ПРИОРИТЕТНЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ПРОЕКТ «ОБРАЗОВАНИЕ»
РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

Л.Е. РОССОВСКИЙ

КАЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Учебное пособие

Москва
2008

Инновационная образовательная программа
Российского университета дружбы народов

«Создание комплекса инновационных образовательных программ и формирование инновационной образовательной среды, позволяющих эффективно реализовывать государственные интересы РФ через систему экспорта образовательных услуг»

Экспертное заключение –

доктор физико-математических наук, профессор *В.В. Власов*

Россовский Л.Е.

Качественная теория дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений: Учеб. пособие. – М.: РУДН, 2008. – 190 с.

Учебное пособие знакомит с основными свойствами и современными методами качественного исследования краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений в ограниченных областях евклидова пространства. Подробно рассматриваются дифференциально-разностные уравнения и уравнения, содержащие растяжения и сжатия аргументов искомой функции. Представленный в пособии материал находится на стыке теории функционально-дифференциальных уравнений, современной теории дифференциальных уравнений с частными производными и приложений. Учебное пособие адресовано бакалаврам, обучающимся по направлению «Математика. Прикладная математика» (510100).

Учебное пособие выполнено в рамках инновационной образовательной программы Российского университета дружбы народов, направление «Комплекс экспортоориентированных инновационных образовательных программ по приоритетным направлениям науки и технологий», и входит в состав учебно-методического комплекса, включающего описание курса, программу и электронный учебник.

Оглавление

Введение

Целью данного пособия является знакомство с методами исследования краевых задач для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их одномерных аналогов. Эта молодая область дифференциальных уравнений сложилась под влиянием теории функционально-дифференциальных уравнений, современной теории дифференциальных уравнений с частными производными и приложений.

Общей теории функционально-дифференциальных уравнений посвящён целый ряд монографий, среди которых широко известные книги А. Д. Мышкиса [19], Р. Беллмана, К. Кука [4], Дж. Хейла [38]. В книге А.Л. Скубачевского [59] изложена теория краевых задач для эллиптических дифференциально-разностных уравнений.

Для функционально-дифференциальных уравнений возможны различные постановки краевых задач. В пособии рассматриваются краевые задачи, к которым сводятся вариационные задачи для функционалов с отклоняющимися аргументами, и некоторые их обобщения. Подобные задачи возникают, например, в релятивистской электродинамике [57,60], математической теории управления [12,15,22,34], теории упругости [20,53]. Необходимость исследования краевых задач для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений появляется и в современной нелинейной оптике при построении оптических систем с вращением поля в контуре обратной связи [61].

Кроме того, рассматриваемые в пособии задачи имеют приложения в теории эллиптических дифференциальных уравнений с нелокальными краевыми условиями, связывающими значения искомой функции (и её производных) в точках границы со значениями в некоторых внутренних точках области (см. [59]). Эта область стала интенсивно развиваться после опубликования известной работы А. В. Бицадзе, А. А. Самарского [5], где рассматривалась задача, возникающая в теории плазмы. Нелокальными эллиптическими краевыми задачами описываются также диффузионные процессы, происходящие в живых клетках [42].

В настоящем пособии краевые задачи ставятся для уравнений, содержащих преобразования аргументов в старших производных. Изложение строится на примере двух существенно различных классов функционально-дифференциальных уравнений: дифференциально-разностных уравнений и уравнений, в которых аргумент подвергается сжатиям и растяжениям. Наличие в старших членах уравнения таких преобразований, отображающих точки границы внутрь (или во внешность) области, приводит к ряду принципиально новых свойств по сравнению с теорией краевых задач для дифференциальных уравнений. Например, в отличие от эллиптических дифференциальных уравнений, гладкость обобщённых решений краевой задачи для эллиптического функционально-дифференциального уравнения может нарушаться внутри области и сохраняться только в некоторых подобластях. Символ самосопряжённого полуограниченного дифференциально-разностного оператора может менять знак. Краевая задача для эллиптического функционально-дифференциального уравнения со сжатиями аргумента может иметь наряду с единственным гладким решением бесконечномерное ядро, состоящее из негладких функций.

Используемый подход к изучению краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений основан на свойствах эллиптических операторов и функциональных операторов.

Пособие состоит из двух глав. Глава 1 посвящена краевым задачам для функционально-дифференциальных уравнений, когда искомая функция зависит от одной переменной. В разделе 1.1 рассмотрены примеры, иллюстрирующие связь между задачей на экстремум квадратичного функционала с отклоняющимся аргументом и линейной краевой задачей для функционально-дифференциального уравнения. В разделе 1.2 изучаются линейные краевые задачи для обыкновенных дифференциально-разностных уравнений. Вначале, в пункте 1.2.1, излагаются теоремы о разрешимости и спектре обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с нелокальными краевыми условиями. Далее (пункт 1.2.2) рассматриваются свойства разностных операторов, необходимые для исследования в пункте 1.2.3 разрешимости, спектра и гладкости обобщённых решений краевых задач для дифференциально-разностных уравнений. Важным результатом является здесь теорема об изоморфизме, который осуществляет разностный оператор между пространством $\mathring{W}_2^k(0,d)$ и некоторым подпространством функций из $W_2^k(0,d)$. Этот изоморфизм позволяет сводить краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений к дифференциальным уравнениям с нелокальными краевыми условиями. Затрагивается вопрос о том, при каких правых частях уравнения обобщённое решение будет непрерывно дифференцируемой функцией на всём интервале $(0,d)$.

Те же вопросы решаются в разделе 1.3 для линейных функционально-дифференциальных уравнений, содержащих сжатия и/или растяжения аргумента под знаком второй производной. На основе изучения свойств определённого класса функциональных операторов (пункт 1.3.1) получены результаты о разрешимости, спектре и гладкости обобщённых решений краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений (пункты 1.3.2, 1.3.3). Пункт 1.3.4 посвящён приложению к теории управления. Отметим, что как по используемому подходу, так и по своим свойствам задачи раздела 1.3 отличаются от задач раздела 1.2.

В главе 2 исследуются краевые задачи для сильно эллиптических функционально-дифференциальных уравнений. Ключевую роль здесь играет неравенство Гординга, которое устанавливается для дифференциально-разностных операторов в разделе 2.2 и для функционально-дифференциальных операторов с растяжениями и сжатиями аргументов в разделе 2.3.

В разделе 2.1 приводятся хорошо известные классические результаты из теории эллиптических дифференциальных уравнений и систем.

Раздел 2.2, посвящённый первой краевой задаче (задаче Дирихле) для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения, начинается со свойств разностных операторов в ограниченных областях Q пространства $\mathbb{R}^n$. Результаты пункта 2.2.1 являются обобщением соответствующих результатов из 1.2.2 на многомерный случай. Здесь делаются необходимые геометрические построения: определяются подобласти $Q_r \subset Q$ как связные компоненты множества, полученного из Q выбрасыванием всевозможных сдвигов границы ∂Q на векторы некоторой группы, связанной с видом разностных операторов. Эти подобласти играют важную роль в следующих пунктах. Пункт 2.2.2 посвящён нахождению необходимых условий и достаточных условий в алгебраической форме сильной эллиптичности дифференциально-разностного уравнения. Далее стандартными методами анализа доказываются фредгольмова разрешимость, дискретность и полуограниченность спектра первой краевой задачи для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения. Наиболее интересные свойства эллиптических дифференциально-разностных уравнений связаны с гладкостью обобщённых решений. Этот вопрос рассмотрен в пункте 2.2.3. После того как сведением к системе эллиптических дифференциальных уравнений доказана внутренняя гладкость обобщённых решений в подобластях Q_r, приводится пример, демонстрирующий наличие степенных особенностей у решения в окрестности некоторых точек ∂Q_r. Далее следует описание множества $\mathcal{K}$ — носителя возможных особенностей решения. При этом для некоторых частных случаев можно гарантировать гладкость обобщённых решений вплоть до границ подобластей Q_r. Типичным является также несовпадение следов нормальной производной на границе соседних подобластей, хотя есть примеры, когда обобщённое решение первой краевой задачи для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения принадлежит $W_2^2(Q)$, т.е. является гладким во всей области, для любой правой части из $L_2(Q)$.

В разделе 2.3 исследуется первая краевая задача для сильно эллиптического функционально-дифференциального уравнения с растяжениями и сжатиями аргументов. Предполагается, что область Q, в которой задано уравнение, содержит начало координат. Это обстоятельство обуславливает принципиальное отличие таких задач от рассмотреных в разделе 2.2. В пункте 2.3.1 при помощи преобразования Гельфанда строится символьное исчисление для операторной алгебры, включающей операторы сжатия и растяжения аргументов, а также операторы умножения на однородные функции нулевой степени. После этого с использованием элементов теории дифференциально-разностных уравнений удаётся получить одновременно необходимые и достаточные условия сильной эллиптичности функционально-дифференциального уравнения с растяжениями и сжатиями аргументов в области, удовлетворяющей условию типа «звёздности» (пункт 2.3.2). Способ доказательства подсказывает и новый критерий сильной эллиптичности для дифференциально-разностных уравнений в бесконечном цилиндре (пункт 2.3.6). В пункте 2.3.3 формулируется теорема о разрешимости и спектре задачи Дирихле для сильно эллиптического уравнения, а пункт 2.3.4 посвящён исследованию гладкости обобщённых решений. Выяснение этого вопроса ещё далеко от завершения и изложенные здесь результаты носят скорее частный характер. Для сильно эллиптического уравнения, содержащего один функциональный оператор в старшей части, доказана гладкость обобщённых решений в подобластях и получены достаточные условия сохранения гладкости во всей области. Приведён пример решения с особенностью в начале координат. Для более общих сильно эллиптических уравнений с растяжениями и сжатиями остаётся открытым вопрос даже о локальной гладкости обобщённых решений в подобластях. Определённые трудности представляет и переход к уравнениям с переменными коэффициентами. Некоторые результаты приводятся в пункте 2.3.5. Интересно отметить, что значения коэффициентов при нелокальных членах вне сколь угодно малой окрестности начала координат на фредгольмовость задачи не влияют.

В примечаниях после каждой главы приведены ссылки на источники и указана связь с исследованиями других авторов.

Все основные результаты, изложенные в пособии, принадлежат автору пособия (разделы 1.3, 2.3) и А. Л. Скубачевскому (разделы 1.2, 2.2).

Глава 1

Краевые задачи для обыкновенных функционально-дифференциальных уравнений

1.1 Вариационные задачи, приводящие к краевым задачам для функционально-дифференциальных уравнений

1.1.1 Задача для дифференциально-разностного уравнения

Как обычно, через $W_2^k(a,b)$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, $k = 0, 1, \ldots$, обозначается линейное пространство функций на интервале (a, b), абсолютно непрерывных и принадлежащих $L_2(a,b)$ вместе со своими производными до порядка $k-1$ и имеющих k-ю производную из $L_2(a,b)$ (частный случай пространства Соболева функций на интервале). Пространство $W_2^k(a,b)$ является гильбертовым со скалярным произведением

$$(u, v)_{W_2^k(a,b)} = \sum_{i=0}^{k} \int\limits_a^b u^{(i)}(t)\overline{v^{(i)}(t)}\, dt.$$

При $k = 0$ имеем $W_2^0(a,b) = L_2(a,b)$. Для $k \geqslant 1$ и $-\infty < a < b < +\infty$ подпространство функций из $W_2^k(a,b)$, обращающихся в ноль на концах интервала вместе с производными до порядка $k-1$, обозначается через $\mathring{W}_2^k(a,b)$.

Начнём со следующего примера. На вещественном пространстве

$$\mathring{W}_2^1(0,2) = \{y \in W_2^1(\mathbb{R}) : y(t) = 0 \ (t \notin (0,2))\}$$

рассмотрим квадратичный функционал (энергии)

$$J(y) = \int\limits_0^2 \left[y'^2(t) + 2ay'(t)y'(t-1) - 2f(t)y(t) \right] \, dt, \tag{1.1}$$

где $a \in \mathbb{R}$, $f \in L_2(0,2)$ — вещественная функция. Задача состоит в исследовании этого функционала на экстремум (минимум).

Отметим, что при $|a| < 1$ интеграл

$$J_0(y) = \int\limits_0^2 \left(y'^2(t) + 2ay'(t)y'(t-1) \right) \, dt,$$

наряду с очевидной оценкой сверху $J_0(y) \leqslant \gamma_1 \|y\|^2_{W_2^1(0,2)}$, допускает также и оценку снизу $J_0(y) \geqslant \gamma_2 \|y\|^2_{W_2^1(0,2)}$ $(\gamma_1 > 0, \ \gamma_2 > 0)$. В этом легко убедиться, если ввести функции $y_1(t)$, $y_2(t)$, определённые на интервале $(0,1)$ и связанные с функцией $y(t)$ следующим образом:

$$y_1(t) = y(t), \ y_2(t) = y(t+1) \ (t \in (0,1)).$$

Понятно, что $y_i \in W_2^1(0,1)$ и выражение

$$\left(\int\limits_0^1 (y_1'^2(t) + y_2'^2(t)) \, dt \right)^{1/2}$$

задаёт эквивалентную норму в $\mathring{W}_2^1(0,2)$. Теперь можем записать

$$J_0(y) = \int\limits_0^1 y'^2(t) \, dt + \int\limits_1^2 \left(y'^2(t) + 2ay'(t)y'(t-1) \right) \, dt =$$

$$= \int\limits_0^1 y'^2(t) \, dt + \int\limits_0^1 \left(y'^2(t+1) + 2ay'(t+1)y'(t) \right) \, dt =$$

$$= \int_0^1 \left(y_1'^2(t) + y_2'^2(t) + 2a y_1'(t) y_2'(t) \right) \, dt \geqslant$$

$$\geqslant (1 - |a|) \int_0^1 \left(y_1'^2(t) + y_2'^2(t) \right) \, dt \geqslant \gamma_2 \|y\|^2_{W_2^1(0,2)}.$$

Как известно (см., например [18, глава IV, §1]), в этом случае существует, и притом единственная, функция $y \in \mathring{W}_2^1(0,2)$, на которой функционал (1.1) достигает минимума.

Для нахождения минимизирующей функции выпишем необходимое условие экстремума функционала (1.1) (в случае $|a| \leqslant 1$ оно окажется и достаточным). Это условие представляет собой интегральное тождество, определяющее обобщённое решение краевой задачи для линейного дифференциально-разностного уравнения.

Итак, пусть функция $y \in \mathring{W}_2^1(0,2)$ минимизирует функционал (1.1). Зафиксировав произвольную функцию $v \in \mathring{W}_2^1(0,2)$, рассмотрим сужение функционала (1.1) на прямую $\{y + sv \in \mathring{W}_2^1(0,2) : s \in \mathbb{R}\}$. Это сужение будет квадратным трёхчленом относительно параметра s:

$$J(y + sv) = J(y) + 2sB(y,v) + s^2 J_0(v),$$

где

$$B(y,v) = \int_0^2 \left[y'(t)v'(t) + ay'(t-1)v'(t) + ay'(t)v'(t-1) - f(t)v(t) \right] dt.$$

Согласно нашему предположению, минимум $J(y + sv)$ достигается при $s = 0$, что очевидно равносильно требованию $B(y,v) = 0$. Таким образом, решение y вариационной задачи удовлетворяет условию $B(y,v) = 0$ для любой функции $v \in \mathring{W}_2^1(0,2)$. Наоборот, пусть это условие на y выполнено; предположим также, что $|a| \leqslant 1$. Тогда, учитывая неотрицательность функционала J_0, будем иметь

$$J(y + v) = J(y) + 2B(y,v) + J_0(v) = J(y) + J_0(v) \geqslant J(y)$$

для любой функции $v \in \mathring{W}_2^1(0,2)$, т.е. y доставляет минимум функционалу (1.1).

Преобразуем теперь билинейную форму $B(y,v)$. Слагаемое, содержащее $v'(t-1)$, после замены $t-1=\tau$ примет вид $\int\limits_{-1}^{1} ay'(\tau+1)v'(\tau)\,d\tau$. Между тем, в силу краевых условий (функции y и v обращаются в ноль вне интервала $(0,2)$), интеграл не изменится при переходе к прежнему промежутку интегрирования $(0,2)$. Тождество $B(y,v)=0$ может быть теперь записано в виде

$$\int\limits_0^2 \big(y'(t)+ay'(t-1)+ay'(t+1)\big)v'(t)\,dt = \int\limits_0^2 f(t)v(t)\,dt, \tag{1.2}$$

где функция v пробегает всё пространство $\mathring{W}_2^1(0,2)$. Это означает, что принадлежащая $L_2(0,2)$ функция $y'(t)+ay'(t-1)+ay'(t+1)$ также имеет на интервале $(0,2)$ обобщённую производную из $L_2(0,2)$, равную $-f(t)$. Таким образом, минимизирующая функционал (1.1) функция y из пространства $\mathring{W}_2^1(0,2)$ является обобщённым решением краевой задачи

$$-\big(y'(t)+ay'(t-1)+ay'(t+1)\big)' = f(t) \quad (t\in(0,2)), \tag{1.3}$$

$$y(t)=0 \quad (t\notin(0,2)), \tag{1.4}$$

а при $|a|\leqslant 1$, как мы убедились, верно и обратное.

1.1.2 Задача для дифференциального уравнения со сжатием и растяжением аргумента

Другой интересующий нас пример связан с обобщением задачи Н. Н. Красовского об успокоении системы управления с запаздыванием, пропорциональным времени.

Рассмотрим линейную систему управления с запаздыванием, описываемую уравнением

$$y'(t) + ay'(q^{-1}t) + by(t) + cy(q^{-1}t) = u(t) \quad (t > 0), \tag{1.5}$$

где $a, b, c \in \mathbb{R}$, $q > 1$; $u(t)$ — управляющее воздействие. Функции $y(t)$ и $u(t)$ считаем вещественнозначными. Состояние системы в начальный момент времени задаётся условием

$$y(0) = y_0 \in \mathbb{R}. \tag{1.6}$$

Требуется привести систему (1.5), (1.6) в состояние равновесия к моменту времени $T > 0$. Если управлять системой на промежутке $(0, qT)$ так, чтобы

$$y(t) = 0 \quad (T \leqslant t \leqslant qT), \tag{1.7}$$

а затем сбросить управление, положив $u(t) \equiv 0$ $(t > qT)$, то решение задачи (1.5)–(1.7) окажется тождественно равным нулю и при $t > qT$. При этом из всех возможных управлений требуется найти управление, обладающее минимальной энергией $\int\limits_0^{qT} u^2(t)\,dt$. В результате приходим к задаче минимизации квадратичного функционала

$$J(y) = \int\limits_0^{qT} \left[y'(t) + ay'(q^{-1}t) + by(t) + cy(q^{-1}t)\right]^2 \, dt \longrightarrow \min \tag{1.8}$$

на множестве функций $y(t)$, удовлетворяющих заданному начальному условию (1.6), а также условию $y(t) = 0$ $(t \geqslant T)$. Решение полученной вариационной задачи естественно искать в пространстве

$$V_T^1 = \{y \in W_2^1(0, +\infty) : y(t) = 0 \ (t \geqslant T)\}.$$

Здесь также можно показать (несколько сложнее, чем в предыдущем примере, это будет сделано далее в настоящей главе), что при $|a| \neq q^{-1/2}$ и для любых значений параметров b и c функционал (1.8) удовлетворяет на пространстве $\mathring{W}_2^1(0, T)$ оценке снизу

$$J(w) \geqslant \gamma_3 \|w\|^2_{W_2^1(0,T)} \quad (w \in \mathring{W}_2^1(0, T)).$$

Эта неравенство, в свою очередь, позволяет сделать вывод о существовании единственного решения вариационной задачи. Рассуждая так же, как и в первом примере, получим интегральное тождество, которому это решение удовлетворяет. Соответствующая билинейная форма имеет вид

$$B(y,v)=\int\limits_0^{qT}\big(y'(t)+ay'(q^{-1}t)+by(t)+cy(q^{-1}t)\big)\times$$
$$\times\big(v'(t)+av'(q^{-1}t)+bv(t)+cv(q^{-1}t)\big)\,dt.$$

Здесь по-прежнему v — произвольная функция из $\mathring{W}_2^1(0,T)$. Слагаемые, содержащие $v'(q^{-1}t)$ и $v(q^{-1}t)$, после замены переменных $q^{-1}t=\tau$ примут вид

$$\int\limits_0^{T}\left(y'(q\tau)+ay'(\tau)+by(q\tau)+cy(\tau)\right)\left(av'(\tau)+cv(\tau)\right)\,qdt.$$

В оставшихся слагаемых можно также перейти к интегралу по $(0,T)$ в силу условия $v(t)=0$ $(t\geqslant T)$. После приведения подобных членов будем иметь

$$B(y,v)=\int\limits_0^{T}\Big[\Big(\,(1+a^2q)y'(t)+ay'(q^{-1}t)+aqy'(qt)\,\Big)\,v'(t)+$$
$$+\Big(\,(b+acq)y(t)+ay(q^{-1}t)+abqy(qt)\,\Big)\,v'(t)+$$
$$+\Big(\,(b+acq)y'(t)+aby'(q^{-1}t)+cqy'(qt)\,\Big)\,v(t)+$$
$$+\Big(\,(b^2+c^2q)y(t)+bcy(q^{-1}t)+bcqy(qt)\,\Big)\,v(t)\,\Big]\,dt.$$

Интегрируя по частям во второй строке полученного выражения, приходим, наконец, к тождеству

$$\int\limits_0^{T}\Big[\Big(\,(1+a^2q)y'(t)+ay'(q^{-1}t)+aqy'(qt)\,\Big)\,v'(t)+$$
$$+\Big(\,(ab-cq^{-1})y'(q^{-1}t)+(cq-abq^2)y'(qt)+$$
$$+(b^2+c^2q)y(t)+bcy(q^{-1}t)+bcqy(qt)\,\Big)v(t)\,\Big]\,dt=0, \tag{1.9}$$

которое выполняется для всех v из $\mathring{W}_2^1(0,T)$ и, следовательно, определяет обобщённое решение $y \in V_T^1$ краевой задачи

$$
\begin{gathered}
-\big((1+a^2q)y'(t)+ay'(q^{-1}t)+aqy'(qt)\big)'+\\
+(ab-cq^{-1})y'(q^{-1}t)+(cq-abq^2)y'(qt)+\\
+(b^2+c^2q)y(t)+bcy(q^{-1}t)+bcqy(qt)=0 \quad (t\in(0,T)),
\end{gathered} \tag{1.10}
$$

$$
y(0)=y_0, \qquad y(t)=0 \quad (t \geqslant T). \tag{1.11}
$$

В данном примере функционал всегда неотрицателен. Поэтому если y есть обобщённое решение задачи (1.10), (1.11), то

$$
J(y+v)=J(y)+2B(y,v)+J(v)=J(y)+J_0(v)\geqslant J(y)
$$

для любой функции $v\in\mathring{W}_2^1(0,2)$, так что y доставляет минимум функционалу (1.8). Установлена равносильность вариационной задачи (1.8), (1.6) и краевой задачи (1.10), (1.11). Заметим, что здесь, в отличие от краевой задачи (1.3), (1.4), уравнение получилось однородным, а краевые условия неоднородными. С другой стороны, рассматриваемые функционально-дифференциальные уравнения с неоднородными краевыми условиями легко сводятся к уравнениям с однородными краевыми условиями.

