**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ»**

С.В. Волков

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Учебное пособие по математике

**Москва
Российский университет дружбы народов
2017**

УДК 512.64(075.8)
ББК 22.143
В67

У т в е р ж д е н о
РИС Ученого совета
Российского университета
дружбы народов

Р е ц е н з е н т –
кандидат физико-математических наук, доцент *А.И. Громов*

Волков, С. В.

В67 Элементы линейной алгебры : учебное пособие по математике / С. В. Волков. – Москва : РУДН, 2017. – 80 с. : ил.

ISBN 978-5-209-08157-9

Предназначено для студентов 1-го курса направлений «Экономика» и «Финансы и кредит» заочного отделения экономического факультета.

Подготовлено на кафедре математики и информатики факультета русского языка и общеобразовательных дисциплин РУДН.

ISBN 978-5-209-08157-9

Оглавление

Тема 1

Матрицы

1.1 Определение матрицы. Типы матриц

***Определение* 1.1.** *Произвольная система элементов (чисел), расположенная в виде прямоугольной таблицы, содержащей m строк и n столбцов, называется (m, n)-матрицей или матрицей размера $m \times n$.*

Для краткого обозначения матриц используются заглавные латинские буквы $A, B, C \ldots$. Например, матрица A размера $m \times n$ записывается в виде таблицы, заключённой в круглые скобки:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Для этой матрицы используется также сокращённая запись

$$A = ||a_{ij}||_{m \times n} \quad \text{или} \quad A = ||a_{ij}|| \quad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n),$$

где первый индекс i элемента a_{ij} указывает номер строки, а второй индекс j — номер столбца, в которых расположен этот элемент.

Типы матриц

1. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой* матрицей.

2. Если число строк матрицы равно числу её столбцов, то матрица называется *квадратной*, а само это число называется *порядком* квадратной матрицы.

Для квадратной матрицы вводятся понятия главной и побочной диагоналей. *Главной диагональю* квадратной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется диагональ, идущая из её верхнего левого угла в её нижний правый угол; эта диагональ содержит элементы $a_{11}, a_{11}, \dots, a_{nn}$. *Побочной диагональю* этой матрицы называется диагональ, идущая из её верхнего правого угла в её нижний левый угол; эта диагональ образуется элементами $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$.

3. Квадратная матрица первого порядка отождествляется с числом, которое образует эту матрицу.

4. Квадратная матрица вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

у которой все элементы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю, называется *диагональной матрицей.*

5. Диагональная матрица, все диагональные элементы которой равны единице, называется *единичной матрицей*:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Матрица размера $1 \times n$ называется *вектор-строкой*, а матрица размера $n \times 1$ называется *вектор-столбцом.* Для этих матриц ис-

пользуются обозначения

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

соответственно.

***Определение* 1.2.** *Две матрицы называются равными, если они имеют одинаковое число строк, одинаковое число столбцов и равные соответствующие элементы.*

Таким образом, если $A = ||a_{ij}||_{m_1 \times n_1}$ и $B = ||b_{ij}||_{m_2 \times n_2}$, то

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} 1.\ m_1 = m_2 = m,\ n_1 = n_2 = n; \\ 2.\ a_{ij} = b_{ij} \quad (i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n). \end{cases}$$

***Следствие* 1.1.** *Равенство между двумя (m, n)-матрицами равносильно системе $m \times n$ равенств между их элементами.*

1.2 Действия с матрицами

1. *Суммой двух матриц* $A = ||a_{ij}||_{m \times n}$ и $B = ||b_{ij}||_{m \times n}$ с одинаковым числом строк и с одинаковым числом столбцов называется матрица $C = ||c_{ij}||_{m \times n}$, которая имеет те же числа строк и столбцов и элементы c_{ij} которой равны суммам соответствующих элементов матриц A и B:

$$C = A + B, \quad \text{где} \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}\ (i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n).$$

В развёрнутом виде получим

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Свойства сложения матриц.

1.1. $A + B = B + A$ — переместительное свойство (коммутативность).

1.2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ — сочетательное свойство (ассоциативность).

2. *Произведением матрицы* $A = ||a_{ij}||$ *на число* λ называется матрица λA, у которой каждый элемент равен соответствующему элементу матрицы A, умноженному на число λ:

$$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Свойства умножения матрицы на число.

1. $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$ — сочетательное свойство относительно числовых множителей.

2. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ — распределительное свойство (дистрибутивность) относительно суммы матриц.

3. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ — распределительное свойство (дистрибутивность) относительно суммы чисел.

Пример 1.1. Вычислить линейную комбинацию $3A + 2B$ матриц A и B, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Используя свойства действий умножения матрицы на число и сложения матриц, получим

$$\begin{aligned} &3A + 2B = \\ &= \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 1 & 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 0 & 3 \cdot 1 & 3 \cdot (-4) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \cdot (-2) & 2 \cdot 1 & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot (-3) & 2 \cdot 2 & 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -6 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \\ &\qquad = \begin{pmatrix} 6-4 & 3+2 & -3+0 \\ 0-6 & 3+4 & -12+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ -6 & 7 & -8 \end{pmatrix}. \qquad \square \end{aligned}$$

3. *Произведением матрицы* $A = ||a_{ij}||_{m_1 \times n_1}$ *на матрицу* $B = ||b_{ij}||_{m_2 \times n_2}$, где $m_2 = n_1$, называется матрица $C = ||c_{ij}||_{m_1 \times n_2}$, у которой элемент c_{ij} равен сумме произведений соответствующих элементов i-ой строки матрицы A и j-го столбца матрицы B:

$$C = AB, \quad \text{где} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n_1} a_{ik} b_{kj} \ (i = 1, \ldots, m_1;\ j = 1, \ldots, n_2).$$

***Замечание* 1.1.** *В этом определении равенство* $m_2 = n_1$ *означает, что число столбцов первой матрицы дожно быть равно числу строк второй матрицы.*

Пример 1.2. Вычислить произведение AB, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 4 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 5 \cdot 3 & 4 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 5 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 19 & 14 \end{pmatrix}$$

Свойства умножения матриц.

1. $(AB)C = A(BC)$ — сочетательное свойство.
2. $A(B+C) = AB+AC$ — распределительное свойство относительно суммы матриц.

***Замечание* 1.2.** *Существование обоих произведений* AB *и* BA *возможно только для квадратных матриц* A *и* B *одинаковых порядков.*

***Замечание* 1.3.** *В общем случае произведение двух матриц не обладает перестановочным свойством (или свойством коммутативности):* AB *может отличаться от* BA. *Если* $AB = BA$, *то матрицы* A *и* B *называются перестановочными.*

1.3 Транспонирование матрицы

***Определение* 1.3.** *Матрица* $A^T = ||a_{ij}^T||_{n\times m}$ *называется транспонированной по отношению к матрице* $A = ||a_{ij}||_{m\times n}$*, если выполняются равенства* $a_{ij}^T = a_{ji}$ *для всех* $i = 1, \ldots, n$ *и* $j = 1, \ldots, m$.

Из этого определения следует, что транспонированная матрица A^T получается из матрицы A преобразованием её строк в столбцы с сохранением их порядковых номеров.

Пример 1.3. Транспонировать матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение. $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Свойства транспонированных матриц

1. $(A^T)^T = A$.
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$.
3. $(AB)^T = B^T A^T$.

Тема 2

Определители

2.1 Определение определителя матрицы

Для квадратной матрицы вводится понятие определителя.

***Определение* 2.1.** *Определителем матрицы первого порядка, образованной числом a, называется само это число. Определителем произвольной квадратной матрицы A порядка $n > 1$ называется число, которое обозначается символом $|A|$ и вычисляется по формуле*

$$|A| = a_{11} \cdot |A_{11}| - a_{12} \cdot |A_{12}| + \ldots + (-1)^{n-1} a_{1n} \cdot |A_{1n}|, \qquad (2.1)$$

где $|A_{1i}|$ — определитель матрицы $(n-1)$-го порядка, получаемой из исходной матрицы A удалением из неё первой строки и i-го столбца $(i = 1, \ldots, n)$.

Для определителя матрицы A используется также обозначение

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (2.2)$$

***Замечание* 2.1.** *Равенство* (2.1) *называется формулой разложения определителя по первой строке.*

Пример 2.1. Вычислить определитель матрицы второго порядка ($n = 2$).

Решение. Пусть матрица $A = ||a_{ij}||$ $(i, j = 1, 2)$. Используя формулу (2.1), получим

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} - a_{12} \cdot A_{12}, \quad \text{где} \quad A_{11} = a_{22}, A_{12} = a_{21}.$$

Отсюда следует, что определитель матрицы второго порядка равен разности произведений элементов её главной и побочной диагоналей:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{2.3}$$

Пример 2.2. Вычислить определитель матрицы третьего порядка ($n = 3$).

Решение. Пусть $A = ||a_{ij}||$ $(i, j = 1, 2, 3)$. Используя формулу (2.3), получим:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} - a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} =$$

$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Вычислив по формуле (2.3) определители второго порядка в правой части последнего равенства, окончательно получим

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} + a_{12}a_{31}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Пример 2.3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение. Используя формулу (2.1) или (2.3), получим

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 2 - 4 \cdot (-5) = -2 + 20 = 18.$$ □

Пример 2.4. Вычислить определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix},$$

используя его разложение по первой строке.

Решение. В соответствии с формулой (2.1) выполним разложение данного определителя по первой строке:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(56-2) - 4(64+4) - 5(-8-14) = 3 \cdot 54 - 4 \cdot 68 + 5 \cdot 22 = 0. \qquad \square$$

2.2 Общие свойства определителей

Теорема 2.1. *Если две квадратные матрицы A и B одного и того же порядка n отличаются друг от друга только элементами какой-то одной k-ой строки, то сумма их определителей*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & \dots & b_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1}+b_{k1} & \dots & a_{kn}+b_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Теорема 2.2. *Если элементы какой-нибудь строки (или столбца) квадратной матрицы умножить на некоторое число λ, то определитель матрицы также умножится на это число λ:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{k1} & \dots & \lambda a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda |A|.$$

***Следствие* 2.1.** *Для квадратной матрицы A порядка n определитель $|\lambda A| = \lambda^n |A|$.*

Теорема 2.3. *Если в квадратной матрице переставить местами какие-нибудь две строки (или столбца), то знак определителя матрицы изменится на противоположный.*

***Следствие* 2.2.** *Определитель квадратной матрицы, которая имеет две одинаковые строки (или столбца), равен нулю.*

Доказательство. Пусть в данном случае матрица $\tilde{A}$ получена из матрицы A перестановкой местами двух одинаковых строк. Очевидно, что $\tilde{A} = A$ и, следовательно, $|\tilde{A}| = |A|$. С другой стороны, $|\tilde{A}| = -|A|$ по теореме 2.3. Из последних двух равенств заключаем, что

$$|\tilde{A}| = |A| = 0. \quad \square$$

***Следствие* 2.3.** *Если к элементам какой-либо строки квадратной матрицы прибавить соответствующие элементы другой её строки, умноженной на произвольный множитель λ, то определитель матрицы не изменится.*

Доказательство. Из теорем 2.1, 2.1 и следствия 2.3 следует, что

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} + \lambda a_{r1} & \dots & a_{sn} + \lambda a_{rn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & \dots & a_{sn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = |A|.$$

$\square$

Теорема 2.4. *Определитель квадратной матрицы не изменяется при её транспонировании:* $|A^T| = |A|$.

***Следствие* 2.4.** *Из теоремы 2.4 следует справедливость утверждений теорем 2.1-2.3 не только по отношению к строкам определителей, но и по отношению к их столбцам.*

***Следствие* 2.5.** *Определитель треугольной матрицы равен произведению её диагональных элементов:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} a_{2n} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

Теорема 2.5. *Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей:* $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

Пример 2.5. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, используя общие свойства определителей.

Решение. Используя сформулированные выше теоремы и следствия из них, приведём данный определитель к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=}$$

$$\overset{(3)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 4 = 4.$$

Эта последовательность равенств — результат следующих преобразований определителей:

1-е преобразование — перестановка 1-й и 2-й строк (теорема 2.3);

2-е преобразование — вычитание из второй строки первой строки, умноженной на 2 (следствие 2.3);

3-е преобразование — перестановка 2-й и 3-й строк (теорема 2.3);

4-е преобразование — прибавление к третьей строке второй строки, умноженной на 3 (следствие 2.3). □

2.3 Миноры матриц. Ранг матрицы.

Рассмотрим произвольную матрицу A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

***Определение* 2.2.** *Минором k-го порядка матрицы A называется определитель k-го порядка, составленный из элементов, расположенных на пересечениях любых k строк и k столбцов этой матрицы, где число $k \le \min(m, n)$.*

***Определение* 2.3.** *Рангом матрицы A называется наибольший порядок отличных от нуля её миноров и обозначается символом* $\mathrm{rang}A$ *или* $\mathrm{rg}\,A$.

