

**ПРИОРИТЕТНЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ПРОЕКТ «ОБРАЗОВАНИЕ»  
РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ**

---

**А.М. УМНОВ, В.А. ТУРИКОВ,  
М.Н. МУРАТОВ, А.С. СКОВОРОДА**

**СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ  
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА  
В ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКЕ**

**Учебное пособие**

**Москва**

**2008**

**«Создание комплекса инновационных образовательных программ  
и формирование инновационной образовательной среды,  
позволяющих эффективно реализовывать государственные интересы РФ  
через систему экспорта образовательных услуг»**

Экспертное заключение –

зав. кафедрой теоретических основ радиотехники технологического института  
Южного Федерального университета в г. Таганроге  
доктор физико-математических наук, доцент *С.Л. Недосеев*

**Умнов А.М., Туриков В.А., Муратов М.Н., Сковорода А.С.**

Современные методы вычислительного эксперимента в прикладной физике: Учеб. пособие. – М.: РУДН, 2008. – 248 с.

Цель пособия – обеспечение базовой подготовки студентов магистратуры в области математического моделирования и вычислительного эксперимента. Содержание книги направлено на приобретение студентами знаний и навыков по самостоятельной разработке численных моделей для изучения сложных физических явлений и процессов, протекающих в действующих и проектируемых экспериментальных установках, и проведение студентами вычислительных экспериментов.

Предназначено для студентов первого года обучения в магистратуре, обладающих базовыми знаниями по физике, математике и информатике в объеме программы бакалавриата факультета физико-математических наук РУДН, соответствующей федеральному образовательному стандарту.

*Учебное пособие выполнено в рамках инновационной образовательной программы Российского университета дружбы народов, направление «Комплекс экспортоориентированных инновационных образовательных программ по приоритетным направлениям науки и технологий», и входит в состав учебно-методического комплекса, включающего описание курса, программу и электронный учебник.*

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ .....</b>	<b>8</b>
<b>ТЕМА 1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ – НОВАЯ ТЕХНОЛОГИЯ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ .....</b>	<b>9</b>
1.1. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент ..	9
1.2. Цикл вычислительного эксперимента .....	11
1.3. Особенности вычислительного эксперимента .....	13
1.4. Основные особенности новой технологии научных исследований...	16
1.5. Вычислительный эксперимент в прикладной физике .....	17
<b>ТЕМА 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМ, СОСТОЯЩИХ ИЗ БОЛЬШОГО ЧИСЛА ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ .....</b>	<b>21</b>
2.1. Метод частиц и его реализации .....	21
2.2. Моделирование реального газа по методу молекулярной динамики .....	23
2.3. Метод частиц в ячейке для моделирования бесстолкновительной плазмы .....	24
2.4. Моделирование галактик .....	26
2.5. Метод частиц для моделирования течения несжимаемой жидкости .....	27
<b>ТЕМА 3. МОДЕЛИ ПЛАЗМЫ, ОСНОВАННЫЕ НА УРАВНЕНИИ ВЛАСОВА .....</b>	<b>30</b>
3.1. Уравнение Власова .....	30
3.2. Решение системы уравнений Власова – Пуассона методом преобразований .....	32
3.3. Метод «водяного мешка» .....	35
3.4. Численное решение уравнения Власова .....	37

<b>ТЕМА 4. МЕТОД ЧАСТИЦ В ЯЧЕЙКЕ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ОДНОМЕРНЫХ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ .....</b>	<b>42</b>
4.1. Общая схема моделирования .....	42
4.2. Вычисление распределения плотности заряда .....	42
4.3. Нахождение самосогласованного электрического поля .....	45
4.4. Метод прогонки для решения уравнения Пуассона с непериодическими граничными условиями .....	47
4.5. Метод Фурье для периодических граничных условий .....	50
4.6. Продвижение частиц на очередном временном шаге .....	53
4.7. Формирование начального распределения частиц на фазовой плоскости .....	55
4.8. Формулы алгоритма PIC-метода в компьютерных переменных .....	56
4.9. Общая структура программы одномерного PIC-моделирования .....	60
<b>ТЕМА 5. ПРИМЕРЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ОДНОМЕРНЫХ ПЛАЗМЕННЫХ СИСТЕМ .....</b>	<b>65</b>
5.1. Двухпотоковая неустойчивость .....	65
5.2. Нелинейные колебания плазмы в цилиндрическом волноводе под действием локализованного электрического импульса .....	66
5.3. Электронные колебания в пучковом двойном слое .....	70
<b>ТЕМА 6. МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДНОМЕРНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПРОЦЕССОВ .....</b>	<b>75</b>
6.1. Одномерная электромагнитная модель плазмы .....	75
6.2. Численное решение релятивистских уравнений движения частиц в электромагнитном поле .....	76
6.3. Интегрирование уравнений Максвелла методом Даусона .....	79
6.4. Задание поля электромагнитного импульса в вакуумной области ...	81



## **ТЕМА 7. ПРИМЕРЫ ОДНОМЕРНОГО**

### **ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ..... 83**

7.1. Возбуждение кильватерных волн в плазме мощным лазерным импульсом ..... 83

7.2. Самомодуляция правополяризованной волны в области электронного циклотронного резонанса ..... 84

7.3. Распространение электромагнитных солитонов поперек сильного магнитного поля в плазме ..... 87

### **ТЕМА 8. МЕТОД ЧАСТИЦ В ЯЧЕЙКЕ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ И ТРЕХМЕРНЫХ ПЛАЗМЕННЫХ ПРОЦЕССОВ ..... 92**

8.1. Общая схема метода для электростатических процессов ..... 92

8.2. Вычисление распределения плотности заряда ..... 94

8.3. Электромагнитные алгоритмы, непосредственно использующие значения электрического и магнитного полей ..... 96

8.4. Взаимодействие частиц и полей ..... 100

8.5. Граничные условия ..... 104

8.5. Диагностики ..... 105

### **ТЕМА 9. ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА ДЛЯ ТРЕХМЕРНЫХ ПЛАЗМЕННЫХ СИСТЕМ ..... 107**

9.1. Разработка сложных многомерных программ численного моделирования ..... 107

9.2. Плазма, удерживаемая в зеркальной магнитной ловушке в условиях электронного циклотронного резонанса ..... 109

9.2.1. Параметры экспериментальной установки и основные параметры численной модели ..... 110

9.2.2. Основные этапы создания численной модели ..... 112

9.2.3. Результаты вычислительного эксперимента ..... 122

9.3. Численное исследование параметров плазмы	
ЭЦР-источника ионов .....	125
9.3.1. Параметры экспериментальной установки и основные этапы	
численного моделирования .....	125
9.3.2. Результаты вычислительного эксперимента .....	129
<b>ТЕМА 10. СОЗДАНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОННЫХ</b>	
<b>И ПЛАЗМЕННЫХ СГУСТКОВ И УПРАВЛЕНИЕ</b>	
<b>ИХ ДВИЖЕНИЕМ .....</b>	<b>134</b>
10.1. Экспериментальная установка .....	134
10.2. Численная модель плазмы в условиях синхротронного	
гироманнитного авторезонанса в зеркальной магнитной ловушке .....	137
10.2.1. Особенности численной модели .....	137
10.2.2. Результаты вычислительного эксперимента .....	141
10.3. Численная модель формирования плотных плазменных	
сгустков .....	150
10.3.1. Численная модель адиабатического сжатия плазмы .....	150
10.3.2. Параметры плазмы, генерируемой в результате СГА	
с последующим адиабатическим сжатием .....	153
10.4. Коллективное ускорение протонов плазменного сгустка .....	159
<b>ТЕМА 11. ИНСТРУМЕНТАЛЬНАЯ СРЕДА ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ</b>	
<b>ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА</b>	
<b>ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИНАМИКИ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ</b>	
<b>В ОТКРЫТЫХ МАГНИТНЫХ ЛОВУШКАХ .....</b>	<b>163</b>
11.1. Инструментальная среда как технология создания виртуальных	
физических установок .....	163
11.2. Основы работы с инструментальной средой .....	165
11.3. Представление результатов вычислительного эксперимента .....	169

<b>ТЕМА 12. ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ И РАСПРЕДЕЛЕННОЕ</b>	
<b>ПРОГРАММИРОВАНИЕ .....</b>	<b>173</b>
12.1. Введение .....	173
12.2. Классификация параллельных вычислительных систем .....	174
12.3. Концепции параллельного программирования и принципы разработки параллельных программ .....	180
12.4. Кластерные системы .....	185
12.5. Распределенные вычисления .....	188
12.6. Заключение .....	189
<b>ОПИСАНИЕ КУРСА И ПРОГРАММА .....</b>	<b>192</b>

## **ВВЕДЕНИЕ**

В этом учебном пособии студенту предоставляется возможность приобщиться к интереснейшей области знаний – численному моделированию и вычислительному эксперименту. Она охватывает огромный диапазон научных дисциплин: физику, химию, вычислительную математику, экономику, информационные технологии и т.д. Бурно развивающаяся компьютерная техника сделала доступными мощные персональные компьютеры для широких кругов молодых исследователей. Они позволяют проводить такое моделирование сложных процессов, о котором раньше можно было только мечтать. Сюда, в частности, относятся двух- и трехмерные процессы в плазме, в атмосфере Земли, в астрофизических объектах. Однако прежде чем приступить к написанию таких сложных программ нужно освоить основы построения численных моделей. В этом и состоит главная цель данного пособия. Оно построено по обычному принципу: от простого к сложному. Главное внимание уделяется методу частиц как наиболее универсальному и мощному. Сначала подробно рассматривается одномерная электростатическая модель плазмы. Ее численная реализация содержит в себе универсальные элементы, свойственные и другим, более сложным моделям. Затем анализируется одномерная электромагнитная модель плазмы. Далее делается постепенный переход к двумерным и трехмерным моделям. Такой подход позволяет подойти к моменту начала разработки по-настоящему сложной программы, уже будучи хорошо вооруженным профессиональными навыками. Те, кто имел дело с программированием, понимают, насколько это важно.

При написании этого учебника авторы использовали свой многолетний опыт преподавания основ численного моделирования в Российском университете дружбы народов.

## **Тема 1. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент – новая технология научных исследований**

### **1.1. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент**

Интенсивное развитие компьютерных технологий в последние 50 лет и широкое применение математических методов позволили повысить уровень теоретических и экспериментальных исследований во всех областях знаний. Наряду с устоявшимися за многие столетия общепринятыми методами исследования, аналитическим и экспериментальным, появился метод, сочетающий в себе достоинства как теории, так и эксперимента – математическое моделирование. Преимущество нового метода заключается в том, что изучается не само явление или процесс, а его модель, что дает возможность достаточно быстро и без больших затрат исследовать свойства и характеристики исследуемого процесса. Вычислительные эксперименты с численными моделями позволяют изучать сложнейшие нелинейные процессы, что не под силу современным теоретическим подходам. С другой стороны, вычислительный эксперимент позволяет проводить исследование быстрее, а затраты на его проведение значительно ниже, чем при проведении натурного эксперимента.

На появление и развитие методологии математического моделирования повлияли два фактора. Первый – появление компьютеров, избавляющих ученых от непроизводительной вычислительной работы, а второй – создание ракетно-ядерного щита в СССР и США. Решение таких сложнейших научно-технических проблем, как ядерные взрывы и полеты в космос, не могли быть реализованы традиционными методами без широкого использования вычислительных средств. Огромный вклад в

становление и развитие математическое моделирование и вычислительный эксперимента внес академик А.А. Самарский и его ученики<sup>1</sup>.

Основу математического моделирования составляет триада модель – алгоритм – программа. Математические модели реальных исследуемых процессов сложны и включают системы нелинейных дифференциальных уравнений. Ядро математической модели составляют уравнения с частными производными.

Успех математического моделирования определяется одинаково глубокой проработкой всех основных звеньев вычислительного эксперимента. Опираясь на триаду модель – алгоритм – программа, исследователь получает в руки универсальный, гибкий и недорогой инструмент, который вначале отлаживается, тестируется и калибруется на решении содержательного набора пробных (тестовых) задач. После этого проводится широкомасштабное исследование математической модели для получения необходимых качественных и количественных свойств и характеристик исследуемого объекта.

Математическое моделирование и вычислительный эксперимент позволяют решить задачу тесного координирования и связи теоретических и экспериментальных исследований. Таким образом, математическое моделирование и вычислительный эксперимент являются новой объединяющей технологией научных исследований.

---

<sup>1</sup> В Теме 1 настоящего пособия использованы работы [1-5].

## 1.2. Цикл вычислительного эксперимента

Рассмотрим подробнее цикл вычислительного эксперимента, основные этапы которого представлены на рисунке 1.1 [1, 2].



Рис. 1.1. Этапы вычислительного эксперимента

На первом этапе вычислительного эксперимента выбирается (или строится) модель исследуемого объекта (процесса, явления), отражающая в математической форме важнейшие его свойства – законы, которым он подчиняется. Математическая модель исследуется традиционными аналитическими средствами прикладной математики для получения предварительных знаний об объекте. Таким образом, на первом этапе проводится предварительный анализ исследуемого объекта (процесса, явления) и построение математической модели (составление уравнений, описывающих исследуемое явление).

Второй этап связан с выбором (или разработкой) вычислительного алгоритма для реализации модели на компьютере. Исследователю

необходимо помнить, что точность расчетов на компьютере ограничена, кроме того, любой метод расчета также вносит погрешность. Выбранные (или созданные) вычислительные алгоритмы, также внесение в модель упрощающих предположений, не должны искажать основные свойства исследуемого объекта, они должны быть адаптирующимися к особенностям решаемых задач и используемых вычислительных средств. Задачами данного этапа являются: построение дискретной модели, аппроксимирующей исходную математическую задачу, построение разностной схемы, разработка (или выбор) вычислительного алгоритма и т.д.

На третьем этапе создается программное обеспечение для реализации модели и алгоритма на компьютере. Программный продукт должен учитывать важнейшую специфику математического моделирования, связанную с использованием ряда (иерархии) математических моделей, многовариантностью расчетов. Это подразумевает широкое использование комплексов и пакетов прикладных программ, разрабатываемых, в частности, на основе объектно-ориентированного программирования. Таким образом, на данном этапе создается программа (программный комплекс), реализующая вычислительные алгоритмы на одном (или нескольких) алгоритмическом языке высокого уровня.

Четвертый этап связан с проведением расчетов и обработкой полученной информации (диагностики).

На пятом этапе проводится анализ результатов расчетов, их сравнение (если это возможно) с результатами натурного эксперимента.

Как правило, после создания первой версии программы и анализа полученных результатов исследователь приходит к выводу о необходимости внесения изменений в саму модель или выработанные или



использованные методы и алгоритмы, то есть вернуться к предыдущим этапам.

Так, может выясниться, что построенная модель недостаточно хорошо отражает особенности исследуемого явления. В этом случае модель корректируется, вносятся соответствующие поправки в численные методы и реализующие их программы и выполняется новый расчет. Тем самым цикл вычислительного эксперимента воспроизводится в полном объеме.

При анализе результатов могут быть выявлены какие-либо недостатки используемых численных методов, связанные, в частности, с соображениями точности или эффективности. Исследователь всегда находится между Сциллой и Харибдой, иными словами, между желанием, с одной стороны, создать модель, которая бы описывала изучаемый объект как можно точнее, а с другой стороны, несмотря на бурное развитие компьютерных технологий, исследователь ограничен возможностями вычислительной техники, имеющейся в его распоряжении. Так или иначе, приходится искать «золотую середину». Изменение методов и алгоритмов влечет за собой изменение соответствующих программ. Иначе говоря, цикл повторяется в несколько сокращенном виде (этапы 2–5).

Кроме того, может оказаться неудачным некоторое программное решение, например, представление данных. Заметим, что важным этапом является оптимизация программы с точки зрения эффективности расчета. Пересмотр таких решений приводит к повторению этапов 3–5.

### **1.3. Особенности вычислительного эксперимента**

Этапы вычислительного эксперимента, описанные в 1.2, возникают практически в любом мало-мальски сложном программном проекте. Первая версия программы всегда не удовлетворяет разработчика, и

приходится уточнять постановку задачи, улучшать отдельные алгоритмы. Однако в большинстве случаев достаточно бывает выполнить несколько циклов, требующих сравнительно небольших усилий, и программа обретает желаемый вид.

В вычислительном эксперименте программа представляет собой виртуальную экспериментальную установку, от первых опытов с которой вряд ли следует ожидать сколько-нибудь интересных результатов. Данные первых опытов послужат всего-навсего отправной точкой длительного процесса изменений и усовершенствований установки, который только и способен привести к достаточно обоснованным заключениям об исследуемом объекте. Первая версия программы лишь в самых общих чертах намечает направление исследований. Основная же работа по программированию связана с многократными модификациями программы, отражающими эволюцию математической модели и методов ее расчета. Напрашивается вывод о том, что вычислительный эксперимент все-таки ближе к натурному эксперименту, чем к аналитическому исследованию.

Как и в натурном эксперименте, исследователь не выбрасывает отдельные модули виртуальной установки, которые не подходят для решения данной задачи. Эти модули могут впоследствии пригодиться для решения похожих задач или могут быть усовершенствованы. Метод, оказавшийся непригодным для одной модели, вполне может подойти для другой.

Итак, главное направление деятельности программиста, занятого вычислительным экспериментом, – не создание новых, а развитие существующих программ. Это развитие осуществляется, как правило, не за счет замены имеющихся модулей их более совершенными версиями, а за счет расширения: включения в программный фонд все новых и новых модулей, отражающих различные решения, принимаемые в ходе эксперимента.

Накапливаемые модули могут затем комбинироваться в самых разнообразных сочетаниях, позволяя тем самым провести достаточно систематическое и глубокое исследование. Потребность в подобных манипуляциях над модулями регулярно возникает в связи с тем, что исследователь постоянно конструирует новые варианты модели, сочетающие в себе те или иные выполнявшиеся когда-либо изменения или уточнения. Таким образом, интересующая нас многовариантность программ вычислительного эксперимента является закономерным следствием изначальной многовариантности модели.

За время возникновения и развития вычислительного эксперимента разработано огромное количество методов математического моделирования, алгоритмов и библиотек, которые могут быть использованы исследователем при постановке и проведении нового вычислительного эксперимента. Накоплен весьма значительный опыт, позволяющий говорить о существовании определенной технологии работы с многовариантными программами. В настоящем курсе мы продемонстрируем технологию использования известных алгоритмов для решения различных задач.

Программное обеспечение вычислительного эксперимента базируется на использовании комплексов и пакетов прикладных программ. Комплекс программ предназначен для решения близких по своей математической природе задач из одной предметной области. Он включает в себя библиотеку программных модулей (в большей или меньшей степени независимых), из которых комплектуются рабочие программы. В комплексах прикладных программ сборка программ из модулей осуществляется вручную.

#### **1.4. Основные особенности новой технологии научных исследований**

Одной из особенностей вычислительного эксперимента является его универсальность, которая позволяет легко переносить эту технологию на исследование других объектов. Это обстоятельство характерно вообще для математического моделирования и порождено тем, что многие явления и процессы имеют одни и те же математические модели. Например, моделирование плазменных процессов и моделирование галактик проводится одним и тем же методом – методом частиц в ячейке.

Кроме того, методологическая универсальность вычислительного эксперимента позволяет на основе накопленного опыта математического моделирования, банка вычислительных алгоритмов и программного обеспечения быстро и эффективно решать новые задачи.

Другой особенностью вычислительного эксперимента как технологии научных исследований является его междисциплинарный характер. Вычислительный эксперимент может рассматриваться как удобная форма кооперации умственного труда, повышения его производительности. Вычислительный эксперимент объединяет и теоретика, и экспериментатора, и прикладного математика, и программиста.

Вычислительный эксперимент имеет преимущества и перед натурным экспериментом. Он может проводиться в тех случаях, когда натурный эксперимент невозможен (например, экологические эксперименты). Вычислительный эксперимент гораздо дешевле натурального, при его использовании значительно снижается стоимость разработок и экономится время.

## 1.5. Вычислительный эксперимент в прикладной физике

Исторически математическое моделирование и вычислительный эксперимент зародились в физике, точнее, в математической физике.

Дата появления первых серьезных результатов вычислительного эксперимента в СССР зафиксирована вполне официально – 1968 год, когда Госкомитет СССР по делам открытий и изобретений засвидетельствовал открытие явления, которого в натурном эксперименте никто не наблюдал. Это было открытие так называемого эффекта Т-слоя (температурного токового слоя в плазме, которая образуется в МГД-генераторах). Свидетельство на это открытие было выдано академикам А.Н. Тихонову и А.А. Самарскому, члену-корреспонденту АН СССР С.П. Курдюмову, докторам физико-математических наук Ю.П. Попову, П.П. Волосевичу, Л.М. Дегтяреву, Л.А. Заклязьминскому, В.С. Соколову и А.П. Фаворскому. В данном случае вычислительный эксперимент предшествовал натурному. Натурные эксперименты «заказывались» по результатам математического моделирования. Через несколько лет в трех физических лабораториях на разных экспериментальных установках практически одновременно был надежно зарегистрирован Т-слой, после чего технологам и инженерам стал окончательно ясен принцип работы МГД-генератора с Т-слоем.

Плазма с ее нелинейными свойствами стала одним из важнейших объектов математического моделирования и вычислительного эксперимента. Заманчивая перспектива решения энергетической проблемы связана с управляемым термоядерным синтезом изотопов водорода, дейтерия и трития. Энергетическая проблема для человечества заключается в том, что нефти и газа при нынешнем темпе их потребления хватит всего на несколько десятков лет. С запасами угля дело обстоит гораздо лучше, но его добыча с каждым годом становится все труднее.

Выходом может быть лазерный термоядерный управляемый синтез, исследование которого осуществляется с помощью вычислительного эксперимента.

В 1974 г. коллектив сотрудников ФИАН и ИПМ АН СССР под руководством академиков Н.Г. Басова, А.Н. Тихонова и А.А. Самарского предложил принципиально новую концепцию лазерного термоядерного синтеза на основе результатов вычислительного эксперимента.

Впоследствии математическое моделирование и вычислительный эксперимент получили применение в естественных науках, далее в общественных дисциплинах и т.д. В наше время трудно найти область знаний, в которой в той или иной степени не применялось бы математическое моделирование и вычислительный эксперимент, однако прикладная физика остается той наукой, в которой математическое моделирование и вычислительный эксперимент находят наиболее широкое применение.

В настоящем учебно-методическом комплексе мы рассмотрим методы моделирования, постановки и проведения вычислительного эксперимента в физике плазмы, физике ускорителей заряженных частиц, коллективного ускорения ионов.

## **Список литературы к теме 1**

Использованная литература:

1. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент, Институт математического моделирования РАН, 2000 (Интернет-публикация).  
<http://www.imamod.ru/~vab/matmod/MatMod.htm>
2. Малинецкий Г.Г. Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент. Введение в нелинейную динамику. – М.: Изд-во ЛКИ, 2007. – 312 с.

3. Плохотников К.Э. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент. Методология и практика. – М.: Изд-во Едиториал УРСС, 2003. – 280 с.
4. Вабищевич П.Н. Численное моделирование.– М.: МГУ. 1993.– 152 с.
5. Сигов Ю.С. Вычислительный эксперимент: мост между прошлым и будущим физики плазмы. – М.: Физматлит, 2001. – 286 с.

Рекомендуемая литература:

1. Самарский А.А., Вабищевич П.Н.. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент, Институт математического моделирования РАН, 2000 (Интернет-публикация).  
<http://www.imamod.ru/~vab/matmod/MatMod.htm>
2. Малинецкий Г.Г. Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент. Введение в нелинейную динамику. – М.: Изд-во ЛКИ, 2007. – 312 с.
3. Плохотников К.Э. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент. Методология и практика. – М.: Изд-во Едиториал УРСС, 2003. – 280 с.
4. Вабищевич П.Н. Численное моделирование.– М.: МГУ. 1993.– 152 с.
5. Сигов Ю.С. Вычислительный эксперимент: мост между прошлым и будущим физики плазмы. – М.: Физматлит, 2001. – 286 с.
6. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. – М.: Физматлит, 1994. – 442 с.
7. Днестровский Ю.Н., Костомаров Д.П. Математическое моделирование плазмы. – М.: Наука, 1993. – 335 с.

## **Интернет-ресурсы**

1. EqWold. Мир математических уравнений.  
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/software.htm>
2. Математическое моделирование в естественных науках.  
[http://mathmod.aspu.ru/?id=6&sub\\_id=1](http://mathmod.aspu.ru/?id=6&sub_id=1)
3. Вычислительные методы и программирование. <http://num-meth.srcc.msu.su>



## Тема 2. Моделирование физических систем, состоящих из большого числа взаимодействующих частиц

### 2.1. Метод частиц и его реализации

Все окружающие нас макроскопические физические системы представляют собой ансамбли из огромного числа взаимодействующих частиц. К таким системам относятся газы, жидкости, твердые тела, плазма, звездные скопления и т.д. Реальное число частиц в них огромно, что делает невозможным прямой расчет всех траекторий их движения с помощью законов механики. Задача вычислительного эксперимента состоит в том, чтобы правильно учесть в конкретной модели характерные пространственные и временные масштабы физической системы и получить представление о процессах, протекающих в таких масштабах. Но при этом число частиц должно быть намного меньше реального, чтобы их движение можно было рассчитать с помощью численных методов на компьютере.

Самым простым методом частиц является метод прямого численного расчета траекторий попарно взаимодействующих материальных точек. Вид сил взаимодействия должен задаваться, исходя из физических соображений. Такой метод часто называют *методом молекулярной динамики*. Его возможности ограничены малым числом частиц ( $\sim 10^3$ ). Однако, он позволяет получить важную информацию о термодинамических свойствах системы после достижения состояния равновесия. При этом термодинамические величины находятся путем усреднения по времени соответствующих микроскопических параметров молекул.

Вместо расчета движения отдельных частиц для получения термодинамических функций можно проводить усреднение по ансамблю, исходя из основных принципов статистической механики.

Соответствующие многомерные интегралы в фазовом пространстве, через которые выражаются термодинамические величины, вычисляются с помощью выбора некоторой статистической совокупности точек фазового пространства. Такой подход называется *методом Монте-Карло*, так как он основан на математическом методе вычисления интегралов с тем же названием.

В отличие от метода молекулярной динамики, в вычислительной *модели вихревой жидкости* роль частиц играют элементы жидкости, которые описываются пространственными координатами и *завихренностью*. Пространственные и временные масштабы в такой модели определяются физическими свойствами исследуемого потока жидкости. Эти масштабы должны быть значительно больше характерных масштабов в методе молекулярной динамики, так как при изменении гидродинамических параметров происходит много столкновений большого числа молекул.

Во многих физических системах движение частиц определяется не взаимодействием с ближайшими соседями, а величиной коллективного самосогласованного поля всего ансамбля. К таким системам можно отнести бесстолкновительную плазму, пучки заряженных частиц, галактики. Для их моделирования используют *метод частиц в ячейке*, в котором коллективное поле вычисляется в узлах пространственной сетки. Для продвижения частиц на каждом временном шаге значения поля в нужных точках находятся посредством интерполяции. Этот метод получил наибольшее распространение в связи с исследованиями по проблеме управляемого термоядерного синтеза.

## 2.2. Моделирование реального газа по методу молекулярной динамики

В методе молекулярной динамики рассчитывается движение  $N$  молекул, попарно взаимодействующих друг с другом в некотором объеме  $V$ . Для описания такого взаимодействия можно использовать, например, модельный потенциал Леннарда – Джонса

$$\Phi(r) = 4\varepsilon \left[ \left( \frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left( \frac{\sigma}{r} \right)^6 \right],$$

где  $r$  – расстояние между центрами двух взаимодействующих молекул,  $\varepsilon$  и  $\sigma$  – параметры, определяемые их конкретными свойствами. Потенциал такого вида с хорошей точностью описывает силы отталкивания между молекулами при  $r < \sigma$  и силы притяжения при  $r > \sigma$ . При заданном виде потенциала взаимодействия уравнения движения молекулы массы  $m$  с номером  $i$  можно представить в виде:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i,$$
$$\frac{d\vec{v}_i}{dt} = -\frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \Phi(|\vec{r}_i - \vec{r}_k|).$$

Уравнения движения для всех молекул интегрируются численно и производится усреднение термодинамических величин по частицам и по моментам времени  $t^n$ , в которых находится решение. Например, внутренняя энергия газа, приходящаяся на одну частицу, может быть вычислена с помощью следующего усреднения [1, стр. 177]

$$U = \frac{1}{N \cdot N_t} \sum_{n=1}^{N_t} \sum_{i=1}^N \left[ \frac{m(v_i^n)^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \Phi(|\vec{r}_i^n - \vec{r}_k^n|) \right],$$

где  $N_t$  – число шагов по времени.

С помощью этого метода можно, например, получить уравнение состояния реального газа, соответствующее конкретному виду потенциала взаимодействия. Метод молекулярной динамики применяется также при исследовании фазовых переходов и неравновесных термодинамических процессов.

### **2.3. Метод частиц в ячейке для моделирования бесстолкновительной плазмы**

Плазму можно считать бесстолкновительной, если характерное время происходящих в ней коллективных процессов намного меньше времени между столкновениями заряженных частиц. Такое условие выполняется для широкого круга плазменных систем. Можно исследовать коллективные процессы в бесстолкновительной плазме, решая численно систему уравнений Власова–Максвелла. В одной из последующих тем мы подробно рассмотрим такой подход. Однако во многих случаях оказывается более удобным использовать метод частиц в ячейке.

Рассмотрим применение этого метода на простейшем примере электростатических колебаний в одномерной плазме. Ионы будем считать неподвижными. Движение электронов описывается уравнениями движения в коллективном поле, созданном самими частицами:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{eE}{m_e},$$

$$\frac{dx}{dt} = v,$$

где  $e$ ,  $m_e$  – соответственно заряд и масса электрона,  $E$  – напряженность электрического поля. Кроме коллективного поля  $E$ , можно учесть влияние некоторого внешнего поля  $E_{ext}$ .

Главная идея метода состоит в том, что вместо реального числа частиц в плазме рассматривается намного меньшее число, но с большей массой и большим зарядом. При этом отношение  $e/m$  должно оставаться равным его реальному значению. В связи с этим метод частиц в ячейке еще называют **методом крупных частиц**. Коллективное электрическое поле  $E$  в узлах разностной сетки находится с помощью численного решения **уравнения Пуассона**

$$\frac{dE}{dx} = -4\pi(\rho - \rho_0) ,$$

где  $\rho$  – плотность заряда электронной компоненты,  $\rho_0$  – плотность заряда однородного ионного фона.

Шаг пространственной сетки  $\Delta$  обычно выбирается в единицах характерного масштаба изменения электрического поля. Для электростатических колебаний в плазме таким масштабом является так называемая **дебиевская длина** [1, стр. 190]

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{kT}{4\pi n e^2}} , \quad (2.1)$$

где  $T$  – температура плазмы,  $n$  – ее плотность. Через  $\lambda_D$  можно выразить условие применимости бесстолкновительного приближения. Оно справедливо, когда внутри шара радиуса  $\lambda_D$  находится большое число частиц, то есть

$$N_D = \frac{4}{3}\pi\lambda_D^3 n \gg 1 .$$

Это условие должно выполняться и для частиц в данной схеме моделирования.

Шаг по времени должен иметь порядок характерного временного масштаба плазменных колебаний  $\tau_p = \omega_{pe}^{-1}$ , где

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n}{m_e}} \quad (2.2)$$

так называемая **плазменная частота** [1, стр. 191]. На каждом временном шаге схемы моделирования частицы продвигаются под действием электрического поля  $E$  согласно уравнениям движения. После этого производится распределение заряда частиц в каждой ячейке по ближайшим узлам и вычисляются новые значения электрического поля. Далее процесс циклически повторяется на большом числе временных шагов. Более подробно соответствующие алгоритмы будут рассмотрены в последующих темах.

## 2.4. Моделирование галактик

Бесстолкновительная схема аналогичная методу частиц в ячейке для плазмы применяется для моделирования галактик, состоящих из огромного числа звезд ( $10^{10} \div 10^{11}$ ), взаимодействующих друг с другом посредством гравитационных сил. Крупные частицы в таком моделировании по массе содержат около  $10^6$  звезд. Роль дебаевской длины в галактической системе выполняет величина [1, стр. 193]

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{kT}{4\pi G m^2 n}},$$

где  $T$  – аналог температуры для «газа из звезд»,  $G$  – гравитационная постоянная,  $m$  – масса звезды,  $n$  – концентрация звезд в галактике. Аналог плазменной частоты имеет вид [1, стр. 193]

$$\omega_p = \sqrt{4\pi G m n}.$$

Коллективное гравитационное поле определяется из уравнения Пуассона для гравитационного потенциала

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho,$$

где  $\rho$  – массовая плотность галактики.

С помощью метода частиц в ячейке было проведено большое число численных экспериментов для галактик в двумерной модели. В этих расчетах звезды в начальный момент заполняли с однородной плотностью цилиндр с характерными размерами галактики. Им сообщалась начальная угловая скорость, равная половине значения, при котором гравитационные силы уравниваются центробежными. В процессе моделирования возникали спиральные структуры, близкие по виду тем, которые известны из астрономических наблюдений.

## 2.5. Метод частиц для моделирования течения несжимаемой жидкости

Рассмотрим двумерное течение несжимаемой жидкости на плоскости  $xu$ . Такое приближение можно использовать для описания таких важных гидродинамических процессов, как движение воздушных потоков вблизи поверхности Земли, океанские течения и т.п. В этом случае движение жидкости описывается *завихренностью*

$$\xi = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

и *функцией тока*  $\psi$ , определяемой соотношениями

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

С помощью уравнений гидродинамики можно показать, что функции  $\xi$  и  $\psi$  удовлетворяют уравнениям [1, стр. 291]

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0 ,$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\xi .$$

Эта система позволяет рассматривать несжимаемую жидкость как ансамбль частиц-вихрей, движущихся в «поле», связанном с функцией  $\psi$ . Поэтому можно построить схему моделирования подобную методу частиц в ячейке для бесстолкновительной плазмы. На плоскости  $xu$  задается разностная сетка, в узлах которой находятся значения  $\psi_{i,j}$ . Уравнения движения частиц-вихрей определяются связью между скоростью и функцией тока

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial y_i} ,$$

$$\frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_i} .$$

Эти уравнения можно решать численно, определяя на каждом временном шаге значения завихренности в узлах разностной сетки. После этого с помощью уравнения для  $\psi$  вычисляются новые значения  $\psi_{i,j}$ .

С помощью такой схемы моделирования можно получить важную информацию о неустойчивостях, развивающихся в плоских течениях несжимаемой жидкости. В частности, удастся проследить за процессом образования больших вихрей на нелинейной стадии неустойчивости.

## Список литературы к теме 2

Использованная литература:

1. Поттер Д. Вычислительные методы в физике. – М.: Мир, 1975.



Рекомендуемая литература:

1. Хокни Р., Иствуд Дж. Численное моделирование методом частиц. – М.: Мир, 1987.
2. Сигов Ю.С. Вычислительный эксперимент: мост между прошлым и будущим физики плазмы. – М.: Физматлит, 2001.
3. Туриков В.А., Ульяницкий И.В., Умнов А.М. Численное моделирование плазменных процессов. – М.: Изд-во РУДН, 2003.

### Тема 3. Модели плазмы, основанные на уравнении Власова

#### 3.1. Уравнение Власова

Поведение частиц плазмы сорта  $\alpha$  (электроны или ионы) описываются их функцией распределения  $f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)$ , которая определяет число частиц в момент времени  $t$  в элементе фазового объема  $d\vec{r}d\vec{v}$ :

$$dN_\alpha = f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)d\vec{r}d\vec{v}$$

В отсутствие столкновений функция распределения удовлетворяет *уравнению Власова* [1, стр. 44]

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \vec{v} \nabla f_\alpha + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left( \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \vec{B}] \right) \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{v}} = 0 \quad (3.1)$$

Самосогласованное электромагнитное поле  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  описывается *уравнениями Максвелла*

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad \vec{j} = \sum_\alpha e_\alpha \int \vec{v} f_\alpha d\vec{v}, \\ \text{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0, \quad \text{div} \vec{E} = 4\pi\rho, \quad \rho = \sum_\alpha e_\alpha \int f_\alpha d\vec{v}.$$

Для рассмотрения чисто электростатических самосогласованных процессов используется система уравнений Власова–Пуассона

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \vec{v} \nabla f_\alpha + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \vec{E} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{v}} = 0, \quad (3.3)$$

$$\text{div} \vec{E} = 4\pi \sum_\alpha e_\alpha \int f_\alpha d\vec{v}. \quad (3.4)$$

В темах 3 и 4 рассматривается численное моделирование именно таких процессов.

Масса иона  $m_i$  намного больше массы электрона  $m_e$ . Для самого легкого иона водорода  $m_i / m_e = 1836$ . Поэтому при анализе электронных колебаний обычно ограничиваются приближением неподвижных ионов, которые формируют однородный нейтрализующий фон положительного заряда. В этом случае уравнение Пуассона (3.4) принимает вид:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi e(n_0 - \int f_e dv). \quad (3.5)$$

Для описания методов моделирования удобно перейти к следующим единицам измерения физических величин

$$[x] = \lambda_D, \quad [t] = \omega_{pe}^{-1}, \quad [v] = v_{Te}, \quad T_e - \text{электронная температура}, \quad [E] = T_e / e\lambda_D, \\ [f] = n_0 / v_{Te}.$$

Здесь  $\lambda_D$  – дебаевская длина,  $\omega_{pe}$  – плазменная частота,  $v_{Te} = (T_e / m_e)^{1/2}$  – **тепловая скорость электронов**. В таких переменных уравнения (1.3), (1.4) принимают вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} - E \frac{\partial f}{\partial v} = 0, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} f dv. \quad (3.7)$$

Из уравнения (3.6) следует постоянство функции распределения  $f(x, v, t)$  вдоль траекторий частиц, определяемых уравнениями движения:

$$\frac{dv}{dt} = -E(x, t), \quad (3.8)$$

$$\frac{dx}{dt} = v. \quad (3.9)$$

Эволюция функции распределения  $f(x, v, t)$  приводит к большим значениям производных  $\partial f / \partial x$ ,  $\partial f / \partial v$ , что связано с расхождением фазовых траекторий частиц со временем, приводящим к образованию

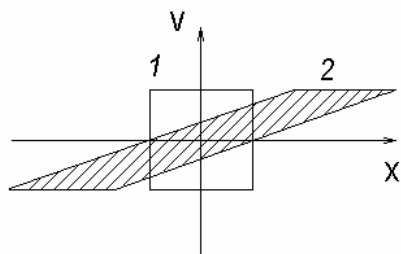


Рис. 3.1

«нитей» в фазовом пространстве с резкими изменениями  $f(x, v, t)$ . Это легко понять, рассмотрев простейший случай свободных частиц ( $E = 0$ ), представленный на рисунке 3.1. Пусть в начальный момент частицы занимают область в виде квадрата 1 на

фазовой плоскости. С течением времени, двигаясь каждая со своей постоянной скоростью, они перейдут в положение 2. Через большой промежуток времени распределение примет вид тонкой нити, вытянутой вдоль оси  $x$ . При  $E \neq 0$  в результате захвата частиц плазменными волнами на фазовой плоскости возникает большое количество закручивающихся нитевидных структур, что сильно затрудняет численное нахождение функции  $f(x, v, t)$ .

### 3.2. Решение системы уравнений Власова–Пуассона методом преобразований

**Метод преобразований** основан на разложении решения уравнений Власова и Пуассона по некоторым системам ортогональных функций. В результате получается система нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка для коэффициентов разложения. При этом исчезают трудности с резкими изменениями  $f(x, v, t)$ , возникающие в случае прямого численного решения уравнений (3.6), (3.7).

Разложим функцию распределения в ряд [3, стр. 65]

$$f(x, v, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(ink_0 x) \sum_{m=0}^{\infty} \exp(-\frac{v^2}{2}) h_m(v) Z_{mn}(t) ,$$

где  $k_0 = \frac{2\pi}{L}$  ,

$$h_m(v) = \frac{(-1)^n \exp(v^2 / 2)}{[(2\pi)^{1/2} m!]^{1/2}} \frac{d^m}{dv^n} \exp(-\frac{v^2}{2}) -$$

**ортгональные полиномы Эрмита** степени  $m$  , удовлетворяющие рекуррентным формулам:

$$v h_m(v) = (m+1)^{1/2} h_{m+1}(v) + m^{1/2} h_{m-1}(v) , \quad (3.10)$$

$$\frac{d}{dv} h_m(v) = v h_m(v) - (m+1)^{1/2} h_{m+1}(v) = m^{1/2} h_{m-1}(v) . \quad (3.11)$$

Электрическое поле разложим в **ряд Фурье**

$$E(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(ink_0 x) E_n(t) .$$

**Коэффициенты Фурье**  $E_n(t)$  находим из уравнения Пуассона (3.7)

$$E_n(t) = \frac{i(2\pi)^{1/4}}{nk_0} Z_{0,n}(t) \quad \text{при } n \neq 0, \quad E_0(t) = 0 .$$

В случае плазмы между зеркально отражающими границами выполняются соотношения

$$\begin{aligned} f(x, v, t) &= f(-x, -v, t) , \\ E(x, t) &= -E(-x, t) , \end{aligned} \quad (3.12)$$

если они налагаются в момент  $t = 0$  . Из (3.12) вытекают равенства

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} Z_{mn}(t) &= 0, m = 1, 3, 5, \dots \\ \operatorname{Im} Z_{mn}(t) &= 0, m = 0, 2, 4, \dots \end{aligned} \quad (3.13)$$

С помощью (3.10), (3.11) и (3.13) приходим к дифференциальным уравнениям для коэффициентов  $Z_{mn}(t)$

$$\begin{aligned} \frac{dZ_{mn}}{dt} = & (-1)^m [nk_0 \{m^{1/2} Z_{m-1,q} + (m+1)^{1/2} Z_{m+1,n}\} + \\ & + m^{1/2} \sum_{q=-\infty}^{\infty} E_{n-q} Z_{m-1,q}] , \quad m, n = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$E_n(t) = \frac{(2\pi)^{1/4}}{nk_0} Z_{0,n}(t) . \quad (3.15)$$

Если задать некоторое начальное распределение  $f(x, v, 0)$ , то можно найти значения  $Z_{mn}(0)$ , а затем с помощью подходящего численного метода решить систему уравнений (3.14), (3.15), предварительно оборвав ее, считая, что

$$Z_{mn}(t) = 0 \text{ при } m > M \text{ или } n > N .$$

Такое обрывание оправдано тем, что в каждом конкретном случае всегда есть некоторый минимальный масштаб  $l_{\min}$  возмущений в системе и соответствующие Фурье-моды при

$$nk_0 \gg 2\pi / l_{\min}$$

будут стремиться к нулю.

Метод преобразований является весьма эффективным при исследовании одномерных электростатических плазменных систем. Обобщение метода на многомерный случай приводит к слишком громоздким уравнениям для коэффициентов разложения, что делает его практически непригодным для использования.

### 3.3. Метод «водяного мешка»

Существует достаточно простой метод решения [2,3] системы уравнений (1.6), (1.7), основанный на свойствах уравнения Власова. Это так называемый **метод «водяного мешка»**. Можно считать бесстолкновительную плазму «фазовой жидкостью» в **фазовом пространстве**  $x, v$  с плотностью  $f(x, v, t)$ . Рассмотрим свойства некоторого фазового объема  $V$  такой жидкости, движущегося вместе с ней в соответствии с уравнением Власова и уравнением Пуассона. Ни одна

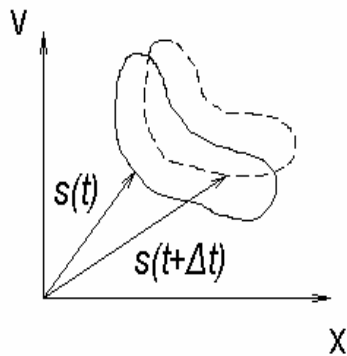


Рис. 3.2

частица вблизи границы такого объема не может ее пересечь, так как сама граница движется в фазовом пространстве согласно уравнениям движения частиц. Это означает, что количество частиц в объеме  $V$  остается постоянным.

Покажем теперь, что величина выделенного фазового объема также остается постоянной. В каждый момент времени величину  $V$  можно

представить в виде (рис. 3.2):

$$V = \iint dx dv = \frac{1}{2} \oint [\vec{s} d\vec{l}],$$

где  $\vec{s} = \{x, v\}$  – радиус-вектор точек на границе фазового объема,  $d\vec{l}$  – элемент длины, касательный к граничному контуру.

За малый промежуток времени  $\Delta t$  фазовый объем изменится на величину [2, стр. 263]:

$$\Delta V = \frac{1}{2} \oint [\vec{s}(t + \Delta t) d\vec{l}] - \frac{1}{2} \oint [\vec{s}(t) d\vec{l}].$$

В соответствии с уравнениями движения частиц

$$\vec{s}(t + \Delta t) = \{x + v\Delta t, v + a\Delta t\} = \vec{s}(t) + \{v, a\}\Delta t.$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{1}{2} \oint [\{v, a\} d\vec{l}] = \frac{1}{2} \oint (v dv - a dx) = 0.$$

Последнее равенство следует из закона сохранения энергии для материальной точки в потенциальном поле.

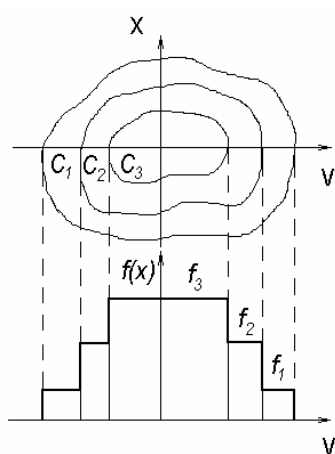


Рис. 3.3

Таким образом, величина фазового объема, перемещающегося вместе с фазовой средой, не изменяется со временем. Следовательно, можно считать фазовую среду несжимаемой. Это свойство аналогично поведению кожаного мешка с водой, используемого в жарких странах при длительных переходах на верблюдах в пустыне. Из-за несжимаемости воды мешок лишь изменяет свою форму, сохраняя объем. Отсюда и происходит название известного метода решения

уравнения Власова.

Рассмотренные выше свойства фазового объема позволяют представить фазовую плотность  $f(x, v, t)$  в виде набора контуров в двумерном пространстве  $x, v$ . В областях между контурами  $C_1, C_2, C_3, \dots$  функция распределения полагается равной некоторым константам  $f_1, f_2, f_3, \dots$ . Внутри контуров плотность фазовой жидкости остается неизменной и распределение по скорости в каждой точке имеет ступенчатый вид. На рисунке 3.3 представлен пример построения  $f(v)$  при  $x = 0$ . Форма контуров изменяется при движении точек на них согласно уравнениям движения. Каждый контур  $C_i$  должен быть определен с помощью конечного набора лежащих на нем точек  $(x_j, v_j)$ , положение



которых определяется путем численного решения уравнений (1.8), (1.9). При деформации контуров со временем первоначально равноотстоящие точки  $x_j v_j$  могут сгущаться и разрезаться на каждом контуре. При этом сами контуры через какое-то время приобретают очень сложный и запутанный вид. Приходится постоянно перераспределять частицы на них для обеспечения равномерного их представления, а также исключать мелкие петли, узлы и т.п. Несмотря на эти недостатки метод «водяного мешка» позволил смоделировать очень большое число одномерных

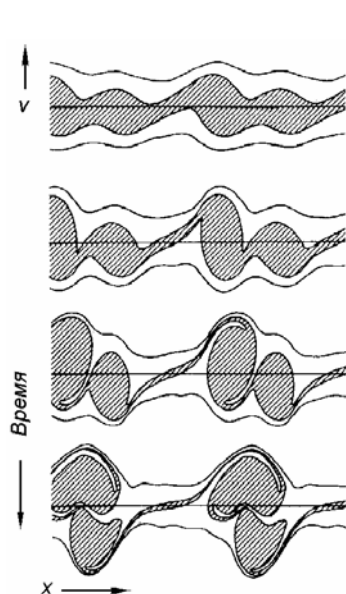


Рис. 3.4

электростатических проблем в бесстолкновительной плазме. На рисунке 3.4 [4, стр. 226] представлены результаты моделирования с помощью этого метода так называемой *двухпотоковой неустойчивости*. В начальный момент электроны формируют два потока, движущиеся в противоположных направлениях. При этом их распределение на фазовой плоскости имеет вид двух симметричных параллельных полос. Неустойчивость в такой системе приводит к нарастающим колебаниям электрического поля и захвату резонансных

частиц. На рисунке видно, что профиль контуров со временем сильно усложняется и происходит образование нитевидных структур в фазовом пространстве, о которых говорилось в разделе 3.1.

### 3.4. Численное решение уравнения Власова

Можно непосредственно применить разностные методы для решения уравнения Власова (3.6). Для этого его удобно представить в виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial v} = 0, \quad (3.16)$$

где  $G = vf(x, v, t)$ ,  $H = -E(x)f(x, v, t)$ .

Уравнение (3.16) для заданного  $E(x)$  является гиперболическим уравнением в консервативной форме и его можно решить, например, **двухшаговым методом Лакса-Вендроффа** [3, стр. 262]. Пусть  $x_i = i\Delta x$ ,  $v_k = k\Delta v$ ,  $t_n = n\Delta t$ . Единичной ячейкой конечно-разностной сетки будем считать ячейку со сторонами  $2\Delta x$ ,  $2\Delta v$ ,  $2\Delta t$ . Промежуточные величины будем вычислять по формулам

$$f_{i,k}^{n+1} = \frac{1}{4}(f_{i+1,k}^n + f_{i-1,k}^n + f_{i,k+1}^n + f_{i,k-1}^n) - \\ - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(G_{i+1,k}^n - G_{i-1,k}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta v}(H_{i,k+1}^n - H_{i,k-1}^n),$$

а окончательные значения найдем с помощью соотношений

$$f_{i,k}^{n+2} = f_{i,k}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(G_{i+1,k}^{n+1} - G_{i-1,k}^{n+1}) - \frac{\Delta t}{\Delta v}(H_{i,k+1}^{n+1} - H_{i,k-1}^{n+1}).$$

Электрическое поле можно найти путем численного интегрирования уравнения Пуассона (3.7), которое для общих граничных условий лучше записать относительно потенциала:

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = \rho, \quad (3.17)$$

$$\text{где } E = -\frac{d\phi}{dx}, \quad \rho = \int_{-\infty}^{\infty} f dv - 1.$$

Численная аппроксимация уравнения (1.17) имеет вид

$$\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n = (\Delta x)^2 \rho_i^n.$$

Приведенный пример разностной схемы решения уравнения Власова и уравнения Пуассона имеет ряд недостатков. Шаги  $\Delta x$ ,  $\Delta v$

ограничивают сверху характерные масштабы изменения пространственных и скоростных величин в рассматриваемых процессах. Не учитываются частицы со скоростями выше максимального значения скоростной сетки. Следует отметить, что обобщение разностных схем такого типа на многомерный случай практически не реализуемо из-за огромного числа узловых точек разностной сетки.

Перейдем к рассмотрению более гибкого разностного метода решения уравнения Власова и уравнения Пуассона, основанного на *схеме расщепления* [5, стр. 24]. Он имеет второй порядок точности по  $\Delta t$  и допускает реализуемое обобщение на случай большого числа измерений.

Метод основан на замене уравнения (3.6) уравнением

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

на первом полушаге по времени и уравнением

$$\frac{\partial f}{\partial t} - E(x, t) \frac{\partial f}{\partial v} = 0$$

на втором полушаге. Будем пока считать  $E(x, t)$  заданной функцией.

Рассмотрим следующую разностную схему, соответствующую такому расщеплению исходного уравнения [5, стр. 25]:

$$f^*(x, v) = f^n(x - v\Delta t / 2, v), \quad (3.18)$$

$$f^{**}(x, v) = f^*(x, v + E(x)\Delta t), \quad (3.19)$$

$$f^{n+1}(x, v) = f^{**}(x - v\Delta t / 2, v). \quad (3.20)$$

Эти операции соответствуют сдвигу  $f$  вдоль оси  $x$  на  $v\Delta t / 2$  на первом полушаге  $\Delta t / 2$ , последующему сдвигу  $f$  на  $E(x)\Delta t$  по оси  $v$  и, наконец, еще одному сдвигу по оси  $x$  на  $v\Delta t / 2$ . Эта процедура циклически повторяется для всех шагов сетки.

Подставляя (3.18) и (3.19) в (3.20), получим

$$f^{n+1}(x, v) = f^n \left[ x - \Delta t \left( v + \frac{1}{2} E(\bar{x}) \Delta t \right), v + E(\bar{x}) \Delta t \right], \quad (3.21)$$

где  $\bar{x} = x - v \Delta t / 2$ .

Выражение (3.21) эквивалентно следующим проинтегрированным уравнениям характеристик (3.8), (3.9) уравнения Власова:

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t + \Delta t) - \Delta t \left[ v(t + \Delta t) + \frac{1}{2} E(\bar{x}, t + \Delta t / 2) \Delta t \right], \\ v(t) &= v(t + \Delta t) + \Delta t E(\bar{x}, t + \Delta t / 2), \end{aligned} \quad (3.22)$$

где  $\bar{x} = x(t + \Delta t / 2)$ . В этом легко убедиться, сравнивая аргументы  $f^n$  и правых частей (3.22).

Поле  $E(x)$  вычисляется после первого горизонтального сдвига (3.18). На следующем, вертикальном шаге, координата  $x$ , а значит плотность заряда и поле  $E(x)$  не изменяются. Значит поле  $E(\bar{x}, t + \Delta t / 2)$  может быть аппроксимировано значением  $E(x - v \Delta t / 2, t + \Delta t / 2)$ . Оно берется на полушаге по времени и имеет, по крайней мере, первый порядок точности. С помощью выражений (3.22) можно показать, что данная разностная схема имеет второй порядок точности по  $\Delta t$  [5, стр. 26].

Этот метод был с успехом использован для моделирования релаксации плазменно-пучковой системы и анализа условий применимости квазилинейного приближения [6, стр. 226]. При этом были достигнуты рекордные значения точности по сравнению с другими методами.

