E \nabla) \mathbf{b} - \frac{u_{\perp}^2}{\Omega} \frac{\nabla B}{B} [\mathbf{b} \times (\mathbf{V}_E \nabla) \mathbf{b}] - \frac{c\mathbf{E}}{\Omega B} [\mathbf{b} \times \dot{\mathbf{v}}] (\mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{b}) \\
 & - \frac{1}{\Omega} \{ \mathbf{b} \cdot [\dot{\mathbf{b}} \times \dot{\mathbf{V}}_E] + \mathbf{b} \cdot [(\mathbf{V}_E \nabla) \mathbf{b} \times \dot{\mathbf{V}}_E] \} + \frac{v_{\parallel}^2 + u_{\perp}^2}{\Omega} \mathbf{b} \cdot [(\mathbf{b} \nabla) \mathbf{b} \times (\mathbf{V}_E \nabla) \mathbf{b}] \\
 & - \frac{u_{\perp}^2}{2\Omega} \mathbf{b} \cdot \operatorname{rot} (\mathbf{V}_E \nabla) \mathbf{b} \\
 & + \frac{u_{\perp}^2}{4\Omega} \{ (\operatorname{div} \mathbf{V}_E - \mathbf{b} \cdot (\mathbf{b} \nabla) \mathbf{V}_E) (\mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{b}) - (\mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{V}_E) \operatorname{div} \mathbf{b} \},
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{du_{\perp}}{dt} = & -\frac{v_{\parallel} u_{\perp}}{2} \operatorname{div} \mathbf{b} + \frac{v_{\parallel}^2 u_{\perp}}{2\Omega} \frac{\nabla B}{B} [\mathbf{b} \times (\mathbf{b} \nabla) \mathbf{b}] + \frac{v_{\parallel}^2 u_{\perp}}{2\Omega} \mathbf{b} \cdot \operatorname{rot} (\mathbf{b} \nabla) \mathbf{b} \\
 & + \frac{u_{\perp}}{2\Omega} \frac{\nabla B}{B} \{ [\mathbf{b} \times \dot{\mathbf{V}}_E] + v_{\parallel} [\mathbf{b} \times (\mathbf{V}_E \nabla) \mathbf{b}] \} \\
 & + \frac{u_{\perp} c \mathbf{E}}{2\Omega B} \{ [\mathbf{b} \times \dot{\mathbf{b}}] + [\mathbf{b} \times (\mathbf{b} \nabla) \mathbf{V}_E] \} (\mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{b}) \\
 & - \frac{u_{\perp}}{2\Omega} \{ 3v_{\parallel} \mathbf{b} \cdot [(\mathbf{b} \nabla) \mathbf{b} \times (\mathbf{V}_E \nabla) \mathbf{b}] - v_{\parallel} \mathbf{b} \cdot [(\mathbf{b} \nabla) \mathbf{b} \times (\mathbf{b} \nabla) \mathbf{V}_E] + 2\mathbf{b} \\
 & \cdot [(\mathbf{b} \nabla) \mathbf{V}_E \times (\mathbf{V}_E \nabla) \mathbf{b}] \} + \frac{u_{\perp}}{2\Omega} \{ \mathbf{b} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{V}}_E + v_{\parallel} \mathbf{b} \cdot \operatorname{rot} (\mathbf{V}_E \nabla) \mathbf{b} \} \\
 & - \frac{u_{\perp}}{2} (\operatorname{div} \mathbf{V}_E - \mathbf{b} \cdot (\mathbf{b} \nabla) \mathbf{V}_E) - \frac{u_{\perp}}{2\Omega} (\mathbf{b} \dot{\mathbf{v}}) (\mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{b}).
 \end{aligned} \tag{6}$$

Уравнения (5), (6) совместно с уравнением (1) образуют замкнутую систему дрейфовых уравнений движения заряженной частицы в сильном электрическом поле, сохраняющую фазовый объем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Морозов А.Н., Соловьев Л.С. Вопросы теории плазмы, вып. 2 / под ред. акад. М.А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1963, с. 177-258
2. В.И. Ильгисонис. Классические задачи физики горячей плазмы. – М.: Издательский дом МЭИ, 2016. – 319 с.
3. Сивухин Д.В. Вопросы теории плазмы, вып. 1 / под ред. акад. М.А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1963, с. 7-97
4. Littlejohn R. G. // Physica Scripta. Vol. T2/1, 119-125, 1982

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОХОЖДЕНИЯ ВНУТРЕННИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН С МАЛЫМИ ВЕРТИКАЛЬНЫМИ ДЛИНАМИ ВОЛН В ИОНОСФЕРУ

Суслов А.И.¹⁾, Ерохин Н.С.^{1,2)}

THE PROPAGATION OF SHORT WAVELENGTH IGW IN THE IONOSPHERE

Suslov A.I.¹⁾, Erokhin N.S.^{1,2)}

¹⁾ Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

²⁾ Институт космических исследований РАН, Москва, Россия

e-mail: chench0@yandex.ru

Abstract

On the basis of numerical calculations it is considered the interaction of internal gravity waves (IGW) having the short vertical wavelength with vertically inhomogeneous zonal winds in the atmosphere under IGW propagation to the ionospheric plasma. The possibility for IGW passage up to the ionospheric altitudes are analyzed. It has been shown that IGW having small enough vertical wavelength can't propagate to the ionospheric plasma altitudes due to the presence of vertical reflection layers and the critical one appearing due to the zonal winds with large enough velocity maximum magnitude. Thus the vertical reflection layers and the critical one are blocking the IGW propagation to the ionospheric altitudes. So the generation of ionospheric plasma perturbations by short vertical wavelength IGW is absent. Thus the appearance of indicators of tropospheric crisis processes in ionospheric plasma due to short wavelength IGW is becomes impossible.

Содержание работы

На основе численных расчетов лучевых траекторий рассмотрено прохождение коротковолновых внутренних гравитационных волн (ВГВ) из тропосферы через вертикально неоднородные ветровые структуры до ионосферных высот. ВГВ могут возбуждаться в тропосфере за счет разнообразных процессов, например, кризисных явлений, включая сейсмическую активность. При достижении ионосферных высот ВГВ могут значительно усилиться по амплитуде вследствие существенного снижения плотности нейтральной составляющей среды. В результате на ионосферных высотах будут возникать предвестники и индикаторы как сейсмических событий, так и других кризисных явлений в приземной атмосфере.

Для ряда вариантов выбора параметров ВГВ и ветровых структур изучены особенности лучевых траекторий, связанные с возникновением на трассе распространения ВГВ слоев горизонтального и вертикального отражений волн, а также критического слоя, в окрестности которого происходит сильное уменьшение вертикальной компоненты групповой скорости ВГВ за счет роста вертикальной компоненты волнового вектора, а также резко возрастает поглощение волны за счет вязкости.

Показано, что для коротковолновых внутренних гравитационных волн невозможно их прохождение из тропосферы до ионосферных высот, которому препятствуют слои вертикального отражения и критические слои, возникающие при достаточно большой скорости ветрового потока. Для конкретного вертикального профиля скорости ветра и частоты Вайсяля-Брента вычислены характерные значения длин волн ВГВ, при которых

блокируется прохождение ВГВ в ионосферную плазму, величины горизонтального смещения ВГВ по достижении ими слоев вертикального отражения и критического слоя.

Исследование процессов генерации возмущений ионосферной плазмы за счет кризисных процессов в тропосфере относится к числу актуальных задач и представляет большой интерес, в частности, для наблюдений индикаторов и предвестников кризисных атмосферных явлений спутниковой аппаратурой, корректной интерпретации данных наблюдений возмущений ионосферной плазмы.

При исследовании распространения ВГВ в неоднородной атмосфере с зональным ветром анализ проще проводить на основе метода лучевых траекторий для групповой скорости ВГВ при заданных вертикальных профилях частоты Вьяйсяля-Брента и зонального потока.

Уравнения для лучевых траекторий волнового пакета в неоднородной среде имеют вид (см., например, [Госсард, Хук, 1978; Миропольский, 1981])

$$d\mathbf{r} / dt = \mathbf{v}_g, \quad d\mathbf{k} / dt = -\partial \omega / \partial \mathbf{r}.$$

Здесь $\mathbf{v}_g = \partial \omega / \partial \mathbf{k}$ – групповая скорость; $\omega(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = k_x U(z) + N(z) k_h / k$ частота ВГВ с учетом доплеровского сдвига, где $k_h = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$ горизонтальная компонента волнового вектора. Как показывают расчеты, прохождение ВГВ в ионосферу имеет место для достаточно крупномасштабных волн, когда выполняется условие $k_h \ll k_z$.

Для удобства анализа введем безразмерные переменные $z = L_z \xi$, $x = L_x \eta$, $y = L_y \zeta$, где $L_z = 1$ км, $L_x = L_y = 5$ км. Для скорости ветра запишем $U(z) = u(\xi)$ м/с. Частоту Вьяйсяля-Брента нормируем на характерную величину $N(z) = \mu(\xi) / 50$ с. Вводим безразмерные волновые числа $k_x = q_x / 5$ км, $k_y = q_y / 5$ км, $k_z = q_z / 1$ км и безразмерное время $\tau = t / 250$ с.

Теперь уравнения для лучевых траекторий принимают вид

$$d\xi / d\tau = -(\mu q_h q_z) / p^3, \quad p = \left[q_z^2 + (q_h / 5)^2 \right]^{1/2}; \quad d\eta / d\tau = (\mu q_z^2 q_x) / p^3 q_h + u(\xi) / 20;$$

$$d\zeta / d\tau = (\mu q_z^2 q_y) / p^3 q_h;$$

$$dq_z / d\tau = -(q_x / 20)(du / d\xi) - (q_h / p)(d\mu / d\xi).$$

Следует отметить, что для распространяющейся вверх ВГВ следует полагать $q_z < 0$, поскольку по вертикали компоненты фазовой и групповой скоростей направлены противоположно. Интеграл движения для системы уравнений выше (несущая частота пакета) запишем следующим образом:

$$\varepsilon = (q_x u / 20) + \mu q_h / p = \omega 250 c = T_0 / T_\omega,$$

где $T_0 = 500\pi$ с ≈ 26 мин 10 с, причем $T_\omega = T_0 / \varepsilon$ – период ВГВ. Величина интеграла ε определяется начальными значениями входящих в него функций ($\varepsilon = \text{const}$). Отметим также, что горизонтальные и вертикальная длины ВГВ равны: $\lambda_x = 10\pi$ (км) / q_x , $\lambda_y = 10\pi$ (км) / q_y , $\lambda_z = 2\pi$ (км) / q_z .

Отметим главные качественные особенности взаимодействия ВГВ с фоновой ветровой структурой. Прежде всего, при попутном относительно ветра распространении волны на некоторых высотах могут возникать критические слои z_c . В окрестности критического слоя в рассматриваемой модели вертикальная длина волны стремится к нулю, т.е. имеем $q_z^2 \rightarrow \infty$. Следовательно, групповая скорость волнового пакета также стремится к нулю, соответственно ВГВ неограниченно замедляется и полностью поглощается в критическом слое за счет вязкости. Таким образом, критические слои z_c блокируют распространение ВГВ на ионосферные высоты. При $q_z \rightarrow \infty$ критическая скорость потока равна $u_c = 20 \varepsilon / q_x$, т.е. $U = \omega / k_x$. Поскольку волна распространяется в попутном к ветру направлении u_c определяется значениями интеграла ε и компоненты волнового вектора q_x .

Таким образом, если максимальная скорость потока $u_{\max} > u_c$, то в ветровой структуре на некоторой высоте имеется критический слой.

При встречном к ветру распространении ВГВ могут существовать слои горизонтального и вертикального отражений. Отражение по горизонтальному направлению x происходит в некотором слое ξ_{rx} , где горизонтальная групповая скорость пакета равна нулю, т.е. $v_{gx} = 0$. Это дает условие: $[u(\xi_{rx}) / 20] + \{\mu(\xi_{rx}) q_x [q_z(\xi_{rx})]^2 / q_h p(\xi_{rx})^3\} = 0$.

Условие горизонтального (по оси x) отражения ВГВ встречным ветровым потоком можно записать в виде $u(\xi) = u_{rx}(\xi)$. Графически слои горизонтального отражения ВГВ встречным ветром z_{rx} (т.е. ξ_{rx}) определяются точками пересечения кривых $u(\xi)$ и $u_{rx}(\xi)$. В слоях ξ_{rx} происходит отражение пакета ВГВ назад, к источнику их генерации.

Слои вертикального отражения пакета ВГВ встречным ветром z_{rz} соответствуют условию $v_{gz} = 0$, т.е. $q_z(z) = 0$. На этом вертикальном уровне имеем $\varepsilon = 5 \mu(\xi_{rz}) + [q_x u(\xi_{rz}) / 20]$. Вводя функцию $u_{rz}(\xi) \equiv 20 [\varepsilon - 5 \mu(\xi)] / q_x$, находим, слои вертикального отражения ВГВ фоновой ветровой структурой z_{rz} как точки пересечения ξ_{rz} кривой $u(\xi)$ с кривой $u_{rz}(\xi)$. Отметим, что выполняется условие $u_{rz}(\xi) < u_c$. В слоях ξ_{rz} происходит отражение пакета ВГВ вниз. Таким образом аналогично критическим уровням ξ_c эти слои также препятствуют прохождению ВГВ на ионосферные высоты. Один из вариантов расчетов с $q_z(0) = -8$, $q_x = q_y = 2$ дан на рис.1, где по вертикали скорости в м/сек, а по горизонтали z в км.

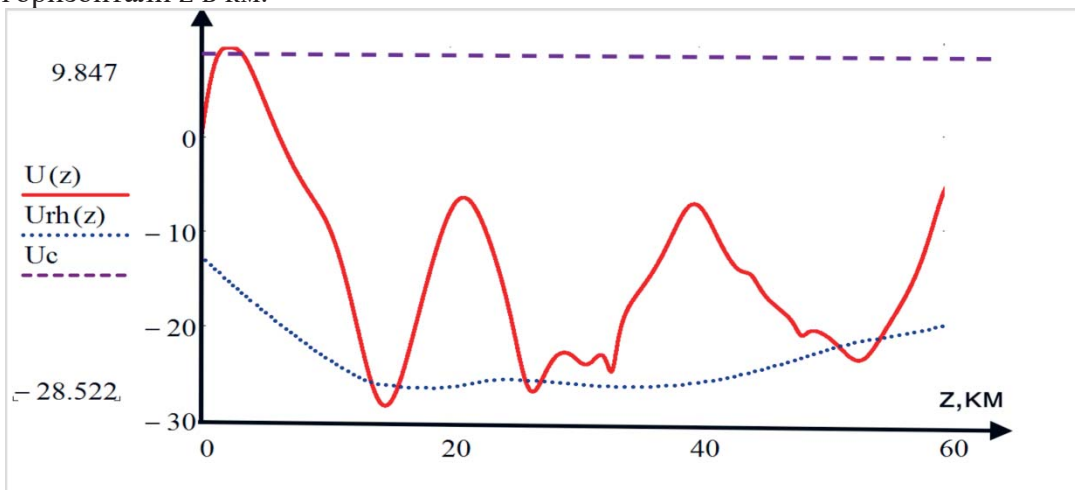
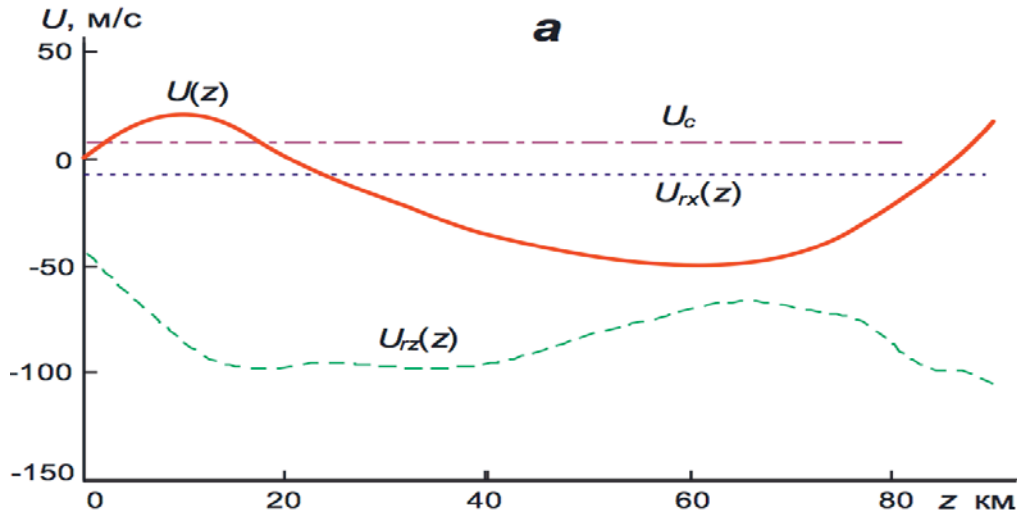
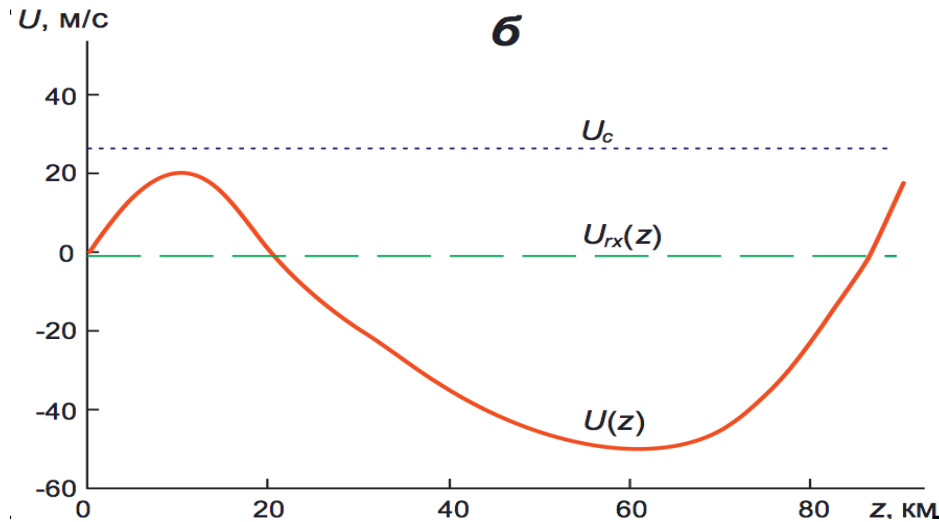


Рис.1. Профили скоростей $U(z)$, $U_{rh}(z)$.