Метод окаймляющих миноров. Пусть в матрице найден минор k-го порядка M_k, который отличен от нуля. Далее рассматриваются лишь те миноры $(k+1)$-го порядка, которые содержат в себе (окаймляют) минор M_k; если все они равны нулю, то ранг матрицы равен k. В противном случае среди окаймляющих миноров найдётся ненулевой минор $(k+1)$-го порядка M_{k+1}, и выполняется аналогичная процедура рассмотрения окаймляющих его миноров.

Пример 2.6. Методом окаймляющих миноров найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. В качестве минора 1-го порядка, отличного от нуля, возьмём, например, элемент $a_{11} = 2$ и рассмотрим окаймляющие его миноры 2-го порядка:

$$M_{2,1} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad M_{2,2} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad M_{2,3} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \ne 0.$$

Следовательно, $\mathrm{rang}\,A \ge 2$. Переходим к рассмотрению миноров 3-го порядка, которые окаймляют (включают в себя) минор $M_{2,3}$:

$$M_{3,1} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 10 \end{vmatrix} = 0.$$

$$M_{3,2} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Так как все окаймляющие миноры 3-го порядка равны нулю, то $\operatorname{rang} A = 2$. □

Метод элементарных преобразований. Метод основан на том, что при элементарных преобразованиях матрицы её ранг остаётся неизменным. Используя эти преобразования, приводим матрицу к ступечатому виду, когда все элементы, расположенные под элементами $a_{11}, \ldots, a_{mm}$, где m — число строк матрицы, равны нулю. Число r отличных от нуля элементов $a_{11}, \ldots, a_{rr}$ ($r \leq \min(m, n)$) равно рангу исходной матрицы.

***Замечание* 2.2.** *В данном случае элементарными называются любые преобразования над строками и столбцами матрицы, которые не изменяют свойства равенства нулю её миноров. Такими преобразованиями, в частности, являются: перестановки строк (столбцов); умножение любой строки (столбца) на произвольный отличный от нуля множитель; сложениияе любых строк (столбцов), умноженных предварительно на любые отличные от нуля множители.*

Пример 2.7. Методом элементарных преобразований вычислить ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 10 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ 16 & 4 & 52 & 9 \\ 8 & -1 & 6 & -7 \end{pmatrix}.$$

Решение. С помощью элементарных преобразований, указанных в замечании 2.2, приведём данную матрицу к ступенчатому (а в случае квадратной матрицы

— к треугольному) виду:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 10 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ 16 & 4 & 52 & 9 \\ 8 & -1 & 6 & -7 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ 4 & 16 & 52 & 9 \\ -1 & 8 & 6 & -7 \end{pmatrix} \overset{(2)}{\Rightarrow}$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & 8 & 26 & 9 \\ -1 & 4 & 3 & -7 \end{pmatrix} \overset{(3)}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & 6 & -3 \\ 0 & 4 & 8 & -4 \end{pmatrix} \overset{(4)}{\Rightarrow}$$

$$\overset{(4)}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где

1-е преобразование — перестановка местами 1-го и 2-го столбцов;

2-е преобразование — деление 2-го и 3-го столбцов на 2;

3-е преобразование — вычитание из 3-й и 4-й строк 1-й строки, умноженной предварительно на 4 и на -1 соответственно;

4-е преобразование — вычитание из 3-й и 4-й строк 2-й строки, умноженной предварительно на 8 и на 4 соответственно. Из вида последней матрицы следует, что её ранг, а следовательно, и ранг исходной матрицы равен 3.

Тема 3

Обратные матрицы

3.1 Алгебраические дополнения и их свойства

***Определение* 3.1.** *Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя (2.3) квадратной матрицы A называется число*

$$d_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|, \tag{3.1}$$

где $|A_{ij}|$ — определитель матрицы A_{ij}, которая получается из матрицы A удалением из неё i-ой строки и j-го столбца.

Теорема 3.1. *Сумма произведений элементов какой-либо строки (или столбца) определителя на свои алгебраические дополнения равна величине определителя. Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов любой другой строки (или столбца) равна нулю:*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}d_{kj} = a_{i1}d_{k1} + \ldots + a_{in}d_{kn} = \begin{cases} |A|, & \text{если } i = k; \\ 0, & \text{если } i \neq k. \end{cases} \tag{3.2}$$

Доказательство. Докажем справедливость первого предложения теоремы. Для этого выразим определитель матрицы A через алгебраические дополнения d_{ij} соответствующих элементов a_{ij} её i-ой строки:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i-1} \cdot \begin{vmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \\ a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{i-1} \cdot \left[a_{i1}|A_{i1}| - a_{i2}|A_{i2}| + \ldots + (-1)^{n-1} a_{in}|A_{in}|\right] =$$

$$= (-1)^{i-1} \cdot \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} a_{ij}|A_{ij}| =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j-2} a_{ij}|A_{ij}| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} d_{ij}. \quad (3.3)$$

Для доказательства второго предложения теоремы, соответствующего в равенствах (3.2) случаю $i \neq k$, воспользуемся равенствами (3.3) и представим сумму $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj} d_{kj}$ следующим оборазом:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} d_{kj} = (-1)^{k-1} \cdot \begin{vmatrix} a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1,1} & \dots & a_{k-1,n} \\ a_{k+1,1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

В последнем определителе первую строку $(a_{k1}, \ldots, a_{kn})$ заменим

i-ой строкой $(a_{i1}, \ldots, a_{in})$. В результате получим

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} d_{kj} = (-1)^{k-1} \cdot \begin{vmatrix} a_{i1} & \ldots & a_{in} \\ a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k-1,1} & \ldots & a_{k-1,n} \\ a_{k+1,1} & \ldots & a_{k+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Последнее равенство обусловлено тем, что в его левую часть входит определитель с двумя одинаковыми строками $(a_{i1}, \ldots, a_{i1})$.

Справедливость утверждений данной теоремы для столбцов следует из теоремы 2.4 об определителе транспонированной матрицы.

3.2 Обратные матрицы

***Определение* 3.2.** *Матрица, транспонированная к матрице, составленной из алгебраических дополнений d_{ij} к соответствующим элементам a_{ij} матрицы A, называется присоединённой матрицей для матрицы A и обозначается символом A^*:*

$$A^* = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{21} & \ldots & d_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{1n} & d_{2n} & \ldots & d_{nn} \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

***Следствие* 3.1.** *Из теоремы 3.1 о сумме произведений элементов строки (столбца) на соответствующие алгебраические дополнения следует, что*

$$A \cdot A^* = A^* \cdot A = |A| \cdot E, \tag{3.5}$$

где E — единичная матрица порядка n. Умножая все части равенств (3.5) на $|A|^{-1}$, получим

$$A \cdot \frac{A^*}{|A|} = \frac{A^*}{|A|} \cdot A = E. \tag{3.6}$$

***Определение* 3.3.** *Матрица, определитель которой отличен от нуля, называется невырожденной или неособенной матрицей, в противном случае — вырожденной или особенной матрицей.*

***Определение* 3.4.** *Обратной матрицей по отношению к матрице A называется матрица, которая обозначается символом A^{-1} и удовлетворяет следующим условиям:*

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E. \tag{3.7}$$

Теорема 3.2. *Для существования обратной матрицы по отношению к квадратной матрице A необходимо и достаточно, чтобы её определитель был отличен от нуля. Если обратная матрица существует, то её определитель $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.*

Необходимость. Пусть A^{-1} — обратная матрица по отношению к матрице A. Тогда из равенств (3.5) и (3.6) следует, что

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} \tag{3.8}$$

и, следовательно, определитель $|A| \neq 0$.
Достаточность. Пусть определитель матрицы A отличен от нуля: $|A| \neq 0$. Тогда из (3.6) и (3.7) следует существование обратной матрицы A^{-1}, определяемой равенством (3.8).

Последнее утверждение теоремы следует из теоремы 2.5 об определителе произведения двух матриц и равенства (3.7):

$$|A^{-1}A| = |E| \quad \Rightarrow \quad |A^{-1}| \cdot |A| = 1 \quad \Rightarrow \quad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}.$$

Пример 3.1. Методом присоединённой матрицы найти обратную матрицу по отношению к матрице $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. 1. Используя определение 3.1, вычислим алгебраические дополнения элементов данной матрицы: $d_{11} = 4$, $d_{12} = -3$, $d_{21} = -2$, $d_{22} = 1$.

2. Составим присоединённую матрицу: $A^* = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Вычислим определитель исходной матрицы $|A| = 4 - 6 = -2$ и составим обратную матрицу по формуле (3.8):

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

3.3 Крамеровские системы линейных уравнений

***Определение* 3.5.** *Система n уравнений*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{3.9}$$

с n неизвестными $x_1, \ldots, x_n$ и неособенной матрицей коэффициентов $A = ||a_{ij}||$ называется крамеровской системой линейных уравнений.

Систему уравнений (3.9) можно представить в матричной форме

$$Ax = b, \tag{3.10}$$

где через x обозначен столбец неизвестных, а через b — столбец свободных членов:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Теорема 3.3 (Крамер)**.** *Каждая крамеровская система линейных уравнений (3.9) имеет одно и только одно решение $x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}$, которое определяется формулой*

$$x_{0i} = \frac{\Delta_i}{\Delta} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.11}$$

где Δ — определитель матрицы A коэффициентов данной системы уравнений, а Δ_i — определитель, который получается из определителя матрицы A заменой её i-го столбца столбцом свободных членов:

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}. \tag{3.12}$$

***Замечание* 3.1.** *Формулы* (3.11) *называются формулами Крамера.*

Пример 3.2. Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = -10 \\ 2x + y - z = 5. \end{cases}$$

Решение. Так как определитель матрицы коэффициентов данной системы уравнений

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 33 \neq 0,$$

то эта система линейных уравнений является крамеровской и, следовательно, имеет единственное решение, которое может быть получено с помощью формул Крамера (3.11). Предварительно вычислив определители Δ_x, Δ_y и Δ_z, составленные в соотвествии с равенством (3.12),

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -10 & -5 & 3 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 33, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & -10 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 66,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & -10 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -33,$$

получим решение данной системы по формулам Крамера (3.11):

$$x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{33}{33} = 1, \quad y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{33}{33} = 2, \quad z_0 = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{33}{33} = -1.$$

Тема 4

Линейные (векторные) пространства

4.1 Определение линейного (векторного) пространства

***Определение* 4.1.** *Множество $\mathbb{L}$ элементов $a, b, c, \ldots$ называется вещественным линейным (или векторным) пространством, если выполнены следующие требования.*

1. *Определено действие* **сложения**, *которое каждой паре элементов a и b из $\mathbb{L}$ ставит в соответствие элемент $a + b$, также принадлежащий множеству $\mathbb{L}$, и которое обладает следующими свойствами:*

   (a) $a + b = b + a$ *(свойство коммутативности);*

   (b) $a + (b + c) = (a + b) + c$ *(свойство ассоциативности);*

   (c) *возможно вычитание, т.е. для любых двух элементов a, b из $\mathbb{L}$ существует такой элемент $x \in \mathbb{L}$, что $a + x = b$.*

2. *Определено действие* **умножения на число**, *которое любому элементу a из $\mathbb{L}$ и любому вещественному числу λ ставит в соответствие новый элемент λa из $\mathbb{L}$ и которое обладает следующими свойствами:*

   (a) $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$ *(свойство ассоциативности);*

   (b) $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$ *(свойство дистрибутивности относительно сложения в $\mathbb{L}$);*

   (c) $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$ *(свойство дистрибутивности относительно сложения в $\mathbb{R}$);*

***Замечание* 4.1.** *Элементы произвольного линейного (векторного) пространства принято называть векторами.*

Примеры. Линейными пространствами являются следующие множества.

1. Множество всех квадратных матриц n-го порядка.
2. Множество всех числовых последовательностей вида $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.
3. Множество направленных отрезков (векторов) с началом в точке O.

В последнем примере операции над векторами определяются следующим образом:

а) операция сложения: вектору $\vec{a} + \vec{b}$ соответствует вектор $\vec{c}$, построенный по правилу треугольника или параллелограмма. В этом случае

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a},$$
$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}.$$

б) умножение на число: вектору $\vec{a}$ и вещественному числу λ ставится в соответствие вектор $\lambda\vec{a}$, длина которого в $|\lambda|$ раз больше длины вектора $\vec{a}$, при этом $\lambda\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$, если $\lambda > 0$, и $\lambda\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$, если $\lambda < 0$.

4.2 Линейная зависимость элементов векторов

Пусть векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, …, $\vec{a}_m$ являются элементами векторного пространства $\mathbb{L}$.

***Определение* 4.2.** *Линейной комбинацией векторов* $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, …, $\vec{a}_m$ *называется сумма*

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_m\vec{a}_m$$

произведений этих векторов на произвольные вещественные числа λ_1, λ_2, …, λ_m.