### Список литературы к теме 3

#### Использованная литература:

1. Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А. Основы электродинамики плазмы. – М.: Высш. школа, 1978.
2. Поттер Д. Вычислительные методы в физике. – М.: Мир, 1975.
3. Вычислительные методы в физике плазмы. / Под ред. Б. Олдера, С. Фернбаха и М. Ротенберга. – М.: Мир, 1974.
4. Чен Ф. Введение в физику плазмы. – М.: Мир, 1987.
5. Сигов Ю.С. Численные методы кинетической теории плазмы. – М: Изд-во. МФТИ, 1984.
6. Сигов Ю.С. Вычислительный эксперимент: мост между прошлым и будущим физики плазмы. – М: Физматлит, 2001.

#### Рекомендуемая литература:

1. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. – М: Изд-во МФТИ, 1994.
2. Туриков В.А., Ульяницкий И.В., Умнов А.М. Численное моделирование плазменных процессов. – М.: Изд-во РУДН, 2003.

## Тема 4. Метод частиц в ячейке для описания одномерных электростатических процессов

### 4.1. Общая схема моделирования

В параграфе 2.3 темы 2 уже обсуждалась общая схема метода частиц в ячейке для моделирования одномерных электростатических процессов в бесстолкновительной плазме. На каждом временном шаге она состоит из трех основных этапов: 1) вычисление по координатам частиц плотности заряда в узлах пространственной сетки; 2) вычисление с помощью плотности заряда значений напряженности электрического поля в узловых точках; 3) продвижение всех частиц под действием этого поля. Эти этапы циклически повторяются на последующих временных шагах. В результате можно проследить за состоянием плазмы в сложных коллективных процессах. Это невозможно сделать с помощью аналитического решения уравнения Власова и уравнения Пуассона. Рассмотрим более подробно основные этапы вычислительного процесса.

### 4.2. Вычисление распределения плотности заряда

Существует несколько методов вычисления плотности заряда по координатам моделирующих частиц. Самым простым из них является метод «ближайшего пространственного узла» (*«nearest grid point»*) или сокращенно *NGP*) [1, стр. 24].

В этом методе полный заряд точечной частицы приписывается ближайшему узлу пространственной сетки. Для одномерного случая его можно реализовать посредством выражения

$$\rho_j = \frac{n_0}{N_c} \sum_{\mu=1}^N e_{\mu} \delta[\text{Int}(\frac{x_{\mu} + \Delta / 2}{\Delta}) - j] , \quad (4.1)$$

где  $n_0$  – начальная плотность реальной плазмы, для которой проводится моделирование,  $N_c$  – начальное число моделирующих частиц в ячейке,  $N$  – полное число частиц,  $\Delta$  – размер пространственной сетки,

$$\delta(l - m) = \begin{cases} 1, l = m, \\ 0, l \neq m, \end{cases}$$

$\text{Int}(z)$  - целая часть вещественного числа  $z$ .

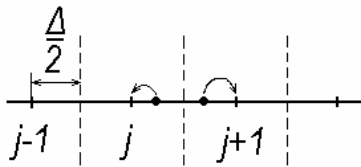


Рис. 4.1

Эта процедура распределения заряда может быть представлена в виде схемы, изображенной на рисунке 4.1. Метод NGP является достаточно грубым, так как сила взаимодействия между двумя частицами изменяется скачком при пересечении ими границ ячеек.

Существует схема более плавного распределения заряда по узлам сетки, которая называется **методом «облаков в ячейке» («cloud-in-cell»** или сокращенно **CIC**) [1, стр. 25]. В этой схеме частицы представляются «прозрачными» заряженными облаками, способными проходить друг

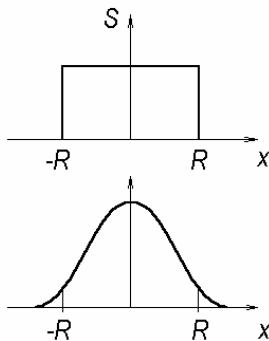


Рис. 4.2

сквозь друга. Они могут иметь любую удобную форму и распределение плотности заряда. Метод облаков сглаживает флуктуации, свойственные методу NGP. Для одномерных облаков плотность заряда в облаке, задаваемая формфактором  $S(x)$ , может быть постоянной или, например, иметь вид гауссова распределения (рис. 4.2).

Плазма представляется в виде набора

перекрывающихся облаков, размещенных на пространственной сетке. При этом их размеры могут быть больше или меньше размеров ячеек. Радиус облаков  $R$  должен быть достаточно большим, чтобы устранить взаимодействия на близких расстояниях и обеспечить **приближение самосогласованного поля**. Но он, конечно, должен быть гораздо меньше характерных масштабов возмущений в плазме. Для уменьшения численных флуктуаций желательно выполнение условия  $2R \geq \Delta$ . Обычно выбирают  $2R = \Delta$ . Такое описание процессов в бесстолкновительной плазме является близким к описанию жидкости в гидродинамике в виде суперпозиции «жидких макрочастиц».

В СИС-методе необходимо определить процедуру вычисления распределения плотности заряда в плазме, а также вычисления электрического поля, действующего на облако. Простейшим методом вычисления плотности заряда является разделение заряда облака по нескольким узлам сетки согласно процедуре **«весового распределения по площадям»** (*«area-weighted»*). Следуя этой

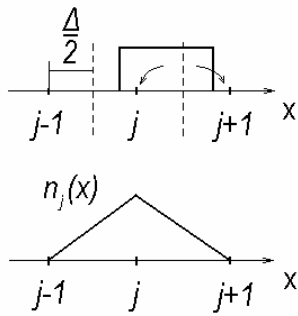


Рис. 4.3

процедуре, мы определяем вклад каждой частицы в ближайшие узлы пространственной сетки пропорционально частям облака слева и справа от середины ячейки. На рис. 4.3 изображена сеточная плотность  $n_j(x)$  при прохождении прямоугольного облака ширины  $\Delta$  через узел  $j$ . При таком распределении для облака с зарядом  $q_c$  и с центром в точке  $x$ , часть заряда  $q_j$ ,

придаваемая  $j$ -му узлу, определяется формулой

$$q_j = q_c \frac{x_{j+1} - x}{\Delta}, \quad (4.2)$$



а часть, придаваемая  $(j + 1)$ -му узлу, формулой

$$q_{j+1} = q_c \frac{x - x_j}{\Delta}. \quad (4.3)$$

Можно сказать, что формулы (4.2), (4.3) определяют процедуру взвешивания первого порядка в распределении заряда частиц. Следует отметить, что к такому же результату приводит распределение заряда по ближайшим узлам с помощью линейной интерполяции.

Можно проводить взвешивание более высоких порядков с использованием квадратичных и кубических сплайнов. При этом, естественно, сглаживаются скачки плотности и электрического поля, однако число вычислений в общей схеме РС-моделирования значительно возрастает. Это происходит еще и по той причине, что, как мы увидим далее, схема вычисления поля в месте нахождения каждой частицы и схема раздачи заряда частиц по узлам сетки должны иметь одинаковый порядок взвешивания.

#### 4.3. Нахождение самосогласованного электрического поля

Самосогласованное электрическое поле будем находить из уравнения Пуассона (3.17) в безразмерных переменных, введенных в параграфе 3.1:

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = \rho(x), \quad (4.4)$$

где  $\rho(x)$  – безразмерная плотность заряда в плазме.

Будем численно решать краевую задачу для уравнения (4.4) на отрезке  $0 \leq x \leq L$ , разбивая его на ячейки с шагом  $\Delta$ . Соответствующее разностное уравнение имеет вид:

$$\varphi_{j+1} - 2\varphi_j + \varphi_{j-1} = q_j, \quad (4.5)$$

где  $q_j = \Delta^2 \rho_j$ ,  $\rho_j$  – значения  $\rho(x)$  в узлах пространственной сетки,  $\varphi_j$  – искомые значения потенциала. Уравнение (4.5) относится ко всем внутренним точкам рассматриваемого отрезка  $0 < j < J$ , а в точках  $x = 0$ ,  $x = L$  накладываются требуемые граничные условия.

Чтобы продвинуть моделирующие частицы на очередном временном шаге, необходимо знать напряженность поля  $E(x)$  в точке нахождения каждой из них. В методе NGP сила получается из значения поля в ближайшем узле сетки. В одномерном случае значение  $E(x)$  можно представить в виде выражения

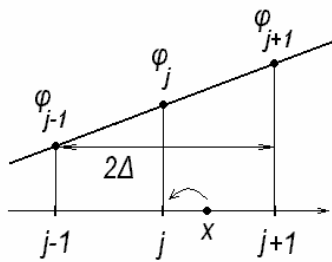


Рис. 4.4

$$E(x) = \frac{\varphi_{j-1} - \varphi_{j+1}}{2\Delta}, \quad j = \text{Int}\left(\frac{x + \Delta/2}{\Delta}\right).$$

Этот способ представлен на рисунке 4.4. Он является достаточно грубым и приводит к скачкообразному изменению силы взаимодействия между частицами с изменением расстояния между ними.

В методе облаков в ячейке  $E(x)$  находится путем взвешивания первого порядка, аналогично распределению заряда в этом методе, описанному в пункте 4.2 (формулы (4.2), (4.3):

$$E(x) = \frac{(x_{j+1} - x)E_j}{\Delta} + \frac{(x - x_j)E_{j+1}}{\Delta}. \quad (4.6)$$

Сила, действующая при этом на каждую частицу, является кусочно-линейной в зависимости от расстояния, а не ступенчатой, как в методе NGP. К тому же снижается амплитуда флуктуаций силы взаимодействия между частицами при их перемещении относительно сетки.

Следует отметить одно важное обстоятельство, касающееся связи между методами распределения заряда и вычисления напряженности поля. Как в методе NGP, так и в методе CIC обе эти процедуры имеют одинаковый порядок взвешивания. Такая симметрия обеспечивает сохранение импульса, так как две частицы при этом действуют друг на друга с одинаковыми по величине и противоположными по направлению силами, а сила действия на частицу ее собственного поля равна нулю.

При моделировании электростатических колебаний в бесстолкновительной плазме используют либо периодические, либо непериодические граничные условия. С помощью периодических граничных условий обычно моделируют неограниченные плазменные системы. Тип граничных условий определяет метод решения уравнения Пуассона.

#### 4.4. Метод прогонки для решения уравнения Пуассона с непериодическими граничными условиями

В общем виде *непериодические граничные условия* можно представить в следующей форме

$$(a_0 \frac{d\varphi}{dx} + b_0 \varphi)|_{x=0} = c_0, \quad (a_J \frac{d\varphi}{dx} + b_J \varphi)|_{x=x_J} = c_J, \quad (4.7)$$

где  $a_0, b_0, c_0, a_J, b_J, c_J$  – заданные числа. Например, если  $a_0 = a_J = 0$ , то заданы значения потенциала  $\varphi(0), \varphi(L)$  в крайних точках. Если  $b_0 = b_J = 0$ , то заданы значения электрического поля  $E(0), E(L)$ .

Рассмотрим *метод прогонки* решения краевой задачи для решения разностного уравнения Пуассона (4.5) с граничными условиями (4.7). Для представления (4.7) в виде, аналогичном (4.5), будем аппроксимировать производные от потенциала, входящие в эти условия, следующим образом:

$$\left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_{x=0} = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{\Delta}, \quad \left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_{x=x_J} = \frac{\varphi_J - \varphi_{J-1}}{\Delta}.$$

Тогда условия (4.7) примут вид:

$$\alpha_0 \varphi_0 + \beta_0 \varphi_1 = q_0, \quad (4.8)$$

$$\alpha_J \varphi_J + \beta_J \varphi_J = q_J, \quad (4.9)$$

где  $\alpha_0 = b_0 \Delta - a_0$ ,  $\beta_0 = a_0$ ,  $q_0 = c_0 \Delta$ ,  $\alpha_J = -a_J$ ,

$$\beta_J = b_J \Delta + a_J, \quad q_J = c_J \Delta.$$

Представим теперь уравнения (4.5) в последовательности узловых точек и уравнения (4.8), (4.9) в виде единой системы разностных уравнений [2, стр. 117]

$$\begin{aligned} \alpha_0 \varphi_0 + \beta_0 \varphi_1 &= q_0, \\ \varphi_0 - 2\varphi_1 + \varphi_2 &= q_1, \\ \varphi_1 - 2\varphi_2 + \varphi_3 &= q_2, \\ \dots\dots\dots &\dots\dots, \\ \varphi_{J-2} - 2\varphi_{J-1} + \varphi_J &= q_{J-1}, \\ \alpha_J \varphi_{J-1} + \beta_J \varphi_J &= q_J. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Матрица коэффициентов этой системы содержит ненулевые элементы только на трех центральных диагоналях. В силу того что большинство элементов такой **трехдиагональной матрицы** нулевые, решение системы (4.10) может быть найдено с помощью некоторой рекуррентной процедуры, называемой методом прогонки.

Будем искать решение в рекуррентной форме так, чтобы, зная значение  $\varphi_j$  в точке  $x_j$ , можно было получить значение  $\varphi_{j+1}$  в точке  $x_{j+1}$ . Для этого найдем вспомогательные неизвестные  $z_j$ ,  $y_j$  такие, что

$$\varphi_{j+1} = y_j + z_j \varphi_j. \quad (4.11)$$

Подставляя (4.11) в (4.5), получаем

$$\varphi_j = -\frac{1}{z_j - 2} \varphi_{j-1} + \frac{q_j - y_j}{z_j - 2}. \quad (4.12)$$

Сравнивая (4.11) и (4.12), приходим к соотношениям

$$z_{j-1} = -\frac{1}{z_j - 2}, \quad y_{j-1} = \frac{q_j - y_j}{z_j - 2}. \quad (4.13)$$

Таким образом, формулы (4.12), (4.13) задают следующую двойную рекуррентную процедуру решения трехдиагональной системы уравнений (4.10).

#### 1) Прогонка вниз

Для  $j$  от  $j = J$  до  $j = 0$  определяются значения  $z_j, y_j$  по формулам (4.13). При этом начальные значения  $z_{J-1}, y_{J-1}$  находятся из граничного условия (4.9)

$$z_{J-1} = -\frac{\alpha_J}{\beta_J} = \frac{a_J}{b_J \Delta + a_J},$$

$$y_{J-1} = \frac{q_J}{\beta_J} = \frac{c_J \Delta}{b_J \Delta + a_J}.$$

#### 2) Прогонка вверх

Для  $j$  от  $j = 0$  до  $j = J$  вычисляются искомые значения  $\varphi_j$  по формулам (4.12). Начальное значение  $\varphi_0$  определяется из граничного условия на левой границе

$$\varphi_0 = \frac{q_0 - \beta_0 y_0}{\alpha_0 + \beta_0 z_0} = \frac{-c_0 \Delta + a_0 y_0}{a_0 - b_0 \Delta - a_0 z_0}.$$

Входящие в это выражение  $z_0, y_0$  найдены при прогонке вниз.

#### 4.5. Метод Фурье для периодических граничных условий

Периодические граничные условия для потенциала на отрезке  $0 \leq x \leq L$  могут быть записаны как

$$\varphi(0) = \varphi(L) \ , \quad \left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_{x=L} . \quad (4.14)$$

В этом случае искомые значения  $\varphi_j$  можно представить в виде **конечной суммы Фурье** [2, стр. 132]

$$\varphi_j = \sum_{k=1}^{j_{\max}} \left( \hat{\varphi}_k^c \cos \frac{2\pi k j}{J} + \hat{\varphi}_k^s \sin \frac{2\pi k j}{J} \right), \quad (4.15)$$

где  $j_{\max} = (J-1)/2$  для  $J$  нечетных и  $j_{\max} = J/2$  для  $J$  четных. Такое представление для  $\varphi_j$  обеспечивает выполнение условий периодичности (4.14). Если подставить разложение (4.15) в разностное уравнение Пуассона (4.5), то можно получить следующие выражения для **коэффициентов Фурье**

$$\hat{\varphi}_k^c = \frac{\hat{q}_k^c}{\lambda_k} \ , \quad \hat{\varphi}_k^s = \frac{\hat{q}_k^s}{\lambda_k} , \quad (4.16)$$

где  $\lambda_k = 2(\cos \frac{2\pi k}{J} - 1)$ , а  $\hat{q}_k^c$ ,  $\hat{q}_k^s$  являются коэффициентами Фурье в разложении плотности заряда

$$\hat{q}_k^c = \frac{2}{J} \sum_{m=1}^J q_m \cos \frac{2\pi m k}{J}, \quad \hat{q}_k^s = \frac{2}{J} \sum_{m=1}^J q_m \sin \frac{2\pi m k}{J}. \quad (4.17)$$

Для нечетных  $J$  возникает «непарный» коэффициент

$$\hat{q}_{\frac{J}{2}}^c = \frac{1}{J} \sum_{m=1}^J q_m \cos \pi m = \frac{1}{J} \sum_{m=1}^J q_m (-1)^m . \quad (4.18)$$

Коэффициент  $\hat{q}_{\frac{J}{2}}^s$  при этом равен 0, так как  $\sin \pi m = 0$ .

Таким образом, можно разбить решение уравнения Пуассона методом Фурье на два этапа.

### 1) Фурье-анализ

Находим коэффициенты Фурье для значений плотности заряда  $q_j$  с помощью формул (4.17), (4.18) и коэффициенты  $\hat{\phi}_k^c$ ,  $\hat{\phi}_k^s$  по формулам (4.16).

### 2) Фурье-синтез

Вычисляем искомые значения  $\varphi_j$  с помощью конечной суммы Фурье (4.15) с найденными коэффициентами  $\hat{\phi}_k^c$ ,  $\hat{\phi}_k^s$ .

В приведенных выше выражениях фигурируют величины типа

$$\cos \frac{2\pi kt}{J}, \quad \sin \frac{2\pi kt}{J}.$$

Для экономии компьютерного времени их нужно один раз вычислить с помощью рекуррентных тригонометрических формул для последующего многократного использования в программе РС-моделирования.

Благодаря своей простоте такая схема легко реализуется на компьютере, но является весьма неэкономичной. Она может быть использована при моделировании коротких систем со значениями  $J \leq 100$ . При больших  $J$  такой алгоритм становится неэффективным из-за слишком большого времени вычислений.

Для существенного сокращения расчетного времени обычно используют **метод быстрого преобразования Фурье (БПФ** или по-английски **FFT**). В нем с помощью специального выбора значения  $J$  удастся сократить количество вычислительных операций в несколько раз. Если представить  $J$  в виде большого числа сомножителей, то преобразование ряда из  $J$  членов циклически сводится к преобразованию

нескольких более коротких рядов с кратным числом членов. При этом одновременное вычисление всех коэффициентов Фурье приводит к сокращению числа операций.

Рассмотрим схему быстрого преобразования Фурье для значений  $u_j$  некоторой комплексной функции  $u(x)$  в точках  $x_j = j\Delta$ . Ее можно разложить в комплексный ряд Фурье:

$$u_j = \sum_{k=0}^{J-1} \hat{u}_k \exp\left(\frac{i2\pi kj}{J}\right), \quad (4.19)$$

$$\hat{u}_k = \frac{1}{J} \sum_{j=0}^{J-1} u_j \exp\left(-\frac{i2\pi kj}{J}\right). \quad (4.20)$$

В случае функции  $u(x)$  с неограниченным спектром коэффициенты  $\hat{u}_k$  представляют собой суммы амплитуд гармоник  $\hat{u}_{k+sJ}$  ( $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), то есть имеет место наложение частот. Для периодической функции с ограниченным спектром можно выбрать  $J$  так, чтобы  $u_{k+sJ} = 0$  для всех  $s \neq 0$  и наложения частот не было.

Поясним идею метода БПФ на примере Фурье-анализа (4.20). Для этого представим  $J$ ,  $j$ ,  $k$  в виде [3, стр. 86]

$$J = J_1 J_2, \quad j = j_1 + j_2 J_1, \quad k = k_1 J_2 + k_2, \\ j_1, k_1 = 0, 1, \dots, J_1 - 1; \quad j_2, k_2 = 0, 1, \dots, J_2 - 1.$$

В этом случае (4.20) преобразуется к виду

$$\hat{u}_k = \frac{1}{J} \sum_{j_1=0}^{J_1-1} \exp\left(\frac{i2\pi j_1 k}{J}\right) \sum_{j_2=0}^{J_2-1} u_{j_1+j_2 J_1} \exp\left(\frac{i2\pi j_2 k_2}{J_2}\right). \quad (4.21)$$

В выражении (4.21) внутренняя сумма при фиксированном  $j_1 = 0, 1, \dots, J_1 - 1$  описывает независимые разложения Фурье для  $J_1$  различных функций, каждая из которых составлена из значений  $u(x)$  в  $J_2$



точках, выбранных с шагом  $J_1$ , начиная с точки  $j_1$ . Для вычисления каждой внутренней суммы требуется  $J_2^2$  операций, а для всех  $J_1$  внутренних сумм –  $J_1 J_2^2$  операций. Для вычисления всех внешних сумм необходимо  $J J_1 = J_1^2 J_2$  операций. Общее количество операций, выполняемых в выражении (4.21), равно  $J(J_1 + J_2)$ .

Разлагая  $J$  на простые множители  $J = J_1 J_2 \dots J_m$ , получим, что общее число арифметических операций равно  $J(J_1 + J_2 + \dots + J_m)$ . Это намного меньше минимально возможного числа операций  $J^2$  для вычисления по формулам (4.20) без разбиения  $J$  на множители. В частном случае  $J = s^m$ , где  $m$  – целое число, количество операций равно  $msJ$ . При этом выигрыш в числе операций, благодаря методу БПФ, составляет  $J/(s \log_s J)$ . Он максимален при  $s = e$ . Наибольшее количество алгоритмов БПФ составлено для случая  $J = 2^m$ .

Аналогичным образом можно произвести БПФ для периодических вещественных функций. В этом случае он становится несколько сложнее. Если большинство значений функций в узловых точках равны нулю, то можно ускорить БПФ с помощью исключения лишних операций. Мы рассмотрели только процедуру Фурье-анализа. Фурье-синтез (4.19) производится идентичным образом.

#### 4.6. Продвижение частиц на очередном временном шаге

На каждом временном шаге моделирующие частицы продвигаются в соответствии с их уравнениями движения в самосогласованном поле:

$$m_\mu \frac{dv}{dt} = e_\mu E(x) , \quad (4.22)$$

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad \mu = 1, 2, \dots, N. \quad (4.23)$$

Для численного решения уравнений (4.22), (4.23) в схемах РС-моделирования обычно используется *метод «с перешагиванием»* [2, стр. 195]

$$v_{\mu}^n = v_{\mu}^{n-2} + \frac{e_{\mu}}{m_{\mu}} 2\Delta t E^{n-1}, \quad (4.24)$$

$$x_{\mu}^{n+1} = x_{\mu}^{n-1} + v_{\mu}^n 2\Delta t. \quad (4.25)$$

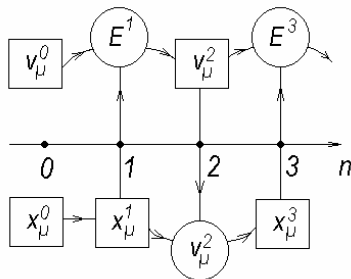


Рис. 4.5

Ее можно представить в виде схемы, изображенной на рисунке 4.5. Значения  $x$  и  $v$  вычисляются в точках  $t^n$  и  $t^{n+1}$  путем перешагивания через предыдущие временные точки  $t^n - \Delta t$  и  $t^{n+1} - \Delta t$ . Шаги по времени для  $x$  и  $v$  смещены на величину  $\Delta t$ .

Промежуточные значения одной из переменных используются для продвижения другой переменной на шаг  $2\Delta t$ . Схема имеет второй порядок точности по  $\Delta t$ , но содержит гораздо меньше вычислительных операций по сравнению с другими схемами такого порядка точности (например, с методом Рунге–Кутты). Этот факт является определяющим при ее выборе для использования в РС-методе.

Для выполнения первого шага приходится применять какой-либо другой метод, так как начальные значения  $x(0)$ ,  $v(0)$  заданы в один и тот же момент времени. Можно, например, найти координаты частиц в момент  $t = \Delta t$  по *методу Эйлера* [2, стр. 45]

$$x_{\mu}^1 = x_{\mu}^0 + v_{\mu}^0 \Delta t.$$

Если с помощью значения  $E(0)$  применить метод Эйлера для вычисления  $v(-\Delta t/2)$ , то процесс схемы с перешагиванием нужно начинать с этой точки.

#### **4.7. Формирование начального распределения частиц на фазовой плоскости**

Для начала вычислительного процесса в PIC-моделировании необходимо задать значения координат и скоростей всех частиц в соответствии с некоторым выбранным начальным распределением. Существуют два основных подхода к построению алгоритма формирования начального распределения [4, стр. 40].

##### **1) Хаотический старт**

Координаты  $x_\mu(0)$  и скорости  $v_\mu(0)$  частиц задаются с использованием датчиков случайных чисел. В простейшем случае значения  $x_\mu(0)$  соответствуют в среднем однородному распределению в интервале  $(0, L)$ , а значения  $v_\mu(0)$  формируют распределение, задаваемое некоторой функцией  $f(v)$  (например, максвелловской). Для этого можно использовать генератор случайных чисел, равномерно распределенных между 0 и 1. Следует задать  $v$  как функцию  $y$  таким образом, что если  $v$  определяется по формуле  $v = v(y)$  с помощью последовательности случайных чисел  $y$ , то скорости будут распределены согласно  $f(v)$ . Это означает, что

$$f(v)dv = dy, \quad y(v) = \int_{-\infty}^v f(v)dv = P(v).$$

Если, например,  $f(v)$  является максвелловской функцией, то функция  $P(v)$  имеет вид, представленный на рисунке 4.6. Для каждого значения  $y_i$

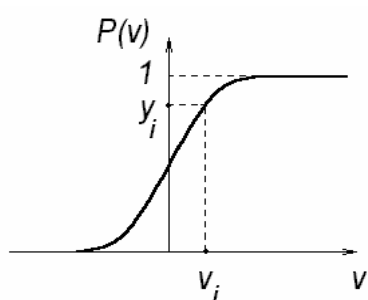


Рис. 4.6

путем решения уравнения  $P(v) = y_i$  можно найти значение  $v_i$ . Эти значения будут распределены в соответствии с  $f(v)$ .

Хаотический старт приводит к довольно сильному начальному шуму в распределении заряда и искажению равновесного спектра колебаний в

длинноволновой области.

## 2) Спокойный старт

Этот метод обеспечивает подавление начальных шумов и длинноволновых флуктуаций, свойственных хаотическому старту. В нем распределение по скоростям строится для  $N_c$  частиц в каждой ячейке одинаковым образом, то есть общее распределение состоит из  $N_c$  пучков с различными скоростями. При этом все пучки являются пространственно однородными, что приводит к снижению начальных флуктуаций до уровня ошибок округления. Необходимый набор из  $N_c$  скоростей можно определить с помощью процедуры, представленной на рисунке 4.6, задавая в качестве  $y_i$  значения функции  $P$ , равномерно распределенные в интервале (0,1).

## 4.8. Формулы алгоритма PIC-метода в компьютерных переменных

Любая численная реализация физической задачи требует проведения удобного обезразмеривания. Пример такого обезразмеривания был рассмотрен в пункте 3.1 для случая численного решения уравнений Власова и Пуассона. Введение безразмерных переменных в PIC-

алгоритмах преследует две цели. Во-первых, стандартное приведение вычисляемых физических величин к значениям с разумным порядком. Во-вторых, желательно получить уравнения для новых переменных с минимальным числом арифметических операций с целью сокращения расчетного времени.

Для моделирования плазменных колебаний удобно использовать следующий набор *компьютерных переменных* [2, стр. 198]:

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{\Delta}, \quad V = v \frac{2\Delta t}{\Delta}, \quad E = -E_{разм} \frac{4(\Delta t)^2}{\Delta} \frac{e}{m_e}, \\ F &= \varphi \frac{2(\Delta t)^2}{\Delta^2} \frac{e}{m_e}, \quad Q = -G \frac{\rho}{en_0}, \quad G = 2\omega_{pe}^2 (\Delta t)^2, \end{aligned} \quad (4.26)$$

где  $n_0$  – начальная плотность плазмы,  $\omega_{pe} = (4\pi e^2 n_0 / m_e)^{1/2}$  – плазменная частота в невозмущенной плазме.

Пространственный шаг  $\Delta$  будем выражать в единицах дебаевской длины:

$$\Delta = DL \cdot \lambda_D,$$

где  $\lambda_D = v_{Te} / \omega_{pe}$ ,  $v_{Te}$  – тепловая скорость электронов. Временной шаг  $\Delta t$  выразим через  $\omega_{pe}^{-1}$

$$\Delta t = DT \cdot \omega_{pe}^{-1}.$$

Значения параметров  $DL$  и  $DT$  определяются характерными масштабами исследуемых процессов в плазме. При анализе плазменных колебаний обычно выбирают  $DL = 1$ ,  $DT = 0,1 \div 0,2$ .

Запишем основные уравнения алгоритма PIC-CIC-моделирования электронных плазменных колебаний в таких безразмерных переменных. Будем считать, что ионы формируют положительный неподвижный фон.

### 1) Вычисление распределения плотности заряда

Выражения для безразмерной плотности заряда в момент времени  $t^n$  в узле пространственной сетки  $j$  можно представить в виде

$$Q_j^n = G[N_j(t^n) / N_c - 1] ,$$
$$N_j(t^n) = \sum_{m=1}^N \delta[Int | X_m^n - j |](1 - | X_m^n - j |) , \quad (4.27)$$

где  $N_j(t^n)$  – количество заряда в единицах  $e$  в узле  $j$  в момент времени  $t^n$ ,  $N_c$  – начальное число частиц в ячейке,  $\delta(m)$  определено в пункте 4.2.

### 2) Вычисление самосогласованного электрического поля

Разностное уравнение Пуассона в безразмерных переменных совпадает по форме с уравнением (4.5)

$$F_{j+1} - 2F_j + F_{j-1} = Q_j . \quad (4.28)$$

Поэтому все соотношения параграфов 4.3 – 4.5, относящиеся к вычислению потенциала сохраняют свой вид при замене  $\varphi$  на  $F$  и  $q$  на  $Q$ . Выражения для напряженности электрического поля принимают вид

$$E(x) = (X_{j+1} - X)E_j + (X - X_j)E_{j+1} ,$$
$$E_j = F_{j-1} - F_{j+1} . \quad (4.29)$$

### 3) Продвижение частиц на очередном временном шаге

Формулы метода с перешагиванием для электронов (4.24), (4.25) принимают в безразмерных переменных особенно простой вид:

$$V_m^{n+1} = V_m^{n-1} + E^n(X_m^n) , \quad (4.30)$$

$$X_m^{n+2} = X_m^n + V_m^{n+1} . \quad (4.31)$$

Первый шаг по методу Эйлера производится по формуле

$$X_m^1 = X_m^0 + V_m^0 / 2. \quad (4.32)$$

При выполнении продвижения частиц по формулам (4.30) – (4.32) необходимо в зависимости от граничных условий производить изменение координат и скоростей при выходе частицы за границы моделируемого отрезка  $0 \leq X \leq J$  ( $J = L / \Delta$ ). Если, например, используются отражательные граничные условия, то эти изменения производятся по формулам

$$\begin{aligned} X_{m,refl}^n &= -X_m^n \quad \text{для} \quad X_m^n < 0, \\ 2J - X_m^n &\quad \text{для} \quad X_m^n > J, \\ V_{m,refl}^n &= -V_m^n. \end{aligned} \quad (4.33)$$

При использовании периодических граничных условий координаты и скорости вышедших за пределы системы частиц изменяются следующим образом

$$\begin{aligned} X_{m,per}^n &= J + X_m^n \quad \text{для} \quad X_m^n < 0, \\ X_m^n - J &\quad \text{для} \quad X_m^n > J, \\ V_{m,per}^n &= V_m^n. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Выражения (4.34) соответствуют тому, что взамен вышедшей частицы с противоположной стороны вводится частица с такой же скоростью.

#### 4) Вычисление энергии плазмы

С учетом выражений (4.26) легко показать, что энергия электрического поля и полная энергия частиц плазмы равны соответственно:

$$W_{эл} = \frac{Nw_0}{2JG} \int_0^J E^2(X) dX, \quad (4.35)$$

$$W_{кин} = w_0 \sum_{m=1}^N V_m^2, \quad (4.36)$$

где  $w_0 = \frac{1}{8} m_e (\Delta / \Delta t)^2$ . Удобно для вычисления в программе моделирования выразить полную энергию плазмы в единицах  $Nw_0$ :

$$W_{полн.} = \frac{1}{2JG} \int_0^J E^2(X) dX + \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N V_m^2. \quad (4.37)$$

Интеграл в формуле (4.37) можно вычислить, например, по методу Симпсона [5, стр. 217], используя значения  $E_j$  в узлах пространственной сетки. Для того чтобы величины  $E$  и  $V_m$  брались в один момент времени, можно, например, определить  $V_m$  как среднее значение между скоростями в соседних точках схемы с перешагиванием:

$$V_m = (V_m^{n-1} + V_m^{n+1}) / 2. \quad (4.38)$$

Вычисление энергии плазмы является важным элементом диагностики в моделировании по методу частиц в ячейке. В частности, при отсутствии внешнего воздействия и сохранении числа частиц по сохранению полной энергии можно судить о точности используемой численной схемы.

#### 4.9. Общая структура программы одномерного PIC-моделирования

На рисунках 4.7, 4.8 приведена *блок-схема программы* одномерного моделирования плазмы с помощью PIC-метода.

##### 1) Входные параметры PIC-моделирования

$N_c$  – начальное число частиц в ячейке;

$J$  – число ячеек;

$DL = \Delta / \lambda_D$  – пространственный шаг в единицах  $\lambda_D$ ;



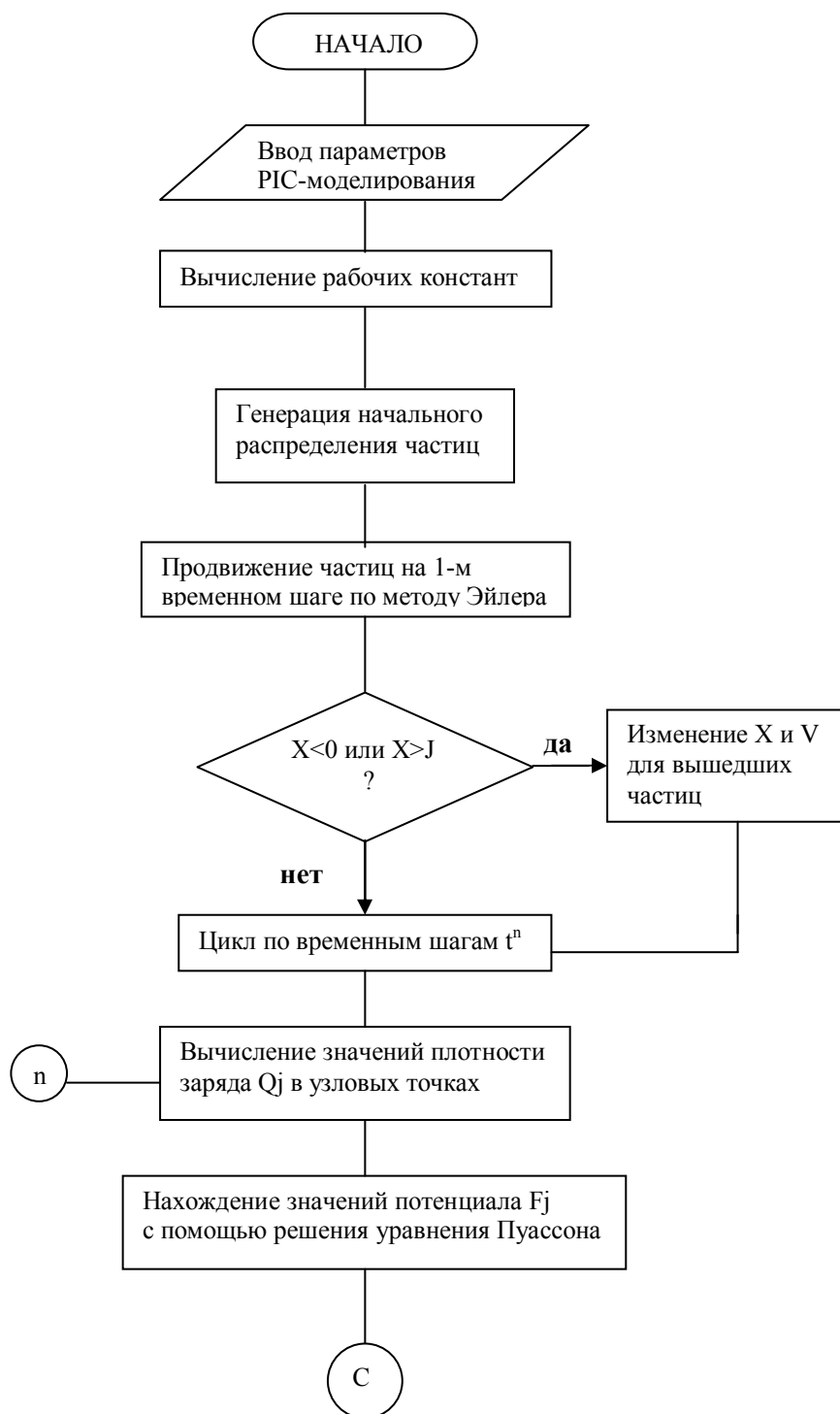


Рис. 4.7. Блок-схема программы одномерного PIC-моделирования.

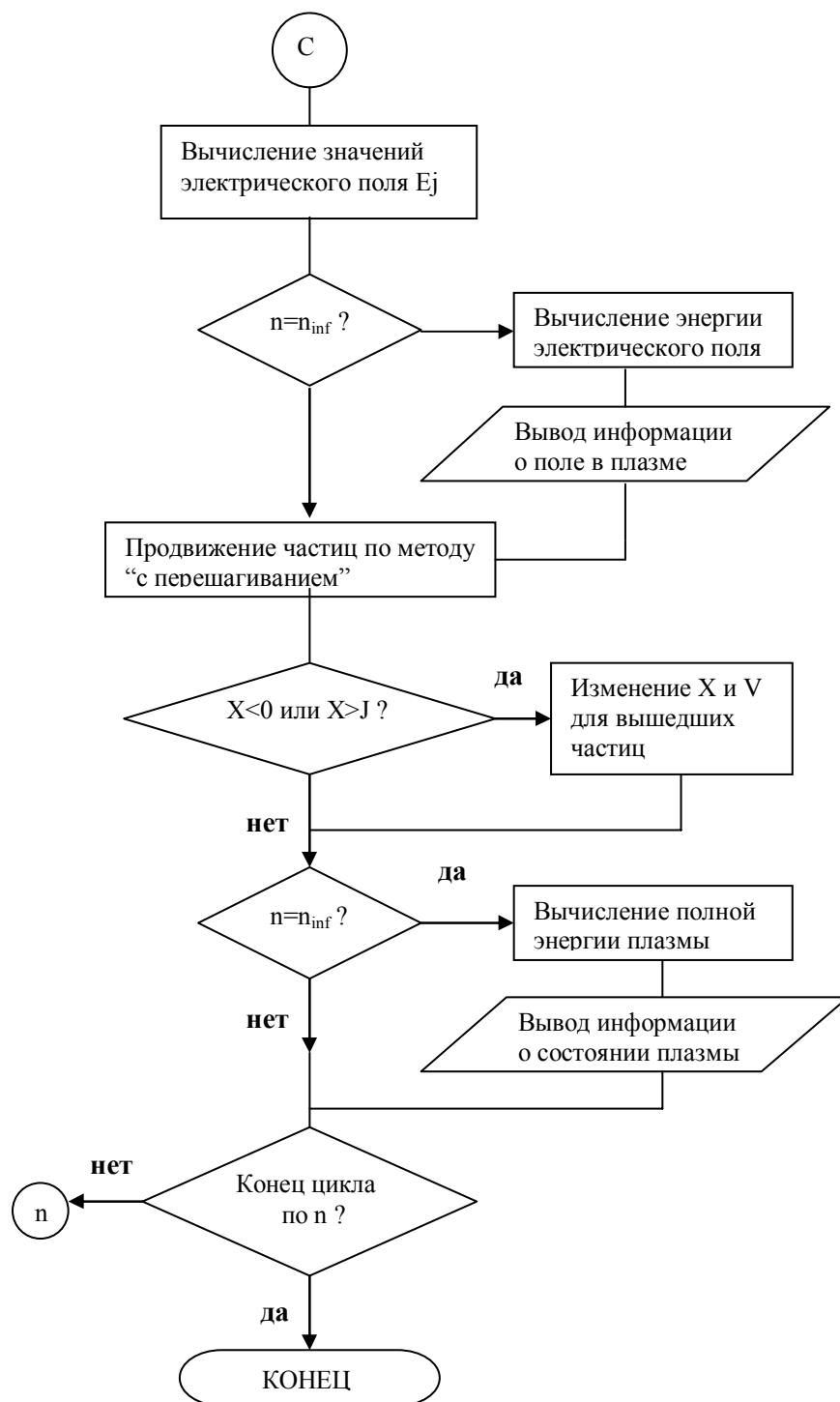


Рис. 4.8. Блок-схема программы одномерного PIC-моделирования (окончание)

$DT = \Delta t \omega_{pe}^{-1}$  – шаг по времени в единицах  $\omega_{pe}^{-1}$ ;

$A0, B0, C0, AJ, BJ, CJ$  – параметры граничных условий для потенциала в случае непериодических граничных условий по формулам (4.7);

$NMAX$  – общее число шагов по времени;

$NDINF$  – число шагов по времени, через которое выводится информация о состоянии плазмы.

В зависимости от постановки задачи могут использоваться и другие входные параметры, задающие вид начального распределения частиц, внешних полей, источников плазмы и т.д.

## 2) Вывод информации о состоянии плазмы

Выводимая информация обычно содержит графики зависимости полевых величин от координаты, значения энергии электрического поля и полной энергии плазмы. Информация о распределении частиц по скоростям и координатам выводится в виде **фазовых картинок**, изображающих положения частиц на фазовой плоскости. В случае периодических граничных условий можно использовать Фурье-коэффициенты полевых величин для анализа их спектрального распределения.

## Список литературы к теме 4

Использованная литература:

1. Бэдсел Ч., Ленгдон А. Физика плазмы и численное моделирование. – М.: Энергоатомиздат, 1989.
2. Поттер Д. Вычислительные методы в физике. – М.: Мир, 1975.
3. Рошаль А.С. Моделирование заряженных пучков. – М: Атомиздат, 1979.
4. Сигов Ю.С. Численные методы кинетической теории плазмы. – М: Изд. МФТИ, 1984.

5. Мак-Кракен Д., Дорн У. Численные методы и программирование на ФОРТРАНе. – М.: Мир, 1977.

Рекомендуемая литература:

1. Вычислительные методы в физике плазмы. / Под ред. Б. Олдера, С. Фернбаха и М. Ротенберга. – М.: Мир, 1974.
2. Сигов Ю.С. Вычислительный эксперимент: мост между прошлым и будущим физики плазмы. – М: Физматлит, 2001.
3. Туриков В.А., Ульяницкий И.В., Умнов А.М. Численное моделирование плазменных процессов. – М.: Изд-во. РУДН, 2003.

## Тема 5. Примеры моделирования одномерных плазменных систем

### 5.1. Двухпотоковая неустойчивость

Анализ динамики двухпотоковой неустойчивости был одной из первых плазменных задач, рассмотренных с использованием метода частиц в ячейке [1]. Такая неустойчивость развивается в плазме, состоящей из двух электронных пучков одинаковой плотности, движущихся навстречу друг другу с равными скоростями на фоне неподвижных ионов [2]. Механизм двухпотоковой неустойчивости можно пояснить следующим образом. Малое возмущение электрического поля вызывает в соответствующей точке пространства модуляцию скорости пучков. Это, в свою очередь, приводит к бунчировке (скоплению) пространственного заряда в направлении движения каждого пучка. В результате создается потенциал больший первоначального. Поле, связанное с тем или иным пучком, модулирует другой пучок, который затем снова подпитывает источник модуляции. Это приводит к нарастанию амплитуды возмущения, что и соответствует неустойчивости.

Максимальный инкремент двухпотоковой неустойчивости для холодных пучков равен [2, стр. 17]

$$\gamma_{\max} = \frac{\omega_{pe}}{2}.$$

Он имеет место для возмущений с длиной волны

$$\lambda_{\text{onm}} = \frac{4\pi}{\sqrt{3}} \frac{v_d}{\omega_{pe}}, \quad (5.1)$$

где  $v_d$  – скорости пучков. При учете теплового движения частиц начальную функцию распределения в такой системе можно выбрать в виде суперпозиции двух одинаковых встречных максвелловских потоков

$$f_0 = \frac{n_0}{2\sqrt{\pi}v_{Te}} \left\{ \exp\left[-\frac{(v + v_d)^2}{v_{Te}^2}\right] + \exp\left[-\frac{(v - v_d)^2}{v_{Te}^2}\right] \right\},$$

где  $n_0$  - начальная плотность электронной компоненты плазмы.

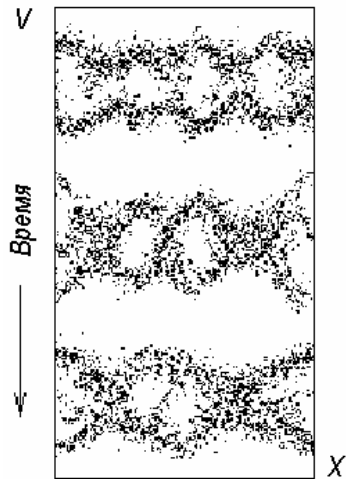


Рис. 5.1

Результаты моделирования такой системы по РС-методу с периодическими граничными условиями представлены на рис. 5.1. На начальной (линейной) стадии развития двухпоточковой неустойчивости возникает нарастающая мода с длиной волны, соответствующей выражению (5.1). Затем начинают формироваться вихри в фазовом пространстве с размерами порядка  $\lambda_{omt} / 2$ . Через некоторое время они начинают сливаться и их число уменьшается. Время между двумя ближайшими слияниями намного превосходит период колебаний частиц, захваченных полем вихрей. Поэтому фазовые вихри можно считать квазистационарными образованиями. Самосогласованные структуры такого типа относятся к типу так называемых *волн Бернштейна–Грина–Крускала (БГК)* [3]. Получить какие-либо аналитические решения, описывающие такие нелинейные процессы, по-видимому, невозможно, и численное моделирование остается единственным инструментом для их изучения.

## 5.2. Нелинейные колебания плазмы в цилиндрическом волноводе под действием локализованного электрического импульса

Такое моделирование было проведено с целью анализа результатов экспериментов на Q-машине [4, 5] по изучению нелинейного отклика плазмы на кратковременное локализованное возмущение. Плазма была

помещена в проводящий цилиндрический волновод с зазором, к которому прикладывался кратковременный импульс электрического поля. Электроны могли двигаться только вдоль направления сильного магнитного поля, и поэтому задачу можно было считать одномерной. В течение характерного времени плазменных возмущений ионы оставались неподвижными.

Дисперсионное уравнение для плазменной волны вдоль оси волновода имеет вид [6, стр. 142]

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 \frac{k^2}{k^2 + k_{\perp}^2} + \frac{3}{2} v_{Te}^2 k^2, \quad (5.2)$$

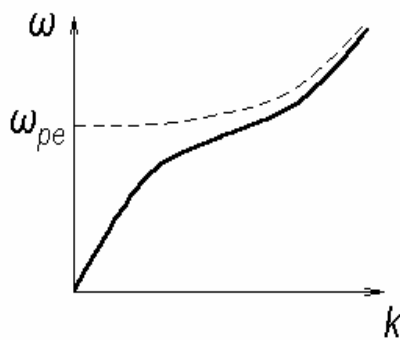


Рис. 5.2

где  $k_{\perp} = 2,404/r_0$ ,  $r_0$  – радиус плазменного столба. В уравнении (5.2) учтены лишь азимутально-симметричные моды электрического поля. Дисперсионная кривая представлена на рисунке 5.2. В отличие от ленгмюровских колебаний в неограниченной плазме (штрихованная линия), колебания в

цилиндрическом столбе, окруженном проводящим волноводом, имеют максимальную фазовую скорость

$$v_{\phi} = \frac{\omega_{pe}}{k_{\perp}}. \quad (5.3)$$

Потенциал электрического поля в такой плазме удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2}{dx^2} - k_{\perp}^2 = -4\pi\rho. \quad (5.4)$$

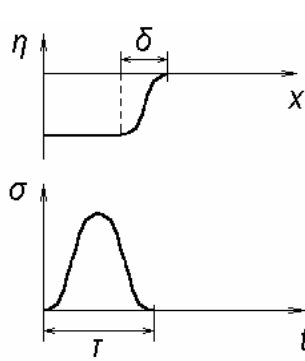
Метод прогонки, описанный в параграфе 4.4, легко обобщается на случай уравнения (5.4). В качестве граничных условий в такой системе

использовались условия равенства нулю электрического поля на концах плазменного столба

$$\left. \frac{d}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{d}{dx} \right|_{x=L} = 0 .$$

и отражательные условия для граничных частиц (4.33).

Импульс внешнего потенциала, прикладываемого к зазору волновода, представлялся в виде



$$\varphi_{ext}(x, t) = \varphi_0 \eta(x) \sigma(t) .$$

Расчеты проводились для следующих профилей пространственной и временной зависимостей (см. рис. 5.3)

$$\eta(x) = -\frac{1}{2} \{1 + \cos[\pi(x - x_p) / \delta]\} ,$$

$$\sigma(t) = \frac{1}{2} [1 - \cos(2\pi t / \tau)] .$$

Рис. 5.3.

В таких физических условиях нелинейные ленгмюровские колебания будут наиболее сильными, если скорость электронов близка к фазовой скорости волны (5.3). Поэтому амплитуду потенциала целесообразно задавать в единицах кинетической энергии электронов со скоростью  $v = v_\phi$

$$\varphi_0 = A_p \frac{m_e}{2e} \frac{\omega_{pe}^2}{k_\perp^2} .$$

На рисунке 5.4 представлены результаты моделирования нелинейных колебаний плазмы после приложения внешнего электрического импульса. При этом возникают два вида локализованных возмущений, распространяющихся с разной скоростью и имеющих разную физическую природу. Первое из них (1) представляет собой так



называемую *электронную дыру*, относящуюся к классу БГК-равновесий, рассмотренных в предыдущем пункте. Недавно такие структуры были обнаружены с помощью спутниковых измерений в магнитосфере Земли [7]. Эти измерения, в частности, подтвердили результаты экспериментов [4, 5] и теоретические результаты работы [8] о связи между шириной дыры и амплитудой потенциала в ней.

Второй тип возмущений (2) является *плазменно-волноводным солитоном*, подобным ионно-звуковому солитону [9], что связано со сходством их дисперсионных свойств (см. рис. 5.2). Численное

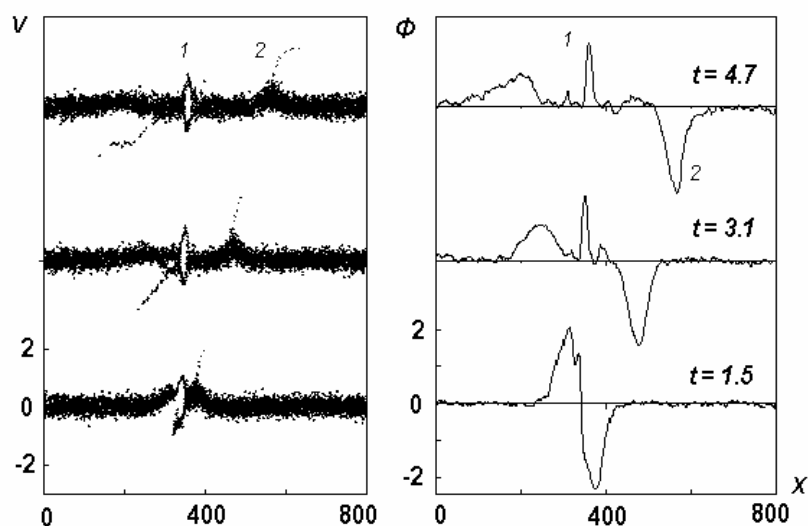


Рис. 5.4. Отклик замагниченной плазмы в цилиндрическом волноводе на локализованный внешний импульс.  $J=800$ ,  $N_c=50$ ,  $A_p=2.0$ ,  $\delta=1.0$ ,  $\tau=1.0$

моделирование позволило исследовать тонкие физические эффекты, обусловленные взаимодействием таких солитонов с резонансными частицами, движущимися с той же скоростью. Было показано, что это взаимодействие приводит к образованию «плато» позади импульса

потенциала и постепенному переходу от солитонного профиля к скачкообразному, что было предсказано теоретически в работе [10].

### 5.3. Электронные колебания в пучковом двойном слое

*Двойные слои (ДС)* часто возникают в лабораторной и космической плазме на нелинейной стадии развития ионно-звуковой и бунемановской неустойчивостей [11]. Они представляют собой самосогласованный скачок потенциала, в котором движутся пучки ускоренных и отраженных частиц, что делает такое равновесие заведомо неустойчивым. Если ДС формируется в плазме между проводящими границами, возникают нарастающие флуктуационные поля, вызываемые индуцированными зарядами, подобно тому, как это происходит в случае неустойчивости Пирса [12].

Рассмотрим электронные колебания в так называемом *пучковом ДС* [13]. Будем считать, что ускоренные электроны и ионы формируют холодные пучки, зависимость скоростей которых от координаты следует из закона сохранения энергии

$$v_f(x) = v_0 \sqrt{1 + \Phi}, \quad u_f = u_0 \sqrt{1 + \alpha(\Psi - \Phi)}.$$

Здесь  $v_0$ ,  $u_0$  – скорости электронов и ионов при входе в ДС с противоположных сторон,  $\Phi(x) = 2e / m_e v_0^2$ ,  $\Psi = 2e\phi_0 / m_e v_0^2$ ,  $\phi_0$  – скачок потенциала в ДС,  $\alpha = m_e v_0^2 / m_i u_0^2$ .