Решению краевых задач (1.3), (1.4) и (1.10), (1.11) и их обобщений посвящены следующие разделы настоящей главы.

1.2 Линейные краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений

В этом разделе исследуются разрешимость, гладкость решений и спектральные свойства первой краевой задачи для линейных дифференциально-разностных уравнений, обобщающих уравнение (1.3).

1.2.1 Дифференциальное уравнение с нелокальными краевыми условиями

Одним из методов исследования краевых задач для дифференциально-разностных уравнений является сведение к дифференциальным уравнениям с нелокальными краевыми условиями.

Нам понадобится известное утверждение, являющееся частным случаем результатов работы [1] и касающееся разрешимости классической краевой задачи

$$-u''(t) + a_1(t)u'(t) + a_2(t)u(t) - \lambda u(t) = f_0(t) \quad (t \in (a, b)),$$

$$u(a) = f_1, \quad u(b) = f_2,$$

где $-\infty < a < b < +\infty$, коэффициенты $a_1(t), a_2(t) \in C[a, b]$ — вещественнозначные функции, $f_0 \in L_2(a, b)$ — заданная комплекснозначная функция, $f_1, f_2 \in \mathbb{C}$ — заданные числа, $\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр. С задачей свяжем ограниченный оператор

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0(\lambda) : W_2^2(a, b) \longrightarrow L_2(a, b) \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} = V(a, b),$$

действующий по формуле $\mathcal{L}_0 u = (-u'' + a_1 u' + a_2 u - \lambda u, u(a), u(b))$, и рассмотрим операторное уравнение $\mathcal{L}_0 u = f$, где $f = (f_0, f_1, f_2)$.

В пространствах $W_2^2(a, b)$ и $V(a, b)$ введём эквивалентные нормы, зависящие от параметра λ:

$$\|u\|_{W_2^2(\lambda;\, a,b)} = \left\{ \|u\|^2_{W_2^2(a,b)} + |\lambda|^2 \|u\|^2_{L_2(a,b)} \right\}^{1/2},$$

$$\|f\|_{V(\lambda;\, a,b)} = \left\{ \|f_0\|^2_{L_2(a,b)} + |\lambda|^{3/2} \left(|f_1|^2 + |f_2|^2 \right) \right\}^{1/2}.$$

Теорема 1.2.1 *Для любого $\varepsilon > 0$ существует $p_0 > 0$ такое, что для λ из области $\Omega_{\varepsilon, p_0} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| > \varepsilon, |\lambda| > p_0\}$ оператор $\mathcal{L}_0$ имеет ограниченный обратный $\mathcal{L}_0^{-1} : V(a, b) \to W_2^2(a, b)$, причём для всех* *функций $u \in W_2^2(a,b)$ справедливо неравенство*

$$c_1\|\mathcal{L}_0 u\|_{V(\lambda;\,a,b)} \leqslant \|u\|_{W_2^2(\lambda;\,a,b)} \leqslant c_2\|\mathcal{L}_0 u\|_{V(\lambda;\,a,b)}, \qquad (1.12)$$

где константы $c_1, c_2 > 0$ не зависят от λ и функции u.

Рассмотрим то же уравнение

$$-u''(t) + a_1(t)u'(t) + a_2(t)u(t) - \lambda u(t) = f_0(t) \quad (t \in (a,b)) \qquad (1.13)$$

с новыми краевыми условиями

$$u(a) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j u(t_j) = f_1, \quad u(b) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j u(t_j) = f_2. \qquad (1.14)$$

Здесь $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{C}$, $t_j \in (a,b)$ $(j = 1, \ldots, m)$. Условия (1.14) являются представителем широкого класса так называемых нелокальных условий, отличающихся от классических тем, что содержат значения неизвестной функции не только на концах интервала, но и во внутренних точках.

Для краткости используем обозначения

$$Au = -u'' + a_1 u' + a_2 u, \quad B_1 u = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j u(t_j), \quad B_2 u = \sum_{j=1}^{m} \beta_j u(t_j).$$

Оператор, отвечающий задаче (1.13), (1.14), обозначим $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\lambda)$. Он действует в тех же пространствах по формуле

$$\mathcal{L}u = (Au - \lambda u, u(a) + B_1 u, u(b) + B_2 u).$$

Удобно также ввести семейство $\mathcal{L}_\tau = \mathcal{L}_0 + \tau(\mathcal{L} - \mathcal{L}_0)$, где параметр τ пробегает отрезок $[0,1]$, так что $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1$. Имеем

$$\mathcal{L}_\tau u = (Au - \lambda u, u(a) + \tau B_1 u, u(b) + \tau B_2 u).$$

Следующая теорема является прямым обобщением теоремы 1.2.1 на случай нелокальных краевых условий.

Теорема 1.2.2 *Для любого $\varepsilon > 0$ существует $p_1 > 0$ такое, что для $\lambda \in \Omega_{\varepsilon,p_1}$ оператор $\mathcal{L}$ обладает ограниченным обратным оператором*

$\mathcal{L}^{-1} : V(a,b) \to W_2^2(a,b)$, *причём для всех* $u \in W_2^2(a,b)$ *справедливо неравенство*

$$c_3\|\mathcal{L}u\|_{V(\lambda;\,a,b)} \leqslant \|u\|_{W_2^2(\lambda;\,a,b)} \leqslant c_4\|\mathcal{L}u\|_{V(\lambda;\,a,b)}, \tag{1.15}$$

где константы $c_3, c_4 > 0$ *не зависят от* λ *и функции* u.

Доказательство. Нам понадобятся известные (см. [1]) неравенства

$$|\lambda|^{1/2}\|u\|_{W_2^1(a,b)} \leqslant \kappa_1 \left(\|u\|_{W_2^2(a,b)} + |\lambda|\,\|u\|_{L_2(a,b)}\right), \tag{1.16}$$

$$|\lambda|^{1/4}|u(t_0)| \leqslant \kappa_2 \left(\|u\|_{W_2^1(a,b)} + |\lambda|^{1/2}\|u\|_{L_2(a,b)}\right), \tag{1.17}$$

справедливые для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ и $u \in W_2^2(a,b)$ ($u \in W_2^1(a,b)$ для неравенства (1.17)), причём положительные константы κ_1 и κ_2 не зависят от λ и u. В (1.17) t_0 — произвольная точка из $[a,b]$.

Сначала установим априорную оценку для операторов $\mathcal{L}_\tau$. Предположим, что $\lambda \in \Omega_{\varepsilon,p_0}$ и $\mathcal{L}_\tau u = f$. Тогда

$$\mathcal{L}_0 u = f - \tau(\mathcal{L} - \mathcal{L}_0)u = (f_0, f_1 - \tau B_1 u, f_2 - \tau B_2 u).$$

По теореме 1.2.1

$$\|u\|_{W_2^2(\lambda;\,a,b)} \leqslant c_2 \left(\|f\|_{V(\lambda;\,a,b)} + |\lambda|^{3/4}(|B_1 u| + |B_2 u|)\right).$$

Используя неравенство (1.17), а затем неравенство (1.16), будем иметь

$$|\lambda|^{3/4}(|B_1 u| + |B_2 u|) \leqslant \kappa_3 \left(|\lambda|^{1/2}\|u\|_{W_2^1(t_1,t_m)} + |\lambda|\,\|u\|_{L_2(t_1,t_m)}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \kappa_4 \left(\|u\|_{W_2^2(t_1,t_m)} + |\lambda|\,\|u\|_{L_2(t_1,t_m)}\right) \leqslant \kappa_4 \left(\|\xi u\|_{W_2^2(a,b)} + |\lambda|\,\|\xi u\|_{L_2(a,b)}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{2}\kappa_4\|\xi u\|_{W_2^2(\lambda;\,a,b)},$$

где функция $\xi \in C_0^\infty(a,b)$ выбрана так, что $\xi(t) = 1$ при $t \in [t_1, t_m]$ и $\xi(t) = 0$ при $t \notin [(a+t_1)/2, (b+t_m)/2]$ (возникающие здесь и далее в оценках положительные константы не зависят от λ и u). По теореме 1.2.1 с учётом финитности функции ξu последнее выражение не превосходит

$$\sqrt{2}c_2\kappa_4\|A(\xi u) - \lambda\xi u\|_{L_2(a,b)} \leqslant \kappa_5 \left(\|Au - \lambda u\|_{L_2(a,b)} + \|u\|_{W_2^1(a,b)}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \kappa_6 \left(\|f_0\|_{L_2(a,b)} + |\lambda|^{-1/2} \left(\|u\|_{W_2^2(a,b)} + |\lambda| \, \|u\|_{L_2(a,b)} \right) \right).$$

Здесь мы применили формулу Лейбница и снова (1.16). В результате приходим к неравенству

$$\|u\|_{W_2^2(\lambda;\, a,b)} \leqslant c_2(1+\kappa_6)\|f\|_{V(\lambda;\, a,b)} + \kappa_7|\lambda|^{-1/2}\|u\|_{W_2^2(\lambda;\, a,b)},$$

откуда при дополнительном ограничении $|\lambda| > 4\kappa_7^2$ следует, что

$$\|u\|_{W_2^2(\lambda;\, a,b)} \leqslant 2c_2(1+\kappa_6)\|f\|_{V(\lambda;\, a,b)}.$$

Таким образом, для всех $\tau \in [0,1]$ и $\lambda \in \Omega_{\varepsilon,p_1}$, где $p_1 = \max(p_0, 4\kappa_7^2)$, получена априорная оценка $\|u\|_{W_2^2(\lambda;\, a,b)} \leqslant c_4\|\mathcal{L}_\tau u\|_{V(\lambda;\, a,b)}$. Очевидно,

$$\|Au - \lambda u\|_{L_2(a,b)} \leqslant \kappa_8\|u\|_{W_2^2(a,b)} + |\lambda| \, \|u\|_{L_2(a,b)} \leqslant \kappa_9\|u\|_{W_2^2(\lambda;\, a,b)}.$$

Поэтому противоположное неравенство $c_3\|\mathcal{L}_\tau u\|_{V(\lambda;\, a,b)} \leqslant \|u\|_{W_2^2(\lambda;\, a,b)}$ легко получается применением (1.16), (1.17). Двусторонняя оценка (1.15) для операторов $\mathcal{L}_\tau$ доказана. Остаётся показать существование обратного оператора $\mathcal{L}^{-1}$, определённого на всём пространстве $V(a,b)$.

Предположим, что $\lambda \in \Omega_{\varepsilon,p_1}$. В силу теоремы 1.2.1 оператор $\mathcal{L}_0$ имеет ограниченный обратный с нормой, не превосходящей c_4. В таком случае $\mathcal{L}_\tau = \mathcal{L}_0(I + \tau\mathcal{L}_0^{-1}(\mathcal{L} - \mathcal{L}_0))$, причём при $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1 = c_3/4c_4$ норма действующего в $W_2^2(a,b)$ оператора $\tau\mathcal{L}_0^{-1}(\mathcal{L} - \mathcal{L}_0)$ меньше единицы. Для таких τ существует ограниченный обратный оператор $\mathcal{L}_\tau^{-1}$, норма которого также не превосходит c_4 в силу (1.15). Аналогично оператор $\mathcal{L}_\tau = \mathcal{L}_{\tau_1}(I + (\tau - \tau_1)\mathcal{L}_{\tau_1}^{-1}(\mathcal{L} - \mathcal{L}_0))$ для $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant 2\tau_1$ имеет ограниченный обратный с нормой, не превосходящей c_4. Продолжая этот процесс, за конечное число шагов убеждаемся в существовании ограниченного оператора $\mathcal{L}^{-1}$. $\square$

В случае, когда краевые условия (1.14) однородные, полезно рассматривать линейный неограниченный оператор $A_B : L_2(a,b) \to L_2(a,b)$ с областью определения

$$D(A_B) = \left\{u \in W_2^2(a,b) : B_1 u = B_2 u = 0\right\},$$

действующий на функции из $D(A_B)$ по формуле $A_B u = Au$. Отметим, что $D(A_B)$ является всюду плотным подпространством в $L_2(a,b)$, поскольку содержит все бесконечно дифференцируемые на (a,b) функции, обращающиеся в ноль в окрестности концов интервала и точек t_j $(j = 1, \ldots, m)$.

Теорема 1.2.3 *Оператор A_B фредгольмов; его спектр $\sigma(A_B)$ состоит из изолированных собственных значений конечной кратности; для любого $\varepsilon > 0$ все точки спектра $\sigma(A_B)$, кроме, быть может, конечного числа, принадлежат углу $|\arg\lambda| < \varepsilon$.*

Доказательство. Зафиксируем $\mu \in \Omega_{\varepsilon,p_1}$. Теорема 1.2.2 означает, что на $L_2(a,b)$ определён оператор $(A_B - \mu I)^{-1}$, ограниченный из $L_2(a,b)$ в $W_2^2(a,b)$. Но тогда в силу компактности вложения $W_2^2(a,b)$ в $L_2(a,b)$ резольвента $(A_B - \mu I)^{-1} : L_2(a,b) \to L_2(a,b)$ компактна. А хорошо известно [13, с.237], что всякий оператор с компактной резольвентой фредгольмов и имеет дискретный спектр (спектр, состоящий из изолированных собственных значений конечной кратности). Однако полезно убедиться в этом непосредственно, чтобы продемонстрировать приём, который мы и дальше будем использовать. Для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ запишем

$$A_B - \lambda I = \left[I + (\mu - \lambda)(A_B - \mu I)^{-1}\right](A_B - \mu I) \tag{1.18}$$

(область определения обеих частей этого равенства есть $D(A_B)$) и рассмотрим оператор $I + (\mu - \lambda)(A_B - \mu I)^{-1} : L_2(a,b) \to L_2(a,b)$, который является фредгольмовым как сумма тождественного и компактного операторов. Но из представления (1.18) следует, что образ оператора $A_B - \lambda I$ совпадает с образом оператора $I + (\mu - \lambda)(A_B - \mu I)^{-1}$, а его ядро есть прообраз ядра оператора $I + (\mu - \lambda)(A_B - \mu I)^{-1}$ при биективном отображении $A_B - \mu I$ подпространства $D(A_B)$ на всё пространство $L_2(a, b)$, т.е. имеет такую же конечную размерность. Таким образом, оператор $A_B - \lambda I$ также фредгольмов (в том числе и при $\lambda = 0$).

Далее, ограниченный оператор $I + (\mu - \lambda)(A_B - \mu I)^{-1}$, а вместе с ним и неограниченный оператор $A_B - \lambda I$ (в силу представления (1.18)), ограниченно обратимы в $L_2(a, b)$ тогда и только тогда, когда число $1/(\lambda - \mu)$ не является собственным значением компактного оператора $(A_B - \mu I)^{-1}$. Но отличные от нуля собственные значения компактного оператора изолированные и имеют конечную кратность (в нашем случае кратность, конечно, не больше двух). Поэтому спектр $\sigma(A_B)$ состоит из изолированных собственных значений конечной кратности $\lambda_s = \mu + 1/\nu_s$, где через ν_s обозначаются собственные значения оператора $(A_B - \mu I)^{-1}$. Поскольку единственной предельной точкой для множества $\{\nu_s\}$ может быть лишь точка 0, в конечной части комплексной плоскости содержится конечное число собственных значений λ_s. Вместе с включением $\sigma(A_B) \subset \mathbb{C} \backslash \Omega_{\varepsilon, p_1}$ это полностью доказывает теорему. $\square$

1.2.2 Разностные операторы на конечных интервалах

Далее, при изучении краевых задач для линейных дифференциально-разностных уравнений, нам понадобятся некоторые свойства разностных операторов. Под разностным оператором мы будем понимать оператор, который на функции, заданные на всей оси $\mathbb{R}$, действует по формуле

$$Ry(t) = \sum_{j=-N}^{N} a_j y(t + j), \tag{1.19}$$

т.е. представляет собой линейную комбинацию (a_j — заданные комплексные числа) целочисленных сдвигов. Это не сужает общности по сравнению с соизмеримыми сдвигами, в то время как случай несоизмеримых сдвигов значительно сложней и рассматриваться в пособии не будет.

Естественный способ определить разностный оператор на функциях на конечном интервале состоит в том, что перед действием оператора (1.19) функция заданным образом продолжается в $\mathbb{R}$ — мы будем продолжать функции нулём, что соответствует случаю однородных краевых условий, — а после применения (1.19) результат сужается на исходный интервал. Таким образом, можно говорить о линейном ограниченном операторе $R : L_2(0, d) \to L_2(0, d)$. Его мы и будем далее в пособии рассматривать. Без ограничения общности считаем $d = N + \theta$, где $0 < \theta \leqslant 1$, поскольку вклад сдвигов с $|j| \geqslant d$ на интервале $(0, d)$ равен нулю.

Важно отметить, что свойства разностного оператора, действующего на конечном интервале $(0, d)$, отличаются от свойств разностного оператора в $\mathbb{R}$, даже если оба описываются выражением (1.19) с одними и теми же коэффициентами. Более того, свойства $R : L_2(0, d) \to L_2(0, d)$ могут измениться при изменении длины интервала d. От d, например, зависит, будет ли оператор обратимым. Кроме того, положительный оператор может перестать быть таковым при увеличении d. В то время как важной характеристикой разностного оператора в $L_2(\mathbb{R})$ служит его символ $\sum\limits_{j=-N}^{N} a_j \exp(ij\xi)$, для оператора $R : L_2(0, d) \to L_2(0, d)$ более подходящим и естественным оказывается матричное описание.

Будем считать, что $0 < \theta < 1$ (выкладки для случая $\theta = 1$ проще; отличия между этими двумя случаями будут легко видны в ходе изложения). Рассмотрим два семейства непересекающихся интервалов:

$$(s - 1,\, s - 1 + \theta), \quad s = 1, \ldots, N + 1, \tag{1.20}$$

$$(s-1+\theta,\, s), \quad s=1,\dots,N. \tag{1.21}$$

Каждые два интервала одного и того же семейства получаются друг из друга сдвигом на целое число.

Для всякой функции $y \in L_2(0,d)$ через $y_1 \in L_2(0,d)$ обозначим функцию, совпадающую с y на интервалах семейства (1.20) и равную нулю на интервалах семейства (1.21). Введём также $y_2 = y - y_1$. Если $u = Ry$, то легко видеть, что $u_1 = Ry_1$, $u_2 = Ry_2$. Далее, положим

$$y_{1s}(t) = y_1(t+s-1), \quad t \in (0,\theta),\ s = 1,\dots,N+1, \tag{1.22}$$

$$y_{2s}(t) = y_2(t+s-1), \quad t \in (\theta,1),\ s = 1,\dots,N \tag{1.23}$$

и составим вектор-функции $Y_1 \in L_2^{N+1}(0,\theta)$ и $Y_2 \in L_2^N(\theta,1)$ с компонентами $y_{1s}(t)$ и $y_{2s}(t)$ соответственно. Аналогично определяются u_{1s}, u_{2s}, U_1, U_2 для функции u. При $t \in (0,\theta)$ и $s = 1,\dots,N+1$ имеем

$$u_{1s}(t) = u_1(t+s-1) = u(t+s-1) = \sum_{j=-N}^{N} a_j y(t+j+s-1) =$$

$$= \sum_{j=-N+s}^{N+s} a_{j-s} y(t+j-1) = \sum_{j=1}^{N+1} a_{j-s} y_1(t+j-1) = \sum_{j=1}^{N+1} a_{j-s} y_{1j}(t).$$

Если теперь ввести квадратную матрицу $\mathbf{R}_1$ размера $N+1$ с элементами $r_{ij} = a_{j-i}$, то можно будет записать $U_1 = \mathbf{R}_1 Y_1$. Таким же образом, $U_2 = \mathbf{R}_2 Y_2$, где матрица $\mathbf{R}_2$ получается из матрицы $\mathbf{R}_1$ вычёркиванием первой строки и первого столбца. Итак, уравнение $Ry = u$ в $L_2(0,d)$ эквивалентно двум линейным алгебраическим системам

$$\mathbf{R}_1 Y_1 = U_1, \quad \mathbf{R}_2 Y_2 = U_2.$$

Лемма 1.2.1 *Спектр $\sigma(R)$ оператора $R : L_2(0,d) \to L_2(0,d)$ есть объединение множеств собственных значений матриц $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$.*

Доказательство. Действительно, существование резольвенты $(R-\lambda I)^{-1}$ оператора R равносильно невырожденности матриц $\mathbf{R}_1 - \lambda \mathbf{E}_1$ и $\mathbf{R}_2 - \lambda \mathbf{E}_2$

($\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ — единичные матрицы соответствующих размерностей). В этом случае решением уравнения $Ry - \lambda y = u$ будет $y = y_1 + y_2$, где отвечающие y_i вектор-функции Y_i имеют вид $Y_i = (\mathbf{R}_i - \lambda \mathbf{E}_i)^{-1} U_i$. $\square$

Замечание 1.2.1 При $d = N + 1$ имеем лишь один класс интервалов вида $(s-1,\, s)$, $s = 1, \ldots, N+1$; соответственно, для описания разностного оператора используется одна матрица $\mathbf{R}_1$. В этом случае спектр оператора $R : L_2(0,d) \to L_2(0,d)$ совпадает со спектром матрицы $\mathbf{R}_1$.