В данном варианте параметров задачи критических слоев нет, но имеются 4 слоя горизонтального отражения.

Рис.2а. Графики скоростей $U(z)$, $U_{rz}(x)$.

В этом варианте имеются два слоя горизонтального отражения (рис.2а) на высотах $z \sim 24$ км, $z \sim 83$ км. Слоев вертикального отражения нет, но есть критические слои. Другой вариант компонент волнового вектора $q_z(0) = -8$, $q_x = q_y = 4$ и профиля скорости ветра дан на рис.2б графиками $U(z)$, $U_{rz}(x)$. Здесь есть два слоя горизонтального отражения при $z \sim 23$ км, $z \sim 89$ км.

Рис.2б. Вертикальные профили скоростей $U(z)$, $U_{rz}(x)$.

Заключение

На основе лучевых траекторий проведен анализ ряда вариантов распространения ВГВ из приземной атмосферы до ионосферных высот в случае коротковолновых ВГВ. Показано, что возникают слои вертикального отражения и критические слои, блокирующие прохождение ВГВ на ионосферные высоты. Это нужно учитывать при проведении экспериментов по регистрации ионосферных откликов, создаваемых в ионосферной плазме приходящими из тропосферы ВГВ и для корректной интерпретации данных наблюдений ионосферных откликов на тропосферные возмущения. Данное исследование будет продолжено в последующих работах для широкого набора характерных параметров задачи.

СЕРФОТРОННОЕ УСКОРЕНИЕ ЯДЕР ГЕЛИЯ В КОСМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЕ ПРИ НИЗКОЙ ФАЗОВОЙ СКОРОСТИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

Ерохин А.Н.¹⁾, Зольникова Н.Н.²⁾, Ерохин Н.С.^{1,2)}, Михайловская Л.А.²⁾

THE SURFATRON ACCELERATION OF HELIUM NUCLEUSES IN SPACE PLASMA FOR LOW PHASE VELOCITY OF ELECTROMAGNETIC WAVE

Erokhin A.N.¹⁾, Zolnikova N.N.²⁾, Erokhin N.S.^{1,2)}, Mikhailovskaya L.A.²⁾

¹⁾ *Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*

²⁾ *Институт космических исследований РАН, Москва, Россия*

e-mail: benkatz2x2@gmail.com

Abstract

On the basis of numerical calculations it is considered ultrarelativistic acceleration of helium nucleuses in space plasma by the electromagnetic wave with low phase velocity propagating across the external magnetic field. The efficiency of particles acceleration is studied and favourable for strong acceleration initial data, for example, the values of initial wave phase at the particle trajectory are considered. According to numerical calculations it was founded that about 29 % of initial wave phase at the particle trajectory are favourable for particles trapping by wave into the regime of strong surfatron acceleration at the initial time.

Введение

Исследование механизмов генерации потоков ультрарелятивистских частиц входит в число актуальных задач современной физики космической плазмы. В частности, это важно для проблемы происхождения космических лучей (КЛ) включая динамику формирования спектров КЛ, возникновение вариаций потоков КЛ в зависимости от характеристик космической погоды и др. Ранее серфотронное ускорение зарядов электромагнитными волнами рассматривалось, например, в работах [1-11]. В частности, было показано, что серфинг зарядов на электромагнитных волнах является весьма эффективным механизмом генерации потоков ультрарелятивистских частиц в относительно спокойной космической плазме с энергиями ускоренных частиц ($1\div 10^6$) ГэВ и более. Исследование серфинга зарядов на электромагнитных волнах необходимо, например, для оценки числа ультрарелятивистских ускоренных частиц, характерных размеров области ускорения, энергетических спектров и их вариаций, что требует весьма большого объема численных расчетов условий захвата заряженных частиц в режим серфотронного ускорения, выявления благоприятных для захвата заряженных частиц волнами параметров, анализа эффективности ускорения частиц при воздействии пространственно локализованных волновых пакетов и т.д. Отметим, что при поперечном распространении (относительно внешнего магнитного поля) электромагнитной волны р-поляризации для квадрата показателя преломления плазмы $N^2 = (c k / \omega)^2$ на частоте верхнего гибридного резонанса ω используем следующее выражение: $N^2 = 1 - [v(1-v)] / (1 - u^2 - v)$, где $u = \omega_{He} / \omega$, $v = (\omega_{pe} / \omega)^2$, $\omega_{He} = eH_0 / m_e c$ – циклотронная нерелятивистских электронов плазмы, H_0 внешнее магнитное поле, $\omega_{pe} = (4\pi e^2 n_0 / m_e)^{1/2}$ – электронная ленгмюровская частота этих электронов, n_0 плотность плазмы.

В настоящей работе рассматривается случай $u^2 \ll 1$, когда фазовая скорость электромагнитной волны меньше скорости света в вакууме для следующей области безразмерной плотности плазмы $v : 1 - u^2 < v < 1$, что соответствует частотам верхнего гибридного резонанса. Захват в режим серфинга происходит при амплитуде поля волны E_0 выше критического значения т.е. для $\sigma \equiv e E_0 / m_e c \omega > \sigma_c = u / \gamma_p = u / (1 - \beta_p^2)^{1/2}$, $\beta_p = \omega / c k$. Необходимо отметить, что нелинейные эффекты взаимодействия ускоряющей волны с плазмой малы, если амплитуда E_0 существенно ниже характерного поля релятивистской нелинейности т.е. для $\sigma^2 \ll 1$.

Постановка задачи и результаты численных расчетов

Рассмотрим релятивистские уравнения движения ядра гелия с массой M в поле электромагнитной волны $E_x = E_0 \cos \Psi$, где $\Psi = \omega t - k x$. При численных расчетах серфинга задачу упростим пренебрегая вихревыми компонентами волновых полей E_y, H_z . Ранее расчеты показали, что их учет не существен. Введем безразмерные величины $\beta = v/c$, $\tau = \varepsilon \omega t$, параметр $\varepsilon = (Z m_e / M)^{1/2}$, $Z = 2$, $\xi = \omega x / c$. Тогда имеем $\beta_x = \beta_p (1 - \varepsilon d\Psi / d\tau)$. Уравнения движения ядра гелия имеют интегралы $h = \gamma \beta_z = \text{const}$, $J = \gamma \beta_y + \varepsilon u \beta_p \cdot (\tau - \varepsilon \Psi) = \text{const}$ т.е. $\gamma \beta_y = J - u \varepsilon \beta_p (\tau - \varepsilon \Psi)$. С учетом интегралов движения релятивистский фактор ядра гелия γ вычисляется по формуле $\gamma = \{1 + h^2 + [J + \varepsilon u \beta_p \cdot (\varepsilon \Psi - \tau)]^2\}^{1/2} / [1 - \beta_p^2 (1 - \varepsilon d\Psi / d\tau)^2]^{1/2}$.

В результате для фазы волны на траектории ядра гелия получаем нелинейное, нестационарное уравнение

$$d^2 \Psi / d\tau^2 + (\sigma \beta_x \cdot \cos \Psi) / (\beta_p \gamma) + u \beta_y / (\beta_p \gamma^2) = 0, \quad (1)$$

Нелинейное уравнение (1) решалось численно с начальными данными в виде $\Psi(0) = \Psi_0$, $\varepsilon \Psi_\tau(0) = a$. При этом $\beta_x(0) = \beta_p (1 - a)$, где параметр a должен удовлетворять условию $1 - (1 / \beta_p) < a < 1 + 1 / \beta_p$. При захвате ядра гелия волной в эффективную потенциальную яму на достаточно больших временах ускорения численное решение должно выходить на асимптотики $\beta_x \approx \beta_p$, $\beta_y \approx -1 / \gamma_p$, $d\gamma / d\tau \approx u \beta_p \gamma_p$. Как видим, темп роста энергии ускоряемой частицы не зависит от амплитуды поля волны E_0 , определяющей параметр среднего темпа ускорения $\langle \cos \Psi(\tau) \rangle \approx \sigma_c / \sigma$ т.е. асимптотику положения дна эффективной потенциальной ямы, которое для захваченной частицы на фазовой плоскости является особой точкой типа устойчивый фокус. Следует отметить, что благоприятным для серфот-ронного ускорения ядер гелия является отрицательный знак начального значения компоненты импульса $\gamma(0)\beta_y(0)$. Для нахождения диапазона начальных фаз $\Psi(0)$, при которых происходит захват ядра гелия сразу в режим ультрарелятивистского ускорения волной (благоприятные фазы), фиксировалась фазовая скорость волны β_p , полагалось $|\Psi(0)| < \pi$. Безразмерная амплитуда волны σ выбиралась несколько выше порогового значения σ_c : $\sigma = 1.2 \sigma_c$. Затем численными расчетами на временах $\tau \leq 10^4$ определялся диапазон начальных фаз, в котором имел место захват частицы волной при $\tau = 0$.

Приведем результаты расчетов для следующего варианта параметров задачи $h = 50$, $\gamma(0)\beta_y(0) = -200$, $\beta_p = 0.3$, $u = 0.2$, $a = 0$, соответствующего релятивистской частице с $\gamma(0) \approx 216.112$. Начальная фаза $\Psi(0)$ выбиралась в интервале $(-3.1 \div 3.1)$. Результаты численных расчетов показали, что для начальных фаз из интервала $(-3.1, 0.1)$ с шагом $\delta\Psi(0) = 0.1$ захват частицы в эффективную потенциальную яму происходит сразу при $-1.1 \leq \Psi(0) \leq 0.6$, а для остальных начальных фаз он отсутствует на временах счета $\tau < 10^4$ и более.

В случае $\Psi(0) = -0.6$ график фазы волны на траектории захваченного ядра гелия дан на рис.1 для интервала счета $\tau \leq 5 \cdot 10^6$. Как видим, достаточно быстро фаза волны на траектории частицы выходит на асимптотику около дна эффективной потенциальной ямы.

Динамика релятивистского фактора $\gamma(\tau)$ захваченного волной ядра гелия показана на рис.2. Важно отметить, что этот график хорошо аппроксимируется линейной функцией т.е фактически происходит ускорение с постоянных темпом роста энергии. В конце интервала расчетов имеем $\gamma \approx 3.9 \cdot 10^3$, что соответствует энергии $1.5 \cdot 10^4$ ТэВ.

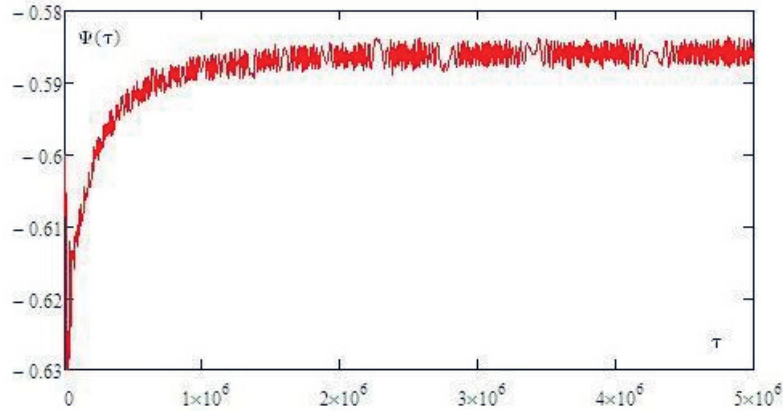


Рис.1. Динамика фазы волны на траектории ядра гелия.

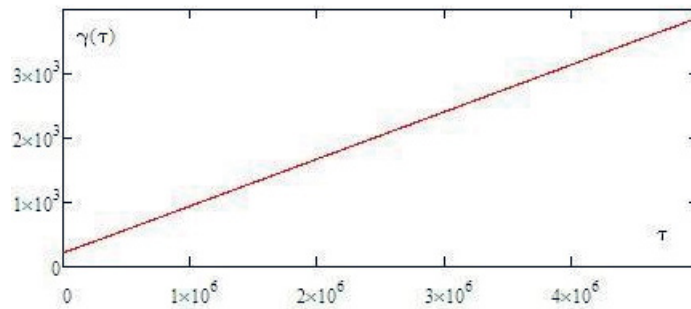


Рис.2. График релятивистского фактора захваченного волной ядра гелия.

Из расчетов также следует, что для поперечных (к внешнему магнитному полю) компонент импульса захваченного ядра гелия темпы их роста практически постоянны $\dot{\gamma} \beta_x \approx \gamma \beta_r$, $\dot{\gamma} \beta_y \approx -\gamma / \gamma_r$. Приведем также график смещения захваченной частицы вдоль направления распространения волны $\xi(\tau)$, приведенный на рис.3. Практически это прямая линия т.е. вариации скорости ядра гелия β_x пренебрежимо малы. Аналогичная ситуация, как показывают расчеты, имеет место и со смещением захваченного волной ядра гелия вдоль волнового фронта (ось y).

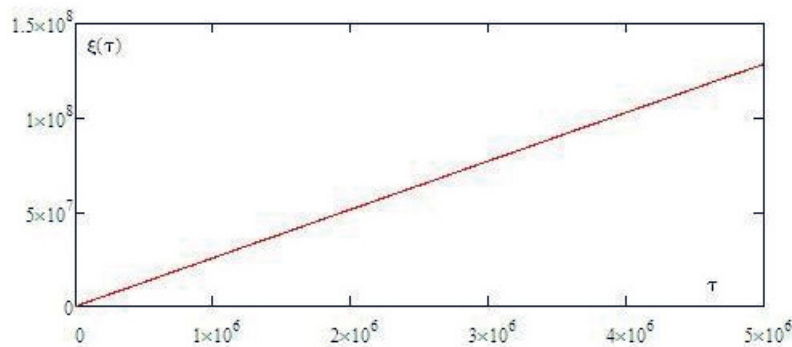


Рис.3. Зависимость смещения захваченной волной частицы вдоль направления распространения электромагнитной волны (ось x).

Заключение

Результаты проведенного в работе численного анализа серфотронного ускорения релятивистских ядер гелия электромагнитной волной в космической плазме состоят в следующем. В случае релятивистских начальных энергий структура области начальных фаз, благоприятных для реализации серфинга, существенно упрощается. Диапазон благоприятных фаз $\Psi(0)$ составляет порядка 29 %. Вдоль волнового фронта благоприятными являются отрицательные значения начального импульса $\gamma(0)\beta_y(0)$. При ускорении частиц волной темпы роста релятивистского фактора и поперечных к внешнему магнитному полю компонент импульса практически постоянны. Серфинг может приводить к дополнительной генерации космических лучей в солнечной гелиосфере и плазме межзвездных облаков до энергий порядка 10^{15} эВ и выше создавая вариации потока КЛ.