Из уравнения непрерывности вытекает зависимость плотностей ускоренных частиц от потенциала

$$n_f^{(e)} = \frac{n_0}{\sqrt{1 + \Phi}}, \quad n_f^{(i)} = \frac{n_0}{\sqrt{1 + \alpha(\Psi - \Phi)}}, \quad (5.5)$$

где  $n_0$  – плотность электронов и ионов при входе в слой.

Распределение отраженных частиц будем считать больцмановским

$$n_r^{(e)} = n_{r0}^{(e)} \exp\left(\frac{\Phi - \Psi}{\beta_e}\right), \quad n_r^{(i)} = n_{r0}^{(i)} \exp\left(-\frac{\alpha\Phi}{\beta_i}\right), \quad (5.6)$$

где  $n_{r0}^{(e,i)}$  – значения плотностей вдали от слоя,  $\beta_e = 2T_e / m_e v_0^2$ ,  $\beta_i = 2T_i / m_i u_0^2$ ,  $T_{e,i}$  – температуры отраженных электронов и ионов.

С учетом выражений (5.5), (5.6) можно представить уравнение Пуассона для потенциала в таком равновесии в следующем виде:

$$\frac{d^2\Phi}{dX^2} = 2 \left[ \frac{1}{\sqrt{1+\Phi}} - \frac{1}{\sqrt{1+\alpha(\Psi-\Phi)}} + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\Psi}}\right) \exp\left(\frac{\Phi-\Psi}{\beta_e}\right) - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\alpha\Psi}}\right) \exp\left(-\frac{\alpha\Phi}{\beta_i}\right) \right], \quad (5.7)$$

где  $X = x\omega_0 / v_0$ ,  $\omega_0 = (4\pi e^2 n_0 / m_e)^{1/2}$ .

Для простоты будем считать, что  $\beta_e = \beta_i = \beta$ . Требование отсутствия поля  $d\Phi/dX = 0$  при  $X = \pm\infty$  приводит в этом случае к условию Ленгмюра [11, стр. 29]:

$$\frac{v_0}{u_0} = \sqrt{\frac{m_i}{m_e}}.$$

Предположим также, что имеет место полное отражение частиц от потенциального барьера. Из выражений (5.6) следует, что это происходит при  $\Psi / \beta \gg 1$ .

Численное моделирование электронных колебаний в пучковом ДС было проведено по методу частиц в ячейке [14] для начального распределения частиц на фазовой плоскости в соответствии с равновесным потенциалом  $\Phi(X)$ , найденным из уравнения Пуассона (5.7). Был

рассмотрен случай слоя между проводящими электродами с граничными условиями для потенциала:

$$\varphi(X=0)=0, \quad \varphi(X=L)=\Psi.$$

Со стороны низкопотенциального электрода ( $X=0$ ) генерировался поток электронов с фиксированными значениями скорости и плотности. В высокопотенциальную область ( $X=L$ ) вводились частицы, формирующие половину максвелловского распределения для отрицательных значений скорости. Частицы, пересекавшие электроды, выводились из системы. Ионное распределение заряда задавалось в виде постоянного неоднородного фона, отвечающего самосогласованному движению ионных пучков в области перепада потенциала. Начальное возмущение было реализовано путем синусоидальной модуляции скорости ускоренного пучка. Такая постановка соответствует обобщению однородной задачи Пирса для электронного пучка и ионного фона между заземленными электродами [15] на случай неоднородной системы, содержащей ДС. Результаты численного моделирования показали, что условия устойчивости ДС между проводящими электродами существенным образом зависят от положения центральной плоскости перепада потенциала  $X=d$ . Если ширина высокопотенциальной области превышает некоторое критическое значение, то развиваются неустойчивые колебания (рис. 5.5), вызванные наличием в ней плазменно-пучковой системы. В случае большого размера низкопотенциальной части ДС на нелинейной стадии неустойчивости в ней происходит образование **виртуального катода** (рис. 5.6), то есть области, в которой имеет место отражение электронов. Наибольшее время жизни ДС имеет место для короткого отраженного пучка при безразмерных длинах системы, не превышающих критического значения для развития неустойчивости Пирса  $L < \pi$ . При минимально возможных размерах однородных областей и

больших амплитудах потенциала  $\Psi \gg 1$  наблюдалось стабильное существование ДС на временах  $t \approx 100\omega_{pe}^{-1}$ .

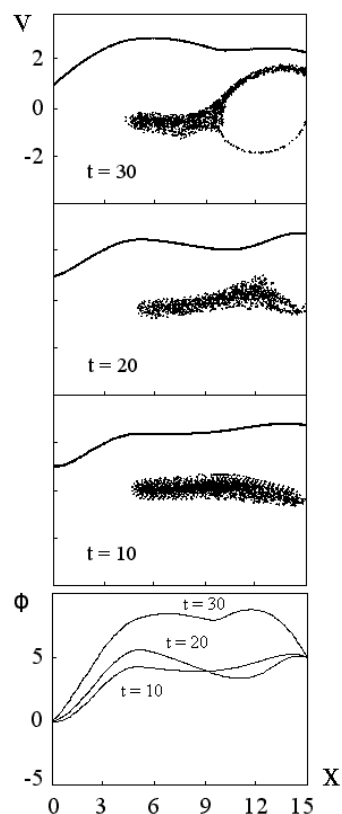


Рис. 5.5

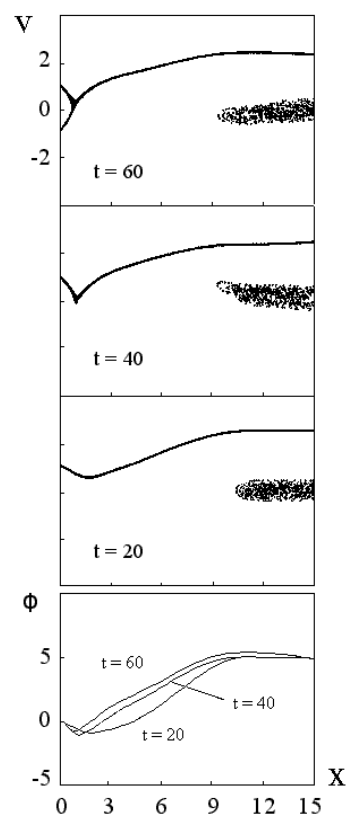


Рис. 5.6

## Список литературы к теме 5

Использованная литература:

1. Morse R.L., Nielson C.W. Phys. Fluids, 12, 2418, 1969.
2. Михайловский А.Б. Теория плазменных неустойчивостей, т. 1. – М.: Атомиздат, 1975.
3. Bernstein I.B., Greene J.M., Kruskal M.D. Phys. Rev., 108, 546, 1957.

4. Lynov J.P., Michelsen P., Pecseli H.L., Rasmussen J.J., Turikov V.A. Phys. Scripta, 20, 328, 1979.
5. Karpman V.I., Lynov J.P., Michelsen P., Pecseli H.L., Rasmussen J.J., Turikov V.A. Phys. Fluids, 23, 1782, 1980.
6. Кролл Н., Трайвелпис А. Основы физики плазмы. – М: Мир, 1975.
7. Ergun R.E., Carlson C.W., McFadden J.P., Mozer F.S., Muschietti L., Roth I., Strangeway R.J. Phys. Rev. Letters, 81, 826, 1998.
8. Turikov V.A. Phys. Scripta, 30, 73, 1984.
9. Арцимович Л.А., Сагдеев Р.З. Физика плазмы для физиков. – М: Атомиздат, 1979.
10. Карпман В.И., Маслов Е.М. ЖЭТФ, 1978, 75, 504.
11. Raadu M.A. Phys. Reports, 178, 25, 1989.
12. Pierce J. Journ. Appl. Physics, 15, 721, 1944.
13. Туриков В.А., Ульяницкий И.В. Физика плазмы, 25, 929, 1999.
14. Туриков В.А., Ульяницкий И.В. Прикладная физика, № 5, 137, 1999.
15. Буринская Т.М., Волокитин А.С. Физика плазмы, 9, 453, 1983.

#### Рекомендуемая литература:

1. Вычислительные методы в физике плазмы. / Под ред. Б. Олдера, С. Фернбаха и М. Ротенберга. – М.: Мир, 1974.
2. Сигов Ю.С. Вычислительный эксперимент: мост между прошлым и будущим физики плазмы. – М: Физматлит, 2001.
3. Туриков В.А., Ульяницкий И.В., Умнов А.М. Численное моделирование плазменных процессов. – М.: Изд-во РУДН, 2003.

## Тема 6. Моделирование одномерных электромагнитных процессов

### 6.1. Одномерная электромагнитная модель плазмы

Существует огромное число процессов как в лабораторной, так и в природной плазме, в которых электромагнитные поля и параметры плазмы можно считать зависящими только от одной координаты вдоль некоторого направления. Физически такое направление может быть связано с направлением внешнего магнитного поля, градиента плотности плазмы, скоростей пучков и т.д. При этом в общем случае приходится учитывать все три компоненты скорости частиц, а самосогласованные поля находить из уравнений Максвелла. Поэтому моделировать такие процессы значительно сложнее, чем одномерные электростатические системы, рассмотренные в предыдущей главе. Тем не менее, одномерные электромагнитные коды, намного проще двух- и трехмерных и могут быть с успехом реализованы на современных персональных компьютерах.

Рассмотрим одномерную модель плазмы, в которой электромагнитная волна распространяется вдоль оси  $x$ . Продольное электрическое поле описывается компонентой  $E_x$ , а поперечное электромагнитное поле – компонентами  $E_y, E_z$  и  $B_y, B_z$ . Будем также считать, что плазма находится в постоянном внешнем магнитном поле  $\vec{B}_0$ .

Продольное поле, как и в одномерной электростатической модели, вычисляется с помощью уравнения Пуассона. Уравнения Максвелла для поперечного электромагнитного поля представим в виде:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = c \cdot \text{rot} \vec{B} - \vec{J}, \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -c \cdot \text{rot} \vec{E}, \quad (6.2)$$

где плотность тока

$$\vec{J} = -4\pi e \int \vec{v} f_e(\vec{v}) d\vec{v}. \quad (6.3)$$

Траектории электронов будем рассчитывать с помощью релятивистского уравнения движения:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -e \left\{ E + \frac{1}{c} [\vec{v}(\vec{B} + \vec{B}_0)] \right\}, \quad (6.4)$$

где  $\vec{p} = m_e \gamma \vec{v}$  – релятивистский импульс. Ионы будем считать неподвижными.

С помощью этой модели можно исследовать такие важные нелинейные процессы, как резонансный нагрев плазмы двумя лазерными волнами, возбуждение плазменных волн короткими лазерными импульсами, авторезонансное взаимодействие электромагнитных импульсов с плазмой и т.д.

## 6.2. Численное решение релятивистских уравнений движения частиц в электромагнитном поле

Для решения релятивистского уравнения движения электронов (6.4) можно использовать следующую центрированную разностную схему [1, стр. 345]:

$$\frac{\vec{u}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{u}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = -\frac{e}{m_e} \left( \vec{E}^n + \frac{1}{2\gamma^n c} [(\vec{u}^{n+\frac{1}{2}} + \vec{u}^{n-\frac{1}{2}}) \vec{B}^n] \right), \quad (6.5)$$

где  $\vec{u} = \gamma \vec{v}$ ,  $\gamma = \sqrt{1 + u^2 / c^2}$ ,  $\vec{B}_n$  – значение полного магнитного поля  $\vec{B} + \vec{B}_0$  на временном шаге  $t^n$ .

Уравнение (6.5) может быть разрешено как система трех линейных уравнений для проекций вектора  $\vec{u}$ . Борис предложил использовать более



простой метод решения уравнения (6.5), основанный на специальном преобразовании вектора скорости [1, стр. 345]. В *схеме Бориса* вводятся новые переменные  $\vec{u}^-$ ,  $\vec{u}^+$  посредством соотношений

$$\vec{u}^{n-\frac{1}{2}} = \vec{u}^- + \frac{e\vec{E}^n}{m_e} \frac{\Delta t}{2}, \quad (6.6)$$

$$\vec{u}^{n+\frac{1}{2}} = \vec{u}^+ - \frac{e\vec{E}^n}{m_e} \frac{\Delta t}{2}. \quad (6.7)$$

Подставляя (6.6), (6.7) в (6.5), получим уравнение в котором отсутствует электрическое поле  $\vec{E}$ :

$$\frac{\vec{u}^+ - \vec{u}^-}{\Delta t} = -\frac{e}{2\gamma^n m_e c} [(\vec{u}^+ + \vec{u}^-) \vec{B}^n]. \quad (6.8)$$

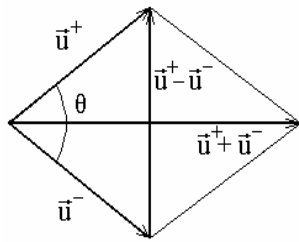


Рис. 6.1

Соотношение (6.8) описывает процедуру получения вектора  $\vec{u}^+$  посредством вращения вектора  $\vec{u}^-$  на некоторый угол  $\theta$ . Из рисунка (6.1) видно, что

$$\left| \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right| = \frac{|\vec{u}^+ - \vec{u}^-|}{|\vec{u}^+ + \vec{u}^-|} = -\frac{eB^n \Delta t}{2\gamma^n m_e c}.$$

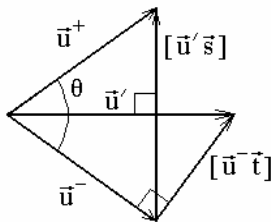


Рис. 6.2

В случае произвольного направления векторов  $\vec{u}$  и  $\vec{B}$  удобно произвести переход от  $\vec{u}^-$  к  $\vec{u}^+$  в два этапа. Сначала можно получить вектор  $\vec{u}'$ , перпендикулярный векторам  $\vec{u}^+ - \vec{u}^-$  и  $\vec{B}^n$  (см. рис. 6.2)

$$\vec{u}' = \vec{u}^- + [\vec{u}^- \vec{t}],$$

где вектор  $\vec{t}$  определяется следующим образом:

$$\vec{t} = -\frac{e\vec{B}^n \Delta t}{2\gamma^n m_e c}.$$

После этого вектор  $\vec{u}^+$  может быть получен с помощью преобразования

$$\vec{u}^+ = \vec{u}^- + [\vec{u}'\vec{s}],$$

где вектор  $\vec{s}$  связан с вектором  $\vec{t}$  соотношением

$$\vec{s} = \frac{2\vec{t}}{1+t^2}.$$

Он параллелен  $\vec{B}^n$  и его величина определяется условием

$$|\vec{u}^-|^2 = |\vec{u}^+|^2.$$

Перейдем к компьютерным безразмерным переменным

$$X = \frac{x}{\Delta}, \quad U_x = u_x \frac{\Delta t}{\Delta} = \frac{u_x}{c},$$

$$\vec{E} = -\vec{E}_{разм} \frac{e}{2m_e} \frac{(\Delta t)^2}{\Delta}, \quad \vec{B} = -\vec{B}_{разм} \frac{e\Delta t}{2m_e c}, \quad (6.9)$$

где  $\Delta$  – пространственный шаг численного интегрирования уравнений Максвелла (см. пункт 6.3).

В этих переменных схема Бориса для решения уравнений движения (6.4) может быть представлена в следующем виде:

$$\vec{U}^- = \vec{U}^{n-\frac{1}{2}} + \vec{E}^n,$$

$$\vec{U}' = \vec{U}^- + [\vec{U}'\vec{T}],$$

$$\vec{U}^+ = \vec{U}' + [\vec{U}'\vec{S}],$$

$$\vec{U}^{n+\frac{1}{2}} = \vec{U}^+ + \vec{E}^n,$$

$$\vec{X}^{n+1} = \vec{X}^n + \vec{U}^{n+\frac{1}{2}} / \gamma^{n+\frac{1}{2}},$$

где  $\vec{T} = \vec{B} / \gamma^n$ ,  $\gamma^n = \sqrt{1 + (\vec{U}^-)^2}$ ,  $\vec{S} = 2\vec{T}(1 + T^2)$ ,  $\gamma^{n+\frac{1}{2}} = \sqrt{1 + (\vec{U}^{n+\frac{1}{2}})^2}$ .

Начальные значения скорости  $\vec{U}^{-\frac{1}{2}}$  для схемы Бориса можно вычислить по методу Эйлера аналогично случаю схемы с перешагиванием, описанной в параграфе 4.6.

### 6.3. Интегрирование уравнений Максвелла методом Доусона

Для решения уравнений Максвелла в одномерном случае удобно использовать *алгоритм Доусона*, в котором изменение поперечных полей со временем сводится к сдвигу значений на один пространственный шаг и добавлению вклада от тока частиц. Вместо электрического и магнитного поля в алгоритме используются следующие полевые функции [1, стр. 134]:

$${}^{\pm}F = \frac{1}{2}(E_y \pm B_z),$$

$${}^{\mp}H = \frac{1}{2}(E_z \mp B_y).$$

Из уравнений Максвелла (6.1), (6.2) следует:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \pm c \frac{\partial}{\partial x}\right) {}^{\pm}F = -\frac{1}{2}J_y, \quad (6.10)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \pm c \frac{\partial}{\partial x}\right) {}^{\mp}H = -\frac{1}{2}J_z. \quad (6.11)$$

Левые части уравнений (6.10), (6.11) являются производными по времени на вакуумных характеристиках  $x = \pm ct$ . Поэтому их можно интегрировать вдоль этих траекторий, считая, что пространственный шаг и шаг по времени связаны соотношением  $\Delta = c\Delta t$ . В задачах о взаимодействии электромагнитных волн с плазмой удобно выражать  $\Delta$  и  $\Delta t$  в единицах  $k^{-1}$  и  $\omega^{-1}$  соответственно, где  $k$  и  $\omega$  – волновое число и частота волны в вакууме. Поэтому аналогично одномерному

электростатическому моделированию можно ввести безразмерные параметры  $DL$  и  $DT$  с помощью соотношений  $\Delta = DL \cdot k^{-1}$ ,  $\Delta t = DT \cdot \omega^{-1}$ . В схеме Доусона по определению  $DL = DT$ .

Разностная схема численного решения уравнений (6.10), (6.11) может быть представлена в виде:

$$\pm F_j^{n+1} = \pm F_{j\mp 1}^n - (J_y)_{j\mp 1}^{n+\frac{1}{2}} \frac{\Delta t}{2}, \quad (6.12)$$

где  $j$  – номер узла пространственной сетки,  $n$  – номер шага по времени.

Переходя к безразмерным значениям электромагнитного поля по формулам (6.9), перепишем разностную схему (6.12) в безразмерной форме:

$$\pm F_j^{n+1} = \pm F_{j\mp 1}^n - G \cdot (\bar{V}_y)_{j\mp \frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}},$$

где  $G = \frac{1}{4} \omega_{pe}^2 \Delta t^2$ ,  $V_y = v_y / c$  – безразмерная скорость электронов.

Токовая скорость электронов  $\bar{V}_y$  может быть вычислена различными способами. Лучшие результаты с точки зрения численной устойчивости дает *алгоритм Ленгдона*, в котором ток усредняется вдоль вакуумной характеристики [1, стр. 134]

$$\bar{V}_y^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{N_c} \sum_{i=1}^N V_{iy}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} [S(X_{j+1} - X_i^{n+1}) + S(X_j - X_i^n)],$$

где  $N_c$  – число частиц в ячейке,  $N$  – полное число частиц,  $X_i^n$ ,  $V_{yi}^n$  – координата  $X$  и проекция скорости  $V_y$   $i$  – й частицы на  $n$  – м временном шаге,  $S$  – координатная интерполяционная функция

$$S(\sigma) = \delta(\text{Int}|\sigma|) \cdot (1 - |\sigma|),$$

аналогичная функции, использованной в параграфе 4.8 для распределения заряда по пространственным узлам (см. выражения 4.27).

Плотность заряда и продольное поле можно вычислять с помощью методов, описанных в параграфе 4.8.

#### 6.4. Задание поля электромагнитного импульса в вакуумной области

В большинстве случаев задача одномерного электромагнитного моделирования ставится следующим образом. Из вакуумной области на границу плазмы падает электромагнитный импульс (рис. 6.3). При

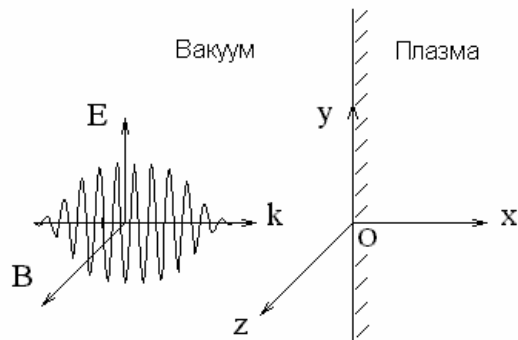


Рис. 6.3

взаимодействии с плазмой он может частично отражаться, а также возбуждать внутри плазмы различные типы волн, передавать энергию электронам и ионам и т.п.

Рассмотрим импульс в вакууме в виде *правополяризованной волны огибающей*

$$\vec{E} = E_0 f(\omega t - kx) \{0, \cos(\omega t - kx), \sin(\omega t - kx)\},$$

$$\vec{B} = \frac{kc}{\omega} E_0 f(\omega t - kx) \{0, -\sin(\omega t - kx), \cos(\omega t - kx)\},$$

где функция  $f(\psi)$  определяет пространственный профиль амплитуды импульса. Тогда в безразмерных переменных, введенных в пункте 6.2, профиль импульса в момент  $t = 0$  примет вид:

$$\vec{E} = \varepsilon \frac{DT}{2} f(X) \{0, -\cos X, \sin X\},$$

$$\vec{B} = \varepsilon \frac{DT}{2} f(X) \{0, -\sin X, -\cos X\},$$

где  $\varepsilon = \frac{eE_0}{m_e \omega c}$ ,  $X = kx$ .

Функцию  $f(X)$  можно, например, задать в виде

$$f(X) = \exp\left\{-[(X - X_0)/d]^n\right\}.$$

При  $n = 2$  она обращается в гауссовское распределение. С ростом параметра  $n$  функция  $f(X)$  стремится к профилю «с плоской вершиной», который можно использовать для описания длинных импульсов, близких к монохроматической плоской волне.

## Список литературы к теме 6

Использованная литература:

1. Бэдсел Ч., Ленгдон А.. Физика плазмы и численное моделирование. – М.: Энергоатомиздат, 1989.

Рекомендуемая литература:

1. Вычислительные методы в физике. Управляемый термоядерный синтез. Под ред. Дж. Киллина. – М.: Мир, 1980.
2. Сигов Ю.С. Вычислительный эксперимент: мост между прошлым и будущим физики плазмы. – М.: Физматлит, 2001.
3. Туриков В.А., Ульяницкий И.В., Умнов А.М. Численное моделирование плазменных процессов. – М.: Изд-во РУДН, 2003.

## Тема 7. Примеры одномерного электромагнитного моделирования

### 7.1. Возбуждение кильватерных волн в плазме мощным лазерным импульсом

В последние годы активно развивается направление по использованию коллективных полей в плазме для ускорения заряженных частиц. Такой метод был впервые предложен в работах [1, 2]. Коллективные поля можно возбуждать либо с помощью электронных сгустков, либо под действием мощных ультракоротких лазерных импульсов.

При распространении мощного короткого лазерного импульса в плазме электроны выталкиваются из области его локализации под действием пондеромоторной силы. В результате этого позади импульса возникают колебания плотности заряда и продольного электрического поля. Такую плазменную волну называют *кильватерной волной* по аналогии с волной позади движущегося корабля. Скорость этой волны совпадает с групповой скоростью лазерного импульса, которая в плазме низкой плотности близка к скорости света. При инжекции пучка электронов в кильватерную волну можно подобрать такие условия, при которых частицы, двигаясь вместе с волной, будут непрерывно ускоряться. Максимальная энергия электронов в таком ускорителе может достигать нескольких сотен МэВ (см. обзор [3]).

В работе [4] с помощью одномерного релятивистского электромагнитного кода было проведено моделирование процесса возбуждения кильватерной волны в плазме коротким мощным лазерным импульсом. Все поля и характеристики плазмы считались зависящими от координаты  $x$  вдоль направления распространения импульса. Ионы считались неподвижными в силу того, что процесс рассматривался на

протяжении нескольких электронных плазменных периодов. Плазма в начальный момент считалась холодной со ступенчатым профилем

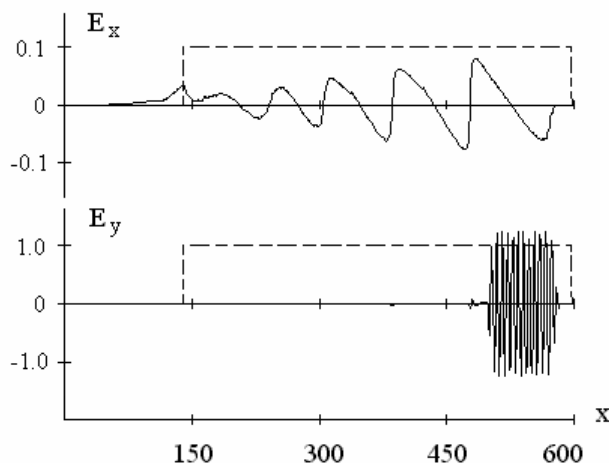


Рис. 7.1

плотности на границе с вакуумом. На рисунке 7.1 представлен один из результатов моделирования, выполненного с помощью программы, описанной в [5, стр. 59-64]. Из графиков видно, что короткий лазерный импульс с поперечным полем  $E_y$  оставляет за собой след в

виде продольной волны  $E_x$ . Поля на графиках выражены в единицах начального поля импульса  $E_0$  в вакууме. Пунктиром отмечена область, занимаемая плазмой. Основными физическими параметрами в этом моделировании являются начальная безразмерная амплитуда импульса  $\varepsilon = eE_0 / m_e \omega_0 c$  и отношение плазменной частоты к частоте импульса в вакууме  $q_p = \omega_{pe} / \omega_0$ . В варианте, представленном на рисунке 7.1,  $\varepsilon = 2.5$ ,  $q_p = 0.1$ . Из рисунка видно, что при такой амплитуде импульса кильватерная волна является сильно нелинейной.

## 7.2. Самомодуляция правополяризованной волны в области электронного циклотронного резонанса

В настоящее время активно разрабатывается несколько различных схем ускорителей на кильватерных плазменных волнах [3]. Один из наиболее перспективных методов основан на использовании процесса самомодуляции лазерной волны. В работах [3, 6] было показано, что при



этом имеет место резонансное нарастание амплитуды кильватерной волны, позволяющее значительно повысить эффективность ускорения частиц.

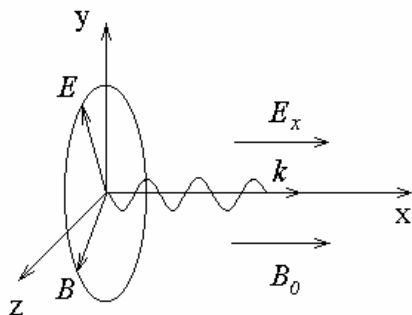
В магнитоактивной плазме процессы самофокусировки и самомодуляции электромагнитных волн, обусловленные действием пондеромоторной силы и релятивизмом, могут существенно отличаться от аналогичных процессов в изотропной плазме. При распространении правополяризованной электромагнитной волны в замагниченной плазме в области электронно-циклотронного резонанса (ЭЦР) возможен режим ускорения электронов, близкий к авторезонансному [7-8], если фазовая скорость волны близка к скорости света. Продольное движение электронов в таком режиме приводит к разделению зарядов и возникновению электрического поля, под действием которого происходит расфазировка резонансных частиц с волной.

В работе [10] с помощью одномерного релятивистского кода [5, стр. 59-64] было проведено моделирование процесса возбуждения кильватерной волны при распространении электромагнитного импульса в замагниченной плазме в области ЭЦР. Величина шага  $\Delta$  выбиралась равной  $0.1k_0^{-1}$ , а шага по времени  $\Delta t = 0.1\omega_0^{-1}$  ( $k_0$ ,  $\omega_0$  – волновое число и частота импульса в вакууме соответственно). Расчеты проводились как для неподвижных ионов, так и с учетом их движения при отношении масс  $m_i / m_e = 1840$ .

Начальная форма огибающей импульса в вакуумной области задавалась в виде

$$f(Z) = \exp\left[-\left(\frac{X - X_0}{D}\right)^2\right], \quad \text{при } X \geq X_0,$$

$$f(X) = 1, \quad \text{при } X_0 - L \leq X < X_0, \quad X = k_0 x,$$



Такой импульс имеет вид плоской волны с передним фронтом гауссова профиля и ступенчатым задним фронтом. Поперечные проекции электрического и магнитного поля импульса задавались в виде правополяризованной волны, распространяющейся вдоль оси  $x$  (рис. 7.2).

Рис. 7.2

Начальное распределение частиц соответствовало состоянию холодной плазмы с резкой границей. Все поля и характеристики плазмы считались зависящими только от координаты  $x$  вдоль направления распространения импульса. Число частиц на сеточный шаг  $\Delta$  равнялось 10.

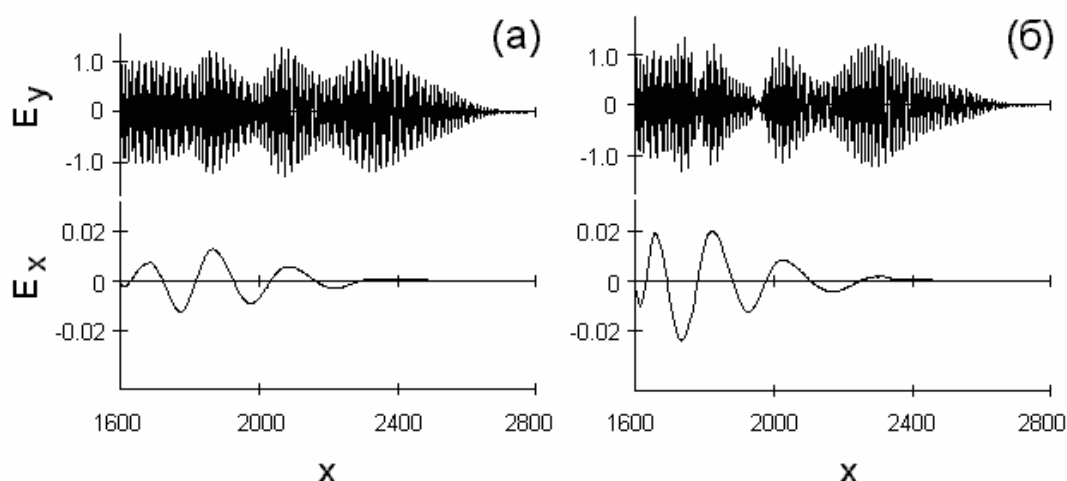


Рис. 7.3

На рисунке 7.3 представлены результаты моделирования для безразмерной амплитуды  $\varepsilon = 0.002$ , соответствующей импульсу СВЧ диапазона. Графики выведены в момент времени  $t = 1200$  (в единицах  $\omega_0^{-1}$ ) для следующих параметров моделирования:  $q_p = \omega_{pe} / \omega_0 = 0.02$ ; (а) –  $q_c = \omega_{ce} / \omega_0 = 0.97$ , (б) –  $q_c = 0.975$ . Значения полей  $E_x$ ,  $E_y$

выражены в единицах начальной амплитуды волны в вакууме. Граница плазмы расположена в точке  $Z = 1600$ . Параметры огибающей импульса:  $D = 100$ ,  $L = 1400$ .

Проведенное моделирование показало, что в результате развития модуляционной неустойчивости амплитуда кильватерной волны может достигать значений, сравнимых с амплитудой электромагнитного импульса. Из результатов численных расчетов также следует, что в рассмотренной области параметров влияние ионов на процессы резонансного взаимодействия пренебрежимо мало. Следует отметить, что для лазерного возбуждения кильватерных волн в режиме ЭЦР необходимо наличие сверхсильного магнитного поля. Такие магнитные поля могут возбуждаться при взаимодействии мощного лазерного излучения со сверхкритической плазмой [11].

### **7.3. Распространение электромагнитных солитонов поперек сильного магнитного поля в плазме**

В работе [12] были найдены солитонные решения для необыкновенной волны в плазме низкой плотности в окрестности электронного циклотронного  $\omega = \omega_{ce}$  и верхнегибридного  $\omega = \omega_{uh} = \sqrt{\omega_p^2 + \omega_{ce}^2}$  резонансов. Такая волна может, в частности, представлять собой интенсивное лазерное излучение, распространяющееся поперек внешнего магнитного поля. Присутствие магнитного поля в резонансных условиях усиливает влияние пондеромоторной силы, а также нелинейные эффекты, связанные с релятивистским изменением массы электронов. Это вызывает интенсивную самомодуляцию необыкновенной волны с последующим образованием солитонов огибающей. С помощью нелинейного дисперсионного уравнения в этой работе были исследованы

области значений амплитуд и расстройек резонанса, в которых существуют солитонные решения.

Для подтверждения полученных теоретических результатов было проведено моделирование процесса взаимодействия необыкновенной электромагнитной волны в магнитоактивной плазме в резонансных условиях. Моделирование проводилось с помощью одномерного электромагнитного кода, описанного в [5, стр. 59–64]. Начальная форма импульса в вакуумной области задавалась в виде:

$$f(X) = \exp[-(X - X_0)/L]^{20},$$

что соответствует плоской волне, ограниченной плавными фронтами. Рассматривалась линейно поляризованная волна с вектором  $\vec{E}$ , направленным вдоль оси  $y$  и перпендикулярным внешнему магнитному полю  $\vec{B}_0$ , направленному вдоль оси  $z$ .

Начальное распределение частиц соответствовало состоянию холодной плазмы с резкой границей. Все поля и характеристики плазмы считались зависящими только от координаты  $x$  вдоль направления распространения импульса. Число частиц на сеточный шаг  $\Delta$  варьировалось в пределах от 5 до 20. Величина шага была равной  $0.1k_0^{-1}$  ( $k_0$  - волновое число лазерного излучения в вакууме), а шага по времени  $\Delta t = 0.1\omega_0^{-1}$ . Расчеты проводились как для неподвижных ионов, так и с учетом их движения при отношении масс  $m_i / m_e = 1840$ .

Проведенные численные эксперименты показали, что в случае поперечного распространения в плазме низкой плотности широкий электромагнитный импульс разбивается в области электронного циклотронного и верхнегибридного резонансов на последовательность солитонов при амплитудах  $\varepsilon \leq 0.1$  (рис. 7.4). Безразмерные переменные по осям те же, что и на рисунке 7.3. Результаты выведены для момента

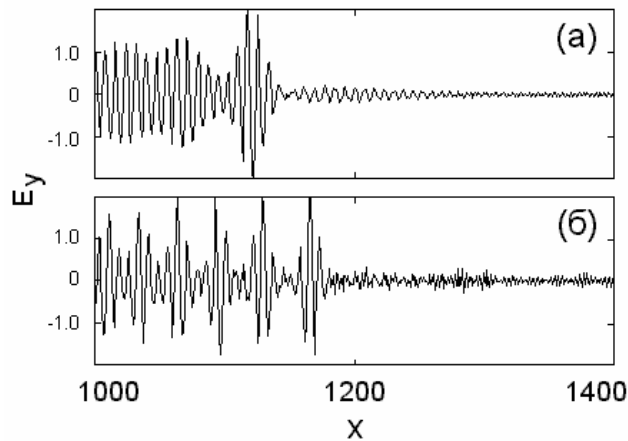


Рис. 7.4

времени  $t = 600$  при следующих значениях параметров:  $q_p = 0.4$ ,  $q_c = 0.7$ ,  $L = 370$ ; (а) –  $\varepsilon = 0.05$ , (б) –  $\varepsilon = 0.1$ .

По мере увеличения амплитуды импульса и сжатия солитонов при некотором критическом значении

амплитуды на фоне солитонной структуры начинает происходить стохастический нагрев электронной компоненты плазмы. На рисунке 7.5 представлены электронные фазовые плоскости  $u_y, x$ , где  $u_y$  – проекция релятивистского импульса в единицах  $m_e c$ . Значения параметров на

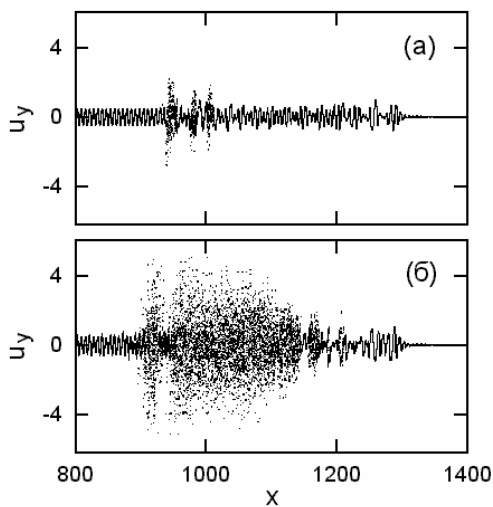


Рис. 7.5

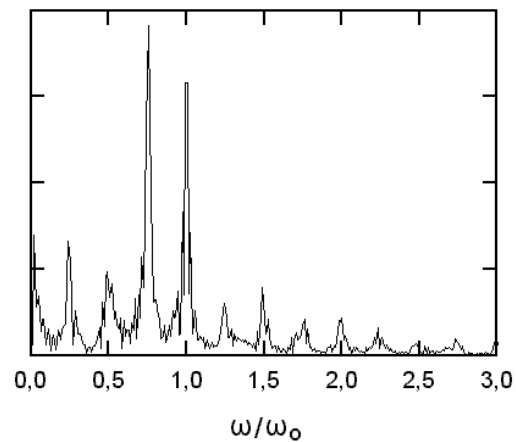


Рис. 7.6

рисунке 7.5:  $t = 600$ ,  $q_p = 0.1$ ,  $q_c = 0.9$ ; (а) -  $\varepsilon = 0.16$ , (б) -  $\varepsilon = 0.2$ . Стохастический нагрев обусловлен возникновением большого числа гармоник в спектре продольного электрического поля (рис. 7.6) и соответствующим перекрытием нелинейных резонансов [13].

В работе [14] аналитически и с помощью одномерного численного моделирования было показано, что в определенной области значений параметров  $q_p$ ,  $q_c$  необыкновенная может распадаться на две другие необыкновенные волны. В результате развития такой параметрической неустойчивости также имеет место сильный нагрев электронной компоненты плазмы.

### Список литературы к теме 7

Использованная литература:

1. Fainberg Ya. B. Proc. CERN Symp. on High Energy Accelerators and Pion Physics. 1956. V. 1, 68 p.
2. Файнберг Я.Б. Физика плазмы. 2000, т. 26, 335 с.
3. Андреев Н.Е., Горбунов Л.М. УФН. 1999, т. 169, 53 с.
4. Буланов С.В., Иновенков И.Н., Наумова Н.М., Сахаров А.С. Физика плазмы. 1990, т. 16, 764 с.
5. Туриков В.А., Ульяницкий И.В., Умнов А.М. Численное моделирование плазменных процессов. – М.: Изд-во РУДН, 2003.
6. Андреев Н.Е., Горбунов Л.М., Кирсанов В.И., Погосова А.А., Рамазашвили Р.Р. Письма в ЖЭТФ. 1992, т. 55, 550 с.
7. Давыдовский В.Я. ЖЭТФ. 1962. Т. 43. № 8. 886 с.
8. Милантьев В.П. УФН. 1997. Т.167. № 1. 3 с.
9. Krasovitskiy V.B., Dorofeenko V.G., Sotnikov V.I., Bauer B. Phys. Plasmas. 2004, v. 11, 724 p.
10. Милантьев В.П., Туриков В.А. Вопросы атомной науки и техники. 2006, № 5, 185 с.
11. Wilks S.C., Kruer W.L., Tabak M., Langdon A.B. Phys. Rev. Letters. 1992, v. 69, № 9, 1383 p.

12. Krasovitskiy V.B., Turikov V.A., Sotnikov V.I. Phys. Plasmas, 2007, v. 14, 092108.
13. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. – М.: Наука, 1984. 213 с.
14. Красовицкий В.Б., Дорофеев В.Г., Туриков В.А., Сотников В.И. Физика плазмы. 2006, Т. 32, 26 с.

Рекомендуемая литература:

1. Mourou G.A., Tajima T. Bulanov S.V. Rev. Mod. Phys. 2006, v. 78, 309 p.
2. Силин В.П. Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму. – М.: Наука, 1973.
3. Чен Ф.. Введение в физику плазмы. – М.: Мир, 1987.
4. Кингсеп А.С.. Введение в нелинейную физику плазмы. – М.: Изд-во МФТИ, 1996.
5. Бэдсел Ч., Ленгдон А. Физика плазмы и численное моделирование. – М.: Энергоатомиздат, 1989.

## Тема 8. Метод частиц в ячейке для двумерных и трехмерных плазменных процессов

### 8.1. Общая схема метода для электростатических процессов

Общая схема метода частиц в ячейке для двумерных и трехмерных электростатических моделей по своей структуре аналогична схеме для одномерных моделей, однако ее реализация имеет ряд особенностей, связанных с решением конкретных задач.

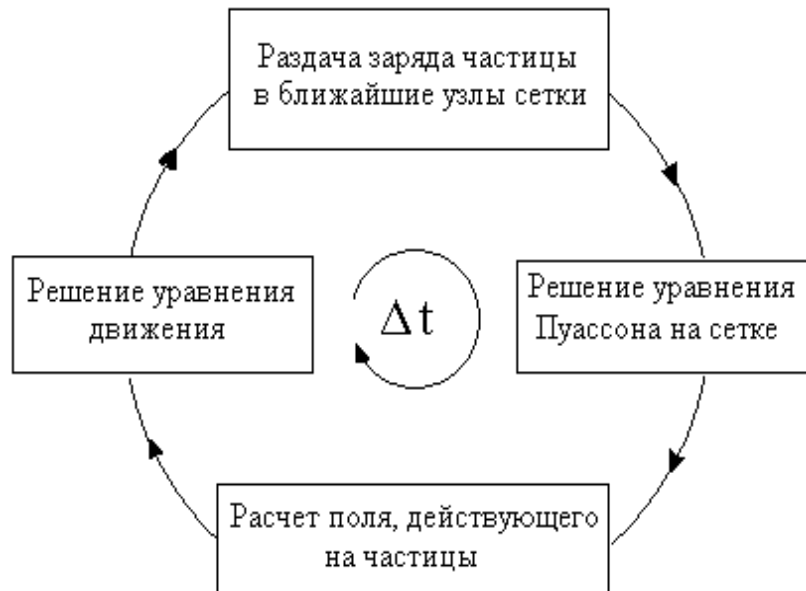


Рис. 8.1. Временной цикл схемы метода частиц в ячейке

Цикл вычислений состоит из следующих этапов (рис. 8.1.):

1. По заданному пространственному распределению частиц плазмы (электронов и ионов) в начальный момент времени  $t=0$  рассчитывается плотность заряда в узлах заданной пространственной сетки (рис. 8.2):  $\rho(i,k) \equiv \rho(i\Delta X, j\Delta Y)$ . Здесь  $i, j$  – номера узлов в направлениях  $X, Y$  соответственно, а  $\Delta X, \Delta Y$  – пространственные шаги в этих направлениях;  $i = 1, \dots, N$ ;  $j = 1, \dots, M$ , где  $N$  и  $M$  узлов в направлениях  $X, Y$



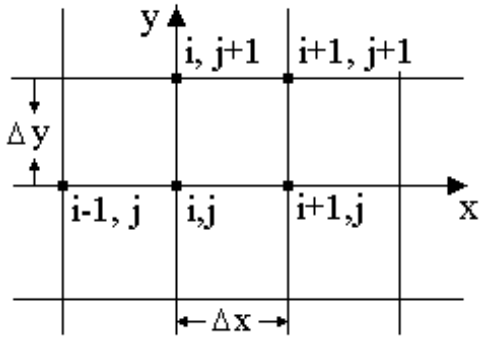


Рис. 8.2. Типичная двумерная прямоугольная сетка

соответственно. Плотности зарядов в узлах сетки находятся с помощью процедуры раздачи заряда по четырем ближайшим к частице узлам.

2. На стационарной пространственной сетке решается уравнение Пуассона, конечно-разностная форма которого имеет вид:

$$\frac{\Phi(i+1, j) - 2\Phi(i, j) + \Phi(i-1, j))}{(\Delta x)^2} + \frac{\Phi(i, j+1) - 2\Phi(i, j) + \Phi(i, j-1))}{(\Delta y)^2} = -4\pi\rho(i, j) . \quad (8.1)$$

Граничные условия для решения уравнения Пуассона определяются физической постановкой задачи.

3. Самосогласованное электрическое поле плазмы вычисляется с помощью взятия разностных производных от сеточной функции потенциала:

$$E_{i,j,x} = \frac{\Phi(i-1, j) - \Phi(i+1, j))}{2\Delta x} \quad (8.2)$$

$$E_{i,j,y} = \frac{\Phi(i, j-1) - \Phi(i, j+1))}{2\Delta y} .$$

4. Следующим шагом является интегрирование уравнений движения частиц плазмы.

В дальнейшем цикл вычислений повторяется.

Таким образом, в представленной схеме реализуются последовательность вычислений:

$$x_k^n, y_k^n \rightarrow \rho_{ij} \rightarrow \Phi_{ij} \rightarrow E_{ij} \rightarrow x_k^{n+1}, y_k^{n+1},$$

в результате которых частицы продвигаются на один временной шаг.

## 8.2. Вычисление распределения плотности заряда

В двумерных и трехмерных моделях, как правило, не используют метод ближайшего пространственного узла *NGP*, поскольку он является грубым. Наиболее экономичными и часто используемыми являются *методы билинейной интерполяции* и «*взвешивания по площадям*». Вклад заряда каждой частицы в ближайшие узлы пространственной сетки определяется следующей процедурой:

$$\begin{aligned}\rho_{i,j} &= \rho_k \frac{(\Delta x - x)(\Delta y - y)}{\Delta x \Delta y}, \\ \rho_{i+1,j} &= \rho_k \frac{x(\Delta y - y)}{\Delta x \Delta y}, \\ \rho_{i+1,j+1} &= \rho_k \frac{xy}{\Delta x \Delta y}, \\ \rho_{i,j+1} &= \rho_k \frac{(\Delta x - x)y}{\Delta x \Delta y},\end{aligned}\tag{8.3}$$

где  $\rho_k$  – плотность заряда  $k$ -ой частицы.

Это процедура взвешивания первого порядка в распределении заряда частиц. Следует отметить, что к такому же результату приводит распределение заряда по ближайшим узлам с помощью билинейной интерполяции.

Геометрическое представление «взвешивания по площадям» и метода билинейной интерполяции представлено на рисунках 8.3 и 8.4. На

рисунке 8.3 частица интерпретируется в виде прямоугольного облака, размер которого совпадает с размером ячейки (метод “cloud in cell” или CIC). Узлам A, B, C и D приписываются плотности зарядов, пропорциональные площадям a, b, c и d, соответственно.

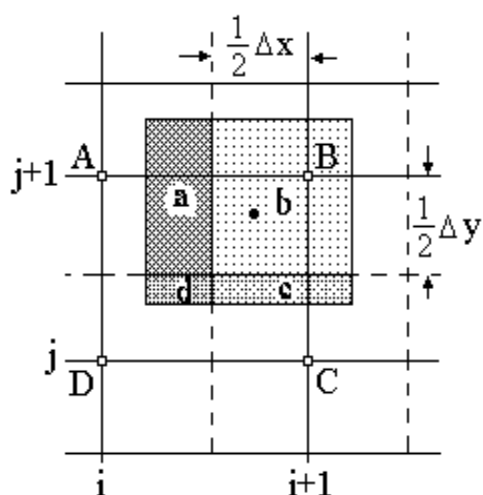


Рис. 8.3. Взвешивание по площадям в методе CIC

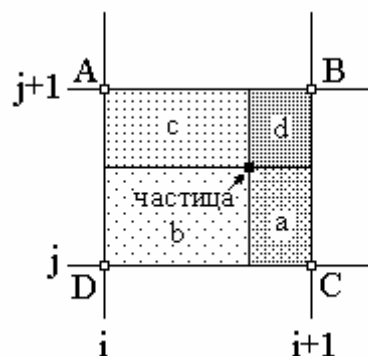


Рис. 8.4. Билинейная интерполяция в методе PIC

На рисунке 8.4 представлена интерпретация билинейной интерполяции в методе «particle in cell» или PIC. Как следует из рисунков, оба метода фактически являются идентичными, различна лишь интерпретация моделируемой частицы.

Использование процедуры взвешивания более высоких порядков часто приводит к значительному увеличению числа операций с плавающей запятой (флопов) на один временной шаг, поэтому в задачах с большим числом временных шагов их применение не всегда оправдано.

Отметим, что после решения уравнения Пуассона и расчета электрического поля в узлах сетки определение поля, действующего на частицу, должно проводиться тем же методом, что и раздача заряда в узлы сетки.

Другие этапы моделирования методом частиц в ячейке – нахождение самосогласованного электрического поля, интегрирование уравнений движения, а также вопросы, связанные с формированием начального распределения частиц и обезразмериванием переменных – подробно рассмотрены для одномерного случая в темах 4, 6. Многие из рассмотренных выше методов и схем могут быть обобщены для двумерного и трехмерного моделирования. Однако, несмотря на ряд общих черт, каждая модель требует индивидуального подхода, определяемого физической постановкой задачи.

### **8.3. Электромагнитные алгоритмы, непосредственно использующие значения электрического и магнитного полей**

Собственные электрическое и магнитное поля плазмы рассчитываются с использованием их производных по времени, определяемых из уравнений Максвелла:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -c \cdot \text{rot} \vec{E}, \quad (8.4)$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = c \cdot \text{rot} \vec{B} - \vec{J}. \quad (8.5)$$

Эти уравнения записаны в рационализированной СГС (или Хевисайда–Лоренца) системе единиц, в которой исключены почти все проявления множителей  $4\pi$  в процессе постановки задачи и физической интерпретации результатов.

Определяя поля в точках, показанных на рисунке 8.5, можно записать разностные аналоги уравнений Максвелла, имеющих второй порядок точности по пространству и времени. Все производные являются центрированными разностными производными. В качестве примера

запишем производную по времени:

$$(\partial_t E_x)_{i+1/2,j}^{n+1/2} \equiv \frac{E_{x,i+1/2,j}^{n+1} - E_{x,i+1/2,j}^n}{\Delta t}, \quad (8.6)$$

где  $E_{x,i+1/2,j}^{n+1} \equiv E_x([i+1/2]\Delta x, j\Delta y, n\Delta t)$ .

Аналогично определяются  $\partial_x$  и  $\partial_y$ . Градиент  $\nabla$  переходит в  $\partial_x$ . Такое обозначение будет полезно в дальнейшем вследствие того, что эти операторы, применяемые к полям, определенным на пространственно-временной сетке, перестановочны. Следовательно, с разностными уравнениями можно обращаться точно таким же образом, как и с соответствующими уравнениями Максвелла.

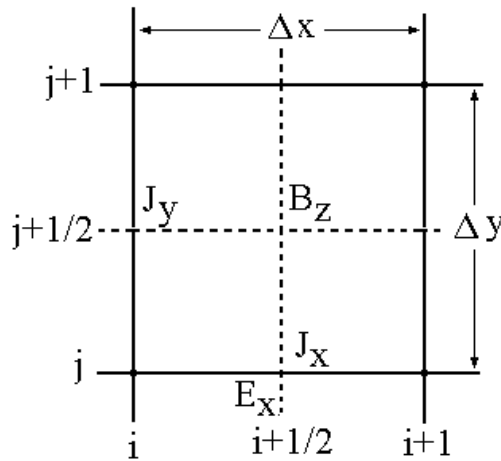


Рис. 8.5. Пространственное расположение на двумерной сетке полей, используемых для интегрирования уравнений Максвелла

Разностные уравнения Максвелла имеют вид [1, стр. 343]:

$$(\partial_t B_z)_{i+1/2,j+1/2}^n = -c(\partial_x E_y - \partial_y E_x)_{i+1/2,j+1/2}^n, \quad (8.7)$$

$$(\partial_t E_x)_{i+1/2,j}^{n+1/2} = c(\partial_y B_z - J_x)_{i+1/2,j}^{n+1/2},$$

$$(\partial_t E_y)_{i,j+1/2}^{n+1/2} = (-c\partial_x B_z - J_y)_{i,j+1/2}^{n+1/2}. \quad (8.8)$$

Если  $B_z^{n-1/2}$  и  $E^n$  известны, то уравнение (8.7) определяет  $B_z^{n+1/2}$ .

Подобным же образом пересчитывается электрическое поле. Например, уравнение (8.8) записывается в виде:

$$\begin{aligned} \frac{E_{x,i+1/2,j}^{n+1} - E_{x,i+1/2,j}^n}{\Delta t} = \\ = c \frac{B_{z,i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - B_{z,i+1/2,j-1/2}^{n+1/2}}{\Delta y} - J_{x,i+1/2,j}^{n+1/2}. \end{aligned} \quad (8.8a)$$

Это уравнение может быть использовано поочередно, вначале для пересчета  $E$ , а затем  $B$ . На каждом временном шаге новые значения поля переписываются в память на место старых. В большинстве случаев нет необходимости сохранять поля больше, чем для одного момента времени.

Можно получить информацию о точности и устойчивости схемы, если рассмотреть плазменные электромагнитные волны в вакууме и их воспроизведение приведенной схемой. Предполагая, что поля имеют вид  $\Psi_x = (\sin k_x \Delta x / 2) / (\Delta x / 2)$  и подставляя их в разностные уравнения, находим

$$\begin{aligned} \Omega \vec{B} &= c \vec{\Psi} \times \vec{E} \\ \Omega \vec{E} &= -c \vec{\Psi} \times \vec{B}, \end{aligned}$$

где  $\Omega = (\sin \omega \Delta t / 2) / (\Delta t / 2)$ . При предельном переходе от дискретного описания к непрерывному  $\Omega$  и  $\vec{\Psi}$  стремятся к  $\omega$  и  $\vec{k}$ . Исключение  $E$  и  $B$  приводит к соотношению

$$\Omega^2 = c^2 \Psi^2. \quad (8.9)$$

Можно легко проверить, что между  $E$  и  $B$  нет никаких расхождений по фазе или амплитуде и что отсутствует какое-либо затухание или нарастание колебаний ( $\omega$  действительна), если выполняется **условие Куранта** [2, стр. 169]:

$$\Delta t^{-2} > c^2 (\Delta x^{-2} + \Delta y^{-2}). \quad (8.10)$$

Погрешности в величине  $\omega$  и относительных направлениях полей и  $\vec{k}$  имеют второй порядок точности по  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  и  $\Delta t$ . Все эти свойства являются прямым следствием центрирования разностных производных по пространству и времени. Достижение подобной точности с использованием нецентрированных разностных схем потребовало бы существенно более сложного алгоритма.