Пример 1.2.1 Пусть

$$Ry(t) = y(t) + ay(t-1) + ay(t+1), \tag{1.24}$$

где $a \in \mathbb{R}$, и рассмотрим оператор $R : L_2(0,2) \to L_2(0,2)$. Ему отвечает матрица

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}.$$

Обратный оператор $R^{-1} : L_2(0,2) \to L_2(0,2)$ существует при $a \neq \pm 1$ и имеет матрицу

$$\mathbf{R}_1^{-1} = \frac{1}{1-a^2} \begin{pmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому разностные операторы R и

$$R'y(t) = \frac{1}{1-a^2}\bigl[y(t) - ay(t-1) - ay(t+1)\bigr],$$

будут взаимно обратными, если их рассматривать в $L_2(0,2)$ (но не на всей оси!)

А теперь рассмотрим разностный оператор $R : L_2(0,3) \to L_2(0,3)$, действующий в соответствии с той же формулой (1.24), но теперь уже на интервале $(0,3)$. Ему отвечает матрица

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}, \quad \det \mathbf{R}_1 = 1 - 2a^2.$$

В данном случае обратный оператор $R^{-1} : L_2(0,3) \to L_2(0,3)$ существует уже при $a \neq \pm 1/\sqrt{2}$ и имеет матрицу

$$\mathbf{R}_1^{-1} = \frac{1}{1-2a^2} \begin{pmatrix} 1-a^2 & -a & a^2 \\ -a & 1 & -a \\ a^2 & -a & 1-a^2 \end{pmatrix}.$$

Хорошо видно, что эта матрица не отвечает никакому разностному оператору (на главной диагонали стоят разные числа).

Рассмотрим разностный оператор $R^* y(t) = \sum\limits_{j=-N}^{N} \bar{a}_{-j} y(t+j)$, сопряжённый в $L_2(\mathbb{R})$ оператору (1.19). Легко видеть, что в $L_2(0,d)$ соответствующие операторы также сопряжены.

Лемма 1.2.2 *Оператор $R : L_2(0,d) \to L_2(0,d)$ самосопряжённый тогда и только тогда, когда матрица $\mathbf{R}_1$ эрмитова, т.е. $a_{-j} = \bar{a}_j$. Самосопряжённый оператор $R : L_2(0,d) \to L_2(0,d)$ положительно определён тогда и только тогда, когда положительно определена эрмитова матрица $\mathbf{R}_1$.*

Доказательство. Первое утверждение леммы очевидно. Если матрица $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_1^*$ положительно определена, то и матрица $\mathbf{R}_2$ положительно определена. Тогда для всех $y \in L_2(0,d)$, $Ry = u$, выполнено соотношение

$$(Ry, y)_{L_2(0,d)} = (u, y)_{L_2(0,d)} = (u_1, y_1)_{L_2(0,d)} + (u_2, y_2)_{L_2(0,d)} =$$

$$= (U_1, Y_1)_{L_2^{N+1}(0,\theta)} + (U_2, Y_2)_{L_2^N(\theta,1)} = (\mathbf{R}_1 Y_1, Y_1)_{L_2^{N+1}(0,\theta)} + (\mathbf{R}_2 Y_2, Y_2)_{L_2^N(\theta,1)} \geqslant$$

$$\geqslant c\left(\|Y_1\|^2_{L_2^{N+1}(0,\theta)} + \|Y_2\|^2_{L_2^{N+1}(\theta,1)}\right) = c(\|y_1\|^2_{L_2(0,d)} + \|y_2\|^2_{L_2(0,d)}) = c\|y\|^2_{L_2(0,d)}, \tag{1.25}$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от y, т.е. оператор $R : L_2(0,d) \to L_2(0,d)$ положительно определён. Для доказательства в обратную сторону достаточно применить (1.2.8) к функциям y, равным нулю на интервалах семейства (1.21) и постоянным на интервалах семейства (1.20). $\square$

Пример 1.2.2 Пусть разностный оператор действует по формуле (1.24). Самосопряжённый оператор $R : L_2(0,2) \to L_2(0,2)$ положительно определён тогда и только тогда, когда $|a| < 1$, в то время как оператор $R : L_2(0,3) \to L_2(0,3)$ положительно определён лишь при $|a| < 1/\sqrt{2}$. Применяя преобразование Фурье и теорему Планшереля, убеждаемся, что необходимым и достаточным условием положительной определённости оператора (1.24) в $L_2(\mathbb{R})$ будет $|a| < 1/2$.

Перейдём теперь к исследованию разностных операторов в пространствах Соболева. Убедимся вначале, что разностный оператор непрерывно отображает $\mathring{W}_2^k(0,d)$ в $W_2^k(0,d)$ для любого $k = 1, 2, \ldots$. Действительно, если $y \in C_0^\infty(0,d)$, то $Ry \in C^\infty[0,d]$, причём

$$(Ry)^{(p)} = Ry^{(p)} \quad (p = 0, \ldots, k) \tag{1.26}$$

и

$$\|(Ry)^{(p)}\|_{L_2(0,d)} \leqslant \left(\sum_{j=-N}^{N} |a_j|\right) \|y^{(p)}\|_{L_2(0,d)} \quad (p = 0, \ldots, k),$$

т.е.

$$\|Ry\|_{W_2^k(0,d)} \leqslant \left(\sum_{j=-N}^{N} |a_j|\right) \|y\|_{L_2(0,d)}. \tag{1.27}$$

Поскольку множество $C_0^\infty(0,d)$ всюду плотно в $\mathring{W}_2^k(0,d)$, из (1.27) следует, что оператор $R : \mathring{W}_2^k(0,d) \to W_2^k(0,d)$ непрерывен. Кроме того, равенство (1.26) и оценка (1.27) продолжаются на всё пространство $\mathring{W}_2^k(0,d)$.

Далее мы будем предполагать выполненными условия $\det \mathbf{R}_1 \neq 0$, $\det \mathbf{R}_2 \neq 0$, равносильные существованию ограниченного обратного оператора $R^{-1} : L_2(0,d) \to L_2(0,d)$. Если $Ry \in W_2^k(0,d)$, то очевидно, что

$$y_{1s} \in W_2^k(0,\theta)\ (s = 1, \ldots, N+1); \quad y_{2s} \in W_2^k(\theta,1)\ (s = 1, \ldots, N).$$

Через $e_i(g_i)$ обозначим i-ю строку матрицы, полученной из $\mathbf{R}_1$ вычёркиванием первого (последнего) столбца. Матрица, полученная из $\mathbf{R}_1$

вычёркиванием первой строки и первого столбца, совпадает с матрицей, полученной из $\mathbf{R}_1$ вычёркиванием последней строки и последнего столбца, и равна $\mathbf{R}_2$. Поскольку $\det \mathbf{R}_2 \neq 0$, строки $e_2, \ldots, e_{N+1}$ образуют базис в $\mathbb{C}^N$, и то же относится к строкам $g_1, \ldots, g_N$. Следовательно, однозначно определены числа γ_{1i}, γ_{2i} $(i = 1, \ldots, N)$ такие, что

$$e_1 = \sum_{i=1}^{N} \gamma_{1i} e_{i+1}, \quad g_{N+1} = \sum_{i=1}^{N} \gamma_{2i} g_{N+1-i}. \tag{1.28}$$

Обозначим через $W_{2,\Gamma}^k(0,d)$ подпространство функций в $W_2^k(0,d)$, удовлетворяющих условиям

$$u^{(p)}(0) = \sum_{i=1}^{N} \gamma_{1i} u^{(p)}(i), \quad u^{(p)}(d) = \sum_{i=1}^{N} \gamma_{2i} u^{(p)}(d-i) \quad (p = 0, \ldots, k-1). \tag{1.29}$$

Центральным местом этого пункта является следующая теорема об изоморфизме между $\mathring{W}_2^k(0,d)$ и $W_{2,\Gamma}^k(0,d)$, осуществляемом разностным оператором. Она позволяет свести краевую задачу для дифференциально-разностного уравнения к обыкновенному дифференциальному уравнению с нелокальными краевыми условиями.

Теорема 1.2.4 *Пусть* $\det \mathbf{R}_1 \neq 0$, $\det \mathbf{R}_2 \neq 0$. *Тогда оператор* R *непрерывно и взаимно однозначно отображает пространство* $\mathring{W}_2^k(0,d)$ *на всё пространство* $W_{2,\Gamma}^k(0,d)$.

Заметим, что обратный оператор $R^{-1} : W_{2,\Gamma}^k(0,d) \to \mathring{W}_2^k(0,d)$ по теореме Банаха также ограничен.

Доказательство. Вначале докажем утверждение теоремы для $k = 1$. Пусть $y \in \mathring{W}_2^1(0,d)$. Мы уже знаем, что функция $u = Ry$ принадлежит $W_2^1(0,d)$. Покажем, что u удовлетворяет условиям (1.29) при $p = 0$. Учитывая $y(0) = y_{11}(0) = 0$, будем иметь

$$u(0) = u_{11}(0) = \sum_{j=1}^{N+1} r_{1j} y_{1j}(0) = \sum_{j=2}^{N+1} r_{1j} y_{1j}(0) = \sum_{j=2}^{N+1} \left(\sum_{i=1}^{N} \gamma_{1i} r_{ij} \right) y_{1j}(0) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \gamma_{1i} \sum_{j=2}^{N+1} r_{ij} y_{1j}(0) = \sum_{i=1}^{N} \gamma_{1i} \sum_{j=1}^{N+1} r_{ij} y_{1j}(0) = \sum_{i=1}^{N} \gamma_{1i} u_{1i}(0) = \sum_{i=1}^{N} \gamma_{1i} u(i).$$

Аналогично показывается второе соотношение (1.29).

Наоборот, пусть есть функция $u \in W^1_{2,\Gamma}(0, d)$. В силу условия теоремы определена функция $y = R^{-1}u \in L_2(0, d)$, причём

$$y_{1s} \in W^1_2(0, \theta) \ (s = 1, \dots, N+1); \quad y_{2s} \in W^1_2(\theta, 1) \ (s = 1, \dots, N).$$

Остаётся убедиться в том, что выполнены условия согласования

$$y_{1,s+1}(0) = y_{2s}(1), \quad y_{2s}(\theta) = y_{1s}(\theta) \quad (s = 1, \dots, N) \tag{1.30}$$

(соотношения $y(s+0) = y(s-0)$, $y(s-1+\theta+0) = y(s-1+\theta-0)$, записанные при помощи y_{1s}, y_{2s}), а также

$$y_{11}(0) = y_{1,N+1}(\theta) = 0$$

(условия $y(0) = y(d) = 0$). Для функции u соотношения вида (1.30) выполнены, так что имеем

$$\sum_{s=1}^{N+1} r_{i+1,s} y_{1s}(0) = \sum_{s=1}^{N} r_{is} y_{2s}(1) \quad (i = 1, \dots, N), \tag{1.31}$$

а также

$$\sum_{s=1}^{N+1} r_{is} y_{1s}(\theta) = \sum_{s=1}^{N} r_{is} y_{2s}(\theta) \quad (i = 1, \dots, N). \tag{1.32}$$

Кроме того, из (1.29) и определения чисел γ_{1i} следует, что

$$\sum_{s=1}^{N+1} r_{1s} y_{1s}(0) = \sum_{i=1}^{N} \gamma_{1i} \sum_{s=1}^{N+1} r_{i+1,s} y_{1s}(0) = \sum_{s=1}^{N+1} \left(\sum_{i=1}^{N} \gamma_{1i} r_{i+1,s} \right) y_{1s}(0) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \gamma_{1i} r_{i+1,1} y_{11}(0) + \sum_{s=2}^{N+1} \left(\sum_{i=1}^{N} \gamma_{1i} r_{i+1,s} \right) y_{1s}(0) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \gamma_{1i} r_{i+1,1} y_{11}(0) + \sum_{s=2}^{N+1} r_{1s} y_{1s}(0),$$

откуда $\left(r_{11}-\sum\limits_{i=1}^{N}\gamma_{1i}r_{i+1,1}\right)y_{11}(0)=0$. Множитель при $y_{11}(0)$ отличен от нуля, поскольку в противном случае в силу (1.28) первая строка матрицы $\mathbf{R}_1$ была бы равна линейной комбинации остальных строк, а это невозможно, так как по условию $\det\mathbf{R}_1\neq 0$. Значит, $y_{11}(0)=0$. С учётом этого левая часть (1.31) становится равной

$$\sum_{s=2}^{N+1} r_{i+1,s}y_{1s}(0)=\sum_{s=1}^{N} r_{i+1,s+1}y_{1,s+1}(0)=\sum_{s=1}^{N} r_{is}y_{1,s+1}(0).$$

Сравнивая полученное выражение с правой частью (1.31), приходим к системе

$$\sum_{s=1}^{N} r_{is}(y_{1,s+1}(0)-y_{2s}(1))=0 \quad (i=1,\ldots,N),$$

откуда в силу условия $\det\mathbf{R}_2\neq 0$ вытекает, что $y_{1,s+1}(0)=y_{2s}(1)$ для всех $s=1,\ldots,N$. Первая часть соотношений (1.30) получена. Из (1.29) и (1.32) аналогичным образом выводятся вторая часть соотношений (1.30) и равенство $y_{1,N+1}(\theta)=0$. Для $k=1$ теорема доказана.

Случай $k>1$ сводится к случаю $k=1$ при помощи (1.26) и очевидных включений $y^{(p)}\in\mathring{W}_2^1(0,d)$ и $u^{(p)}\in W_{2,\Gamma}^1(0,d)$, справедливых при $p<k$ по определению рассматриваемых пространств. $\square$

Замечание 1.2.2 Из доказательства теоремы легко видно, что условие $\det\mathbf{R}_2\neq 0$ является существенным и в случае $d=N+1$.

Замечание 1.2.3 Числа γ_{1i},γ_{2i} можно получить в явном виде, если решить системы (1.28):

$$\gamma_{1i}=-\frac{B_{i+1,1}}{B_{11}},\quad \gamma_{2i}=-\frac{B_{N+1-i,N+1}}{B_{N+1,N+1}}\quad (i=1,\ldots,N),$$

где B_{ij} есть алгебраическое дополнение элемента r_{ij} в матрице $\mathbf{R}_1$, причём $B_{11}=B_{N+1,N+1}=\det\mathbf{R}_2$. Соотношения (1.29) запишутся так:

$$\sum_{i=1}^{N+1} B_{i1}u(i)=0,\quad \sum_{i=1}^{N+1} B_{i,N+1}u(\theta+i-1)=0.$$

Приведём ещё один результат, полезный при исследовании гладкости обобщённых решений дифференциально-разностных уравнений.

Лемма 1.2.3 *Пусть выполнены условия теоремы* 1.2.4, *и пусть функция* $y \in \mathring{W}_2^1(0,d)$ *такова, что* $Ry \in W_{2,\Gamma}^1(0,d) \cap W_2^2(0,d)$. *Тогда имеют место следующие утверждения.*

(a) *Если* $y'(+0) = y'(d-0) = 0$, *то* $y \in \mathring{W}_2^2(0,d)$.

(b) *Если* $y \in W_2^2(0,d)$ *и хотя бы один из коэффициентов* $a_{-1}, \dots, a_{-N}$ *разностного оператора отличен от нуля, то* $y'(+0) = 0$.

(c) *Если* $y \in W_2^2(0,d)$ *и хотя бы один из коэффициентов* $a_1, \dots, a_N$ *разностного оператора отличен от нуля, то* $y'(d-0) = 0$.

Доказательство. В условиях леммы

$$y_{1s} \in W_2^2(0,\theta)\ (s = 1, \dots, N+1); \quad y_{2s} \in W_2^2(\theta,1)\ (s = 1, \dots, N).$$

Кроме того, имеют место аналогичные равенствам (1.31), (1.32) соотношения на производные:

$$\sum_{s=1}^{N+1} r_{i+1,s} y'_{1s}(0) = \sum_{s=1}^{N} r_{is} y'_{2s}(1) \quad (i = 1, \dots, N), \tag{1.33}$$

$$\sum_{s=1}^{N+1} r_{is} y'_{1s}(\theta) = \sum_{s=1}^{N} r_{is} y'_{2s}(\theta) \quad (i = 1, \dots, N), \tag{1.34}$$

вытекающие из принадлежности функции u пространству $W_2^2(0,d)$.

(a) Из системы (1.33) с учётом $y'_{11}(0) = 0$ получаем $y'_{1,s+1}(0) = y'_{2s}(1)$ или

$$y'(s+0) = y'(s-0) \quad (s = 1, \dots, N).$$

Точно так же из (1.34) и $y'_{1,N+1}(\theta) = 0$ следует, что $y'_{2s}(\theta) = y'_{1s}(\theta)$, т.е.

$$y'(s-1+\theta+0) = y'(s-1+\theta-0) \quad (s = 1, \dots, N).$$

Таким образом, $y \in \mathring{W}_2^2(0,d)$.

(b) Используя равенства $y'_{1,s+1}(0) = y'_{2s}(1)$ для $s = 1, \ldots, N$ в (1.33), получаем

$$r_{i+1,1} y'_{11}(0) = a_{-i} y'_{11}(0) = 0 \quad (i = 1, \ldots, N).$$

Поэтому, если хотя бы один из коэффициентов $a_{-1}, \ldots, a_{-N}$ отличен от нуля, то $y'_{11}(0) = y'(+0) = 0$. Аналогично доказывается (c). $\square$

Из леммы 1.2.3 и теоремы 1.2.4 вытекает следующее утверждение.

Лемма 1.2.4 *Пусть выполнены условия теоремы* 1.2.4 *и, кроме того, в разностном операторе присутствуют сдвиги в обе стороны. Решение* $y \in \mathring{W}_2^1(0, d)$ *уравнения*

$$Ry = u \in W_{2,\Gamma}^1(0, d) \cap W_2^2(0, d)$$

принадлежит $W_2^2(0, d)$ *тогда и только тогда, когда* $u \in W_{2,\Gamma}^2(0, d)$*. В этом случае* $y \in \mathring{W}_2^2(0, d)$*.*

1.2.3 Решение краевых задач для дифференциально-разностных уравнений

Рассмотрим дифференциально-разностное уравнение

$$-(Ry')'(t) = f(t) \quad (t \in (0, d)) \tag{1.35}$$

с однородными краевыми условиями

$$y(t) = 0 \quad (t \notin (0, d)). \tag{1.36}$$

Здесь R — разностный оператор вида (1.19), $f \in L_2(0, d)$ — заданная комплекснозначная функция. Всюду в этом пункте мы считаем выполненными основные предположения $\det \mathbf{R}_1 \neq 0$, $\det \mathbf{R}_2 \neq 0$.

Дифференциально-разностное уравнение с неоднородными краевыми условиями легко сводится к уравнению с однородными краевыми условиями (см. [11]). Поэтому рассмотрение уравнения (1.35) с однородными условиями (1.36) не ограничивает общности.

Под решением (обобщённым) краевой задачи (1.35), (1.36) мы будем понимать функцию $y \in \mathring{W}_2^1(0,d)$, продолженную нулём в $\mathbb{R}$, такую, что функция Ry' принадлежит пространству $W_2^1(0,d)$ и имеет на интервале $(0,d)$ обобщённую производную, равную $-f$. Поскольку $Ry' = (Ry)'$ для функций из $\mathring{W}_2^1(0,d)$, вместо соотношения $Ry' \in W_2^1(0,d)$ можно писать $Ry \in W_2^2(0,d)$. По-другому, y есть обобщённое решение, если $y \in \mathring{W}_2^1(0,d)$ и

$$(Ry', \varphi')_{L_2(0,d)} = (f, \varphi)_{L_2(0,d)}$$

для любой функции $\varphi \in \mathring{W}_2^1(0,d)$. Удобно также ввести неограниченный линейный оператор $A_R : L_2(0,d) \to L_2(0,d)$ с областью определения $D(A_R) = \Big\{u \in \mathring{W}_2^1(0,d) : Ry \in W_2^2(0,d)\Big\}$, действующий по формуле $A_R y = -(Ry')' = -(Ry)''$. Тогда обобщённое решение задачи (1.35), (1.36) эквивалентно решению операторного уравнения $A_R y = f$.

Теорема 1.2.5 *Пусть* $\det \mathbf{R}_1 \neq 0$, $\det \mathbf{R}_2 \neq 0$. *Тогда оператор* A_R *фредгольмов.*

Доказательство. По теореме 1.2.4 существуют такие числа γ_{1i}, γ_{2i} $(i = 1, \dots, N)$, что оператор R непрерывно и взаимно однозначно отображает $\mathring{W}_2^1(0,d)$ на $W_{2,\Gamma}^1(0,d)$. Отсюда, а также из определения оператора A_R и включения $R(D(A_R)) \subset W_2^2(0,d)$ следует, что

$$R(D(A_R)) = W_{2,\Gamma}^1(0,d) \cap W_2^2(0,d).$$

Таким образом, оператор A_R можно представить в виде композиции $A_R = A_\Gamma R$, где $A_\Gamma : L_2(0,d) \to L_2(0,d)$ — неограниченный оператор с областью определения

$$D(A_\Gamma) = \left\{ u \in W_2^2(0,d) : u(0) - \sum_{i=1}^{N} \gamma_{1i} u(i) = u(d) - \sum_{i=1}^{N} \gamma_{2i} u(d-i) = 0 \right\},$$

действующий по формуле $A_\Gamma u = -u''$. По теореме 1.2.3 оператор A_Γ

фредгольмов. Поскольку R биективно отображает $D(A_R)$ на $D(A_\Gamma)$, фредгольмовым будет и оператор A_R. $\square$

Более тонкий вопрос об однозначной разрешимости краевой задачи (1.35), (1.36) в условиях теоремы 1.2.5 сводится к вычислению определителя Δ системы двух линейных однородных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{N+1} B_{i1}\right) c_1 + \left(\sum\limits_{i=1}^{N+1} iB_{i1}\right) c_2 = 0, \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{N+1} B_{i,N+1}\right) c_1 + \left(\sum\limits_{i=1}^{N+1} (\theta + i - 1) B_{i,N+1}\right) c_2 = 0, \end{cases}$$

которая получится, если подставить общее решение $c_1 + c_2 t$ уравнения $-u'' = 0$ в нелокальные условия (1.29). Условие $\Delta \neq 0$ является очевидно необходимым и достаточным для существования и единственности обобщённого решения задачи (1.35), (1.36) при любой правой части $f \in L_2(0, d)$.