***Определение* 4.3.** *Векторы* $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, …, $\vec{a}_m$ *называются линейно зависимыми, если существует такая последовательность действительных чисел* λ_1, λ_2, …, λ_m, *из которых хотя бы одно отлично от нуля, что имеет место равенство*

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_m\vec{a}_m = 0.$$

***Замечание* 4.2.** *Если система векторов содержит нулевой вектор, то она является линейно зависимой. Справедливость этого утверждения следует, в частности, из равенства*

$$1 \cdot \vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2 + \ldots + 0 \cdot \vec{a}_m = 0,$$

где $\vec{a}_1 = 0$ *и* $\lambda_1 = 1 \neq 0$.

***Замечание* 4.3.** *Условие того, что не все числа* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ *равны нулю, равносильно неравенству*

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_m^2 \neq 0.$$

***Определение* 4.4.** *Векторы* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ *называются линейно независимыми, если из равенства*

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_m\vec{a}_m = 0$$

следует, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$.

Теорема 4.1. *Если ненулевые векторы* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ *линейно зависимы, то по крайней мере один из этих векторов линейно выражается через остальные. Обратно, если один из данных векторов линейно выражается через остальные, то эти векторы являются линейно зависимыми.*

Доказательство. Пусть векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ являются линейно зависимыми векторами. Тогда, согласно определению 4.3 и замечанию 4.3, существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2 + \ldots + \lambda_m$, что

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_m\vec{a}_m = 0 \quad \text{и} \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_m^2 \neq 0. \tag{4.1}$$

Предположим, что λ_k — последний отличный от нуля множитель: $\lambda_1 \neq 0, \ldots, \lambda_k \neq 0, \lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_m = 0$. Если $k = 1$, то из равенства $\lambda_1\vec{a}_1 = 0$ получим $\vec{a}_1 = 0$, что противоречит условию теоремы. Следовательно, $1 < k \leq m$ и равенство из (4.1) можно переписать в виде

$$\vec{a}_k = -\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\vec{a}_2 - \ldots - \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k}\vec{a}_{k-1},$$

что доказывает первое утверждение теоремы. Обратное утверждение теоремы очевидно.

***Определение* 4.5.** *Пусть $\mathbb{M}$ — некоторое множество векторного пространства $\mathbb{L}$. Система векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, … из множества $\mathbb{M}$ называется системой образующих векторов для множества $\mathbb{M}$, если любой вектор $\vec{a}$ из этого множества может быть выражен линейно через конечное число векторов системы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ….*

***Определение* 4.6.** *Система линейно независимых образующих векторов для множества $\mathbb{M}$ называется базисом множества $\mathbb{M}$.*

Лемма 4.1. *Если система образующих векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots$ для множества $\mathbb{M}$ содержит элемент $\vec{a}_i$, который можно линейно выразить через остальные векторы этой системы, то, удаляя из неё вектор $\vec{a}_i$, снова получим систему образующих векторов для множества $\mathbb{M}$.*

Теорема 4.2. *Из всякой системы образующих векторов для векторного пространства $\mathbb{L}$ можно выбрать базис этого пространства.*

***Определение* 4.7.** *Равенство вида*

$$\vec{a} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2, \ldots + \lambda_m\vec{a}_s$$

называется разложением вектора $\vec{a}$ по векторам $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, … , $\vec{a}_s$.

Теорема 4.3. *Каждый вектор $\vec{a}$ векторного пространства $\mathbb{L}$ может быть разложен по базису этого пространства единственным образом.*

Доказательство. Пусть вектор $\vec{a}$ является элементом векторного пространства $\mathbb{L}$ и $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, …, $\vec{a}_s$ — базис этого пространства. Предположим, что разложение вектора $\vec{a}$, о котором говорится в условии теоремы, не является единственным, а именно:

$$\vec{a} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2, \ldots + \lambda_s\vec{a}_s \quad \text{и} \quad \vec{a} = \mu_1\vec{a}_1 + \mu_2\vec{a}_2, \ldots + \mu_s\vec{a}_s,$$

где не все числа λ_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ равны соответствующим множителям μ_i. Вычитая из первого равенства второе, получим

$$0 = (\lambda_1 - \mu_1)\vec{a}_1 + (\lambda_2 - \mu_1)\vec{a}_2, \ldots + (\lambda_s - \mu_s)\vec{a}_s.$$

Так как $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_s$ являются по условию теоремы линейно независимыми векторами, то из последнего равенства следует, согласно определению 4.4, что $\lambda_i - \mu_i = 0$ или $\lambda_i = \mu_i$ для каждого значения $i = 1, 2, \ldots, s$. Полученные соотношения противоречат сделанному выше предположению о неединственности разложения. $\square$

Теорема 4.4. *Все базисы конечномерного векторного пространства состоят из одного и того же конечного числа векторов.*

***Определение* 4.8.** *Число векторов, образующих базис векторного пространства $\mathbb{L}$, называется размерностью этого пространства и обозначается символом* $\dim \mathbb{L}$.

***Замечание* 4.4.** *Если размерность векторного пространства $\mathbb{L}$ равна n, то это обстоятельство может указываться верхним индексом в обозначении данного пространства: $\mathbb{L}^n$.*

Вещественное векторное пространство размерности n обозначается также символом $\mathbb{R}^n$.

Теорема 4.5. *Для каждой системы линейно независимых векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_m$ конечномерного векторного пространства $\mathbb{L}$ можно найти в нём такие векторы $\vec{a}_{m+1}, \vec{a}_{m+2}, \ldots, \vec{a}_n$, что система векторов*

$$\vec{a}_1,\ \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m, \vec{a}_{m+1}, \ \ldots, \ \vec{a}_{n-m}$$

является базисом пространства $\mathbb{L}$.

Из теорем 4.2 - 4.5 следует также справедливость следующих утверждений:

— всякая система векторов, которая состоит из $(n+1)$-го вектора n-мерного векторного пространства, является линейно зависимой;

— любые n линейно независимых векторов n-го векторного пространства образуют его базис;

— максимальное число линейно независимых векторов векторного пространства равно его размерности.

4.3 Коллинеарные и компланарные векторы

***Определение* 4.9.** *Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются коллинеарными векторами.*

Теорема 4.6. *Два вектора $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ коллинеарны тогда и только тогда, когда они являются линейно зависимыми векторами.*

***Определение* 4.10.** *Компланарными называются векторы, которые расположены в одной плоскости или в параллельных плоскостях.*

Теорема 4.7. *Три вектора $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ являются компланарными векторами тогда и только тогда, когда они образуют систему линейно зависимых векторов.*

***Следствие* 4.1.** *Три вектора компланарны тогда и только тогда, когда один из них линейно выражается через остальные.*

4.4 Координаты вектора

***Определение* 4.11.** *Координатной системой векторного пространства $\mathbb{L}^n$ называется некоторый его базис $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$, векторы которого берутся в определённой последовательности.*

Любой вектор $\vec{a}$ векторного пространства $\mathbb{L}^n$ имеет, согласно теореме 4.3, единственное разложение

$$\vec{a} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n \tag{4.2}$$

по базису $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Числовые коэффициенты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ такого разложения называются *координатами* вектора $\vec{a}$ в данной координатной системе. Таким образом, равенства вида (4.2) устанавливают взаимно однозначное соответствие (изоморфизм) между векторами n-мерного векторного пространства и координатными строками длины n:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Множество таких координатных строк обозначается символом $\mathbb{A}^n$ и называется *n-мерным координатным пространством.* Справедливость последнего утверждения устанавливается следующими рассуждениями.

Из свойств операций умножения на число и сложения элементов векторного пространства следует, что для векторов

$$\vec{a} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n \quad \text{и} \quad \vec{b} = y_1\vec{a}_1 + y_2\vec{a}_2 + \ldots + y_n\vec{a}_n$$

векторного пространства $\mathbb{L}_n$ справедливы равенства

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + y_1)\vec{a}_1 + (x_2 + y_2)\vec{a}_2 + \ldots + (x_n + y_n)\vec{a}_n, \tag{4.3}$$

$$\lambda\vec{a} = (\lambda x_1)\vec{a}_1 + (\lambda x_2)\vec{a}_2 + \ldots + (\lambda x_n)\vec{a}_n, \tag{4.4}$$

которые определяют соответствующие операции над координатными строками множества $\mathbb{A}^n$:

$$\begin{array}{ccc} \vec{a} + \vec{b} & \Leftrightarrow & (x_1 + \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n), \\ \lambda\vec{a} & \Leftrightarrow & \lambda(x_1 + \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n). \end{array}$$

Эти операции над координатными строками из $\mathbb{A}^n$ обладают всеми свойствами операций над элементами линейного пространства, которые указаны в определении 4.1.

***Замечание* 4.5.** *Из теорем 4.1, 4.6 и последнего равенства следует, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ являются коллинеарными тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны:*

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \ldots = \frac{x_n}{y_n}.$$

4.5 Теорема о базисном миноре матрицы

Рассмотрим произвольную матрицу A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

***Определение* 4.12.** *Базисным минором матрицы A называется её минор, который отличен от нуля и порядок которого равен рангу этой матрицы. Строки и столбцы матрицы A, на пересечениях которых находятся элементы, образующие базисный минор, называются базисными строками и базисными столбцами.*

Теорема 4.8 (о базисном миноре)**.** *Базисные строки (столбцы) линейно независимы. Любая строка (столбец) матрицы является линейной комбинацией её базисных строк (столбцов).*

Теорема 4.9. *Для того чтобы определитель n-го порядка был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы его строки (столбцы) были линейно зависимыми.*

Пример 4.1. Заданы векторы

$$\vec{a}_1 = (4, 1, 3, -2), \quad \vec{a}_2 = (1, 2, -3, 2), \quad \vec{a}_3 = (16, 9, 1, -3).$$

Найти их линейную комбинацию $3\vec{a}_1 + 5\vec{a}_2 - \vec{a}_3$.

Решение. В соответствии с равенствами (4.3), (4.4) и определениямм линейной зависимости 4.3 и независимости 4.4 получим

$$\begin{aligned}&3\vec{a}_1 + 5\vec{a}_2 - \vec{a}_3 = \\ &= (3\cdot 4 + 5\cdot 1 - 16; 3\cdot 1 + 5\cdot 2 - 9; 3\cdot 3 + 5\cdot(-3) - 1; 3\cdot(-2) + 5\cdot 2 - (-3)) = \\ &\qquad\qquad = (1,\ 4,\ -7,\ 7).\end{aligned}$$

Пример 4.2. Найти ранг и какой-нибудь базис системы векторов $\vec{a}_1 = (5, 2, -3, 1)$, $\vec{a}_2 = (4, 1, -2, 3)$, $\vec{a}_3 = (1, 1, -1, -2)$, $\vec{a}_4 = (3, 4, -1, 2)$.

Решение. Составим определитель из координат данных векторов

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} \underset{=}{(1)} \begin{vmatrix} 0 & -3 & 2 & 11 \\ 0 & -3 & 2 & 11 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \end{vmatrix} \underset{=}{(2)} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 11 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \end{vmatrix}.$$

Эта последовательность равенств является результатом следующих преобразований: 1-й шаг - из 1-й, 2-й и 4-й строк вычитаем 3-ю строку, умноженную на 5,4 и 3 соответственно; 2-й шаг - из 1-й строки вычитаем 2-ю строку.

Так как минор 3-го порядка, расположенный в нижнем правом углу последнего определителя отличен от нуля, то а) ранг данной системы векторов равен 3; б) последние три вектора этой системы являются линейно независимыми и, следовательно, образуют её базис.

Тема 5

Системы линейных уравнений

5.1 Основные определения и понятия. Теорема Кронекера-Капелли

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{5.1}$$

***Определение* 5.1.** *Система уравнений* (5.1) *называется однородной, если все её свободные члены* $b_1, \ldots, b_m$ *равны нулю. В противном случае система уравнений* (5.1) *называется неоднородной.*

***Определение* 5.2.** *Решением системы уравнений* (5.1) *называется совокупность* n *чисел* $c_1, \ldots, c_n$*, при подстановке которых в уравнения системы* (5.1) *на место неизвестных* $x_1, \ldots, x_n$ *соответственно, все уравнения этой системы обращаются в верные числовые равенства.*

***Определение* 5.3.** *Система уравнений* (5.1) *называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной — если она решений не имеет.*

***Определение* 5.4.** *Матрица коэффициентов при неизвестных в си-*

стеме уравнений (5.1)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

называется основной матрицей системы уравнений (5.1), *а матрица*

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

которая получается из матрицы A добавлением к ней справа столбца свободных членов, называется расширенной матрицей системы уравнений (5.1).

Теорема 5.1 (Кронекера-Капелли)**.** *Система линейных уравнений* (5.1) *имеет решение тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы этой системы равен рангу её основной матрицы.*

Необходимость. Пусть $c_1, \dots, c_n$ — решение системы уравнений (5.1):

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \ldots + a_{1n}c_n = b_1, \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{2n}c_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \ldots + a_{mn}c_n = b_m. \end{cases} \tag{5.3}$$

Обозначим через r ранг основной матрицы системы уравнений (5.1). В силу теоремы 4.8 о базисном миноре любой столбец основной матрицы может быть выражен линейно через r базисных столбцов этой матрицы. Из равенств (5.3) следует, что и столбец свободных членов также является линейной комбинацией этих базисных столбцов. Таким образом, основная и расширенная матрицы системы уравнений (5.1) имеют одно и то же число r базисных столбцов. Следовательно, ранги этих матриц равны r.