Когда условие (8.10) нарушается,  $\sin^2(\omega \Delta t / 2)$  превышает единицу для  $k_x \Delta x$ ,  $k_y \Delta y$  близких к  $\pi$ . Корни являются теперь комплексными, причем один корень соответствует нарастанию, которое может быть очень быстрым.

В двумерном случае компоненты полей  $E_z$ ,  $B_z$  и  $B_y$  не связаны с компонентами  $B_z$ ,  $E_x$  и  $E_y$  посредством уравнений Максвелла. Вследствие этого узлы разностных сеток для двух совокупностей полей могут иметь любое желаемое относительное расположение. Выбираются одинаковые узлы для  $E_z$  и  $J_z$  вместе с  $B_z$ ,  $B_x$  вместе с  $E_x$  и  $B_y$  вместе с  $E_y$ . Эта процедура делает аналогичными индексирование программы и граничные условия.

Имеются еще два уравнения Максвелла. Разностные уравнения обладают свойством дифференциальных уравнений, т.е. если  $\text{div} \vec{E}$  и  $\text{div} \vec{B}$  корректно определены в начальный момент, то они остаются неизменными во все остальные временные моменты, т.е.

$$\partial_t (\partial_x \cdot \vec{B}) = \partial_x \cdot (\partial_t \vec{B}) = c \partial_x \cdot \partial_x \times \vec{E} \equiv 0.$$

Аналогично

$$\partial_t (\partial_x \cdot \vec{E} - \rho) = \partial_x \cdot \vec{J} - \partial_t \rho.$$

#### 8.4. Взаимодействие частиц и полей

При интегрировании с учетом взаимодействия полей и частиц необходимо связывать друг с другом величины, определенные в различные моменты времени и в различных точках пространства. Магнитное поле, определенное уравнениями поля на полуцелых временных слоях, для уравнения движения частиц требуется в целые моменты времени. Поскольку для нахождения значений  $B$  в более поздние моменты времени по отношению к  $E$  можно просто усреднить  $B$  по времени [1, стр. 356]:

$$\vec{B}^n = \frac{1}{2}(\vec{B}^{n-1/2} + \vec{B}^{n+1/2}). \quad (8.11)$$

Это соотношение должно обязательно использоваться при интегрировании уравнения движения частиц, а также в некоторых диагностиках. На практике усреднение проводится не в явном виде. Для того чтобы избежать использования дополнительной памяти, интегрирование  $B$  разбивается на два шага. На последнем шаге  $B$  пересчитывается лишь частично [1, стр. 357]:

$$\vec{B}^n = \vec{B}^{n-1/2} - \frac{c\Delta t}{2} \partial_x \times \vec{E}^n. \quad (8.12)$$

Уравнения движения частиц интегрируются, а затем  $B$  таким же способом пересчитывается на  $\vec{B}^{n+1/2}$  в качестве первого шага следующего интегрирования уравнения поля.

Для расчета плотности тока по координатам и скоростям частиц, чтобы получить центрированную по времени плотность тока  $\vec{J}^{n+1/2}$ , вместе с  $\vec{v}^{n+1/2}$  используется взвешенное среднее двух координат  $\vec{x}^n$  и  $\vec{x}^{n+1}$ . Другой способ состоит в использовании весов для координаты  $\vec{x}^{n+1/2} = \vec{x}^n + \vec{v}^{n+1/2} \Delta t / 2$ .

Можно легко проверить, что никакая плотность тока не



удовлетворяет уравнению непрерывности с величиной  $\rho$ , вычисленной любыми методами, но зависящей только от положений частиц в текущий момент. В этом можно убедиться даже в пределе  $\Delta t \rightarrow 0$ , рассматривая, например, частицу, которая движется по окружности внутри четверти ячейки. После каждого оборота  $\nabla \cdot \vec{J}$  изменяется на ненулевую среднюю величину, хотя величина  $\rho$  та же самая.

Для уменьшения нарастания шума может быть использован **метод Бориса**. Плотность тока вычисляется, как описано выше. Затем рассчитывается поправка к  $J$ , которая является чисто продольной и такой, что подправленная плотность тока  $J$  удовлетворяет уравнению непрерывности. Использование этого тока для пересчета  $E$  обеспечивает выполнение уравнения Пуассона. Указанная поправка к  $J$  имеет вид  $-\nabla \xi$ , где [1, стр. 358]

$$-\nabla^2 \xi = \nabla \cdot J + \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Этот алгоритм центрирован по времени и поэтому имеет второй порядок точности. Отметим, что разностная аппроксимация лапласиана, согласованная с операторами градиента и дивергенции, представляет собой просто пятиточечный оператор  $\partial_x^2$ .

С вычислительной точки зрения  $E$  удобнее пересчитывать, используя неподправленное значение  $J$ , а впоследствии скорректировать  $E$  на величину  $-\nabla \delta \varphi$ , где  $\partial_t \delta \varphi = \xi$  или [1, стр. 358]

$$-\nabla^2 \delta \varphi = \rho - \nabla \cdot \vec{E}. \quad (8.13)$$

Эта, на первый взгляд, асимметричная процедура приводит к точно таким же окончательным выражениям для полей, что и предыдущий, более явно центрированный по времени алгоритм.

Электрическое поле в месте нахождения частицы можно получить

путем интерполяции по полевой сетке. Наиболее очевидным является раздельная интерполяция по каждой из трех совокупностей узлов, показанных на рисунке 8.5, как и делалось в некоторых ранних программах. Однако для программы движения частиц это неудобно. Поскольку она занимает большую часть времени вычислений, в более поздних программах поля заранее переопределяются на единственной совокупности сеточных узлов. Это можно сделать просто усреднением по пространству сеточных значений  $\rho$ . Имеются и другие преимущества: продольная составляющая  $\vec{E}$  теперь такая же, как и в консервативных по импульсу электростатических программах, а дополнительное сглаживание уменьшает коротковолновый шум. Упрощается также диагностика результатов вычислений. Такие же преимущества можно получить и в программе, использующей  $\vec{A}$  и  $\varphi$ , если только изменить разностную аппроксимацию в процедуре определения  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  по  $\vec{A}$  и  $\varphi$ .

После интегрирования уравнений движения частиц значения полей на полевой сетке могли бы быть восстановлены путем дальнейшего усреднения по пространству. Однако это привело бы к недопустимо быстрому для наших приложений затуханию электромагнитных волн. Борис отметил [1, стр. 348] что, например, первоначальное значение  $E_x$  можно легко восстановить по усредненному  $E_x$ , если перед усреднением запомнить значения  $E_x$  на одной стороне слоя. Простейшая процедура для  $B_z$  состоит вначале в «разусреднении» по  $x$  вместе с  $E_x$ , а потом по  $y$  вместе с  $E_y$ . Таким способом мы можем переопределить поля на общей сетке и восстановить их значения без заметного повышения требований к памяти компьютера.

Так же как и при переопределении полевых сеток, удобно задать  $J$  посредством взвешивания по области на единственной совокупности

сеточных узлов, расположенных в нашем случае вместе с  $\rho$ , а затем усреднить по пространству с тем, чтобы получить нужные для интегрирования уравнений поля значения в точках, показанных на рисунке 8.5.

В ряде задач для полей необходимо использовать более мелкие временные шаги, чем для частиц. Если рассматривать разумный набор параметров для некоторых задач, в которых  $c\Delta t \approx \Delta x/2$ , дебаевская длина  $\lambda_D = \Delta x/2$  и тепловая скорость  $v_t = c/20$ , то  $\omega_p \Delta t = 0.05$ . Величина этого временного шага во многих приложениях меньше, чем требуется для интегрирования уравнений движения частиц. Поскольку это дорогостоящая процедура, то выгодно частицы пересчитывать реже полей. Для того чтобы пояснить это и подвести итог сказанному в этом разделе, опишем в общих чертах действия, проводимые на одном временном шаге интегрирования уравнений движения частиц для случая, когда поля пересчитываются в два раза чаще [1, стр. 359]. Верхний индекс  $n$  обозначает номер временного слоя для частиц.

Начинаем с  $\vec{E}^n$ ,  $\vec{B}^n$ ,  $\vec{x}^n$  и  $\vec{u}^{n-1/2}$ .

0. Усредняем поля на сетке для частиц.

1. Пересчитываем  $\vec{u}^{n-1/2}$  на  $\vec{u}^{n+1/2}$ ,  $\vec{x}^n$  на  $\vec{x}^{n+1}$ ; образуем  $\vec{J}^{n+1/2}$  и  $\rho^{n+1}$ .

2. Усредняем  $\vec{J}$  на полевой сетке. Восстанавливаем  $\vec{E}^n$  и  $\vec{B}^n$  на полевой сетке.

3. Пересчитываем  $\vec{B}^n$  на  $\vec{B}^{n+1/4}$ .

4. Пересчитываем  $\vec{E}^n$  на  $\vec{E}^{n+1/2}$ , используя  $\vec{J}^{n+1/2}$ .

5. Пересчитываем  $\vec{B}^{n+1/4}$  на  $\vec{B}^{n+3/4}$ .

6. Пересчитываем  $\vec{E}^{n+1/2}$  на  $\vec{E}^{n+1}$ , используя  $\vec{J}^{n+1/2}$ .

7. Пересчитываем  $\vec{B}^{n+3/4}$  на  $\vec{B}^{n+1}$ .

8. Подправляем  $\nabla \cdot \vec{E}^{n+1}$ , используя  $\rho^{n+1}$ .

Проверяя центрирование по времени, заметим, что третий и седьмой, а также четвертый и шестой шаги симметричны. На продольную составляющую  $\vec{E}^{n+1}$  влияет только  $\vec{J}^{n+1/2}$ , поэтому несущественно, сколько используется дробных временных шагов для полей, чтобы добраться до  $n+1$ -го слоя. Следовательно, доводы, приведенные ранее в обоснование того, что поправка к дивергенции фактически не затрагивает центрирования по времени, остаются в силе.

## 8.5. Граничные условия

Как и с электростатическими программами, можно провести много интересных исследований, моделируя систему, периодическую по  $x$  и  $y$ . Принципиальных проблем, связанных с граничными условиями, в этом случае нет, за некоторыми исключениями. Граничные условия на свободной границе определяются спецификой конкретной задачи.

Граничные условия для частиц. При периодических граничных условиях, когда координата  $y$  частицы после ее пересчета превышает  $L_y$ , то из координаты частицы просто вычитается  $L_y$ . И наоборот, если пересчитанное значение  $y$  меньше нуля, тогда прибавляем  $L_y$ . Иными словами, частица, покинувшая плазму, на правой границе появляется на левой границе с тем же значением импульса.

В задачах со свободной границей возможны следующие варианты:

1. Частица удаляется. Вклад в плотность заряда от «потерянных частиц» в месте их последнего расположения запоминается.
2. Частица удаляется, как и в первом варианте, а новая частица вводится в систему со средней скоростью, соответствующей заданной температуре.
3. Частица упруго отражается от стенки камеры.

Второй и третий вариант позволяет смоделировать вакуумную камеру и предотвратить расширение плазменного слоя. Возможны комбинированные варианты, учитывающие реальные физические приграничные процессы.

## 8.6. Диагностики

Для понимания результатов численного моделирования необходим набор диагностик. Некоторые из них очевидны, значение других оценивается исходя из опыта решения отдельных задач с этими диагностиками и без них. Диагностики являются наиболее часто меняемыми частями программы, поэтому должны быть достаточно гибкими.

### 1. Частицы

Наиболее привычной диагностикой частиц является диаграмма рассеяния в фазовом пространстве. Точки наносятся в местах, определяемых двумя координатами частицы, например  $u_x$ , и  $u_y$ . Часто эти диаграммы позволяют установить прямое соответствие с теорией. Хорошо известным примером является захват частиц волнами. Важно иметь возможность наносить одну линейную комбинацию координат частицы в зависимости от другой, пропуская частицы, не удовлетворяющие двум линейным связям. Например, изображение зависимости  $u_x - u_y$  от  $x - y$  позволит воспроизвести захват частиц с  $a < x < b$  волнами, распространяющимися под углом  $45^\circ$  в слое.

### 2. Поля

Очевидными диагностиками здесь являются линии уровня для компонент электрических и магнитных полей а также потенциалов. Полезно иметь изображения векторных полей компонент  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  (совокупость стрелок, направление и длина которых характеризует

значение поля в данной точке пространства), а также их линейных комбинаций.

### 3. Изменения во времени

Для создания эволюции процесса необходимо на каждом временном шаге запоминать большое число различных величин. В основном это энергии и импульсы полей и частиц плазмы. Как правило, невозможно точно предугадать, какие рисунки будут нужнее всего для понимания хода вычислений. По сравнению с электростатической программой здесь имеется во много раз больше контролируемых величин. Для того чтобы с первого раза получить нужную информацию, много внимания уделяется разумному выбору диагностики, причем лучше ошибиться с включением какой-нибудь диагностики, а не с ее исключением.

### **Список литературы к теме 8**

Использованная литература:

1. Вычислительные методы в физике. Управляемый термоядерный синтез. Под ред. Дж. Киллина. – М.: Мир, 1980.
2. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. – М.: Изд-во МФТИ, 1994.

Рекомендуемая литература:

1. Бэдсел Ч., Ленгдон А. Физика плазмы и численное моделирование. – М.: Энергоатомиздат, 1989.
2. Хокни Р., Иствуд Дж. Численное моделирование методом частиц. – М.: Мир, 1987.
3. Сигов Ю.С. Вычислительный эксперимент: мост между прошлым и будущим физики плазмы. – М.: Физматлит, 2001.
4. Туриков В.А., Ульяницкий И.В., Умнов А.М. Численное моделирование плазменных процессов. М.: Изд-во РУДН, 2003.

## Тема 9. Примеры вычислительного эксперимента для трехмерных плазменных систем

### 9.1. Разработка сложных многомерных программ численного моделирования

Построение двумерных и, в особенности, трехмерных численных моделей и создание крупных программ, предназначенных для проведения вычислительных экспериментов, состоит из следующих основных этапов [1].

Разработка спецификации. Спецификация содержит постановку задачи, анализ этой задачи и подробное описание действий, которые должна выполнить программа. В *спецификации* отражаются:

- предназначение программы, автор программы, сведения об интерфейсе;
- состав входных, выходных и промежуточных данных;
- список сообщений, выдаваемых пользователю;
- какие ограничения имеет программа (например, по числу элементов);
- особые ситуации (например, вывод контрольной точки);
- список документации по программе;
- перспективы развития программы.

Проектирование программы. На этапе *проектирования* создается *структура* программы, и для каждого фрагмента выбираются известные или разрабатываются новые алгоритмы. Алгоритмы исследуются на предмет способности получать требуемые результаты и на предмет эффективности для данного вычислительного эксперимента. В настоящее время разработано большое число эффективных алгоритмов, и создателю программы следует провести тщательный мониторинг, прежде чем тратить

силы на «изобретение велосипеда». Существует большое количество библиотек как в исходном, так и в объектном видах (см., например, [2]), которые могут быть адаптированы к вновь разрабатываемым программам.

Параллельно с разработкой алгоритмов решаются *вопросы организации данных*, то есть выделяются данные стандартных типов и способы их представления (скаляр или массив). Это зависит от языка программирования, который может быть объектно-ориентированным или модульным. Заметим, что скорость выполнения расчетов на современных компьютерах существенно зависит не только от их быстродействия, но и от организации данных [1]. Для каждого фрагмента программы на этом этапе полезно создавать полные спецификации.

Запись программы на языке программирования (кодирование). *Кодирование* после разработки проекта программы и спецификаций является достаточно простой задачей. Это написание каждого фрагмента программы на используемом языке (языках) программирования. Иногда авторы программ игнорируют первые два этапа, но в этом случае они неявно выносятся на этап кодирования со всеми вытекающими отсюда последствиями. Однако для сложных задач игнорирование описанных выше этапов недопустимо.

Тестирование и отладка программы. Тестирование – это запуск отдельного фрагмента или программы в целом с целью выявления ошибок. Отладка – процесс локализации и исправления ошибок. Результатом тестирования должно быть соответствие разработанных фрагментов сформулированным требованиям, отраженным в спецификациях. Для тестирования программы (фрагмента) создаются специальные тестовые наборы входных данных, при которых можно получить заранее известные или ожидаемые результаты.

Если тестируемый фрагмент, в свою очередь, вызывает другие фрагменты, работоспособность которых еще не проверена, эти фрагменты



заменяются специальными, простыми программами, так называемыми *заглушками*.

*Тестирование*, как правило, начинается с фрагментов низшего уровня, тогда при тестировании фрагментов более высокого уровня будут вызывать уже проверенные фрагменты низкого уровня. Такое тестирование называется восходящим. Тестирование, кроме правильности работы отдельных фрагментов программы и программы в целом, позволяет определить узкие места программы, например, определить, что тот или иной алгоритм, хотя и дает нужные результаты, но не является экономичным. На этом этапе следует сформулировать предложения по улучшению программы. После анализа результатов тестирования, как правило, следует этап доработки программы.

Результатом предыдущих этапов является программный продукт, точнее говоря, 1-ая версия продукта.

Поддержка программы в процессе эксплуатации имеет целью устранения выявленных пользователями ошибок и адаптацию программы к условиям ее эксплуатации. Кроме того, в процессе эксплуатации программы накапливается материал для последующего развития и разработки следующих версий программы.

## **9.2. Плазма, удерживаемая в зеркальной магнитной ловушке в условиях электронного циклотронного резонанса**

Трехмерное моделирование в основном проводится для изучения свойств и характеристик плазмы действующих плазменных установок, а также при проектировании новых установок.

Рассмотрим построение трехмерной электростатической численной модели и основные этапы проведения вычислительного эксперимента на примере моделирования нагрева плазмы, удерживаемой в зеркальной

магнитной ловушке, в условиях электронного циклотронного резонанса (ЭЦР).

Зеркальная магнитная ловушка (пробкотрон) как устройство для удержания плазмы была предложена в середине прошлого века (1952 г.) советским ученым Г.И. Будкером и независимо от него Р. Постом и Х. Йорком (США).

В условиях ЭЦР циклотронная частота вращения электрона  $\omega_{ce} = eB/(m_0c) = \omega$ . Здесь  $\omega$  – частота осциллирующего электрического поля,  $B$  – индукция магнитного поля,  $e$  и  $m_0$  – заряд и масса покоя электрона соответственно,  $c$  – скорость света в вакууме.

Начальный период исследований плазмы, удерживаемой в зеркальной магнитной ловушке в условиях ЭЦР, был связан с проблемой управляемого термоядерного синтеза (УТС). Несмотря на то, что физика процессов, протекающих в плазме, удерживаемой в зеркальной ловушке, хорошо изучена, использование ловушек такого типа не потеряло своей актуальности. Это связано с возможностью создания на их основе компактных источников частиц и излучений.

Рассмотрим моделирование плазмы в зеркальной ловушке – источнике тормозного излучения.

### **9.2.1. Параметры экспериментальной установки и основные параметры численной модели**

Основные элементы экспериментальной установки [3] представлены на рисунке 9.1.

Вакуумный цилиндрический резонатор с геометрическими размерами: длина –  $L = 8-9$  см, диаметр  $D = 6$  см, помещен в магнитное поле пробочной конфигурации, создаваемое двумя осесимметричными катушками (2). В резонаторе возбуждалось СВЧ поле на частоте  $f=2.4$  ГГц.

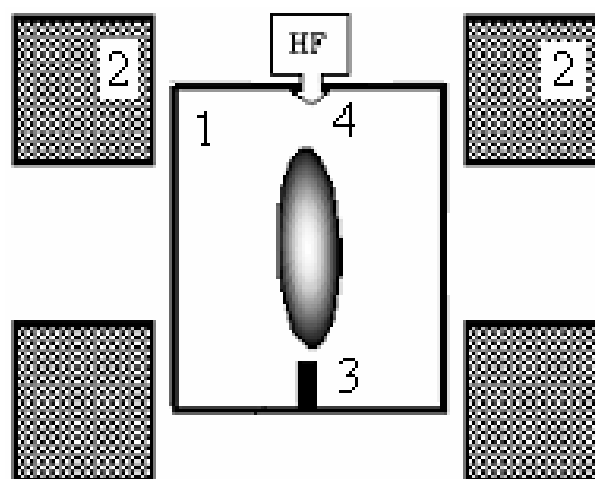


Рис. 9.1. Схема экспериментальной установки. 1 –  $TE_{111}$  резонатор; 2 – магнитные катушки; 3 – мишень; 4 – ввод СВЧ

Для нагрева плазмы использовался магнетронный генератор с выходной мощностью до 1 кВт, что соответствует амплитуде напряженности электрического СВЧ-поля  $E=3$  кВ/см для ненагруженного резонатора. Мода колебаний СВЧ-поля в резонаторе –  $TE_{111}$ . За счет подвижности одной из торцевых стенок резонатора в эксперименте удавалось осуществлять его тонкую настройку и поддерживать резонансные условия при наличии плазмы и других элементов, приводящих к расстройке резонанса. Изменение тока, текущего в обмотках катушек, позволяет изменять величину индукции магнитного поля в ловушке при сохранении продольного профиля магнитного поля.

Основные параметры численной модели (геометрические размеры вакуумной камеры, конфигурация магнитного поля, мода СВЧ-колебаний, амплитуда напряженности СВЧ-поля) выбираются в соответствии с параметрами описанной выше экспериментальной установки. Плотность плазмы, как показали результаты экспериментов, варьировалась в пределах

$10^9\text{--}10^{10}\text{ см}^{-3}$ , а электронная температура составляла несколько кэВ. Для такой плазмы дебаевский радиус  $\lambda_D$  варьируется от 5 мм до 1.5 см.

Таким образом, основными входными параметрами для численной модели являлись следующие величины:  $L$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $\omega = 2\pi \cdot f$ , мода СВЧ колебаний  $TE_{111}$  и дебаевская длина –  $\lambda_D$ .

### 9.2.2. Основные этапы создания численной модели

#### 1. Расчет размеров пространственной сетки и общего числа моделируемых частиц

Несмотря на цилиндрическую симметрию экспериментальной установки, в численной модели будем использовать декартовы системы координат для решения уравнений движения заряженных частиц и решения уравнения Пуассона. Этот выбор обусловлен экономичностью и высокой точностью схем, которые будут использованы для решения этих уравнений.

Первым шагом в создании численной модели является оценка числа узлов сетки в одном направлении  $N = \frac{D}{\lambda_D} + 1$  и общего числа

моделируемых частиц (электронов и ионов)  $N_t = \frac{\pi D^2 \cdot L}{4\lambda_D^3} \cdot N_y$ , где  $N_y$  –

число частиц в одной ячейке. Учитывая параметры резонатора, получим  $N = 25$ . Полагая, что в ячейке должно быть не менее 40 частиц (20 электронов и 20 ионов), получим  $N_t \approx 3 \cdot 10^5$ . Однако, учитывая, что в эксперименте плазма сосредоточена в объеме в 3–4 раза меньшем, чем объем резонатора, можно ограничиться  $N_t = 1 \cdot 10^5$ .

Заметим, что для решения уравнения Пуассона необходима сетка с большим количеством узлов (не менее 64x64x32), что связано с использованием периодических граничных условий в направлениях  $x$  и  $y$ .

## 2. Расчет внешних полей

Магнитное поле, создаваемое осесимметричными катушками, рассчитывается на той же сетке, что и уравнение Пуассона. Расчет магнитного поля проводится с помощью программы, описанной в [4]. В случае слабонеоднородного поля можно воспользоваться параксиальным приближением. Магнитное поле в точках расположения частиц рассчитывается с помощью процедуры билинейной интерполяции, обобщенной на трехмерный случай (см. Тему 7). Электрическое СВЧ-поле рассчитывалось в предположении, что в вакуумной камере устанавливаются колебания типа  $TE_{111}$ , причем пространственная зависимость электрического поля задавалась с использованием первого приближения функций Бесселя. В эксперименте возможно использование как правовращающегося СВЧ-поля, так и линейно поляризованного. В случае линейно поляризованного поля компоненты  $E_x$  и  $E_y$  моды  $TE_{111}$  имеют следующий вид:

$$E_x(x, y, z, t) = E_0 \cdot \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left(\frac{x \cdot y}{4}\right) \cos\left(\pi \frac{z}{L}\right) \cos(\omega \cdot t) \quad (4.1)$$

$$E_y(x, y, z, t) = E_0 \cdot \cos\left(\pi \frac{z}{L}\right) \cos(\omega \cdot t) , \quad (4.2)$$

где  $z = 0$  соответствует геометрическому центру магнитной ловушки. Область ЭЦР-взаимодействия варьировалась посредством изменения параметра  $\beta = \omega_{ce} / \omega$ , где  $\omega_{ce} = eB(0,0)/(m_0 c)$ ,  $B(0,0)$  – индукция магнитного поля в геометрическом центре ловушки,  $E_0$  – амплитуда напряженности электрического СВЧ-поля.

### 3. Начальное распределение частиц

Начальное пространственное распределение частиц плазмы задавалось однородным внутри эллипсоида, соосного с осью вакуумной камеры. Плотность плазмы составляла  $10^9 - 10^{10} \text{ см}^{-3}$ . Начальное распределение электронов по скоростям задавалось по методу хаотического старта с температурой в несколько десятков электрон-вольт. Считалось, что исходная плазма является нейтральной и полностью ионизирована. Отношение массы иона к массе электрона полагалось равным 1836, то есть считалось, что моделируемая плазма является водородной. В начальный момент времени ионы считались моноэнергетичными (0,1 эВ), с хаотическим распределением направлений импульсов, задаваемых с помощью датчика случайных чисел.

### 4. Особенности использования метода частиц в ячейке

В модели использована схема метода частиц в ячейке, описанная выше (Тема 8), обобщенная на трехмерный случай, поэтому остановимся лишь на некоторых особенностях ее применения.

Плотности зарядов в узлах сетки находятся «взвешиванием по объему» (обобщение метода, описанного в Теме 7) – процедура раздачи заряда по восьми ближайшим к частице узлам.

Уравнение Пуассона с периодическими граничными условиями по осям  $X$  и  $Y$  (влияние стенок камеры полагается пренебрежимо малым) и введением границ с потенциалом, равным нулю в направлении  $Z$  в плоскостях, соответствующих торцам резонатора, решается на стационарной декартовой сетке методом Бойсверта [2].

Пространственная ограниченность плазмы достигается тем, что частицы, достигшие стенок камеры, считаются потерянными. Для сохранения квазинейтральности плазмы и полного числа частиц потери частиц на стенках камеры возмещались «рождением» пары электрон–ион в объеме плазмы по случайному закону.

## 5. Безразмерные переменные и решение уравнений движения частиц

Для интегрирования уравнений движения электронов использовалась релятивистская схема решения уравнения движения заряженных частиц, предложенная Борисом [5].

Конечно-разностный аналог уравнения движения электрона в безразмерной форме имеет вид:

$$\frac{\vec{u}^{n+1/2} - \vec{u}^{n-1/2}}{\Delta\tau} = \vec{g}^n + \frac{\vec{u}^{n+1/2} + \vec{u}^{n-1/2}}{2\gamma^n} \times \vec{b}^n, \quad (4.3)$$

где  $u$  - импульс электрона в единицах  $m_0c$ ,  $\vec{g}^n = \frac{q\vec{E}^n}{mc\omega}$  - суммарное (СВЧ + собственное электрическое поле плазмы) безразмерное электрическое поле в момент времени  $n$ ,  $\vec{b}^n$  - магнитное поле, нормированное на  $B_0 = \frac{mc\omega}{e}$ ,  $\gamma$  - релятивистский фактор,  $\tau = \omega \cdot t$  - безразмерное время,  $\Delta\tau$  - временной шаг. Выбор временного шага обусловлен циклотронным вращением электрона и учетом релятивизма. Оптимальным в этом случае считается  $\Delta\tau$  не более 0.01 периода СВЧ-поля, то есть  $\Delta\tau \leq 0.02\pi$ . В проведенных вычислительных экспериментах  $\Delta\tau$  выбирался равным 1/250 периода СВЧ поля.

## 6. Последовательность реализации схемы Бориса

Последовательность схемы Бориса при решении уравнений движения для электронов состоит из следующих шагов:

а) прибавление половины импульса электрических сил к импульсу частицы в момент времени  $n-1/2$

$$\vec{u}^- = \vec{u}^{n-1/2} + \vec{g}^n \Delta\tau / 2;$$

б) вращение вектора импульса заряженной частицы в магнитном поле

$$\vec{u}' = \vec{u}^- + \vec{u}^- \times \vec{t}$$

$$\vec{u}^+ = \vec{u}' + \vec{u}' \times \vec{s},$$

где  $\vec{t} = \bar{b}^n \Delta \tau / 2 \gamma^n$ ,  $(\gamma^n)^2 = 1 + (u^-)^2$ ,  $\vec{s} = 2 \vec{t} / (1 + t^2)$ ;

в) прибавление второй половины импульса электрических сил.

$$\vec{u}^{n+1/2} = \vec{u}^+ + \vec{g}^n \Delta \tau / 2;$$

г) расчет новых координат частицы, нормированных на релятивистский радиус циклотронного вращения электрона  $r_L = c / \omega$

$$x^{n+1} = x^n + u_x^{n+1/2} \Delta \tau / \gamma^{n+1/2},$$

$$y^{n+1} = y^n + u_y^{n+1/2} \Delta \tau / \gamma^{n+1/2},$$

$$z^{n+1} = z^n + u_z^{n+1/2} \Delta \tau / \gamma^{n+1/2},$$

где  $(\gamma^{n+1/2})^2 = 1 + (u^{n+1/2})^2$ .

Поскольку ионы рассматриваемой плазмы являются немагнитными, нерелятивистскими и их движение обусловлено коллективными эффектами, возникающими в плазме, а взаимодействием ионов с СВЧ-полем можно пренебречь, для решения уравнения движения ионов может быть использована схема «с перешагиванием» с учетом лишь собственного электрического поля, возникающего в плазме.

## 7. Диагностики

Вычислительный эксперимент дает возможность получать следующую информацию о свойствах и параметрах исследуемой плазмы:

- эволюция параметров плазмы в процессе ЭЦР-нагрева;
- пространственное распределение электронов и ионов плазмы, и пространственное распределение горячей электронной компоненты по достижению плазмой стационарного состояния;
- энергетические спектры электронной и ионной компонент плазмы в полном объеме камеры, а также в различных пространственных областях;



- интенсивность потерь частиц из плазмы;
- интенсивность потока электронов, попадающих на мишень, вводимую в плазму;
- анализ траекторий отдельных частиц;
- колебания и волны, возникающие в плазме.

Для обеспечения гибкости и надежности проведения вычислительного эксперимента при случайном или пользовательском прерывании работы программы сохраняется текущая информация о параметрах плазмы и параметрах внешних полей, что позволяет продолжить дальнейшую работу программы. Это достигается периодической записью в файл, который используется для продолжения работы программы, координат и импульсов частиц плазмы и параметров, обеспечивающих дальнейшую работу программы, начиная с контрольной точки. В целях экономии времени счета и памяти компьютера файл, необходимый для продолжения счета, записывается в формате *binary*.

## 8. Отладка и тестирование программы

Отладка и тестирование программы проводится следующим образом:

- анализировалось движение электрона в зеркальной магнитной ловушке в отсутствие электрического СВЧ поля для расчета частоты баунс-колебаний, определения конуса потерь и других явлений и эффектов, для которых известны аналитические решения;
- проводился анализ движения электрона в условиях ЭЦР, в однородном магнитном поле, полученные результаты сравнивались с аналитическим решением;
- тестирование программы решения уравнения Пуассона для различных случаев, подлежащих аналитической проверке,

например, расчет поля прямого, равномерно заряженного цилиндра (в объеме цилиндра равномерно распределены электроны) и анализ разлета электронов в результате кулоновского взаимодействия;

- тест на сохранение полной энергии системы (кинетическая энергия частиц и энергия поля) в отсутствие СВЧ поля и потерь частиц.

На первом этапе моделирования проводится тщательная проверка работы программы без учета кулоновского взаимодействия.

Блок-схема программы трехмерного PIC-моделирования представлена на рисунках 9.2a – 9.2с.

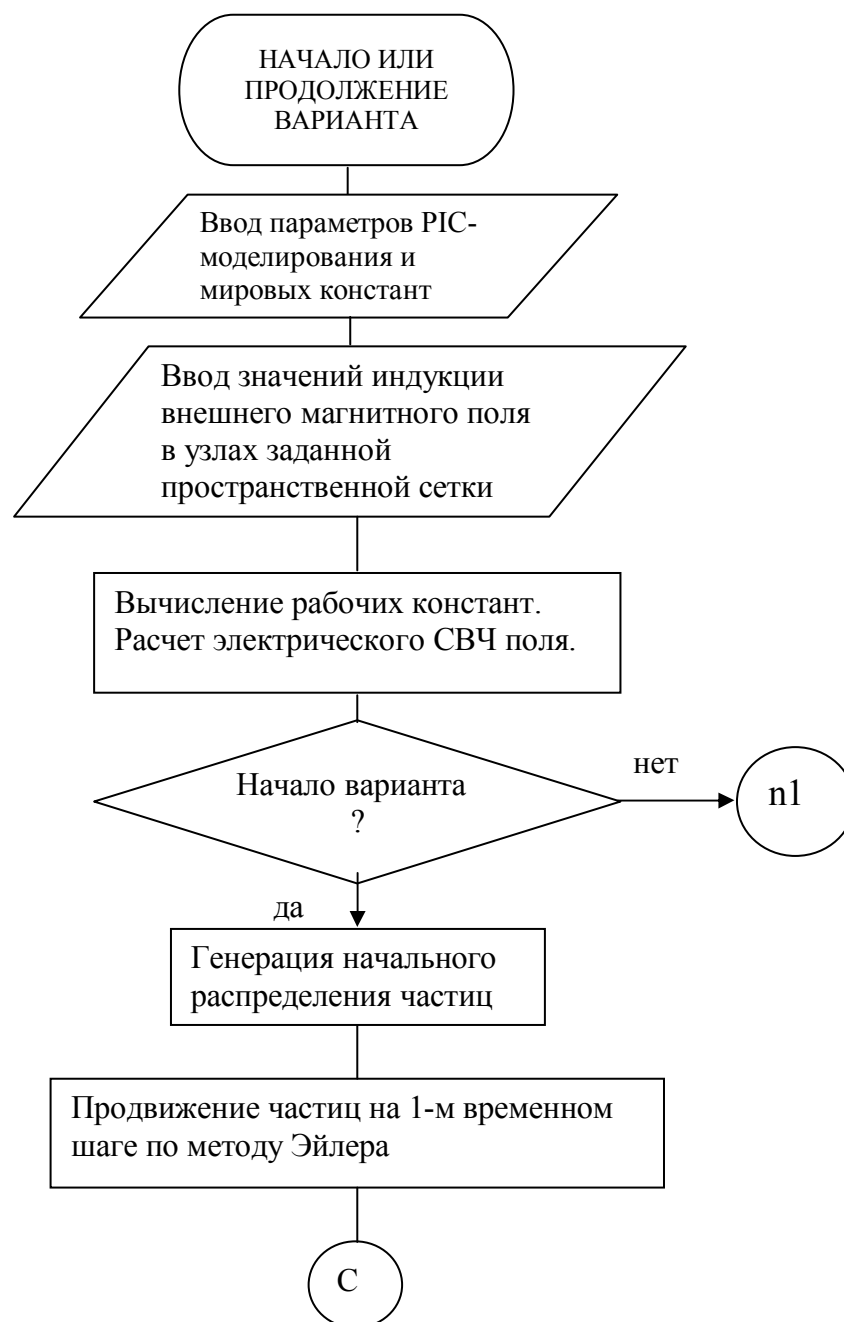


Рис. 9.2а. Блок-схема программы трехмерного PIC-моделирования (начало)

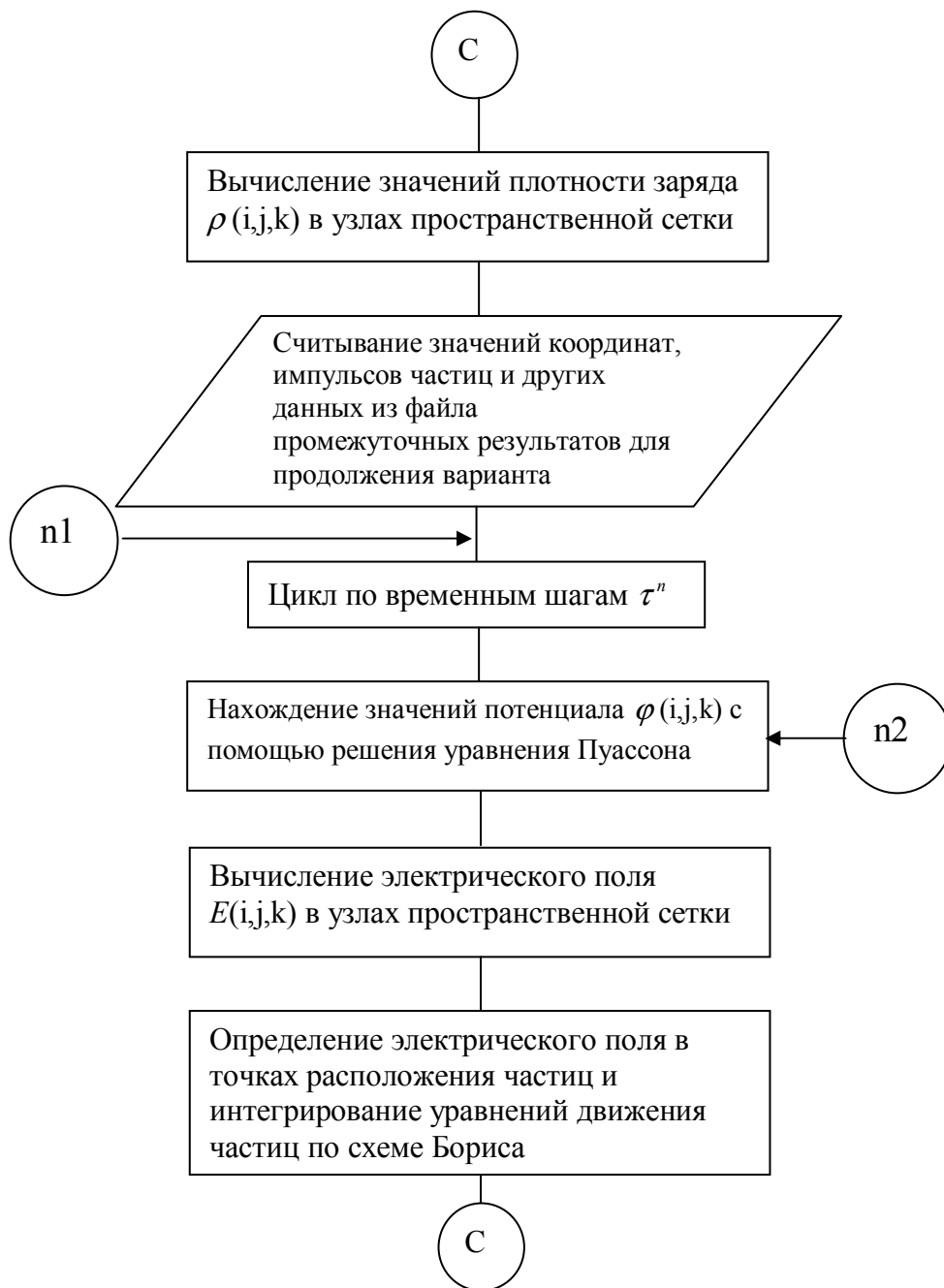


Рис. 9.2b. Блок-схема программы трехмерного PIC-моделирования (продолжение)

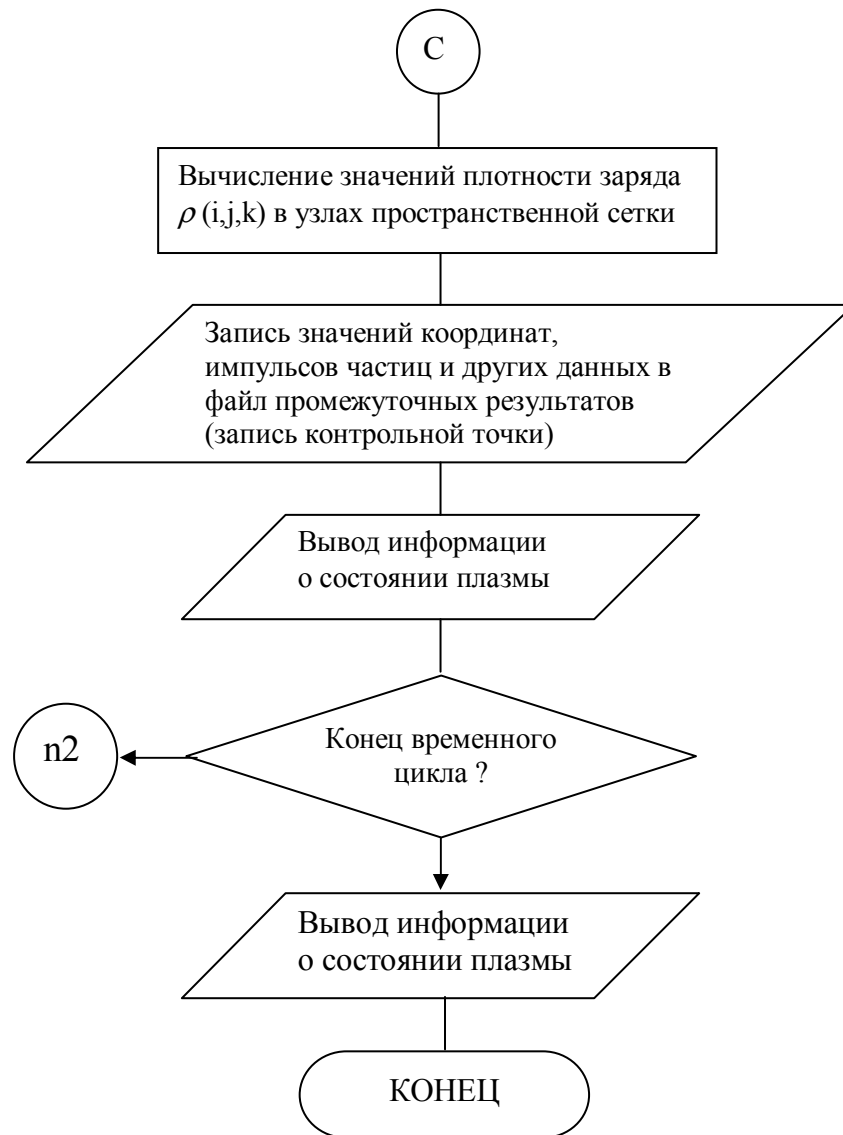


Рис. 9.2с. Блок-схема программы трехмерного PIC-моделирования (окончание)

### 9.2.3. Результаты вычислительного эксперимента

Изучение свойств плазмы, удерживаемой в зеркальной магнитной ловушке в условиях электронного циклотронного резонанса, проводилось для различных параметров эксперимента с варьированием пробочного отношения магнитной ловушки, напряженности электрического СВЧ-поля и локализации области резонансного взаимодействия электронов с СВЧ-полем. Анализ численных результатов проводился по достижению стационарного состояния плазмы, в среднем через 10000–15000 периодов СВЧ-поля.

На рисунке 9.3 представлены характерные сечения  $XY$  и  $ZY$  пространственных распределений электронов по достижении плазмой стационарного состояния. Расчеты проведены при пробочном отношении  $R=1.5$ , и напряженности СВЧ-поля  $E = 750 \text{ В} \cdot \text{см}^{-1}$ .

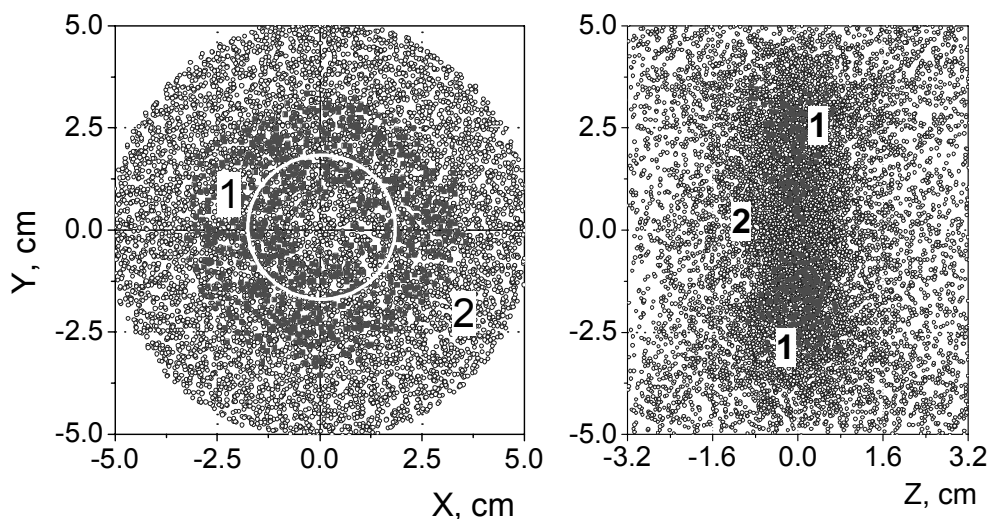


Рис. 9.3.  $XY$  и  $ZY$  сечения пространственных распределений электронов. Горячая электронная компонента обозначена черными символами (1), холодные электроны – серыми (2)

Сечение ЭЦР поверхности находится на расстоянии 1.3 см от оси резонатора и обозначено на рисунке 9.3 светлой окружностью. Из рисунка

9.3 следует, что горячая электронная компонента плазмы (электроны, принадлежащие «хвосту» энергетического спектра) сконцентрирована в медианной плоскости резонатора ( $Z=0$ ) вблизи области ЭЦР-взаимодействия. Такая локализация горячих электронов является удобной для получения рентгеновского излучения с мишени, вводимой радиально в медианной плоскости резонатора.

Анализ результатов моделирования ЭЦР-плазмы, удерживаемой в зеркальной магнитной ловушке, показал, что интенсивность генерации горячей электронной компоненты и ее пространственная локализация существенно зависят от значения параметра  $\beta$  и пробочного отношения магнитной ловушки. На рисунках 9.4 и 9.5 представлены  $ZY$  сечения пространственных распределений электронной компоненты и энергетические спектры электронов. Расчеты выполнены при  $R=1.5$  и  $E = 750 \text{ В} \cdot \text{см}^{-1}$

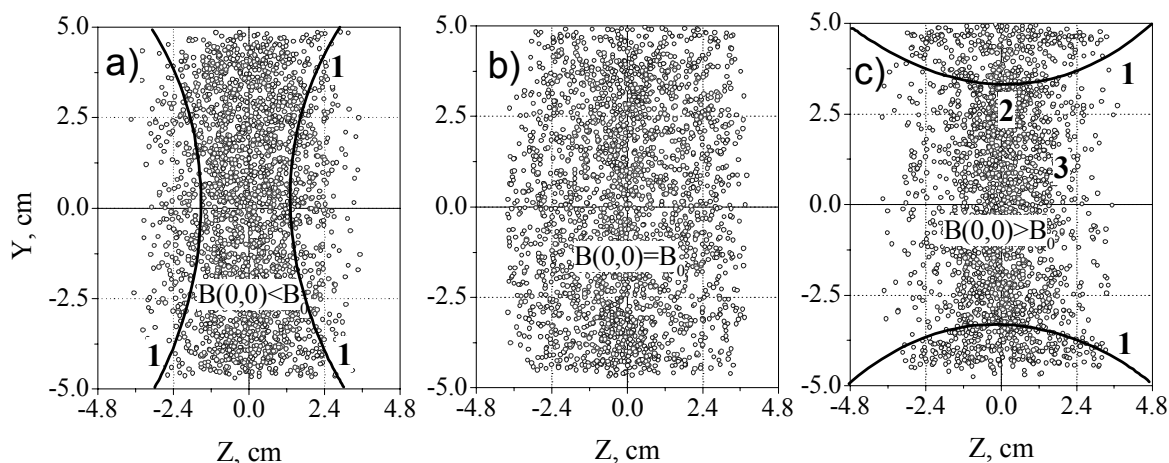


Рис. 9.4.  $ZY$ -сечения пространственных распределений электронов для различных конфигураций магнитного поля: а)  $\beta=0.9$ ; б)  $\beta=1.0$ ; в)  $\beta=1.10$

Из рисунков 9.4 и 9.5 следует, что при  $\beta < 1.0$  горячие электроны распределены в пространстве практически однородно, а их средняя энергия составляет 15 кэВ. В этом случае ЭЦР-поверхность представляет

собой двуполостный гиперboloид. Наиболее эффективна генерация горячей электронной компоненты в случае  $\beta > 1.0$ . Энергия горячей электронной компоненты («хвост» энергетического распределения) достигает 80 кэВ, а горячие электроны локализованы вблизи медианной плоскости резонатора.

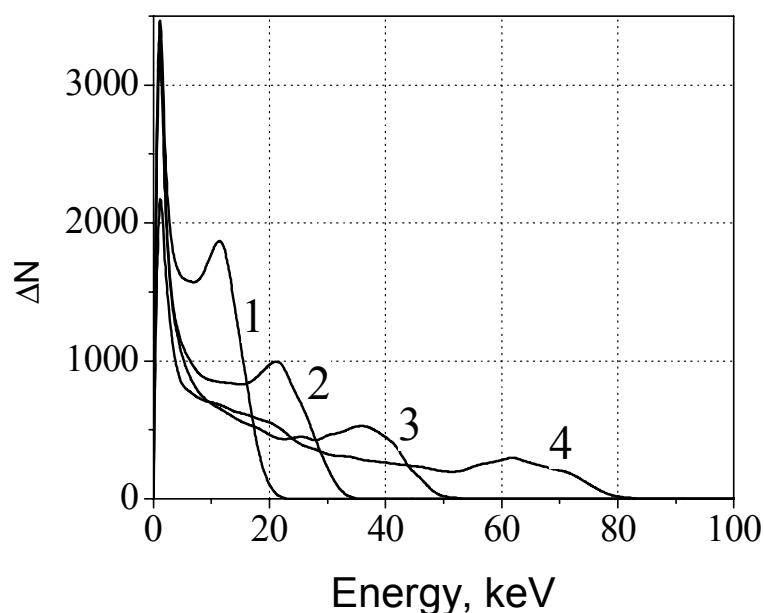


Рис. 9.5. Энергетические спектры электронов.  
1 –  $\beta=0.9$ ; 2 –  $\beta=1.0$ ; 3 –  $\beta=1.06$ ; 4 –  $\beta=1.10$ .

Полученные результаты находятся в хорошем соответствии с результатами натурального эксперимента [3]. При значениях  $\beta > 1.2$  и при высоких значениях пробочного отношения ( $R > 2$ ) относительное количество электронов, принадлежащих горячей компоненте уменьшается.

Результаты вычислительного эксперимента и их сравнение с результатами натурального эксперимента показывают, что варьирование параметров магнитного поля и СВЧ-поля дает возможность получения электронной горячей компоненты с прогнозируемыми параметрами (энергия и область локализации). Заметим, что вычислительный эксперимент, описанный выше, может быть реализован на персональном



компьютере со средними характеристиками (1.47 ГГц., RAM 512 Мб). Хотя для реализации описанной модели может быть в принципе использован любой алгоритмический язык высокого уровня, мы рекомендуем Intel Visual Fortran как наиболее скоростной и предназначенный именно для расчетных задач.

### **9.3. Численное исследование параметров плазмы ЭЦР-источника ионов**

В настоящее время наиболее широко распространенным источником многозарядных ионов является ECRIS (Electron Cyclotron Resonance Ion Source) – источник, основанный на генерации ионов в ловушке с минимумом В в условиях ЭЦР [6]. Прогресс в улучшении параметров таких источников, достигнутый в последние годы, связан в основном с инженерными находками, в то время как развитой теории плазмы источников такого типа пока не существует. Кроме того, диагностика плазмы в ловушках с минимумом В затруднена вследствие его конструктивных особенностей. В связи с этим численное моделирование плазмы ЭЦР-источника является эффективным методом исследования, позволяющим дать ответы на вопросы о параметрах плазмы источника и дальнейшем его совершенствовании.

#### **9.3.1. Параметры экспериментальной установки и основные этапы численного моделирования**

В настоящем параграфе рассмотрены основные этапы моделирования плазмы в ловушке «с минимумом В». Трехмерное численное моделирование проводилось с учетом основных параметров типичного ЭЦР-источника DECRIS-14-2 [7] (рис. 9.6).

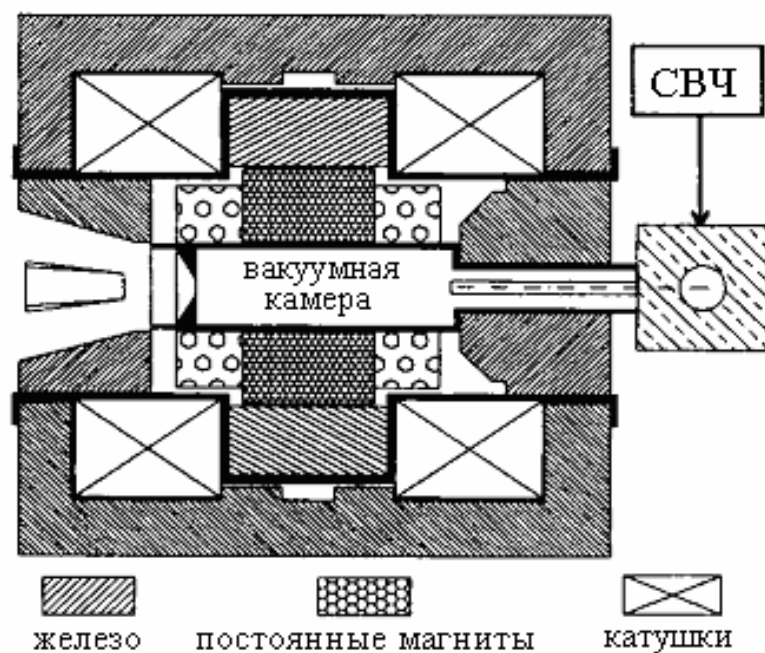


Рис. 9.6. Схема ЭЦР-источника DECIS-14-2

Отличие магнитного поля ловушки «с минимумом В» от зеркальной ловушки заключается в том, что магнитное поле зеркальной ловушки, создаваемое осесимметричными катушками или постоянными цилиндрическими магнитами дополняется мультипольной магнитной системой, чаще всего гексаполем или октуполем. На рисунке 9.7 представлен профиль магнитного поля, создаваемого магнитными катушками  $B_z(z,0)$ . Индукция магнитного поля в центре ловушки – 4 кГс, на границах камеры – до 10–12 кГс.