Литература

- [1]. N. Katsouleas, J.M. Dawson. *Physical Review Letters*. 1983, 51, 392.
- [23]. Б.Э. Грибов, Р.З. Сагдеев, В.Д. Шапиро, В.И. Шевченко. *Письма в ЖЭТФ*. 1985, 42, № 2, 54.
- [3]. С.В. Буланов, А.С. Сахаров. *Письма в ЖЭТФ*. 1986, 44, Вып. 9, 421.
- [4]. Н.С. Ерохин, А.А. Лазарев, С.С. Моисеев, Р.З. Сагдеев Р.З. *Доклады Академии наук*. 1987, 295, № 4, 849.
- [5]. Н.С. Ерохин, С.С. Моисеев, Р.З. Сагдеев. *Письма в Астрономический журнал*. 1989, 15, № 1, 3.
- [6]. Г.Н. Кичигин. *ЖЭТФ*. 2001, 119, Вып. 6, 1038.
- [7]. M.E. Dieckmann and P.K. Shukla. *Plasma Physics and Controlled Fusion*. 2006, 48, Issue 10, 1515.
- [8]. А.И. Нейштадт, А.В. Артемьев, Л.М. Зеленый, Д.Л. Вайнштейн. *Письма в ЖЭТФ*. 2009, 89, Вып. 9, 528.
- [9]. В.М. Лозников, Н.С. Ерохин. *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Плазменная электроника*. 2010. № 4 (68), с.121.
- [10]. А.Н. Ерохин, Н.С. Ерохин, В.П. Милантьев. *Физика плазмы*. 2012, 38, № 5, 435.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ ВРЕМЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОБОЯ РЕЗОНАНСНОГО ИМПУЛЬСНО- ПЕРИОДИЧЕСКОГО МИКРОВОЛНОВОГО РАЗРЯДА

И. Василеска, М.А. Корнеева

Российский университет дружбы народов, Москва, РФ, e-mail: ivonavasileska@yahoo.com

EXPERIMENTAL STUDY OF BREAKDOWN TIME CHARACTERISTICS IN RESONANT PULSED PERIODICAL MICROWAVE DISCHARGE

I. Vasileska, M.A. Korneeva

Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, RF

Abstract

To determinate the characteristics of the breakdown time processes, of pulsed-periodical microwave resonant argon discharge were measured integrated light signal, as well as incident and reflected MW power in the same time scale. Were obtained dependences between the time

scale of breakdown processes and the discharge parameters: medium-pressure gas (Ar), MW power and repetition rate of MW-pulses.

Аннотация

Для изучения временных характеристик процесса пробоя импульсно-периодического микроволнового резонансного разряда в аргоне были выполнены измерения интегральной светимости, а также падающей и отраженной СВЧ мощности в едином временном масштабе. Получены зависимости времени пробоя газа от разрядных параметров: давление плазмообразующего газа, вкладываемая мощность и скважность импульсных процессов.

Введение

Динамика плазмы во время пробоя и распада в импульсной периодической плазме представляет интерес с точки зрения изучения формирования разряда [1]. Цель данной работы заключается в исследовании характерного времени формирования плазмы для выявления оптимальных рабочих параметров генерации микроволновой плазмы с высокой степенью светоотдачи. Представлены результаты исследования фазы пробоя импульсно-периодического резонансного разряда на основе различных диагностических средств: временных характеристик интегрального светового потока, а также падающей и отраженной мощности СВЧ.

Описание экспериментальной установки и диагностических средств

Разряд возбуждался в кварцевой колбе, помещенной в цилиндрический TE_{111} -резонатор (2,45 ГГц, $Q=700$), помещенный в магнитное поле пробочной конфигурации, создаваемое постоянными магнитами ($SmCo_5$) с системой магнитного замыкания. Напряженность магнитного поля в области геометрического центра ловушки и его профиль изменялись перемещением магнитных полюсов при помощи микрометрической подачи. Импульсный режим магнетронного генератора обеспечивался модулятором с частичным разрядом накопительной емкости и позволял варьировать длительность и частоту повторения импульсов СВЧ в широких пределах (длительность импульса от 0.07 мс до 5.4 мс, пауза от 0.2 мс до 7.1 мс). Максимальная импульсная выходная мощность составляла 700 Вт. Для определения уровня поглощения СВЧ тракт снабжен системой мониторинга поглощенной и отраженной мощности. Подготовка рабочей газовой смеси и плавное изменение давления в рабочем объеме осуществлялось с помощью пьезоэлектрического натекателя СНА-2. Вакуумная система установки обеспечивала фоновое давление не хуже $1 \cdot 10^{-5}$ Торр. Диапазон рабочих давлений составлял $1 \cdot 10^{-2} - 1 \cdot 10^{-4}$ Торр.

Разрядная камера снабжена вакуумно-плотным портом с увиолевым окном, используемым для наблюдения и измерения оптического излучения плазмы разряда. В качестве средств оптической диагностики использовался скоростной фотодетектор (быстродействие ~ 15 нс, спектральный диапазон 400-1100 нм).

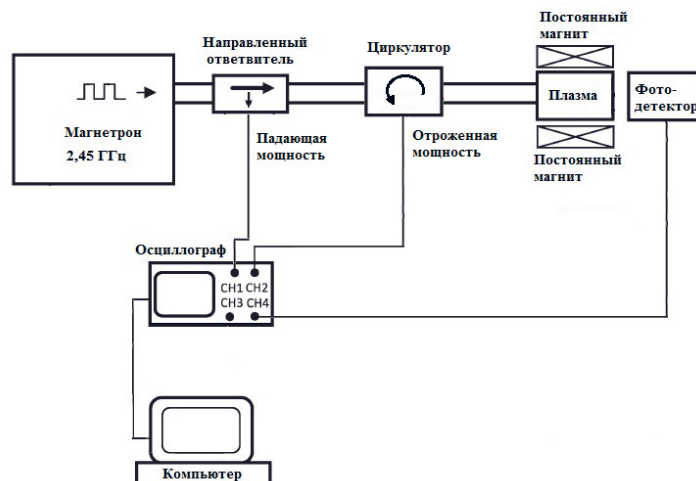


Рис. 1. Экспериментальная установка для определения времени пробоя

На Рис. 1 показана блок-схема измерений характерных параметров зажигания разряда. Сигнал уровня падающей СВЧ мощности с канала направленного ответвителя и сигнал с циркулятора, соответствующий отраженной СВЧ мощности измерялись цифровым осциллографом (Textronix TDS 2024B), синхронизованным с генератором, обеспечивающим импульсную работу магнетрона. В едином временном масштабе осциллографировались и сигналы быстрого фотодетектора, установленного в 2 см от поверхности разрядной колбы.

Экспериментальные результаты и их анализ

Типичная осциллограмма, соответствующая следующим условиям: падающая импульсная мощность 159 Вт, отраженная мощность 50 Вт, скважность 16, давление $3 \cdot 10^{-3}$ Торр, приведена на рис. 2, а. Видно, что нарастание сигнала с фотодетектора происходит синхронно с резким снижением отраженной мощности. Полное время зажигания разряда в данном случае составляет 109 мкс – это время от начала СВЧ-импульса до установления тока насыщения фотодетектора. Следует отметить, что пробой происходит в два этапа (Рис. 2.а): пробой и формирование плазмы со стационарными параметрами. Как показал анализ полученных результатов, первый этап, соответствующий начальной фазе пробоя, которая характеризуется низкой скоростью ионизации и быстрым динамическим взаимодействием электромагнитных волн и плазмы малой плотности в объеме резонатора, что приводит к эффективному набору энергии первичными электронами. Второй этап – это непосредственно плазмообразование, в течение которого происходит динамическое выравнивание процессов эффективной ионизации и рекомбинации, что характеризуется возрастанием светового потока до значения характеризуемое постоянством тока детектора, как и стационарными уровнями отраженной и поглощенной СВЧ-мощности. Из представленных на рис. 2 осциллограмм видно, что этап плазмообразования завершается выходом светового потока на насыщение. Рассмотрим более детально полученные экспериментальные результаты.

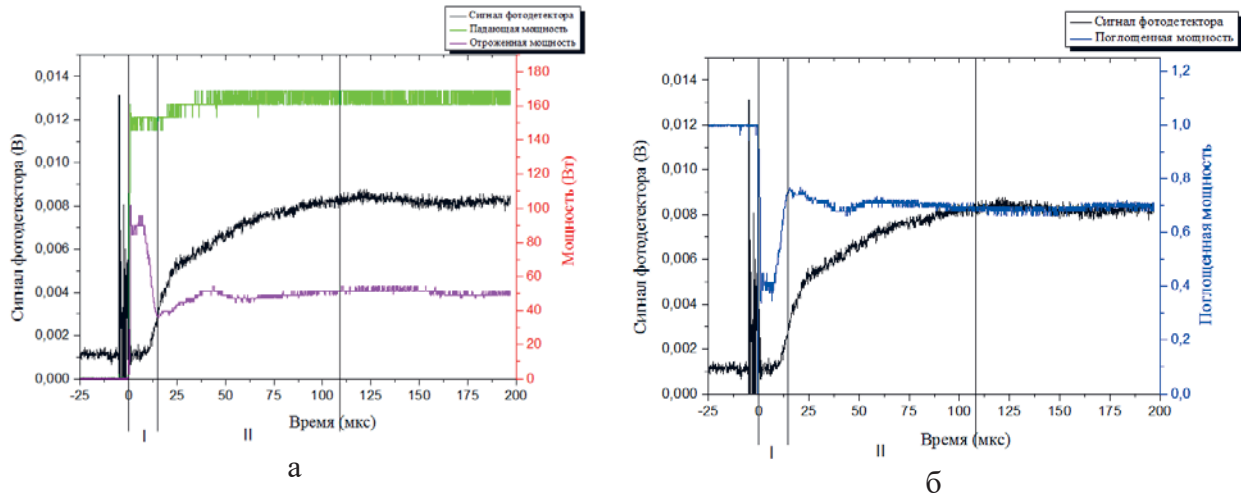
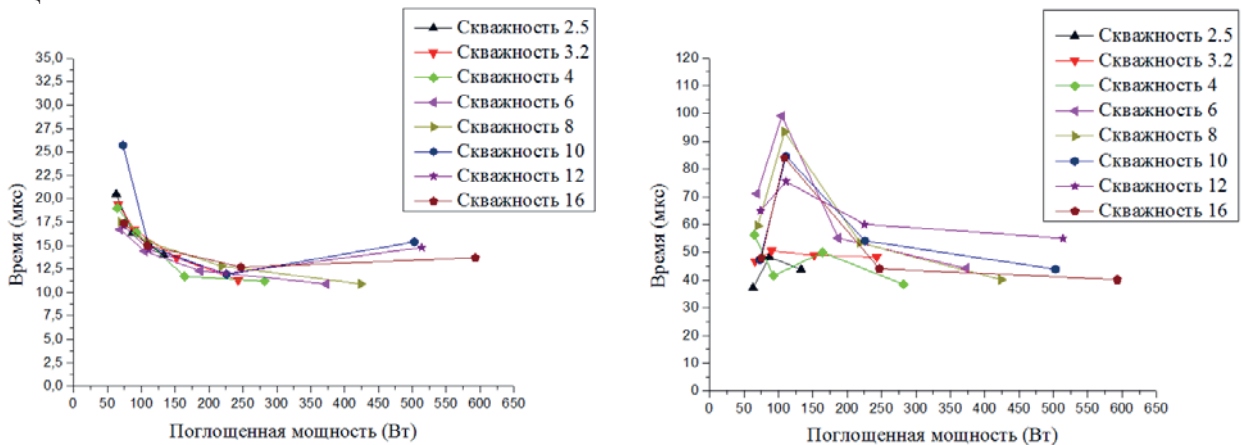


Рис. 2 Осциллограммы для определения время пробоя:

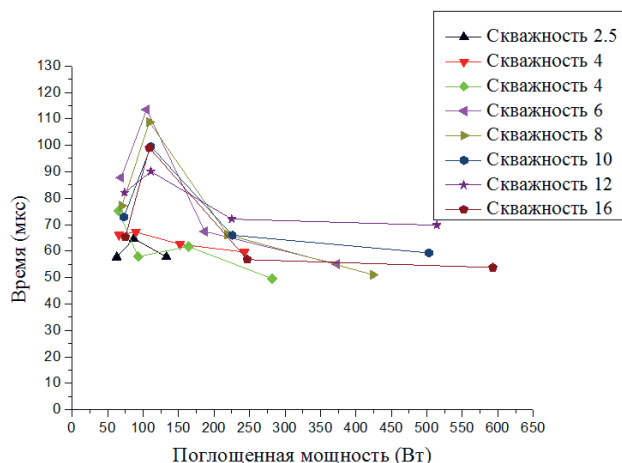
Представленные на рис. 2, а осциллограммы свидетельствуют, что сигнал отраженной мощности в течении 7,9 мкс остается практически постоянным и соответствует уровню отраженной мощности в резонаторе в отсутствие разряда, после чего резко падает. Длительность первого этапа может быть установлена исходя из определения временной зависимости поглощенной в разряде СВЧ мощности: $(P_{\text{пад}} - P_{\text{отр}})/P_{\text{пад}}$, которая представлена на рис. 2, б. Видно, что поглощенная мощность выходит на постоянный уровень через 14,6 мкс после начала импульса СВЧ, что и соответствует начальной фазе пробоя. Время плазмообразования, которое определяется как разница между временем окончания начальной фазы и моментом выхода тока фотодетектора на насыщение в рассматриваемом случае составляет 94,4 мс.

На рис. 3 приведены результаты измерения времени пробоя, плазмообразования и полного времени зажигания разряда при давлении $3 \cdot 10^{-3}$ Торр в зависимости от поглощенной мощности, скважности и времени пробоя. Начальная фаза - пробой (рис. 3, а) газа не зависит от скважности, имеет относительно малую длительность (5-10% от общего времени зажигания разряда) и возрастает только при малом уровне поглощенной мощности. Время плазмообразования в целом определяет полное время зажигания разряда. Видно (рис. 3, б), что при низких скважностях (2.5 – 4) время плазмообразования не зависит от мощности, а при больших скважностях (6-16) спадает с увеличением мощности.



а) время пробоя

б) время плазмообразования



в) полное время пробоя

Рис. 4 Характерные времена зажигания разряда при давлении $3 \cdot 10^{-3}$ Торр

Заключение

Получена зависимость времени пробоя микроволнового импульсно-периодического аргонового разряда от вкладываемой в разряд СВЧ-мощности и скважности импульса СВЧ. Выявлены особенности поведения времени пробоя. Полученные результаты позволяют установить, что при постоянном давлении изменение существенного изменения времени пробоя в исследованном диапазоне параметров не происходит, что соответствует представлениям о протекающих в области промежуточных давлений процессов в резонансной микроволновой плазме.

Список литературы

[1] O. Daniel Cortázar, Ana Megía-Macías, and Alvaro Vizcaíno-de-Julián, «Experimental Study of Breakdown Time in a Pulsed 2.45-GHz ECR Hydrogen Plasma Reactor» // *Plasma science*, vol. 40, no. 12, pp. 3409-3419, Dec.2012.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПЛАЗМОХИМИЧЕСКОГО МОДИФИЦИРОВАНИЯ УГЛЕРОДНЫХ ВОЛОКОН ПРИ СОЗДАНИИ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ ТРИБОТЕХНИЧЕСКОГО НАЗНАЧЕНИЯ

В.П. Селькин¹, Е.М. Толстопятов¹, С.В. Копылов²

PLASMACHEMICAL MODIFICATION OF CARBON FIBERS AT DEVELOPMENT OF COMPOSITE MATERIALS OF TRIBOTECHNICAL DESTINATION

V.P. Selkin, E.M. Tolstopyatov, S.V. Kopylov

¹ ГНУ «Институт механики металлополимерных систем им. В.А. Белого НАН Беларуси»,
ул. Кирова, 32а, 246050, Гомель, Беларусь

² Московский политехнический университет,
ул. Б. Семёновская, 38, 107023, Москва, Россия
e-mail: selkin_v@mail.ru

Показана перспективность применения химически активной плазмы при получении содержащих углеродный наполнитель фторполимерных композиций триботехнического назначения. Приведены сравнительные характеристики (коэффициент трения,

интенсивность изнашивания) композиции, содержащей подвергнутые плазмохимическому модифицированию во фторуглеродной плазме углеродные волокна, и композиции Ф-4К15М5 в условиях соответствующих работе уплотнительных узлов запорной арматуры.

Efficiency of using chemically active plasma in the technology of fluoropolymer composites of tribotechnical destination filled with carbon fibers is shown. Comparative characteristics (friction coefficient, wear intensity) are given for the composite filled with fluorocarbon plasma treated carbon fibers and F-4K15M5 composite in conditions simulating that of working sealing elements of stop valves.