Достаточность. Пусть ранги основной и расширенной матриц совпадают и равны r. Тогда r базисных столбцов основной матрицы будут являться базисными столбцами и расширенной матрицы. По теореме 4.8 о базисном миноре столбец свободных членов в расширенной матрице может быть линейно выражен через r базисных столбцов основной матрицы. Следовательно, существуют такие числа $c_1, \ldots, c_n$, не все равные нулю, при которых все равенства (5.2) выполняются. Тем самым доказано, что совокупность чисел $c_1, \ldots, c_n$ является решением системы уравнений (5.1). $\square$

5.2 Нахождение решений линейной системы уравнений. Метод Гаусса.

Рассмотрим систему линейных уравнений вида (5.1), содержащую m уравнений с n неизвестными. Предположим, что ранги её основной и расширенной матриц равны числу r. Предположим также, что элементы основной матрицы, которые образуют базисный минор, находятся в левом верхнем углу этой матрицы, чего можно всегда добиться перестановкой уравнений и неизвестных в исходной системе уравнений (5.1). В этом случае по теореме 4.8 о базисном миноре каждая из строк расширенной матрицы, начиная с $(r+1)$-ой строки, является линейной комбинацией её первых r строк. Это означает, что всякое решение первых r уравнений данной системы (5.1) обращает в тождества все последующие её уравнения. Таким образом, решение исходной системы уравнений (5.1) сводится к решению её первых r уравнений, которые перепишем в виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_n = b_r - a_{r,r+1}x_{r,r+1} - \ldots - a_{rn}x_n. \end{cases} \tag{5.4}$$

В этом случае неизвестные $x_{r+1}, \ldots, x_n$, которые перенесены в правые части уравнений, называются *свободными неизвестными.* Присвоив им произвольные значения $c_{r+1}, \ldots, c_n$, получим в (5.4) систему r уравнений с r неизвестными, определителем которой является базисный минор:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}c_{r+1} - \ldots - a_{1n}c_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2,r+1}c_{r+1} - \ldots - a_{2n}c_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_n = b_r - a_{r,r+1}c_{r,r+1} - \ldots - a_{rn}c_n. \end{array}\right. \tag{5.5}$$

Так как базисный минор отличен от нуля по определению, то система уравнений (5.4) является крамеровской и по теоереме 3.3 имеет единственное решение, которое зависит от значений $c_{r+1}, \ldots, c_n$. Это решению системы уравнений (5.5) соотвествует решение

$$X(c_{r+1}, \ldots, c_n) = \begin{pmatrix} c_1(c_{r+1}, \ldots, c_n) \\ \vdots \\ c_r(c_{r+1}, \ldots, c_n) \\ c_{r+1} \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

исходной системы уравнений (5.1).

Равенство (5.6), которое представляет произвольное решение системы уравнений (5.1) в виде функции от $n-r$ свободных неизвестных $c_{r+1}, \ldots, c_n$, называется *общим решением* системы уравнений (5.1).

Изложенный в данном параграфе метод нахождения этого решения называется *методом Гаусса* или *методом исключения неизвестных.*

***Замечание* 5.1.** *Можно доказать, что равенство* (5.6) *содержит все возможные решения системы* (5.1).

Пример 5.1. Решить систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 2x_1 & + & 7x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 = & 6 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 = & 4 \\ 9x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 7x_4 = & 2. \end{array}\right. \tag{5.7}$$

Решение. Приведём данную систему уравнений к ступенчатому виду, выполнив следующие преобразования.
1. Из третьего уравнения системы (5.7) вычтем её второе уравнение, умноженное предварительно на 3. В результате получим

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} 2x_1 & +7x_2 & +3x_3 & +x_4 = & 6 \\ 3x_1 & +5x_2 & +2x_3 & +2x_4 = & 4 \\ & -11x_2 & -5x_3 & +x_4 = & -10. \end{array}\right. \tag{5.8}$$

2. Второе уравнение системы (5.8) умножим на 2 и вычтем из него первое уравнение, умноженное на 3. В результате получим:

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} 2x_1 & +7x_2 & +3x_3 & +x_4 = & 6 \\ & -11x_2 & -5x_3 & +x_4 = & -10 \\ & -11x_2 & -5x_3 & +x_4 = & -10. \end{array}\right. \tag{5.9}$$

Удаляя из системы (5.9) последнее уравнение, получим укороченную систему уравнений, равносильную исходной системе уравнений (5.7):

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} 2x_1 & +7x_2 & +3x_3 & +x_4 = & 6 \\ & -11x_2 & -5x_3 & +x_4 = & -10. \end{array}\right. \tag{5.10}$$

Так как минор, составленный из множителей при x_1 и x_2 в уравнениях (5.20), отличен от нуля и, следовательно, является базисным, то эти неизвестные можно взять в качестве базисных, а неизвестные x_3 и x_4 — в качестве свободных. Полагая $x_3 = c_3$ и $x_4 = c_4$, перепишем систему уравнений (5.20) следующим образом:

$$\left\{\begin{array}{rrcrrr} 2x_1 & +7x_2 & = & 6 & -3c_3 & -c_4 \\ & -11x_2 & = & -10 & +5c_3 & -c_4, \end{array}\right.$$

откуда находим её решение в виде

$$x_1 = -\frac{2}{11} + \frac{1}{11}c_3 - \frac{9}{11}c_4, \quad x_2 = \frac{10}{11} - \frac{5}{11}c_3 + \frac{1}{11}c_4.$$

Этому решению укороченной системы соответствует общее решение

$$X(c_3, c_4) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{11} + \frac{1}{11}c_3 - \frac{9}{11}c_4 \\ \frac{10}{11} - \frac{5}{11}c_3 + \frac{1}{11}c_4 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}.$$

исходной системы уравнений (5.7).

Пример 5.2. Решить систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & + & 3x_5 = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & + & 3x_5 = & 2 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 3x_5 = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 8x_3 & - & 3x_4 & + & 9x_5 = & 2. \end{array}\right. \tag{5.11}$$

Решение. Приведём данную систему уравнений к ступенчатому виду следующими преобразованиями.
1. Из 2-го, 3-го и 4-го уравнений системы (5.11) вычтем 1-е уравнение, умноженное на 2,3 и 2 соответственно. В результате получим:

$$\left\{\begin{array}{cccccr} x_1 & +x_2 & +3x_3 & -2x_4 & +3x_5 = & 1 \\ & & -2x_3 & +3x_4 & -3x_5 = & 0 \\ & & -4x_3 & +4x_4 & -6x_5 = & -2 \\ & & 4x_3 & -2x_4 & +6x_5 = & 0 \end{array}\right. \tag{5.12}$$

2. В системе уравнений (5.12) из 3-го и 4-го уравнений вычтем 2-е уравнение, умноженное на 2 и на -2 соответственно:

$$\left\{\begin{array}{cccccr} x_1 & +x_2 & +3x_3 & -2x_4 & +3x_5 = & 1 \\ & & -2x_3 & +3x_4 & -3x_5 = & 0 \\ & & & -2x_4 & = & -2 \\ & & & 4x_4 & = & 0 \end{array}\right. \tag{5.13}$$

Из вида последних двух уравнений системы (5.13) следует, что эта система не имеет решений. Следовательно, исходная система уравнений (5.11) является несовместной. □

5.3 Однородные системы линейных уравнений

Рассмотрим однородную систему m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{array}\right. \tag{5.14}$$

Матрицей коэффициентов этой системы уравнений является матрица A из (5.2).

Теорема 5.2. *Однородная система линейных уравнений* (5.14) *имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы* A *её коэффициентов* (5.2) *меньше числа столбцов этой матрицы.*

Необходимость. Пусть система уравнений (5.14) имеет нетривиальное решение $c_1, \ldots, c_n$. Существование такого решения означает, в соответствии с теоремой 4.1, линейную зависимость между столбцами матрицы A, составленной из коэффициентов системы уравнений (5.14). Поэтому не все столбцы этой матрицы являются базисными и, следовательно, её ранг r меньше числа её столбцов n.

Достаточность. Пусть ранг r матрицы коэффициентов A системы уравнений (5.14) меньше числа n столбцов этой матрицы. Из теоремы 4.8 о базисном миноре следует, что не все столбцы матрицы A являются базисными и через них могут быть выражены линейно. В соответствии с теоремой 4.1 это означает, что столбцы матрицы A являются линейно зависимыми. Следовательно, существуют такие числа $c_1, \ldots, c_n$, которые удовлетворяют неравенству $c_1^2 + \ldots + c_n^2 \neq 0$ и являются решением системы уравнений (5.14).

***Следствие* 5.1.** *Однородная система* n *линейных уравнений с* n *неизвестными имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы её коэффициентов равен нулю.*

Теорема 5.3. *Совокупность всех решений однородной системы линейных уравнений образует линейное пространство.*

Доказательство. Пусть

$$X_1 = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}) \quad \text{и} \quad X_2 = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)})$$

являются двумя решениями системы уравнений (5.14):

$$AX_1^T = 0 \text{ и } AX_2^T = 0,$$

где через A обозначена матрица коэффициентов этой системы уравнений. Справедливость утверждения теоремы следует из того, что решением системы уравнений (5.14) является также $X = X_1 + \lambda X_2$:

$$AX = A(X_1 + \lambda X_2)^T = A(X_1^T + \lambda X_2^T) = AX_1^T + \lambda AX_2^T = 0.$$

***Следствие* 5.2.** *Линейная комбинация* $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_k X_k$ *решений* $X_1, \ldots, X_k$ *однородной системы линейных уравнений* (5.14) *является решением этой системы уравнений.*

5.4 Нахождение решений однородной линейной системы уравнений

Предположим, что ранг матрицы коэффициентов однородной системы линейных уравнений (5.14) равен $r < n$ и базисный минор образован элементами, расположенными в верхнем левом углу этой матрицы. В этом случае решение системы уравнений (5.14) сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = -a_{1,r+1}c_{r+1} - \ldots - a_{1n}c_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = -a_{2,r+1}c_{r+1} - \ldots - a_{2n}c_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_n = -a_{r,r+1}c_{r+1} - \ldots - a_{rn}c_n, \end{cases} \tag{5.15}$$

где $c_{r+1}, \ldots, c_n$ — обозначения некоторых значений свободных переменных $x_{r+1}, \ldots, x_n$. Так как система уравнений 5.15 является крамеровской, то она имеет единственное решение для выбранных значений $c_{r+1}, \ldots, c_n$. Этому решению системы 5.15 соответствует решение

$$\begin{aligned} &X(c_{r+1}, \ldots, c_n) = \\ &\quad = (c_1(c_{r+1}, \ldots, c_n), \ldots, c_r(c_{r+1}, \ldots, c_n), c_{r+1}, \ldots, c_n)^T. \end{aligned} \tag{5.16}$$

исходной однородной системы уравнений (5.14). Из равенства (5.16) следует, что любая совокупность из $n - r$ линейно независимых решений однородной системы линейных уравнений (5.14) с n неизвестными и рангом r её основной матрицы, образует базис в пространстве всех решений этой системы уравнений и называется её *фундаментальной системой решений.*

В частности, совокуность частных решений X_j $(j = 1, \ldots, n-r)$ системы уравнений (5.14), соответствующих следующим наборам значений свободных неизвестных

$$c_{r+1} = 0, \ldots, c_{r+j-1} = 0,\ c_{r+j} = 1,\ c_{r+j+1} = 0, \ldots, c_n = 0$$
$$(j = 1, \ldots, n-r),$$

называется *нормальной фундаментальной системой решений* системы уравнений (5.14) и имеет следующий вид

$$\begin{array}{r}
X_1(1,0,\ldots,0) = (c_1(1,0,\ldots,0),\ldots,c_r(1,0,\ldots,0),1,0,\ldots,0),\\
X_2(0,1,\ldots,0) = (c_1(0,1,\ldots,0),\ldots,c_r(0,1,\ldots,0),0,1,\ldots,0),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
X_{n-r}(0,\ldots,0,1) = (c_1(0,\ldots,0,1),\ldots,c_r(0,\ldots,0,1),0,\ldots,0,1).
\end{array} \tag{5.17}$$

Так как решения (5.17) образуют базис в пространстве решений системы уравнений (5.14), то любое её решение X можно представить в виде их линейной комбинации:

$$X_{o.o.} = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_{n-r}X_{n-r}, \tag{5.18}$$

где C_1, $C_2, \ldots,$ C_{n-r} — произвольные постоянные. Формула (5.18) представляет общее решение $X_{o.o.}$ однородной системы линейных уравнений (5.14).

Пример 5.3. Решить систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl}
3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 = & 0\\
2x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 = & 0\\
3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 = & 0.
\end{array}\right. \tag{5.19}$$

Решение. 1. Определитель данной однородной системы уравнений

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1\\ 2 & 5 & 3\\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot(10-12) - 2(4-9) + 1\cdot(8-15) = -3 \neq 0$$

и, следовательно, её ранг равен трём. Так как число незвестных также равно трём, то тривиальное решение является единственным решением данной системы уравнений.