Результатом суперпозиции поля катушек и поля мультиполя является магнитное поле с минимумом в геометрическом центре магнитной системы с нарастанием модуля индукции магнитного поля как в аксиальном, так и радиальном направлениях. Кроме того, силовые линии магнитного поля оказываются «скрученными». Такая конфигурация магнитного поля позволяет создавать более плотную и менее подверженную неустойчивостям плазму, чем в в зеркальной магнитной ловушке.

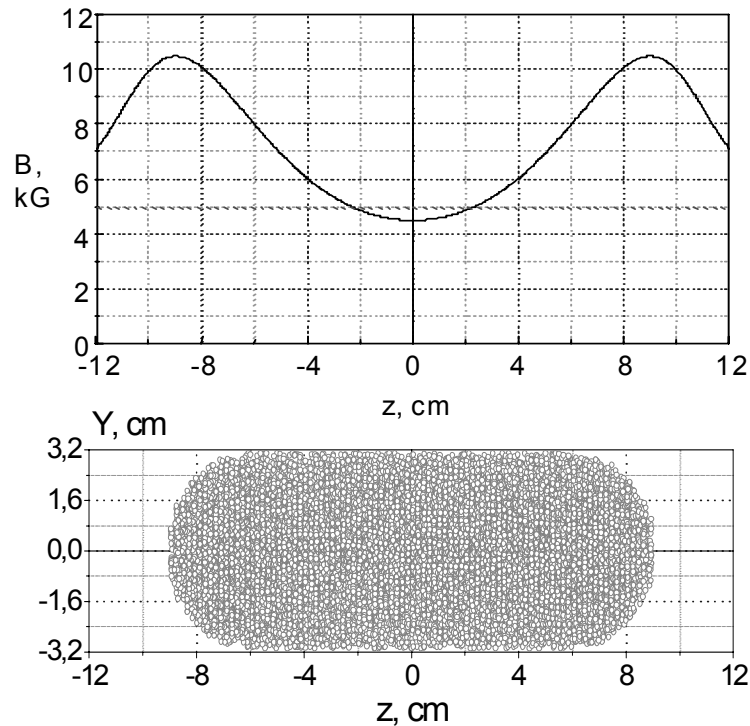


Рис. 9.7. Профиль магнитного поля (вверху) и  $ZY$ -пространственное начальное распределение плазмы (внизу)

Линии равного уровня магнитного поля  $B(z,r)/B_0 = \text{const}$  представлены на рисунке 9.8. Как следует из рисунков 9.7 – 9.8 резонансная поверхность ( $B_0 = 5$  кГс) в ловушке «с минимумом В» по форме близка к поверхности эллипсоида.

В экспериментах в резонаторе с геометрическими размерами: длина  $L = 24$  см, диаметр  $D = 6.4$  см, возбуждался многомодовый режим. Частота СВЧ-генератора – 14 ГГц.

Амплитуда напряженности электрического СВЧ-поля в численных экспериментах выбиралась равной  $E = 500$  В/см.

Моделирование плазмы ЭЦР-источника осуществлялось по схеме, описанной в 9.1.1, с учетом особенностей экспериментальной установки.

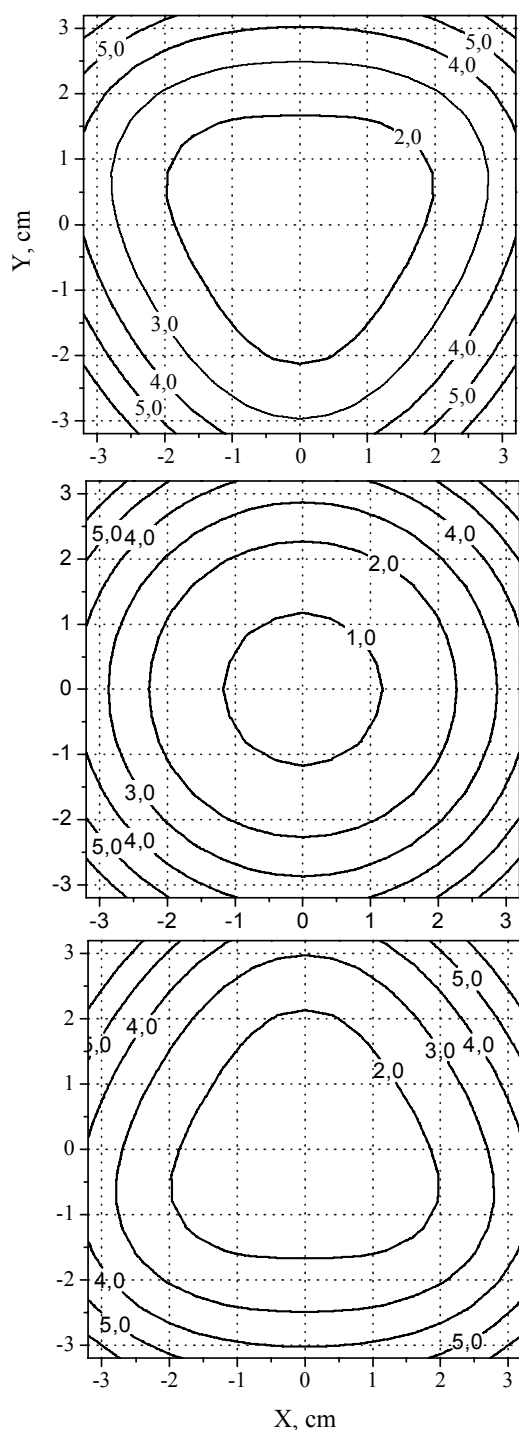


Рис. 9.8. Линии равного уровня магнитного поля, в единицах  $B_0$  в сечениях (сверху вниз):  $Z = -6$  см;  $Z = 0$ ;  $Z = 6$  см

В начальный момент времени генерировалась холодная, нейтральная, однородная плазма, расположенная между магнитными пробками, создаваемыми катушками (рис. 9.7). Начальная плотность плазмы полагалась равной  $n_e = 6 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$ . Дебаевский радиус  $\lambda_D$  при характерной для ЭЦР-источников ионов температуре плазмы  $T_e \approx 4 - 5$  кэВ составляет 0.2 см.

Таким образом, размер пространственной сетки для решения уравнения Пуассона  $64 \times 64 \times 128$ , а общее число частиц, учитывая, что объем плазмы занимает примерно половину объема резонатора:

$$N_t = \frac{\pi D_p^2 \cdot L_p}{4 \lambda_D^3} \cdot N_j \approx 5 \cdot 10^5.$$

В последнем выражении  $D_p$  – поперечный размер плазмы,  $L_p$  – длина плазмы.

Начальное распределение электронов по скоростям

задавалось по методу хаотического старта с температурой несколько

десятков электрон-вольт. Считалось, что исходная плазма полностью ионизирована. Поскольку целью численных экспериментов являлось изучение нагрева плазмы в ловушке с минимумом В, отношение массы иона к массе электрона полагалось равным 1836, то есть считалось, что моделируемая плазма является водородной, а процессы ионизации, рекомбинации, перезарядки не учитывались.

### 9.3.2. Результаты вычислительного эксперимента

Результаты численных экспериментов показали, что в плазме ЭЦР источника присутствуют 3 основные группы электронов: холодные электроны, энергия которых не превышает 80 эВ, горячие электроны с энергией в несколько кэВ и сверхгорячие электроны с энергией свыше 10 кэВ. Сечения пространственных распределений групп электронов представлены на рисунке 9.9.

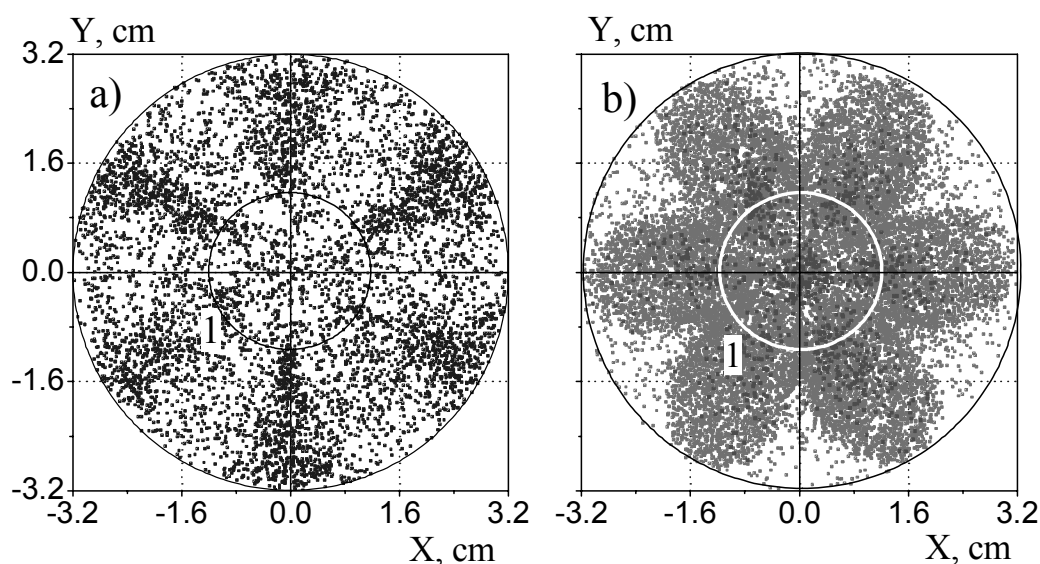


Рис. 9.9. XY-сечения пространственного распределения:  
а) холодных электронов, б) горячих и сверхгорячих электронов.  
1 – ЭЦР-поверхность

На рисунке 9.10 представлены  $ZY$ -сечения пространственных распределений электронной компоненты плазмы. Из рисунков 9.9 – 9.10 следует, что холодные электроны локализованы в основном за пределами ЭЦР-поверхности. В поперечном сечении пространственного распределения наибольшая плотность холодных электронов вблизи полюсов постоянных магнитов (рис. 9.9). Горячие электроны сосредоточены внутри ЭЦР-поверхности и между полюсов постоянных магнитов. Горячие и сверхгорячие электроны составляют более 80% от общего числа, холодные – менее 20%.

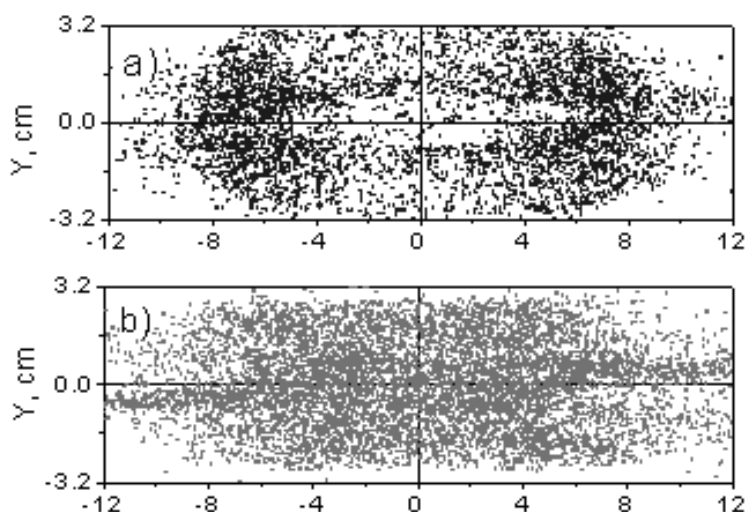


Рис. 9.10.  $ZY$ -сечения пространственного распределения холодных (а), горячих и сверхгорячих электронов (б)

Энергетические спектры электронов внутри и вне ЭЦР-поверхности представлены на рисунке 9.12. Очевидно, что нагрев электронов плазмы в ЭЦР источниках ионов происходит внутри и вблизи ЭЦР поверхности.

Кроме холодных и горячих электронов, численные эксперименты позволили обнаружить сверхгорячие электроны с энергией, достигающей несколько сотен кэВ. Таких частиц оказалось менее 0.1%. Механизм появления сверхгорячих электронов становится ясен при анализе

результатов, представленных на рисунке 9.11. Электрон с энергией около 30 кэВ находится вблизи резонансной поверхности, а затем попадает в область более сильного магнитного поля. В течение 800 периодов СВЧ поля энергия электрона возрастает до 400 кэВ.

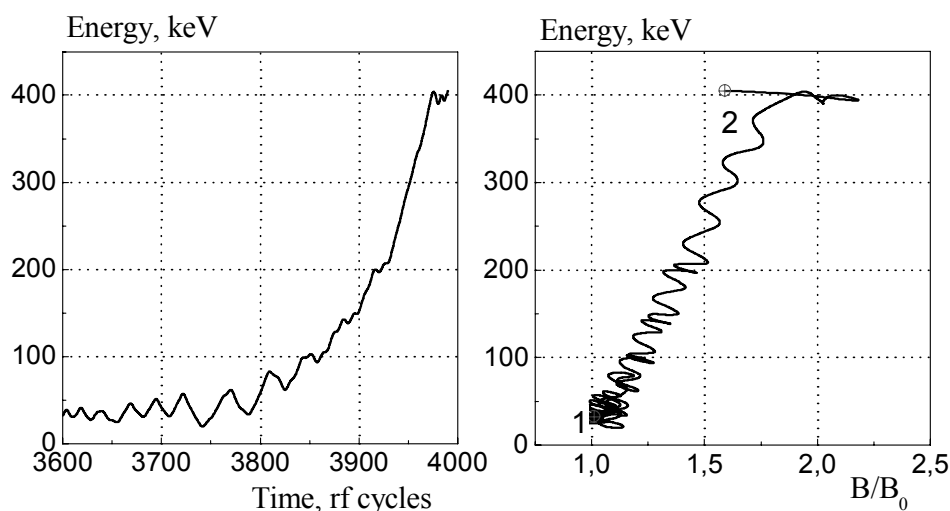


Рис. 9.11. Зависимость энергии электрона от времени (слева) и от магнитного поля (справа) в условиях авторезонансного ускорения. 1 – начальная точка отсчета; 2 – электрон достиг стенки резонатора

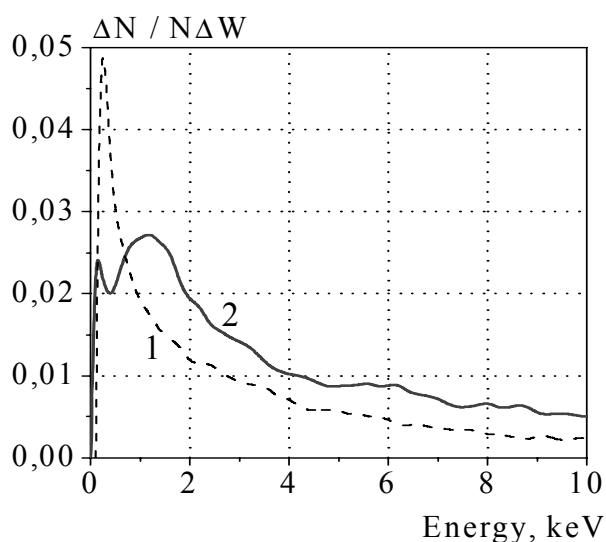


Рис. 9.12. Энергетические спектры электронов: 1 – вне ЭЦР-поверхности; 2 – внутри ЭЦР-поверхности

Такие электроны не могут удерживаться в ловушке и попадают на стенки камеры, в результате чего возникает жесткое рентгеновское излучение, часто наблюдаемое в ЭЦР-источниках. Темп нарастания энергии электрона (4.5 кэВ/нс) и анализ их траекторий свидетельствует об авторезонансном ускорении электрона, при котором условие равенства частоты циклотронного вращения электрона частоте СВЧ-поля поддерживается автоматически при движении частицы в область более сильного магнитного поля за счет взаимодействия электрона с волнами, возникающими в плазме (пространственный гиромагнитный авторезонанс):

$$\omega = \omega_{ce}(x, y, z) = eB(x, y, z)/(m_0 \gamma c). \quad (4.7)$$

Предположения о возможности реализации описанного выше механизма ускорения электронов были сделаны в работе [8].

## Список литературы к теме 9

Использованная литература:

1. Бартеньев О.В. Современный Фортран. – М.: Диалог – МИФИ, 2000.
2. Бартеньев О.В. Фортран для профессионалов. Математическая библиотека IMSL. Части 1–3. – М.: Диалог – МИФИ, 2001
3. Андреев В.В., Умнов А.М., Балмашнов А.А., et. al. Плазма ЭЦР-разряда как источник рентгеновского излучения: эксперимент и численное моделирование // Известия РАН. Серия физическая. 67, № 9, 1314–1321 с.
4. Алиевский Б.Л., Орлов В.Л. Расчет параметров магнитных полей осесимметричных катушек: Справочник. – М.: Энергоатомиздат, 1983. –112 с.
5. Birdsall C.K., Langdon A.B. Plasma Physics via Computer Simulation. – IOP Publishing LTD, 1991.



6. Geller R. Electron Cyclotron Resonance Ion Sources and ECR Plasmas. – IOP Publishing LTD, 1996.
7. Efremov et al., Phys Scr. 60, 1999, –250 p.
8. Нейштадт А.И., Тимофеев А.В. Явление авторезонанса при электронном циклотронном нагреве плазмы // ЖЭТФ. –1987. Т.93, вып.5(11). –1706–1713 с.

Рекомендуемая литература:

1. Бэдсел Ч., Ленгдон А. Физика плазмы и численное моделирование. –М.: Энергоатомиздат, 1989.
2. Хокни Р., Иствуд Дж. Численное моделирование методом частиц. – М.: Мир, 1987.
3. Сигов Ю.С. Вычислительный эксперимент: мост между прошлым и будущим физики плазмы. – М.: Физматлит, 2001.
4. Туриков В.А., Ульяницкий И.В., Умнов А.М. Численное моделирование плазменных процессов. – М.: Изд-во РУДН, 2003.

## **Тема 10. Создание релятивистских электронных и плазменных сгустков и управление их движением**

Тема 10 посвящена моделированию релятивистских электронных и плазменных сгустков и проведению вычислительных экспериментов по изучению формирования таких сгустков и управления их движением.

В последние десятилетия развивается направление исследований, связанных с разработкой компактных источников излучений и частиц. Это источники синхротронного и рентгеновского излучений, коллективные ускорители ионов, источники частиц для различных вакуумно-плазменных технологий. Источники излучений и частиц используются для решения фундаментальных и прикладных проблем в различных областях науки и технологий: в задачах управляемого термоядерного синтеза, создания генераторов электромагнитного излучения, создания мощных лазеров и мазеров на циклотронном резонансе.

В начале 80-х годов теоретически и экспериментально была показана возможность создания релятивистских электронных и плазменных сгустков в зеркальной магнитной ловушке в условиях ЭЦР в нарастающем во времени магнитном поле. Ускорение электронов и формирование релятивистского сгустка электронов было продемонстрировано на установке ТРОЛЛЬ [1]. Ускорение электронов плазмы и нагрев плазмы в условиях ЭЦР в нарастающем во времени магнитном поле получило название синхротронный гиромагнитный авторезонанс (СГА) [2, 3]. Экспериментальные установки, в которых реализуется СГА получили название GYRAS (Gyro-Resonant ACcelerator). Исследования ЭЦР в нарастающем во времени магнитном поле показали не только возможность создания релятивистских электронных и плазменных сгустков, но и принципиальную возможность создания компактных установок для

генерации синхротронного и рентгеновского излучений, а также коллективного ускорения ионов.

### 10.1. Экспериментальная установка

Плазменный синхротрон GYRAC-X [3] является источником рентгеновского излучения, в котором кинетическая энергия релятивистских электронов, полученных при СГА, конвертируется в рентгеновское излучение. GYRAC-X (рис. 10.1) представляет собой цилиндрический резонатор, в котором возбуждается  $TE_{111}$  мода колебаний (2,45 ГГц, 300 Вт), помещенный в стационарное магнитное поле пробочной конфигурации ( $R = 1,05$ ), создаваемое магнитными катушками и удовлетворяющее условию ЭЦР в геометрическом центре резонатора.

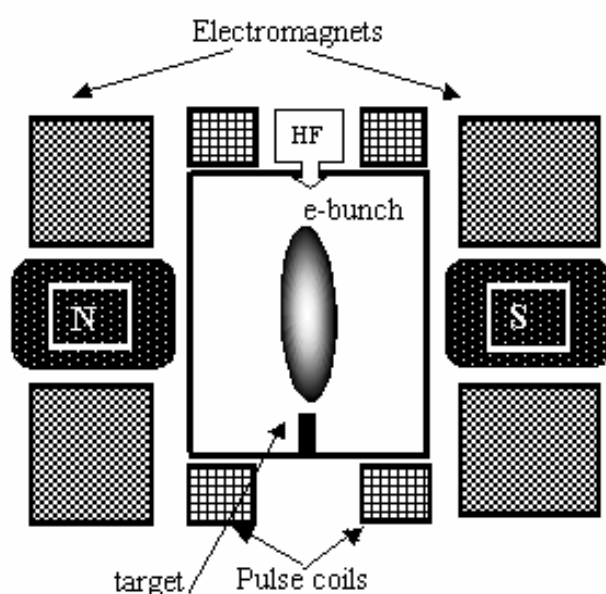


Рис. 10.1. Схема экспериментальной установки GYRAC-X

Импульсные магнитные катушки создают переменное во времени магнитное поле. В экспериментах с плазменным синхротроном GYRAC-X используемые электромагнитные катушки позволяют сформировать

стационарные профили магнитного поля для различных экспериментальных сценариев: 1) нарастания импульсного магнитного поля во времени; 2) реверсивного импульсного магнитного поля. Работа плазменного синхротрона GYRAC-X состоит из следующих стадий: первая стадия – аксиальная инжекция холодной плазмы в резонатор, при этом величина индукции стационарного магнитного поля в геометрическом центре резонатора в начальный момент времени близка значению  $B_0$ . Инжекция осуществляется одновременно с включением СВЧ-поля и импульсного магнитного поля, нарастающего во времени. Вторая стадия – общее магнитное поле нарастает во времени до значения  $B_{gyr}$  и электроны, захваченные в режиме СГА, ускоряются до средней энергии:

$$\tilde{W}(\text{МэВ}) \cong 0,511 \times [B_{gyr} / B_0 - 1]. \quad (10.1)$$

Эксперименты, проведенные на установке GYRAC-X, показали, что максимальная мощность интенсивности излучения с газа (аргон) равна  $6 \times 10^4 \text{ МэВ с}^{-1}$  при возрастании магнитного поля до  $B = 500 \text{ Гс}$  за время  $t = 100 \text{ мкс}$ . Плотность релятивистской плазмы не превышала  $n_e = 4 \times 10^8 \text{ см}^{-3}$ . Мощность излучения зависела от времени нарастания магнитного поля – более короткое время нарастания создает лучшие условия удержания электронов начальной плазмы в ловушке. Радиальное введение вольфрамовой мишени в плазму приводило к возрастанию интенсивности тормозного излучения, однако, как показали оценки, с мишенью взаимодействовало лишь небольшое число ускоренных электронов  $N_f \cong 5 \cdot 10^6$ .

## **10.2. Численная модель плазмы в условиях синхротронного гиромагнитного авторезонанса в зеркальной магнитной ловушке**

Численная модель ускорения электронов плазмы и формирования релятивистского сгустка электронов построена на основе метода частиц в ячейке [4-6] с учетом параметров экспериментальной установки (см. Тему 8).

Выбор численной модели был обусловлен возможностью рассмотрения следующих проблем:

- исследование условий удержания частиц плазмы и ускорения электронов в зеркальной магнитной ловушке в зависимости от начальных параметров плазмы (радиального размера и плотности плазмы) и параметров СГА (темпа нарастания магнитного поля, напряженности СВЧ электрического поля, пробочного отношения магнитного поля ловушки).
- изучение эволюции параметров плазмы в процессе СГА и формирования релятивистского электронного сгустка.
- анализ потерь частиц из плазмы.
- изучение зависимости энергетических спектров электронов и ионов от начальных условий и параметров численного эксперимента.

Собственное магнитное поле плазмы в модели не учитывалось, так как для рассматриваемых параметров плазмы его влияние на процесс СГА пренебрежимо мало.

### **10.2.1. Особенности численной модели**

Основные параметры численной модели (геометрические размеры вакуумной камеры, конфигурация магнитного поля, мода СВЧ-колебаний,

амплитуда напряженности СВЧ-поля) выбирались в соответствии с параметрами плазменного синхротрона GYRAS. В работе использовалась декартова система координат, которая является более экономичной, чем цилиндрическая, с точки зрения затрат машинного времени и точности расчета полей вблизи оси системы.

1) *Начальное состояние.* Использовались два способа задания начального состояния. В первом случае нейтральная, полностью ионизированная однородная плазма (электроны и однозарядные ионы), имеющая форму прямого цилиндра радиуса  $r_0$ , инжестировалась аксиально в вакуумную камеру. Время инжестии («окно инжестии») – время, за которое магнитное поле возрастает на величину, при которой электрон еще может быть захвачен в режим СГА, определялось темпом нарастания магнитного поля во времени и напряженностью электрического СВЧ поля. Это время может быть определено из условия максимально возможного значения индукции магнитного поля, при котором электрон еще может быть захвачен в режим СГА:

$$\frac{B_{\max}(0)}{B_0} = 1 + 1.89 g_0^{2/3}.$$

Во втором случае момент времени  $t=0$  задается однородное пространственное распределение частиц каждого сорта (электронов и ионов), внутри цилиндра радиуса  $r_0$ , ось которого совмещена с осью вакуумной камеры. Электроны имеют моноэнергетическое распределение. Направления начальных импульсов электронов задаются датчиком случайных чисел. Энергии ионов в начальный момент времени полагались равными нулю. Ионы считаются однозарядными. В начальный момент времени число ионов равняется числу электронов. Таким образом, в рассматриваемой модели исходная плазма является полностью ионизированной, однородной и нейтральной. Начальная плотность плазмы

варьировалась в пределах  $5 \times 10^9 - 5 \times 10^{10} \text{ см}^{-3}$ , а начальная энергия электронов составляла несколько электронвольт. Тестовые расчеты показали, что оба способа задания начального состояния приводят, практически, к одинаковым конечным результатам. Например, разница в числе захваченных электронов и ширине энергетических спектров электронов составляет не более 5%.

Размер сетки для большинства вариантов расчета  $32 \times 32 \times 32$  узлов. В случае малого начального радиуса плазменного цилиндра ( $r_0 < 0.5r_L$ ) размер сетки увеличивался до  $64 \times 64 \times 64$  узлов. Общее число моделируемых частиц по 100000 электронов и ионов. Временной шаг интегрирования уравнений движения выбирался равным  $1/250$  периода СВЧ. Выбор такого мелкого шага обусловлен необходимостью учета резонансных эффектов.

2) *Раздача заряда в узлы сетки* осуществлялась методом билинейной интерполяции, обобщенным на трехмерный случай.

3) *Уравнение Пуассона и выбор граничных условий.* Уравнение Пуассона для потенциала электрического поля решалось с периодическими граничными условиями, с использованием быстрого преобразования Фурье. Использование периодических граничных условий является корректным, если пространственная область, занимаемая плазмой, вдвое меньше области пространственной сетки, на которой решается уравнение Пуассона [100]. Полученные в узлах сетки значения потенциала могут быть сглажены одним из методов интерполяции.

4) *Расчет внешних полей.* Магнитное поле, создаваемое катушками, рассчитывалось в узлах той же сетки, на которой решается уравнение Пуассона. Поля в точках расположения частиц вычислялись с помощью метода билинейной интерполяции, обобщенного на трехмерный случай. Магнитное поле, создаваемое импульсными катушками, являлось линейной функцией времени. Электрическое СВЧ-поле рассчитывалось в

узлах сетки, в предположении, что в вакуумной камере устанавливаются колебания типа  $TE_{111}$ , причем пространственная зависимость электрического поля задавалась с использованием первого приближения функций Бесселя. В случае линейно поляризованного поля компоненты  $E_x$  и  $E_y$  имеют следующий вид:

$$E_x(x, y, z, t) = E_0 \times \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left(\frac{xy}{4}\right) \cos\left(\pi \frac{z}{L}\right) \cos(\omega t),$$

$$E_y(x, y, z, t) = E_0 \times \cos\left(\pi \frac{z}{L}\right) \sin(\omega t),$$

где  $z = 0$  соответствует геометрическому центру магнитной ловушки,  $L$  – продольный размер вакуумной камеры. В численной модели реализована возможность проведения эксперимента как в случае линейно поляризованного поля, так и правовращающейся поляризации.

д) *Граничные условия для частиц.* Пространственная ограниченность плазмы определялась размерами вакуумной камеры. Вводились границы, соответствующие условиям численного эксперимента. Ионы и электроны, достигшие стенок камеры, считались потерянными.

г) *Схема решения уравнения движения частиц методом Бориса.* Для решения релятивистского уравнения движения электронов использовалась схема Бориса.

е) *Реализация модели на ЭВМ и диагностики.* Разработанная модель позволяет моделировать плазменные процессы на персональных компьютерах средней мощности. Для повышения гибкости и надежности работы программы, алгоритм разбит на три основных блока. Первый – блок инициации: генерирует начальное распределение частиц и задает параметры численного эксперимента. Второй блок осуществляет непосредственно численный эксперимент. Третий блок – блок диагностик, иными словами блок обработки полученных результатов. Через некоторое



число временных шагов, определяемое пользователем, информация о координатах и импульсах частиц передается на внешний носитель. При необходимости можно прервать работу программы и, произведя выборочную обработку результатов, продолжить выполнение программы с изменением, если это необходимо, параметров численного эксперимента.

Численное моделирование позволяло получать следующую информацию о свойствах и параметрах исследуемой плазмы:

- пространственные распределения электронной и ионной компонент плазмы;
- расчет траекторий «меченых» частиц.
- энергетические спектры электронной и ионной компонент плазмы;
- интенсивность потока электронов, попадающих на мишень;
- потери частиц из плазмы.

#### **10.2.2. Результаты вычислительного эксперимента**

Целью численного моделирования являлось изучение влияния параметров эксперимента на ускорение электронов в режиме СГА, для определения зависимости параметров ускоренных электронов от исходной плотности плазмы, конфигурации магнитного поля, напряженности СВЧ электрического поля, характерного размера плазмы, темпа нарастания магнитного поля, при которых эффективность захвата электронов в режим СГА была бы максимальной. Все параметры численного моделирования выбирались с учетом действующих экспериментальных установок GYRAS или установок, проектируемых на большие энергии электронов и большие плотности плазменных сгустков.

Плотность исходной плазмы варьировалась от  $5 \times 10^9 \text{ см}^{-3}$  до  $5 \times 10^{10} \text{ см}^{-3}$ , начальный радиус плазменного цилиндра составлял 0,4 – 3,0 см. Расчеты проводились для однократно ионизованной плазмы двух сортов газов: водород и аргон. Величина напряженности электрического СВЧ поля ( $f = 2,45 \text{ ГГц}$ ) варьировалась в диапазоне от 0,5 кВ/см до 3,0 кВ/см. Расчеты проводились для двух значений пробочного отношения:  $R = 1,04$  и  $R=1,1$ .

Результаты численных экспериментов показали, что параметры плазмы, получаемой в результате СГА, существенно зависят от отношения начального радиуса плазмы к релятивистскому радиусу циклотронного вращения электрона  $r_0 / r_L$  (для частоты СВЧ-поля  $f = 2,45 \text{ ГГц}$   $r_L \approx 2 \text{ см}$ ) и также от плотности плазмы инжекции (при прочих равных условиях). В результате быстрого увеличения радиусов циклотронного вращения электронов в плазме возникает сильное поле поляризации, которое влияет на процесс захвата и ускорения электронов в режим СГА. При  $r_0 / r_L < 1$  такое влияние коллективных взаимодействий может быть весьма существенным. Для оценки влияния коллективных эффектов на процесс СГА удобно ввести параметр  $\eta = E_{0e} / E_{hf}$  – отношение напряженности электрического поля, создаваемого отдельно электронной (или ионной) компонентой плазмы в начальный момент времени к напряженности электрического СВЧ поля. В случае  $\eta \ll 1$  коллективными взаимодействиями в плазме можно пренебречь. Нас будут интересовать случаи, когда  $\eta \geq 1$ , то есть когда коллективные эффекты оказывают существенное влияние на формирование электронных и плазменных сгустков.

Для понимания влияния поля поляризации плазмы на процесс формирования сгустков рассмотрим упрощенную схему, представленную на рисунке 10.2. Если начальный радиус плазмы меньше релятивистского

радиуса циклотронного вращения электрона, то вследствие быстрого увеличения ларморовского радиуса возникает поле разделения зарядов между ионной и электронной компонентой. Электрическое поле  $\vec{E}_s$  имеет как продольную к направлению движения электронов составляющую, так и радиальную составляющую, однако величина радиальной составляющей существенно выше. Это поле может существенно влиять на процесс захвата электронов в режим СГА и формирования релятивистских сгустков.

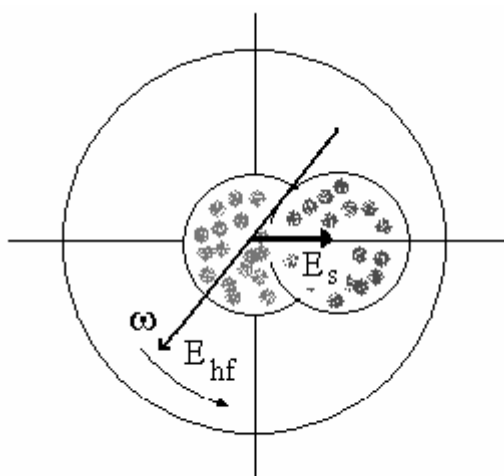


Рис 10.2. Упрощенная схема СГА для случая  $r_0 / r_L < 1$ . Электроны и электрическое СВЧ поле вращаются против часовой стрелки. Ионы расположены в центральной части рисунка

Как будет показано ниже, часть ионов под действием кулоновского поля приобретают радиальные импульсы и достигают стенок вакуумной камеры. Часть ионов удерживается кулоновским полем ускоренных электронов.

Параметры ускоренных сгустков зависят также от отношения  $r_0 / r_L$ . Результаты численных экспериментов показывают, что результатом СГА могут быть разные физические объекты (рис. 10.3). В случае относительно малого начального радиального размера плазмы ( $r_0 / r_L \approx 0,2$ ,  $r_0 = 0,4$  см) результатом СГА является ускоренный сгусток электронов (рис. 10.3а).

В случаях  $r_0 > r_L$  результатом СГА является релятивистское плазменное формирование (рис 10.3б).

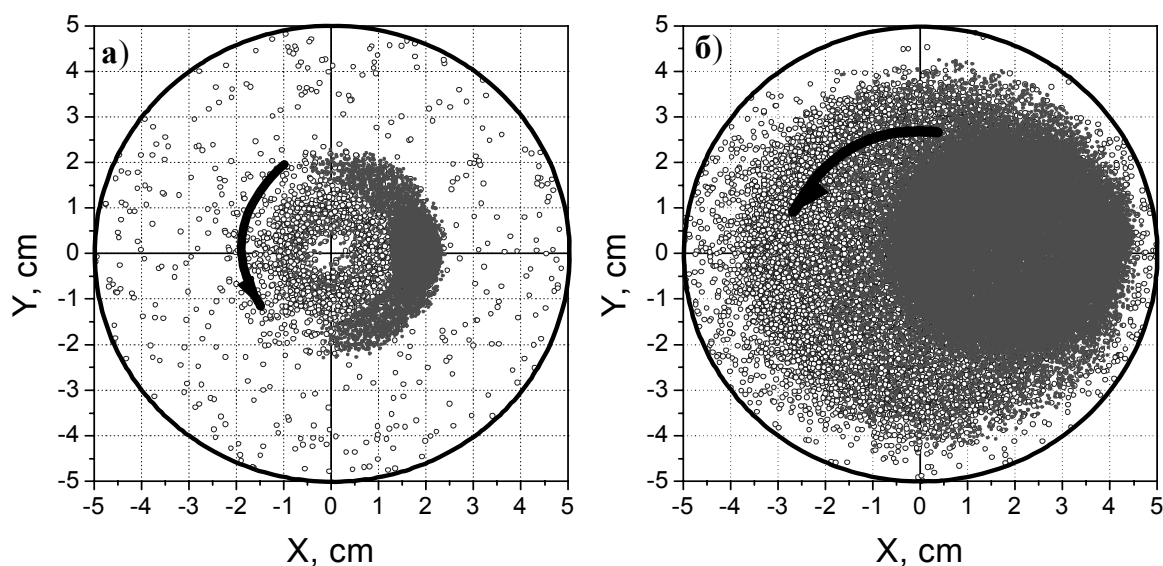


Рис. 10.3.  $XY$ -сечения пространственных распределений электронов (обозначены черными символами) и ионов (обозначены серыми символами), в случае  $r_0 = 0,5$  см (а) и  $r_0 = 2,5$  см (б), после ускорения электронов в режиме СГА до средней энергии 1,0 МэВ ( $E = 2$  кВ/см,  $n_e = 5 \times 10^9$  см $^{-3}$ ,  $R = 1,1$ ). Стрелкой указано направление вращения электронов

На рисунке 10.4 представлены зависимости потерь частиц от начального радиуса плазмы инжекции. В случае сравнительно небольшого радиуса плазмы инжекции потери ионов значительно превышают потери электронов. В результате взаимодействия электронов инжекции с СВЧ электрическим полем они захватываются в режим СГА, их ларморовские радиусы возрастают. Захваченные электроны образуют вращающийся вокруг оси резонатора электронный сгусток, происходит частичное пространственное разделение ионной и электронной компонент плазмы. В результате пространственного разделения возникает сильное амбиполярное поле, величина которого может значительно превышать величину напряженности электрического СВЧ-поля, вследствие чего ионы приобретают энергию в основном в радиальном направлении и часть их

достигает стенок камеры. Часть ионов удерживается электрическим полем захваченных в режим СГА электронов. Эти ионы находятся в потенциальной яме, создаваемой захваченными электронами. Вследствие коллективных эффектов, возникающих в плазме в результате СГА, и попадания электронов в конус потерь, часть из них также оказывается потерянной. Так как ионы не являются замагниченными и удерживаются только полем электронной компоненты, их движение определяется электрическим полем, возникающим в плазме.

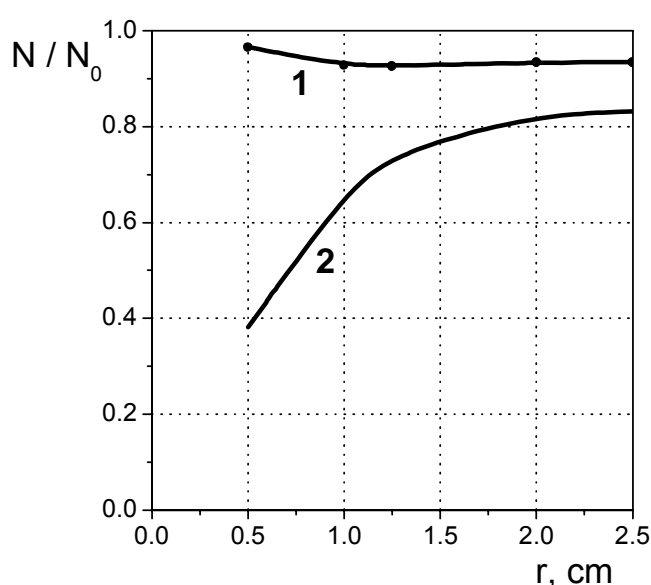


Рис. 10.4. Зависимость удержания электронов (кривая 1) и ионов (кривая 2) от радиуса инжекции исходной плазмы после ускорения электронов в режиме СГА до средней энергии 1,0 МэВ ( $E = 2$  кВ/см,  $n_e = 5 \times 10^9 \text{ см}^{-3}$ ,  $R = 1,1$ )

Потери ионов на конечной стадии должны превосходить потери электронов, в отличие от начальной стадии процесса ускорения, в которой электроны быстрее выпадают на стенки камеры (рис. 10.5a). Превышение потерь ионов по сравнению с потерями электронов для разных параметров лежит в пределах от 9% до 60%. Важно отметить, что после формирования релятивистского электронного сгустка потери частиц практически полностью прекращаются. В случае аргоновой плазмы такая стабилизация

наблюдается значительно позже, чем в случае водородной плазмы (рис 10.56).

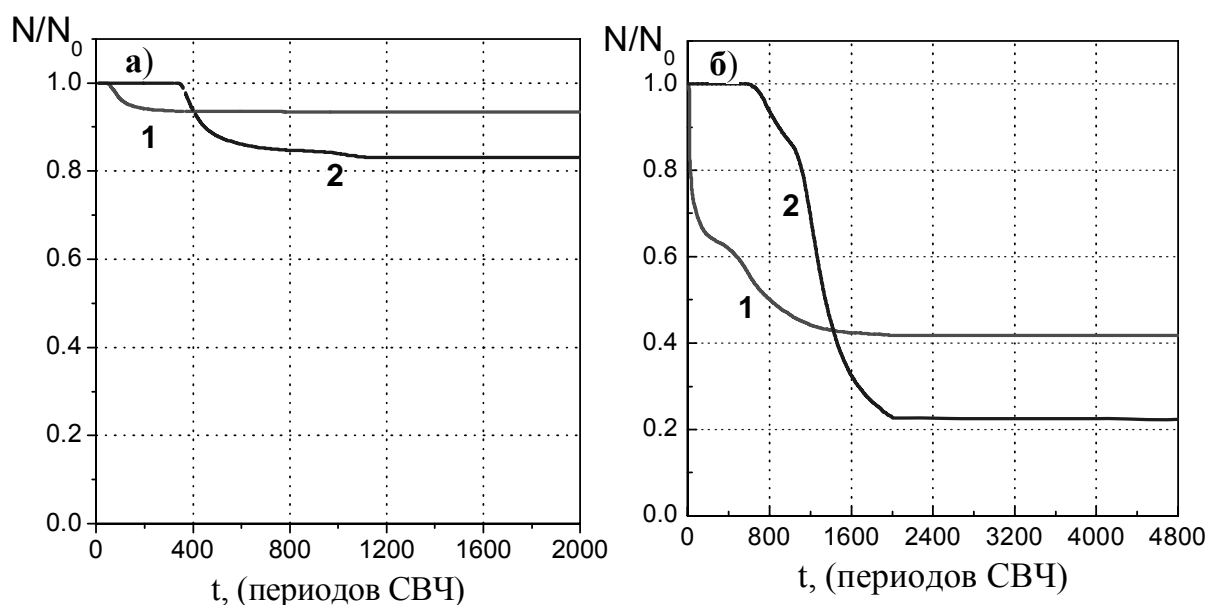


Рис. 10.5. Потери электронов (кривая 1) и ионов (кривая 2) во время ускорения электронов в режиме СГА; (а) -  $r_0 = 2,5$  см (водород) и (б) -  $r_0 = 0,4$  см (аргон), ( $E = 2$  кВ/см,  $n_e = 5 \times 10^9$  см<sup>-3</sup>,  $R = 1,1$ )

На рисунке 10.6 представлено сравнение эффективности захвата электронов водородной плазмы и чисто электронного пучка при одинаковых других параметрах эксперимента. Из результатов расчетов следует, что число ускоренных электронов плазмы в 2,5 раза превышает количество ускоренных частиц чисто электронного пучка, поэтому использование электронного пучка для формирования релятивистских сгустков в условиях СГА неэффективно.

Чтобы найти оптимальные параметры создаваемых релятивистских электронных сгустков, были проведены расчеты для различных начальных значений плотности плазмы при начальном радиусе плазмы инжекции  $r_0 = 0,5$  см. Параметры экспериментов оставались такими же, как и в описанных выше расчетах ( $E = 2$  кВ/см).

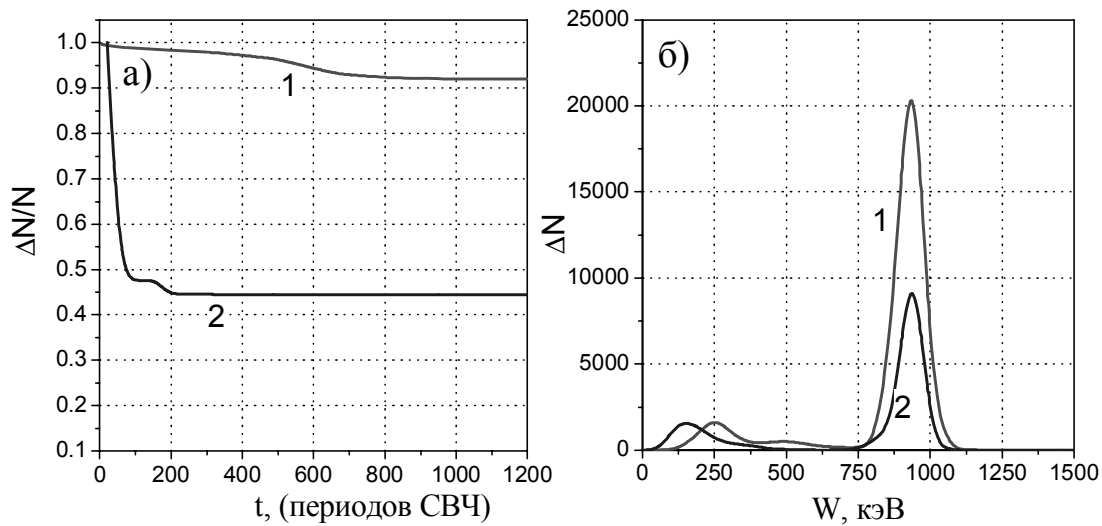


Рис. 10.6. Потери электронов во время ускорения электронов в режиме СГА (а) и энергетические спектры электронов (б) в случае исходной водородной плазмы  $r_0 = 1,0$  см (кривые 1) и в случае инъекции пучка электронов  $r_0 = 1,0$  см (кривые 2) ( $E = 3$  кВ/см,  $n_e = 5 \times 10^8$  см<sup>-3</sup>,  $R = 1,1$ )

Результаты, приведенные на рисунке 10.7, свидетельствуют о возрастании числа захваченных электронов и увеличении энергии ионов при высоком темпе нарастания магнитного поля во времени.

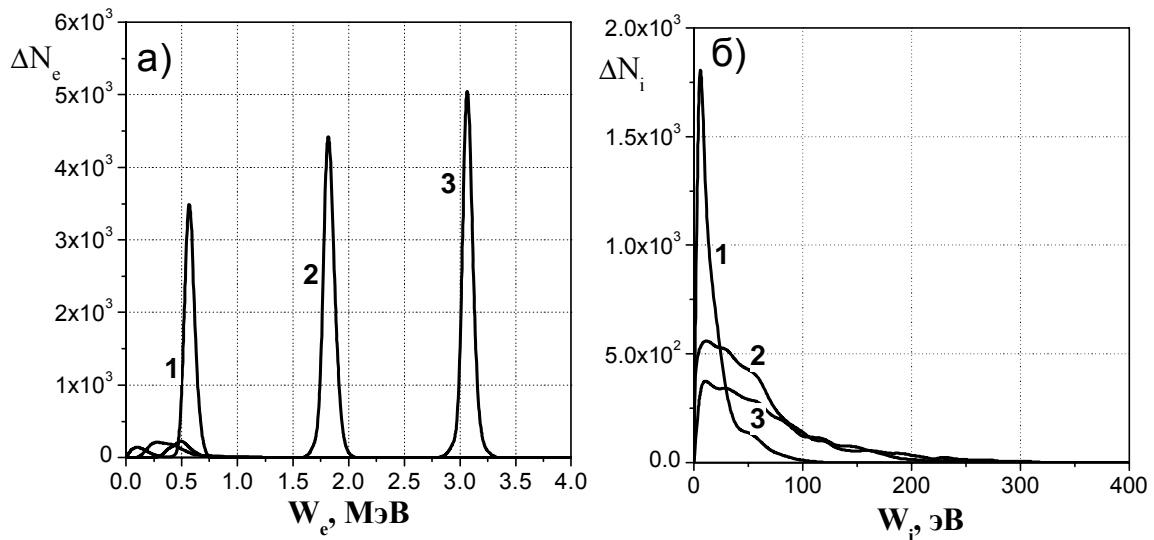


Рис. 10.7. Зависимость энергетических спектров электронов (а) и ионов (б) от темпа нарастания магнитного поля  $dB/dt$ , при ускорении электронов в режиме СГА в течение времени 1 мкс: 1 -  $dB/dt = 1,3$  Гс/нс; 2 -  $dB/dt = 4,0$  Гс/нс; 3 -  $dB/dt = 6,7$  Гс/нс; ( $E = 2$  кВ/см,  $n_e = 1 \times 10^{10}$  см<sup>-3</sup>,  $r_0 = 0,5$  см).

На рисунке 10.8 представлена зависимость плотности ускоренных сгустков электронов от начальной плотности плазмы. Из рисунка 10.8 следует, что при описанных выше параметрах СГА, максимальная плотность создаваемого электронного сгустка достигается при начальной плотности плазмы, равной  $n_e = 3 \times 10^{10} \text{ см}^{-3}$ .

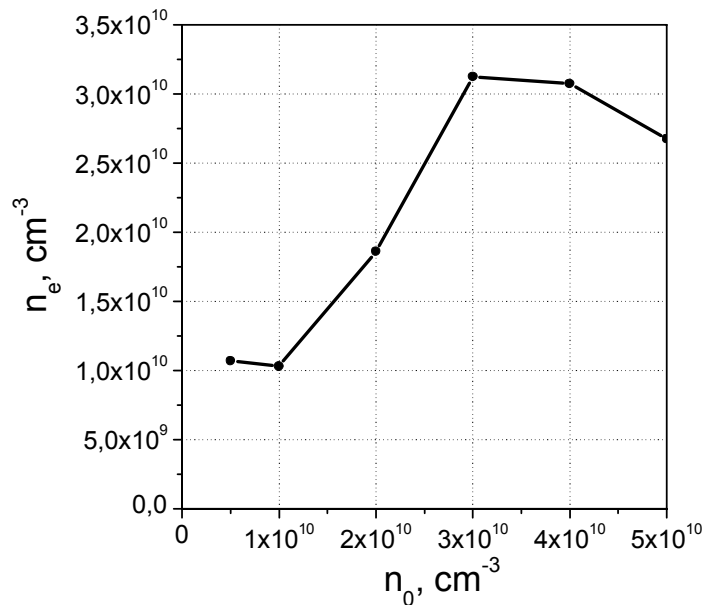


Рис. 10.8. Плотность создаваемого сгустка электронов  $n_e$  в зависимости от начальной плотности плазмы инжекции  $n_0$  по достижении средней энергии 2,0 МэВ ( $E = 2,0 \text{ кВ/см}$ ,  $r_0 = 0,5 \text{ см}$ ,  $dB/dt = 4,0 \text{ Гс/нс}$ )

Результаты вычислительных экспериментов показали, что в результате СГА возможно создание сгустков с параметрами, варьируемыми в широких пределах. Максимально достижимая плотность сгустка зависит от напряженности СВЧ-поля, начальной плотности плазмы инжекции и начального радиуса плазмы. Например, при плотности плазмы инжекции  $n_e = 3 \times 10^{10} \text{ см}^{-3}$ , с радиусом  $r_0 = 0,5 \text{ см}$  после цикла ускорения электронов до средней энергии  $W = 2,0 \text{ МэВ}$  формируется релятивистский плазменный электронный сгусток (рис. 10.9 со следующими параметрами:  $n_e = 3,15 \times 10^{10} \text{ см}^{-3}$ ; общее число электронов в сгустке  $N_e = 3,8 \times 10^{10}$ ;



ширина энергетического спектра электронов  $\Delta W = 100$  кэВ (рис. 10.9в).  
40% от начального числа ионов удерживаются в ловушке.