Современные требования к снижению потерь на трение в уплотнительных узлах используемой в нефтехимической промышленности запорной арматуре ставят задачу разработки новых антифрикционных композиционных материалов с повышенными триботехническими характеристиками. Одними из наиболее распространенных продуктов применяемых по данному назначению в странах СНГ являются композиции политетрафторэтилена Ф-4К20 и Ф-4К15М5 [1]. Они обладают хорошей износостойкостью, но имеют более высокий коэффициент трения по стали, чем базовый полимер. В то же время появились новые перспективные подходы при создании фторполимерных материалов, в частности, основанные на использовании высокоэнергетических технологий [2]. В настоящей работе показана перспективность применения при получении антифрикционных композиций химически активной плазмы.

Плазменная обработка позволяет изменять как физические свойства, так и химическое состояние тонкого поверхностного слоя материала без изменения его объёмных свойств. Элементарным процессом при плазменном воздействии на поверхность твёрдого тела является физическое распыление адсорбированных слоёв загрязнений, слабо связанных с поверхностью (ионная очистка поверхности). Удаление таких слоёв, происходящее при низких энергиях ионов, уже само по себе способствует повышению адгезии поверхности к связующему, клею или краске. Поскольку процесс распыления идёт под действием ускоренных по направлению к поверхности ионов, наибольшие возможности по управлению им реализуются при обработке электропроводящих материалов при подаче на них отрицательного потенциала относительно объёма плазмы. В простейшем случае обрабатываемый объект может служить катодом в диодной разрядной системе. При достаточно высокой энергии ионов происходит и распыление основного материала, причём зёрна с различной ориентацией кристаллов могут иметь различную стойкость к ионно-плазменному распылению. В результате этого ионное воздействие приводит к повышению микронеровности поверхности. При условии контакта наполнителя со связующим это ведёт к повышению прочности композита за счёт механического сцепления компонентов.

Более сложные и многообразные процессы протекают под действием химически активной плазмы. Для её генерации используются газы, которые под действием электронного удара не только возбуждаются и ионизируются, но и диссоциируют с образованием короткоживущих химически активных по отношению к обрабатываемому материалу частиц. При этом может происходить как травление поверхности, т.е. химическое взаимодействие этих частиц с поверхностью с образованием летучих соединений, так и образование стабильных химических связей компонентов плазмы с материалом поверхности. Кроме этого, при использовании полимеризационно-способных газов возможно осаждение на поверхности объекта полимер-подобного покрытия.

Если плазменная очистка поверхности от загрязнений и травление поверхности благоприятны для наполнителей композитов любого состава, то эффект от

плазмохимического модифицирования поверхности специфичен для каждого связующего, т.е. его влияние на совместимость со связующим зависит от соотношения химической природы обоих.

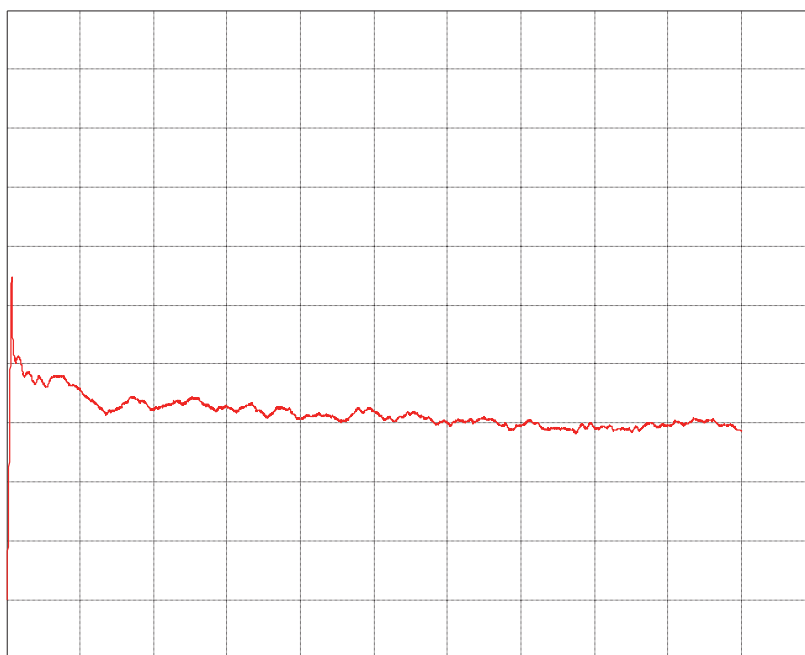
Плазмохимическое модифицирование углеволокна во фторуглеродной низкотемпературной плазме низкого давления было выбрано в качестве основного метода подготовки компонентов композита «углеродный наполнитель – фторполимерное связующее» при создании в ИММС НАН Беларуси нового антифрикционного композиционного материала на основе фторопласта-4 «Суперфлуфис Плюс». Адгезионное взаимодействие между исходным углеродным волокном и фторполимером очень невелико. В то же время обработка поверхности во фторуглеродной плазме приводит как к фторированию поверхности, так и к осаждению на ней фторполимерного покрытия, прочно связанного с поверхностью углеволокна. В результате этого поверхность становится в определенном смысле химически родственной материалу связующего, что повышает адгезионное взаимодействие между ними и обеспечивает повышенную прочность композита. Следует подчеркнуть, что этому способствует также удаление слабосвязанных с поверхностью углеволокна загрязнений и повышение микрошероховатости поверхности, обеспечивающее механическое зацепление со связующим.

К настоящему времени установлено, что характер модифицирования поверхности в плазме полимеризационно-способных газов в большой степени зависит от режимов процесса. В число влияющих факторов входят: состав, давление и скорость потока газа, частота, плотность тока и мощность разряда, параметры импульсов, метод возбуждения электрического разряда (емкостной или индукционный), тип электродной системы (с открытыми или изолированными электродами), место расположения обрабатываемой поверхности по отношению к зоне разряда, и др [3,4]. Выбор оптимальных параметров обеспечивает высокую производительность обработки при достижении требуемого качества поверхности.

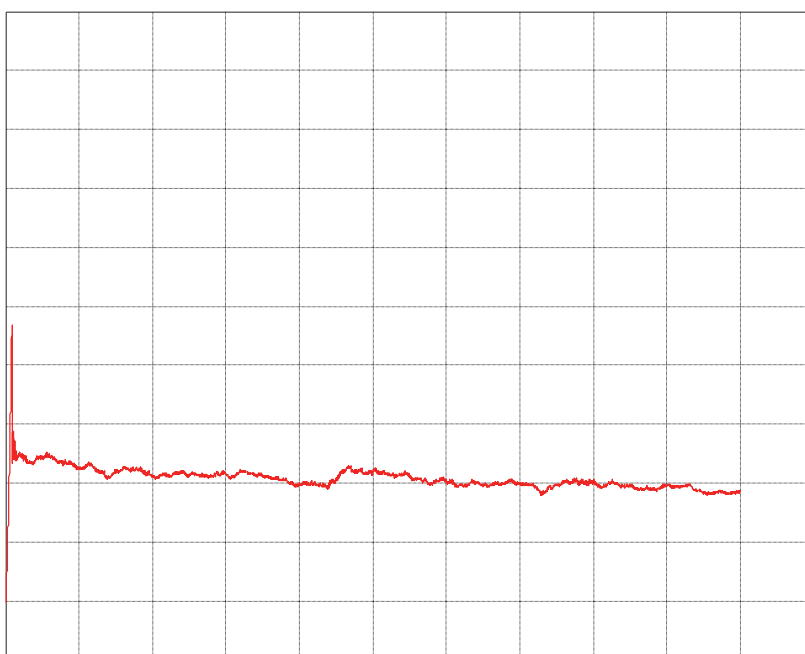
Для обработки углеродных материалов в ИММС НАН Беларуси используется емкостной плазменный реактор с плоскими электродами, электропитание которого производится импульсным или переменным напряжением килогерцовой частоты. Контроль эффективности обработки в технологическом процессе осуществляется по изменению характера смачивания поверхности углеродных волокон дистиллированной водой. Контроль всего процесса производства композита выполняется по результатам механических испытаний сформированных образцов. Об эффективности плазменной обработки углеродного наполнителя композита на основе фторопласта-4 можно судить по результатам испытаний триботехнических характеристик готовых образцов.

Были проведены сравнительные испытания композитов Ф-4К15М5 и «Суперфлуфис Плюс». Сравнивали коэффициент трения (величину трения скольжения) по стали и интенсивность изнашивания при трении без смазки.

Величину трения скольжения определяли на снабженной специальным приспособлением испытательной машине SHIMADZU Autograph AGS-1 kNX. Контртело – сталь 45, шероховатость $R_a = 0,25$ мкм. Скорость скольжения – 100 мм/мин. Образцы в виде цилиндра, площадь поверхности трения (торцевая) – 1 см², шероховатость поверхности трения – $R_a = 0,25$ мкм. Нормальная нагрузка на образцы – 100 Н. Результаты приведены на рис. 1. На рис. 2 показан результат для фторопласта-4. Из зависимостей видно, что коэффициент трения «Суперфлуфис Плюс» в режиме малых скоростей скольжения в 1,5 раза меньше, чем у Ф-4К15М5 (0,04 и 0,06), и приближается по величине к значениям фторопласта-4.



а)



б)

Рис. 1. Зависимость величины силы трения скольжения от пути трения композиций Ф-4К15М5 (а) и «Суперфлувис Плюс» (б)

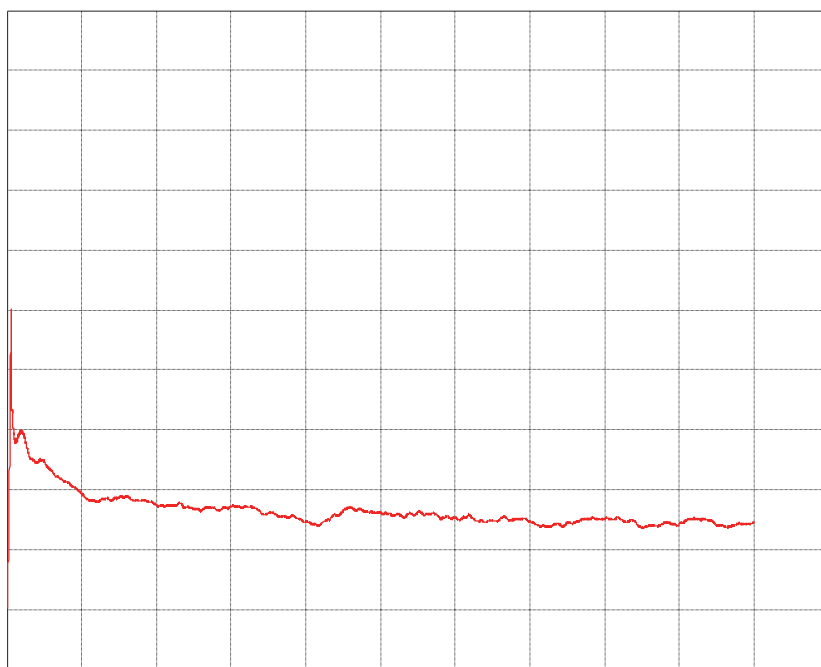


Рис. 2. Зависимость величины силы трения скольжения от пути трения фторопласта-4

Интенсивность изнашивания оценивали по отношению линейного износа к пути трения на разработанной в ИММС НАН Беларуси испытательной машине [5]. Материал контртела – сталь марки А 105 (ASTM A105), шероховатость $Ra = 0,25\text{--}0,32$ мкм. Контактное давление – 2,5 МПа. Скорость скольжения – 0,05 м/с. Путь трения – 5000 м. Количество образцов по – 4. Результаты испытаний в данных условиях показали практически одинаковую интенсивность изнашивания Ф-4К15М5 и «Суперфлувис Плюс» ($\approx 3 \cdot 10^{-9}$).

Таким образом, использование плазмохимического модифицирования углеродных волокон позволяет получать армированные ими композиции триботехнического назначения, которые при режимах соответствующих работе запорной арматуры в нефтехимической промышленности приближаются по величине коэффициента трения к фторопласту-4, а по износостойкости не уступают композиции Ф-4К15М5.

Работа выполнена в рамках контракта ЮВК-2012-5 с ОАО «ЦК МПФГ «Формаш» и ГПНИ РБ «Физматтех 6.06».

Литература

1. Максимов Б.Н, Барабанов В.Г., Серушкин И.Л. и др. Промышленные фторорганические продукты / Справочник. Изд. 2-е. Л.: Химия, 1996, 544 с.
2. Бузник В.М. Состояние отечественной химии фторполимеров и возможные перспективы развития // Российский химический журнал (Ж. Рос. хим. об-ва им. Д.И. Менделеева). – 2008. Т. LI, – № 3, – С. 7–12.
3. Ясужа Х. Полимеризация в плазме / Пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 376 с.
4. Беграмбеков Л.Б. Модификация поверхности твёрдых тел при ионном и плазменном воздействии / Уч. пособие. – М.: МИФИ, 2001. – 34 с.
5. Селькин В.П., Копылов С.В. Машина трения для испытания полимеров в режиме граничной смазки // Трение и износ. – 2016. Т. 37, – № 2 – С. 234–237.

ОПТОЭЛЕКТРОНИКА И ИНТЕГРАЛЬНАЯ ОПТИКА

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ СИНТЕЗА ИНВАРИАНТНЫХ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФИЛЬТРОВ ПРИ РАСПОЗНАВАНИИ ЦВЕТНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Е.К. Петрова, Р.С. Стариков, Д.В. Шаульскийкий

«RESEARCH OF THE FEATURES OF SYNTHESIS OF INVARIANT CORRELATION FILTERS
AT THE RECOGNITION OF COLOR IMAGES»

E.K. Petrova, R.S. Starikov, D.V. Shaulskiy

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва Россия.

e-mail: EKPetrova@mephi.ru

Введение

Применение инвариантных корреляционных фильтров (КФ) позволяет получить некоторую степень устойчивости корреляционного распознавания к различным искажениям входного изображения относительно эталонного, таким как плоский или пространственный поворот, изменение масштаба, изменение условий освещённости, деформация и т.д. Перспективным типом КФ являются фильтры с минимизацией шума и энергии корреляции (КФ МШЭК) [1]. Ранее проведённые исследования показали достижимость высоких характеристик распознавания с помощью КФ МШЭК, особый интерес представляет их реализация в схемах оптических корреляторов, достоинства которых широко известны [2-9]. **Целью настоящей работы является исследование возможностей повышения качества распознавания изображений с помощью КФ МШЭК при использовании информации цветных каналов.** Модельная задача предполагает различение изображений «истинного» объекта от сходных «ложных» трёх типов в условиях поворота, см. также [7-9]. При моделировании использовались изображения размерности 512×512 пикс. Примеры используемых изображений «истинных» и «ложных» объектов представлены на рис. 1. КФ синтезировались аналогично тому как это делалось в [7-9]. Качество распознавания оценивалось по критерию Неймана-Пирсона. В работе используется модель цвета RGB [10].

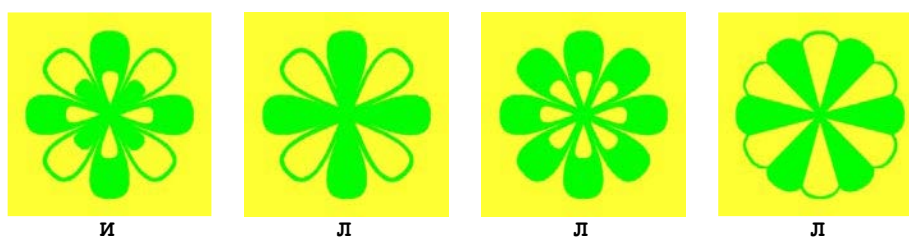


Рис. 1. Пример используемых изображений. Истинный объект (И) и ложные (Л)

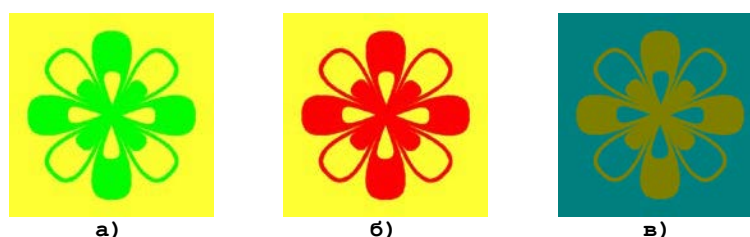


Рис. 2. Объект в разных цветах

Распознавание простых цветных изображений в условиях плоского поворота

Были исследованы следующие случаи:

– Изображения имеющих только один ненулевой цветовой канал, например, только красный, или только зелёный. Объекты помещены на цветной фон, в котором активны и зелёный и красный каналы. Примеры приведены на рис. 2 а) и б), соответственно.