Пример 5.4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 & -4x_2 & +5x_3 & +3x_4 = & 0 \\ 3x_1 & -6x_2 & +4x_3 & +2x_4 = & 0 \\ 4x_1 & -8x_2 & +17x_3 & +11x_4 = & 0. \end{cases} \qquad (5.20)$$

Решение. 1. Найдём ранг матрицы A данной системы уравнений методом окаймляющих миноров:

$$M_2 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad M_{3,1} = \begin{vmatrix} -4 & 5 & 3 \\ -6 & 4 & 2 \\ -8 & 17 & 11 \end{vmatrix} = 0, \quad M_{3,2} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 17 & 11 \end{vmatrix} = 0.$$

Из этих равенств следует, что ранг матрицы системы равен 2, а минор $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$ является её базисным минором. Таким образом, исходная система уравнений равносильна укороченной системе

$$\begin{cases} 2x_1 & -4x_2 & +5x_3 & +3x_4 = & 0 \\ 3x_1 & -6x_2 & +4x_3 & +2x_4 = & 0, \end{cases}$$

в которой в качестве базисных можно взять неизвестные x_3 и x_4, а в качестве свободных — неизвестные x_1 и x_2. Полагая $x_1 = c_1$ и $x_2 = c_2$, перепишем последнюю систему уравнений следующим образом:

$$\begin{cases} 5x_3 & +3x_4 = & -2c_1 & +4c_2 \\ 4x_3 & +2x_4 = & -3c_1 & +6c_2. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений относительно x_3 и x_4, получим

$$x_3 = -\frac{5}{2}c_1 + 5c_2, \quad x_4 = \frac{7}{2}c_1 - 7c_2,$$

что соответствует общему решению

$$X(c_1, c_2) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ -\frac{5}{2} + 5_2 \\ \frac{7}{2} - 7c_2 \end{pmatrix}.$$

исходной системы уравнений (5.20). Наборам значений $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ и $c_1 = 0$, $c_1 = 2$ соответствуют частные решения

$$X_1(1, 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{5}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad X_2(0, 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix},$$

которые образуют нормальную фундаментальную систему решений для данной системы однородных уравнений. Следовательно, её общее решение можно представить также в виде линейной комбинации $X_{o.o.} = C_1X_1 + {}_2X_2$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. □

5.5 Связь между решениями однородной и неоднородной систем линейных уравнений

Связь между решениями неоднородной системы линейных уравнений (5.1) и соответствующей ей однородной системы (5.14) устанавливается следующими двумя утверждениями.

Утверждение 1. Сумма любого решения неоднородной системы линейных уравнений (5.1) и любого решения соответствующей ей однородной системы уравнений (5.14) является решением неоднородной системы (5.1).

Доказательство. Пусть $X_н$ является решением неоднородной системы уравнений (5.1), а $X_{од}$ — решением соответствующей ей однородной системы уравнений (5.14): $AX_н^T = b$ и $AX_{од}^T = 0$. Отсюда следует, что

$$A(X_н + X_{од})^T = AX_н^T + AX_{од}^T = b.$$

Следовательно, сумма $X_н + X_{од}$ является решение неоднородной системы уравнений (5.1). □

Утверждение 2. Разность двух любых решений неоднородной линейной системы уравнений (5.1) является решением соответствующей ей однородной системы уравнений (5.14).

Доказательство. Пусть $X_{н1}$ и $X_{н2}$ являются решениями неоднородной системы линейных уравнений (5.1): $AX_{н1}^T = b$ и $AX_{н2}^T = b$. Тогда

$$A(X_{н1} - X_{н2})^T = AX_{н1}^T - AX_{н2}^T = 0$$

и, следовательно, разность $X_{н1} - X_{н2}$ является решением однородной системы линейных уравнений (5.14).

Из утверждений 1 и 2 следует, что *сумма частного решения неоднородной системы линейных уравнений* (5.1) *и общего решения соответствующей ей однородной системы уравнений* (5.14) *даёт общее решение неоднородной системы* (5.1):

$$X_{о.н.} = X_{ч.н.} + X_{о.о.},$$

где $X_{ч.н.}$ — частное решение неоднородной системы уравнений (5.1), а

$$X_{о.о.} = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_{n-r}X_{n-r}$$

является общим решением соответствующей ей однородной системы уравнений (5.14).

Тема 6

Евклидово пространство

6.1 Определение евклидова пространства

***Определение* 6.1.** *Вещественное линейное (векторное) пространство $\mathbb{E}$ называется евклидовым, если:*

а) определено правило (действие), по которому двум элементам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ этого пространства ставится в соответствие вещественное число $\vec{a} \cdot \vec{b}$, называемое скалярным произведением этих элементов;

б) это правило (действие) удовлетворяет следующим требованиям:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
2) $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \cdot \vec{b} = \vec{a}_1 \cdot \vec{b} + \vec{a}_2 \cdot \vec{b}$;
3) $\lambda\vec{a} \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$ *для любого числа* $\lambda \in \mathbb{R}$;
4) $\vec{a} \cdot \vec{a} \begin{cases} > 0, & \text{если } \vec{a} \neq 0; \\ = 0, & \text{если } \vec{a} = 0. \end{cases}$

***Определение* 6.2.** *Линейное (векторное) пространство $\mathbb{L}$ называется нормированнным, если*

а) каждому его элементу $\vec{a}$ соответствует число, которое называется нормой и обозначается символом $|\vec{a}|$;

б) норма удовлетворяет следующим требованиям:

1) $|\vec{a}| \begin{cases} > 0, & \text{если } \vec{a} \neq 0, \\ = 0, & \text{если } \vec{a} = 0; \end{cases}$

2) $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$ *для любых* $\vec{a} \in \mathbb{L}$ *и числа* $\lambda \in \mathbb{R}$;

3) $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ *для любых* $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{L}$.

Теорема 6.1. *Всякое евклидово пространство является нормированным, если норма (длина или модуль) вектора этого пространства задаётся равенством*

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}. \tag{6.1}$$

***Определение* 6.3.** *Углом между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ евклидова пространства называется угол $\varphi \in [0; \pi]$, косинус которого определяется равенством*

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}. \tag{6.2}$$

***Следствие* 6.1.** *Из равенства (6.2) следует, что скалярное произведение двух векторов можно вычислить по формуле*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}), \tag{6.3}$$

если известны модули этих векторов и угол между ними.

***Определение* 6.4.** *Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ евклидова пространства называются взаимно ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю:*

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

***Определение* 6.5.** *Ортонормированным базисом n-мерного евклидова пространства $\mathbb{E}^n$ называется система n векторов $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ этого пространтсва, если они попарно ортогональны и норма каждого из них равна единице:*

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases} \tag{6.4}$$

***Замечание* 6.1.** *Любая система попарно ортогональных ненулевых векторов $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k$ евклидова пространства является линейно независимой.*

Доказательство (от противного). Предположим, что данные векторы $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k$ являются линейно зависимыми. По определению 4.3 существуют такие множители $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, не все равные нулю, что выполняется равенство

$$\alpha_1 \vec{e}_1 + \ldots + \alpha_k \vec{e}_k = 0. \tag{6.5}$$

Пусть, например, $\alpha_i \neq 0$. Умножим скалярно на вектор $\vec{e}_i$ обе части равенства (6.5). В результате получим

$$\alpha_1 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_i + \ldots + \alpha_i \vec{e}_i \cdot \vec{e}_i + \alpha_k \vec{e}_k \cdot \vec{e}_i = 0, \tag{6.6}$$

Так как для данных векторов справедливы соотношения

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} \neq 0, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \neq j, \end{cases}$$

то из равенства (6.6) следует, что $\alpha_i = 0$. Следовательно, в равенстве (6.5) все множители $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ равны нулю и поэтому, согласно определению 4.4, векторы $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k$ являются линейно независимыми.

6.2 Трёхмерное евклидово пространство

Рассмотрим трёхмерное евклидово пространство $\mathbb{E}^3$. Пусть в этом пространстве задана прямоугольная декартова система координат с началом в точке O и ортонормированным базисом $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Будем полагать, что векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ являются направляющими векторами координатных осей x, y и z соответственно, которые проходят через начало координат. Такая прямоугольная декартова система координат обозначается $Oxyz$. В системе координат $Oxyz$ каждой точке M рассматриваемого пространства можно поставить в соответствие вектор $\vec{r}_M$ с началом в начале координат O и концом в этой точке: $\vec{r}_M = \overrightarrow{OM}$. Вектор $\vec{r}_M$ называется *радиус-вектором точки* M.

В соответствии с теоремой 4.3 вектор $\vec{a}$ данного пространства можно разложить, причём единственным образом, по его базису:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k},$$

где a_x, a_y, a_z — координаты вектора $\vec{a}$. Из единственности такого разложения следует, что в системе координат $Oxyz$ каждый вектор может быть задан упорядоченной тройкой чисел, которые являются его координатами: $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ или $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$.

6.2.1 Скалярное произведение векторов

Используя свойства скалярного произведения, формулы (6.1) и (6.2), получим выражения для модуля вектора, его направляющих косинусов и скалярного произведения векторов через их координаты в прямоугольной системе координат $Oxyz$.

1. Направляющие косинусы вектора

***Определение* 6.6.** *Направляющими косинусами вектора $\vec{a}$ называются косинусы углов α, β и γ, которые вектор $\vec{a}$ образует с координатными осями Ox, Oy и Oz соотвественно.*

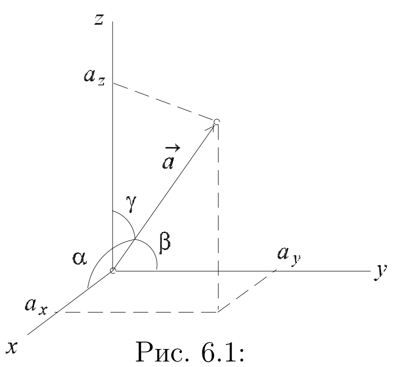

Рис. 6.1:

Направляющие косинусы вектора $\vec{a}$ могут быть вычислены по следующим формулам:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},$$
$$\cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \quad (6.7)$$
$$\cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

Доказательство. Последовательно умножим скалярно обе части равенства

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

на базисные векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$. Учитывая, что эти векторы образуют ортонормированный базис, и используя формулу (6.3), получим

$$a_x = \vec{a}\cdot\vec{i} = |\vec{a}|\cos\alpha, \quad a_y = \vec{a}\cdot\vec{j} = |\vec{a}|\cos\beta, \quad a_z = \vec{a}\cdot\vec{k} = |\vec{a}|\cos\gamma, \quad (6.8)$$

где α, β, γ — углы, которые вектор $\vec{a}$ образует с осями x, y и z. Равенства (6.8) равносильны формулам (6.7).

***Замечание* 6.2.** *Из равенств* (6.7) *следует, что сумма квадратов направляющих косинусов вектора равна единице:*

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

2. Скалярное произведение векторов

Скалярное произведение векторов $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ может быть вычислено по формуле

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z. \tag{6.9}$$

Доказательство. Представим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ их разложениями в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \quad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}.$$

Используя свойства скалярного произведения, указанные в определении 6.1, получим

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) =\\ &= a_xb_x\vec{i}\cdot\vec{i} + a_xb_y\vec{i}\cdot\vec{j} + a_xb_z\vec{i}\cdot\vec{k} +\\ &+ a_yb_x\vec{j}\cdot\vec{i} + a_yb_y\vec{j}\cdot\vec{j} + a_yb_z\vec{j}\cdot\vec{k} +\\ &+ a_zb_x\vec{k}\cdot\vec{i} + a_zb_y\vec{k}\cdot\vec{j} + a_zb_z\vec{k}\cdot\vec{k}.\end{aligned} \tag{6.10}$$

Базис $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ является ортонормированным, поэтому, в соответствии с (6.3), имеем

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1, \quad \vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{j}\cdot\vec{k} = 0. \tag{6.11}$$

Из соотношений (6.10) и (6.11) следует равенство (6.9).

3. Модуль (длина) вектора

Модуль (длина) вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ может быть вычислен по формуле:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{6.12}$$

Справедливость этой формулы следует из равенств (6.1) и (6.9).

4. Косинус угла между векторами

Косинус угла между векторами $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ можно вычислить, используя следующую формулу:

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Эта формула получается из равенств (6.2), (6.9) и (6.12).