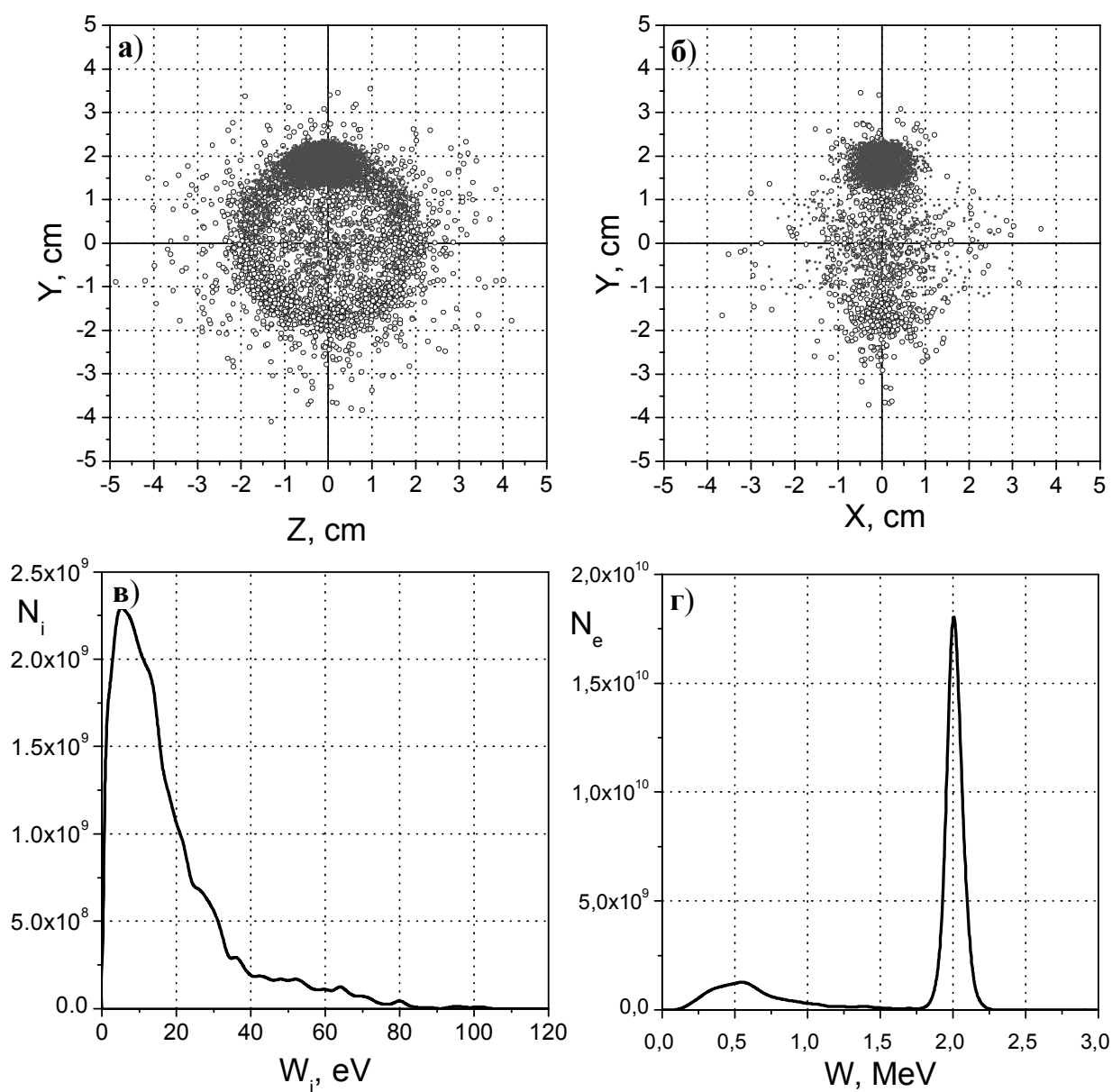


Рис. 10.9.  $XY$  (а) и  $ZY$  (б) поперечные сечения пространственных распределений электронов (обозначены черными символами) и ионов (обозначены серыми символами). Энергетические спектры ионов (в) и электронов (г)

### 10.3. Численная модель формирования плотных плазменных сгустков

В этом параграфе описаны основные этапы моделирования адиабатического сжатия плазмы и проведен вычислительный эксперимент по адиабатическому сжатию плазмы, получаемой в результате СГА.

#### 10.3.1. Численная модель адиабатического сжатия плазмы

Для моделирования адиабатического сжатия плазмы построена трехмерная модель с учетом электростатических и магнитных взаимодействий [6]. По сравнению с моделью, описанной в Теме 9, учтено собственное магнитное поле плазмы.

**Цикл вычислений состоит из следующих основных этапов:**

1. По известным в момент времени  $n$  пространственному распределению частиц плазмы (электронов и ионов) и токам, создаваемым движущимися зарядами, в узлах заданной пространственной сетки рассчитываются плотность заряда  $\rho(i, j, k) \equiv \rho(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z)$  и плотность тока  $\vec{J}(i, j, k) = \rho(i, j, k) \cdot \vec{V}(i, j, k)$ . Здесь  $i, j, k$  – номера узлов в направлениях  $X, Y, Z$  соответственно,  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  – пространственные шаги в этих направлениях;  $i = 1, \dots, L$ ;  $j = 1, \dots, M$ ,  $k = 1, \dots, N$ ,  $\vec{V}(i, j, k)$  – скорости электронов в узлах сетки. Плотности заряда и тока в узлах сетки находятся с помощью процедуры раздачи заряда и тока по восьми ближайшим к частице узлам.
2. На стационарной пространственной сетке решаются уравнение Пуассона,  $\Delta\phi = -4\pi\rho$ , конечно-разностная форма которого имеет вид (2.1), и уравнения Пуассона, для составляющих векторного

потенциала  $\Delta \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{J}$ , вид которых аналогичен уравнению (9.1),

Например, для  $x$  – составляющей векторного потенциала:

$$\begin{aligned} & \frac{A_x(i-1, j, k) - 2A_x(i, j, k) + A_x(i+1, j, k)}{(\Delta x)^2} \\ & + \frac{A_x(i, j-1, k) - 2A_x(i, j, k) + A_x(i, j+1, k)}{(\Delta y)^2} \\ & + \frac{A_x(i, j, k-1) - 2A_x(i, j, k) + A_x(i, j, k+1)}{(\Delta z)^2} = -\frac{4\pi}{c} J_x(i, j, k) \end{aligned} \quad (10.1)$$

3. Самосогласованное электрическое поле  $\vec{E} = -\nabla\Phi$  и самосогласованное магнитное поле плазмы  $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$  вычисляются с помощью разностных производных, уравнения для которых имеют вид (2.2). Составляющие магнитного поля имеют следующие вид:

$$\begin{aligned} B_x(i, j, k) &= \frac{A_z(i, j+1, k) - A_z(i, j-1, k)}{2\Delta y} - \frac{A_y(i, j, k+1) - A_y(i, j, k-1)}{2\Delta z} \\ B_y(i, j, k) &= \frac{A_x(i, j, k+1) - A_x(i, j, k-1)}{2\Delta z} - \frac{A_z(i+1, j, k) - A_z(i-1, j, k)}{2\Delta x} \quad , \quad (10.2) \\ B_z(i, j, k) &= \frac{A_y(i+1, j, k) - A_y(i-1, j, k)}{2\Delta x} - \frac{A_x(i, j+1, k) - A_x(i, j-1, k)}{2\Delta y} \end{aligned}$$

Общее электрическое поле и общее магнитное поле, действующие на частицу, определяются, как и в главе 2 с помощью билинейной интерполяции, обобщенной на трехмерный случай.

4. Уравнение движения электронов в виде (2.3) решается по схеме Бориса. Суммарное электрическое поле  $\vec{E} = \vec{E}_s + \vec{E}_i$ , где  $\vec{E}_i$  – индуцированное электрическое поле и  $\vec{E}_s$  – собственное электрическое поле плазмы. СВЧ-поле отсутствует. Суммарная индукция магнитного поля  $\vec{B} = \vec{B}_{st} + \vec{B}_s + \vec{B}_{imp}$ , где  $\vec{B}_{st}$  – индукция

стационарного магнитного поля,  $\vec{B}_{imp}$  – индукция импульсного магнитного поля, создаваемого системой магнитных катушек и  $\vec{B}_s$  – собственное магнитное поле плазмы. Ионы считались замагниченными, так как радиусы их циклотронного вращения сравнимы с поперечным размером вакуумной камеры. Уравнение движения протонов имеет следующий конечно-разностный вид:

$$\frac{\vec{u}_i^{n+\frac{1}{2}} - \vec{u}_i^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta\tau} = \frac{\vec{g}^n}{R_m} + \frac{\vec{u}_i^{n+\frac{1}{2}} + \vec{u}_i^{n-\frac{1}{2}}}{2\gamma_i} \times \vec{b}^n, \quad (10.3)$$

где  $u_i$  – импульс протона в единицах  $m_p c^2$ ,  $\gamma_i$  – релятивистский фактор протона,  $m_p$  – масса покоя протона.

Цикл вычислений завершается расчетом новых координат частиц и получением нового распределения частиц в координатном пространстве и пространстве импульсов. В дальнейшем цикл вычислений повторяется.

Таким образом, переход от координат и импульсов частиц в момент времени  $n$  к координатам и импульсам в момент времени  $n+1$  (частицы продвигаются на один временной шаг) может быть представлен следующим образом:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{matrix} x_m^n, y_m^n, z_m^n \\ p_{xm}^n, p_{ym}^n, p_{zm}^n \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \rho_{ijk} \\ \vec{j}_{ijk} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \phi_{ijk} \\ \vec{A}_{ijk} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \vec{E}_{s(ijk)} \\ \vec{B}_{s(ijk)} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \vec{E}_m^{n+\frac{1}{2}} \\ \vec{B}_m^{n+\frac{1}{2}} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x_m^{n+1}, y_m^{n+1}, z_m^{n+1} \\ p_{xm}^{n+1}, p_{ym}^{n+1}, p_{zm}^{n+1} \end{matrix} \right\}. \end{aligned} \quad (10.4)$$

( $n$  – номер временного шага,  $m$  – номер частицы).

**Особенности численной модели.** В модели адиабатического сжатия плазмы используются сетки с более мелким шагом и, соответственно, с большим количеством узлов сетки по всем направлениям (64x64x64 и 128x128x128).

Численное моделирование позволяло получать следующую информацию о свойствах и параметрах исследуемой плазмы:

- пространственные распределения электронной и ионной компонент плазмы;
- энергетические спектры электронной и ионной компонент плазмы;
- потери частиц из плазмы;
- величину индукции собственного магнитного поля плазмы;
- напряженность собственного электрического поля плазмы.

### **10.3.2. Параметры плазмы, генерируемой в результате СГА с последующим адиабатическим сжатием**

Моделирование плазмы в режиме СГА с последующим адиабатическим сжатием проводится в два этапа. На первом этапе моделировалось ускорение электронов плазмы инжекции в условиях синхротронного гиромагнитного авторезонанса. На втором этапе – адиабатическое сжатие получаемой плазмы. В ряде случаев первый этап опускался, а начальное пространственное распределение частиц плазмы (координаты частиц) и распределение по энергиям (импульсы частиц), также как и некоторая другая информация, необходимая для расчетов, считывались из файлов результатов, полученных при моделировании СГА

На первом этапе моделирования было проведено изучение ускорения электронов плазмы инжекции в условиях синхротронного гиромагнитного авторезонанса. Расчеты проводились для следующих исходных параметров

плазмы: начальная средняя энергия электронов плазмы инжекции  $W_0=10$  эВ; плотность исходной плазмы  $n = (5 \times 10^9 \text{ см}^{-3} - 5 \times 10^{10} \text{ см}^{-3})$ . Радиус плазмы инжекции  $r = 0.4\text{--}2.5$  см; амплитуда СВЧ-поля – 2 кВ/см ( $f=2,45$  ГГц,  $TE_{111}$ ); начальные энергии ионов – единицы электронвольт; время СГА-импульса – десятки микросекунд.

Задача моделирования адиабатического сжатия плазмы является этапом, предшествующим моделированию коллективного ускорения протонов. Для эффективного ускорения протонов необходимо получить плотный плазменный сгусток с релятивистской электронной компонентой. Второе условие достигается достаточно легко и является результатом СГА. Однако достичь заданной величины энергии можно различным образом. Например, энергию электронов 1 МэВ можно получить непосредственно в результате СГА. Проблема, однако, состоит в том, что в процессе СГА плотность плазмы падает вследствие возрастания радиусов ларморовских орбит электронов. Кроме того, частицы теряются на стенках камеры или не захватываются в режим СГА. Таким образом, для достижения возможно большей энергии длительность СГА-импульса должна быть достаточно большой, но в этом случае процесс адиабатической компрессии менее эффективен по сравнению с адиабатическим сжатием плазмы с более низкой энергией.

Как показали результаты тестовых расчетов, наиболее предпочтительным является ускорение электронов в режиме СГА до средней энергии порядка 250 – 500 кэВ, а затем должна включаться стадия адиабатического сжатия.

Для определения оптимальных параметров плазменного сгустка проводились вычислительные эксперименты, в которых варьировались следующие параметры: плотность и радиус плазмы инжекции; время СГА-импульса.

На рисунке 10.10 представлены результаты адиабатического сжатия ускоренного электронного сгустка со следующими начальными параметрами:  $r_0=0.5$  см;  $n_e=1 \times 10^{10}$  см<sup>-3</sup>. Амплитуда напряженности электрического СВЧ-поля 2 кВ/см.

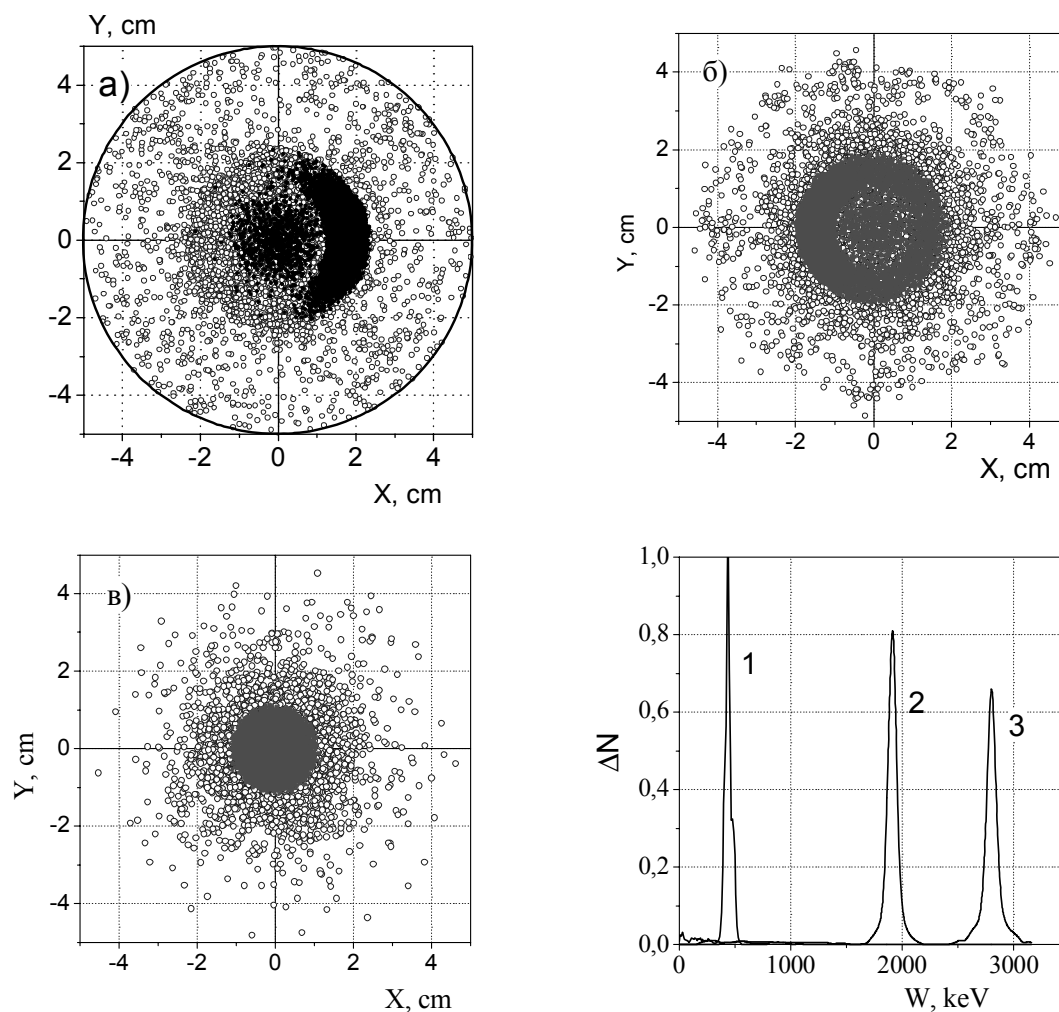


Рис. 10.10.  $XY$  пространственные распределения электронов (обозначены черным) и ионов (обозначены серым) в процессе адиабатического сжатия для различных моментов времени: а) непосредственно после цикла СГА; б) после нарастания магнитного поля до 8 кГс; в) после нарастания магнитного поля до 12 кГс; соответствующие энергетические спектры электронов представлены на рисунке внизу справа

Из рисунка 10.10 следует, что ускоренный при СГА сгусток электронов трансформируется в полукольцо, а затем и диск. Потери ионов на стенках прекращаются, так как они удерживаются кулоновским полем

электронов. В процессе адиабатического сжатия энергетический спектр электронов уширяется. Потери электронов полностью отсутствуют. Энергия электронов возрастает в 6 раз, а плотность электронной компоненты в 4 раза.

Результаты моделирования адиабатической компрессии плазмы представлены на рисунке 10.11. Из рисунка 10.11 следует, что в результате компрессии электронный сгусток трансформируется в диск с размерами: продольный -  $l = 0.75$  см, поперечный -  $r = 2,25$  см. Потери электронов не наблюдались. Таким образом, средняя плотность электронной компоненты возрастает в 5 раз. Отметим, что аксиальное уменьшение размеров сгустка в процессе сжатия оказалось более существенным, чем в радиальном направлении. По всей видимости, это связано с характером движения электронного сгустка, которое существенно отличается от движения сгустков, например, в традиционных циклических ускорителях. В нашем случае движение заряженных частиц нельзя представить как параллельные токи. Орбиты электронов пересекаются на каждом периоде циклотронного вращения. С этим и связан достаточно низкий, вопреки ожиданиям, коэффициент сжатия плазменного сгустка в радиальном направлении. Фактически сжатие происходит лишь за счет уменьшения радиусов циклотронного вращения электронов при возрастании магнитного поля. Максимум плотности электронной компоненты находится в геометрическом центре плазменного сгустка.

На рисунке 10.12 приведены энергетические спектры электронов и ионов после окончания стадии компрессии. Энергии ионов, как следует из рисунка, достигают лишь нескольких десятков электрон-вольт, причем энергии основной части ионов, находящихся в электронном сгустке, не превышают 20 эВ.



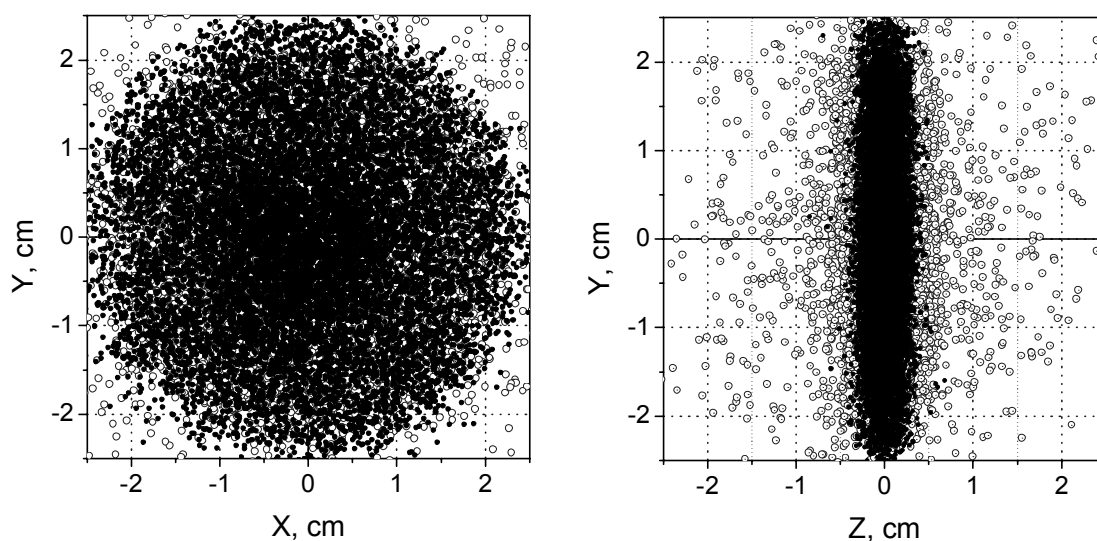


Рис. 10.11.  $XY$  (слева) и  $ZY$  (справа) сечения пространственных распределений электронов (обозначены черным) и ионов (обозначены серым) после адиабатического сжатия СГА плазмы

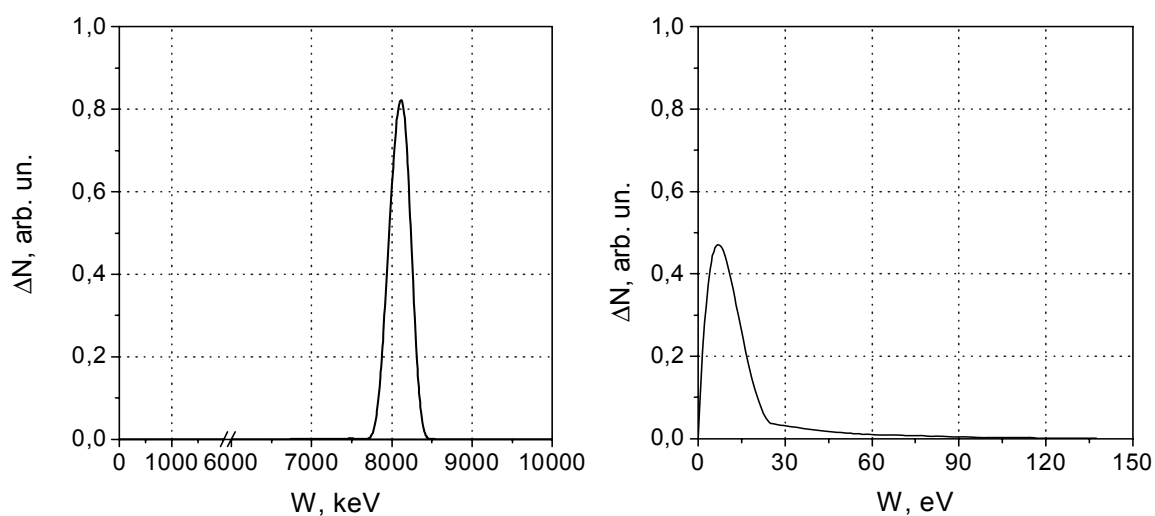


Рис. 10.12. Энергетические спектры электронов (слева) и протонов (справа) после стадии адиабатической компрессии

На рисунке 10.13 приведена зависимость  $z$ -составляющей напряженности электрического поля, создаваемого отдельно взятой электронной компонентой плазменного сгустка. Из рисунка следует, что

максимум величины напряженности поля наблюдается при  $r=0$ , то есть на оси вакуумной камеры. На рисунке 10.14 представлена величина индукции магнитного поля плазменного сгустка на оси вакуумной камеры. Знак минус означает, что собственное магнитное поле плазменного сгустка имеет направление обратное основному магнитному полю, создаваемому системой магнитных катушек.

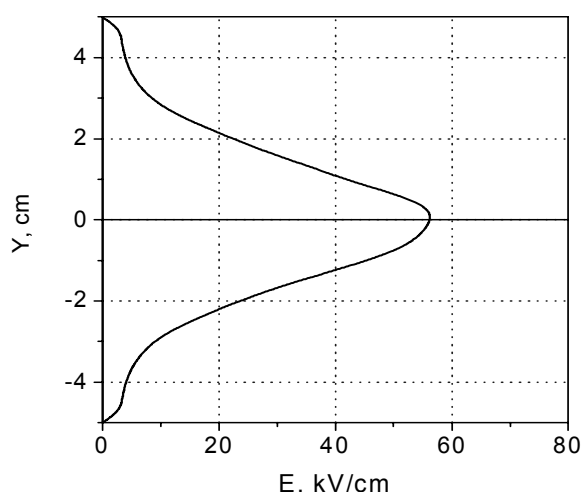


Рис. 10.13. Напряженность электрического поля  $E_z$ , создаваемого отдельно взятым электронным диском

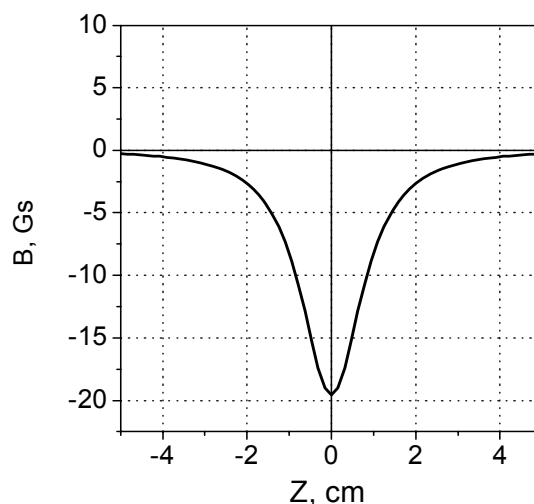


Рис. 10.14. Индукция магнитного поля плазмы  $B_z$  на оси вакуумной камеры

Анализ результатов численного моделирования адиабатического сжатия показал, что в случае  $r_0 / r_L > 1$ , в результате СГА с последующим адиабатическим сжатием возможно создание плотного плазменного сгустка с энергией электронов  $W = 5\text{--}8$  МэВ и плотностью электронной компоненты  $n_e = 5 \times 10^{10} - 5 \times 10^{11} \text{ см}^{-3}$ . Практически вся энергия электронов сосредоточена в поперечном (к силовым линиям магнитного поля) движении частиц. Средняя энергия ионов составляет несколько десятков электрон-вольт. Потери ионов в создаваемых в результате СГА и последующего адиабатического сжатия плазменных сгустках превышают потери электронов, таким образом, получаемая плазма является отрицательно заряженной. Степень заряженности плазмы зависит от

начальных параметров плазмы и параметров эксперимента и, как правило, не превышает 10%.

#### 10.4. Коллективное ускорение протонов плазменного сгустка

В данном параграфе описаны результаты вычислительного эксперимента по коллективному ускорению протонов в спадающем в пространстве магнитном поле [7, 8].

Расчеты проводились для параметров плазменного сгустка, полученного в результате СГА с последующей адиабатической компрессией плазмы (см. 10.3). Численный эксперимент проводился для следующих параметров плазменного сгустка: средняя энергия электронов – 8 МэВ; характерные размеры плазменного сгустка  $d = 0.75$  см,  $r = 2.5$  см; степень заряженности плазмы – 10%; средняя плотность плазмы  $n_e = 5 \times 10^{10} - 5 \times 10^{11}$  см<sup>-3</sup>. Средний градиент магнитного поля варьировался от 5 Гс/см до 40 Гс/см. Для градиента магнитного поля выполнялось условие  $d^2 B_z / dz^2 > 0$ . Выполнение этого условия необходимо для того, чтобы диамагнитная сила, действующая на электроны в передней в направлении движения части сгустка, была меньше диамагнитной силы, действующей на электроны в тыловой части сгустка. Фактически это условие сохранения компактности сгустка.

Изучение стадии ускорения проводилось на расстоянии 1 м. На рисунке 10.15 представлены сечения пространственных распределений электронной и ионной компонент при плотности плазмы  $n_e = 5 \times 10^{10}$  см<sup>-3</sup>. В процессе аксиального ускорения электронной компоненты происходит частичное (а в ряде случаев, практически, полное) разделение электронной и ионной компонент. Протоны ускоряются возникающим полем поляризации.

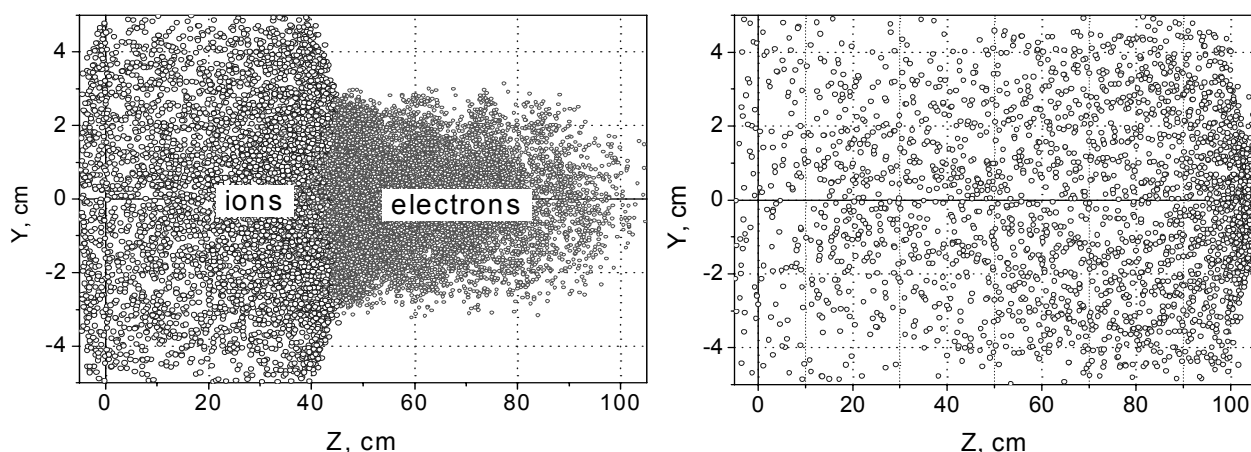


Рис. 10.15. Поперечные  $ZY$  сечения пространственных распределений электронной и ионной компонент в процессе ускорения (слева) и распределение ускоренных протонов в конечной фазе ускорения (справа)

Не захваченные в режим ускорения протоны рассеиваются под влиянием собственного кулоновского поля и попадают на стенки камеры.

Часть протонов (до 20%) ускоряется и попадает в диафрагму вывода ускоренного сгустка протонов.

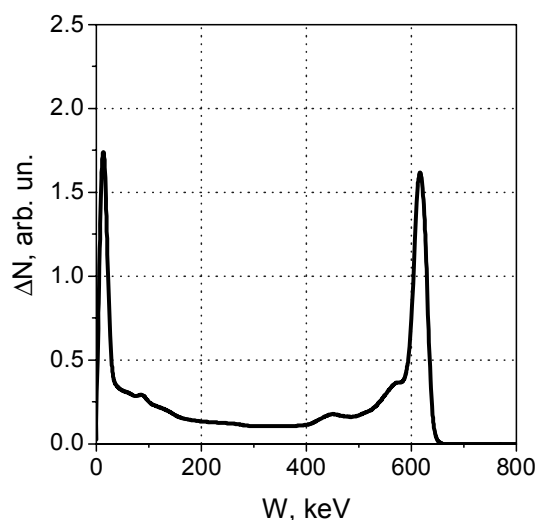


Рис. 10.16. Энергетический спектр ускоряемых протонов

Энергия ускоренных ионов для приведенных выше параметров численного эксперимента достигает 5 МэВ (рис. 10.16). Для такого значения плотности плазмы, как  $n_e = 5 \times 10^{10} \text{ см}^{-3}$ , это вполне хороший результат, хотя и

несколько ниже прогнозируемого авторами проекта ECRIPAC [7].

Полученные в вычислительных экспериментах по коллективному ускорению протонов релятивистских плазменных сгустков результаты

позволяют оптимистично оценивать возможность создания компактного коллективного ускорителя протонов.

## **Список литературы к теме 10**

### **Использованная литература:**

1. Аневский С.И., Верный А.Е., Панасюк В.С. и др., Специализированный источник синхротронного излучения «Тролль-2». Приборы и техника эксперимента, № 2, 1988, – 129 с.
2. Андреев В.В., Головановский К.С. Плазменный синхротрон ЖИРАК-0 // Физика плазмы. – 1985. Т.11, вып. 5. – 300 с.
3. Andreev V. V., Umnov A. M. Plasma Sources Sci. –Technol. 1999. V. 8. 479 p.
4. Birdsall C.K., Langdon A.B. Plasma Physics via Computer Simulation. – IOP Publishing LTD, 1991.
5. Geller R. Electron Cyclotron Resonance Ion Sources and ECR Plasmas. – IOP Publishing LTD, 1996.
6. Вычислительные методы в физике. Управляемый термоядерный синтез. / Под ред. Дж. Киллина. – М.: Мир, 1980.
7. Geller R., Golovanivsky K.S. Nuclear Instruments and Methods. – 1992. V. 68. 7 p.
8. Кубе Б. М., Милантьев В. П., Умнов А. М. Численное моделирование коллективного ускорения протонов в ускорителе ECRIPAC // Прикладная физика. – 2005. № 6. – 84 p.

### **Рекомендуемая литература:**

1. Бэдсел Ч., Ленгдон А. Физика плазмы и численное моделирование. – М: Энергоатомиздат, 1989.
2. Хокни Р., Иствуд Дж. Численное моделирование методом частиц. – М.: Мир, 1987.

3. Сигов Ю.С. Вычислительный эксперимент: мост между прошлым и будущим физики плазмы. – М.: Физматлит, 2001.
4. Туриков В.А., Ульяницкий И.В., Умнов А.М. Численное моделирование плазменных процессов. – М.: Изд-во РУДН, 2003.

## **Тема 11. Инструментальная среда для проведения вычислительного эксперимента по изучению динамики заряженных частиц в открытых магнитных ловушках**

### **11.1. Инструментальная среда как технология создания виртуальных физических установок**

Бурное развитие информационных технологий в последние десятилетия позволило ученым в различных областях знаний значительно расширить свою деятельность, привлекая новые методы, средства и способы исследования. Одним из таких методов является вычислительный эксперимент, широко используемый не только в естественных науках, но также и в экономике, истории, социологии. Учеными накоплен богатейший опыт в создании моделей сложнейших явлений, однако весь этот огромный потенциал находится в сфере науки и редко используется в образовательном процессе. Адаптация наработанного научного материала к нуждам образования позволит значительно разнообразить процесс обучения, сделать его более доступным и эффективным.

Многие численные модели физических явлений являются своего рода виртуальными экспериментальными установками. Такие модели, адаптированные для курсов общей физики и специальных курсов, могут широко использоваться в учебном процессе, в том числе в дистанционном образовании и в научных исследованиях.

В настоящей Теме дано описание инструментальной среды для создания виртуальных физических установок и методика проведения вычислительного эксперимента на примере изучения динамики заряженных частиц в открытых магнитных ловушках. Состав и свойства инструментальной среды позволяют применять ее для решения широкого круга задач.

Основные преимущества и новизна применения инструментальной среды, на наш взгляд, заключается в следующем:

- возможность создания виртуальных установок с широко варьируемыми параметрами;
- «освобождение» экспериментатора от обязательного знания программирования;
- визуализированное (анимированное) представление результатов в ходе вычислительного эксперимента;
- анимационная демонстрация исследуемых процессов и явлений.

Таким образом, при помощи инструментальной среды физик, обладающий минимумом знаний в области численного моделирования и современных информационных технологий, может самостоятельно проектировать физические экспериментальные установки, проводить вычислительный эксперимент и диагностику полученных результатов, без затруднений варьируя параметры системы. Преподаватель может демонстрировать физические процессы, а студент выполнять комплекс лабораторных работ и проводить научные исследования. Реализация вычислительного эксперимента с помощью инструментальной среды значительно облегчает понимание процессов, протекающих в реальных устройствах.

Инструментальная среда состоит из четырех основных частей: ядра, графического интерфейса, математических и визуализационных модулей-`plugin`'ов<sup>2</sup>. При наличии минимального опыта в программировании, благодаря разработанной архитектуре среды, у экспериментатора появляется возможность внести свои коррективы в численную и визуализационную модель программы. Созданный `plugin` предоставляет пользователю практически неограниченные возможности настройки: любой

---

<sup>2</sup> Графический интерфейс и система плагинов разработаны студентом факультета Вычислительная математика и кибернетика МГУ им. М.В. Ломоносова Ткаченко М.С.



математический или графический модуль может быть легко заменен более подходящим.

Основой инструментальной среды является численная модель движения заряженных частиц в электрическом и магнитном полях. Для достижения универсальности, быстродействия и гибкости системы использован широкий ряд средств разработки компьютерных программ. С помощью Borland Delphi создан интуитивно понятный и простой в использовании интерфейс. Все математические вычисления реализуются при помощи Microsoft Fortran Power Station. Модули визуализации созданы в среде Microsoft Visual Studio C++ с использованием OpenGL.

## 11.2. Основы работы с инструментальной средой

Работа по постановке и проведению виртуального вычислительного

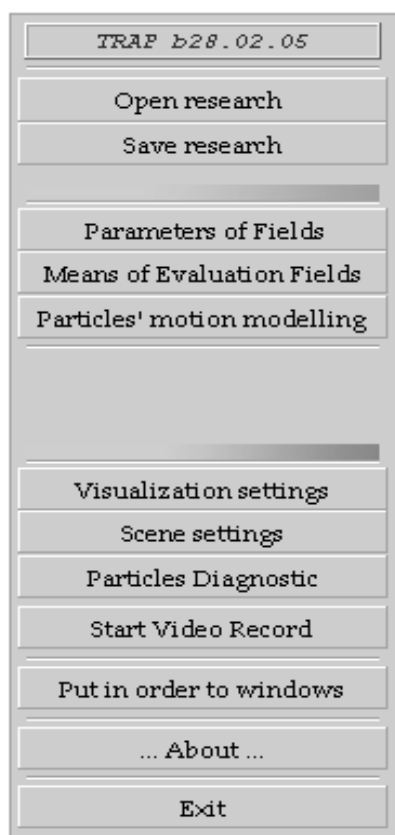


Рис. 11.2

эксперимента начинается с запуска программы trap.exe и вызова главного меню путём нажатия кнопки с изображением стрелки (рис. 11.1), расположенной в правом нижнем углу главного окна.



Рис. 11.1

В появившемся меню (рис. 11.2) пользователю предлагается задать параметры для проведения нового эксперимента (Means of Evaluation Fields) или открыть старый проект (Open research).

В разработанной инструментальной среде реализована типовая модель

деятельности пользователя при проектировании и эксплуатации экспериментальной установки.

Первый шаг – задание параметров магнитного поля ловушки, размеров резонатора и СВЧ электрического поля. Исследователь может определить параметры осесимметричных магнитных катушек: их внутренние и внешние радиусы, высоту, положение их геометрических центров и конструктивные плотности токов. Максимальное число магнитных катушек – 14.

The screenshot shows a software window titled "Input Date and Computing" with three tabs: "Parameters of Fields", "Technique of Fields Computing", and "Perform experiment". The "Parameters of Fields" tab is active and contains several input sections:

- Magnetic Field**
  - Coils**: A dropdown menu shows "Coil 1".
  - Outer radius**: 12.000
  - Inner radius**: 4.001
  - Height**: 4.000
  - Location by Z**: 9.500
  - Coil current density**: 5.5000E+000, with an "Enable" checkbox.
  - Buttons: "Apply" and "Delete Coil".
- Matrix**: A 3D grid diagram with dimensions I=25 and J=100.
- Permanent Magnet**
  - Magnetic induction on surface**: 0.000
  - Radius**: 4.000
- Electric Field**
  - Electric field Strength UHF**: 2.000
  - Frequency f**: 2.400
  - Mode**: TE<sub>112</sub>
  - Size of resonator**
    - L(cm)**: 16.000
    - D(cm)**: 8.000

At the bottom of the window are two large buttons: "Apply" and "Close".

Рис. 11.3. Вид окна для задания параметров магнитных катушек, вакуумной камеры и СВЧ поля

После задания параметров катушек пользователь с помощью кнопки Apply вводит данные в программу расчета магнитного поля. Магнитное поле рассчитывается на сетке с числом узлов, задаваемым пользователем. Поскольку магнитное поле является осесимметричным, достаточно задать количество узлов в направлениях J (соответствует оси z) и I (соответствует оси r). Возможно также задать изменение магнитного поля во времени (Rate of Magnetic Field Rise in Time). В программе возможен ввод параметров гексаполя, однако в данном описании мы ограничимся лишь системой магнитных катушек.

Ввод параметров резонатора и СВЧ электрического поля (частота в гигагерцах и амплитуда напряженности СВЧ-поля в киловольтах на сантиметр, мода колебаний) осуществляется в правой части окна.

После задания параметров резонатора, магнитного поля катушек и параметров СВЧ-поля пользователь переходит к расчету полей (кнопка Technique of Fields Computing). После проведения расчета полей происходит визуализация структуры магнитного и электрического полей в виде силовых линий, что облегчает создание модели физической установки и восприятие изучаемого процесса.

Следующий шаг – задание ансамбля частиц (в данной задаче электронов). Этот шаг реализуется с помощью окна, переход к которому осуществляется по кнопке Perform experiment (рис. 11.4).

Пользователь вводит количество частиц, время расчета (в количестве временных шагов интегрирования уравнения движения –  $Kt$ ), период вывода результатов (также в количестве временных шагов –  $Kd$ ) и задает начальное распределение частиц в пространстве и по скоростям (энергиям).

**Input Date and Computing**

Parameters of Fields | Technique of Fields Computing | Perform experiment

Number of particles  
1000

Average electron energy  
Energy: 1.00000E+003    Spreading: 1.000000E+006

Time interval of experiments  
Kt: 140000    Kd: 50

Initial distribution of particles  
Choose:  
Cylinder+Maxwell

Generate this method

Random Generate

№	Name	IP	~

Complete: 4 min 57 s  
Remain about: 0 s

Solutions of motion equations  
Calculation trajectories (2D-i)

Begin computing

Used memory: 74 mb    Report Journal

Apply    Close

Рис. 11.4. Вид окна для ввода параметров ансамбля заряженных частиц

Пользователь может задать:

- максвелловское распределение частиц внутри цилиндрической поверхности;
- моноэнергетическое распределение с направлениями импульсов, заданных по случайному закону;
- аксиальную инжекцию цилиндрического пучка электронов.

После задания всех параметров эксперимента выполняется расчет движения частиц в полях заданной конфигурации по кнопке Begin

computing. В процессе расчета выводятся данные об используемой памяти, оценка времени расчета и текущее время расчета.

Следующим шагом является диагностика и анализ полученных данных. В разработанной среде реализована динамическая визуализация проводимого эксперимента и предоставлены практически неограниченные возможности исследования изучаемого явления. Экспериментатор имеет возможность проследить за эволюцией системы, в частности, за траекториями отдельно взятых частиц, выделить группу частиц и проанализировать изменение их средней энергии (температуры) на протяжении всего процесса.

### **11.3. Представление результатов вычислительного эксперимента**

На рисунке 11.5 представлены результаты эксперимента по ускорению электронов при ЭЦР в нарастающем во времени магнитном поле. Мода СВЧ-поля –  $TE_{112}$ . Магнитное поле представляет собой две локальные зеркальные ловушки. Средства динамической визуализации позволяют одновременно выводить информацию в 4 окна (сцены). В результате взаимодействия электронов с СВЧ-полем в нарастающем магнитном поле формируются 2 релятивистских сгустка электронов. На верхних сценах рисунка 11.5 представлены пространственное распределение электронов в резонаторе (слева) и структура электрического СВЧ-поля (справа). На сценах внизу представлены распределение магнитного поля в начальный момент времени (черными кривыми показаны ЭЦР-поверхности) и энергетический спектр электронов.

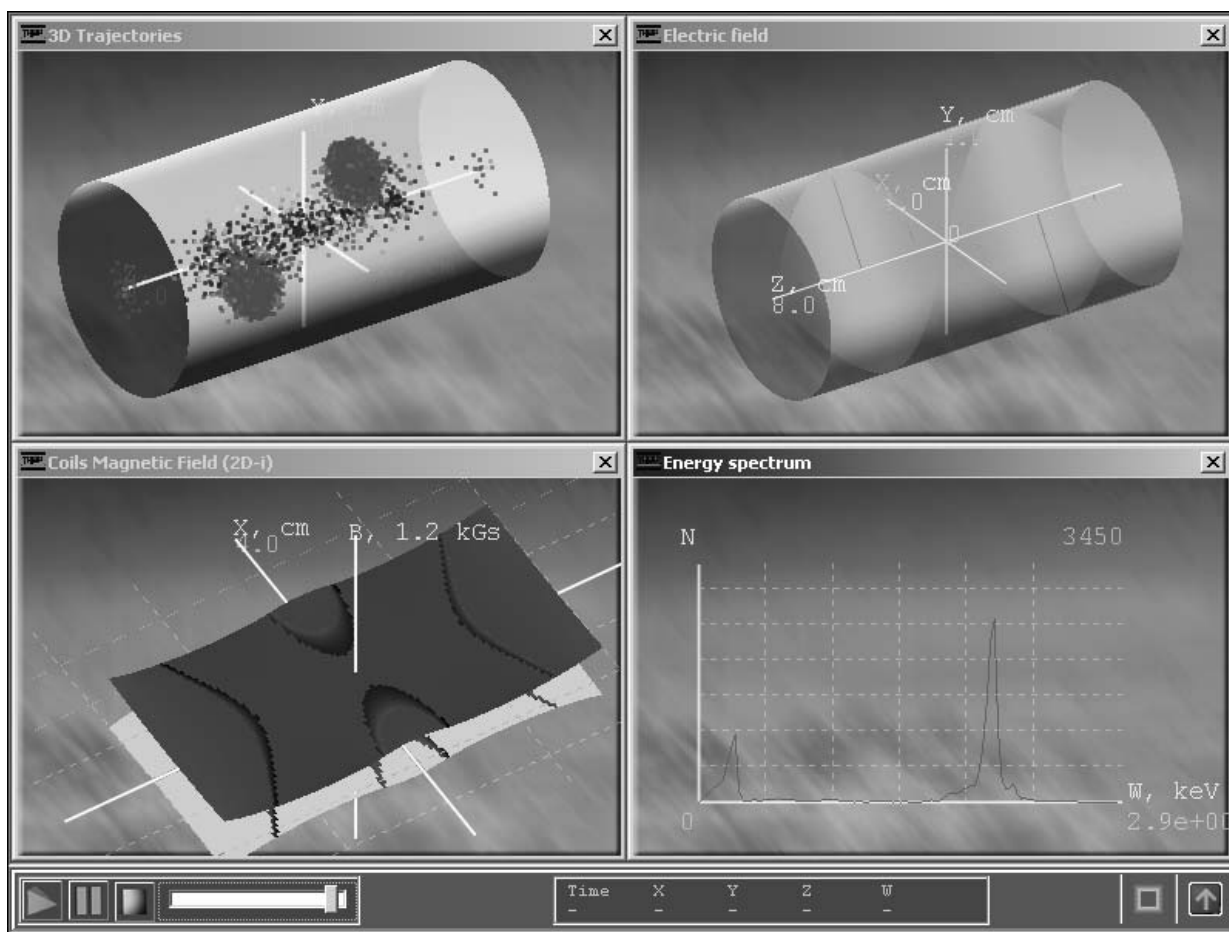


Рис. 11.5. Вид окна диагностики результатов эксперимента

Запуск динамической визуализации осуществляется с помощью левой нижней кнопки. Следующие две кнопки — пауза и стоп, соответственно. Линейка прокрутки позволяет быстро «прокрутить» изучаемый процесс во времени.

Для вызова средств анализа и наблюдения необходимо перейти к окну Visualization (рис. 11.6), обратившись к нему через главное меню.

С помощью этого окна пользователь имеет возможность настроить многочисленные параметры визуализации (цвет фона, цвет резонатора, размер частиц, скорость анимации, выбор сцены, номер «меченой» частицы и многие другие) по своему вкусу.

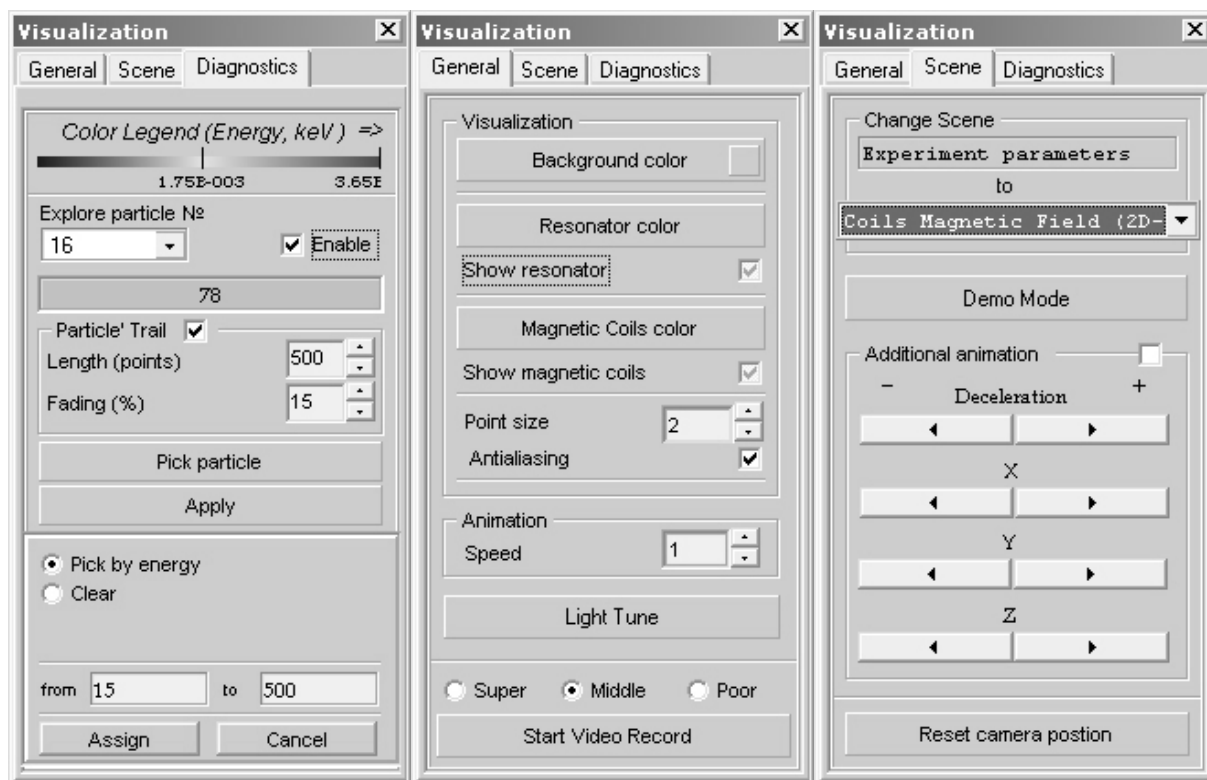


Рис. 11.6. Вид окон средств анализа и наблюдения Visualization

Описанная в настоящей теме инструментальная среда является эффективным средством для изучения физических процессов, связанных с движением заряженных частиц. С помощью разработанного инструментария удастся повысить понимание сложных процессов в таких областях науки, как физика плазмы и физика ускорителей заряженных частиц. Кроме того, инструментальная среда может быть использована в качестве лабораторного практикума в вузах для изучения широкого круга физических явлений, а также для проведения научно-исследовательской работы студентов.

## Список литературы к теме 11

### Использованная литература:

1. В.А. Туриков, И.В. Ульяницкий, А.М. Умнов. Численное моделирование плазменных процессов. – М.: Изд-во РУДН, 2003. – 125 с.
2. О.В. Бартеньев. Современный Фортран. – М.: Изд-во Диалог–МИФИ, 2000. – 448 с.
3. М. Краснов. OpenGL. Графика в проектах Delphi. СПб.: БХВ, 2000. – 352 с.

### Рекомендуемая литература:

1. Алиевский Б.Л., Орлов В.Л. Расчет параметров магнитных полей осесимметричных катушек: Справочник. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 112 с.
2. Никольский В.В. Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Наука, 1978. – 544 с.
3. Умнов А.М., Ткаченко М.С. Визуализация движения заряженных частиц в электромагнитных и магнитостатических полях в интерактивных обучающих программах // В сб. трудов Международной научно-практической конференции «Образовательные, научные и инженерные приложения в среде LabVIEW и технологии National Instruments». Москва, 14–15 ноября 2003 г. – М.: Изд-во РУДН, 2003. – 107–109 с.



## **Тема 12. Параллельное и распределенное программирование**

### **12.1. Введение**

В современном мире компьютер является незаменимым инструментом для обработки разнообразной информации. Спектр задач, при решении которых используется компьютер, варьируется от набора текста в текстовом редакторе до сложнейших вычислительных работ, связанных с решением серьезных научно-вычислительных задач, таких, например, как моделирование климата, гидро- и газодинамика, термоядерный синтез, теоретическая астрофизика и т.д. И если для решения одних задач вполне успешно используется привычный уже персональный компьютер, то для содержательных научно-технических задач, связанных с большими объемами вычислительных работ и требующих значительного времени для проведения расчетов, необходим уже суперкомпьютер, который позволил бы решить поставленную задачу за приемлемое время.

Мысль о том, что для решения задач, с которыми не справляется один компьютер, можно попробовать использовать два, три, сто компьютеров, родилась практически одновременно с появлением первых вычислительных машин. Объединение нескольких машин в один производительный вычислительный узел потребовало решения новой проблемы: исходную задачу нужно разделить на подзадачи, которые можно решать независимо друг от друга, или параллельно. Параллельное решение задачи можно сравнить с конвейером на заводе: на одной линии собирается двигатель, на другой – коробка передач и так далее. Таким образом, параллельные вычисления можно определить как совместное использование множества компьютерных ресурсов для решения одной задачи.

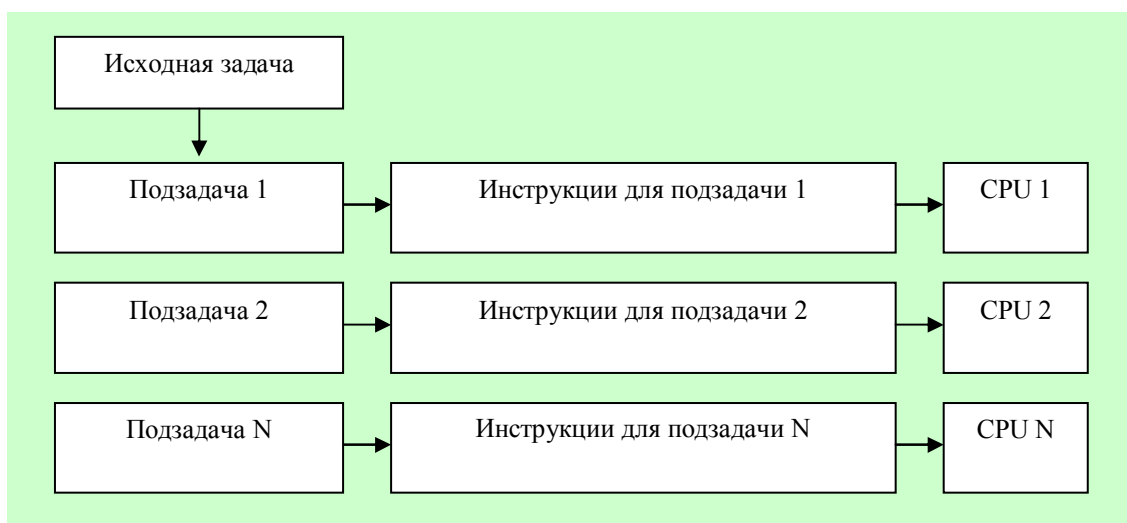


Рис. 12.1. Модель параллельной обработки данных

Компьютерными ресурсами могут быть и отдельный компьютер с несколькими процессорами, и произвольное число компьютеров, объединенных сетью, и комбинация того и другого. Использование параллельных вычислений позволяет решить следующие важные задачи:

- сокращение времени вычислений;
- решение объемных ресурсоемких задач.