– В изображении объекта есть зелёный и красный каналы, и отсутствует синий, в фоне зелёный и синий, и отсутствуют красный. Пример приведен на рис. 2 в).

Для 1-го случая были рассмотрены варианты:

а. Эталонный набор в трёх цветовых каналах, распознаваемый набор в трёх цветовых каналах.

б. Эталонный набор в красном канале, распознаваемый набор в трёх цветовых каналах.

В эталонном наборе используется зелёный канал для объекта, а в распознаваемом – красный. При формировании эталонного и тестового наборов использовалось предельное значение для яркости. Были получены дискриминационные характеристики для истинного и трёх ложных объектов, показавшие достижимость высокого качества распознавания. Кроме того, было проведено моделирование распознавания сцены с двумя изображениями эталонного объекта разного цвета (КФ сформирован из эталонного набора в трёх цветовых каналах), результаты иллюстрируются рис. 3-5.

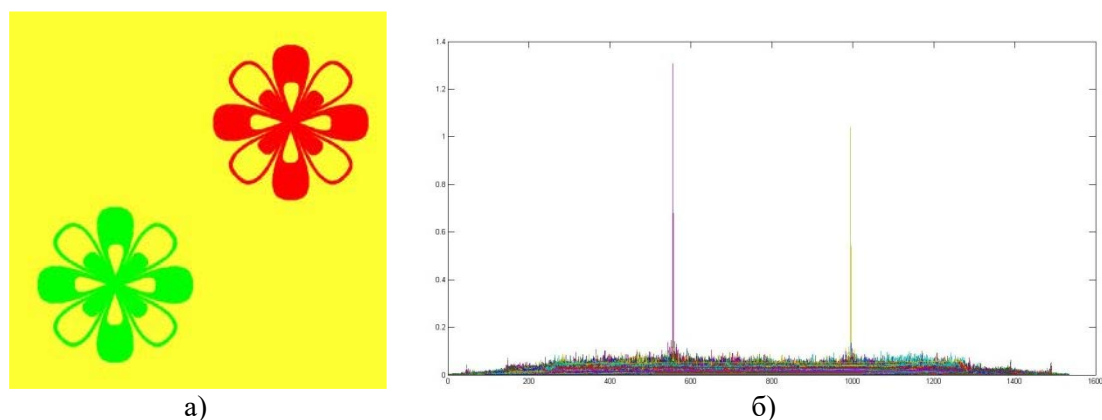


Рис. 3. Сцена с двумя одинаковыми по форме и разными по цвету объектами в трёх цветовых каналах и корреляционные пики для них

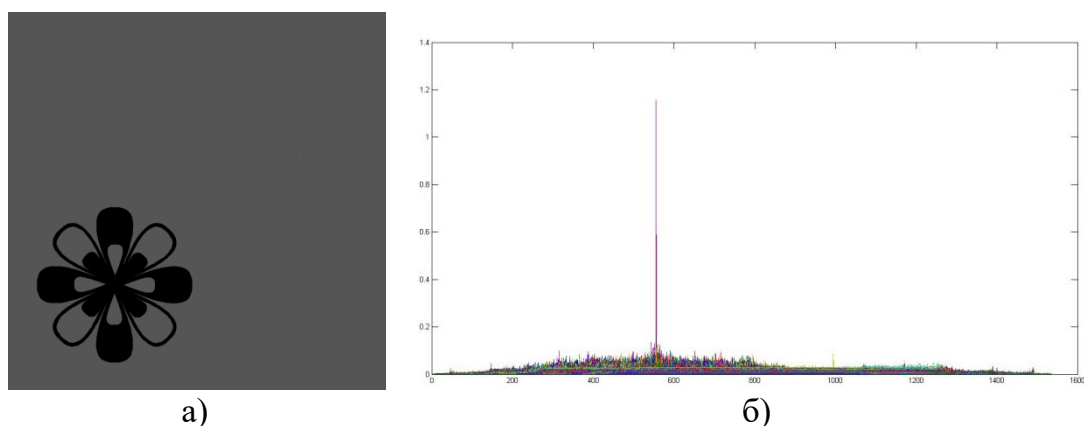


Рис. 4. Сцена рис. 3 красном цветовом канале и корреляционный пики для неё, опознан зелёный объект

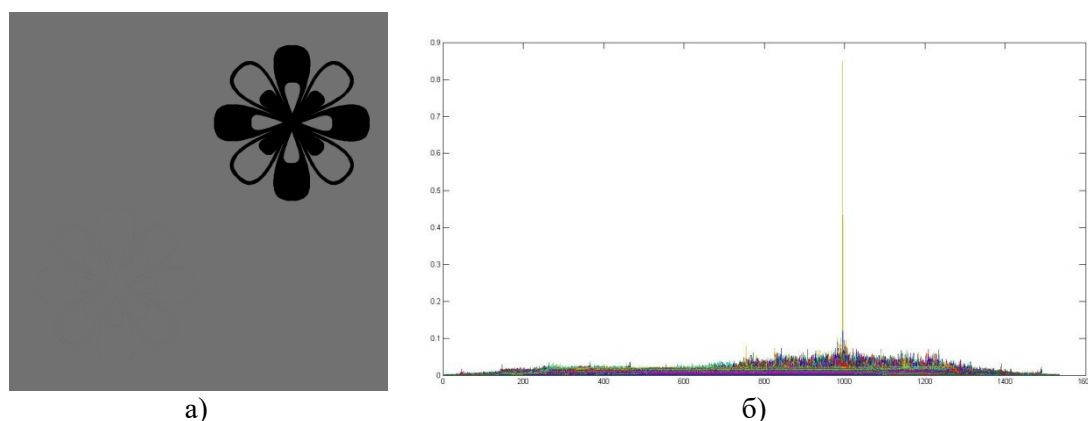


Рис. 5. Сцена рис. 3 в зелёном цветовом канале и корреляционные пики для неё, опознан красный объект

Для 2-го случая были рассмотрены варианты:

- а. Эталонный и распознаваемый наборы в модели RGB без выделения, какого-либо канала, т.е. присутствуют все три канала цвета.
- б. Эталонный и распознаваемый наборы с выделением красного канала. Зелёный и синий отсутствуют.
- в. Эталонный набор с выделением красного канала, распознаваемый набор без выделения какого-либо канала.

Во всех вариантах достигнуты высокие показатели распознавания (свыше 99%), однако использование одного выделенного канала обеспечивает почти на порядок лучшие результаты. На рис. 6 приведён пример дискриминационной характеристики для варианта «в».

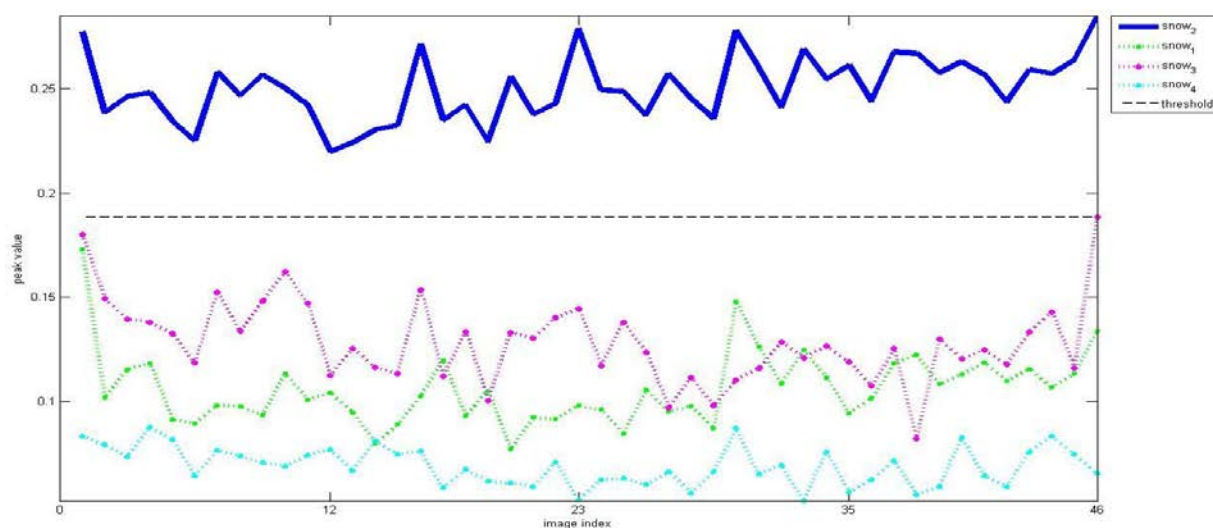


Рис. 6. Дискриминационная характеристика (зависимость корреляционного пика от угла поворота объекта) для истинного (жирная линия) и трёх ложных объектов (тонкие линии) при моделировании случая, когда эталонный набор на основе изображений с выделением красного канала, распознаваемый набор без выделения цветочных каналов

Заключение

Проведено моделирование использования инвариантных корреляционных фильтров с минимизацией шума и энергии корреляции при распознавании цветных изображений. Полученные результаты демонстрируют возможности повышения гибкости и качества распознавания при использовании информации цветочных каналов.

Литература

1. G. Ravichandran, D. Casasent, "Minimum noise and correlation energy optical correlation filter" // Appl. Opt. v31, 1823-1833 (1992)
2. R. Patnaik, D. Casasent "Illumination invariant face recognition and impostor rejection using different MINACE filter algorithms" // Proc.SPIE, v5816, 94-104 (2005)
3. D. Casasent, R. Patnaik "Automated synthesis of distortion-invariant filters: AutoMinace" // Proc.SPIE, v6384, 638401 (2006)
4. D. Casasent, R. Patnaik "MSTAR object classification and confuser and clutter rejection using Minace filters" // Proc.SPIE, v6234, 62340S (2006)
5. R. Patnaik; D. Casasent "Minace filter tests on the Comanche IR database" // Proc.SPIE, v6574, 65740H (2007)
6. R. Patnaik; D. Casasent "Clutter performance and confuser rejection on infrared data using distortion-invariant filters for ATR" // Proc.SPIE, v6967, 696705 (2008)
7. N. Evtikhiev, D. Shaulskiy, E. Zlokazov, R. Starikov "Variants of minimum correlation energy filters: comparative study" // Proc. SPIE v8398, 83980G (2012)
8. N. Evtikhiev, D. Shaulskiy, E. Zlokazov, R. Starikov "MINACE filter realization as computer generated hologram for 4-f correlator" // Proc. SPIE, v8748, 87480O (2013)
9. D. Shaulskiy, N. Evtikhiev, S. Starikov, R. Starikov, E. Zlokazov "MINACE filter: variants of realization in 4-f correlator" // Proc. SPIE, v9094, 90940K (2014)
10. А. Сераков, И. Агапова Photoshop CS6 М.: «ЭКМО», 2012

ЭФФЕКТ СВЕРХРАЗРЕШЕНИЯ НА ФАЗОВОМ ОТКЛИКЕ СКАНИРУЮЩЕГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ГЕТЕРОДИННОГО МИКРОСКОПА

И. М. Ахмеджанов, Д. В. Баранов, Е. М. Золотов

«SUPERRESOLUTION ON A RESPONSE OF SCANNING DIFFERENTIAL HETERODYNE MICROSCOPE»

I. M. Akhmedzhanov, D. V. Baranov, E. M. Zolotov

Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН, Москва, Россия

e-mail: zolotov@kapella.gpi.ru

Фундаментальная проблема повышения разрешающей способности оптических приборов, в частности микроскопов, является по-прежнему актуальной, несмотря на ее многолетнюю историю [1]. Здесь эта проблема рассматривается для сканирующего дифференциального гетеродинного микроскопа (СДГМ) [2] в виде возможности получения сверхразрешения на отклике микроскопа на одиночный объект. Критерием сверхразрешения в данном случае является степень уменьшения ширины отклика по сравнению с шириной зондирующего пучка. Ранее был получен эффект сужения фазового отклика СДГМ для края диэлектрической плёнки на кремниевой подложке [3]. Обнаруженный эффект можно интерпретировать как проявление сверхразрешения для данного типа микроскопа. В этой связи представляет интерес дальнейшее исследование в этом направлении.

В настоящей работе рассматривается теоретически и экспериментально особенности амплитудного и фазового отклика СДГМ от объекта как в виде отдельной ступеньки, так и канавки. В качестве канавки исследовались плазмонные волноводы, сформированные в металлической подложке и имеющие ширину 0,5–0,6 мкм, глубину 0,9–1,4 мкм, с формой профиля, близкой к треугольной, а в качестве ступеньки – объекты, описанные в [3]. Экспериментальные отклики на две треугольные канавки с различными параметрами приведены на рис. 1 и 2.

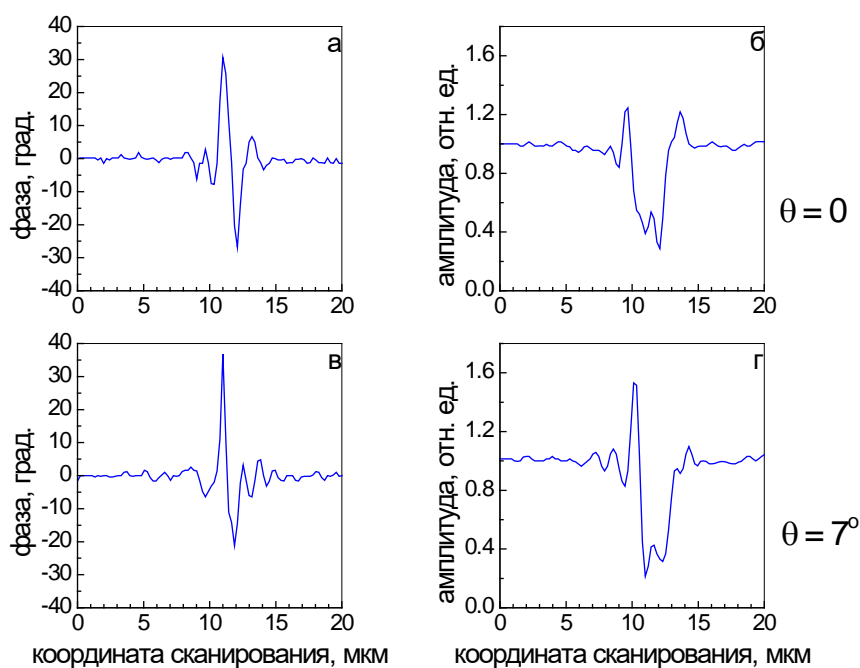


Рис. 1. Экспериментально полученные комплексные отклики СДГМ на треугольную канавку в золотой подложке с шириной 0,6 мкм и глубиной 1,0 мкм при регистрации отклика в центре фурье-плоскости (а, б) и вне центра (в, г). Смещение фотодетектора из центра фурье-плоскости характеризуется углом θ , максимально возможный угол соответствует числовой апертуре микрообъектива и равен 30° .

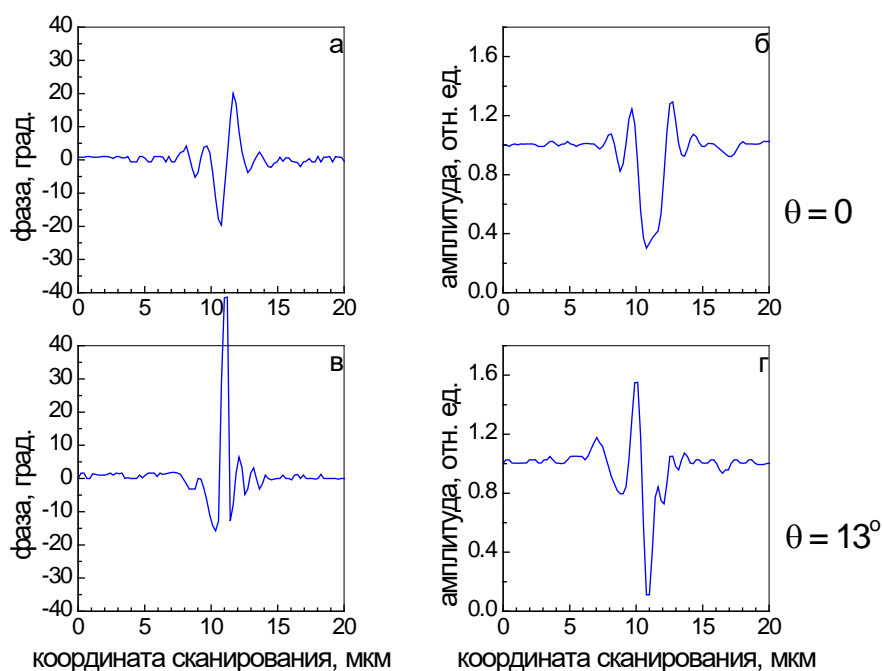


Рис. 2. Экспериментально полученные комплексные отклики СДГМ на треугольную канавку в золотой подложке с шириной 0,5 мкм и глубиной 0,9 мкм при регистрации отклика в центре фурье-плоскости (а, б) и вне центра (в, г).