Из определения обобщённого решения следует, что его сужение на каждый из интервалов (1.20) и (1.21) принадлежит $W_2^2(s-1,\, s-1+\theta)$ и $W_2^2(s-1+\theta,\, s)$ соответственно. Однако первая производная решения может иметь разрывы в точках s и $s-1+\theta$, где $s = 1, \ldots, N$. Поэтому обобщённое решение, вообще говоря, не принадлежит $W_2^2(0, d)$.

Рассмотрим случай, когда в уравнении (1.35) есть сдвиги в обе стороны. Из леммы 1.2.4 вытекает, что обобщённое решение y задачи (1.35), (1.36) будет гладким лишь в том случае, когда первая производная решения u соответствующей нелокальной задачи

$$-u''(t) = f(t) \quad (t \in (0, d)), \tag{1.37}$$

$$u(0) - \sum_{i=1}^{N} \gamma_{1i} u(i) = u(d) - \sum_{i=1}^{N} \gamma_{2i} u(d-i) = 0 \tag{1.38}$$

также удовлетворяет условиям, аналогичным (1.38):

$$u'(0) - \sum_{i=1}^{N} \gamma_{1i} u'(i) = u'(d) - \sum_{i=1}^{N} \gamma_{2i} u'(d-i) = 0. \tag{1.39}$$

Можно показать [11], что совместное выполнение (1.38), (1.39) для общего решения $u(t) = c_1 + c_2 t - \int\limits_0^t (t-\tau) f(\tau)\, d\tau$ уравнения (1.37) равносильно тому, что функция f ортогональна в пространстве $L_2(0,d)$ некоторому двумерному подпространству, при этом константы c_1, c_2 определяются однозначно.

Далее мы рассматриваем пример, показывающий, что гладкость обобщённого решения может нарушаться на интервале $(0,d)$, а также демонстрирующий метод нахождения обобщённого решения задачи (1.35), (1.36) путём сведения её к обыкновенному дифференциальному уравнению с нелокальными краевыми условиями.

Пример 1.2.3 Рассмотрим краевую задачу

$$-(Ry)''(t) = 1 \quad (t \in (0,2)), \tag{1.40}$$

$$y(t) = 0 \quad (t \notin (0,2)), \tag{1.41}$$

где $Ry(t) = 2y(t) + y(t+1) + y(t-1)$.

Матрица $\mathbf{R}_1$, отвечающая оператору R, имеет вид

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

так что $\gamma_{11} = \gamma_{21} = 1/2$. Оператор R непрерывно и взаимно однозначно отображает пространство $\mathring{W}_2^1(0,2)$ на пространство $W_{2,\Gamma}^1(0,2)$, состоящее из функций $W_2^1(0,2)$, удовлетворяющих условиям

$$u(0) = \frac{1}{2} u(1) = u(2). \tag{1.42}$$

Таким образом, краевая задача (1.40), (1.41) эквивалентна уравнению

$$-u'' = 1 \quad (t \in (0,2)) \tag{1.43}$$

с краевыми условиями (1.42). Подставляя общее решение $c_1 + c_2 t - t^2/2$ уравнения (1.43) в краевые условия (1.42), убеждаемся, что решение краевой задачи (1.43), (1.42) существует, единственно и имеет вид

$$u = -t^2/2 + t + 1/2 \quad (t \in (0,2)). \tag{1.44}$$

Обобщённое решение исходной задачи (1.40), (1.41) находится теперь по формуле $y = R^{-1}u$. Чтобы воспользоваться этой формулой, мы составляем функции

$$u_{11} = -t^2/2 + t + 1/2,\ u_{12} = -t^2/2 + 1 \quad (t \in (0,1)),$$

выписываем обратную матрицу

$$\mathbf{R}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

и получаем

$$y_{11} = 2u_{11}/3 - u_{12}/3 = -t^2/6 + 2t/3,$$

$$y_{12} = -u_{11}/3 + 2u_{12}/3 = -t^2/6 - t/3 + 1/2.$$

Окончательно

$$y(t) = \begin{cases} -t^2/6 + 2t/3, & t \in (0,1), \\ -t^2/6 + 2/3, & t \in (1,2). \end{cases}$$

Очевидно, производная решения y имеет скачок в точке $t = 1$, так что $y \in \mathring{W}_2^1(0,2) \backslash W_2^2(0,2)$.

Пусть $A_1 : W_2^1(0,d) \to L_2(0,d)$ — произвольный линейный ограниченный оператор. Рассмотрим оператор

$$A_R + A_1 : L_2(0,d) \to L_2(0,d), \quad D(A_R + A_1) = D(A_R),$$

отвечающий уравнению с младшими членами. Несмотря на то, что область определения оператора A_R содержит негладкие функции, нетрудно убедиться, опираясь на теорему 1.2.4, что оператор A_1 является относительно компактным возмущением оператора A_R, и доказать фредгольмовость оператора $A_R + A_1$.

Теорема 1.2.6 *При выполнении условий* $\det \mathbf{R}_1 \neq 0$, $\det \mathbf{R}_2 \neq 0$ *оператор* $A_R + A_1 : L_2(0,d) \to L_2(0,d)$ *фредгольмов.*

Доказательство. Пусть μ — резольвентная точка оператора A_Γ. Рассмотрим оператор

$$A_R - \mu R = (A_\Gamma - \mu I)R : D(A_R) \subset L_2(0,d) \to L_2(0,d).$$

Мы уже знаем (теорема 1.2.3), что оператор $(A_\Gamma - \mu I)^{-1}$ ограничен из $L_2(0,d)$ в $W_2^2(0,d)$ и, следовательно, компактен из $L_2(0,d)$ в $W_{2,\Gamma}^1(0,d)$. По теореме 1.2.2 оператор R^{-1} ограничен из $W_{2,\Gamma}^1(0,d)$ в $\mathring{W}_2^1(0,d)$. Поэтому оператор

$$R^{-1}(A_\Gamma - \mu I)^{-1} = (A_R - \mu R)^{-1} : L_2(0,d) \to \mathring{W}_2^1(0,d)$$

компактный.

Справедливо представление

$$A_R + A_1 = \left[I + (\mu R + A_1)(A_R - \mu R)^{-1}\right](A_R - \mu R). \qquad (1.45)$$

В силу ограниченности оператора $\mu R + A_1 : \mathring{W}_2^1(0,d) \to L_2(0,d)$ оператор $(\mu R + A_1)(A_R - \mu R)^{-1}$ будет компактным оператором в $L_2(0,d)$, а оператор в квадратных скобках — фредгольмовым оператором в $L_2(0,d)$. Остаётся заметить, что $A_R - \mu R$ биективно отображает $D(A_R)$ на $L_2(0,d)$. □

Перейдём теперь к вопросу о спектре $\sigma(A_R + A_1)$ оператора $A_R + A_1$. Из представления (1.45), в которое вместо A_1 надо подставить $A_1 - \nu I$, видно, что в случае существования резольвента оператора $A_R + A_1$ компактна. Поэтому, если у оператора $A_R + A_1$ есть хотя бы одна резольвентная точка, то его спектр $\sigma(A_R + A_1)$ дискретный. По теореме 1.2.6 для доказательства дискретности $\sigma(A_R + A_1)$ достаточно установить, что при некотором $\nu \in \mathbb{C}$ уравнение

$$(A_R + A_1 - \nu I)y = 0 \quad (y \in D(A_R)) \qquad (1.46)$$

имеет единственное тривиальное решение. В противном случае спектр заполняет всю комплексную плоскость. Насколько известно автору, вопрос этот в случае произвольной длины интервала и при общих предположениях $\det \mathbf{R}_1 \neq 0$, $\det \mathbf{R}_2 \neq 0$ до сих пор остаётся открытым (даже для $A_1 = 0$). Далее мы наложим дополнительные ограничения на операторы R и A_1, гарантирующие дискретность спектра $\sigma(A_R + A_1)$.

Теорема 1.2.7 *Пусть* $\det \mathbf{R}_1 \neq 0$, $\det \mathbf{R}_2 \neq 0$. *Кроме того, предположим, что матрица* $\mathbf{R}_1$ *эрмитова, а линейный ограниченный оператор* $A_1 : W_2^1(0,d) \to L_2(0,d)$ *удовлетворяет условию*

$$(A_1 x, y)_{L_2(0,d)} = (x, A_1 y)_{L_2(0,d)} \quad (x, y \in D(A_R)). \tag{1.47}$$

Тогда оператор $A_R + A_1 : L_2(0,d) \to L_2(0,d)$ *самосопряжённый, а его спектр дискретный и вещественный.*

Доказательство. Умножим обе части уравнения (1.46) скалярно на y в $L_2(0,d)$:

$$\nu \|y\|^2_{L_2(0,d)} = ((A_R + A_1)y, y)_{L_2(0,d)}. \tag{1.48}$$

Пусть $x, y \in D(A_R)$. Интегрируя по частям с учётом однородных краевых условий и пользуясь самосопряжённостью оператора R в $L_2(0,d)$, будем иметь

$$(A_R x, y)_{L_2(0,d)} = -((Rx')', y)_{L_2(0,d)} = (Rx', y')_{L_2(0,d)} = (x', Ry')_{L_2(0,d)} =$$

$$= -(x, (Ry')')_{L_2(0,d)} = (x, A_R y)_{L_2(0,d)}.$$

Таким образом, оператор A_R симметрический: $A_R \subset A_R^*$. В силу (1.74) симметрическим будет и оператор $A_R + A_1$. Это означает, что правая часть (1.48) может принимать только вещественные значения. Поэтому в случае, когда $\nu \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$, а функция y не равна тождественно нулю, равенство (1.48) не выполняется. Следовательно, при $\nu \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ уравнение (1.46) имеет лишь тривиальное решение. Но тогда, как мы отмечали выше, $\sigma(A_R + A_1)$ состоит из изолированных собственных значений конечной кратности, причём все собственные значения вещественные.

Из того, что оператор $A_R + A_1 : L_2(0,d) \to L_2(0,d)$ симметрический и имеет дискретный спектр, следует ([8, с. 889, лемма 3]), что оператор $A_R + A_1$ самосопряжённый: $A_R + A_1 = (A_R + A_1)^*$.

$\square$

Пример 1.2.4 Пусть $A_1 y(t) = a(t)Ry(t)$, причём $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_1^*$, а непрерывная на $\mathbb{R}$ функция $a(t)$ вещественная и 1-периодическая (последнее означает, что период функции равен 1). Тогда оператор A_1 удовлетворяет условиям теоремы 1.2.7.

Действительно, ограниченность оператора $A_1 : W_2^1(0,d) \to L_2(0,d)$ очевидна. Кроме того, при сделанных предположениях оператор R самосопряжённый и коммутирует с оператором умножения на функцию a, поэтому

$$(A_1 x, y)_{L_2(0,d)} = (aRx, y)_{L_2(0,d)} = (Rx, ay)_{L_2(0,d)} = (x, Ray)_{L_2(0,d)} =$$

$$= (x, aRy)_{L_2(0,d)} = (x, A_1 y)_{L_2(0,d)} \quad (x, y \in L_2(0,d)).$$

Теорема 1.2.8 *Пусть* $\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1^* > 0$. *Тогда спектр* $\sigma(A_R + A_1)$ *дискретный и полуограниченный, т.е. существует число* $c_2 \geqslant 0$ *такое, что* $\sigma(A_R + A_1) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > -c_2\}$.

Доказательство. Заметим сразу, что матрицы $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ не могут быть вырожденными в случае, когда матрица $\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1^*$ положительна. Поэтому для оператора $A_R + A_1$ справедливы все рассуждения, связанные с применением теоремы 1.2.4.

При $y \in D(A_R)$ имеем

$$(A_R y, y)_{L_2(0,d)} = (Ry', y')_{L_2(0,d)} = (y', R^* y')_{L_2(0,d)},$$

так что $\overline{(A_R y, y)}_{L_2(0,d)} = (R^* y', y')_{L_2(0,d)}$ и

$$\operatorname{Re}(A_R y, y)_{L_2(0,d)} = \frac{1}{2}((R+R^*)y', y')_{L_2(0,d)} \geqslant \kappa_1 \|y'\|^2_{L_2(0,d)} =$$

$$= \kappa_1 \left(\|y\|^2_{W_2^1(0,d)} - \|y\|^2_{L_2(0,d)} \right)$$

по условию теоремы и лемме 1.2.2. Кроме того, из условий на оператор A_1, неравенства Коши – Буняковского и элементарного неравенства $2\alpha\beta \leqslant \varepsilon\alpha^2 + \frac{1}{\varepsilon}\beta^2$ $(\alpha, \beta, \varepsilon > 0)$ следует, что

$$\left|\operatorname{Re}(A_1 y, y)_{L_2(0,d)}\right| \leqslant |(A_1 y, y)_{L_2(0,d)}| \leqslant \|A_1 y\|_{L_2(0,d)} \|y\|_{L_2(0,d)} \leqslant$$

$$\leqslant \kappa_2 \|y\|_{W_2^1(0,d)} \|y\|_{L_2(0,d)} \leqslant \kappa_2 (\varepsilon \|y\|^2_{W_2^1(0,d)} + \varepsilon^{-1} \|y\|^2_{L_2(0,d)}).$$

Но тогда

$$\operatorname{Re}((A_R + A_1)y, y)_{L_2(0,d)} \geqslant (\kappa_1 - \kappa_2\varepsilon)\|y\|^2_{W_2^1(0,d)} - (\kappa_1 + \frac{\kappa_2}{\varepsilon})\|y\|^2_{L_2(0,d)}.$$

Взяв ε достаточно малым, получим

$$\operatorname{Re}((A_R + A_1)y, y)_{L_2(0,d)} \geqslant c_1 \|y\|^2_{W_2^1(0,d)} - c_2 \|y\|^2_{L_2(0,d)}, \tag{1.49}$$

где постоянные $c_1 > 0, c_2 \geqslant 0$ не зависят от y.

Сейчас предположим снова, что соотношение (1.46) выполняется при некотором $\nu \in \mathbb{C}$ и функции $y \in D(A_R)$, не равной тождественно нулю. Умножая (1.46) скалярно в $L_2(0,d)$ на y, переходя к действительным частям и применяя (1.49), получим

$$(\operatorname{Re}\nu + c_2)\|y\|^2_{L_2(0,d)} \geqslant c_1 \|y\|^2_{W_2^1(0,d)}.$$

Но это неравенство не выполнено, если $\operatorname{Re}\nu \leqslant -c_2$. Следовательно, для ν таких, что $\operatorname{Re}\nu \leqslant -c_2$, уравнение (1.46) имеет единственное тривиальное решение. С учётом фредгольмовости оператора $A_R + A_1$ это означает, что $\sigma(A_R + A_1) \subset \{\nu \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\nu > -c_2\}$; дискретность же спектра вытекает из компактности резольвенты, как мы отмечали ранее. $\square$

Замечание 1.2.4 Неравенство (1.49), часто называемое неравенством типа Гординга или свойством коэрцитивности оператора, играет важную роль в теории эллиптических уравнений и систем. Оно будет основным инструментом второй главы, посвящённой функционально-дифференциальным уравнениям с частными производными. Например, такие свойства оператора, как фредгольмовость, полуограниченность, дискретность спектра, можно вывести из оценки (1.49) непосредственно, опираясь на стандартные теоремы функционального анализа и не используя специальных методов, наподобие сведения к дифференциальному уравнению с нелокальными условиями; последнее не всегда, особенно в многомерной ситуации, возможно и/или удобно.

Пример 1.2.5 Пусть A_1 такой же, как и в примере 1.2.4, но сейчас предположим, что $\mathbf{R}_1+\mathbf{R}_1^* > 0$, а непрерывная 1-периодическая функция $a(t)$ неотрицательна. Проверим, что в этом случае $0 \notin \sigma(A_R + A_1)$, т.е. уравнение $(A_R + A_1)y = f$ однозначно разрешимо для любой $f \in L_2(0,d)$. Действительно,

$$(A_1 y, y)_{L_2(0,d)} = (aRy, y)_{L_2(0,d)} = (Ray, y)_{L_2(0,d)} =$$

$$= (ay, R^* y)_{L_2(0,d)} = (y, aR^* y)_{L_2(0,d)},$$

так что $\overline{(A_1 y, y)}_{L_2(0,d)} = (aR^* y, y)_{L_2(0,d)}$ и

$$2\mathrm{Re}\,(A_1 y, y)_{L_2(0,d)} = (a(R+R^*)y, y)_{L_2(0,d)} = (\sqrt{a}(R+R^*)y, \sqrt{a}y)_{L_2(0,d)} =$$

$$= ((R+R^*)\sqrt{a}y, \sqrt{a}y)_{L_2(0,d)} \geqslant 2\kappa_1 \|\sqrt{a}y\|^2_{L_2(0,d)} \geqslant 0,$$

поскольку оператор $R + R^* : L_2(0,d) \to L_2(0,d)$ положительно определён и коммутирует с умножением на непрерывную 1-периодическую функцию $\sqrt{a}$. Поскольку функции, входящие в область определения оператора $A_R + A_1$, обращаются в ноль на концах интервала, существует постоянная $\kappa_3 > 0$ такая, что

$$\operatorname{Re}(A_R y, y)_{L_2(0,d)} \geqslant \kappa_1 \|y'\|^2_{L_2(0,d)} \geqslant \kappa_3 \|y\|^2_{W_2^1(0,d)} \quad (y \in D(A_R)).$$

Итак, получаем $\operatorname{Re}((A_R + A_1)y, y)_{L_2(0,d)} \geqslant \kappa_3 \|y\|^2_{W_2^1(0,d)}$, т.е. в неравенстве (1.49) постоянную c_2 можно взять равной нулю. По теореме 1.2.8 точка 0 является резольвентной точкой оператора $A_R + A_1$.

Пример 1.2.6 Рассмотрим оператор $A_R : L_2(0,2) \to L_2(0,2)$, где

$$Ry(t) = y(t) + 2y(t-1) + 2y(t+1).$$

Матрица

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

отвечающая оператору R, является симметричной и знакопеременной. По теореме 1.2.7 оператор A_R самосопряжённый, его спектр вещественный и дискретный. Найдём собственные значения оператора A_R и убедимся заодно, что спектр не является полуограниченным.

Речь идёт о существовании нетривиальных обобщённых решений следующей однородной краевой задачи:

$$-(y(t) + 2y(t-1) + 2y(t+1))'' = \lambda y(t) \quad (t \in (0,2)), \tag{1.50}$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$, и

$$y(t) = 0 \quad (t \notin (0,2)). \tag{1.51}$$

Из (1.50) следует, что функции y_{11}, y_{12} на интервале $(0,1)$ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y''_{11} + 2y''_{12} = -\lambda y_{11}, \quad 2y''_{11} + y''_{12} = -\lambda y_{12} \tag{1.52}$$

и краевым условиям

$$y_{11}(0) = y_{12}(1) = 0, \quad y_{11}(1) = y_{12}(0), \tag{1.53}$$

выражающим принадлежность y пространству $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,2)$. Но чтобы такое сведение к системе было равносильным, осталось ещё записать условие

$$y'_{11}(1) + 2y'_{12}(1) = 2y'_{11}(0) + y'_{12}(0), \tag{1.54}$$

означающее гладкость функции Ry в точке $t = 1$. Легко видеть, что функция y, составленная по решению задачи (1.52), (1.53), (1.54), действительно является обобщённым решением задачи (1.50), (1.51).

Удобно, сделав замену $y_{11} + y_{12} = w$, $y_{11} - y_{12} = z$, перейти к задаче

$$w'' + \lambda w/3 = 0, \quad z'' - \lambda z = 0, \tag{1.55}$$

$$w(0) + z(0) = w(1) - z(1) = 0, \quad w(1) + z(1) = w(0) - z(0), \tag{1.56}$$

$$z'(0) + z'(1) = 3(w'(1) - w'(0)). \tag{1.57}$$

Непосредственным вычислением убеждаемся, что при $\lambda = 0$ задача (1.55), (1.56), (1.57) имеет только нулевое решение, т.е. $\lambda = 0$ не является собственным значением оператора A_R и, следовательно, краевая задача $A_R y = f$ однозначно разрешима для любой правой части.

Будем искать вначале положительные собственные значения. Общее решение системы (1.55) имеет вид

$$w = C_1 \cos(\sqrt{\lambda/3}t) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda/3}t), \quad z = C_3 e^{\sqrt{\lambda}t} + C_4 e^{-\sqrt{\lambda}t}.$$

Подставляя это решение в краевые условия (1.56), (1.57), приходим к системе из четырёх линейных однородных алгебраических уравнений относительно постоянных C_1, C_2, C_3, C_4. Определитель этой системы (с точностью до знакопостоянного множителя) равен

$$\Delta_+ = \sin\mu \left[\sqrt{3}\sinh(\sqrt{3}\mu)\sin\mu + \cosh(\sqrt{3}\mu)\cos\mu\right],$$

где для удобства записи положили $\lambda = 12\mu^2$, $\mu > 0$. Очевидно, что собственные значения — это в точности те λ, для которых выражение Δ_+

обращается в ноль. Имеем две серии положительных собственных значений:

$$\lambda_{1k} = 12(\pi k)^2 \quad \text{и} \quad \lambda_{2k} = 12\mu_k^2, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где μ_k — положительные корни уравнения $\sqrt{3}\tan\mu + \coth(\sqrt{3}\mu) = 0$.

Если же $\lambda < 0$, то

$$w = C_1 e^{\sqrt{-\lambda/3}t} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda/3}t}, \quad z = C_3\cos(\sqrt{-\lambda}t) + C_4\sin(\sqrt{-\lambda}t).$$

Соответствующий определитель имеет вид

$$\Delta_- = \cos\nu\left[\sqrt{3}\sinh(\nu/\sqrt{3})\sin\nu - \cosh(\nu/\sqrt{3})\cos\nu\right],$$

где $\lambda = -4\nu^2$, $\nu > 0$. Приравнивая Δ_- к нулю, получаем две серии отрицательных собственных значений:

$$\lambda_{3k} = -(\pi + 2\pi k)^2 \quad \text{и} \quad \lambda_{4k} = -4\nu_k^2, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где ν_k — положительные корни уравнения $\sqrt{3}\tan\nu - \coth(\nu/\sqrt{3}) = 0$.

Таким образом, $\sigma(A_R)$ содержит собственные значения обоих знаков сколь угодно большие по модулю.