## 12.2. Классификация параллельных вычислительных систем

Параллельные вычислительные системы обладают огромной производительностью. Однако при разработке параллельных компьютерных программ необходимо учитывать архитектуру вычислительной системы: если структура программы не будет соответствовать архитектуре вычислительной системы, вместо ожидаемого увеличения производительности можно получить прямо противоположный результат.

Наиболее известной классификацией архитектур вычислительных систем является классификация Флинна. Эта система базируется на использовании команд или инструкций, выполняемых процессором, и обрабатываемых данных и включает в себя четыре категории:

- SISD – Single Instruction/Single Data stream;
- SIMD – Single Instruction/Multiple Data stream;
- MISD – Multiple Instruction/Single Data stream;
- MIMD – Multiple Instruction/Multiple Data stream.

SISD (Single Instruction/Single Data stream) – это одиночный поток команд и одиночный поток данных. Такая архитектура характерна для классических последовательных компьютеров с фон-неймановской архитектурой, в которых в каждый момент времени есть только один поток команд, все команды выполняются последовательно, каждая команда инициирует одну операцию.

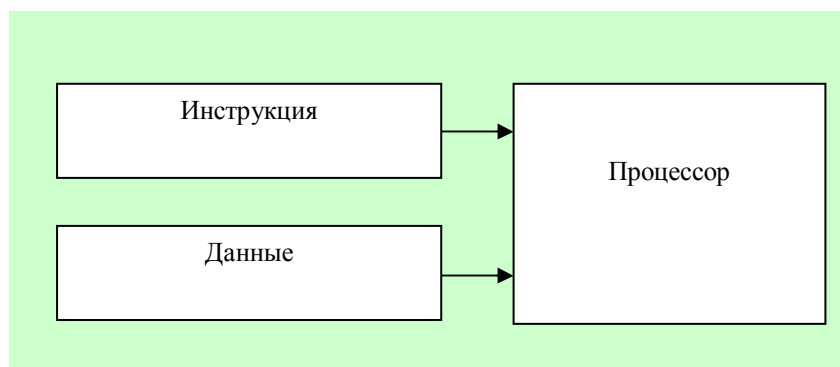


Рис. 12.2. Модель SISD

SIMD (Single Instruction/Multiple Data stream) – это одиночный поток команд и множественный поток данных. В системах с такой архитектурой одна операция может выполняться над многими данными, например, над элементами вектора.

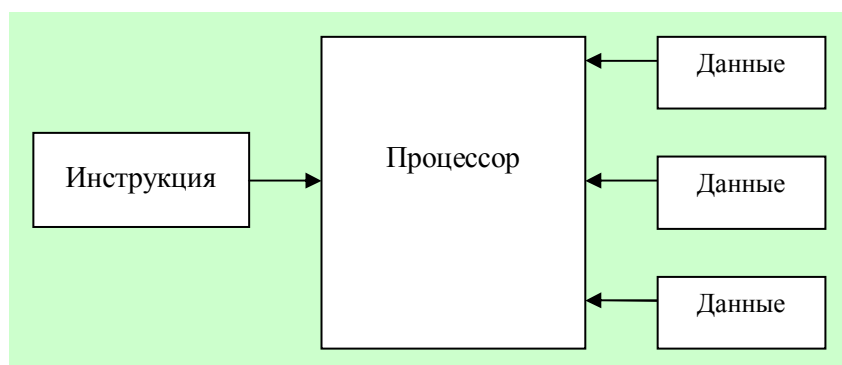


Рис. 12.3. Модель SIMD

MISD (Multiple Instruction/Single Data stream) – это множественный поток команд и одиночный поток данных. В соответствии с этой классификацией, в архитектуре MISD много процессоров должны обрабатывать один поток данных. Специалисты не пришли к единому мнению относительно того, можно ли хотя бы одну существующую вычислительную систему отнести к этому классу.

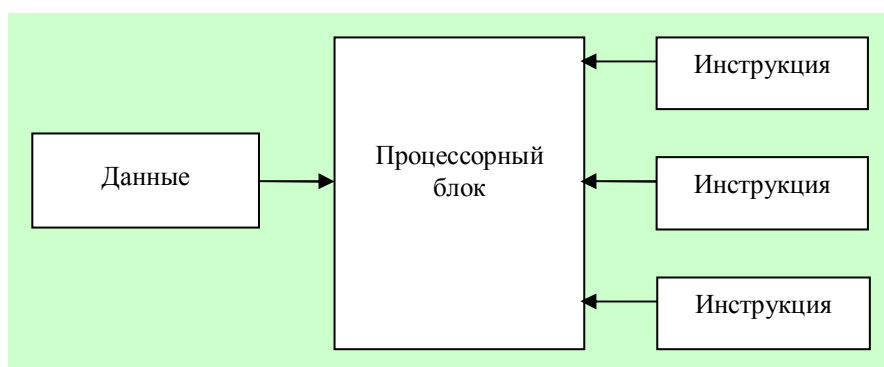


Рис. 12.4. Модель MISD

MIMD (Multiple Instruction/Multiple Data stream) – это множественный поток команд и множественный поток данных. В

устройствах такого класса несколько вычислительных модулей обрабатывают каждый свой поток данных.

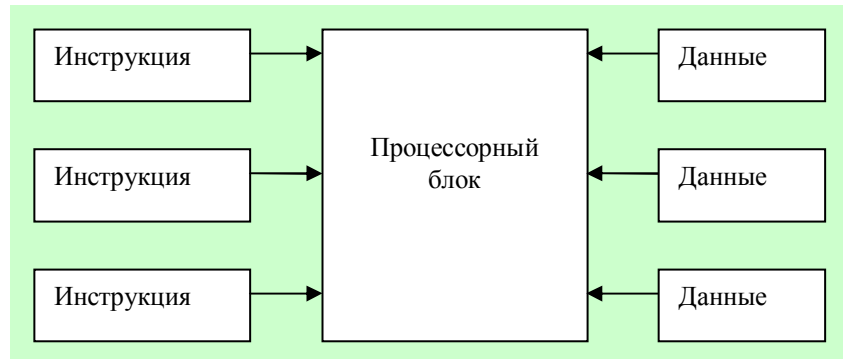


Рис. 12.5 Модель MIMD

Классификация Флинна применяется при начальной характеристике вычислительной системы для определения базовых принципов ее функционирования.

Еще одна схема классификация параллельных компьютеров базируется на способе взаимодействия процессоров с оперативной памятью. От того, как организовано такое взаимодействие, зависит, в частности, техника написания параллельной программы. Имеются две базовых разновидности организации взаимодействия процессоров с оперативной памятью:

1. Системы с общей памятью.
2. Системы с распределенной памятью.

В системах с общей памятью множество процессоров работают независимо друг от друга, имея при этом равнозначный доступ к общей памяти. Преимущества архитектуры с общей памятью заключаются, во-первых, в более простом использовании таких систем при написании параллельных программ и, во-вторых, в очень высокой скорости доступа к данным для разных процессоров. Из недостатков нужно отметить

следующие: проблема синхронизации ложится на программиста. Дело в том, что в системах с общей памятью каждый процессор имеет доступ ко всем переменным, встречающимся в программе, при этом каждый процессор выполняет свою задачу, и при одновременном доступе разных процессоров к общим данным можно получить в итоге неверный результат. Еще один недостаток таких систем заключается в том, что общую память нельзя бесконечно наращивать, а увеличение числа процессоров без увеличения общей памяти будет сказываться на производительности системы в целом.

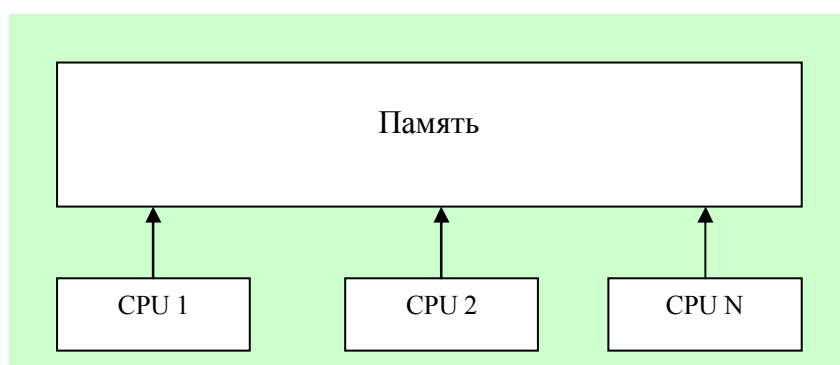


Рис. 12.6. Системы с общей памятью

В системах с распределенной памятью каждый процессор имеет собственную оперативную память. Обмен данными в такой системе организован по принципу передачи сообщений. Число процессоров в таких системах может достигать нескольких сотен или даже тысяч. Среди преимуществ таких систем можно отметить быстрый и беспрепятственный (т.е. без необходимости синхронизации с другими процессорами) доступ каждого процессора к своей памяти и масштабируемость системы, т.е. возможность увеличения числа процессоров, поскольку у каждого процессора своя память. К недостаткам можно отнести то, что для таких систем может быть достаточно сложно организовать размещение данных,

ориентированных на общую память и на дополнительную работу для программиста по организации обмена данными между процессорами.

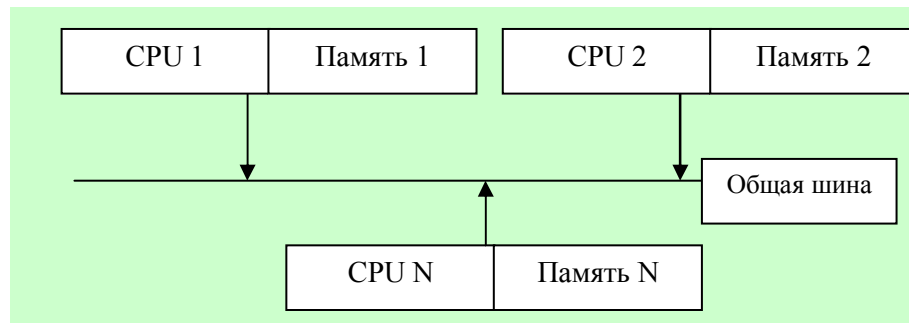


Рис. 12.7. Системы с распределенной памятью

Самые высокопроизводительные современные компьютеры используют комбинацию архитектур с общей и распределенной памятью. Они состоят из блоков, организованных по принципу общей организации памяти и использующих механизм передачи сообщений для обмена данными между такими узлами. Все преимущества и недостатки, характерные для систем с общей и распределенной памятью, присущи таким гибридным системам.

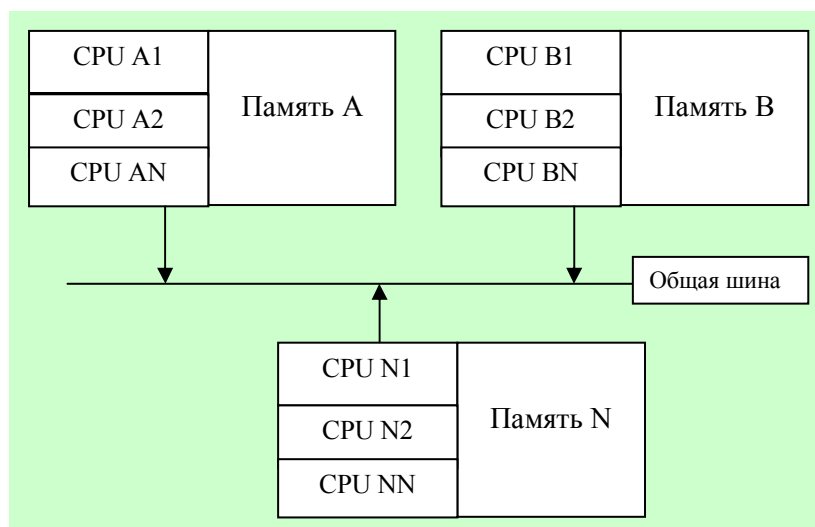


Рис. 12.8. Комбинированные системы

### **12.3. Концепции параллельного программирования и принципы разработки параллельных программ**

Существует несколько концепций разработки параллельных программ. Эти модели являются абстракциями и не зависят от используемой архитектуры. Не существует самой лучшей модели, использование той или иной зависит от тех средств, которые имеются в распоряжении программиста, от решаемой задачи или является комбинацией этих факторов.

- Модель передачи сообщений (Message Passing) характеризуется тем, что имеется набор процессоров, каждый использует свою локальную память. Процессоры при этом могут обмениваться сообщениями друг с другом для передачи данных. Обмен данными требует от процессоров выполнения совместных действий, например, операция отправки сообщения должна иметь соответствующую операцию приема сообщения.
- Модель с параллельностью данных (Data Parallel) основывается на том, что имеется набор процессоров, выполняющих какие-либо операции над одним набором данных, которые разделяются между процессорами таким образом, что каждый процессор обрабатывает только свою часть общих данных.
- В модели с общей памятью (Shared Memory) процессоры используют общее адресное пространство, чтение и запись происходят в асинхронном режиме.
- Модель с потоками (Threads) имеет основной, или главный процесс (программу), который может разделяться на несколько потоков (подпрограмм). Главный процесс выполняет некоторый набор последовательных действий, затем порождает набор потоков, или нитей, управление которыми берет на себя



операционная система. Каждый поток имеет свои локальные данные, при этом может получить доступ к ресурсам главного процесса, таким образом, потоки обмениваются данными друг с другом через общую глобальную память.

- В гибридной (Hybrid) модели могут объединяться две или больше моделей. Хорошим примером может служить объединение модели передачи сообщений и модели с параллельностью данных.

Первое, что необходимо сделать, прежде чем написать параллельную программу, это разделить исходную задачу на подзадачи, которые могут выполняться независимо друг от друга, или параллельно. Такой процесс называется декомпозицией. С помощью декомпозиции можно уменьшить время, затрачиваемое на выполнение программы. Декомпозицию можно разделить на несколько типов:

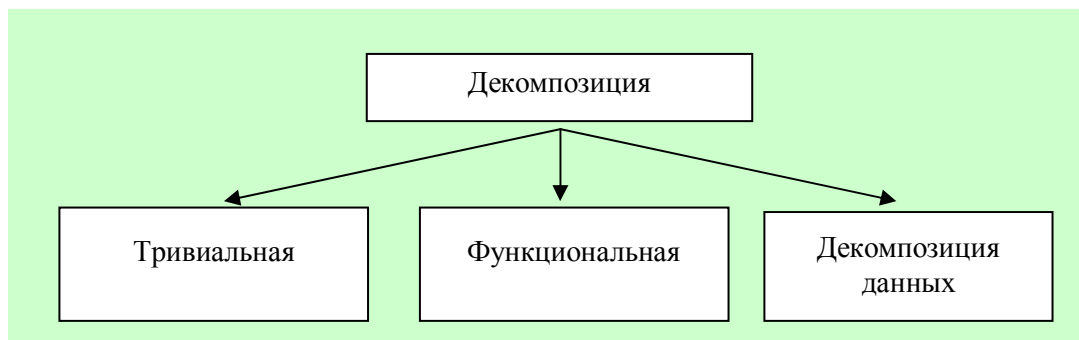


Рис. 12.9. Типы декомпозиции

Тривиальная декомпозиция – самый простой тип декомпозиции. Применяется в том случае, когда различные участки линейного кода могут исполняться отдельно друг от друга и не зависят от результатов, полученных в процессе счета других копий кода. В качестве примера можно привести решение задачи методом перебора: в этом случае одна и

та же программа, получив различные начальные параметры, может быть запущена на разных процессорах (или узлах кластера). Программирование таких параллельных процессов фактически не отличается от обычного программирования на последовательном компьютере, за исключением маленького участка кода, отвечающего за запуск копий программы на разных процессорах (или узлах кластера) и затем ожидающего окончания счета запущенных программ.

При функциональной декомпозиции из исходной задачи выделяют независимые подзадачи, которые можно распределить среди множества процессоров для одновременного выполнения. Допустим, к массиву данных нужно применить некоторый функциональный оператор, при этом применение такого оператора к одному элементу массива требует значительного количества расчетного времени. В таком случае исходный функциональный оператор представляется в виде композиции нескольких операторов, имеющих более простую структуру и, соответственно, требующих меньше времени для выполнения. Произведя такую функциональную декомпозицию, все получившиеся простые операторы можно распределить среди разных процессоров (или узлов кластера). Таким образом, время обработки одного элемента массива можно уменьшить. При функциональной декомпозиции необходимо так выделять операторы более простой структуры, чтобы время их каждого было примерно равно.

При декомпозиции данных на каждом из процессоров выполняется одна и та же задача (инструкция), но при этом для каждого процессора выделяется своя порция данных. После того как каждый процессор сделает свою часть работы, он передает свои данные в коллектор, в котором происходит суммирование всех частей обработанных данных в одно целое. При декомпозиции данных важно так разделить исходные данные, чтобы равномерно загрузить все имеющиеся процессоры.

Важным при разработке параллельных программ является правильная организация межпроцессного взаимодействия. Например, при использовании модели передачи сообщений все межпроцессное взаимодействие должно быть задано явно, программист должен понимать принципы такого взаимодействия. При использовании модели с параллельностью данных и специальных компиляторов все межпроцессное взаимодействие остается «за кадром», программисту не нужно явно использовать механизм взаимодействия. Принципиально типы взаимодействия для разных моделей параллельного программирования не отличаются. Фактически компиляторы, ориентированные на модели с параллельностью данных, используют стандартные библиотеки, применяемые в моделях передачи сообщений, для организации передачи данных.

В архитектуре с распределенной памятью выделяют следующие типы взаимодействия:

- Point to Point;
- One to All Broadcast;
- All to All Broadcast;
- One to All Personalized;
- All to All Personalized;
- Shifts;
- Collective Computation.

Тип взаимодействия Point to Point является основным при взаимодействии двух процессов. Передающий процесс посылает сообщение принимающему процессу. Как правило, сообщение содержит собственно передаваемую информацию (полезные данные) и служебную информацию, например, длину передаваемого сообщения, адрес назначения, идентификатор сообщения. Прием/передача сообщений может быть с блокировкой и без блокировки. При передаче с блокировкой

процесс ждет до тех пор, пока сообщение не будет полностью передано. При передаче без блокировки выполнение программы продолжается независимо от того, было ли сообщение передано полностью или нет. Взаимодействие One to All Broadcast используется в том случае, когда какой-нибудь один процесс владеет информацией, которая требуется всем остальным процессам. В результате операции One to All Broadcast один процесс посылает одни и те же данные всем остальным процессам. Взаимодействие All to All Broadcast происходит тогда, когда каждый процесс свою уникальную информацию передает всем остальным процессам. Взаимодействие One to All Personalized используется, если одному процессу необходимо передать всем остальным процессам уникальную информацию, при этом каждому процессу передается только своя часть, которую не получают другие. Взаимодействие All to All Personalized служит для передачи каждым процессом информации всем остальным процессам, каждый из которых получит свои уникальные данные. При взаимодействии Shifts происходит перемещение (или сдвиг) данных, каждый процесс передает информацию своему соседу, передача информации происходит в одном логическом направлении. При взаимодействии Collective Computation происходит обмен данными внутри некоторой группы, в которую могут быть объединены процессы, когда один член этой группы собирает информацию от других.

При разработке параллельных программ всегда следует оценивать предполагаемый эффект от распараллеливания. Предположим, что в программе доля операций, которые нужно выполнять последовательно, равна  $f$ , где  $0 \leq f \leq 1$  (при этом доля понимается по числу операций в процессе выполнения). Крайние случаи в значениях  $f$  соответствуют полностью параллельным ( $f = 0$ ) и полностью последовательным ( $f = 1$ ) программам. Для того, чтобы оценить, какое ускорение  $S$  может быть

получено на компьютере из  $p$  процессоров при данном значении  $f$ , можно воспользоваться законом Амдала:

$$S \leq \frac{1}{f + (1-f)/p}$$

Предположим, что в программе есть лишь 10% последовательных операций, т.е.  $f=0.1$ . В этом случае, сколько бы процессоров не использовалось, ускорения работы программы более чем в десять раз получить невозможно. Если учесть, что параллельное программирование – это весьма трудоемкий процесс, следует принять принципиальное решение, стоит ли вообще решать конкретную задачу таким способом.

#### **12.4. Кластерные системы**

Занимаясь вопросами, связанными с параллельными вычислениями, нельзя оставить без внимания кластерные системы. Термин «кластер», «кластерная система» используется широко. Самое общее определение кластера могло бы звучать так: кластер – это группа компьютеров, работающих как единое целое. Компоненты, или узлы кластера, соединены между собой посредством локальной сети. Кластеры используются для повышения производительности и/или надежности в тех случаях, когда использование отдельного компьютера не приносит желаемого результата. Мы будем говорить о вычислительных кластерах, применяемых для научных расчетов. Выше было сказано, что для значительного круга научных задач основной проблемой является время выполнения. В то же время найдется мало университетов, готовых купить суперкомпьютеры типа Cray или nCube. Хорошим выходом из ситуации может быть использование кластеров, которые при существенно меньших затратах могут иметь производительность, вполне сравнимую с суперкомпьютерами. Обычно кластер состоит из одного главного узла,

или хоста, и нескольких подчиненных. Кластер не обязательно должен быть однородным, т.е. в состав кластера могут входить компьютеры с разной архитектурой и производительностью, управляемые разными операционными системами. Однако нужно учитывать, что для неоднородного кластера сложнее составлять параллельные программы, потому что необходимо учитывать производительность каждого компьютера для правильного распределения нагрузки. Поскольку узлы кластера сообщаются друг с другом посредством сети, при проектировании кластерной системы необходимо спланировать топологию такой сети, выбрать сетевой интерфейс с максимальной пропускной способностью. Дело в том, что узлы кластера при проведении расчетов могут интенсивно общаться между собой, передавая данные. Если использовать сеть с низкой пропускной способностью, общая производительность и эффект от использования кластера могут быть крайне низкими.

Для обеспечения взаимодействия между узлами кластера необходимо использовать какую-нибудь коммуникационную библиотеку. Наиболее распространенным инструментом в наше время стал интерфейс передачи сообщений, или MPI (Messages Passing Interface). MPI – это технология программирования кластерных систем (или параллельных компьютеров с распределенной памятью). В таких системах взаимодействие между отдельными узлами обеспечивает механизм передачи сообщений. MPI может использоваться с языками программирования C и Fortran и поддерживает параллельное программирование в стиле MIMD/SIMD. Программа, написанная с использованием MPI, представляет собой множество взаимодействующих между собой процессов. Обычно поведение всех процессов одинаково, за исключением одного, который берет на себя роль диспетчера. Если необходимо, можно выделить еще один специальный процесс, который

может отвечать, например, за визуализацию данных. Ниже представлен типичный фрагмент (псевдокод) параллельной программы, использующей MPI:

```
если (ИдентификаторПроцесса равен 0) то
    выполнять задание процесса 0
иначе если (ИдентификаторПроцесса равен 1) то
    выполнять задание процесса 1
    . . . . .
иначе
    выполнять еще какое-нибудь действие
конецесли
```

Параллельное программирование – непростая задача. В большинстве случаев программы, которые успешно работают на последовательном компьютере, не будут работать на кластерной системе, их нужно будет практически полностью переписывать. Известно, что почти все задачи линейной алгебры (умножение матриц, решение систем линейных алгебраических уравнений), задачи сортировки, некоторые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных могут быть успешно распараллелены, для них уже разработаны соответствующие алгоритмы. В то же время существенно могут облегчить решение таких задач готовые библиотеки параллельных подпрограмм. Например, известная библиотека ScaLAPACK (Scalable Lapack) используется для параллельного решения задач линейной алгебры, PETSc (Portable Extensible Toolkit for Scientific Computation) – для параллельного решения линейных и нелинейных систем уравнений, возникающих при дискретизации уравнений в частных производных.

Однако использование этих библиотек не освобождает программиста от необходимости четкого и ясного понимания

принципов параллельного программирования и само по себе далеко не тривиально.

## **12.5. Распределенные вычисления**

Распределенные вычисления можно определить как ресурсоемкий вычислительный процесс, при котором разные части программы выполняются одновременно на разных компьютерах, объединенных в сеть. Такое определение напоминает определение кластера: в обоих случаях используется несколько компьютеров, объединенных сетью, в обоих случаях исходную программу необходимо разделить на независимые подпрограммы (провести декомпозицию). С точки зрения программирования локальная сеть мало чем отличается от глобальной сети, объединяющей, например, отделения университета в пределах города или даже страны, или от сети Интернет. Разница между распределенными и параллельными вычислениями заключается в интенсивности межпроцессорного обмена и, соответственно, в требованиях к каналам связи между процессорами. Например, есть задача обнаружить сигнал внеземной цивилизации. Для ее решения с центрального сервера узлами кластера загружаются блоки данных, которые определенным образом обрабатываются. Результат возвращается на центральный сервер. Обработка блока ведется значительно дольше его загрузки. Например, 10 секунд загрузка, 10 минут обработка. Узлы кластера общаются только с центральным сервером. Межузловые коммуникации не предусмотрены, в них просто нет необходимости. Для общения с центральным сервером не требуются высокоскоростные каналы связи. Не требуется параллельная среда (например, MPI) и параллельные языки программирования (но могут использоваться). Используется тривиальная декомпозиция задачи. Скорость счета задачи достигается за счет большого числа



вычислительных узлов (тысячи и десятки тысяч компьютеров). Скорость счета растет линейно с ростом числа узлов. Это типичный пример распределенной системы. И пусть имеется другая задача: решить систему дифференциальных уравнений в частных производных. Решение достигается распараллеливанием задачи методом функциональной декомпозиции (это не обязательно, метод декомпозиции будет зависеть от конкретной задачи). В общем случае требуется обмен данными между всеми узлами кластера. Требуется высокоскоростные каналы межузловой связи. Время обработки блока данных не больше времени межпроцессорных пересылок. Скорость счета задачи с ростом числа узлов кластера растет нелинейно. Для организации вычислений требуется наличие параллельной вычислительной среды (например, MPI) и параллельные языки (средства) программирования. Это пример задачи для выполнения на кластерной системе.

## **12.6. Заключение**

Из представленного материала видно, что успешное использование параллельного программирования требует значительного опыта в написании параллельных программ и хорошей квалификации. Кроме предметной области, необходимо хорошо разбираться в смежных областях, таких, как организация и функционирование локальных сетей, численные методы и параллельные численные методы, понимать тонкую информационную структуру компьютерных программ, знать принципы организации параллельных вычислительных систем. Владение этим комплексом знаний в полной мере позволит пользоваться всеми возможностями, которые открывает перед исследователем параллельное программирование, а значит, в своей области можно получить новые интересные результаты.

## Список литературы к теме 12

### Использованная литература:

1. Воеводин В.В., Воеводин Вл.В. «Параллельные вычисления». – СПб.: БХВ-Петербург. 2002. – 608 с.
2. Немнюгин С.А., Стесик О.Л. «Параллельное программирование для многопроцессорных вычислительных систем». – СПб.: БХВ-Петербург. 2002. – 400 с.: с илл.
3. Антонов А.С. «Параллельное программирование с использованием технологии MPI»: Учебное пособие. – М.: Изд-во МГУ. 2004. – 71 с.
4. Букатов А.А., Дацюк В.Н., Жегуло А.И. «Программирование многопроцессорных вычислительных систем». – Ростов-на-Дону: Изд-во ООО «ЦВВР». 2003. – 208 с.

### Рекомендуемая литература:

1. Шпаковский Г.И., Серикова Н.В. «Программирование для многопроцессорных систем в стандарте MPI». – Минск: Изд-во БГУ. 2002. – 232 с.
2. Богачев К.Ю. «Основы параллельного программирования». – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2003. – 342 с.: с илл.
3. Баканов В.М., Осипов Д.В. «Введение в практику разработки параллельных программ в стандарте MPI»: Учебно-методическое пособие по выполнению лабораторных работ. – М.: МГАПИ. 2005. – 63 с.: с илл.

## Интернет-ресурсы к теме 12

1. Информационно-аналитический центр по параллельным вычислениям  
<http://www.parallel.ru/>
2. Практическое руководство по параллельным вычислениям  
<http://linux-cluster.org.ru/>
3. Сайт корпорации «Интел»  
<http://softwarecommunity-rus.intel.com/articles/rus/1252.htm>
4. Research Institute for Symbolic Computation  
<http://www.risc.uni-linz.ac.at/education/courses/ws96/intropar/>
5. Maui High Performance Computing Center (MHPCC) Training and Education Website  
[http://www.mhpcc.edu/training/workshop/parallel\\_intro/MAIN.html](http://www.mhpcc.edu/training/workshop/parallel_intro/MAIN.html)
6. Argonne National Laboratory. Mathematics and Computer Science Division  
<http://www-unix.mcs.anl.gov/mpi/>
7. The Distributed Computing Educational Site  
<http://distributedcomputing.info/>
8. Интернет-Университет Информационных Технологий  
<http://www.intuit.ru/department/calculate/paralltp/>  
<http://www.intuit.ru/department/hardware/paralltech/>  
<http://www.intuit.ru/department/se/parallprog/>
9. Интернет-портал по ГРИД-технологиям  
<http://www.gridclub.ru/>

## ОПИСАНИЕ КУРСА И ПРОГРАММА

---

**Кредит: 8**

**Статус дисциплины:** СДМ (специальные дисциплины, обязательная)

(1 и 2-ой семестры магистратуры, лекций – **36** часов, практические занятия – **108** часов, самостоятельная работа студентов – **144** часа, зачет по практическим занятиям, экзамен, курсовая работа (контрольное практическое задание) – по выбору.

### **Описание курса**

***Цель курса*** – обеспечение базовой подготовки студентов магистратуры в области вычислительного эксперимента; изучение основ постановки численного эксперимента в современной прикладной физике; изучение принципов организации и проведения вычислительного эксперимента; изучение принципов и методов, лежащих в основе вычислительного эксперимента; ознакомление студентов с основными направлениями в вычислительном эксперименте в физике; изучение основных методов численного моделирования, используемых при постановке вычислительного эксперимента; создание численных моделей для изучения сложных физических явлений и процессов, протекающих в действующих и проектируемых экспериментальных установках, и проведение студентами вычислительных экспериментов; оценка перспектив развития вычислительного эксперимента в прикладной физике.

**Содержание курса** – Математическое моделирование и вычислительный эксперимент. Развитие вычислительного эксперимента в прикладной физике. Основа математического моделирования: модель – алгоритм – программа (код). Анализ исследуемого объекта. Модель исследуемого объекта. Разработка вычислительного алгоритма. Создание программного обеспечения, реализация модели и алгоритма на компьютере. Анализ результатов численных экспериментов, сопоставление с результатами натурных экспериментов (при наличии результатов натурального эксперимента). Коррекция модели, алгоритма, программы. Поисковый вычислительный эксперимент. Методы вычислительного эксперимента в прикладной физике. Вычислительный эксперимент в физике плазмы. Кинетическое описание коллективных явлений в бесстолкновительной плазме. Решение кинетических уравнений методом преобразований. Численное решение уравнения Власова. Метод «водяного мешка». Метод частиц в ячейке для одномерных электростатических процессов. Общая схема метода частиц. Формирование начального распределения частиц. Общая структура программы одномерного моделирования методом частиц в ячейке. Метод частиц в ячейке для одномерных электромагнитных процессов. Примеры моделирования одномерных плазменных систем. Метод частиц для двумерных и трехмерных электростатических процессов и магнитостатических процессов. Этапы разработки сложных программ. Общая схема метода частиц в ячейке для двумерных и трехмерных электростатических моделей. Примеры вычислительного эксперимента для трехмерных плазменных систем. Моделирование двумерных и трехмерных электромагнитных процессов. Параллельные вычисления в современном вычислительном эксперименте. Метод частиц в ячейке и метод Монте-Карло в моделировании плазменных процессов. Численные модели ускорителей заряженных частиц. Вычислительный эксперимент генерации многозарядных ионов в источниках на основе электронного

циклотронного резонанса. Перспективы развития вычислительного эксперимента в прикладной физике.

**Организационно-методическое построение курса.** Курс состоит из лекций и практических занятий, предусмотрено выполнение курсовых работ и контрольных заданий. В программе курса предусмотрено выполнение большого числа трудоемких практических работ, связанных с созданием трехмерных численных моделей и выполнением численных экспериментов. В связи с этим преподаватель может выбрать по своему усмотрению лишь часть из включенных в курс практических работ. Изложение курса базируется на большинстве разделов курсов информатики, высшей математики (высшая алгебра, математический анализ, обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения в частных производных, методы математической физики), курсов общей физики и теоретической физики (электродинамика, статистическая физика), специальных курсов (основы физики плазмы, физика ускорителей заряженных частиц), входящих в учебный план обучения бакалавра классического университета по направлению подготовки – физика.

Лекции построены на принципе «от простого к сложному» и реализуют непрерывную подготовку в рамках учебной программы. Каждая лекция сопровождается демонстрацией иллюстративного видеоматериала (презентаций, слайдов и т.п.) с использованием демонстрационных программ и инструментальных сред, созданных авторами курса для постановки и проведения вычислительного эксперимента.

Первым этапом практических занятий является обсуждение общей концепции, выполняемой студентами работы и проверкой преподавателем самостоятельной работы каждого студента, результатом которой является допуск (или недопуск) к выполнению работы. На втором этапе студент выполняет практическую работу, обрабатывает полученные результаты

и составляет отчет согласно методическим требованиям. На третьем этапе обсуждаются отчеты студентов по выполненной теме с каждым студентом индивидуально, так и в составе всей группы.

Для контроля и закрепления студентами полученных знаний проводятся практические занятия (6-9 практических работ в семестре), 1 курсовая работа или 1 контрольное практическое задание (по выбору). Предусмотрены: промежуточный контроль (аттестация), в каждом семестре зачет по практическим занятиям и по окончании курса – экзамен.

***Освоив курс, студент должен:***

овладеть методами постановки современного вычислительного эксперимента, научиться разрабатывать и применять численные модели, строить алгоритмы и писать программы (коды) на одном из языков программирования (предпочтительно на Фортране), а также использовать разработанные ранее алгоритмы и библиотеки подпрограмм.

**Общие правила выполнения практических и самостоятельных работ**

В рамках читаемого курса студенты выполняют практические работы, количество которых определено учебным планом по дисциплине, а также выполняют самостоятельную исследовательскую работу – курсовую работу (или контрольное практическое задание).

Практическое учебное занятие проводится в профилированных учебных лабораториях с целью углубления знаний и приобретения навыков постановки и проведения вычислительного эксперимента.

Объектом изучения при проведении практических занятий является конкретный физический объект, рассматриваемый в предметной области изучаемой учебной дисциплины. Объект изучения (эффект, явление, образец, установка) может быть представлен в виде реального объекта или представлен в виде модели - физической, математической, графической, знаковой и т.д.

*Курсовая работа* (контрольное практическое задание) представляет собой самостоятельную учебную работу – первое научное исследование, в котором студентом раскрываются теоретические и практические проблемы избранной темы.

Курсовая работа должна представлять заверченный материал, в котором представлены результаты, раскрывающие закономерности взаимосвязи между изучаемыми явлениями, процессами и содержать авторское видение и решение поставленной задачи.

Объектом исследований при выполнении курсовой работы является изучение физических явлений или процессов, при этом самостоятельно привлекаемые методы моделирования, алгоритмы либо подходы теоретического изучения, преимущественно основанные на знаниях полученных студентом в предшествующий период обучения или изучаемых самостоятельно. Результаты курсовой работы могут являться прологом будущей дипломной работы.

*Контрольное практическое задание* – самостоятельная учебная работа, направленная на постановку вычислительного эксперимента, связанного с совершенствованием и созданием работ вычислительного практикума.

Контрольное практическое задание представляет, заверченный материал, в котором представлены результаты самостоятельной работы студента по разработке и постановке новых упражнений вычислительного практикума и связаны с совершенствованием постановки вычислительного эксперимента, разработки новых алгоритмов и программ и содержат авторское видение и решение поставленной задачи.

Объектом исследований при выполнении контрольного практического задания являются существующие и вновь создаваемые численные модели вычислительного практикума.



## ***Организация***

### ***Общие правила:***

- Практические работы выполняются студентами согласно установленного в начале семестра расписания.
- Практическая работа выполняется индивидуально или исследовательской группой, не превышающей 2-х человек.
- Количество практических работ, выполняемых за учебное занятие, не превышает одну работу.
- Перенос выполнения назначенной практической работы допускается только в пределах расписания по согласованию с преподавателем.
- При обнаружении схожих отчётов у различных исследовательских групп результаты работ и отчеты аннулируются, а студенты, сдавшие такие отчёты, переделывают работу в дополнительное время, в сроки, согласованные с преподавателем.

### ***К выполнению работы не допускаются учащиеся, которые:***

- не подготовились для выполнения практической работы;
- грубо нарушают правила внутреннего распорядка в лаборатории;
- опоздали к началу занятий;
- не защитили отчёт по предыдущей работе;
- пропустили два и более занятий без уважительной причины.

### ***Организация практических занятий включает:***

- самостоятельную внеаудиторную подготовку студента в соответствии с методическими рекомендациями;
- первичный контроль преподавателем степени подготовленности каждого студента к выполнению практической работы;
- выполнение всех заданий (упражнений) практической работы в полном объеме;
- оформление отчета (см. структуру отчета и правила его оформления)

и его защиту исследовательской группой (или индивидуально) в сроки, установленные преподавателем;

- учет преподавателем текущего и итогового рейтингов каждого из студентов по результатам выполнения и защиты им отдельных практических работ.

*Студент имеет право:*

- получить необходимые для выполнения практической работы методические материалы в бумажном или электронном видах;
- проводить практические работы по оригинальным методикам при предварительном согласовании их с преподавателем;
- выполнить практическую работу, пропущенную по уважительной причине, в часы, согласованные с преподавателем.

*Студент обязан:*

- Самостоятельно, согласно методическим рекомендациям, подготовиться к выполнению практической работы и получить допуск к ее выполнению по результатам краткого опроса в начале занятий;
- По выполнении вычислительного эксперимента студент предъявляет результаты диагностик преподавателю. Они сохраняются в виде электронного файла на рабочем компьютере преподавателя. Копия файла остается у студента для оформления отчета (см. правила оформления отчётов);
- При пропуске занятия подготовиться к следующей по расписанию работе. Дату выполнения пропущенной работы необходимо согласовать с преподавателем.

*Студент несет ответственность:*

- за пропуск практических занятий по неуважительной причине;
- за неподготовленность к выполнению работы;
- за несвоевременную сдачу отчетов и их защиту;

- за порчу имущества и нанесение материального ущерба лаборатории.

*Преподаватель несет ответственность:*

- за качественную постановку и проведение практических работ;
- за поддержание рабочей дисциплины и порядка в лаборатории;

*Преподаватель имеет право:*

- отстранять от проведения практических работ студентов, нарушающих установленные выше правила;
- требовать от студентов пропустивших занятия разрешения из деканата факультета на посещение последующих практических занятий;
- проводить перед началом практических работ контрольный опрос студентов;
- вносить в случае необходимости (из-за отказа оборудования или вычислительных средств и т. п.) частичные изменения в программу практической работы.

**Категорически запрещено:**

- **Устанавливать или изменять** программное обеспечение на компьютерах лаборатории;
- **Вскрывать** системные блоки;
- **Копировать на внешние носители** программное обеспечение без согласование с преподавателем;

***Организация выполнения курсовых работ или контрольных практических заданий.***

О необходимости выполнения курсовой работы студента информируют на первой лекции и предлагают либо выбрать тему работы из списка, либо заранее самостоятельно обдумать и предложить тему будущей работы.

Подготовка и защита курсовой работы, а также ее оценка в учебной программе каждого направления определяется большой ролью этого вида подготовки специалиста в общей системе учебных программ, нацеленных на фундаментальность и систематичность образования. Для завершения и защиты курсовой работы студенту предоставляется в конце семестра специально 1 неделя, свободная от аудиторных занятий. В течение 1 установочной недели, отведенной на выбор курсов, утверждается тема и научный руководитель курсовой работы. Темы курсовых работ находятся на портале кафедр. Студент, консультируясь с преподавателями кафедры, за которой закреплено руководство курсовыми работами, определяет тему своей курсовой работы.

Выполнение курсовых работ происходит по следующей схеме:

- выбор темы;
- поиск литературы и ее изучение;
- проведение предварительного анализа, аналитических оценок, численного моделирования;
- написание первого варианта работы и представление его научному руководителю;
- исправление и доработка текста на основе замечаний руководителя;
- представление окончательного текста курсовой работы и ее защита перед учебной комиссией кафедры.

Отчетность (ведомость) по курсовой работе сдается в учебную часть в строго определенные сроки (1 неделя).

Разработка программного обеспечения, необходимого для проведения вычислительного эксперимента, осуществляется в научно-учебной «Лаборатории вычислительного эксперимента и систем автоматизации физических измерений», оснащенного всем необходимым оборудованием и программным обеспечением.

В процессе работы над курсовым проектом текущее состояние работы еженедельно обсуждается с преподавателем, курирующим ее выполнение.

Обработка результатов практической части работы, и подготовка отчета по курсовому проекту может быть выполнена студентом в дисплей-классе центра прикладных информационных технологий университета, оснащенного практически всеми необходимыми аппаратными и программными ресурсами.

Защита курсовых работы осуществляется перед экспертной учебной комиссией, назначаемой зав. кафедрой на специальном заседании научного семинара кафедры и представляет собой публичное научное сообщение по результатам работы должным образом оформленное с использованием мультимедийных средств. Лучшие работы могут быть рекомендованы в качестве докладов на конференциях или публикации в научных журналах.

### ***Инновационная составляющая курса***

Создание УМК «Современные методы вычислительного эксперимента в прикладной физике» является актуальной задачей. Это связано с тем, что вычислительный эксперимент в настоящее время является полноправным методом исследования наряду с аналитическим исследованием и натурным экспериментом. Более того, по мнению ряда ведущих ученых вычислительный эксперимент является новой технологией (А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич, Институт математического моделирования РАН). Реализация предлагаемого УМК будет способствовать повышению уровня подготовки магистров, расширению их научного кругозора. Выпускники магистратуры будут способны самостоятельно применять современные методы вычислительного эксперимента в прикладной физике, применять научно обоснованные и проработанные подходы для изучения сложных

физических процессов и явлений, осуществлять самостоятельную постановку и выполнение вычислительного эксперимента, что значительно повысит их творческий и научный потенциал. Особое внимание в УМК уделено практическому аспекту подготовки, столь необходимому научному исследователю.

Инновационная форма подачи учебного материала в курсе по отношению к учебникам традиционной формы определяется тем, что курс одновременно содержит в себе научно теоретический и методический материал по соответствующей учебной дисциплине, включающий описание практических работ, которые по сути своей являются научным исследованием. В курсах лекций и на практических занятиях будут использованы демонстрационные программы и инструментальные среды, созданные для постановки и проведения вычислительного эксперимента.

Освоение курса связано с большой практической составляющей, с выполнением самостоятельных индивидуальных и коллективных научных исследований в форме курсовых работ и/или контрольного задания, согласно перечня предложенных актуальных тем, являющихся прологом выполнения магистерской диссертационной работы. Выполнение некоторых работ носит не только научно-исследовательский, но и соревновательный характер. Например, в ряде работ предлагается определить параметры эксперимента, при которых параметры исследуемого физического объекта являются оптимальными. Кроме того, результатом выполнения курсовых работ или контрольных заданий будут являться новые разработанные студентами практические работы. Таким образом, в данный курс заложен элемент саморазвития.

Выполнение некоторых заданий связано с моделированием экспериментальных установок, которые находятся на стадии предложения или проектирования, что дает возможность студентам непосредственно участвовать в разработке и развитии современных технологий.

В реализуемой магистерской программе все УМК построены по единой форме расположения и организации материала, позволяют соотносить их содержание в общем контексте подготовки специалистов. Использование единого подхода к представлению учебно-методической информации дает возможность отобразить, с одной стороны, существующие межпредметные взаимосвязи, а с другой – динамику развития отдельных тем и их сочетание, что особенно актуально при выполнении самостоятельных научных исследований (курсовые и дипломные работы, магистерская диссертация). Выполнение практических работ и курсовых работ позволяют получить практические навыки по разделам изучаемой дисциплины.

Предлагаемая для изучения курса литература в основе своей имеется в наличии в библиотечном фонде РУДН, в случае отсутствия литературы в библиотечном фонде электронные версии доступны в локальной сети на сайте магистерской программы (<http://vlab.sci.pfu.edu.ru>).

Разрабатываемый УМК является плодом совместной работы коллектива авторов, состоящих из преподавателей РУДН и ведущих специалистов крупнейшего научного центра РФ «Курчатовский институт». Такой подход позволяет рассмотреть последние достижения в области вычислительного эксперимента, обеспечить проведение НИРС с использованием современных методов вычислительного эксперимента.

Авторы курса выделили две основные цели написания:

1. Разработка разделов, являющихся на сегодняшний день наиболее перспективными.
2. Практическая составляющая курса, нацеленная на изучение и освоение методов и принципов постановки и проведения вычислительного эксперимента в прикладной физике.

Предлагаемый учебный курс является принципиально инновационным как в области содержания, так и технологии организации педагогического процесса.

### **Обязательная литература:**

1. А.А.Самарский, П.Н.Вабищевич. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент, Институт математического моделирования ММ РАН, 2000 (Интернет-публикация).  
<http://www.imamod.ru/~vab/matmod/MatMod.htm>
2. Сигов Ю.С. *Вычислительный эксперимент: мост между прошлым и будущим физики плазмы.* - М: Физматлит, 2001. 286 с.
3. Вабищевич П.Н. *Численное моделирование*, Москва: МГУ. 1993. 152 с.
4. Белоцерковский О.М. *Численное моделирование в механике сплошных сред* – М.; Физматлит, 1994, 442 с.
5. Днестровский Ю.Н., Костомаров Д.П. *Математическое моделирование плазмы.*- М.: Наука, 1993, 335 с.
7. Хокни Р., Иствуд Дж. *Численное моделирование методом частиц.* -М: Мир, 1987. 480 с.
8. Бэдсел Ч., Ленгдон А. *Физика плазмы и численное моделирование.* – М: Энергоатомиздат, 1989. 348 с.
9. Поттер Д. *Вычислительные методы в физике.*-М.: Наука, 1975.
10. Кролл Н., Трайвеллис А. *Основы физики плазмы.* - М: Мир, 1975.
11. Geller R. *Electron Cyclotron Resonance Ion Sources and ECR Plasmas.* IOP Publishing Ltd, 1996. 433 с.
12. Молоковский С.И., Сушков А.Д. *Интенсивные электронные и ионные пучки.* М.: Энергоатомиздат, 1991.
13. Лоусон Дж. *Физика пучков заряженных частиц.* – М: Мир, 1980. 428 с.



### **Дополнительная литература:**

1. Самарский А.А. Введение в численные методы. - М: Наука, 1987
2. Туриков В.А., Ульяницкий И.В., Умнов А.М., Численное моделирование плазменных процессов. -М: Изд. РУДН, 2003. 126 с.
3. Рошаль А.С. Моделирование заряженных пучков. –М: Атомиздат, 1979, 224 с.
4. Ораевский В. Н. Основы физики плазмы. Под ред. Галеева А.А. и Судана Р. М.: Энергоатомиздат, т. 2, 7, 1984.
5. Вычислительные методы в физике плазмы. под редакцией Олдера Б., Фернбаха С. Ротенберга М. -М: Мир, 1974, 111 с.
6. Красовицкий В.Б., Дорофеев В.Г., Туриков В.А., Сотников В.И. Физика плазмы, 32, 26, 2006.
7. Andreev V. V., Umnov A. M. Plasma Sources Sci. Technol. 1999. V. 8. P. 479 – 487.
8. Литвак А.Г. Вопросы теории плазмы. Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Атомиздат, вып. 10, 164, 1980.
9. Милантьев В.П., Туриков В.А. Вопросы атомной науки и техники., №5, 185, 2007.
10. Birdsall C.K. Particle-in-Cell Charged-Particle Simulations, Plus Monte Carlo Collisions With Neutral Atoms, PIC-MCC // IEEE Trans. Plasma Sci. — 1991, v. 19, n. 2, pp. 65 – 85.
11. Dougar-Jabon V.D., Umnov A.M., D.Suescun Diaz Rev Sci Instrum // 73(2), 2002, 629-631.
12. Андреев В.В., Умнов А.М., Балмашинов А.А., Никитин Г.В., Саванович В.Ю. // Известия РАН. Серия Физическая, 2003, Т. 67, №9, с. 1314-1321.

## Интернет-ресурсы

1. *EqWold. Мир математических уравнений.*  
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/software.htm>
2. *Математическое моделирование в естественных науках.*  
[http://mathmod.aspu.ru/?id=6&sub\\_id=1](http://mathmod.aspu.ru/?id=6&sub_id=1)
3. *Вычислительные методы и программирование.*  
<http://num-meth.srcc.msu.su>

**Условия и критерии выставления оценок:** От студентов требуется посещение лекций и семинарских занятий, обязательное участие в аттестационных испытаниях. Особо ценится активная работа при выполнении практических работ, а также качество выполнения контрольных работ и экзаменационных эссе. Именно творческий подход к выполнению практических работ и курсовых работ являются главным критерием высокой экзаменационной оценки.

Для успешного выполнения каждой практической работы студент должен внимательно изучить учебно-методические материалы (пособия и литературу, рекомендованную для выполнения практических работ), уметь изложить изученный материал и быть готовым к выполнению. Важным этапом в итоговой аттестации студента является обязательное выполнение и сдача самостоятельного контрольного практического задания (или курсовой работы). Студент не допускается к итоговому экзамену, если он набрал менее 50% баллов. При набранных 60% баллов студент **может** автоматически получить оценку «3». Более высокая оценка может быть получена только на итоговом экзамене.

## **Балльная структура оценки:**

### **1 семестр**

За выполнение обязательных практических работ (6 работ в течение 1-го семестра) – 36 баллов. За каждую практическую работу – 6 баллов (1 балл – допуск к выполнению работы, 1 балл – выполнение, 4 балла – оформление и сдача работы).

В итоговом подсчете на практические работы – 36 баллов (зачет по практикуму).

Промежуточный контроль знаний – 10 баллов.

Самостоятельная контрольная практическая работа – 24 баллов (всего).

Итоговый экзамен – 30 баллов.

Всего – 100 баллов.

При выборе курсовой работы по данному курсу, контрольное практическое задание снимается, максимальный балл за курсовую работу – 30 баллов засчитывается в итоговую сумму баллов.

### **2 семестр**

За выполнение обязательных практических работ (9 работ в течение 1-го семестра) – 54 баллов. За каждую практическую работу – 6 баллов (1 балл – допуск к выполнению работы, 1 балл – выполнение, 4 балла – оформление и сдача работы).

В итоговом подсчете на практические работы – 54 балла (зачет по практикуму).

Промежуточный контроль знаний – 10 баллов.

Самостоятельная контрольная практическая работа – 26 баллов (всего).

Итоговый экзамен – 10 баллов.

Всего – 100 баллов.

При выборе курсовой работы по данному курсу, контрольное практическое задание снимается, максимальный балл за курсовую работу – 30 баллов засчитывается в итоговую сумму баллов.

### Шкала оценок:

A (5+) -  $93 \leq 100$  баллов;

B (5) -  $84 \leq 92$  баллов;

C (4) -  $74 \leq 83$  баллов;

D (3+) -  $63 \leq 73$  баллов;

E (3) -  $51 \leq 62$  баллов;

FX (2+) -  $31 \leq 50$  баллов;

F (2) -  $0 \leq 30$  баллов.

		Неуд		3		4	5	
кредит	Сумма	<b>F</b>	<b>FX</b>	<b>E</b>	<b>D</b>	<b>C</b>	<b>B</b>	<b>A</b>
	Баллов	2	2+	3	3+	4	5	5+
2	100	<b><math>0 \leq 30</math></b>	<b><math>31 \leq 50</math></b>	<b><math>51 \leq 62</math></b>	<b><math>63 \leq 73</math></b>	<b><math>74 \leq 83</math></b>	<b><math>84 \leq 92</math></b>	<b><math>93 \leq 100</math></b>

### Пояснение оценок:

A – выдающийся ответ

B – очень хороший ответ

C – хороший ответ

D – достаточно удовлетворительный ответ

E – отвечает минимальным требованиям удовлетворительного ответа

FX – означает, что студент может добрать баллы только до минимального удовлетворительного ответа

F – неудовлетворительный ответ (либо повтор курса в установленном порядке, либо основание для отчисления).

## **Требования к оформлению отчета самостоятельных работ (практических, курсовых работ и контрольных практических заданий)**

### ***Структура отчета***

Объем отчета по практической работе не должен превышать 8 стр. Объем отчета по курсовой работе не должен превышать 18 стр. Текст набирается на компьютере и печатается на принтере. Требования по содержанию разделов и оформлению отчета изложены ниже.

Отчет (требования к содержанию разделов отчета по практической работе) включает:

- Титульный лист;
- Аннотация;

Представляет собой краткое (несколько предложений) содержание работы, включающее цель работы, объект исследований, используемый метод, диапазон варьируемых параметров эксперимента, основной результат, погрешности измерений.

#### **1. Введение.**

Содержит краткое теоретическое рассмотрение изучаемого явления и краткий обзор литературы по изучаемому вопросу;

#### **2. Описание вычислительного эксперимента.**

В данном разделе, относящемся к постановке эксперимента, необходимо дать описание параметров эксперимента, используемых численных методов и алгоритмов, предварительную оценку точности используемых методов.

#### **3. Проведение вычислительного эксперимента.**

Описываются особенности программ (кодов), созданных для проведения численных экспериментов, диагностики вычислительного эксперимента. Способы оптимизации программ.

#### 4. Результаты вычислительного эксперимента.

Приводятся результаты вычислительного эксперимента измерений в виде таблиц и/или графиков.

#### 5. Анализ результатов измерений, включающий:

Обсуждение полученных результатов; определение основных результатов. Указывается область варьируемых параметров эксперимента, в которых был получен результат. Проводится сравнение полученных результатов с предварительными аналитическими оценками и теоретическими выводами, обсуждаются их расхождения, и делается попытка их объяснения.