В докладе проводится сравнительный анализ откликов на ступеньку и канавку, и делаются выводы об эффекте сверхразрешения в СДГМ.

Литература

- [1] С. Cremer, B. R. Masters, "Resolution enhancement techniques in microscopy", *Eur. Phys. J. H*, **38**, 281 (2013).
- [2] I. M. Akhmedzhanov, D. V. Baranov, E. M. Zolotov, "Characterization of V-shaped plasmon polariton waveguides using a differential heterodyne microscope at single polarization", *Laser Phys.*, **24**, 085901 (2014).
- [3] И. М. Ахмеджанов, Д. В. Баранов, Е. М. Золотов, Влияние параметров края тонких плёнок на отклик гетеродинного микроскопа, 51-я Всероссийская конференция по проблемам динамики и физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники, 12–15 мая 2015. Тезисы докладов – М.: РУДН, 2015. с. 241.

ОСОБЕННОСТИ РАЗВИТИЯ ФЭННИНГА В КРИСТАЛЛАХ SBN

И.М. Ахмеджанов, А.В. Мельников, Д.Х. Нурлигареев, Б.А. Усиевич

«THE CHARACTERISTICS OF FANNING IN SBN CRYSTALS»

I.M. Akhmedganov^{1,2}, A.V. Melnikov², D.Kh. Nurligareev², B.A. Usievich¹

1. Институт общей физики Российской академии наук, Москва, Россия

2. Московский технологический университет, Москва, Россия

e-mail: borisu@kapella.gpi.ru ; eldar@kapella.gpi.ru

Эффект фотоиндуцированного рассеяния света (фэннинг) в нелинейных кристаллах ниобата бария-стронция (SBN) хорошо известен [1-3]. В кристаллах SBN этот эффект наиболее заметен для синего света с необыкновенной поляризацией, распространяющегося в

направлении, перпендикулярном полярной оси (с) фоторефрактивного (ФР) кристалла. Интерес к изучению особенностей фэннинга вновь возник в последнее время связи с изучением поверхностных электромагнитных волн, возбуждаемых на границе линейной среды и ФР кристалла с диффузионным механизмом нелинейности (поверхностные фоторефрактивные волны – ПФВ). Описание ряда экспериментов по возбуждению и регистрации ПФВ на границе ФР кристалла и изотропного диэлектрика (металла) приведено в [4-6]. Ранее нами было показано, что при формировании ПФВ существенную роль играет фэннинг ТМ поляризованного излучения. В связи с этим одна из целей работ [4-6] состояла в нахождении условий возбуждения ПФВ, при которых влияние фэннинга минимально.

В работе [1] показано, что фэннинг имеет голографическую природу, причём асимметрия наблюдаемого рассеяния связана с диффузионным механизмом записи голограмм в кристаллах. Согласно модели, предложенной в работе Воронова, Дорошенко, Кузьминова [1,2], при распространении излучения в кристалле (обычно используется He-Cd лазер с длиной волны излучения 0,44 мкм) записывается фазовая дифракционная решётка с большим пространственным периодом модуляций показателя преломления. Дифракция проходящего пучка на этой решётке приводит к появлению дополнительных пучков в кристалле, распространяющихся под малыми углами к основному пучку. Затем, и это является характерной чертой эффекта, наблюдается перераспределение энергии в рассеянии. Начиная с некоторого момента времени, энергия из быстро усиливающегося рассеяния под малыми углами (порядка одного градуса) начинает перераспределяться в рассеяние под большими углами (порядка 10 градусов), что становится возможным благодаря большому коэффициенту усиления. Время развития данных процессов при интенсивности падающего луча 17 мВт/см^2 (мощность излучения 0,75 мВт) составляло порядка $1 \dots 20 \text{ с}$.

В целом при записи голограмм явление фотоиндуцированного рассеяния считается нежелательным. Так, в голографических запоминающих устройствах, где 0 соответствует отсутствию сигнального луча, будет записываться голограмма рассеяния, при восстановлении которой может быть считана ложная 1. Для устранения или ослабления этого нежелательного эффекта существует несколько путей. Например, улучшение качества кристалла, при котором происходит увеличение времени нарастания и уменьшение рассеяния; запись каждого бита информации в парафазном коде, когда мощность сигнального луча при записи любой информации постоянна; запись – считывание информации светом различной поляризации [7]. В качестве основной причины возникновения решётки показателя преломления обычно рассматривается интерференция проходящего (референтного) пучка света с пучками света, возникающими в результате рассеяния на случайных неоднородностях в кристалле, связанных, например, с неоднородностью его состава, наличием в нём примесей, напряжений и т.п.

На наш взгляд, особенности фотоиндуцированного рассеяния света в кристаллах SBN изучены недостаточно подробно, например, отсутствует детальное описание его особенностей на начальной стадии процесса формирования крупномасштабной решётки.

Целью работы является детальное исследование особенностей фотоиндуцированного рассеяния (фэннинга) в кристаллах SBN при распространении в них когерентного лазерного излучения необыкновенной поляризации. В связи с этим предполагается подробное изучение картин фэннинга в режиме реального времени.

Литература

- [1] Воронов В.В., Дорош И.Р., Кузьминов Ю.С., Ткаченко Н.В., Квантовая электроника. – Т. 7, № 11 (1980) 2313-2318.
[2] Dorosh I.R., Kuzminov Yu.S., Polozkov N.M., Prokhorov A.M., Osiko V.V., Tkachenko N.V., Voronov V.V., Nurligareev D.Kh. Phys. Stat. Sol. (a) **65** (1981) 513-522.

- [3] Feinberg J. J. Opt. Soc. Am. **72** (1981) 46-51.
 [4] Усиевич Б.А., Нурлигареев Д.Х., Сычугов В.А., Ивлева Л.И., Лыков П.А., Богодаев Н.В. Квантовая электроника, **40**(5) (2010) 437-440.
 [5] Усиевич Б.А., Нурлигареев Д.Х., Сычугов В.А., Ивлева Л.И., Лыков П.А., Богодаев Н.В. Квантовая электроника, **41**(3) (2011) 262-266.
 [6] Нурлигареев Д.Х., Усиевич Б.А., Сычугов В.А., Ивлева Л.И. Квантовая электроника **43**(1) (2013) 14-20.
 [7] И. Р. Дорош. Вопросы радиоэлектроники. Сер. Общетехническая, **3** (1979) 119.

ВЛИЯНИЕ НАНОЧАСТИЦ ЗОЛОТА НА СВОЙСТВА ПЛЁНОК ДИОКСИДА ТИТАНА, ИЗГОТОВЛЕННЫХ ГЕЛЬ МЕТОДОМ

С.А. Алиев, Н.С. Трофимов, Т.К. Чехлова

«THE ROLE OF GOLD NANOPARTICLES ON THE PROPERTIES OF TiO₂ FILMS, MANUFACTURED BY GEL METHOD»

S.A. Aliev, N.S. Trofimov, T.K. Chekhlova

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

e-mail: tcchekhlova@sci.pfu.edu.ru

Тонкие плёнки диоксида титана (TiO₂), в том числе легированные различными элементами, являются в последнее время предметом активных исследований благодаря ряду уникальных свойств этого соединения. Плёнки диоксида титана обладают химической устойчивостью, фоточувствительностью и, кроме того, хорошими оптическими свойствами. Интерес к этим исследованиям обусловлен благодаря их использованию в фотокатализе [1], в частности, при фотолизе воды, как экономически выгодного способа получения водорода. Фотокаталитические процессы также можно использовать для очистки воздуха. Одной из перспективных областей применения диоксида титана является создание солнечных батарей [2]. Кроме того, хорошие оптические свойства плёнок TiO₂ дают перспективы их использования для создания элементной базы интегральной оптики (ИО). Введение различных элементов, в том числе и металлов, чрезвычайно важно с точки зрения создания спектро-селективных материалов при поглощении солнечной энергии, для использования их в качестве катализаторов химических реакций, а также в медицине и биологии [3, 4].

Настоящая работа посвящена исследованию влияния наночастиц золота на свойства плёнок диоксида титана, изготовленных гель-методом. Гель-метод [5] позволяет получать плёнки с содержанием наиболее востребованной для различных применений модификацией анатаза до 100%.

Получение TiO₂ производилось из тетрабутоксид титана (ТБТ) в присутствии триэтиленгликоля (ТЭГ) и н-бутанола. Время синтеза составляло 3-5 мин, через 2 мин в смесь ТБТ+ТЭГ добавляли н-бутанол. Использовались различные соотношения ТБТ:ТЭГ. Плёнки диоксида титана формировались на кварцевых подложках методом вытягивания из раствора и последующего отжига. Ряд образцов был модифицирован наночастицами золота.

Характеристики полученных образцов приведены в таблице 1:

Таблица 1

ТЭГ:ТБТ		1:2	1:1	2:1	1:1 (Au:TiO ₂ = 1:100)	1:1 (Au:TiO ₂ = 1:50)
Температура отжига	450°C	K1	K2	K3	KZ1	KZ2
	700°C	K4	K5	K6	KZ3	KZ4

Экспериментальные образцы исследовались методами ИО [6], оптической спектрофотометрии и термического анализа.

Толщина и показатель преломления исследованных плёнок определялись методом ИО, и результаты представлены в таблице 2:

Таблица 2

Образец	γ_{TE}	γ_{TM}	$h_{крTE}$, нМ	$h_{крTM}$, нМ	h , нМ	n_2
K1	2,0339	1,6424	24	64	120	2,48
K2	1,9419	1,5064	24,354	64	89	2,54
KZ1	1,8494	1,5769	32	71	130	2,24
KZ4	1,7911	1,4817	28	69	91	2,35

Исследование спектров пропускания образцов было проведено с помощью спектрофотометра SPECORD.

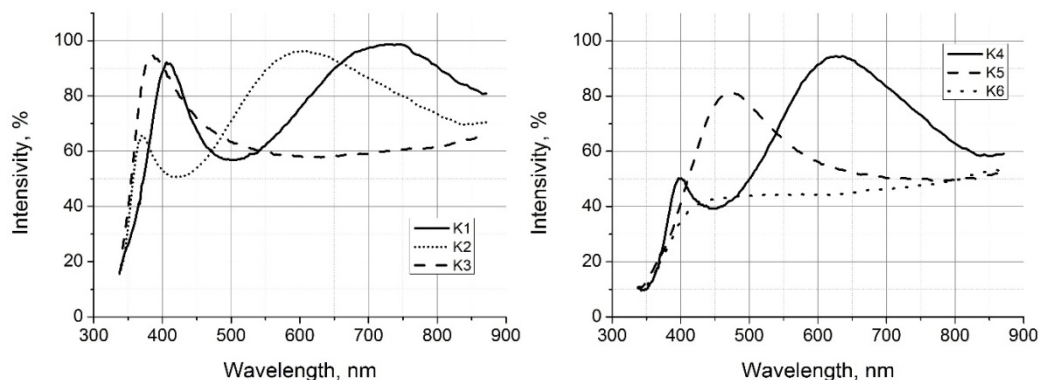


Рис. 1. Спектры пропускания образцов без золота при температуре отжига 450 °C (а) и 700 °C (б)

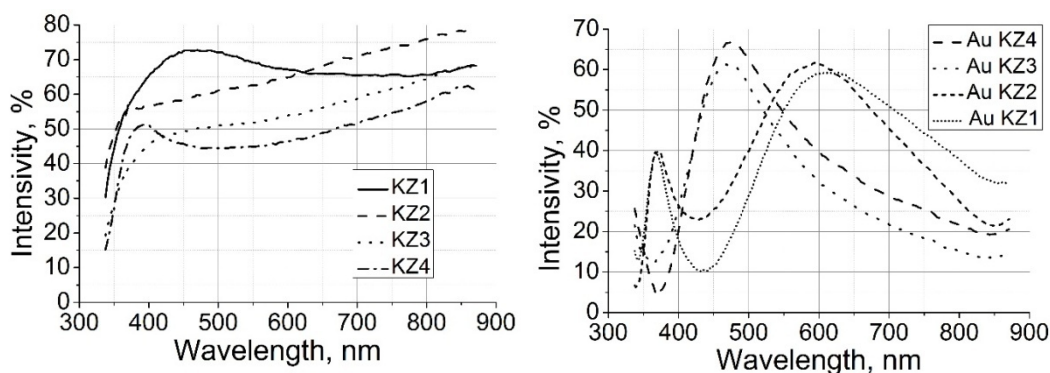


Рис. 2. Спектр пропускания образцов с золотом (а) и разностные спектры поглощения Au в плёнках (б)

Определение температуры фазовых переходов было проведено с помощью термического анализа на термоанализаторе SDTQ600. Синхронным термическим анализом были определены термогравиметрический (ТГА) (рис. 3,а) и дифференциально-термический (ДТА) (рис. 3,б) анализы образцов.

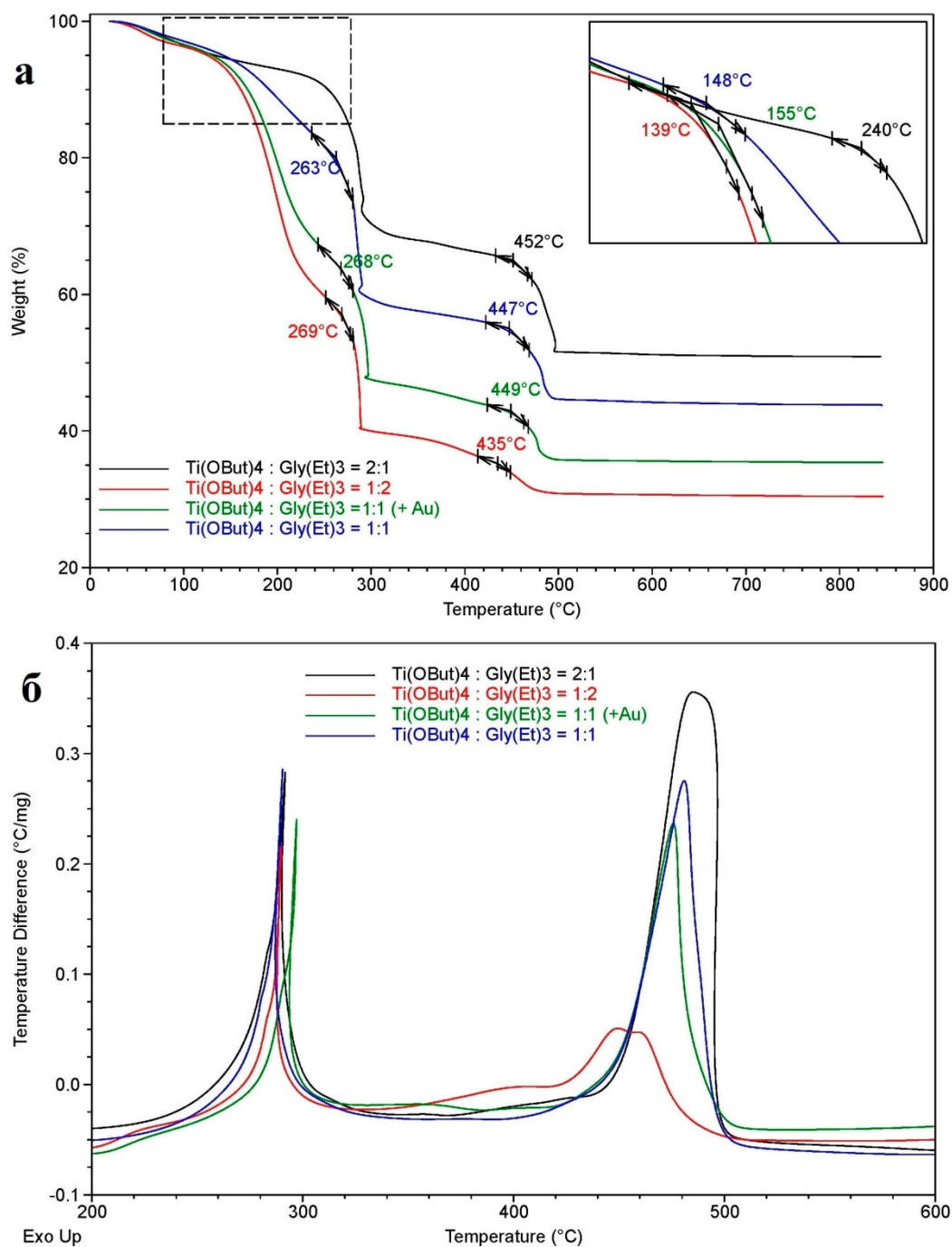


Рис. 3. ТГА (а) и ДТА (б) образцов

Проведенные исследования показали влияние золотых наночастиц на параметры плёнок диоксида титана. Выявлено, что с введением наночастиц в плёнки показатель преломления уменьшается.