***Следствие* 6.2.** *Из равенств* (6.8) *следует, что координаты вектора $\vec{a}$ являются ортогональными проекциями этого вектора на соответствующие координатные оси.*

***Следствие* 6.3.** *Проекция вектора $\vec{a}$ на ось l равна скалярному произведению этого вектора и единичного направляющего вектора $\vec{l_0}$ этой оси:*

$$np_l \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{l_0}. \tag{6.13}$$

***Следствие* 6.4.** *Из равенства* (6.13) *и свойств скалярного произведения следует, что проекция вектора $\vec{a}$ на направление вектора $\vec{b}$ равна может быть вычислена по следующей формуле*

$$np_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}. \tag{6.14}$$

Теорема 6.2 (о проекции суммы векторов)**.** *Проекция суммы векторов на какую-либо ось равна алгебраической сумме проекций этих векторов на ту же ось.*

Доказательство. Пусть в пространстве $\mathbb{E}^3$ даны векторы $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m$, ось l и её направляющий единичный вектор l^0. Используя формулу (6.13) и распределительное свойство скалярного произведения, получим

$$\text{пр}_l(\sum_{i=1}^{m} \vec{a}_i) = (\vec{a}_1 + \ldots + \vec{a}_m) \cdot \vec{l}_0 = \vec{a}_1 \cdot \vec{l}_0 + \ldots + \vec{a}_m \cdot \vec{l}_0 = \sum_{i=1}^{m} \text{пр}_l \vec{a}_i.$$

Пример 6.1. Даны векторы $\vec{a}_1 = \{4, -2, -4\}$ и $\vec{a}_2 = \{6, -3, 2\}$. Вычислить:
а) $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2$; б) $(2\vec{a}_1 - 3\vec{a}_2)(\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2)$; в) $(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)^2$; г) $|2\vec{a}_1 - \vec{a}_2|$;
д) $\text{пр}_{\vec{a}_1} \vec{a}_2$; е) $\text{пр}_{\vec{a}_2} \vec{a}_2$; ж) направляющие косинусы вектора $\vec{a}_1$;
з) $\text{пр}_{\vec{a}_1 + \vec{a}_2}(\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2)$; и) $\cos(\widehat{\vec{a}_1, \vec{a}_2})$.

Решение. а) Используя свойства скалярного произведения (определение 6.1), ортогональность и нормированность векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$, вычислим скалярное произведение

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = (4i - 2\vec{j} - 4\vec{k}) \cdot (6i - 3\vec{j} + 2\vec{k}) = 24 + 6 - 8 = 22;$$

б) Используя свойства 1-3 скалярного произведения из определения 6.1, получим

$$(2\vec{a}_1 - 3\vec{a}_2)(\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2) = 2\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1 + \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 - 6\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_2 = 72 + 22 - 294 = -200,$$

так как согласно (6.9)

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1 = 4^2 + (-2)^2 + (-4)^2 = 36, \ \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_2 = 6^2 + (-3)^2 + (2)^2 = 49.$$

в) Первый способ: используя выполненные в п. а) вычисления, получим

$$(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)^2 = \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1 - 2\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 + \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_2 = 36 - 44 + 49 = 41.$$

Второй способ: сначала вычислим координаты вектора разности $\vec{a}_1 - \vec{a}_2 =$ $= (-2; 1; -6)$, а затем найдём квадрат его модуля

$$(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)^2 = 4 + 1 + 36 = 41.$$

г) Вычислим координаты вектора $2\vec{a}_1 - \vec{a}_2 = (2; -1; -10)$ и воспользуемся формулой (6.12). В результате получим

$$|2\vec{a}_1 - \vec{a}_2| = \sqrt{4 + 1 + 100} = \sqrt{105}.$$

д) В соответствии с формулой (6.14)

$$\text{пр}_{\vec{a}_1} \vec{a}_2 = \vec{a}_2 \cdot \frac{\vec{a}_1}{|\vec{a}_1|} = \frac{\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_1}{|\vec{a}_1|} = \frac{22}{\sqrt{16 + 4 + 16}} = \frac{11}{3};$$

е) Проекцию пр$_{\vec{a}_2}\vec{a}_1$ находим аналогично тому, как это было сделано в п. д);

ж) Направляющие косинусы вектора $\vec{a}_1$ найдём по формулам (6.7), учитывая, что $|\vec{a}_1| = \sqrt{4^2+2^2+4^2} = 6$:

$$\cos(\widehat{\vec{a}_1, \vec{i}}) = \frac{2}{3}, \quad \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{j}}) = -\frac{1}{3}, \quad \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{k}}) = -\frac{2}{3};$$

з) Проекция пр$_{\vec{a}_1+\vec{a}_2}(\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2)$ вычисляется аналагично тому, что было сделано в п. д);

и) Применяя формулу (6.2) и результаты выполненных выше вычислений, находим

$$\cos(\widehat{\vec{a}_1, \vec{a}_2}) = \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|} = \frac{22}{6 \cdot 7} = \frac{11}{21},$$

так как $|\vec{a}_2| = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 2^2} = 7$. □

Пример 6.2. Найти длины сторон и величины углов треугольника с вершинами $A(-1,-2,4)$, $B(-4,-2,0)$ и $C(3,-2,1)$.

Решение. Сначала найдём координаты векторов:

$$\overrightarrow{AB} = (-3; 0; -4), \quad \overrightarrow{AC} = (4; 0; -3), \quad \overrightarrow{BC} = (7; 0; 1).$$

По формуле (6.12) вычислим длины сторон как модули соответствующих векторов:

$$|\overrightarrow{AB}| = 5, \quad |\overrightarrow{AC}| = 5, \quad |\overrightarrow{BC}| = 5\sqrt{2},$$

а по формуле (6.2) найдём косинусы искомых углов:

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = 0,$$

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{21+4}{5 \cdot 5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Таким образом получаем следующие значения искомых углов:

$$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{2} \quad , (\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) = (\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) = \frac{\pi}{4}.$$

6.2.2 Векторное произведение векторов

***Определение* 6.7.** *Векторным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, модуль которого равен*

$$|c| = \vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}), \tag{6.15}$$

и который направлен перпендикулярно к плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в ту сторону, откуда вращение первого множителя (вектора $\vec{a}$) до совмещения его со вторым множителем (вектором $\vec{b}$) на угол между ними видится происходящим против хода часовой стрелки (правило правого винта).

Свойства векторного произведения

1. Модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на перемножаемых векторах:

$S = |\vec{a}|h$, где $h = |\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$.

2. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

3. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.

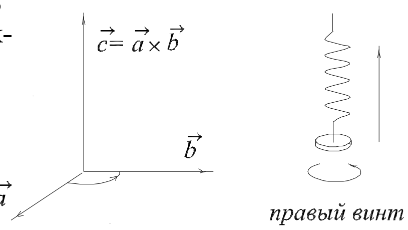

Рис. 6.2:

4. Векторное произведение двух векторов равно нулю тогда и только тогда, когда они коллинеарны:

$$\vec{a} \times \vec{b} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{a} \parallel \vec{b}.$$

5. В прямоугольной системе координат $Oxyz$ векторное произведение векторов $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ может быть вычислено по следующей формуле:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{6.16}$$

Доказательство. Используя разложения векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и свойства векторного произведения, выполним следующие действия

$$\begin{aligned} \vec{a}\times\vec{b} = (a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}) = \\ = a_xb_x(\vec{i}\times\vec{i}) + a_xb_y(\vec{i}\times\vec{j}) + a_xb_z(\vec{i}\times\vec{k}) + \\ + a_yb_x(\vec{j}\times\vec{i}) + a_yb_y(\vec{j}\times\vec{j}) + a_yb_z(\vec{j}\times\vec{k}) + \\ + a_zb_x(\vec{k}\times\vec{i}) + a_zb_y(\vec{k}\times\vec{j}) + a_zb_z(\vec{k}\times\vec{k}), \end{aligned} \tag{6.17}$$

где

$$\begin{aligned} \vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = 0, \\ \vec{i}\times\vec{j} = \vec{k},\ \vec{i}\times\vec{k} = -\vec{j}, \\ \vec{j}\times\vec{i} = -\vec{k},\ \vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}, \\ \vec{k}\times\vec{i} = \vec{j},\ \vec{k}\times\vec{j} = -\vec{i}. \end{aligned} \tag{6.18}$$

Из равенств (6.17) и (6.18) следует, что

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_yb_z - a_zb_y)\vec{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\vec{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\vec{k},$$

где правая часть является разложением по первой строке определителя из формулы (6.16). □

Пример 6.3. Дано: $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 5$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \dfrac{\pi}{4}$. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a} - 2\vec{b}$ и $3\vec{a} + 2\vec{b}$.

Решение. Искомую площадь найдём, используя свойства 1,3 и 4 векторного произведения:

$$S = \frac{1}{2}\cdot|(\vec{a}-2\vec{b})\times(3\vec{a}+2\vec{b})| = 4\cdot|\vec{a}\times\vec{b}| =$$

$$= 4|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\frac{\pi}{4} = 4\cdot 5\cdot 5\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 50\sqrt{2}.$$

Пример 6.4. В треугольнике с вершинами $A(1,-1,2)$, $B(5,-6,2)$ и $C(1,3,-1)$ найти высоту $h = |\overrightarrow{BD}|$.

Решение. Площадь треугольника равна половине произведения её высоты на соответствующее основание. Поэтому

$$h = \frac{2S}{AC}. \tag{6.19}$$

С другой стороны, площадь треугольника можно найти, используя векторное произведение

$$S = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}|. \tag{6.20}$$

Так как

$$\overrightarrow{BA} = (-4;5;0), \quad \overrightarrow{BC} = (-4;9;-3), \quad \overrightarrow{AC} = (0;4;-3),$$

то по формуле (6.14) найдём векторное произведение

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 5 & 0 \\ -4 & 9 & -3 \end{vmatrix} = (-15;-12;-16),$$

а по формуле (6.12) вычислим модули векторов

$$|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}| = \sqrt{15^2 + 12^2 + 16^2} = 25 \text{ и } |AC| = \sqrt{16+9} = 5. \tag{6.21}$$

Из (6.19)-(6.21) следует, что искомая высота

$$h = \frac{25}{5} = 5.$$

□

6.2.3 Произведения трёх векторов

1. Смешанное произведение векторов

***Определение* 6.8.** *Смешанным произведением $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ трёх векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}$ на векторное произведение векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$.*

Свойства смешанного произведения

1.1. В прямоугольной системе координат $Oxyz$ смешанное произведение векторов $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ и $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$ может быть вычислено по следующей формуле:

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (6.22)$$

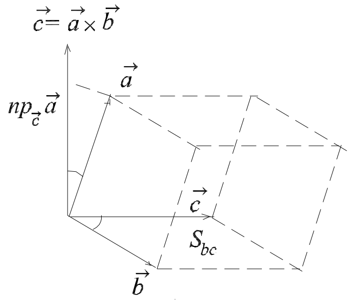

Рис. 6.3:

Доказательство. Используя формулы (6.9) и (6.16), выполним следующие действия:

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) =$$
$$= a_x(b_y c_z - b_z c_y) + a_y(b_z c_x - b_x c_z) + a_z(b_x c_y - b_y c_x) =$$
$$= a_x \cdot \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - a_y \cdot \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + a_z \cdot \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}.$$

Правая часть последнего равенства представляет собой разложение определителя (6.19) по первой строке. □

1.2. Абсолютное значение смешанного произведения $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ равно объёму параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$.

Доказательство. Из определений скалярного и векторного произведений следует, что

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}\times\vec{c}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}\times\vec{c}}) =$$
$$= |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}\times\vec{c}})\cdot\sin(\widehat{\vec{b},\vec{c}}) = V_{abc},$$

так как $|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cdot\sin(\widehat{\vec{b},\vec{c}}) = S_{bc}$, $|\vec{a}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}\times\vec{c}}) = h$ и $V_{abc} = S_{bc}\cdot h$. □

1.3. Смешанное произведение трёх ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда они являются компланарными.

Справедливость этого утверждения следует из того, что в данном случае строки определителя из правой части равенства (6.22) являются линейно зависимыми согласно теоремам 4.7 и 4.9.

1.4. В смешанном произведении возможны циклические перестановки:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}).$$

Справедливость этих равенств следует из того, что при перемещении первой строки определителя из правой части равенства (6.22) на последнее место, значение этого определителя остаётся неизменным согласно теореме 2.3.

Для вычисления двойного векторного произведения может быть использована следующая формула:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

Пример 6.5. Установить, образуют ли векторы

$$\vec{a}_1 = \{2, 3, -1\}, \quad \vec{a}_2 = \{1, -1, 3\}, \quad \vec{a}_3 = \{1, 9, -11\}$$

базис в множестве всех векторов.

Решение. Для ответа на поставленный вопрос вычислим смешанное произведение данных векторов, используя формулу (6.19):

$$\vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 9 & -11 \end{vmatrix} = 0.$$

Из последнего равенства и теоремы 4.9 следует, что данные векторы являются линейно зависимыми и поэтому базиса не образуют. $\square$

2. Двойное векторное произведение: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

Для двойного векторного произведения справедливо следующее равенство:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}). \tag{6.23}$$

Тема 7

Прямые и плоскости

7.1 Векторное уравнение прямой

В трёхмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ рассмотрим прямую линию L, которая проходит через некоторую фиксированную точку M_0 параллельно некоторому вектору $\vec{a}$ данного пространства. Такой вектор $\vec{a}$ называется *направляющим вектором* данной прямой.