#### 6. Выводы и заключение;

Отмечается суть выполненной работы, делаются выводы. Приветствуются оригинальные подходы к решению поставленной задачи, критические замечания по улучшению методики проведения эксперимента.

#### 7. Список используемой литературы.

В разделе указывается используемая при выполнении работы основная и дополнительная литература.

### ***Общие положения по оформлению***

Электронная копия отчета и ее бумажный вариант должна быть в MS Word. При оформлении границы полей, шрифты, параметры абзацев, вставки (номера страниц, рисунки, графики и т.п.) задаются с помощью панели инструментов или меню (Файл - Параметры страницы; Формат – Шрифт, Абзац, Регистр; Вставка – Номера страниц, Рисунок).

Титульные листы отчетов практической работы и курсовой представлены в Приложение А. Шрифт - Times New Roman Cyr, размер - 14 пт, регистры – указаны в примере, выравнивание абзацев - по центру.

Разделы и подразделы должны иметь заголовки. Заголовки разделов располагают с левого края строки без точки в конце. Текст раздела отделяется от текста двумя межстрочными интервалами. Переносы в заголовках не допускаются. Каждый раздел рекомендуется начинать с новой страницы.

Для нумерованных заголовков разделов отчета шрифт - Times New Roman, размер - 12 пт, Bold, выравнивание по левому краю.

Пример:

- Раздел 1,
  - Подраздел 1.1,
    - пункт 1.1.1,
      - подпункт 1.1.1.1.

Основной текст - формат А-4 (297х210), ориентация - книжная. Границы полей: верхнее, нижнее – 2 см; левое– 2.5 см, правое -1.5см, шрифт - Times New Roman, размер - 12 пт, интервал - полуторный (Word), автоматический перенос слов в границах полей, выравнивание по ширине. Формулы и символы набираются в редакторе формул Equation. Ссылки в тексте заключены в квадратные скобки.

Нумерация страниц (меню Вставка - Номера страниц). Положение - внизу страницы, выравнивание - по центру, без нумерации первой страницы - титульного листа.

Пример оформления отчета показан в методических рекомендациях.

*Графический материал и таблицы*

Иллюстрации: схемы, чертежи, графики, диаграммы, фотоснимки, рисунки следует располагать по тексту непосредственно после первого упоминания или на следующей странице, если в указанном месте они не помещаются.

Все иллюстрации в тексте должны быть со ссылками. Допустима как сквозная нумерация рисунков, так и нумерация в пределах раздела (

«согласно рисунка 4» - при сквозной нумерации, либо «согласно рисунка 3.4» при нумерации в пределах раздела). Номер следует размещать под иллюстрацией посередине после слова «Рис.».

Рисунки могут быть выполнены с помощью ЭВМ или от руки. На графиках, выражающих количественные зависимости (экспериментальные, расчетные), должна быть координатная сетка. Стрелки на осях координат в этом случае не ставятся. Цифры располагают ниже оси абсцисс и левее оси ординат. Обозначения физических величин и единиц измерения приводят через запятую с внешней стороны оси по центру или с противоположного относительно начала координат края. Масштаб координатной сетки (линейный, логарифмический масштаб или иной) выбирается из соображений удобства представления результатов. На одном графике допустимо представление семейства функциональных зависимостей. При этом кривые отображаются сглаженными линиями различного типа или цвета, допускается вводить обозначение параметра, при котором получены данные результаты. Экспериментальные точки отмечаются на графике символами.

Результаты измерений и расчетов также целесообразно представлять в виде таблиц. Все таблицы в тексте должны быть с ссылками. Допустима как сквозная нумерация таблиц, так и нумерация в пределах раздела («согласно таблицы 4» - при сквозной нумерации, либо «согласно таблицы 3.4» при нумерации в пределах раздела). Таблицы следует располагать по тексту непосредственно после первого упоминания или на следующей странице, если в указанном месте они не помещаются. Номер таблицы следует размещать в правом верхнем углу после слова “Таблица” над заголовком таблицы. Если в работе одна таблица, её не нумеруют. Слово “Таблица” и заголовок начинаются с прописной буквы, точка в конце заголовка не ставится. Заголовки граф таблицы должны начинаться с прописных букв.



### *Математические символы и формулы*

Уравнения и формулы в тексте располагаются в отдельной строке со свободными строками выше и ниже. Если уравнение не умещается в одну строку, оно должно быть перенесено после математических знаков (+, -, x) с их обязательным повторением в новой строке. Пояснение значений, символов и числовых коэффициентов следует приводить непосредственно по тексту или под формулой в той же последовательности, как и в формуле. Значение каждого символа и числового коэффициента следует давать с новой строки, первую строку пояснения начинают со слова “где” без двоеточия. Формулы и уравнения в работе следует нумеровать по выбранному способу нумерации сквозному или в пределах раздела.

### *Написание обозначений единиц физических величин*

При написании числовых значений величин и их обозначений используются согласно системы измерений СИ или СГС. Между последней цифрой числа и обозначением единицы физической величины следует оставлять пробел, исключение составляют знаки, поднятые над строкой. 15 В, 20 А, 12 Вт, 4,3 Дж, 35°, 1 10<sup>-3</sup> Торр, 25%. Не допускается перенос обозначения единиц на следующую строку. Единицы измерений, названные в честь выдающихся ученых, обозначают с большой буквы, например: В (Вольт), Гц (Герц), Па (Паскаль).

Обозначения единиц измерений величин, представимых в виде произведения или частного, следует отделять точкой или косой чертой например: А·м Вт/(м<sup>2</sup> К). Десятичные кратные и дольные единицы представляют в виде: кГц (килогерц), МВт (мегаватт), мВт (милливатт), мкс (микросекунда), мс (миллисекунда).

### *Список использованных литературных источников*

Список использованных источников составляют в порядке появления ссылок в тексте или в алфавитном порядке. Ссылки следует приводить в форме указания порядкового номера по списку источников,

выделенного квадратными скобками, например, [28]. При ссылке на формулу или рисунок и т.п. из первоисточника следует указывать номера страниц, например [18, с.704]. Допускается приводить ссылки на литературу в подстрочном примечании.

Примеры библиографических описаний:

Монография (учебник, справочник) центрального издательства при числе авторов не более трех:

1. Б.Б. Кадомцев Коллективные явления в плазме Москва.: Наука, 1988. 304 с.

Монография (учебник, справочник) центрального издательства при числе авторов больше трех и наличии редактора (редакторов):

2. Конструирование экранов и СВЧ-устройств / А.М. Чернушенко, Б.В. Петров, Л.Г. Малорацкий и др.; Под. ред. А.М. Чернушенко Москва: Радио и связь, 1990. 351 с.

Отдельный том многотомного издания:

3. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.1. Механика. Молекулярная физика: Учеб. пособие для студентов вузов. 2-е изд., перераб. М.: Наука, 1982. 432 с.

Вузовские учебные пособия:

4. М.В. Кузелев, А.А. Рухадзе, П.С. Стрелков Плазменная релятивистская СВЧ-электроника: Учеб. пособие / Москва.: Издательство МГТУ им.Н.Э.Баумана, 2002. 543 с.

Периодические издания:

6. R. Benattar, C. Galas, P. Ney X-UV Index of refraction of dense and hot plasmas // Journal of X-ray Science and Technology. 1995. № 5. p.p. 249-260.

7. Взаимодействие электронного пучка с плазмой / И.Ф. Харченко, Я.Б. Файнберг, Р.Н. Николаев и др. // ЖЭТФ 1960. Т. 38, вып. 3. С. 685-692.

Материалы конференций:

9. А.С. Постникова, Б.В. Шишкин Система автоматизации для построения изображения объектов в терагерцовом диапазоне частот // Образовательные, научные и инженерные приложения в среде LabView и технологии National Instruments: Сборник трудов. междунар. науч.-практ. конф. / Москва. Издательство Российского университета дружбы народов, 2006. С. 259-262.

10. ECR plasmas and ECR Ion Sources / A.Girard, C.Lecot, G.Melin // 27<sup>th</sup> EPS Conference on Contr. Fusion and Plasma Phys. / Budapest, 2000. vol.24B(2000), p.p. 85-88.

### **Академическая этика**

В курсовой работе и контрольных практических заданиях, используемые выдержки, идеи других авторов снабжаются сносками и отражаются в списке используемой литературы. Не допустимо включать в свою работу выдержки из работ без указания на это, пересказывать чужую работу близко к тексту без отсылки к ней, использовать чужие идеи без указания первоисточников, включая электронные версии, распространяемые в Интернет. Все случаи плагиата должны быть исключены. В конце работы, согласно общих требований по оформлению отчетов самостоятельной работы, дается исчерпывающий список всех использованных источников.

## ТЕМЫ ЛЕКЦИЙ И ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

1 СЕМЕСТР (сентябрь-январь)

**Неделя 1: Лекция. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент.** Математическое моделирование – новая методология научных исследований. Вычислительный эксперимент и научно-технический прогресс. Связь вычислительного эксперимента с натурным. Вычислительный эксперимент в прикладной физике.

Литература:

Обязательная:

1. А.А.Самарский, П.Н.Вабищевич. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент, Институт математического моделирования (Интернет-публикация) РАН, 2000.  
<http://www.imamod.ru/~vab/matmod/MatMod.htm>.
2. Вабищевич П.Н. Численное моделирование, -М.: МГУ. 1993. 152 с.

Дополнительная:

1. Ю.С. Сигов *Вычислительный эксперимент: мост между прошлым и будущим физики плазмы.* - М: Физматлит, 2001. 286 с.

**Неделя 2: Лекция. Основа математического моделирования: модель – алгоритм – программа (код).** Анализ исследуемого объекта. Модель исследуемого объекта. Разработка вычислительного алгоритма. Создание программного обеспечения, реализация модели и алгоритма на компьютере. Анализ результатов численных экспериментов, сопоставление с результатами натурных экспериментов (при наличии результатов натурального эксперимента). Коррекция модели, алгоритма, программы.

## Литература:

### Обязательная:

1. А.А.Самарский, П.Н.Вабищевич. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент, Институт математического моделирования (Интернет-публикация) РАН, 2000.  
<http://www.imamod.ru/~vab/matmod/MatMod.htm>.
2. Вабищевич П.Н. Численное моделирование, -М.: МГУ. 1993. 152 с.

### Дополнительная:

1. Ю.С. Сигов *Вычислительный эксперимент: мост между прошлым и будущим физики плазмы*. - М: Физматлит, 2001. 286 с.

**Неделя 3: Лекция. Методы вычислительного эксперимента в прикладной физике.** Поисковый вычислительный эксперимент. Вычислительный эксперимент в физике плазмы. Языки программирования в вычислительном эксперименте. Кинетическое описание коллективных явлений в бесстолкновительной плазме. Решение кинетических уравнений методом преобразований. Численное решение уравнения Власова. Метод «водяного мешка».

## Литература:

### Обязательная:

1. Поттер Д. *Вычислительные методы в физике*. -М.: Наука, 1975.
2. Ю.С. Сигов *Вычислительный эксперимент: мост между прошлым и будущим физики плазмы*. - М: Физматлит, 2001. 286 с.
3. Ч. Бэдсел, А. Ленгдон *Физика плазмы и численное моделирование*. – М: Энергоатомиздат, 1989.
4. А.М. Горелик *Современный Фортран для компьютеров традиционной архитектуры и для параллельных вычислительных систем* // *Вычислительные методы и программирование*. Т. 5. 2004.
5. Р. Хокни , Дж. Иствуд *Численное моделирование методом частиц*. - М: Мир, 1987.

Дополнительная:

1. Туриков В.А., Ульяницкий И.В., Умнов А.М., Численное моделирование плазменных процессов. -М: Изд. РУДН, 2003. 126 с.

**Неделя 4: Лекция. Метод частиц в ячейке для одномерных электростатических процессов.** Общая схема метода частиц. Формирование начального распределения частиц. Вычисление распределения плотности заряда. Нахождение самосогласованного электрического поля. Безразмерные переменные. Интегрирование уравнений движения частиц. Общая структура программы одномерного моделирования методом частиц в ячейке. Примеры моделирования одномерных плазменных систем.

Литература:

Обязательная:

1. Р. Хокни , Дж. Иствуд Численное моделирование методом частиц. - М: Мир, 1987.
2. Ч. Бэдсел, А. Ленгдон Физика плазмы и численное моделирование. – М: Энергоатомиздат, 1989.
3. Ю.С. Сигов Вычислительный эксперимент: мост между прошлым и будущим физики плазмы. - М: Физматлит, 2001. 286 с.
4. Поттер Д. Вычислительные методы в физике.-М.: Наука, 1975.

Дополнительная:

1. Туриков В.А., Ульяницкий И.В., Умнов А.М., Численное моделирование плазменных процессов. -М: Изд. РУДН, 2003. 126 с.

**Неделя 5: Лекция. Метод частиц в ячейке для одномерных электромагнитных процессов.** Одномерная электромагнитная модель плазмы. Численное решение уравнений движения частиц в электромагнитном поле. Интегрирование уравнений Максвелла методом

Даусона. Примеры моделирования одномерных электромагнитных процессов в плазме.

Литература:

Обязательная:

1. Р. Хокни , Дж. Иствуд Численное моделирование методом частиц. - М: Мир, 1987.
2. Ч. Бэдсел, А. Ленгдон Физика плазмы и численное моделирование. – М: Энергоатомиздат, 1989.
3. Ю.С. Сигов Вычислительный эксперимент: мост между прошлым и будущим физики плазмы. - М: Физматлит, 2001. 286 с.
4. Поттер Д. Вычислительные методы в физике.-М.: Наука, 1975.

Дополнительная:

1. Туриков В.А., Ульяницкий И.В., Умнов А.М., Численное моделирование плазменных процессов. -М: Изд. РУДН, 2003. 126 с.

Неделя 6: **Лекция. Метод частиц для двумерных и трехмерных электростатических процессов и магнитостатических процессов.** Этапы разработки сложных программ. Общая схема метода частиц в ячейке для двумерных и трехмерных электростатических и магнитостатических моделей. Вычисление самосогласованного электрического поля плазмы. Решение уравнения Пуассона в двумерном и трехмерном случаях. Интегрирование уравнений движения частиц.

Литература:

Обязательная:

1. Р. Хокни , Дж. Иствуд Численное моделирование методом частиц. - М: Мир, 1987.
2. Ч. Бэдсел, А. Ленгдон Физика плазмы и численное моделирование. – М: Энергоатомиздат, 1989.

3. Ю.С. Сигов *Вычислительный эксперимент: мост между прошлым и будущим физики плазмы.* - М: Физматлит, 2001. 286 с.
4. C.K. Birdsall *Particle-in-Cell Charged-Particle Simulations, Plus Monte Carlo Collisions With Neutral Atoms, PIC-MCC // IEEE Trans. Plasma Sci.* — 1991, v. 19, n. 2, pp. 65 – 85.

Дополнительная:

1. Туриков В.А., Ульяницкий И.В., Умнов А.М., *Численное моделирование плазменных процессов.* -М: Изд. РУДН, 2003. 126 с.

**Неделя 7: Лекция. Примеры вычислительного эксперимента для трехмерных плазменных систем.** Модель плазмы, удерживаемой в зеркальной магнитной ловушке в условиях электронного циклотронного резонанса (ЭЦР). Общая схема модели. Определение входных параметров численного эксперимента. Расчет магнитного поля, создаваемого магнитными катушками. Расчет СВЧ поля электрического поля. Оптимизация вычислительного алгоритма. Диагностика плазмы в вычислительном эксперименте. Модель плазмы ЭЦР источников многозарядных ионов. Диагностики в вычислительном эксперименте.

Литература:

Обязательная:

1. Р. Хокни , Дж. Иствуд *Численное моделирование методом частиц.* - М: Мир, 1987.
2. Ч. Бэдсел, А. Ленгдон *Физика плазмы и численное моделирование.* – М: Энергоатомиздат, 1989.
3. Ю.С. Сигов *Вычислительный эксперимент: мост между прошлым и будущим физики плазмы.* - М: Физматлит, 2001. 286 с.

Дополнительная:

1. Туриков В.А., Ульяницкий И.В., Умнов А.М., *Численное моделирование плазменных процессов.* -М: Изд. РУДН, 2003. 126 с.



2. *Andreev V. V., Umnov A. M. Plasma Sources Sci. Technol. 1999. V. 8. P. 479 – 487.*
3. *В.В. Андреев, А.М. Умнов, А.А. Балмашинов, Г.В. Никитин, В.Ю. Саванович // Известия РАН. Серия Физическая, 2003, Т. 67, №9, с. 1314-1321.*
4. *C.K. Birdsall Particle-in-Cell Charged-Particle Simulations, Plus Monte Carlo Collisions With Neutral Atoms, PIC-MCC // IEEE Trans. Plasma Sci. — 1991, v. 19, n. 2, pp. 65 – 85.*

**Неделя 8: Лекция. Примеры вычислительного эксперимента для трехмерных плазменных систем (продолжение).** Модель плазмы ЭЦР источника многозарядных ионов. Общая схема модели. Определение входных параметров численного эксперимента. Расчет магнитного поля, создаваемого мультиполем. Расчет СВЧ поля электрического поля. Оптимизация вычислительного алгоритма. Диагностика параметров плазмы. Энергетические спектры электронной и ионной компонент плазмы. Пространственные распределения электронов и ионов. Колебания и волны в плазме ЭЦР источника ионов.

#### Литература:

#### Обязательная:

1. *Р. Хокни , Дж. Иствуд Численное моделирование методом частиц. - М: Мир, 1987.*
2. *V.D. Dougar-Jabon, A.M. Umnov, D.Suescun Diaz // Rev Sci Instrum 73(2), 2002, 629-631.*
3. *Ч. Бэдсел, А. Ленгдон Физика плазмы и численное моделирование. – М: Энергоатомиздат, 1989.*
4. *Ю.С. Сигов Вычислительный эксперимент: мост между прошлым и будущим физики плазмы. - М: Физматлит, 2001. 286 с.*

Дополнительная:

1. Туриков В.А., Ульяницкий И.В., Умнов А.М., Численное моделирование плазменных процессов. -М: Изд. РУДН, 2003. 126 с.
2. Andreev V. V., Umnov A. M. *Plasma Sources Sci. Technol.* 1999. V. 8. P. 479 – 487.
3. В.В. Андреев, А.М. Умнов, А.А. Балмашинов, Г.В. Никитин, В.Ю. Саванович // *Известия РАН. Серия Физическая*, 2003, Т. 67, №9, с. 1314-1321.

**Неделя 9: Лекция. Примеры вычислительного эксперимента для трехмерных плазменных систем (окончание).** Моделирование плазмы ЭЦР источника многозарядных ионов методом частиц в ячейке с использованием метода Монте-Карло. Общая схема модели. Моделирование ионизационных процессов методом Монте-Карло. Диагностика параметров плазмы.

Литература:

Обязательная:

1. C.K. Birdsall *Particle-in-Cell Charged-Particle Simulations, Plus Monte Carlo Collisions With Neutral Atoms, PIC-MCC* // *IEEE Trans. Plasma Sci.* — 1991, v. 19, n. 2, pp. 65 – 85.
2. Р. Хокни , Дж. Иствуд Численное моделирование методом частиц. - М: Мир, 1987.
3. Ч. Бэдсел, А. Ленгдон *Физика плазмы и численное моделирование.* – М: Энергоатомиздат, 1989.
4. Ю.С. Сигов *Вычислительный эксперимент: мост между прошлым и будущим физики плазмы.* - М: Физматлит, 2001. 286 с.
5. R. Geller *Electron Cyclotron Resonance Ion Sources and ECR Plasmas.* IOP Publishing Ltd, 1996. 433 с.

Дополнительная:

1. Туриков В.А., Ульяницкий И.В., Умнов А.М., Численное моделирование плазменных процессов. -М: Изд. РУДН, 2003. 126 с.
2. Andreev V. V., Umnov A. M. *Plasma Sources Sci. Technol.* 1999. V. 8. P. 479 – 487.

**Неделя 10: Лекция. Моделирование двумерных и трехмерных электромагнитных процессов.** Численное решение уравнений Максвелла. Электромагнитные алгоритмы, использующие непосредственно напряженность электрического поля и индукцию магнитного поля. Взаимодействие частиц и полей. Диагностики плазмы в моделировании электромагнитных процессов.

Литература:

Обязательная:

1. Р. Хокни, Дж. Иствуд Численное моделирование методом частиц. – М.: Мир, 1987.
2. Ч. Бэдсел, А. Ленгдон Физика плазмы и численное моделирование. – М: Энергоатомиздат, 1989.
3. R. Geller *Electron Cyclotron Resonance Ion Sources and ECR Plasmas.* IOP Publishing Ltd, 1996. 433 с.

Дополнительная:

1. C.K. Birdsall *Particle-in-Cell Charged-Particle Simulations, Plus Monte Carlo Collisions With Neutral Atoms, PIC-MCC* // *IEEE Trans. Plasma Sci.* — 1991, v. 19, n. 2, pp. 65 – 85.
2. Туриков В.А., Ульяницкий И.В., Умнов А.М., Численное моделирование плазменных процессов. -М: Изд. РУДН, 2003. 126 с.
3. Andreev V. V., Umnov A. M. *Plasma Sources Sci. Technol.* 1999. V. 8. P. 479 – 487.

**Неделя 11: Лекция. Параллельные вычисления в современном вычислительном эксперименте.** Параллельные вычислительные системы – стратегическое направление развития информационных технологий. Классификация параллельных компьютеров. Кластерные системы, принцип построения, топология. Производительность параллельных компьютеров. Область применения суперкомпьютеров. Проблемы, возникающие при использовании параллельных вычислительных систем. Стандарт параллельного программирования MPI.

Литература:

Обязательная:

1. В.В. Воеводин, Вл. В. Воеводин *Параллельные вычисления*. СПб: БХВ-Петербург, 2002.
2. А.М. Горелик *Современный Фортран для компьютеров традиционной архитектуры и для параллельных вычислительных систем* // *Вычислительные методы и программирование*. Т. 5. 2004.
3. В.Э. Малышкин *Основы параллельных вычислений*. Электронная версия учебного пособия. 2003. ЦИТ СГГА ([www.ssga.ru/metodich/paral2/4\\_2.html](http://www.ssga.ru/metodich/paral2/4_2.html)).
4. Ч. Бэдсел, А. Ленгдон *Физика плазмы и численное моделирование*. – М: Энергоатомиздат, 1989.

Дополнительная:

1. О.М. Белоцерковский // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2000, 40(8) 1221-1236.

**Неделя 12: Лекция. Параллельные вычисления в современном вычислительном эксперименте (продолжение)**

Организация кластерной сети. Принципы разработки параллельных методов. Параллельное программирование на основе MPI. Распараллеливание программ. Параллельные методы умножения матрицы

на вектор. Параллельные методы матричного умножения. Решение систем линейных уравнений. Параллельные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. Примеры параллельных программ. Методика визуализации данных при параллельных вычислениях.

Литература:

Обязательная:

1. В.В. Воеводин, Вл. В. Воеводин *Параллельные вычисления*. СПб: БХВ-Петербург, 2002.
2. А.М. Горелик *Современный Фортран для компьютеров традиционной архитектуры и для параллельных вычислительных систем* // *Вычислительные методы и программирование*. Т. 5. 2004.
3. В.Э. Малышкин *Основы параллельных вычислений*. Электронная версия учебного пособия. 2003. ЦИТ СГГА ([www.ssga.ru/metodich/para2/4\\_2.html](http://www.ssga.ru/metodich/para2/4_2.html))
4. Ч. Бэдсел, А. Ленгдон *Физика плазмы и численное моделирование*. – М: Энергоатомиздат, 1989.

Дополнительная:

1. О.М. Белоцерковский // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2000, 40(8) 1221-1236.

**Неделя 13: Лекция. Численные модели пучков и сгустков заряженных частиц.** Численная модель создания релятивистских сгустков электронов в плазменном синхротроне ЖИРАК. Моделирование магнитного поля нарастающего во времени. Управление движением сгустков и их высадка на мишень.

Литература:

Обязательная:

1. А.С. Рошаль *Моделирование заряженных пучков*. –М: Атомиздат, 1979, 224 с.

2. С.И. Молоковский, А.Д. Сушков *Интенсивные электронные и ионные пучки*. М.: Энергоатомиздат, 1991.
3. Лоусон Дж. *Физика пучков заряженных частиц*. – М: Мир, 1980. 428 с.
4. Andreev V. V., Umnov A. M. *Plasma Sources Sci. Technol.* 1999. V. 8. P. 479 – 487.
5. Ч. Бэдсел, А. Ленгдон *Физика плазмы и численное моделирование*. – М: Энергоатомиздат, 1989.

Дополнительная:

1. Туриков В.А., Ульяницкий И.В., Умнов А.М., *Численное моделирование плазменных процессов*. -М: Изд. РУДН, 2003. 126 с.
2. Бэнфорд А. *Транспортировка пучков заряженных частиц*. -М.: Атомиздат, 1969.

**Неделя 14: Лекция. Численные модели пучков и сгустков заряженных частиц (продолжение).** Численная модель движения релятивистского электронного сгустка в ультраминиатюрном синхротроне.

Литература:

Обязательная:

1. А.С. Рошаль *Моделирование заряженных пучков*. –М: Атомиздат, 1979, 224 с.
2. С.И. Молоковский, А.Д. Сушков *Интенсивные электронные и ионные пучки*. М.: Энергоатомиздат, 1991.
3. Лоусон Дж. *Физика пучков заряженных частиц*. – М: Мир, 1980. 428 с.
4. Ч. Бэдсел, А. Ленгдон *Физика плазмы и численное моделирование*. – М: Энергоатомиздат, 1989.

Дополнительная:

1. Туриков В.А., Ульяницкий И.В., Умнов А.М., Численное моделирование плазменных процессов. -М: Изд. РУДН, 2003. 126 с.
2. Andreev V. V., Umnov A. M. *Plasma Sources Sci. Technol.* 1999. V. 8. P. 479 – 487.
3. Бэнфорд А. Транспортировка пучков заряженных частиц. -М.: Атомиздат, 1969.

**Неделя 15: Лекция. Одномерное моделирование коллективного ускорения ионов.** Одномерная модель ускорения ионов релятивистских плазменных сгустков в спадающем в пространстве магнитном поле. Общая схема модели. Выбор параметров численного эксперимента. Расчет ускоряющего электрического поля. Диагностики.

Литература:

Обязательная:

1. Р. Хокни, Дж. Иствуд Численное моделирование методом частиц. - М: Мир, 1987.
2. С.И. Молоковский, А.Д. Сушков Интенсивные электронные и ионные пучки. М.: Энергоатомиздат, 1991.
3. Ч. Бэдсел, А. Ленгдон Физика плазмы и численное моделирование. – М: Энергоатомиздат, 1989.

Дополнительная:

1. Туриков В.А., Ульяницкий И.В., Умнов А.М., Численное моделирование плазменных процессов. -М: Изд. РУДН, 2003. 126 с.

**Неделя 16: Лекция. Трехмерное моделирование создания релятивистских плазменных сгустков и коллективного ускорения ионов.** Общая схема трехмерной модели создания релятивистских плазменных сгустков и коллективного ускорения ионов в спадающем в

пространстве магнитном поле. Создание релятивистских плазменных сгустков. Модель адиабатического сжатия плазмы. Расчет электрического и магнитного полей плазмы. Коллективное ускорение ионов в спадающем в пространстве магнитном поле. Диагностики вычислительного эксперимента.

Литература:

Обязательная:

1. Р. Хокни , Дж. Иствуд Численное моделирование методом частиц. - М: Мир, 1987.
2. С.И. Молоковский, А.Д. Сушков Интенсивные электронные и ионные пучки. М.: Энергоатомиздат, 1991.
3. Ч. Бэдсел, А. Ленгдон Физика плазмы и численное моделирование. – М: Энергоатомиздат, 1989.

Дополнительная:

1. Туриков В.А., Ульяницкий И.В., Умнов А.М., Численное моделирование плазменных процессов. -М: Изд. РУДН, 2003. 126 с.

**Неделя 17: Лекция. Численное моделирование генерации многозарядных ионов в ЭЦР источниках.** 0-мерная модель генерации многозарядных ионов (МЗИ). Расчет сечений элементарных процессов, протекающих в ЭЦР источниках многозарядных ионов. Модели для расчета времени жизни МЗИ. Модель генерации многозарядных ионов, учитывающая градиент магнитного поля. Численный эксперимент по определению зарядового состояния и токов экстракции из ЭЦР источника.

Литература:

Обязательная:

1. R. Geller *Electron Cyclotron Resonance Ion Sources and ECR Plasmas.* IOP Publishing Ltd, 1996. 433 с.



2. Р. Хокни, Дж. Иствуд Численное моделирование методом частиц. - М: Мир, 1987.
3. Ч. Бэдсел, А. Ленгдон Физика плазмы и численное моделирование. – М: Энергоатомиздат, 1989.

Дополнительная:

1. Туриков В.А., Ульяницкий И.В., Умнов А.М., Численное моделирование плазменных процессов. -М: Изд. РУДН, 2003. 126 с.

**Неделя 18: Лекция. Современное состояние и перспективы развития вычислительного эксперимента в прикладной физике.**

Литература:

Обязательная:

1. А.А.Самарский, П.Н.Вабищевич. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент, Институт математического моделирования (Интернет-публикация) РАН, 2000.  
<http://www.imamod.ru/~vab/matmod/MatMod.htm>.
2. Ю.С. Сигов Вычислительный эксперимент: мост между прошлым и будущим физики плазмы. - М: Физматлит, 2001. 286 с.

Дополнительная:

1. Туриков В.А., Ульяницкий И.В., Умнов А.М., Численное моделирование плазменных процессов. -М: Изд. РУДН, 2003. 126 с.

## **ПРАКТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ ПО КУРСУ:**

### **1 СЕМЕСТР (сентябрь-январь)**

#### **Практическая работа №1 (4 часа).**

##### **«Одномерная модель плазмы с учетом электростатических взаимодействий»**

Целью работы является построение одномерной модели плазмы с учетом электростатических взаимодействий и изучение на этой модели распространения ленгмюровской волны. Модель основана на методе частиц в ячейке. В начальный момент времени плазма считается однородной, нейтральной и полностью ионизированной. Ионы представляют собой однородный фон. Электроны имеют максвелловское распределение по скоростям. Уравнение Пуассона решается методом прогонки. В начальный момент времени задается флуктуация плотности электронов. На численной модели студенты изучают распространение ленгмюровской волны и зависимость ее параметров от параметров моделируемой плазмы.

##### **Литература:**

1. Ю.С. Сигов *Вычислительный эксперимент: мост между прошлым и будущим физики плазмы.* - М: Физматлит, 2001. 286 с.
2. Туриков В.А., Ульяницкий И.В., Умнов А.М., *Численное моделирование плазменных процессов.* -М: Изд. РУДН, 2003. 126 с.
3. Ч. Бэдсел, А. Ленгдон *Физика плазмы и численное моделирование.* – М: Энергоатомиздат, 1989.

#### **Практическая работа №2. Двухпотоковая неустойчивость в бесстолкновительной плазме (6 часов).**

С помощью моделирования по методу частиц в ячейке изучается неустойчивость бесстолкновительной плазмы, состоящей из двух электронных пучков одинаковой плотности, движущихся навстречу друг

другу с равными скоростями на фоне неподвижных ионов. Тепловое движение электронов внутри каждого потока описывается максвелловским распределением. На нелинейной стадии неустойчивости моделирование демонстрирует развитие вихрей в фазовом пространстве. При постепенном слиянии таких вихрей наблюдается образование уединенной волны Бернштейна-Грина-Крускала.

#### Литература

1. Поттер Д. *Вычислительные методы в физике*. - М: Мир, 1975.
2. Туриков В.А., Ульяницкий И.В., Умнов А.М. *Численное моделирование плазменных процессов*. – М: Изд. РУДН, 2003.
3. Кролл Н., Трайвеллис А. *Основы физики плазмы*. - М: Мир, 1975.
4. Bernstein I.B., Greene J.M., Kruskal M.D. *Phys. Rev.*, 108, 546, 1957.

#### **Практическая работа №3 Воздействие локализованного электрического импульса на плазму в цилиндрическом волноводе (6 часов).**

Моделируется динамика плазмы, помещенной в проводящий цилиндрический волновод с зазором, к которому прикладывается кратковременный импульс электрического поля. Внешнее магнитное поле направлено вдоль оси волновода. Под действием внешнего импульса возбуждаются два вида локализованных возмущений, распространяющихся с разной скоростью и имеющих разную физическую природу. Первое из них представляет собой так называемую электронную дыру на фазовой плоскости. Второе возмущение является плазменно-волноводным солитоном. Моделирование производится по методу частиц в ячейке.

#### Литература

1. Бэдсел Ч., Ленгдон А. *Физика плазмы и численное моделирование*. - М: Энергоатомиздат, 1989.

2. Туриков В.А., Ульяницкий И.В., Умнов А.М. Численное моделирование плазменных процессов. – М: Изд. РУДН, 2003.
3. Кролл Н., Трайвелпис А. Основы физики плазмы. - М: Мир, 1975.
4. Karpman V.I., Lynov J.P., Michelsen P., Pecseli H.L., Rasmussen J.J., Turikov V.A. *Phys. Fluids*, 23, 1782, 1980.

#### **Практическая работа №4. Эволюция двойного слоя в ограниченной плазме (6 часов).**

По методу частиц в ячейке проводится моделирование электронных колебаний в пучковом двойном слое. Начальное распределения частиц на фазовой плоскости генерируется в соответствии с равновесным потенциалом, найденным посредством численного решения уравнения Пуассона. Рассматривается плазма, находящаяся между двумя проводящими электродами, на которых задаются соответствующие граничные условия. Экспериментально исследуется влияние положения плоскости перепада потенциала двойного слоя на его устойчивость.

##### **Литература**

1. Бэдсел Ч., Ленгдон А. Физика плазмы и численное моделирование. - М: Энергоатомиздат, 1989.
2. Туриков В.А., Ульяницкий И.В., Умнов А.М. Численное моделирование плазменных процессов. – М: Изд. РУДН, 2003.
3. Чен Ф. Введение в физику плазмы. - М: Мир, 1987.
4. Туриков В.А. Физика плазмы, 28, 1110, 2002.

#### **Практическая работа №5 Возбуждение кильватерной волны в плазме коротким лазерным импульсом (8 часов).**

В этой работе для моделирования лазерного импульса с плазмой используется релятивистский электромагнитный код 1D3V. Падающий на плазму из вакуума лазерный импульс представляет собой линейно

поляризованную электромагнитную волну с огибающей заданного профиля. Изучается влияние профиля импульса на параметры кильватерной плазменной волны, возбуждаемой под действием силы высокочастотного давления в его передней части.

#### Литература

1. Сигов Ю.С. *Вычислительный эксперимент: мост между прошлым и будущим физики плазмы.* - М: Физматлит, 2001.
2. Туриков В.А., Ульяницкий И.В., Умнов А.М. *Численное моделирование плазменных процессов.* – М: Изд. РУДН, 2003.
3. Андреев Н.Е., Горбунов Л.М. *УФН.*, 169, 53, 1999.
4. Буланов С.В., Иновенков И.Н., Наумова Н.М., Сахаров А.С. *Физика плазмы*, 16, 764, 1990.

#### **Практическая работа №6. Самомодуляция электромагнитного импульса в условиях электронного циклотронного резонанса (6 часов).**

В данной практической работе с помощью кода 1D3V проводится численное исследование процесса резонансного взаимодействия электромагнитного импульса с докритической плазмой при его распространении вдоль внешнего постоянного магнитного поля. В условиях электронного циклотронного резонанса наблюдается нарастание амплитуды кильватерной волны, обусловленное самомодуляцией импульса. Исследуется зависимость амплитуды возбуждаемой волны от величины расстройки резонанса.

#### Литература

1. Бэдсел Ч., Ленгдон А. *Физика плазмы и численное моделирование.* - М: Энергоатомиздат, 1989.
2. Туриков В.А., Ульяницкий И.В., Умнов А.М. *Численное моделирование плазменных процессов.* – М: Изд. РУДН, 2003.

3. Литвак А.Г. *Вопросы теории плазмы. Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Атомиздат, вып. 10, 164, 1980.*
4. Милантьев В.П., Туриков В.А. *Вопросы атомной науки и техники., №5, 185, 2007.*

## **2 СЕМЕСТР (февраль-июнь)**

### **Практическая работа №7. Параметрическая неустойчивость необыкновенной волны в магнитоактивной плазме (8 часов).**

В работе проводится численное исследование процесса поперечного распространения импульса необыкновенной волны в магнитоактивной плазме. Для моделирования используется релятивистский электромагнитный код 1D2V. Моделирование демонстрирует развитие параметрической неустойчивости, приводящей к эффективной трансформации энергии импульса в энергию плазмы. При этом падающая на границу плазмы волна распадается на две необыкновенные волны с половинной частотой, распространяющиеся в том же направлении, что и импульс. С помощью численного эксперимента находится пороговое значение амплитуды, при котором развивается неустойчивость.

#### **Литература**

1. Бэдсел Ч., Ленгдон А. *Физика плазмы и численное моделирование. - М: Энергоатомиздат, 1989.*
2. Туриков В.А., Ульяницкий И.В., Умнов А.М. *Численное моделирование плазменных процессов. – М: Изд. РУДН, 2003.*
3. Ораевский В. Н. *Основы физики плазмы. Под ред. Галеева А.А. и Судана Р. М.: Энергоатомиздат, т. 2, 7, 1984.*
4. Красовицкий В.Б., Дорофеев В.Г., Туриков В.А., Сотников В.И. *Физика плазмы, 32, 26, 2006.*

## **Практическая работа №8 (8 часов).**

### **Двумерная электростатическая модель плазмы, удерживаемой в зеркальной магнитной ловушке, в условиях электронного циклотронного резонанса (ЭЦР).**

Целью работы является построение двумерной модели плазмы с учетом электростатических взаимодействий и изучение на этой модели нагрева плазмы. Модель основана на методе частиц в ячейке. Магнитное поле зеркальной ловушки создается двумя осесимметричными катушками. Вакуумная камера имеет цилиндрическую форму. Мода СВЧ колебаний –  $TE_{111}$ . колебаний В начальный момент времени моделируется однородное распределение полностью ионизированной плазмы в круге. Электроны имеют максвелловское распределение по скоростям. Ионы считаются однократно заряженными. Уравнение Пуассона решается методом быстрого преобразования Фурье с циклической редукцией. Движение электронов и ионов рассматривается в медианной плоскости системы. Уравнение движения электронов интегрируется по схеме Бориса. Уравнение движения ионов интегрируются по схеме «с перешагиванием». На численной модели студенты изучают зависимость нагрева плазмы от параметров эксперимента.

#### **Литература:**

1. Бэдсел Ч., Ленгдон А. *Физика плазмы и численное моделирование*. - М: Энергоатомиздат, 1989.
2. Ю.С. Сигов *Вычислительный эксперимент: мост между прошлым и будущим физики плазмы*. - М: Физматлит, 2001. 286 с.
3. Туриков В.А., Ульяницкий И.В., Умнов А.М., *Численное моделирование плазменных процессов*. -М: Изд. РУДН, 2003. 126 с.

## **Практическая работа №9 (8 часов).**

### **Трехмерная электростатическая модель плазмы, удерживаемой в зеркальной магнитной ловушке, в условиях ЭЦР и синхротронного гироманнитного авторезонанса (СГА).**

Целью работы является построение трехмерной модели плазмы с учетом электростатических взаимодействий и изучение на этой модели нагрева плазмы в условиях ЭЦР и создания релятивистской плазмы в условиях СГА. Модель основана на методе частиц в ячейке. Магнитное поле зеркальной ловушки создается двумя осесимметричными катушками. Импульсное магнитное поле создается системой дополнительных катушек. Мода СВЧ колебаний –  $TE_{111}$  колебаний. Уравнение движения электронов интегрируется по схеме Бориса. На численной модели студенты изучают зависимость нагрева плазмы и создания релятивистских плазменных сгустков от параметров эксперимента (напряженности СВЧ поля, пробочного отношения, темпа нарастания магнитного поля, начальной плотности плазмы).

#### **Литература:**

1. Бэдсел Ч., Ленгдон А. *Физика плазмы и численное моделирование.* - М: Энергоатомиздат, 1989.
2. Ю.С. Сигов *Вычислительный эксперимент: мост между прошлым и будущим физики плазмы.* - М: Физматлит, 2001. 286 с.
3. Туриков В.А., Ульяницкий И.В., Умнов А.М., *Численное моделирование плазменных процессов.* - М: Изд. РУДН, 2003. 126 с.



### **Практическая работа №10 (8 часов).**

#### **Моделирование управления движением релятивистского сгустка электронов и его высадки на мишень.**

Целью работы является изучение на трехмерной численной модели создания релятивистских сгустков электронов в плазменных синхротронах Жирак и их вывода на мишень. Исследуются два случая вывода сгустков на мишень: в радиальном направлении по отношению к оси симметрии магнитной системы установки, и в аксиальном направлении. Проводится анализ эффективности вывода электронов на мишень (количество ускоренных электронов, средняя энергия электронов, время взаимодействия электрон-мишень).

#### **Литература:**

1. Бэдсел Ч., Ленгдон А. *Физика плазмы и численное моделирование.* - М: Энергоатомиздат, 1989.
2. Ю.С. Сигов *Вычислительный эксперимент: мост между прошлым и будущим физики плазмы.* - М: Физматлит, 2001. 286 с.
3. Туриков В.А., Ульяницкий И.В., Умнов А.М., *Численное моделирование плазменных процессов.* - М: Изд. РУДН, 2003. 126 с.

### **Практическая работа №11 (8 часов).**

#### **Моделирование плазмы, удерживаемой в магнитной ловушке «с минимумом В».**

Целью работы является моделирование плазмы в магнитной ловушке «с минимумом В». Модель построена по методу частиц в ячейке. Магнитное поле ловушки создается двумя осесимметричными катушками или постоянными цилиндрическими магнитами и системой магнитов мультиполя (гексаполь или октуполь). Изучаются зависимости параметров

плазмы (пространственное распределение плотности, энергетические спектры электронов и ионов, потери частиц) от параметров эксперимента.

Литература:

1. Бэдсел Ч., Ленгдон А. *Физика плазмы и численное моделирование*. - М: Энергоатомиздат, 1989.
2. Geller R. *Electron Cyclotron Resonance Ion Sources and ECR Plasmas*. IOP Publishing Ltd, 1996. 433 с.
3. Ю.С. Сигов *Вычислительный эксперимент: мост между прошлым и будущим физики плазмы*. - М: Физматлит, 2001. 286 с.
4. Туриков В.А., Ульяницкий И.В., Умнов А.М., *Численное моделирование плазменных процессов*. - М: Изд. РУДН, 2003. 126 с.

**Практическая работа №12 (8 часов).**

**Реализация параллельных вычислений**

Параллельные методы матричного умножения. Параллельные методы решения интегральных уравнений. Параллельные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных.

Литература:

1. Гергель В.П. *Теория и практика параллельных вычислений*. М., Изд-во БИНОМ, 2007
2. Барский А.Б. *Параллельные информационные технологии*. М., Изд-во БИНОМ, 2007
3. Богачев К.Ю. *Основы параллельного программирования*. М.: БИНОМ, 2003
4. Воеводин В.В., Воеводин Вл.В. *Параллельные вычисления*. СПб.: БХВ-Петербург, 2002

5. Корнеев В.В. *Параллельное программирование в MPI*. М. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003
6. Group W., Lusk E., Skjellum A. *Using MPI — 2nd Edition: Portable Parallel Programming with the Message Passing Interface (Scientific and Engineering Computation)*. MIT Press, 1999
7. Group W., Lusk E., Thakur R. *Using MPI-2: Advanced Features of the Message Passing Interface (Scientific and Engineering Computation)*. MIT Press, 1999

### **Практическая работа №13 (8 часов).**

**Параллельные вычисления в вычислительном эксперименте (на примере моделирования плазмы в зеркальной магнитной ловушке).**

Методы распараллеливания программ: простая декомпозиция, функциональная декомпозиция, декомпозиция данных.

### **Литература:**

1. В.В. Воеводин, Вл. В. Воеводин *Параллельные вычисления*. СПб: БХВ-Петербург, 2002. 600 с.
2. А.М. Горелик *Современный Фортран для компьютеров традиционной архитектуры и для параллельных вычислительных систем // Вычислительные методы и программирование. Т. 5. 2004.*
3. Гергель В.П. *Теория и практика параллельных вычислений*. М., Изд-во БИНОМ, 2007
4. Барский А.Б. *Параллельные информационные технологии*. М., Изд-во БИНОМ, 2007
5. Корнеев В.В. *Параллельное программирование в MPI*. М. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003

6. Group W., Lusk E., Skjellum A. *Using MPI — 2nd Edition: Portable Parallel Programming with the Message Passing Interface (Scientific and Engineering Computation)*. MIT Press, 1999
7. Group W., Lusk E., Thakur R. *Using MPI-2: Advanced Features of the Message Passing Interface (Scientific and Engineering Computation)*. MIT Press, 1999.
8. В.Э. Малышкин *Основы параллельных вычислений. Электронная версия учебного пособия. 2003. ЦИТ СГГА ([www.ssga.ru/metodich/paral2/4\\_2.html](http://www.ssga.ru/metodich/paral2/4_2.html))*.

#### **Практическая работа №14 (8 часов).**

#### **Изучение зарядового состояния ионов в ЭЦР источнике на численных моделях.**

Изучается зависимость зарядового состояния ионов в ЭЦР источнике. Рассчитываются сечения элементарных процессов, протекающих в ЭЦР источниках многозарядных ионов (МЗИ). Применяются различные модели для расчета времени жизни МЗИ. Численный эксперимент по определению зарядового состояния и токов экстракции из ЭЦР источника для различных входных параметров эксперимента.

#### **Литература:**

1. R. Geller *Electron Cyclotron Resonance Ion Sources and ECR Plasmas*. IOP Publishing Ltd, 1996. 433 с.
2. Р. Хокни, Дж. Иствуд *Численное моделирование методом частиц*. - М: Мир, 1987.
3. Ч. Бэдсел, А. Ленгдон *Физика плазмы и численное моделирование*. – М: Энергоатомиздат, 1989.
4. Туриков В.А., Ульяницкий И.В., Умнов А.М., *Численное моделирование плазменных процессов*. -М: Изд. РУДН, 2003. 126 с.

## **Практическая работа №15 (8 часов).**

### **Изучение параметров плазмы в ловушке с минимумом В.**

Целью работы является моделирование плазмы в магнитной ловушке «с минимумом В». Модель построена по методу частиц в ячейке. Магнитное поле ловушки создается двумя осесимметричными катушками или постоянными цилиндрическими магнитами и системой магнитов мультиполя (гексаполь или октуполь). Изучаются зависимости параметров плазмы (пространственное распределение плотности, энергетические спектры электронов и ионов, потери частиц) от параметров эксперимента.

Литература:

1. Бэдсел Ч., Ленгдон А. *Физика плазмы и численное моделирование.* - М: Энергоатомиздат, 1989.
2. Geller R. *Electron Cyclotron Resonance Ion Sources and ECR Plasmas.* IOP Publishing Ltd, 1996. 433 с.
3. Ю.С. Сигов *Вычислительный эксперимент: мост между прошлым и будущим физики плазмы.* - М: Физматлит, 2001. 286 с.
4. Туриков В.А., Ульяницкий И.В., Умнов А.М., *Численное моделирование плазменных процессов.* -М: Изд. РУДН, 2003. 126 с.

## Календарный план курса (1 семестр)

Виды и содержание учебных занятий				
Неде- ля	Лекции	Число часов	Практические занятия	Число часов
1	Математическое моделирование и вычислительный эксперимент.	2		
1	Основа математического моделирования: модель – алгоритм – программа (код).	2		
2	Методы вычислительного эксперимента в прикладной физике.	2		
2	Метод частиц в ячейке для одномерных электростатических процессов.	2		
3	Метод частиц в ячейке для одномерных электромагнитных процессов.	2		
3	Метод частиц для двумерных и трехмерных электростатических процессов и магнитостатических процессов.	2		
4	Примеры вычислительного эксперимента для трехмерных плазменных систем.	2	Практическая работа №1	4
5	Примеры вычислительного эксперимента для трехмерных плазменных систем (продолжение).	2		
6	Примеры вычислительного эксперимента для трехмерных плазменных систем (окончание).	2	Практическая работа №2	6
7	Моделирование двумерных и трехмерных электромагнитных процессов.	2		
8	Параллельные вычисления в современном вычислительном эксперименте.	2		

9	Промежуточный контроль знаний			8
9	Параллельные вычисления в современном вычислительном эксперименте (продолжение).	2	Практическая работа №3	6
10	Численные модели пучков и сгустков заряженных частиц.	2		
11	Численные модели пучков и сгустков заряженных частиц (продолжение).	2		
12	Одномерное моделирование коллективного ускорения ионов.	2	Практическая работа №4	6
13	Трехмерное моделирование создания релятивистских плазменных сгустков и коллективного ускорения ионов.	2		
14	Численное моделирование генерации многозарядных ионов в ЭЦР источниках.	2		
15			Практическая работа №5	8
16				
17			Практическая работа №6	6
18	Современное состояние и перспективы развития вычислительного эксперимента в прикладной физике.	2		
19	Сдача контрольного практического задания (курсовой)			8
20	Итоговый контроль знаний			8

### Календарный план курса (2 семестр)

	Виды и содержание учебных занятий			
Неде- ля	Лекции	Число часов	Практические занятия	Число часов
1			Практическая работа №7	8
2				
3			Практическая работа №8	8
4				
5			Практическая работа №9	8
6				
7			Практическая работа №10	8
8				
8	Промежуточный контроль знаний			8
9			Практическая работа №11	8
10				
11			Практическая работа №12	8
12				
13			Практическая работа №13	8
14				
15			Практическая работа №14	8
16				
17			Практическая работа №15	8
18				
19	Сдача контрольного практического задания (курсовой)			8
20	Итоговый контроль знаний			8



**Примерный перечень тем курсовых работ и контрольных практических заданий.**

***Курсовые работы:***

1. Моделирование динамики бесстолкновительной плазмы методом «водяного мешка»
2. Решение уравнения Власова методом преобразований.
3. Разностные схемы численного решения уравнения Власова.
4. Моделирование сильной ленгмюровской турбулентности.
5. Применение метода частиц в ячейке для изучения открытых плазменных систем.
6. Кинетические модели пылевой плазмы.
7. Численные методы в магнитной гидродинамике.
8. Моделирование взаимодействия «солнечного ветра» с магнитосферой Земли.
9. Использование метода частиц в ячейке в моделировании галактик.
10. Метод маркеров на сетке для численного анализа нелинейных гидродинамических процессов.
11. Моделирование коллективного ускорения ионов.
12. Моделирование нагрева плазмы в токамаках.
13. Параллельные и распределенные вычисления в моделировании плазмы.
14. ЭЦР источники рентгеновского излучения.
15. Ультраминиатюрный синхротрон – источник терагерцового синхротронного излучения.
16. Системы экстракции многозарядных ионов в ЭЦР источниках.
17. Повышение зарядового состава пучка ионов стабильных и радиоактивных изотопов при прохождении через плазменную среду.

### ***Контрольные практические задания:***

1. Оценить величину инкремента двухпотоковой неустойчивости. Сравнить эту величину с теоретическим значением, полученным в гидродинамическом приближении.
2. Экспериментально найти зависимость ширины и амплитуды уединенной волны Бернштейна-Грина -Крускала, образующейся на финальной стадии двухпотоковой неустойчивости, от начальной скорости электронных потоков.
3. Исследовать дисперсионные свойства плазмы, помещенной в проводящий цилиндрический волновод.
4. Определить пороговую амплитуду электрического импульса при которой возбуждаются две электронные дыры.
5. Определить область параметров двойного слоя в которой происходит формирование виртуального катода в низкопотенциальной области.
6. Найти связь между характерным временем жизни двойного слоя и ионным плазменным периодом..
7. Найти предельное значение амплитуды лазерного импульса, при которой кильватерная волна сохраняет свою регулярность.
8. Определить, как зависит доля энергии лазерного импульса, передаваемой плазменным колебаниям, от его длительности.
9. Найти максимальное значение амплитуды кильватерной волны, возбуждаемой в режиме электронного циклотронного резонанса для импульса СВЧ диапазона.
10. Определить оптимальную длину ускорительной системы с использованием резонансной самомодуляции импульса.
11. Получить частотные спектры продольного поля в процессе развития параметрической неустойчивости при распространении в плазме необыкновенной волны большой амплитуды.

12. Найти оптимальное значение величины внешнего магнитного поля, при котором имеет место наиболее эффективный нагрев плазмы.
13. Изучить воздействия на однородную плазму однократного электрического импульса на одномерной численной модели.
14. Изучить зависимости эффективности коллективного ускорения протонов релятивистских плазменных сгустков в спадающем магнитном поле на одномерной численной модели.
15. Определить оптимальные параметры пучка электронов, ускоряемого в нарастающем в пространстве магнитном поле в условиях ЭЦР.
16. Изучить нагрев электронов плазмы в магнитной ловушке с двумя локальными ЭЦР областями в резонаторе с модой СВЧ колебаний  $TE_{112}$ .
17. Определить эффективность захвата электронов в режим синхротронного гироманитного авторезонанса в случаях продольной и поперечной инжекции электронного пучка в зеркальную магнитную ловушку.
18. Определить условия создание колец горячих электронов в короткой зеркальной ловушке.
19. Вычислить определенный интеграл с использованием техники распараллеливания при решении задачи моделирования физических процессов.
20. Определить эффективность использования параллельных и распределенных вычислений в задачах моделирования плазмы в магнитной ловушке
21. Сравнить параметры электронной компоненты плазмы, удерживаемой в открытых ловушках различных типов (зеркальная ловушка, ловушка с минимумом  $B$ , ловушка с Zero- $B$ ).
22. Изучить устойчивость релятивистского сгустка электронов в ультраминиатюрном синхротроне.

23. Рассчитать систему экстракции многозарядных ионов ЭЦР источников.

**Использованные литературные источники.**

1. Межгосударственного стандарта -ГОСТ 7.32-2001 «Отчет о научно-исследовательской работе»
2. ГОСТ 8.417-81 "ГСИ. Единицы физических величин".