Анализ спектров пропускания образцов без добавления золота (К1, К2, К3) при температуре отжига 450°C показал, что край полосы поглощения находится в ультрафиолетовой области спектра. Для образца К1 максимум поглощения наблюдался при $\lambda=500$ нм, а для образца К2 пик поглощения сдвигался на 50 нм в коротковолновую область до $\lambda=450$ нм. На длине волны 600 нм пропускание составило 97%. Образец К3 обладал

примерно одинаковым поглощением в диапазоне длин волн от 500 до 870 нм. При увеличении температуры отжига (700°C) край полосы поглощения сдвигался до 350 нм для всех образцов. У образца К4 максимум поглощения соответствовал $\lambda=450$ нм. Для образца К5 наблюдался медленный рост интенсивности поглощения. Образец К6 обладал примерно одинаковым поглощением в диапазоне от 450 нм и выше.

При введении в плёнки наночастиц золота изменялась интенсивность полос поглощения и их спектральное положение. Наглядное представление об изменении спектров дает рис. 2,б, который представляет собой разностный спектр, полученный вычитанием спектров образцов без золота и с золотом. Происходит увеличение поглощения во всем спектральном диапазоне. Как видно из рис. 2,б при температуре отжига 450°C наблюдался характерный пик на длине волны 600 нм. Увеличение температуры отжига изменяет спектральное положение пика, сдвигая его в коротковолновую область на 130 нм. Сдвиг пика и изменение его ширины по-видимому, связаны с образованием агломератов, изменением размера и формы частиц.

Синхронный термический анализ показал, что полное удаление органических компонент из плёнок происходит при температурах порядка 270°C. Переход диоксида титана из аморфного состояния в анатаз зависит от соотношения компонент раствора (рис. 3). При увеличении доли ТЭГ в растворе температура этого перехода уменьшается, при этом при добавлении наночастиц золота температура фазового перехода практически не изменяется.

Литература

- [1] Thompson T.L., Yats J.T. jr. Surface science studies of photoactivation of TiO₂ new photochemical process // Chem. Rev. 2006. V. 106. N 10. P.4428-4453.
- [2] Gratzel M.J. Dye-sensitized solar cells //J. Photochem. Photobiol. C. 2003. V. 4 . N 2. P. 145-153.
- [3] Е.А. Константинова, В.Я. Гайворонский, В.Ю. Тимошенко, П.К. Кашкаров. Исследование спиновых центров в нанокристаллическом диоксиде титана с высокой степенью фотокаталитической активности. // ФТП, 2010, 44, 8, с. 1093-1098.
- [4] Карпов С.В., Слабко В.В. Оптические и фотофизические свойства фрактально-структурированных золей металлов. – Новосибирск: Издательство СО РАН, 2003.
- [5] Evtushenko Yu.M., Romashkin S.V., Trofimov N.S., Chekhlova T.K. Optical Properties of TiO₂ Thin Films // Physics Procedia, V. 73, 2015, p. 100–107.
- [6] Павлов С.В., Трофимов Н.С., Чехлова Т.К. Исследование температурного коэффициента эффективного показателя преломления оптических золь-гель волноводов с использованием модуля Пельтье // Автометрия 2013. Т.49, №3. – с. 121-128.

МОДУЛЯЦИЯ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА ОСНОВЕ ДВУХ ФАЗОВЫХ ДИФРАКЦИОННЫХ РЕШЕТОК

Комоцкий В.А., Суетин Н.В., Тарабрина И.В.

«LASER LIGHT MODULATION USING SCHEME WITH TWO PHASE DIFFRACTION GRATINGS»

V.A. Komotskii, N.V. Suetin, I.V. Tarabrina

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

e-mail: vkomotskii@mail.ru

Предлагаемое устройство может обеспечить модуляцию мощности излучения при механическом угловом отклонении модулирующего блока и при этом может осуществлять линейную модуляцию мощности в некотором диапазоне угловых отклонений блока дифракционных решёток (ДР).

Модулирующий блок (рис. 1), представляет собой стеклянный параллелепипед **2** с показателем преломления $n = 1,5$, закреплённый на оси **6** электромеханического привода **3**. На противоположных гранях параллелепипеда размещены две фазовые дифракционные решетки с одинаковым периодом Λ и с профилем в виде меандра. Ось вращения привода параллельна штрихам ДР и проходит через центр одной из ДР. Расстояние между дифракционными решетками равно l_z .

Пучок когерентного света от источника **1** проходит через систему из двух ДР и дифрагирует на ней. С помощью щелевого пространственного фильтра **4** выделяется один из первых порядков дифракции. Для регистрации и контроля мощности излучения применялся фотодетектор **5** типа ФД-24К с крутизной 0,24 А/Вт, нагрузкой которого служил резистор с сопротивлением 10 кОм.

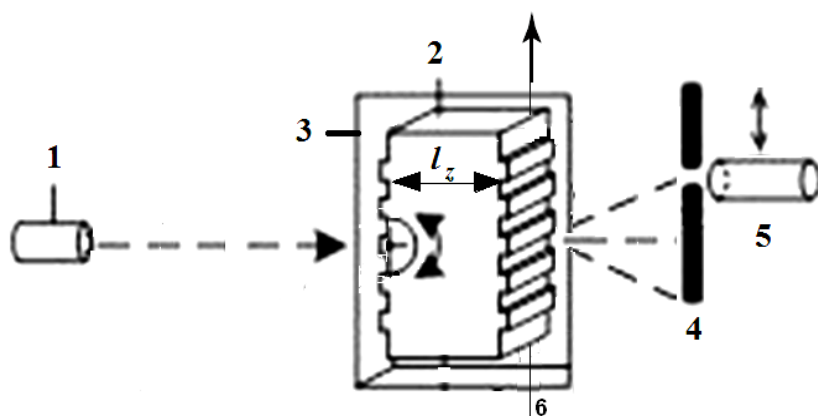


Рис. 1. Модель модулятора на основе двух фазовых дифракционных решёток

При условии, что амплитуда пространственной фазовой модуляции волнового фронта, полученная в результате взаимодействия оптической волны с каждой дифракционной решеткой, равна $\Phi_m = 45^\circ$, зависимость мощности в нулевом порядке дифракции от угла падения лазерного излучения θ имеет следующий вид [1]:

$$P_1(\theta) = P_i \left(\frac{2}{\pi^2} + \frac{2}{\pi^2} \cos \left(\frac{2\pi}{\Lambda} x(\theta) + \frac{\pi \lambda l_z}{\Lambda^2} \right) \right),$$

где $P_i(\theta)$ – мощность лазерного излучения с учётом всех потерь в схеме, а $x(\theta)$ – смещение следа пучка по второй решётке.

Расчётные графики зависимости $P_1(\theta)$ для параллелепипедов с $l_z = 13$ и $l_z = 1$ при $\Lambda = 200$ мкм представлены на рис. 2.

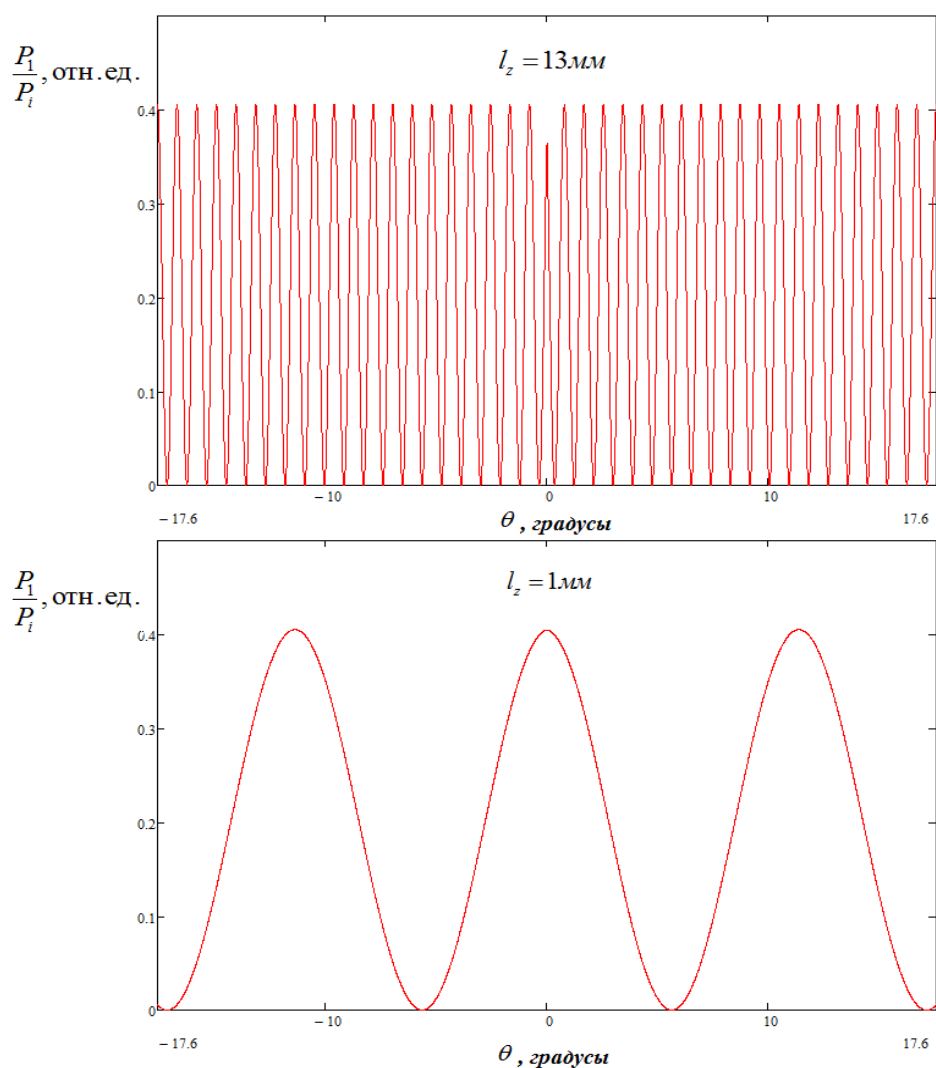


Рис. 2. Зависимость интенсивности в нулевом порядке дифракции от угла падения лазерного излучения на систему из двух решеток при $l_z = 13$ и $l_z = 1$, $\Lambda = 200$ мкм.

Как видно из графиков, при повороте модулирующего блока относительно оси привода, мощность излучения в первом порядке дифракции периодически изменяется и имеет осциллирующий характер. При этом на каждом возрастающем и ниспадающем участке можно выделить линейную область. Таким образом, при повороте блока с помощью электромеханического привода, мы можем осуществлять изменение мощности в выходном пучке устройства.

Экспериментальный макет устройства был собран в соответствии со схемой на рис. 1.

В качестве модулирующего блока **2** был использован блок со следующими характеристиками: $l_z = 13$, $\Lambda = 200$ мкм глубина профиля каждой дифракционной решетки соответствует $\Phi_m \approx 45^\circ$ для излучения с длиной волны $\lambda = 0,632$ мкм.

В качестве электромеханического привода **3** мы использовали шаговый двигатель с редуктором 28BYJ-48. Шаг привода равен $0,088^\circ$. Управление приводом осуществлялось платой с микроконтроллером Arduino Nano.

Корпус устройства был изготовлен с применением технологии 3D-печати.

Была измерена зависимость мощности излучения в первом порядке дифракции от номера шага. В качестве нулевого шага принималось положение привода, при котором свет от источника падал на модулирующий блок под прямым углом. В качестве источника использовался HeNe лазер с длиной волны $\lambda = 0,6328$ мкм.

Было снято 400 экспериментальных точек, 200 из которых соответствовали повороту привода по часовой стрелке, 200 – против часовой стрелки.

Графики экспериментальной зависимости $\frac{P_1}{P_{\max}}(\theta)$ представлены на рис. 3.

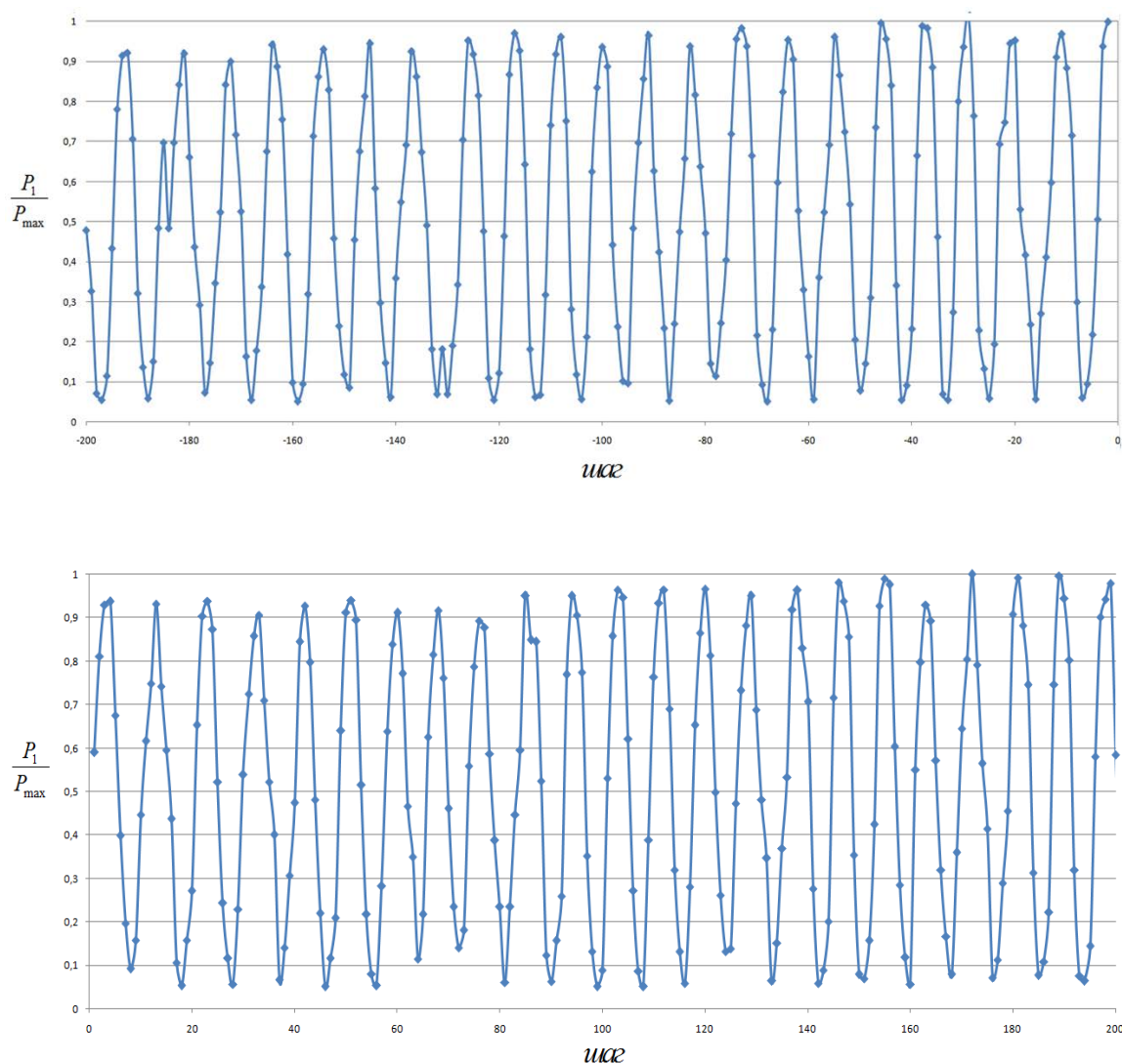


Рис. 3. Графики экспериментальной зависимости нормированного значения мощности в первом порядке P_1 / P_{\max} от угла поворота блока решёток с параметрами: $l_z = 13$, $\Lambda = 200$ мкм, $\Phi_m \approx 45^\circ$.

Как видно из графиков, зависимость имеет осциллирующий характер. При этом крутизна преобразования $P_1(\theta)$ очень высока. Изменение мощности на выходе устройства от

нуля до максимума соответствует 4 шагам привода ($0,3^\circ$). Столь высокая крутизна полезна для датчиков, однако не является достоинством при модуляции мощности излучения лазера. Для уменьшения крутизны преобразования можно уменьшить расстояние между решетками l_z . Так, при $l_z = 1$ (рис. 2) изменение мощности от нуля до максимума соответствует повороту блока модулятора на $5,6^\circ$, что соответствует 64 шагам привода.