1.3 Линейные краевые задачи для функционально-дифференциальных уравнений с растяжениями и сжатиями аргумента

Этот раздел посвящён разрешимости, гладкости решений и спектру краевой задачи для линейного функционально-дифференциального уравнения, содержащего сжатия и растяжения аргумента под знаком второй производной и являющегося непосредственным обобщением уравнения из пункта 1.1.2. По своим свойствам и методам исследования эти уравнения существенно отличаются от дифференциально-разностных уравнений, рассмотренных в разделе 1.2. Дело в том, что конец интервала является неподвижной точкой для оператора сжатия (растяжения). Эта особенность создаёт дополнительные трудности в исследовании таких уравнений (матричное описание перестаёт быть удобным, поскольку системы получаются бесконечными, а возникающие нелокальные условия содержат бесконечно много точек в окрестности конца интервала) и приводит к ряду новых свойств, таких, как существование бесконечномерного ядра и нарушение гладкости обобщённых решений даже в том случае, когда преобразования аргумента отображают интервал внутрь себя.

1.3.1 Оператор сжатия на $\mathbb{R}_+$ и $(0, T)$

Для натурального k и $T > 0$ мы используем обозначения

$$V_T^k = \{y \in W_2^k(0, +\infty) : y(t) = 0 \ (t \geqslant T)\}, \quad \mathring{V}_T^1 = \{y \in V_T^1 : y(0) = 0\}.$$

Пространство $\mathring{V}_T^1$ можно отождествить с $\mathring{W}_2^1(0, T)$. Функции предполагаются комплекснозначными.

Зафиксируем число $q > 1$ и рассмотрим в $L_2(0, +\infty)$ ограниченный оператор P, определённый по формуле

$$Py(t) = y(q^{-1}t).$$

Обратный и сопряжённый операторы имеют вид

$$P^{-1}y(t) = y(qt), \qquad P^*y(t) = qy(qt).$$

Следовательно, оператор $q^{-1/2}P$ унитарен, а сам оператор P является нормальным, т.е. $P^*P = PP^*$.

Обозначим через $\mathcal{A}$ минимальную замкнутую подалгебру алгебры ограниченных операторов $\mathcal{B}(L_2(0, +\infty))$, содержащую операторы I, P, P^*. Тогда $\mathcal{A}$ есть коммутативная B^*-алгебра (см. [29, глава 11]). Из [29, теорема 11.29] следует, что спектр всякого оператора в $\mathcal{A}$ совпадает с его спектром в $\mathcal{B}(L_2(0,+\infty))$. В соответствии с [29, теорема 11.19] существует изометрический изоморфизм

$$C(\sigma(P)) \ni r(\lambda) \mapsto R(P) \in \mathcal{A}$$

алгебры непрерывных функций на спектре оператора P на алгебру $\mathcal{A}$, при котором $\overline{r(\lambda)} \mapsto (R(P))^*$, $1 \mapsto I$, $\lambda \mapsto P$. Функцию $r(\lambda)$ будем называть символом оператора $R(P)$. Очевидно, спектр оператора $R(P)$ совпадает с множеством значений его символа $r(\lambda)$.

Лемма 1.3.1 *Спектр $\sigma(P)$ оператора P совпадает со всей окружностью $\left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = \sqrt{q}\right\}$.*

Доказательство. Поскольку оператор $q^{-1/2}P$ унитарен, спектр оператора P лежит на упомянутой окружности. Остаётся показать, что оператор $P - \lambda I$ не имеет ограниченного обратного, если $|\lambda| = \sqrt{q}$. Для этого достаточно построить последовательность $y_n \in L_2(0,+\infty)$ такую, что $\|y_n\|_{L_2(0,+\infty)} \to \infty$, в то время как последовательность $(P-\lambda I)y_n$ ограничена по норме. Положим

$$y_n(t) = \begin{cases} \lambda^{i-1}, & t \in (q^{-i}, q^{1-i}) \quad (i = 1, \ldots, n), \\ 0, & t \in (0, q^{-n}) \cup (1, +\infty). \end{cases}$$

Тогда

$$(P - \lambda I)y_n(t) = \begin{cases} -\lambda^{n-1}, & t \in (q^{-n}, q^{1-n}), \\ 1, & t \in (1, q), \\ 0, & t \in (0, q^{-n}) \cup (q^{1-n}, 1) \cup (q, +\infty). \end{cases}$$

В нашем случае

$$\|y_n\|^2_{L_2(0,+\infty)} = \sum_{i=1}^{n} \|y_n\|^2_{L_2(q^{-i},q^{1-i})} = \sum_{i=1}^{n} |\lambda|^{2(i-1)} \left(q^{1-i} - q^{-i}\right) = \frac{q-1}{q}\, n,$$

при этом $\|(P-\lambda I)y_n\|^2_{L_2(0,+\infty)} = q - q^{-1}$. $\square$

Легко может быть найдена резольвента $(P-\lambda_0 I)^{-1}$ оператора P. Предположим вначале, что $|\lambda_0| > \sqrt{q}$. Тогда для некоторого $\varepsilon > 0$ функция $(\lambda - \lambda_0)^{-1}$ аналитична в круге $|\lambda| < \sqrt{q} + \varepsilon$, и, следовательно, раскладывается в степенной ряд

$$(\lambda - \lambda_0)^{-1} = -\sum_{m=0}^{\infty} \lambda_0^{-(m+1)} \lambda^m,$$

равномерно сходящийся на $\sigma(P)$. Но это означает, что

$$(P - \lambda_0 I)^{-1} = -\sum_{m=0}^{\infty} \lambda_0^{-(m+1)} P^m$$

(ряд сходится по операторной норме). Итак,

$$(P - \lambda_0 I)^{-1} y(t) = -\sum_{m=0}^{\infty} \lambda_0^{-(m+1)} y(q^{-m} t), \quad \text{если} \quad |\lambda_0| > \sqrt{q}. \tag{1.58}$$

Теперь пусть $|\lambda_0| < \sqrt{q}$; в этом случае функция $(\lambda - \lambda_0)^{-1}$ аналитична в области $|\lambda| > \sqrt{q} - \varepsilon$ и раскладывается в ряд Лорана

$$(\lambda - \lambda_0)^{-1} = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_0^{m-1} \lambda^{-m},$$

также равномерно сходящийся на $\sigma(P)$. Получаем сходящийся по операторной норме ряд

$$(P - \lambda_0 I)^{-1} = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_0^{m-1} P^{-m},$$

или

$$(P - \lambda_0 I)^{-1} y(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_0^{m-1} y(q^m t), \quad \text{если} \quad |\lambda_0| < \sqrt{q}. \tag{1.59}$$

Лемма 1.3.2 (a) *Если $|\lambda_0| > \sqrt{q}$, то для всех $k = 0, 1, \ldots$ отображение*

$$(P - \lambda_0 I) : W_2^k(0, T) \to W_2^k(0, T)$$

является изоморфизмом;

(b) *Если $|\lambda_0| < q^{1/2-k}$ $(k = 0, 1, \ldots)$, то отображение*

$$(P - \lambda_0 I) : V_T^k \to V_{qT}^k$$

является изоморфизмом.

Доказательство. (a) Почленным дифференцированием ряда в формуле (1.58) убеждаемся, что оператор $(P-\lambda_0 I)^{-1}$ ограничен в $W_2^k(0,+\infty)$ для всех $k=0,1,\ldots$. Поэтому $P-\lambda_0 I$ непрерывно и взаимно однозначно отображает пространство $W_2^k(0,+\infty)$ на себя. Возьмём функцию $y\in W_2^k(0,+\infty)$, и пусть $u=(P-\lambda_0 I)y\in W_2^k(0,+\infty)$. Ясно, что сужение $u|_{(0,T)}$ функции u на интервал $(0,T)$ однозначно определяется сужением $y|_{(0,T)}$ на интервал $(0,T)$ функции y, так что ограниченный оператор $(P-\lambda_0 I): W_2^k(0,T)\to W_2^k(0,T)$ корректно определён. Но при помощи формулы (1.58) легко видеть, что сужение $y|_{(0,T)}$ также однозначно определяется сужением $u|_{(0,T)}$. Другими словами, ограниченный оператор $(P-\lambda_0 I): W_2^k(0,T)\to W_2^k(0,T)$ имеет ограниченный обратный, причём этот обратный оператор по-прежнему имеет вид (1.58).

(b) Дифференцируя ряд в формуле (1.59) k раз в случае $|\lambda_0|<q^{1/2-k}$, получаем, что оператор $P-\lambda_0 I$ осуществляет изоморфизм пространства $W_2^k(0,+\infty)$. Кроме того, из (1.59) вытекает, что функция $y(t)$ обращается в ноль при $t\geqslant T$ тогда и только тогда, когда функция $u=(P-\lambda_0 I)y$ равна нулю при $t\geqslant qT$. $\square$

Лемма 1.3.3 *Если $|\lambda_0|<q^{-1/2}$, то отображение $(P-\lambda_0 I):\overset{\circ}{V}{}_T^1\to\overset{\circ}{V}{}_{qT}^1$ есть изоморфизм.*

Для доказательства достаточно заметить, что $y(0)=0\Longleftrightarrow u(0)=0$.

Лемма 1.3.4 *Пусть $|\lambda_0|=\sqrt{q}$, $y\in L_2(0,T)$, $u=(P-\lambda_0 I)y\in L_2(0,T)$. Тогда*

$$y(t)=-\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_0^{-(m+1)}u(q^{-m}t)\quad (t\in(0,T)),\tag{1.60}$$

$$u\in W_2^k(0,T)\Rightarrow y\in W_2^k(0,T).\tag{1.61}$$

Доказательство. Рассмотрим частичные суммы ряда (1.60). Подставляя $y(q^{-1}t) - \lambda_0 y(t)$ вместо $u(t)$, будем иметь

$$\sum_{m=0}^{M-1} \lambda_0^{-(m+1)} u(q^{-m}t) = y(t) - \lambda_0^{-M} y(q^{-M}t) \quad (t \in (0,T)).$$

Оценка второго слагаемого даёт

$$\left\|\lambda_0^{-M} P^M y\right\|^2_{L_2(0,T)} = |\lambda_0|^{-2M} \int\limits_0^T |y(q^{-M}t)|^2\, dt =$$

$$= q^M |\lambda_0|^{-2M} \int\limits_0^{q^{-M}T} |y(t)|^2\, dt = \|y\|^2_{L_2(0,q^{-M}T)} \to 0,\ M \to \infty.$$

Таким образом, ряд сходится к y в $L_2(0,T)$. Равенство (1.60) доказано. Дифференцируя (1.60) k раз, получаем (1.61). $\square$

1.3.2 Краевая задача для функционально-дифференциального уравнения со сжатиями аргумента

В этом пункте рассматривается ситуация, когда преобразования аргумента отображают интервал $(0,T)$ в себя. Поэтому краевые условия, в отличие от дифференциально-разностных уравнений, задаются лишь на концах интервала:

$$-(Ry')'(t) = f(t) \quad (t \in (0,T)), \tag{1.62}$$

$$y(0) = y(T) = 0, \tag{1.63}$$

где

$$Ry(t) = \sum_{m=0}^{l} a_m y(q^{-m}t), \quad a_m \in \mathbb{C}\ (m = 0, \dots, l);$$

$f \in L_2(0,T)$ — комплекснозначная функция. Под обобщённым решением краевой задачи (1.62), (1.63) мы будем понимать функцию $y \in \mathring{W}_2^1(0,T)$ такую, что принадлежащая $L_2(0,T)$ функция Ry' имеет на этом интервале $(0,T)$ обобщённую производную из $L_2(0,T)$, равную $-f$. Стоит подчеркнуть, что при этом сама функция y' не обязана иметь обобщённую производную из $L_2(0,T)$, т.е. принадлежать $W_2^1(0,T)$. Эквивалентным определением обобщённого решения может служить интегральное тождество

$$(Ry', \varphi')_{L_2(0,T)} = (f, \varphi)_{L_2(0,T)}, \tag{1.64}$$

которому функция $y \in \mathring{W}_2^1(0,T)$ должна удовлетворять при любой функции $\varphi \in \mathring{W}_2^1(0,T)$.

С уравнением (1.62) свяжем комплексный полином $r(\lambda) = \sum\limits_{m=0}^{l} a_m \lambda^m$ — символ оператора $R = R(P) = \sum\limits_{m=0}^{l} a_m P^m$. Без ограничения общности считаем, что старший коэффициент $a_l \neq 0$. Покажем, как разрешимость задачи (1.62), (1.63) зависит от расположения корней λ_j ($j = 1, \ldots, l$) полинома $r(\lambda)$ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ относительно окружности $|\lambda| = \sqrt{q}$.

Теорема 1.3.1 *Если $r(\lambda)$ не обращается в ноль в круге $|\lambda| < \sqrt{q}$, то для любой функции $f \in L_2(0,T)$ существует единственное обобщённое решение задачи* (1.62), (1.63). *Это решение принадлежит $W_2^{k+2}(0,T)$, если $f \in W_2^k(0,T)$ $(k = 0, 1, \ldots)$.*

Перед тем как доказывать теорему, заметим, что отсутствие у полинома $r(\lambda)$ малых по абсолютной величине корней можно интерпретировать как малость нелокальных членов уравнения (за них отвечают коэффициенты $a_1, \ldots, a_l$) по сравнению с локальным членом $a_0 y''(t)$. Локальный член является доминирующим, и картина разрешимости повторяет «классическую». Дальше мы покажем, что фигурирующее в теореме 1.3.1 ограничение на величину корней $r(\lambda)$ является в этом смысле принципиальным.

Доказательство. Воспользуемся разложением

$$R(P) = a_l(P - \lambda_1 I)(P - \lambda_2 I) \ldots (P - \lambda_l I),$$

где по условию теоремы все $|\lambda_j| \geqslant \sqrt{q}$.

Пусть $y \in \mathring{W}_2^1(0,T)$ есть обобщённое решение задачи (1.62), (1.63). Тогда $Ry' \in W_2^1(0,T)$. Из лемм 1.3.2, 1.3.4 следует, что y' также принадлежит $W_2^1(0,T)$. Таким образом, в условиях теоремы всякое обобщённое решение принадлежит $W_2^2(0,T)$. Элементарно проверяется, что

$$(R(P)y')' = R(q^{-1}P)y'' = a_l q^{-l}(P - q\lambda_1 I)\dots(P - q\lambda_l I)y'',$$

причём $|q\lambda_j| \geqslant q^{3/2} > q^{1/2}$ $(j = 1, \dots, l)$. Уравнение (1.62) сводится к равенству

$$-R(q^{-1}P)y'' = f, \tag{1.65}$$

которое выполняется почти всюду на $(0,T)$.

По лемме 1.3.2 оператор $R(q^{-1}P) : L_2(0,T) \to L_2(0,T)$ имеет ограниченный обратный. Поэтому (1.65) равносильно уравнению $y'' = g$ с функцией $g = -\left[R(q^{-1}P)\right]^{-1} f \in L_2(0,T)$, которое имеет единственное решение $y \in \mathring{W}_2^1(0,T) \cap W_2^2(0,T)$,

$$y(t) = \int\limits_0^t (t-\tau)g(\tau)\,d\tau - \frac{t}{T}\int\limits_0^T (T-\tau)g(\tau)\,d\tau.$$

Но оператор $\left[R(q^{-1}P)\right]^{-1}$ ограничен в $W_2^k(0,T)$ для любого $k = 0, 1, \dots$ (лемма 1.3.2). Поэтому при $f \in W_2^k(0,T)$ будем иметь $g \in W_2^k(0,T)$ и, соответственно, $y \in W_2^{k+2}(0,T)$. $\square$

Пример 1.3.1 Рассмотрим краевую задачу

$$-(y'(t) + ay'(q^{-1}t))' = f(t) \quad (t \in (0,T)), \tag{1.66}$$

$$y(0) = y(T) = 0.$$

Условие $|\lambda_1| \geqslant q^{1/2}$ на корень λ_1 символа $r(\lambda) = 1 + a\lambda$ означает, что $|a| \leqslant q^{-1/2}$. По теореме 1.3.1 задача (1.66), (1.63) имеет единственное обобщённое решение для любой правой части f из пространства $L_2(0,T)$, если $|a| \leqslant q^{-1/2}$; при этом обобщённое решение является гладким, т.е. принадлежит $W_2^2(0,T)$.

Теорема 1.3.2 *Предположим, что в круг $|\lambda| < \sqrt{q}$ попадает хотя бы один корень полинома $r(\lambda)$. Тогда для любой функции $f \in L_2(0,T)$ задача* (1.62), (1.63) *имеет бесконечно много обобщённых решений. Среди обобщённых решений бесконечно много негладких, т.е. не принадлежащих $W_2^2(0,T)$.*

Стоит уточнить, что выражение «бесконечно много» в данном случае означает бесконечную размерность пространства решений соответствующей однородной задачи.

Доказательство. Пусть по-прежнему $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ обозначают корни уравнения $r(\lambda) = 0$. Можно считать, что $|\lambda_j| \geqslant \sqrt{q}$ для $j = 1, \ldots, m_0$ и $|\lambda_j| < \sqrt{q}$ для $j = m_0+1, \ldots, l$, где $m_0 < l$. Введём операторы

$$R_1(P) = a_l(P - \lambda_1 I) \ldots (P - \lambda_{m_0} I), \ R_2(P) = (P - \lambda_{m_0+1} I) \ldots (P - \lambda_l I).$$

Легко проверить, что

$$R_2(P)y' = (R_2(qP)y)' = q^{l-m_0} \left((P - q^{-1}\lambda_{m_0+1} I) \ldots (P - q^{-1}\lambda_l I) y \right)',$$

причём $|q^{-1}\lambda_j| < q^{-1/2}$ $(j = m_0+1, \ldots, l)$. Таким образом,

$$Ry' = R_1(P)(R_2(qP)y)'.$$

Рассмотрим краевую задачу

$$-(Ru_1')'(t) = f(t) \quad (t \in (0,T)),$$

$$u_1(0) = u_1(T) = 0.$$

По теореме 1.3.1 эта задача имеет единственное обобщённое решение $u_1 \in \mathring{W}_2^1(0,T) \cap W_2^2(0,T)$. Обозначим $T' = q^{l-m_0} T > T$. Возьмём произвольную функцию $u_2 \in \mathring{W}_2^1(T, T')$ и положим

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t), & t \in (0, T), \\ u_2(t), & t \in (T, T'). \end{cases}$$

Очевидно, $u \in \mathring{W}_2^1(0, T') = \mathring{V}_{T'}^1$.

По лемме 1.3.2 оператор $R_2(qP) : \mathring{V}_T^1 \to \mathring{V}_{T'}^1$ имеет ограниченный обратный. Положим $y = [R_2(qP)]^{-1} u \in \mathring{V}_T^1$. Мы утверждаем, что y есть обобщённое решение задачи (1.62), (1.63). Действительно, для любой функции $\varphi \in \mathring{W}_2^1(0, T)$ будем иметь

$$(Ry', \varphi')_{L_2(0,T)} = \big(R_1(P)(R_2(qP)y)', \varphi'\big)_{L_2(0,T)} = (R_1(P)u', \varphi')_{L_2(0,T)} =$$

$$= (R_1(P)u_1', \varphi')_{L_2(0,T)} = (f, \varphi)_{L_2(0,T)}.$$

Здесь мы учли, что $R_1(P)u'|_{(0,T)} = R_1(P)u_1'|_{(0,T)}$. Поскольку решение y зависит от произвольной функции $u_2 \in \mathring{W}_2^1(T, T')$, получаем первое утверждение теоремы.

Перейдём к вопросу о негладких решениях краевой задачи. Для простоты ограничимся уравнением (1.66) с двучленным функциональным оператором в случае $|a| > q^{-1/2}$. Мы только что показали, что всякая функция

$$y = [R_2(qP)]^{-1}u = \frac{1}{q}\left(P + \frac{1}{qa}I\right)^{-1} u,$$

где

$$u(t) = u_1(t) = -\frac{1}{a}\int\limits_0^t (t-\tau)f(\tau)\,d\tau + \frac{t}{aT}\int\limits_0^T (T-\tau)f(\tau)\,d\tau \quad (t \in (0, T)),$$

$$u(t) = u_2(t) \in \mathring{W}_2^1(T, qT) \quad (t \in (T, qT)),$$

является обобщённым решением задачи (1.66), (1.63).

Возьмём $u_2 \in \mathring{W}_2^1(T, qT) \backslash W_2^2(T, qT)$. Тогда из (1.59) следует, что

$$y \notin W_2^2(q^{-i-1}T, q^{-i}T) \quad (i = 0, 1, \ldots).$$

Если же брать $u_2 \in \mathring{W}_2^1(T, qT) \cap W_2^2(T, qT)$, то, как показывает (1.59),

$$y \in W_2^2(q^{-i-1}T, q^{-i}T) \quad (i = 0, 1, \ldots).$$

С другой стороны, легко проверить, что условия

$$y'(q^{-i}T - 0) = y'(q^{-i}T + 0) \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

эквивалентны следующему условию согласования:

$$u_2'(T + 0) + \frac{1}{a}\, u_2'(qT - 0) = u_1'(T - 0).$$

И если это условие не выполнено, то гладкость обобщённого решения нарушается во всех точках $q^{-i}T$ $(i = 1, 2, \ldots)$. $\square$

1.3.3 Краевая задача для функционально-дифференциального уравнения со сжатиями и растяжениями аргумента

Вспомним (см. пункт 1.1.2), что отвечающее вариационной задаче уравнение содержит как сжатие, так и растяжение аргумента. Поэтому необходимо рассматривать также уравнения одновременно с растяжениями и сжатиями. В случае, когда преобразования аргумента отображают некоторые точки интервала $(0, T)$ во внешность интервала, краевые условия задаются в окрестности интервала, как и для дифференциально-разностных уравнений. Снова без ограничения общности рассматриваем краевую задачу с однородными краевыми условиями

$$-(Ry')'(t) = f(t) \quad (t \in (0, T)), \tag{1.67}$$

$$y(t) = 0 \quad (t \notin (0, T)), \tag{1.68}$$

где теперь

$$Ry(t) = \sum_{m=-l_2}^{l_1} a_m y(q^{-m}t), \quad a_m \in \mathbb{C},$$

$f \in L_2(0,T)$. Считаем, что $l_2 \geqslant 0$, $a_{l_1} \neq 0$, $a_{-l_2} \neq 0$.

Функция $y \in \overset{\circ}{V}{}^1_T$ по-прежнему называется обобщённым решением задачи (1.67), (1.68), если

$$(Ry', \varphi')_{L_2(0,T)} = (f, \varphi)_{L_2(0,T)}$$

для любой пробной функции $\varphi \in \overset{\circ}{V}{}^1_T$.