Пусть $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$ — радиус-вектор точки M_0 относительно начала координат O, $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ — радиус-вектор текущей точки M данной прямой L. В этом случае равенство

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a} \cdot t, \quad \text{где } t \in (-\infty, +\infty), \quad (7.1)$$

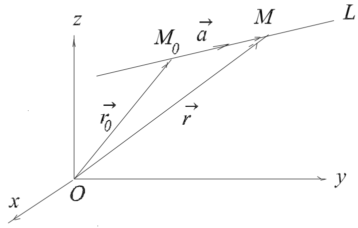

Рис. 7.1:

называется *векторным параметрическим уравнением прямой* L, а переменная t — параметром.

Если прямая L задана двумя своими точками M_0 и M_1, радиус-векторами которых являются $\vec{r}_0$ и $\vec{r}_1$ соответственно, то, полагая в уравнении (7.1) вектор $\vec{a} = \overrightarrow{M_0M_1} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$, получим равенство

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)t, \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

Это равенство является *векторным уравнением прямой проходящей через данные точки M_1 и M_2.*

7.2 Прямые на плоскости

7.2.1 Уравнения прямой на плоскости

1. Параметрические уравнения прямой

Если прямая L лежит в координатной плоскости Oxy, то проецируя её векторное уравнение (7.1) на координатные оси Ox и Oy, получим уравнения

$$\begin{cases} x = x_0 + a_x \cdot t, \\ y = y_0 + a_y \cdot t, \end{cases} \qquad \text{где } t \in (-\infty, +\infty), \tag{7.2}$$

которые называются *параметрическими уравнениями* прямой, лежащей плоскости.

2. Общее уравнение прямой

Исключая параметр t из уравнений (7.2), получим уравнение прямой L в координатной форме:

$$a_y(x - x_0) - a_x(y - y_0) = 0. \tag{7.3}$$

Полагая $A = a_y$ и $B = -a_x$, перепишем уравнение (7.3) в виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{7.4}$$

Равенство (7.4) называется *уравнением прямой, проходящей через точку* M_0.

Используя вектор $\vec{n}(A, B)$, запишем левую часть уравнения (7.4) в виде скалярного произведения. В результате получим равенство

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0,$$

из которого следует, что вектор $\vec{n}$ является вектором *нормали* к данной прямой L.

Если в равенстве (7.4) раскрыть скобки и принять обозначение $C = -Ax_0 - By_0$, то получится уравнение

$$Ax + By + C = 0, \tag{7.5}$$

которое называется *общим уравнением прямой на плоскости.*

***Замечание* 7.1.** *При $B \neq 0$ уравнение прямой (7.6) можно разрешить относительно переменной y:*

$$y = kx + b, \quad \textit{где} \quad k = -\frac{A}{B},\ b = -\frac{C}{B}.$$

Число k называется угловым коэффициентом прямой, а число b — свободным членом.

3. Каноническое уравнение прямой

Из равенства (7.1), переписанного в виде

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{a} \cdot t, \quad \text{где } t \in (-\infty, +\infty),$$

следует коллинеарность векторов $\vec{r} - \vec{r}_0$ и $\vec{a}$, что означает пропорциональность их координат:

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y}. \tag{7.6}$$

Уравнение (7.6) называется *каноническим уравнением прямой, расположенной в плоскости.*

7.2.2 Расстояние от точки до прямой на плоскости

Пусть M_0 — некоторая точка прямой L. Тогда расстояние $\rho(N, L)$ от точки $N(x_N, y_N)$ до прямой L можно вычислить по формуле (6.14) как модуль проекции вектора $\overrightarrow{M_0N}$ на направление вектора нормали $\vec{n}$:

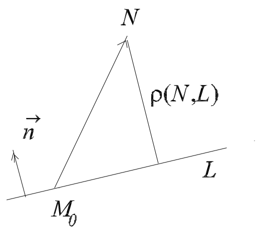

Рис. 7.2:

$$\rho(N, L) = |\text{пр}_{\vec{n}} \overrightarrow{M_0N}| =$$

$$= \left| \overrightarrow{M_0N} \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \right| = \frac{|\overrightarrow{M_0N} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}. \tag{7.7}$$

7.2.3 Взаимное расположение прямых на плоскости

1. Общая теорема

Теорема 7.1. *Две прямые*

$$\begin{aligned} L_1: &\quad A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ L_2: &\quad A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{aligned}$$

на плоскости:
а) либо не имеют общих точек (прямые параллельны), если

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2};$$

б) либо имеют одну и только одну общую точку, если $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$*;*
в) либо совпадают, если $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

Доказательство утверждений *а)-б)* следует из теоремы Кронекера-Капелли (теорема 5.1). Справедливость утверждения *в)* очевидна.

2. Угол между двумя прямыми на плоскости

Пусть $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ — векторы нормалей к прямым L_1 и L_2 соответственно. Тогда угол между этими прямыми может быть найден по формуле

$$\cos(\widehat{L_1, L_2}) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}. \tag{7.8}$$

Полагая, что $\vec{n}_1 = (A_1, B_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2, B_2)$, получим формулу

$$\cos(\widehat{L_1, L_2}) = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

3. Расстояние между параллельными прямыми на плоскости

Если векторы $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ коллинеарны, то соответствующие им прямые L_1 и L_2 являются параллельными и расстояние между ними может быть вычислено по формуле (6.14) как модуль проекции вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ на направление вектора нормали $\vec{n}_1$:

$$\rho(L_1, L_2) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{M_1M_2}|}{|\vec{n}_1|}, \tag{7.9}$$

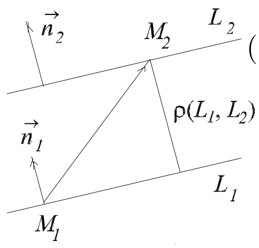

Рис. 7.3:

где M_1 и M_2 — произвольные точки прямых L_1 и L_2 соответственно. Полагая $\vec{n}_1 = (A_1, B_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2, B_2)$, $M_1 = (x_1, y_1)$ и $M_2 = (x_2, y_2)$, получим формулу

$$\rho(L_1, L_2) = \frac{|A_1(x_2 - x_1) + B_1(y_2 - y_1)|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}.$$

В примерах 7.1-7.3 требуется написать общее уравнение прямой.

Пример 7.1. Прямая L задана точкой $M_0(-1, 2)$ и нормальным вектором $\vec{n} = \{2, 2\}$.

Решение. Так как любой точке $M(x, y)$ прямой соответствует вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x + 1; y - 2)$, ортогональный вектору её нормали $\vec{n}$, то их скалярное произведение равно нулю: $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$. Выражая левую часть этого равенства через координаты перемножаемых векторов, получим уравнение

$$(x + 1) \cdot 2 + (y - 2) \cdot 2 = 0$$

данной прямой. Раскрывая в последнем равенстве скобки и приводя подобные члены, получим общее уравнение этой прямой

$$x + y - 1 = 0.$$

Пример 7.2. Прямая L задана точкой $M_0(-1, 2)$ и направляющим вектором $\vec{a} = = \{3, -1\}$.

Решение. Так как для любой точки $M(x, y)$ прямой вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x + 1;$ $y - 2)$ является коллинеарным по отношению к направляющему вектору $\vec{a}$, то оба этих вектора связаны равенством $\overrightarrow{M_0M} = t \cdot \vec{a}$, где t — соответствующее число. Из этого равенства следует, что координаты этих векторов пропорциональны:

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-1}.$$

Из последнего соотношения получаем общее уравнение данной прямой

$$x + 3y - 5 = 0.$$

Пример 7.3. Прямая L задана двумя своими точками $M_1(1, 2)$ и $M_2(-1, 0)$.

Решение. 1. Для данной прямой возьмём в качестве направляющего вектор $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2} = (-2; -2)$. Пусть $M(x, y)$ — текущая точка данной прямой. В этом случае вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{M_1M} = (x - 1, y - 2)$. Так как у коллинеарных векторов соответствующие координаты пропорциональны, то справедливо равенство

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{-2},$$

которое является каноническим уравнением данной прямой. Из этого уравнения можно получить её общее уравнение:

$$x - y + 1 = 0.$$

2. Последнее уравнение можно получить, используя ортогональность направляющего вектора $\vec{a} = (-2; -2)$ данной прямой и любого вектора $\vec{n}$ её нормали. В качестве вектора нормали возьмём вектор $\vec{n} = (2; -2)$. Так как вектор $\overrightarrow{M_1M}$ лежит на данной прямой, то он ортогонален вектору $\vec{n}$. Из ортогональности этих векторов следует, согласно определению 6.4, равенство нулю их скалярного произведения $\overrightarrow{M_1M} \cdot \vec{n} = 0$. Выражая по формуле (6.9) левую часть этого равенства через координаты перемножаемых векторов, получим равенство

$$2(x - 1) - 2(y - 2) = 0,$$

которое является общим уравнением данной прямой.

Пример 7.4. Заданы прямая $L: \ -2x + y - 1 = 0$ и точка $N(-1, 2)$. Требуется:

1) вычислить расстояние $\rho(L, N)$ от точки N до прямой L;

2) написать уравнение прямой $L_{\perp}$, проходящей через точку N перпендикулярно заданной прямой L;

3) написать уравнение прямой $L_{\parallel}$, проходящей через точку N параллельно заданной прямой L.

Решение. 1) Для данной прямой вектор $\vec{n} = (-2; 1)$ является вектором нормали. Возьмём произвольную точку прямой L, например, точку $M_0(0; 1)$ (для её нахождения в уравнении данной прямой следует положить $x = 0$ и найти из полученного равенства соответствующее значение $y = 1$). Тогда расстояние $\rho(L, N)$ от прямой до точки N можно найти как проекцию вектора $\overrightarrow{M_0N} = (-1; 1)$ на направление вектора нормали $\vec{n}$, используя формулу (6.14) или (7.9):

$$\rho(L, N) = |\text{пр}_{\vec{n}}\overrightarrow{M_0N}| = \left|\overrightarrow{M_0N} \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\right| = \frac{|(-1) \cdot (-2) + 1 \cdot 1|}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

2) Вектор нормали $\vec{n} = (-2; 1)$ данной прямой L является направляющим вектором для перпендикулярной по отношению к ней прямой $L_{\perp}$. Если прямая $L_{\perp}$ проходит через точку N, то её текущей точке $M(x, y)$ соответствует вектор $\overrightarrow{NM} = (x + 1; y - 2)$, коллинеарный вектору $\vec{n} = (-2; 1)$. Из коллинеарности этих векторов следует, что

$$\frac{x + 1}{-2} = \frac{y - 2}{1}.$$

Это равенство приводится к общему уравнению прямой $L_{\perp}$:

$$x + 2y - 3 = 0.$$

3) Вектор нормали $\vec{n} = (-2; 1)$ прямой L является также вектором нормали прямой $L_{\parallel}$. Если $M(x, y)$ является текущей точкой прямой $L_{\parallel}$ и эта прямая проходит через точку $N(-1; 2)$, то ей соответствует вектор $\overrightarrow{NM} = (x+1; y-2)$, который ортогонален вектору нормали $\vec{n} = (-2; 1)$. Скалярное произведение этих векторов равно нулю: $(x + 1) \cdot (-2) + (y - 2) \cdot 1 = 0$. Раскрывая в этом равенстве скобки и приводя подобные члены, получим общее уравнение прямой $L_{\parallel}$:

$$-2x + y - 4 = 0.$$

7.3 Прямые в пространстве

7.3.1 Уравнения прямой в пространстве

1. Параметрические уравнения прямой в пространстве

Пусть x_0, y_0, z_0 и x, y, z — координаты точек M_0 и M соответственно, а a_x, a_y, a_z — координаты вектора $\vec{a}$ в некоторой прямоугольной системе координат $Oxyz$. Проецируя векторное уравнение прямой (7.1) на координатные оси x, y и z, получим *скалярные параметрические уравнения прямой L* в пространстве:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_x \cdot t, \\ y = y_0 + a_y \cdot t, \\ z = z_0 + a_z \cdot t, \end{cases} \qquad \text{где } t \in (-\infty, +\infty). \tag{7.10}$$

2. Канонические уравнения прямой

Уравнение (7.1) можно переписать в виде $\vec{r} - \vec{r}_0 = t\vec{a}$. Последнее равенство означает, что векторы $\vec{r} - \vec{r}_0$ и $\vec{a}$ являются коллинеарными и, следовательно, их координаты пропорциональны согласно замечанию 4.5:

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z}. \tag{7.11}$$

Равенства (7.11) называются *каноническими уравнениями прямой.*

3. Уравнения прямой в проекциях

Используя канонические уравнения прямой (7.11), можно составить следующие соотношения

$$\begin{cases} a_y(x - x_0) = a_x(y - y_0), \\ a_z(x - x_0) = a_x(z - z_0), \\ a_y(z - z_0) = a_y(y - y_0), \end{cases}$$

которые называются *уравнениями прямой в проекциях на координатные плоскости.*

7.3.2 Расстояние от точки до прямой в пространстве

Если $\vec{a}$ — направляющий вектор прямой прямой L, которая проходит через точку M_0, то расстояние от этой прямой до точки N можно вычислить, используя свойства векторного произведения, по формуле

$$\rho(N, L) = \frac{|\overrightarrow{M_0N} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}, \tag{7.12}$$

где $\overrightarrow{M_0N} \times \vec{a}_2$ — векторное произведение.