В результате проведённой работы показана возможность осуществления модуляции мощности лазерного излучения с помощью простого устройства на основе двух ДР с использованием шагового двигателя в качестве привода. Эффективность устройства составляет менее 50% вследствие наличия двух симметричных выходных дифракционных пучков.

Литература

- [1] В. А. Комоцкий, В. И. Корольков, Ю. М. Соколов, Оптоэлектронные дифракционные датчики малых угловых перемещений, журнал «Фотоника» выпуск №1, 2011, с. 16-19.
- [2] В. А. Комоцкий, В. И. Корольков, Ю. М. Соколов, Исследование датчика малых линейных перемещений на основе двух фазовых дифракционных решеток, журнал «Автоматрия» (Новосибирск), 2006, с.105-112.

Теоретическая физика

ON THE PROBLEM OF DYNAMICAL STABILIZATION OF AN INVERTED OSCILLATOR IN QUANTUM DOMAIN

Chistyakov V.V., K. Olausson. (4)

О ДИНАМИЧЕСКОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ПЕРЕВЕРНУТОГО КВАНТОВОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Чистяков В.В., К. Олауссен (8)

ФОРМИРОВАНИЕ И ЭВОЛЮЦИЯ СТАЦИОНАРНЫХ БРИЗЕРОВ (2+1)-МЕРНОЙ О(3) НЕЛИНЕЙНОЙ σ -МОДЕЛИ

Шокиров Ф.Ш. (12)

КВАНТОВАЯ ЗАДАЧА 3-Х ТЕЛ, СВЯЗАННЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Самсоненко Н. В., Ндахайо Ф., Усман Манга А. (16)

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КИНЕМАТИКА ПРОЦЕССОВ РАССЕЙНИЯ И РАСПАДА ЧАСТИЦ С УЧАСТИЕМ БРАДИОНОВ, ТАХИОНОВ И ЛЮКСОНОВ

Самсоненко Н. В., Бадин М.А., Сёмин М. В. (17)

О СИСТЕМАХ ЧАСТИЦ И ЯДЕР, СВЯЗАННЫХ МАГНИТНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Самсоненко Н. В., Ндахайо Ф., Усман Манга А. (18)

АЛГЕБРЫ, КОНТРАВАРИАНТНЫЕ ИЗОМЕТРИЯМ ЗАДАННОЙ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ, ДЛЯ ЗАДАЧ КВАНТОВОЙ ГРАВИТАЦИИ

Коганов А. В. (19)

ЛЕПТОНЫ И БАРИОНЫ В НЕЛИНЕЙНОЙ СПИНОРНОЙ МОДЕЛИ

Рыбаков Ю.П., Молотков В.И. (24)

О ПРОТЯЖЁННОМ ЭЛЕКТРОНЕ ГУСТАВА МИ

Блинов С. В., Бульженков И. Э. (26)

КОВАРИАНТНОЕ УРАВНЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ В СЛУЧАЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Бейлинсон А.А., Гоним Н. (29)

ПОЗИТОННО-НЕГАТОННАЯ СИММЕТРИЯ МАТЕРИИ

Холодов Л.И., Горячев И.В. (32)

СООБРАЖЕНИЯ О ФИЗИЧЕСКОМ СМЫСЛЕ ПОСТОЯННОЙ ТОНКОЙ СТРУКТУРЫ

Холодов Л.И., Горячев И.В. (36)

**АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЕШЕНИЙ СПИНОРНОЙ ЧАСТИЦЫ
В ПОЛЕ ШВАРЦШИЛЬДА**

Овсюк Е. М., Веко О. В., Русак Ю. А., Чичурин А. В., Редьков В. М. (38)

**КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 1 И АНОМАЛЬНЫМ
МАГНИТНЫМ МОМЕНТОМ В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ**

Кисель В.В., Овсюк Е.М., Войнова Я.А., Веко О.В., Редьков В.М. (44)

**It is time to verify Einstein's material space of continuous masses and extended electric
charges**

Bulyzhenkov I. E. (50)

**ФОРМИРОВАНИЕ КОГЕРЕНТНЫХ СТРУКТУР В КОМПЛЕКСНОМ
УРАВНЕНИИ СВИФТА-ХОЕНБЕРГА**

Муминов Х.Х., Мухамедова Ш.Ф. (52)

**ПРИНЦИП СИЛЬНОЙ ПРИЧИННОСТИ В ДИНАМИКЕ
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО РОСТА**

Круглый А.Л. (55)

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ
ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ВИХРЕЙ С ДОМЕННОЙ СТЕНКОЙ В
(2+1)-МЕРНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ σ -МОДЕЛИ**

Муминов Х.Х., Шокиров Ф.Ш. (59)

**КОЛЛЕКТИВНАЯ ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ ДИНАМИКА НА КОМПЛЕКСНОЙ
ПЛОСКОСТИ**

Кассандров В. В., Мархиев А. Х. (63)

**QUASI-BLACK HOLES IN DILATON GRAVITY WITH ZERO SCALAR CHARGE
DENSITY**

Bronnikov K.A, Israpilov D. (66)

**WORMHOLES AND BLACK UNIVERSES WITH VARIOUS ASYMPTOTIC
BEHAVIOR**

Bronnikov K.A., Korolyov P.A. (69)

**О ВОЗМОЖНОМ ВЛИЯНИИ ТЕМНОЙ МАТЕРИИ НА ДВИЖЕНИЕ
КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ В ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ ВЕЙЛЯ–ДИРАКА**

Бабурова О.В., Кудлаев П.Э., Фролов Б.Н. (69)

**АТОМ ВОДОРОДА С УЧЁТОМ ГРАВИТАЦИОННОГО
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ**

Лаптев Ю.П., Фильченков М.Л. (70)

ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС И КВАНТОВАЯ СТАТИСТИКА

Камалов Т.Ф. (73)

- ДОСТИЖЕНИЕ КОНЕЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН**
Молодцова М.О., Копылов С.В. (76)
- CLASSICAL DYNAMICS OF MULTI-POLAR SYSTEMS**
Yamaleev R.M. (80)
- CHIRAL OSCILLATORS FROM Σ -MODEL**
Sergeeva E., Rybakov Y.P., Islam A. (83)
- INTERACTION OF GRAPHENE WITH EXTERNAL MAGNETIC FIELD
IN CHIRAL MODEL**
Rybakov Yu. P., Iskandar M., Ahmed A. B. (84)
- ON SOME FLOWS OF VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLUIDS WITH HIGH
REYNOLDS NUMBERS**
Rabinowitch A. S. (86)
- ON THE OSCILLATION-DRIVEN COSMOLOGICAL EXPANSION
AT THE POST-INFLATION STAGE**
Koutvitsky V.A., Maslov E.M. (89)
- SCALAR FIELD WITH THE SOURCE AS THE STRESS-ENERGY
TENSOR TRACE AS THE DARK ENERGY MODEL**
Vyblyi Yu. P., Dudko I. G. (91)
- THE POESCHL-TELLER OSCILLATOR FOR THE EFFICENCY OF JOULE-
Brayton cycle.**
Rudoy Yu. G., Oladimeji E. O. (95)
- В ПРОТЯЖЕННОМ ЭЛЕКТРОНЕ ГУСТАВА МИ ДОПУСТИМЫ ПРОДОЛЬНЫЕ
ВОЛНЫ, ЗАПРЕЩЕННЫЕ ПУСТЫМ ПРОСТРАНСТВОМ**
Блинов С. В., Булыженков И. Э. (98)
- МОДЕЛИРОВАНИЕ КВАНТОВО-КРИПТОГРАФИЧЕСКИХ ЗАПУТАННЫХ
СИСТЕМ**
Зар Ну Аунг (101)
- A UNIFIED PHYSICS NOW**
Ivanhoe B.Pestov (103)
- ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПЛАЗМОХИМИЧЕСКОГО МОДИФИЦИРОВАНИЯ
УГЛЕРОДНЫХ ВОЛОКОН ПРИ СОЗДАНИИ КОМПОЗИЦИОННЫХ
МАТЕРИАЛОВ ТРИБОТЕХНИЧЕСКОГО НАЗНАЧЕНИЯ**
Селькин В.П., Толстопятов Е.М., Копылов С.В. (105)

Теоретическая механика

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СТАБИЛИЗАЦИИ СВЯЗЕЙ К ЗАДАЧАМ НЕГОЛОНОМНОЙ МЕХАНИКИ

Каспирович И. Е., Мухарлямов Р. Г. (112)

УПРАВЛЕНИЕ ПРЕЦИЗИОННОЙ ПОВОРОТНОЙ ПЛАТФОРМОЙ С ЦЕЛЬЮ СНИЖЕНИЯ КАЖУЩЕГОСЯ УСКОРЕНИЯ

Ананьевский И.М., Ишханян Т. А. (115)

ВЛИЯНИЕ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ВИБРАЦИЙ ТОЧКИ ПОДВЕСА НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРМАНЕНТНЫХ ВРАЩЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ ОСЕЙ, ЛЕЖАЩИХ В ГЛАВНОЙ ПЛОСКОСТИ ИНЕРЦИИ

Вишенкова Е.А. (117)

УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОМ БЕЗУДАРНОГО ЗАХВАТА НЕПРЕДСКАЗУЕМО ДВИЖУЩЕГОСЯ ОБЪЕКТА МОБИЛЬНЫМ МАНИПУЛЯЦИОННЫМ РОБОТОМ

Мухаметзянов И.А., Чекмарева О.И. (121)

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ В ЗАДАЧАХ КЛАССИЧЕСКОЙ И НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ ПРИ НАЛИЧИИ КРАТНЫХ РЕЗОНАНСОВ ТРЕТЬЕГО И ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКОВ

Холостова О.В. (123)

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ВРАЩЕНИЙ ВОЛЧКА ЛАГРАНЖА С ВИБРИРУЮЩЕЙ ТОЧКОЙ ПОДВЕСА

Беличенко М. В. (125)

О ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОМ ПОСТРОЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ СИММЕТРИЧНОГО СПУТНИКА, РОЖДАЮЩИХСЯ ИЗ ЕГО ГИПЕРБОЛОИДАЛЬНОЙ ПРЕЦЕССИИ

Сухов Е. А., Бардин Б. С. (128)

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКОГО РЕЗОНАНСНОГО ВРАЩЕНИЯ СИММЕТРИЧНОГО СПУТНИКА НА ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОРБИТЕ

Бардин Б.С., Чекина Е.А. (131)

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ СО ВТОРОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕНИ В ФОРМЕ ГАМИЛЬТОНА-ДОПУСТИМОГО УРАВНЕНИЯ

Будочкина С.А. (136)

**ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОГРАММНОГО МНОГООБРАЗИЯ СИСТЕМ
АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ**

Жуматов С.С.

(137)

**О РЕШЕНИИ ОСНОВНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ПРИ НАЛИЧИИ СЛУЧАЙНЫХ
ВОЗМУЩЕНИЙ**

Глеубергенов М. И., Ибраева Г.Т.

(141)

**ИССЛЕДОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ В ЛИНЕЙНОМ
ПРИБЛИЖЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ГАМИЛЬТОНОВОЙ
СИСТЕМЫ ПРИ НАЛИЧИИ ДВОЙНОГО РЕЗОНАНСА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА**

Сафонов А.И.

(145)

**АЛГОРИТМЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ И УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ
МОБИЛЬНОГО РОБОТА KUKA YOUNOT**

Адамов Б.И.

(148)

**ПРИБЛИЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА НА КРУГОВОЙ
ОРБИТЕ ПРИ БЫСТРОМ ОТНОСИТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ НЕСОМОЙ ИМ
МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ**

Маркеев А.П.

(153)

***Физика плазмы и взаимодействие
электромагнитного излучения с веществом***

**УЛУЧШЕНИЕ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ ЭЦР ИСТОЧНИКА ТРИЦАТЕЛЬНЫХ
ВОДОРОДНЫХ ИОНОВ С ПОМОЩЬЮ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ЭМИТТЕРОВ
НИЗКОТЕМПЕРАТУРНЫХ ЭЛЕКТРОНОВ.**

Дугар-Жабон В. Д., Каряка В. И.

(158)

**ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОНА В ПОЛЕ МОЩНОГО ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ
И ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ**

Никола Маркоски

(160)

**ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ МЕХАНИЗМА СЕРФОТРОННОГО УСКОРЕНИЯ
РЕЛЯТИВИСТСКИХ ПОЗИТРОНОВ В КОСМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЕ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНОЙ**

Мкртчян Г.С., Ерохин Н.С.

(164)

**МГД-УРАВНЕНИЯ ГЛОБАЛЬНЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ АКУСТИЧЕСКИХ МОД В
ТОРОИДАЛЬНО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПЛАЗМЕ ТОКАМАКА**

Сорокина Е.А., Лахин В.П., Коновальцева Л.В.

(168)

**О СОХРАНЕНИИ ФАЗОВОГО ОБЪЁМА ПРИ ДВИЖЕНИИ ВЕДУЩЕГО ЦЕНТРА
В СИЛЬНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ.**

Марусов Н.А., Сорокина Е.А. (173)

**ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОХОЖДЕНИЯ ВНУТРЕННИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН
С МАЛЫМИ ВЕРТИКАЛЬНЫМИ ДЛИНАМИ ВОЛН В ИОНОСФЕРУ**

Суслов А.И., Ерохин Н.С. (176)

**СЕФОТРОННОЕ УСКОРЕНИЕ ЯДЕР ГЕЛИЯ В КОСМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЕ ПРИ
НИЗКОЙ ФАЗОВОЙ СКОРОСТИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ**

Ерохин А.Н., Зольникова Н.Н., Ерохин Н.С., Михайловская Л.А. (180)

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ ВРЕМЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК
ПРОБОЯ РЕЗОНАНСНОГО ИМПУЛЬСНО-ПЕРИОДИЧЕСКОГО
МИКРОВОЛНОВОГО РАЗРЯДА**

Василеска И., Корнеева М.А. (183)

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПЛАЗМОХИМИЧЕСКОГО МОДИФИЦИРОВАНИЯ
УГЛЕРОДНЫХ ВОЛОКОН ПРИ СОЗДАНИИ КОМПОЗИЦИОННЫХ
МАТЕРИАЛОВ ТРИБОТЕХНИЧЕСКОГО НАЗНАЧЕНИЯ**

Селькин В.П., Толстомятов Е.М., Копылов С.В. (187)

Оптоэлектроника и интегральная оптика

**ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ СИНТЕЗА ИНВАРИАНТНЫХ
КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФИЛЬТРОВ ПРИ РАСПОЗНАВАНИИ ЦВЕТНЫХ
ИЗОБРАЖЕНИЙ**

Петрова Е.К., Стариков Р.С., Шаульский Д.В. (194)

**ЭФФЕКТ СВЕРХРАЗРЕШЕНИЯ НА ФАЗОВОМ ОТКЛИКЕ СКАНИРУЮЩЕГО
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ГЕТЕРОДИННОГО МИКРОСКОПА**

Ахмеджанов И. М., Баранов Д. В., Золотов Е. М. (197)

ОСОБЕННОСТИ РАЗВИТИЯ ФЭННИНГА В КРИСТАЛЛАХ SBN

Ахмеджанов И.М., Мельников А.В., Нурлигареев Д.Х., Усиевич Б.А. (200)

**ВЛИЯНИЕ НАНОЧАСТИЦ ЗОЛОТА НА СВОЙСТВА ПЛЁНОК ДИОКСИДА
ТИТАНА, ИЗГОТОВЛЕННЫХ ГЕЛЬ МЕТОДОМ**

Алиев С.А., Трофимов Н.С., Чехлова Т.К. (201)

**МОДУЛЯЦИЯ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА ОСНОВЕ ДВУХ ФАЗОВЫХ
ДИФРАКЦИОННЫХ РЕШЕТОК**

Комоцкий В.А., Суетин Н.В., Тарабрина И.В. (205)

Научное издание

ЛII
ВСЕРОССИЙСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ
ПО ПРОБЛЕМАМ ДИНАМИКИ,
ФИЗИКИ ЧАСТИЦ, ФИЗИКИ ПЛАЗМЫ
И ОПТОЭЛЕКТРОНИКИ

Издание подготовлено в авторской редакции

Технический редактор *Е.Н. Собанина*
Дизайн обложки *Ю.Н. Ефремова*

Подписано в печать 09.03.2017 г. Формат 60×84/8.
Печать офсетная.
Усл. печ. л. 29,5. Тираж 100 экз. Заказ 1918

Российский университет дружбы народов
115419, ГСП-1, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3

Типография РУДН
115419, ГСП-1, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, тел. 952-04-41

Для заметок

Для заметок