Символ $r(\lambda) = \sum\limits_{m=-l_2}^{l_1} a_m \lambda^m$ оператора $R = R(P) = \sum\limits_{m=-l_2}^{l_1} a_m P^m$ перепишем в виде

$$r(\lambda) = \lambda^{-l_2} \sum_{m=0}^{l_1+l_2} a_{m-l_2} \lambda^m = a_{l_1} \lambda^{-l_2} (\lambda - \lambda_1) \ldots (\lambda - \lambda_{l_1+l_2}),$$

где λ_j $(j = 1, \ldots, l_1 + l_2)$ — корни полинома $\lambda^{l_2} r(\lambda)$. Можно считать, что $|\lambda_j| \geqslant \sqrt{q}$ для $j = 1, \ldots, m_0$ и $|\lambda_j| < \sqrt{q}$ для $j = m_0 + 1, \ldots, l_1 + l_2$, где $0 \leqslant m_0 \leqslant l_1 + l_2$. Введём операторы

$$R_1(P) = a_{l_1} (P - \lambda_1 I) \ldots (P - \lambda_{m_0} I),$$

$$R_2(P) = (P - \lambda_{m_0+1} I) \ldots (P - \lambda_{l_1+l_2} I) P^{-l_2}.$$

Очевидно, что справедливо соотношение

$$R_2(P) y' = (R_2(qP) y)' = q^{l_1 - m_0} ((P - q^{-1} \lambda_{m_0+1} I) \cdots (P - q^{-1} \lambda_{l_1+l_2} I) P^{-l_2} y)',$$

так что $Ry' = R_1(P)(R_2(qP)y)'$. Поскольку $|q^{-1}\lambda_j| < q^{-1/2}$, к операторам $(P - q^{-1}\lambda_j I)$ при $j = m_0 + 1, \ldots, l_1 + l_2$ применима лемма 1.3.3. Из неё следует, что отображение $R_2(qP) : \overset{\circ}{V}{}^1_T \to \overset{\circ}{V}{}^1_{T'}$ является изоморфизмом $(T' = q^{l_1 - m_0} T)$.

Теорема 1.3.3 (a) *Пусть* $m_0 = l_1$. *Тогда для любой функции* $f \in L_2(0,T)$ *существует единственное обобщённое решение задачи* (1.67), (1.68).

(b) *Пусть* $m_0 < l_1$. *Тогда для любой функции* $f \in L_2(0,T)$ *существует бесконечно много обобщённых решений задачи* (1.67), (1.68).

(c) *Пусть* $m_0 > l_1$. *Тогда для существования обобщённого решения задачи* (1.67), (1.68) *необходимо и достаточно, чтобы функция* f *была ортогональна бесконечномерному подпространству в пространстве* $L_2(0,T)$*; при* $f = 0$ *однородная задача имеет единственное тривиальное решение.*

Доказательство. Легко видеть, что функция $y \in \mathring{V}^1_T$ является обобщённым решением задачи (1.67), (1.68) тогда и только тогда, когда функция $u = R_2(qP)y \in \mathring{V}^1_{T'}$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$(R_1(P)u',\, \varphi')_{l_2(0,T)} = (f,\varphi)_{l_2(0,T)}$$

при любой функции $\varphi \in \mathring{V}^1_T$. Вспомним, что $|\lambda_j| \geqslant \sqrt{q}$ $(j = 1,\ldots,m_0)$. Тогда, как мы уже убедились в предыдущем пункте, функция u на интервале $(0,T)$ удовлетворяет уравнению

$$u'' = g \stackrel{\text{def}}{=} -[R_1(q^{-1}P)]^{-1}f \in L_2(0,T). \qquad (1.69)$$

Следует рассмотреть три случая.

(a) При $m_0 = l_1$ имеем $T' = T$, поэтому пространство $\mathring{V}^1_{T'}$ совпадает с $\mathring{W}^1_2(0,T)$. Уравнение (1.69) на пространстве $\mathring{W}^1_2(0,T)$ имеет единственное решение

$$u(t) = \int\limits_0^t (t-\tau)g(\tau)\,d\tau - \frac{t}{T}\int\limits_0^T (T-\tau)g(\tau)\,d\tau. \qquad (1.70)$$

Тогда функция $y = [R_2(qP)]^{-1}u \in \mathring{V}^1_T$ есть решение задачи (1.67), (1.68).

(b) Условие $m_0 < l_1$ означает, что $T' > T$. Поэтому, продолжая функцию u в (1.70) на интервал (T,T') произвольной функцией из $\mathring{W}^1_2(T,T')$ и действуя затем на продолженную функцию оператором $[R_2(qP)]^{-1}$, мы получаем решение задачи (1.67), (1.68). Понятно, что в этом случае задача (1.67), (1.68) имеет бесконечно много обобщённых решений (пространство решений однородной задачи бесконечномерно).

(c) В случае $m_0 > l_1$ имеем $T' < T$. Это означает, что функция (1.70) обращается в ноль на интервале (T', T). Следовательно,

$$g = 0 \quad \text{почти всюду на } (T', T). \tag{1.71}$$

Более того,

$$u(t) = \int\limits_0^{T'} (t-\tau)g(\tau)\,d\tau - \frac{t}{T}\int\limits_0^{T'} (T-\tau)g(\tau)\,d\tau = \left(\frac{t}{T} - 1\right)\int\limits_0^{T'} \tau g(\tau)\,d\tau,$$

когда $t \in (T', T)$. И поскольку $u(t) = 0$ на интервале (T', T), должно выполняться соотношение

$$\int\limits_0^{T'} \tau g(\tau)\,d\tau = 0. \tag{1.72}$$

Легко видеть, что условия (1.71), (1.72) являются также и достаточными для того, чтобы $u(t)$ обращалась в ноль на (T', T). Другими словами, задача (1.67), (1.68) имеет решение тогда и только тогда, когда функция $g = -[R_1(q^{-1}P)]^{-1}f$ ортогональна в $L_2(0,T)$ всем функциям $w \in L_2(0,T)$ таким, что $w|_{(0,T')} = t$. Обозначив через

$$[R_1^*(q^{-1}P)]^{-1} : L_2(0,T) \to L_2(0,T)$$

сопряжённый оператор, перепишем эти условия ортогональности в виде

$$(f, [R_1^*(q^{-1}P)]^{-1}w)_{L_2(0,T)} = 0.$$

Единственность решения $y = [R_2(qP)]^{-1}u \in \overset{\circ}{V}{}_T^1$ очевидна. $\square$

Далее интересно исследовать гладкость обобщённого решения в ситуации, когда имеет место однозначная разрешимость, т.е. при условии $m_0 = l_1$. Единственное обобщённое решение определяется по формуле $y = [R_2(qP)]^{-1}u$, где u имеет вид (1.70). Вначале покажем, что при $l_2 > 0$, т.е. в случае, когда есть хотя бы одно растяжение, из условия $y \in W_2^2(0,T)$ следует, что $y \in V_T^2$ (другими словами, первая производная гладкого решения обязательно равна нулю в правом конце интервала; это эффект той же природы, что и для дифференциально-разностных уравнений). Действительно, предположим противное, т.е. $y \in W_2^2(0,T)$, но $y'(T-0) \neq 0$. Поскольку

$$u = R_2(qP)y = (P - q^{-1}\lambda_{l_1+1}I)\dots(P - q^{-1}\lambda_{l_1+l_2}I)P^{-l_2}y,$$

и, кроме того, $l_2 > 0$, $\lambda_{l_1+1} \neq 0$, $\lambda_{l_1+l_2} \neq 0$, мы приходим к тому, что $u'(q^{-l_2}T-0) \neq u'(q^{-l_2}T+0)$. Это противоречит включению $u \in W_2^2(0,T)$.

Итак, пусть $y \in V_T^2$. Тогда и $u \in V_T^2$, т.е.

$$u'(T-0) = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \tau g(\tau)\,d\tau = 0.$$

Переходя к $f = -R_1(q^{-1}P)g$, перепишем это условие ортогональности в виде

$$(f, [R_1^*(q^{-1}P)]^{-1}w_0)_{L_2(0,T)} = 0, \tag{1.73}$$

где $w_0(t) = t$.

С другой стороны, в силу леммы 1.3.2 условие

$$|\lambda_j| < q^{-1/2} \quad (j = m_0+1,\dots,l_1+l_2)$$

гарантирует принадлежность $y \in V_T^2$ для всякой функции $u \in V_T^2$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1.3.4 *Пусть* $l_2 > 0$. *Предположим, что из* l_1+l_2 *корней символа* $r(\lambda)$ *ровно* l_1 *корней удовлетворяют условию* $|\lambda| \geqslant q^{1/2}$, *а остальные* l_2 *корней — условию* $|\lambda| < q^{-1/2}$. *Тогда обобщённое решение* y *задачи* (1.67), (1.68) (*оно существует и единственно в силу теоремы* 1.3.3) *является гладким, т.е. принадлежит пространству* $W_2^2(0,T)$, *в том и только том случае, если правая часть* f *удовлетворяет условию ортогональности* (1.73). *При этом имеет место соотношение* $y'(T-0) = 0$.

Вновь удобно ввести отвечающий задаче (1.67), (1.68) неограниченный оператор $A_R : L_2(0,T) \to L_2(0,T)$, определённый на подпространстве $D(A_R) = \left\{ y \in \mathring{V}^1_T : Ry' \in W^1_2(0,T) \right\}$ и действующий по формуле

$$A_R y = -(Ry')' \quad (y \in D(A_R)).$$

Будем считать, что $m_0 = l_1$. Оператор A_R имеет ограниченный обратный, причём ограниченным будет и оператор $A_R^{-1} : L_2(0,T) \to \mathring{W}^1_2(0,T)$.

Вспоминая представление $Ry' = R_1(P)(R_2(qP)y)'$, нетрудно заметить, что область определения оператора A_R состоит в точности из тех функций $y \in L_2(0,T)$, для которых $R_2(qP)y \in W^2_2(0,T) \cap \mathring{V}^1_T$. Действительно, если $y \in \mathring{V}^1_T$, то и $R_2(qP)y \in \mathring{V}^1_T$ — это следует из определения оператора $R_2(qP)$. Кроме того, если $Ry' \in W^1_2(0,T)$, то и $(R_2(qP)y)' \in W^1_2(0,T)$ по леммам 1.3.2 и 1.3.4, т.е. $R_2(qP)y \in W^2_2(0,T)$. Наоборот, пусть функция $y \in L_2(0,T)$ такова, что $R_2(qP)y \in W^2_2(0,T) \cap \mathring{V}^1_T$. Тогда очевидно, что $Ry' \in W^1_2(0,T)$; кроме того, $y \in \mathring{V}^1_T$, поскольку $R_2(qP)$ есть изоморфизм пространства $\mathring{V}^1_T$.

В случае уравнения с младшими членами легко доказать фредгольмову разрешимость краевой задачи. Пусть $A_1 : W^1_2(0,T) \to L_2(0,T)$ — ограниченный линейный оператор; рассмотрим оператор

$$A_R + A_1 : L_2(0,T) \to L_2(0,T), \quad D(A_R + A_1) = D(A_R).$$

Теорема 1.3.5 *Пусть $m_0 = l_1$. Тогда оператор $A_R + A_1$ фредгольмов.*

Доказательство. Через d_0^2 обозначим оператор двойного дифференцирования в пространстве $L_2(0,T)$ с областью определения $W^2_2(0,T) \cap \mathring{W}^1_2(0,T)$. В условии теоремы определён линейный ограниченный оператор

$$A_2 \stackrel{\text{def}}{=} (R_1(q^{-1}P))^{-1} A_1 (R_2(qP))^{-1} : \mathring{W}^1_2(0,T) \to L_2(0,T)$$

и справедливо представление

$$A_R + A_1 = R_1(q^{-1}P)(-d_0^2 + A_2)R_2(qP).$$

Но оператор

$$-d_0^2 + A_2 : L_2(0,T) \to L_2(0,T), \quad D(-d_0^2 + A_2) = W_2^2(0,T) \cap \mathring{W}_2^1(0,T),$$

фредгольмов. Действительно, существует обратный оператор $(d_0^2)^{-1}$, ограниченный из $L_2(0,T)$ в $W_2^2(0,T)$ и, следовательно, компактный из $L_2(0,T)$ в $\mathring{W}_2^1(0,T)$. Компактным будет и оператор $A_2(d_0^2)^{-1} : L_2(0,T) \to L_2(0,T)$. Остаётся заметить, что $-d_0^2 + A_2 = -\left[I - A_2(d_0^2)^{-1}\right] d_0^2$.

Поскольку линейный оператор $R_2(qP)$ осуществляет биекцию между подпространствами $D(A_R+A_1)$ и $D(-d_0^2+A_2)$, а оператор $R_1(q^{-1}P)$ есть изоморфизм $L_2(0,T)$, фредгольмовым будет и оператор $A_R + A_1$. $\square$

Получим теперь некоторые достаточные условия дискретности спектра оператора $A_R + A_1$. Пусть $m_0 = l_1$. Из доказательства теоремы 1.3.5 видно, что в случае существования резольвента $(A_R + A_1 - \lambda I)^{-1}$ будет компактным оператором в $L_2(0,T)$. Поэтому для доказательства дискретности $\sigma(A_R + A_1)$ достаточно найти хотя бы одну резольвентную точку (при $A_1 = 0$, как мы уже знаем, такой точкой будет $\lambda = 0$). В силу фредгольмовости оператора вопрос вновь сводится к существованию нетривиальных решений уравнения $(A_R + A_1 - \nu I)y = 0$. В следующей теореме рассмотрена ситуация, когда оператор самосопряжённый.

Теорема 1.3.6 *Пусть $r(\lambda) = \overline{r(\lambda)}$ и $r(\lambda) \neq 0$ при $|\lambda| = \sqrt{q}$, а линейный ограниченный оператор $A_1 : W_2^1(0,d) \to L_2(0,d)$ удовлетворяет условию*

$$(A_1x, y)_{L_2(0,d)} = (x, A_1y)_{L_2(0,d)} \quad (x, y \in D(A_R)). \tag{1.74}$$

Тогда оператор $A_R + A_1 : L_2(0,d) \to L_2(0,d)$ самосопряжённый, а его спектр дискретный и вещественный.

Доказательство. Вещественность символа $r(\lambda)$ означает самосопряжённость оператора $R(P) : L_2(0, +\infty) \to L_2(0, +\infty)$ и, кроме того, позволяет записать этот символ в следующем виде:

$$r(\lambda) = a_0 + \sum_{m=1}^{l_1} a_m \lambda^m + \overline{a}_m q^m \lambda^{-m} \quad (a_0 \in \mathbb{R},\, a_{l_1} \neq 0).$$

Рассмотрим полином

$$\lambda^{l_1} r(\lambda) = \sum_{m=0}^{l_1-1} \overline{a}_{l_1-m} q^{l_1-m} \lambda^m + a_0 \lambda^{l_1} + \sum_{m=l_1+1}^{2l_1} a_{m-l_1} \lambda^m$$

порядка $2l_1$. Он имеет $2l_1$ отличных от нуля корней. Непосредственной проверкой убеждаемся, что наряду со всяким корнем $\lambda = \alpha$ у него есть и корень $\lambda = q/\overline{\alpha}$. При этом, если $|\alpha| > \sqrt{q}$, то $|q/\overline{\alpha}| < \sqrt{q}$. Учитывая, что ни один из корней не лежит на окружности $|\lambda| = \sqrt{q}$, получаем, что из $2l_1$ корней ровно половина удовлетворяет условию $|\lambda| > \sqrt{q}$, а оставшаяся половина — условию $|\lambda| < \sqrt{q}$. Другими словами, в предположениях теоремы имеем $m_0 = l_1$. Оставшаяся часть доказательства полностью повторяет доказательство теоремы 1.2.7. $\square$

Теорема 1.3.7 *Предположим, что* $\operatorname{Re} r(\lambda) > 0$ *при* $|\lambda| = \sqrt{q}$. *Тогда спектр* $\sigma(A_R + A_1)$ *дискретный и полуограниченный, т.е. существует число* $c_2 \geqslant 0$ *такое, что* $\sigma(A_R + A_1) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > -c_2\}$.

Доказательство. Из результатов пункта 1.3.1 следует, что в условиях теоремы оператор $R + R^*$ в $L_2(0, +\infty)$ положительно определён. Поэтому существуют такие положительные постоянные κ_1 и κ_2, что

$$\operatorname{Re}(A_R y, y)_{L_2(0,T)} = \frac{1}{2}((R + R^*)y', y')_{L_2(0,T)} \geqslant \kappa_1 \|y'\|^2_{L_2(0,T)} \geqslant \kappa_2 \|y\|^2_{W_2^2(0,T)}$$

для всех $y \in D(A_R)$. С учётом младших членов (см. доказательство теоремы 1.2.8) получаем оценку, ничем не отличающуюся от оценки (1.49):

$$\operatorname{Re}((A_R + A_1)y, y)_{L_2(0,d)} \geqslant c_1 \|y\|^2_{W_2^1(0,d)} - c_2 \|y\|^2_{L_2(0,d)}.$$

Как мы упоминали в замечании 1.2.4 после теоремы 1.2.8, этой оценки достаточно для вывода нужных свойств оператора. В частности, не требуется никаких дополнительных рассуждений, связанных с расположением корней символа $r(\lambda)$. Подробное доказательство в более общей многомерной ситуации будет дано во второй главе. $\square$

1.3.4 Приложение к задаче об успокоении системы управления с запаздыванием, пропорциональным времени

Этот пункт посвящён решению краевой задачи (1.10), (1.11), связанной с вариационной задачей (1.8), (1.6) (см. пункт 1.1.2). Наряду с функционалом (1.8), рассмотрим вспомогательный функционал

$$J_0(w) = \int_0^{qT} [w'(t) + aw'(q^{-1}t)]^2\, dt \quad (w \in \mathring{V}_T^1)$$

на пространстве $\mathring{V}_T^1$.

Лемма 1.3.5 *Пусть $|a| \neq q^{-1/2}$. Тогда существует константа $\gamma_0 > 0$ такая, что*

$$J_0(w) \geqslant \gamma_0 \|w\|^2_{W_2^1(0,T)} \tag{1.75}$$

для всех $w \in \mathring{V}_T^1$.

Доказательство. Повторяя выкладки, аналогичные приведённым в пункте 1.1.2, получим

$$J_0(w) = \int_0^T \left[\, (1 + a^2 q)w'(t) + aw'(q^{-1}t) + aqw'(qt) \,\right] w'(t)\, dt.$$

Учитывая, что w обращается в ноль при $t > T$, можем записать

$$J_0(w) = \left([(1 + a^2 q)I + aP + aqP^{-1}]w', w'\right)_{L_2(0,+\infty)}.$$

Оператор в квадратных скобках, действующий в пространстве $L_2(0,+\infty)$, имеет символ $r(\lambda) = 1 + a^2q + a\lambda + aq\lambda^{-1}$. Вспомним, что $a \in \mathbb{R}$, а $\lambda = \sqrt{q}e^{i\theta}$, где θ пробегает $\mathbb{R}$. Поэтому $r(\lambda) = 1 + a^2q + 2a\sqrt{q}\cos\theta$ — вещественная функция, причём минимум $r(\lambda)$ равен $(1 - |a|\sqrt{q})^2$. Поэтому, если $|a| \neq q^{-1/2}$, то $r(\lambda) \geqslant (1 - |a|\sqrt{q})^2 > 0$. В силу описанного в пункте 1.3.1 алгебраического изоморфизма получаем, что действующий в $L_2(0,+\infty)$ оператор $R(P) = (1 + a^2q)I + aP + aqP^{-1}$ является самосопряжённым и положительно определённым:

$$\big([(1+a^2q)I + aP + aqP^{-1}]w', w'\big)_{L_2(0,+\infty)} \geqslant (1-|a|\sqrt{q})^2\|w'\|^2_{L_2(0,+\infty)}.$$

Остаётся заметить, что $\|w'\|_{L_2(0,+\infty)} = \|w'\|_{L_2(0,T)}$, а $\|w'\|_{L_2(0,T)}$ задаёт эквивалентную норму в $\mathring{W}_2^1(0,T)$. $\square$

Вернёмся к исходному функционалу с младшими членами

$$J(y) = \int\limits_0^{qT} \left[y'(t) + ay'(q^{-1}t) + by(t) + cy(q^{-1}t)\right]^2\, dt.$$

Лемма 1.3.6 *Пусть $|a| \neq q^{-1/2}$. Тогда существует константа $\gamma > 0$ такая, что*

$$J(w) \geqslant \gamma\|w\|^2_{W_2^1(0,T)} \tag{1.76}$$

для всех $w \in \mathring{V}_T^1$.