7.3.3 Угол между прямыми в пространстве

Если $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ — направляющие векторы прямых L_1 и L_2 соответственно, то синус угла между этими прямыми может быть вычислен, в соответствии с равенством (6.15), по формуле

$$\sin(\widehat{L_1, L_2}) = \frac{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|}, \tag{7.13}$$

где $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2$ — векторное произведение.

7.3.4 Расстояние между скрещивающимися прямыми

Если $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ — направляющие векторы двух скрещивающихся прямых L_1 и L_2 соответственно, то расстояние между этими прямыми можно вычислить, используя свойства векторного произведения и формулу (6.14):

$$\rho(L_1, L_2) = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2)|}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|}, \tag{7.14}$$

где $\overrightarrow{M_1M_2} \cdot (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2)$ — смешанное произведение.

7.4 Плоскость в трёхмерном пространстве

В пространстве, связанном с прямоугольной системой координат $Oxyz$, рассмотрим плоскость P, которой принадлежит некоторая точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и которой параллельны неколлинеарные друг другу векторы $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$.

7.4.1 Уравнения плоскости

1. Векторное параметрическое уравнение плоскости

Пусть $\vec{r}_0 = O\vec{M}_0$ — радиус-вектор точки M_0. Тогда радиус-вектор $\vec{r} = O\vec{M}$ произвольной точки M плоскости P, можно представить векторным равенством

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}, \quad \text{где} \quad \lambda, \mu \in (-\infty, +\infty). \tag{7.15}$$

Числа λ, μ являются параметрами. Если λ и μ изменяются от $-\infty$ до $+\infty$, то точка M пробегает всю плоскость P. Равенство (7.15) называется *векторным параметрическим уравнением плоскости.*

2. Скалярные параметрические уравнения плоскости

Эти уравнения получим, проецируя векторное уравнение (7.15) плоскости P на координатные оси Ox, Oy и Oz:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a_x + \mu b_x \\ y = y_0 + \lambda a_y + \mu b_y \\ z = z_0 + \lambda a_z + \mu b_z \end{cases} \qquad \text{где } \lambda,\ \mu \in (-\infty, +\infty),$$

где x, y, z — координаты текущей точки M данной плоскости.

3. Общее уравнение плоскости

Если точка $M(x, y, z)$ лежит в плоскости P, то векторы $\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{M_0M}$ являются компланарными, из чего следует, что их смешанное произведение равно нулю, согласно следствию 4.1 и теореме 4.9:

$(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = 0$. Используя формулу (6.22), это равенство можно представить в виде

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0. \tag{7.16}$$

Разложив в последнем равенстве определитель по элементам первой строки (формула (2.1)), получим *уравнение плоскости, проходящей через точку* $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0, \tag{7.17}$$

где

$$A = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, \quad B = -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}. \tag{7.18}$$

Если в уравнении (7.17) раскрыть скобки и принять обозначение $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, то получим *общее уравнение плоскости*:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{7.19}$$

Левую часть уравнения (7.17) можно представить в виде скалярного произведения векторов $\vec{n}(A, B, C)$ и $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$. В результате получим равенство

$$\vec{n}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0) = 0.$$

Последнее равенство справедливо для любой точки M плоскости P, поэтому вектор $\vec{n}(A, B, C)$ является *вектором нормали* к данной плоскости. Координаты A, B, C вектора $\vec{n}$, определяемые равенствами (7.18), являются алгебраическими дополнениями элементов первой строки определителя (7.16), поэтому вектор $\vec{n} = \vec{a}\times\vec{b}$.

4. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки

Если три точки M_0, M_1, M_2, не лежащие на одной прямой, принадлежат плоскости P, то её уравнение можно получить, согласно следствию 4.1 и теореме 4.9, из условия компланарности векторов $\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{M_0M_2} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Выполнив в левой части последнего равенства разложение определителя по первой строке, получим уравнение плоскости либо в виде (7.17), либо в виде (7.19).

Аналогичным образом составляется уравнение плоскости, проходящей через данные точку и прямую.

7.4.2 Расстояние от точки до плоскости

Если $\vec{n}$ — вектор нормали к плоскости P, которой принадлежит точка M_0, то расстояние от точки N до плоскости P может быть вычислено как абсолютная величина проекции вектора $\overrightarrow{M_0N}$ на направление вектора нормали $\vec{n}$ по формуле (6.14):

$$\rho(N, P) = |\text{пр}_{\vec{n}} \overrightarrow{M_0N}| = \frac{|\overrightarrow{M_0N} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}. \tag{7.20}$$

7.4.3 Взаимное расположение двух плоскостей

Теорема 7.2. *В трёхмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ две плоскости*

$$\begin{aligned} P_1: &\quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ P_2: &\quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0: \end{aligned} \tag{7.21}$$

а) либо не имеют ни одной общей точки (плоскости параллельны), если

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2};$$

б) либо имеют одну и только одну общую прямую, если векторы $\vec{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ *и* $\vec{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ *не являются коллинеарными;*

в) либо совпадают, если $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$.

Доказательство. Справедливость утверждения а) следует из того, что при выполнении указанных в нём условий ранг основной матрицы системы уравнений (7.21) равен 1, а ранг её расширенной матрицы равен 2. В случае б) ранги основной и расширенной матриц системы уравнений (7.21) равны 2, так как векторы $\vec{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ не являются коллинеарными и, следовательно, хотя бы один из миноров второго порядка основной матрицы отличен от нулю. Предположим, для определённости, что $A_1 : A_2 \neq B_1 : B_2$, и перепишем уравнения (7.21) в виде системы

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -D_1 - C_1z, \\ A_2x + B_2y = -D_2 - C_2z, \end{cases}$$

которая при каждом конкретном значении свободной незвестной z является крамеровской системой уравнений относительно x и y и, следовательно, имеет единственное решение. Это решение можно найти, используя формулы Крамера (3.11):

$$x = \frac{1}{\Delta}[(C_2B_1 - C_1B_2)z - D_1B_2 + D_2B_1],$$
$$y = \frac{1}{\Delta}[(C_1A_2z - C_2A_1)z + D_1A_2 - D_2A_1],$$

где определитель $\Delta = A_1B_2 - A_2B_2 \neq 0$. Полагая $z = t$, эти равенства можно представить в виде параметрических уравнений прямой в пространстве:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\Delta}[(C_2B_1 - C_1B_2)t - D_1B_2 + D_2B_1], \\ y = \dfrac{1}{\Delta}[(C_1A_2z - C_2A_1)t + D_1A_2 - D_2A_1], \\ z = t, \end{cases} \qquad t \in (-\infty, +\infty).$$

Справедливость утверждения *в)* теоремы очевидна.

***Следствие* 7.1.** *Прямая в пространстве может быть задана системой уравнений* (7.21) *как линия пересечения двух плоскостей.*

7.4.4 Взаимное расположение прямой и плоскости

Теорема 7.3. *Пусть* $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ *— направляющий вектор прямой* L, *которая проходит через точку* $M_0(x_0, y_0, z_0)$, *а* $\vec{n}$ *— вектор нормали к плоскости* P, *заданной её общим уравнением* (7.19). *Тогда плоскость* P *и прямая* L:

а) либо не пересекаются (прямая параллельна плоскости и не имеет с ней общих точек), если

$$\begin{cases} Aa_x + Ba_y + Ca_z = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0; \end{cases}$$

б) либо имеют одну и только одну общую точку (прямая и плоскость пересекаются), если

$$Aa_x + Ba_y + Ca_z \neq 0;$$

в) либо прямая целиком находится в плоскости:

$$\begin{cases} Aa_x + Ba_y + Ca_z = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \end{cases}$$

Доказательство. Справедливость утверждений *а)* и *в)* очевидны. Докажем утверждение *б)*. Предположим, что прямая L задана двумя уравнениями вида (7.21) как линия пересечения двух плоскостей, и рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases} \tag{7.22}$$

Очевидно, что направляющий вектор прямой L можно представить в виде $\vec{a} = \lambda(\vec{n}_1 \times \vec{n}_2)$, где $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\vec{n}_2 = = (A_2, B_2, C_2)$ и число $\lambda \neq 0$. Если неравенство в условии *б)* выполняется, то смешанное произведение $\vec{n} \cdot (\vec{n}_1 \times \vec{n}_2) \neq 0$. Тогда из теорем 4.7 и 4.9 следует, что векторы $\vec{n}, \vec{n}_1, \vec{n}_2$ являются линейно независимыми и определитель системы уравнений (7.22) отличен от нуля. В этом случае эта система уравнений является крамеровской и имеет единственное решение, которому соответствует точка пересечения прямой L и плоскости P. $\square$

7.4.5 Угол между прямой и плоскостью

Если $\vec{a}$ — направляющий вектор прямой L, а $\vec{n}$ — вектор нормали к плоскости P, то синус угола между прямой L и плоскостью P может быть вычислен как косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{n}$ по формуле (6.2):

$$\sin(\widehat{L, P}) = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{n}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}|}. \tag{7.23}$$

где $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2$ — скалярное произведение.

В заключение отметим, что:

— условием перпендикулярности двух плоскостей P_1 и P_2 является ортогональность их нормалей $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$, что может быть представлено равенством $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$;

— условие перпендикулярности прямой L с направляющим вектором $\vec{a}$ и плоскости P с вектором нормали $\vec{n}$ равносильно условию коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{n}$ и аналитически выражается равенством $\vec{a} \times \vec{n} = 0$.

Пример 7.5. Заданы плоскость $P: -2x + y - z + 1 = 0$ и точка $M_0(1,1,1)$. Написать уравнение плоскости $P_{\parallel}$, проходящей через точку M параллельно плоскости P, и вычислить расстояние $\rho(P, P_{\parallel})$ между этими плоскостями.

Решение. 1. Так как плоскости параллельны, то вектор нормали $\vec{n} = (-2;1;-1)$ данной плоскости является также и вектором нормали искомой плоскости $P_{\parallel}$. Это означает, что текущей точке $M(x,y,z)$ плоскости $P_{\parallel}$ соответствует вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x-1; y-1; z-1)$, ортогональный вектору нормали $\vec{n} = (-2;1;-1)$. Следовательно, скалярное произведение этих векторов равно нулю:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0.$$

Выражая левую часть последнего равенства через координаты перемножаемых векторов, получим искомое уравнение плоскости $P_{\parallel}$:

$$-2x + y - z + 2 = 0.$$

2. Используя уравнение плоскости P, найдём её произвольную точку. В частности, полагая $x = y = 0$, из этого уравнения получим $z = 1$, что соответствует точке $N(0;0;1)$ плоскости P. Расстояние между плоскостями найдём как модуль проекции вектора $\overrightarrow{M_0N} = (-1;-1;0)$ на направление вектора нормали $\vec{n}$ по формуле (6.14):

$$\rho(P, P_{\parallel}) = \rho(M_0, N) = |\text{пр}_{\vec{n}}\overrightarrow{M_0N}| = \frac{|\overrightarrow{M_0N} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}. \qquad \square$$

Пример 7.6. Написать уравнение плоскости $P_{\perp}$, проходящей через заданные точки $M_1(1,2,0)$ и $M_2(2,1,1)$ перпендикулярно заданной плоскости P: $-x + y - -1 = 0$.

Решение. Вектор нормали $\vec{n} = (-1;1;0)$ плоскости P является параллельным по отношению к искомой плоскости $P_{\perp}$. Так как векторы $\overrightarrow{M_1M_2} = (1;-1;1)$ и $\vec{n} = (-1;1;0)$ не являются коллинеарными, то уравнение искомой плоскости $P_{\perp}$ можно получить из условия компланарности тройки векторов $\vec{n} = (-1;1;0)$, $\overrightarrow{M_1M_2} = (1;-1;1)$ и $\overrightarrow{M_1M}$, где $M(x,y,z)$ — текущая точка искомой плоскости $P_{\perp}$. Условие компланарности векторов аналитически записывается в виде равенства нулю их смешанного произведения:

$$\overrightarrow{M_1M} \cdot (\vec{n} \times \overrightarrow{M_1M_2}) = 0.$$

Используя формулу (6.22), выразим левую часть этого равенства через координаты входящих неё векторов

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим уравнение плоскости $P_{\perp}$:

$$x + y - 3 = 0.$$

Учебное издание

С.В. Волков

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Издание подготовлено в авторской редакции

Технический редактор *Е.Н. Собанина*

Подписано в печать 01.11.2017 г. Формат 60×84/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 5,00. Тираж 300 экз. Заказ 1705

Российский университет дружбы народов
115419, ГСП-1, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3

Типография РУДН
115419, ГСП-1, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, тел. 952-04-41

Для заметок