Доказательство. Из леммы 1.3.5 при помощи элементарного алгебраического неравенства $(\alpha+\beta)^2 \geqslant \alpha^2/2 - \beta^2$ $(\alpha,\beta \in \mathbb{R})$ легко вытекает существование константы $\gamma_1 > 0$ такой, что

$$J(w) \geqslant \frac{\gamma_0}{2}\|w\|^2_{W_2^1(0,T)} - \gamma_1\|w\|^2_{L_2(0,T)} \tag{1.77}$$

для любой функции $w \in \mathring{V}_T^1$. В то же время предположим, что оценка (1.76) не имеет места. Это означает, что для любого натурального n найдётся функция $w_n \in \mathring{V}_T^1$ такая, что

$$J(w_n) < \frac{1}{n}\|w_n\|^2_{W_2^1(0,T)}.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\|w_n\|_{W_2^1(0,T)} = 1$ (в противном случае обе части неравенства надо разделить на $\|w_n\|^2_{W_2^1(0,T)}$ и перейти к $w_n/\|w_n\|_{W_2^1(0,T)}$) и

$$J(w_n) < \frac{1}{n}\,. \tag{1.78}$$

В силу компактности вложения $W_2^1(0,T)$ в $L_2(0,T)$ перейдём к подпоследовательности w_{n_k}, фундаментальной в $L_2(0,T)$. Но из (1.77) и (1.78) тогда будет следовать и фундаментальность w_{n_k} в $W_2^1(0,T)$:

$$\frac{\gamma_0}{2}\|w_{n_k} - w_{n_m}\|^2_{W_2^1(0,T)} \leqslant \gamma_1\|w_{n_k} - w_{n_m}\|^2_{L_2(0,T)} + J(w_{n_k} - w_{n_m}) \leqslant$$
$$\leqslant \gamma_1\|w_{n_k} - w_{n_m}\|^2_{L_2(0,T)} + \frac{2}{n_k} + \frac{2}{n_m} \longrightarrow 0, \quad k, m \to \infty.$$

Таким образом, w_{n_k} сходится к некоторой функции w_0 в $\mathring{V}_T^1$. Очевидно, что $\|w_0\|_{W_2^1(0,T)} = 1$, а предельный переход в (1.78) даёт

$$J(w_0) = \int\limits_0^{qT} \left[w_0'(t) + aw_0'(q^{-1}t) + bw_0(t) + cw_0(q^{-1}t)\right]^2 dt = 0,$$

т.е. $w_0 \in \mathring{V}_T^1$ удовлетворяет уравнению

$$w_0'(t) + aw_0'(q^{-1}t) + bw_0(t) + cw_0(q^{-1}t) = 0 \tag{1.79}$$

почти всюду на $(0, qT)$. Поскольку $w_0(t) = 0$ $(t \geqslant T)$, уравнение (1.79) на интервале (T, qT) превращается в уравнение $aw_0'(q^{-1}t) + cw_0(q^{-1}t) = 0$ или

$$aw_0'(t) + cw_0(t) = 0 \quad (t \in (q^{-1}T, T))$$

(конечно, считаем, что $a^2 + c^2 \neq 0$). Отсюда с учётом $w_0(T) = 0$ следует, что $w_0(t) = 0$ $(t \geqslant q^{-1}T)$. Продолжая дальше влево аналогичным образом, получаем $w_0 = 0$ и приходим к противоречию. $\square$

Однозначная разрешимость вариационной и соответствующей краевой задач выводится теперь стандартным образом. Надо перейти к однородным краевым условиям (это делается заменой неизвестной функции) и воспользоваться оценкой (1.76).

Теорема 1.3.8 *Пусть* $|a| \neq q^{-1/2}$. *Тогда задача* (1.10), (1.11) *имеет единственное обобщённое решение* $y \in V_T^1$.

Доказательство. Напомним, что искомая функция y удовлетворяет при всех $v \in \overset{\circ}{V}{}_T^1$ интегральному тождеству (1.9), которое коротко может быть записано как $B(y, v) = 0$. Введём функцию

$$\Phi(t) = \begin{cases} y_0(\frac{t}{T} - 1)^2 & (0 \leqslant t \leqslant T), \\ 0 & (t > T). \end{cases}$$

Очевидно, $\Phi \in V_T^2$ и $\Phi(0) = y_0$. Положим $x = y - \Phi \in \overset{\circ}{V}{}_T^1$. Интегральное тождество примет вид

$$B(\Phi, v) + B(x, v) = 0. \tag{1.80}$$

Но $B(x, x) = J(x)$, а тогда по лемме 1.3.6 непрерывная симметрическая билинейная форма $B(x, v)$ задаёт на $\overset{\circ}{V}{}_T^1 = \overset{\circ}{W}{}_2^1(0, T)$ эквивалентное скалярное произведение: $B(x, v) = (x, v)'_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,T)}$.

Легко видеть, что $|B(\Phi, v)| \leqslant k_1 |y_0| \|v\|_{W_2^1(0,T)} \leqslant k_2 |y_0| \|v\|'_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,T)}$. Следовательно, по теореме Рисса существует единственная функция $F \in \overset{\circ}{V}{}_T^1$ такая, что

$$B(\Phi, v) = (F, v)'_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,T)}, \quad \|F\|'_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,T)} \leqslant k_2 |y_0|.$$

Теперь (1.80) можно переписать в виде

$$(x, v)'_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,T)} + (F, v)'_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,T)} = 0,$$

откуда и получаем, что решением задачи (1.10), (1.11) будет функция $y = \Phi - F \in V_T^1$. $\square$

Конечно, исследовать существование и единственность решения краевой задачи (1.10), (1.11), рассматривая её отдельно от задачи (1.8), (1.6), т.е. игнорируя её вариационную природу, было бы затруднительно из-за наличия громоздких младших членов. Но если $b = c = 0$, то однозначная разрешимость задачи (1.10), (1.11) при $|a| \neq q^{-1/2}$ непосредственно следует из теоремы 1.3.3. Действительно, после описанной выше замены $y = \Phi + x$, относительно x получается задача вида (1.67), (1.68) с правой частью из $L_2(0,T)$ (поскольку $\Phi \in V_T^2$) и оператором $R = (1 + a^2 q)I + aP + aqP^{-1}$, причём корни $\lambda_1 = -aq$ и $\lambda_2 = -1/a$ символа $r(\lambda) = 1 + a^2 q + a\lambda + aq\lambda^{-1}$ таковы, что всегда один из них по абсолютной величине больше, а другой меньше, чем $\sqrt{q}$.

Кроме того, опираясь на результаты пунктов 1.3.1–1.3.3, легко выписать в этом случае решение задачи (1.10), (1.11) в явном виде. Проинтегрировав (1.10) один раз, получаем

$$\left[(1 + a^2 q)I + aP + aqP^{-1}\right] y' = c_1 = const \quad (0 < t < T). \tag{1.81}$$

Воспользуемся разложением

$$(1 + a^2 q)I + aP + aqP^{-1} = a(P + aqI)(P + \frac{1}{a}I)P^{-1}.$$

Предположим вначале, что $|a| > q^{-1/2}$. Тогда $|aq| > q^{1/2}$, в то время как $|1/a| < q^{1/2}$. Из леммы 1.3.2 и формулы (1.58) следует, что (1.81) равносильно соотношению

$$(P + \frac{1}{a}I)P^{-1}y' = c_2 = const \quad (0 < t < T).$$

Учитывая тот факт, что $y'(t) = 0$ при $t > T$, последнее равенство можно переписать в виде

$$(P + \frac{1}{a}I)P^{-1}y' = c_2 h_T(t) \quad (t > 0), \tag{1.82}$$

где $h_T(t) = 1$ для $t < T$ и $h_T(t) = 0$ для $t > T$. Обращая оператор при y' в соответствии с формулой (1.59), получаем

$$y'(t) = c_2 \sum_{m=0}^{\infty} (-a)^{-m} h_T(q^m t) \quad (t > 0)$$

и

$$y(t) = y_0 + c_2 \int\limits_0^t \sum_{m=0}^{\infty} (-a)^{-m} h_T(q^m s)\, ds = y_0 + c_2 \sum_{m=0}^{\infty} (-a)^{-m} \min(t, q^{-m}T).$$

Постоянная c_2 находится из условия $y(T) = 0$:

$$c_2 = -y_0 \left(\sum_{m=0}^{\infty} (-aq)^{-m} T \right)^{-1} = -\frac{y_0(aq+1)}{aqT}.$$

Окончательно

$$y(t) = y_0 \left(1 - \frac{aq+1}{aqT} \sum_{m=0}^{\infty} (-a)^{-m} \min(t, q^{-m}T) \right). \tag{1.83}$$

Соответственно, управление

$$u(t) = -\frac{y_0(aq+1)}{aqT} \sum_{m=0}^{\infty} (-a)^{-m} [h_T(q^m t) + a h_T(q^{m-1} t)]. \tag{1.84}$$

В случае $|a| < q^{-1/2}$, который рассматривается совершенно аналогично, будем иметь

$$y(t) = y_0 \left(1 - \frac{a+1}{T} \sum_{m=0}^{\infty} (-aq)^{m} \min(t, q^{-m}T) \right), \tag{1.85}$$

$$u(t) = -\frac{y_0(a+1)}{T} \sum_{m=0}^{\infty} (-aq)^{m} [h_T(q^m t) + a h_T(q^{m-1} t)]. \tag{1.86}$$

Нетрудно увидеть, что формулы (1.83), (1.84) и (1.85), (1.86) задают кусочно-линейную траекторию и кусочно-постоянное управление с особенностями в точках $q^{-i}T$ $(i = 0, 1, \ldots)$. Таким образом, обобщённое решение не принадлежит $W_2^2(0, T)$.

Примечания

Постановки краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом в старших производных и первые результаты в теории обобщённых решений таких задач опубликованы в работе [10].

Теории вариационных задач для функционалов с отклоняющимся аргументом и связанных с ними краевых задач посвящены работы [9, 48]. К задаче на экстремум функционала с отклоняющимся аргументом сводится, например, задача об успокоении системы с запаздыванием, изучавшаяся Н.Н. Красовским [15]. Для системы, содержащей отклонения аргумента под знаком производной, аналогичная задача рассматривалась также в [22, 34].

Результаты пункта 1.2.1 носят вспомогательный характер и используются в исследовании разрешимости и спектра краевых задач для дифференциально-разностных уравнений (см. 1.2.3). С другой стороны, методы, изложенные в 1.2.1, имеют ряд важных приложений для уравнений с частными производными; они впервые были применены при исследовании эллиптических уравнений с нелокальными краевыми условиями и краевых задач для эллиптических дифференциально-разностных уравнений (см., например, [31]).

При описании в пунктах 1.2.2, 1.2.3 свойств разностных операторов и спектральных свойств краевых задач для дифференциально-разностных уравнений применены методы, предложенные в работах [31, 32]. Связь между обобщёнными и гладкими решениями краевых задач для дифференциально-разностных уравнений изучалась в статье [11]. Систематизированное изложение соответствующего материала можно найти в монографии [59, глава 1]. В [46] задача (1.35), (1.36) исследовалась без предположения о невырожденности матрицы $\mathbf{R}_2$.

Функционально-дифференциальные уравнения с линейным преобразованием аргумента в одномерном случае рассматривались многими авторами (см. [41, 44, 47, 50, 51]). Содержание пунктов 1.3.1, 1.3.2, 1.3.3, посвящённых краевой задаче для уравнения с растяжениями и сжатиями аргумента, опирается на работу [56]. Первый результат подобного сорта был получен в [16]. Приложение к теории управления (пункт 1.3.4) рассматривалось в [22].

Упражнения

1. Разностный оператор определён выражением

$$Ry(t) = \frac{3}{4}y(t) + y(t-1).$$

Будет ли оператор $R + R^*$ положительным в $L_2(\mathbb{R})$; $L_2(0,2)$; $L_2(0,3)$?

2. Решить краевую задачу

$$-(Ry)'' + 2(Ry)' = 1 \quad (t \in (0,2)),$$

$$y(t) = 0 \quad (t \notin (0,2)),$$

где $Ry(t) = 3y(t) + 2y(t-1) - 2y(t+1)$.

3. Решить краевую задачу

$$-(Ry)'' = t \quad (t \in (0,3)),$$

$$y(t) = 0 \quad (t \notin (0,3)),$$

где $Ry(t) = 2y(t) + y(t-1) + y(t+2)$.

4. При каких значениях параметров $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $q > 1$ оператор

$$R : L_2(\mathbb{R}_+) \to L_2(\mathbb{R}_+),$$

$$Ry(t) = y(t) + \alpha y(t/q) + \beta y(qt),$$

самосопряжённый; положительно определённый?

5. Решить краевую задачу

$$\big(-y'(t) + (i/2)y'(t/3)\big)' = t \quad (t \in (0,1)),$$

$$y(0) = y(1) = 0.$$

Здесь и далее в упражнениях $i = \sqrt{-1}$.

6. Найти необходимые и достаточные условия на функцию $f \in L_2(0,2)$, при которых обобщённое решение задачи

$$-\left(y'(t) + ay'(t-1) + ay'(t+1)\right)' = f(t) \quad (t \in (0,2)),$$

$$y(t) = 0 \quad (t \notin (0,2))$$

принадлежит $W_2^2(0,2)$.

7. Найти минимум функционала

$$J(y) = \int\limits_0^2 \left[y'(t) + y'(t/2)\right]^2 \, dt$$

на множестве функций $y \in V_1^1$, удовлетворяющих начальному условию $y(0) = 1$.

8. Исследовать разрешимость краевой задачи

$$-\big(4(1-i)y'(t) + (i-4)y'(t/2) + 4iy'(2t) + y'(t/4)\big)' = f(t) \quad (0 < t < 2),$$

$$y(0) = 0, \quad y(t) = 0 \ (t \geqslant 2),$$

при $f \in L_2(0,2)$.

9. Исследовать разрешимость краевой задачи

$$-\big(4(1-i)y'(t) + (i-4)y'(t/5) + 4iy'(5t) + y'(t/25)\big)' = f(t) \quad (0 < t < 5),$$

$$y(0) = 0, \quad y(t) = 0 \ (t \geqslant 5),$$

при $f \in L_2(0,5)$.

Глава 2

Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений

2.1 Сильно эллиптические дифференциальные уравнения и системы уравнений с частными производными

В ограниченной области Q пространства $\mathbb{R}^n$ рассмотрим дифференциальный оператор второго порядка

$$Au = -\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)u_{x_i} + a_0(x)u$$

с гладкими в $\overline{Q}$ комплекснозначными коэффициентами $a_{ij}(x)$ (коэффициенты $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$ в данном случае особой роли играть не будут; можно считать их измеримыми ограниченными). Символом оператора A, а точнее, его старшей части, называется выражение

$$a(x,\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \quad (x \in \overline{Q},\ \xi \in \mathbb{R}^n).$$

Напомним, что оператор A называется эллиптическим, если

$$a(x,\xi) \neq 0 \quad (x \in \overline{Q},\ 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n). \tag{2.1}$$

Если же

$$\operatorname{Re} a(x,\xi) > 0 \quad (x \in \overline{Q},\ 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n), \tag{2.2}$$

то оператор A называют сильно эллиптическим.

Очевидно, что из (2.2) следует (2.1), т.е. всякий сильно эллиптический оператор будет эллиптическим. Обратное неверно: оператор в плоской области, заданный выражением $u_{x_1x_1} + 2iu_{x_1x_2} - u_{x_2x_2}$, является эллиптическим, но не сильно эллиптическим. Действительно, $\xi_1^2 - \xi_2^2 + 2i\xi_1\xi_2 \neq 0$ при $\xi_1^2 + \xi_2^2 \neq 0$, в то время как выражение $\xi_1^2 - \xi_2^2$ обращается в ноль на прямых $\xi_1 = \pm\xi_2$.

С другой стороны, если символ оператора A вещественный (например, $a_{ji} = \overline{a}_{ij}$), то из (2.1) следует (2.2): непрерывная вещественная функция $a(x,\xi)$, не обращаясь в ноль на связном множестве $\overline{Q} \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, знакопостоянна, и её без ограничения общности можно считать положительной.

Замечание 2.1.1 Рассмотрим функцию $\operatorname{Re} a(x,\xi)/|\xi|^2$ на связном компакте $\overline{Q} \times S^{n-1}$ (здесь S^{n-1} — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$). Она непрерывна и достигает своей нижней грани m. Если имеет место (2.2), то $m > 0$ и на указанном компакте выполнена оценка $\operatorname{Re} a(x,\xi) \geqslant m|\xi|^2$. Последнее неравенство с учётом однородности продолжается по ξ на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Для $\xi = 0$ оно также верно. Таким образом, условие (2.2) может быть записано в виде

$$\operatorname{Re} a(x,\xi) \geqslant m|\xi|^2 \quad (x \in \overline{Q},\ \xi \in \mathbb{R}^n). \tag{2.3}$$

Замечание 2.1.2 Тот факт, что накладывается условие положительности действительной части символа, для нас не является принципиальным, поскольку оператор может быть умножен на произвольное отличное от нуля комплексное число, например, на -1 или i.

В то время как эллиптичность оператора A обеспечивает фредгольмову разрешимость, более тонкое условие сильной эллиптичности связано с такими свойствами, как, например, дискретность и полуограниченность спектра задачи Дирихле для уравнения $Au = f$. Ключевую роль здесь играет оценка

$$\mathrm{Re}\,(Au, u)_{L_2(Q)} \geqslant c_1 \|u\|^2_{W_2^1(Q)} - c_2 \|u\|^2_{L_2(Q)}. \tag{2.4}$$

Требуется, чтобы это неравенство выполнялось для всех функций u из $C_0^\infty(Q)$; постоянные $c_1 > 0$ и c_2 не зависят от u. Обычно (2.4) называют неравенством Гординга. Вопрос о выполнении неравенства (2.4) естественно ставить и для функционально-дифференциальных операторов. Задача Дирихле для уравнения $Au = f$ с оператором A, удовлетворяющим (2.4), называется коэрцитивной. Нахождение необходимых и достаточных условий выполнения неравенства Гординга в алгебраической форме, т.е. в терминах коэффициентов оператора, называется проблемой коэрцитивности. Для дифференциальных уравнений (с обобщением на системы и высокий порядок) эта проблема была решена в [6, 45] (см. также [40, 43]). Учитывая ту роль, которую оценка (2.4) играет в настоящей главе, приведём соответствующее утверждение с доказательством.

Теорема 2.1.1 *Дифференциальный оператор A удовлетворяет неравенству Гординга тогда и только тогда, когда он сильно эллиптический. Другими словами,*

$$(2.2) \Longleftrightarrow (2.4).$$

Доказательство. В скалярном произведении $(Au, u)_{L_2(Q)}$ рассмотрим вначале слагаемые, входящие в младшую часть уравнения. Используя неравенство Коши – Буняковского и условия, наложенные на коэффициенты, будем иметь

$$\left| \left(\sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} + a_0 u, u \right)_{L_2(Q)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \sup_{x \in Q} |a_i(x)| \cdot \|u_{x_i}\|_{L_2(Q)} + \sup_{x \in Q} |a_0(x)| \cdot \|u\|_{L_2(Q)} \right) \|u\|_{L_2(Q)} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=0}^{n} \sup_{x \in Q} |a_i(x)|^2 \right)^{1/2} \|u\|_{W_2^1(Q)} \|u\|_{L_2(Q)} \leqslant M \left(\delta \|u\|^2_{W_2^1(Q)} + \frac{1}{\delta} \|u\|^2_{L_2(Q)} \right).$$

Напомним, что $\|u\|^2_{W_2^1(Q)} = \sum\limits_{i=1}^{n} \|u_{x_i}\|^2_{L_2(Q)} + \|u\|^2_{L_2(Q)}$. Учитывая произвол в выборе $\delta > 0$, видим, что младшие члены уравнения влияют лишь на конкретные значения констант c_1 и c_2 в неравенстве Гординга. Поэтому далее без ограничения общности считаем, что оператор A однородный второго порядка.

Докажем импликацию (2.2) $\Longrightarrow$ (2.4), или, что то же самое, (2.3) $\Longrightarrow$ (2.4). Предположим вначале, что коэффициенты в операторе A постоянные. В силу финитности функции u, интегрируя в левой части (2.4) по частям и применяя теорему Планшереля для преобразования Фурье, будем иметь

$$\operatorname{Re}(Au, u)_{L_2(Q)} = \operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{Q} a_{ij} u_{x_i} \overline{u}_{x_j} \, dx = \operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} a_{ij} u_{x_i} \overline{u}_{x_j} \, dx =$$

$$= \operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} a_{ij} \tilde{u}(\xi) i\xi_i \overline{\tilde{u}(\xi) i\xi_j} \, d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \operatorname{Re} a(x, \xi) |\tilde{u}(\xi)|^2 \, d\xi \geqslant$$

$$\geqslant m \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 |\tilde{u}(\xi)|^2 \, d\xi = m \int\limits_{Q} |\nabla u(x)|^2 \, dx \geqslant c_1 \|u\|^2_{W_2^1(Q)}.$$

Таким образом, сильно эллиптический однородный оператор с постоянными коэффициентами удовлетворяет неравенству Гординга, причём с константой $c_2 = 0$.

Для доказательства в случае переменных коэффициентов применяется принцип локализации, основанный на разбиении единицы и «замораживании» коэффициентов. Воспользовавшись непрерывностью функций $a_{ij}(x)$, для каждой точки $x \in \overline{Q}$ зафиксируем окрестность $\mathcal{O}(x)$ такую, что

$$|a_{ij}(x) - a_{ij}(y)| < \varepsilon \quad (y \in \mathcal{O}(x) \cap Q;\ i, j = 1, \dots, n).$$

Число $\varepsilon > 0$ будет выбрано позднее.

Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^N$ — разбиение единицы, подчинённое покрытию $\overline{Q}$ открытыми множествами $\{\mathcal{O}(x) : x \in \overline{Q}\}$. Это означает, что

$$\varphi_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \operatorname{supp} \varphi_k \subset \mathcal{O}(x_k) \text{ для некоторого } x_k \in \overline{Q},$$

$$\varphi_k(x) \geqslant 0, \quad \sum_{k=1}^N \varphi_k^2(x) \leqslant 1 \quad (x \in \mathbb{R}^n),$$

$$\sum_{k=1}^N \varphi_k^2(x) \equiv 1 \quad (x \in \overline{Q}).$$

Для всякой функции $u \in C_0^\infty(Q)$ в интеграле $(Au, u)_{L_2(Q)}$ проинтегрируем по частям и, используя последнее свойство функций $\varphi_k(x)$, а также формулу Лейбница, получим

$$(Au, u)_{L_2(Q)} = \sum_{i,j=1}^n \int\limits_Q a_{ij} u_{x_i} \overline{u}_{x_j}\, dx =$$

$$= \sum_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^N \int\limits_Q a_{ij} \varphi_k u_{x_i} \varphi_k \overline{u}_{x_j}\, dx = \sum_{k=1}^N \sum_{i,j=1}^n \int\limits_Q a_{ij}(x) (\varphi_k u)_{x_i} \overline{(\varphi_k u)}_{x_j}\, dx -$$

$$- \sum_{k=1}^N \sum_{i,j=1}^n \int\limits_Q a_{ij}(x) \left[\varphi_k \varphi_{k x_i} u \overline{u}_{x_j} + \varphi_k \varphi_{k x_j} u_{x_i} \overline{u} + \varphi_{k x_i} \varphi_{k x_j} |u|^2\right] dx. \qquad (2.5)$$

Заметим, что носитель каждой из функций $(\varphi_k u)(x)$ сосредоточен в соответствующей окрестности $\mathcal{O}(x_k) \cap Q$.

«Замораживание» коэффициентов состоит в том, что каждый интеграл

$$\int\limits_Q a_{ij}(x) (\varphi_k u)_{x_i} \overline{(\varphi_k u)}_{x_j}\, dx = \int\limits_{\mathcal{O}(x_k) \cap Q} a_{ij}(x) (\varphi_k u)_{x_i} \overline{(\varphi_k u)}_{x_j}\, dx$$

разбивается в сумму

$$\int\limits_{\mathcal{O}(x_k) \cap Q} a_{ij}(x_k) (\varphi_k u)_{x_i} \overline{(\varphi_k u)}_{x_j}\, dx + \int\limits_{\mathcal{O}(x_k) \cap Q} [a_{ij}(x) - a_{ij}(x_k)] (\varphi_k u)_{x_i} \overline{(\varphi_k u)}_{x_j}\, dx.$$

Суммируя по всем $i, j = 1, \ldots, n$ первые слагаемые этого выражения, на основании уже доказанного в случае постоянных коэффициентов будем иметь

$$\operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{Q} a_{ij}(x_k)(\varphi_k u)_{x_i} \overline{(\varphi_k u)}_{x_j}\, dx \geqslant m \int\limits_{Q} |\nabla(\varphi_k u)|^2\, dx$$

для каждого $k = 1, \ldots, N$. Вторые слагаемые оцениваются следующим образом:

$$\left| \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\mathcal{O}(x_k)\cap Q} [a_{ij}(x) - a_{ij}(x_k)](\varphi_k u)_{x_i} \overline{(\varphi_k u)}_{x_j}\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \sum_{i,j=1}^{n} \|(\varphi_k u)_{x_i}\|_{L_2(Q)} \left\|(\varphi_k u)_{x_j}\right\|_{L_2(Q)} \leqslant \varepsilon n \int\limits_{Q} |\nabla(\varphi_k u)|^2\, dx.$$

Выбирая $\varepsilon < m/2n$, мы фиксируем разбиение единицы $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{N}$ и получаем

$$\operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{Q} a_{ij}(x)(\varphi_k u)_{x_i} \overline{(\varphi_k u)}_{x_j}\, dx \geqslant \frac{m}{2} \int\limits_{Q} |\nabla(\varphi_k u)|^2\, dx =$$

$$= \frac{m}{2} \int\limits_{Q} \varphi_k^2 |\nabla u|^2\, dx + \frac{m}{2} \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{Q} [\varphi_k \varphi_{kx_i}(u_{x_i}\overline{u} + u\overline{u}_{x_i}) + \varphi_{kx_i}^2 |u|^2]\, dx \qquad (2.6)$$

для всех $k = 1, \ldots, N$. Суммируя в (2.6) по k от 1 до N и комбинируя с (2.5), будем иметь

$$\mathrm{Re}\,(Au,u)_{L_2(Q)} \geqslant \frac{m}{2}\int\limits_Q |\nabla u|^2\,dx +$$

$$+\frac{m}{2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_Q [\varphi_k\varphi_{kx_i}(u_{x_i}\overline{u}+u\overline{u}_{x_i})+\varphi_{kx_i}^2|u|^2]\,dx-$$

$$-\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{N}\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_Q a_{ij}(x)\left[\varphi_k\varphi_{kx_i}u\overline{u}_{x_j}+\varphi_k\varphi_{kx_j}u_{x_i}\overline{u}+\varphi_{kx_i}\varphi_{kx_j}|u|^2\right]\,dx.$$

В правой части полученного неравенства во всех слагаемых, кроме первого, производные функции u присутствуют в степени не выше первой. Эти слагаемые оцениваются аналогично предыдущему выражением вида $M\|u\|_{W_2^1(Q)}\|u\|_{L_2(Q)}$ с постоянной M, зависящей от величины коэффициентов уравнения, функций из разбиения единицы и их производных. Таким образом,

$$\mathrm{Re}\,(Au,u)_{L_2(Q)} \geqslant \frac{m}{2}\|u\|^2_{W_2^1(Q)} - M\|u\|_{W_2^1(Q)}\|u\|_{L_2(Q)} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{m}{2}\|u\|^2_{W_2^1(Q)} - M\left(\delta\|u\|^2_{W_2^1(Q)}+\frac{1}{\delta}\|u\|^2_{L_2(Q)}\right).$$

Взяв $\delta>0$ достаточно малым, получаем (2.4).

Теперь докажем импликацию (2.4) $\Longrightarrow$ (2.2). Возьмём точку $x_0\in Q$ и рассмотрим такую её шаровую окрестность $B_h(x_0)\subset Q$, что

$$|a_{ij}(x)-a_{ij}(x_0)|<\varepsilon \quad (x\in B_h(x_0);\ i,j=1,\ldots,n).$$

В неравенстве (2.4) будем брать функции u, носитель которых содержится в $B_h(x_0)$. Для таких функций имеем

$$\mathrm{Re}\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{|x-x_0|<h} a_{ij}(x_0)u_{x_i}\overline{u}_{x_j}\,dx + \mathrm{Re}\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{|x-x_0|<h}[a_{ij}(x)-a_{ij}(x_0)]u_{x_i}\overline{u}_{x_j}\,dx \geqslant$$

$$\geqslant c_1\int\limits_{|x-x_0|<h}|\nabla u|^2\,dx - (c_1+c_2)\int\limits_{|x-x_0|<h}|u|^2\,dx.$$

Второе слагаемое в левой части не превосходит $\varepsilon n \int\limits_{|x-x_0|<h} |\nabla u|^2\,dx$. Фиксируя $\varepsilon < c_1/2n$ (тем самым фиксируется и окрестность $B_h(x_0)$), будем иметь

$$\operatorname{Re}\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{|x-x_0|<h} a_{ij}(x_0)u_{x_i}\overline{u}_{x_j}\,dx \geqslant c_3\int\limits_{|x-x_0|<h}|\nabla u|^2\,dx - c_4\int\limits_{|x-x_0|<h}|u|^2\,dx, \tag{2.7}$$

где u — произвольная функция из $C_0^\infty(B_h(x_0))$.

Пусть $t \geqslant 1$. Рассмотрим замену переменных $y = t(x-x_0)$, отображающую шар $B_h(x_0)$ на шар $B_{th}(0)$. Пространство $C_0^\infty(B_h(x_0))$ функций $u(x)$ перейдёт в пространство $C_0^\infty(B_{th}(0))$ функций $v(y) = u(x_0 + y/t)$. При этом $u_{x_i}(x) = tv_{y_i}(y)$ и $dx = t^{-n}dy$. Переходя к новой переменной y в интегралах в неравенстве (2.7), получим

$$\operatorname{Re}\sum_{i,j=1}^{n} t^{2-n}\int\limits_{|y|<th} a_{ij}(x_0)v_{y_i}\overline{v}_{y_j}\,dy \geqslant c_3 t^{2-n}\int\limits_{|y|<th}|\nabla v|^2\,dy - c_4 t^{-n}\int\limits_{|y|<th}|v|^2\,dy$$

или

$$\operatorname{Re}\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{|y|<th} a_{ij}(x_0)v_{y_i}\overline{v}_{y_j}\,dy \geqslant c_3\int\limits_{|y|<th}|\nabla v|^2\,dy - c_4 t^{-2}\int\limits_{|y|<th}|v|^2\,dy,$$

где v — произвольная функция из $C_0^\infty(B_{th}(0))$. Поскольку $t \geqslant 1$ можно брать любым, приходим к неравенству

$$\operatorname{Re}\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} a_{ij}(x_0)v_{y_i}\overline{v}_{y_j}\,dy \geqslant c_3\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\nabla v|^2\,dy - c_4\int\limits_{\mathbb{R}^n}|v|^2\,dy,$$

которое выполняется для всех $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Применяя теорему Планшереля, будем иметь

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(\operatorname{Re} a(x_0,\xi) + c_4 - c_3|\xi|^2\right)|\tilde{v}(\xi)|^2\,d\xi \geqslant 0. \tag{2.8}$$

Здесь $\tilde{v}(\xi)$ — преобразование Фурье функции $v(x)$ — пробегает всюду плотное множество в $L_2(\mathbb{R}^n)$.

Замечание 2.1.3 Отметим, что $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ плотно в $W_2^1(\mathbb{R}^n)$ (в отличие от случая ограниченной области). Убедимся в этом. Введём срезающую функцию

$$\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad 0 \leqslant \zeta \leqslant 1, \quad \zeta(x) = 1 \text{ при } |x| < 1, \quad \zeta(x) = 0 \text{ при } |x| > 2,$$

и для $R > 0$ положим $\zeta_R(x) = \zeta(x/R)$. Для всякой функции $g \in W_2^1(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим принадлежащую $W_2^1(\mathbb{R}^n)$ финитную функцию $g_R = \zeta_R g$. Имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |g - g_R|^2\,dx = \int\limits_{|x|>R} (1-\zeta_R)^2|g|^2\,dx \leqslant \int\limits_{|x|>R} |g|^2\,dx \longrightarrow 0, \quad R \to \infty.$$

Также

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla(g - g_R)|^2\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |(1-\zeta_R)\nabla g - g\nabla\zeta_R|^2\,dx \leqslant$$

$$\leqslant 2\int\limits_{|x|>R} |(1-\zeta_R)\nabla g|^2\,dx + 2\int\limits_{R<|x|<2R} |g\nabla\zeta_R|^2\,dx \leqslant$$

$$\leqslant 2\int\limits_{|x|>R} |\nabla g|^2\,dx + \frac{2\max|\nabla\zeta|}{R}\int\limits_{R<|x|<2R} |g|^2\,dx \longrightarrow 0, \quad R \to \infty.$$

Получили, что всякая функция g из $W_2^1(\mathbb{R}^n)$ аппроксимируется в $W_2^1(\mathbb{R}^n)$ семейством финитных функций g_R. Остаётся перейти к усреднённым функциям $(g_R)_\rho(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g_R(y)\omega_\rho(|x-y|)\,dy$, $\rho > 0$. Здесь $\omega_\rho(|x-y|)$ — некоторое ядро усреднения.

Поскольку преобразование Фурье отображает пространство $W_2^1(\mathbb{R}^n)$ изоморфно на $L_2(\mathbb{R}^n, d\mu)$, где $d\mu(\xi) = (1+|\xi|^2)d\xi$, множество преобразований Фурье гладких финитных функций оказывается всюду плотным и в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n, d\mu)$. Но это означает, что неравенство (2.8) распространяется на всё $L_2(\mathbb{R}^n, d\mu)$. Так что в качестве $\tilde v(\xi)$ теперь можно брать характеристическую функцию любого шара $B_\delta(\xi_0)$. Получаем

$$\int\limits_{|\xi-\xi_0|<\delta} \left(\operatorname{Re} a(x_0,\xi) + c_4 - c_3|\xi|^2\right)\,d\xi \geqslant 0,$$

откуда в силу непрерывности подынтегральной функции вытекает, что $\operatorname{Re} a(x_0, \xi_0) + c_4 - c_3|\xi_0|^2 \geqslant 0$. Итак,

$$\operatorname{Re} a(x_0, \xi) \geqslant c_3|\xi|^2 - c_4 \quad (\xi \in \mathbb{R}^n).$$

На множестве $|\xi|^2 \geqslant 2c_4/c_3$ будем иметь $\operatorname{Re} a(x_0, \xi) \geqslant (c_3/2)|\xi|^2$. Но из однородности обеих частей этого неравенства по ξ вытекает его справедливость во всём $\mathbb{R}^n$. Кроме того, из доказательства хорошо видно, что постоянная в этом неравенстве не зависит от $x \in Q$. С учётом непрерывности коэффициентов в $\overline{Q}$ это даёт (2.3). Теорема доказана. $\square$

Теорема 2.1.1 обобщается на случай системы N дифференциальных уравнений $2m$-го порядка от N неизвестных функций, левая часть которой имеет вид

$$\mathbf{A}U = \sum_{|\alpha|,|\beta| \leqslant m} D^\alpha \mathbf{R}_{\alpha\beta}(x) D^\beta U.$$

Здесь

$$U(x) = (u_1(x)\ u_2(x)\ \ldots\ u_N(x))^T,$$

α, β — мультииндексы, т.е.

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \quad \alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n,$$

$$D^\alpha = i^{-|\alpha|} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_n^{\alpha_n}}\,,$$

$\mathbf{R}_{\alpha\beta}(x)$ — матрицы порядка $N \times N$. Элементы матриц — комплекснозначные функции из $C^m(\overline{Q})$. Матричный оператор $\mathbf{A}$ называется эллиптическим, если

$$\det \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} \mathbf{R}_{\alpha\beta}(x) \xi^{\alpha+\beta} \neq 0 \quad (x \in \overline{Q},\ 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n), \tag{2.9}$$

и сильно эллиптическим, если

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|=m} (\mathbf{R}_{\alpha\beta}(x) + \mathbf{R}^*_{\beta\alpha}(x)) \xi^{\alpha+\beta} > 0 \quad (x \in \overline{Q},\ 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n) \tag{2.10}$$

(по-прежнему важна лишь старшая часть оператора). Напомним, что $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot\xi_n^{\alpha_n}$. Условия (2.9), (2.10) соотносятся так же, как и (2.1), (2.2) (т.е. (2.10) $\Rightarrow$ (2.9), различие здесь даже более очевидно), и играют в векторной ситуации ту же роль, что и (2.1), (2.2) в скалярной. Условие (2.10) вновь может быть записано в более «сильной» форме. Рассматривая непрерывную положительную функцию

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|=m} \xi^{\alpha+\beta}((\mathbf{R}_{\alpha\beta}(x)+\mathbf{R}^*_{\beta\alpha}(x)Y,Y)$$

(скобки означают скалярное произведение в $\mathbb{C}^N$) на компакте

$$\{x\in\overline{Q}\}\times\{\xi\in\mathbb{R}^n:|\xi|=1\}\times\{Y\in\mathbb{C}^N:|Y|=1\},$$

видим, что на этом компакте выполнена оценка

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|=m} \xi^{\alpha+\beta}((\mathbf{R}_{\alpha\beta}(x)+\mathbf{R}^*_{\beta\alpha}(x)Y,Y)_{\mathbb{C}^N}\geqslant\gamma|\xi|^{2m}|Y|^2. \qquad (2.11)$$

С учётом однородности по ξ и Y она продолжается на все $\xi\in\mathbb{R}^n$ и $Y\in\mathbb{C}^N$.

Аналогично записывается и неравенство Гординга

$$\operatorname{Re}(\mathbf{A}U,U)_{L_2^N(Q)}\geqslant c_1\|U\|^2_{W_2^{m,N}(Q)}-c_2\|U\|^2_{L_2^N(Q)}\quad (U\in C_0^{\infty,N}(Q)). \quad (2.12)$$

Доказательство эквивалентности (2.10) $\Longleftrightarrow$ (2.12) по сути повторяет случай скалярного оператора второго порядка. Отметим лишь некоторые моменты. Так, после оценки младших членов выражением

$$M\|U\|_{W_2^{m,N}(Q)}\|U\|_{W_2^{m-1,N}(Q)}$$

следует применить известное интерполяционное неравенство (см. [1])

$$t\|u\|_{W_2^{m-1}(Q)}\leqslant c(\|u\|_{W_2^m(Q)}+t^m\|u\|_{L_2(Q)})\quad (u\in W_2^m(Q),\, t>0),$$

в котором постоянная $c>0$ не зависит от t и u, а зависит лишь от m и Q. Для вектор-функций тогда можно записать

$$t\|U\|_{W_2^{m-1,N}(Q)}\leqslant C\big(\|U\|_{W_2^{m,N}(Q)}+t^m\|U\|_{L_2^N(Q)}\big)\quad (U\in W_2^{m,N}(Q),\, t>0),$$

(здесь $C=\sqrt{2}c$) и

$$\|U\|_{W_2^{m,N}(Q)}\|U\|_{W_2^{m-1,N}(Q)} \leqslant Ct^{-1}\|U\|_{W_2^{m,N}(Q)}\big(\|U\|_{W_2^{m,N}(Q)}+t^m\|U\|_{L_2^N(Q)}\big) \leqslant$$
$$\leqslant Ct^{-1}\|U\|^2_{W_2^{m,N}(Q)}+Ct^{m-1}\big(t^{-m}\|U\|^2_{W_2^{m,N}(Q)}+t^m\|U\|^2_{L_2^N(Q)}\big) =$$
$$= Ct^{-1}\|U\|^2_{W_2^{m,N}(Q)}+Ct^{2m-1}\|U\|^2_{L_2^N(Q)},$$

причём t можно выбрать сколь угодно большим. Когда коэффициенты оператора постоянные, доказательство (2.10) $\Rightarrow$ (2.12) по-прежнему основано на применении преобразования Фурье, а метод локализации для переменных коэффициентов ничем не отличается от случая скалярного оператора A второго порядка. Так, при выполнении (2.11), для вектор-функции $U\in C_0^{\infty,N}(Q)$ будем иметь (суммирование по всем мультииндексам $\alpha,\beta:|\alpha|=|\beta|=m$)

$$2\mathrm{Re}\,(\mathbf{A}U,U)_{L_2^N(Q)} = 2\mathrm{Re}\sum\int\limits_Q (D^\alpha\mathbf{R}_{\alpha\beta}D^\beta U,U)\,dx =$$
$$= 2\mathrm{Re}\sum\int\limits_Q(\mathbf{R}_{\alpha\beta}D^\beta U,D^\alpha U)\,dx = \sum\int\limits_{\mathbb{R}^n}((\mathbf{R}_{\alpha\beta}+\mathbf{R}^*_{\beta\alpha})D^\beta U,D^\alpha U)\,dx =$$
$$= \sum\int\limits_{\mathbb{R}^n}((\mathbf{R}_{\alpha\beta}+\mathbf{R}^*_{\beta\alpha})\xi^\beta\tilde U,\xi^\alpha\tilde U)\,d\xi = \sum\int\limits_{\mathbb{R}^n}((\mathbf{R}_{\alpha\beta}+\mathbf{R}^*_{\beta\alpha})\xi^{\alpha+\beta}\tilde U,\tilde U)\,d\xi \geqslant$$
$$\geqslant \gamma\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\xi|^{2m}|\tilde U(\xi)|^2\,d\xi \geqslant \gamma\sum_{|\alpha|=m}\int\limits_Q|D^\alpha U|^2\,dx \geqslant 2c_1\|U\|^2_{W_2^{m,N}(Q)}$$

в силу теоремы об эквивалентных нормах в $W_2^m(Q)$ и с учётом финитности функции $U(x)$.

Наоборот, из (2.12) для всякой точки $x_0\in Q$ выводим локальную оценку

$$\sum\big(\mathbf{R}_{\alpha\beta}(x_0)+\mathbf{R}^*_{\beta\alpha}(x_0))D^\beta U,D^\alpha U\big)_{L_2^N(\mathbb{R}^n)} \geqslant c_3\|U\|^2_{W_2^{m,N}(\mathbb{R}^n)}-c_4\|U\|^2_{L_2^N(\mathbb{R}^n)}, \tag{2.13}$$

справедливую для гладких вектор-функций с носителями в шаре $B_h(x_0)$ достаточно малого радиуса h, и распространяем её на все функции из

$C_0^{\infty,N}(\mathbb{R}^n)$ аналогично предыдущему. Положив затем в неравенстве (2.13) $U(x) = u(x)Y$, где $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ — произвольная скалярная функция, а $Y \in C^N$, при помощи преобразования Фурье получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(\sum \xi^{\alpha+\beta}(\mathbf{R}_{\alpha\beta}(x_0) + \mathbf{R}^*_{\beta\alpha}(x_0))Y, Y\Big) |\tilde{u}(\xi)|^2 \, d\xi \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} (c_3|\xi|^{2m} - c_4)|Y|^2 |\tilde{u}(\xi)|^2 \, d\xi.$$

В силу плотности образов Фурье $\tilde{u}(\xi)$ финитных бесконечно дифференцируемых функций в $L_2(\mathbb{R}^n, d\mu)$, где $d\mu(\xi) = (1 + |\xi|^2)^m d\xi$, выводим из последнего неравенства, что

$$\Big(\sum \xi^{\alpha+\beta}(\mathbf{R}_{\alpha\beta}(x_0) + \mathbf{R}^*_{\beta\alpha}(x_0))Y, Y\Big) \geqslant (c_3|\xi|^{2m} - c_4)|Y|^2$$

для всех $\xi \in \mathbb{R}^n, Y \in \mathbb{C}^N$. Это, в свою очередь, даёт (2.11) с $\gamma = c_3/2$.

В следующем разделе, на примере сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений будет показано, как неравенство Гординга используется при доказательстве спектральных свойств задачи Дирихле.

2.2 Первая краевая задача для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения

2.2.1 Разностные операторы в ограниченных областях пространства $\mathbb{R}^n$

Вначале рассмотрим некоторые геометрические вопросы, связанные как с разностным оператором R, так и с самой областью Q, в которой этот оператор действует.

В этом разделе мы предполагаем всюду, что $Q \subset \mathbb{R}^n$ есть ограниченная область с гладкой границей или цилиндр $(0, d) \times G$, где G — ограниченная область в $\mathbb{R}^{n-1}$ (с гладкой границей в случае $n \geqslant 3$).

Пусть $T \subset \mathbb{R}^n$ — множество, состоящее из конечного числа векторов с целочисленными координатами. Обозначим через M аддитивную абелеву группу, порождённую множеством T, а через Q_r — открытые связные компоненты множества $Q \setminus \bigcup\limits_{h \in M} (\partial Q + h)$. Множества Q_r будем называть подобластями, а совокупность $\mathcal{R}$ всевозможных подобластей Q_r — разбиением области Q. Конечно, семейство $\mathcal{R}$ не более чем счётно. Кроме того, выполнены следующие очевидные соотношения

$$\bigcup_r \partial Q_r = \bigcup_{h \in M} (\partial Q + h) \cap \overline{Q}, \quad \bigcup_r \overline{Q}_r = \overline{Q}.$$

Лемма 2.2.1 *Для любых Q_{r_1} и $h_1 \in M$ либо найдётся подобласть Q_{r_2} разбиения такая, что $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h_1$, либо $Q_{r_1} + h_1 \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{Q}$.*

Доказательство. Докажем вначале, что для любых Q_{r_1} и $h_1 \in M$ либо $Q_{r_1} + h_1 \subset Q$, либо $Q_{r_1} + h_1 \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{Q}$. Предположим противное: существуют Q_{r_1} и $h_1 \in M$ такие, что множество $Q_{r_1} + h_1$ имеет непустое пересечение как с областью Q, так и с её дополнением. Тогда в силу связности множества $Q_{r_1} + h_1$ существует точка $z \in (Q_{r_1} + h_1) \cap \partial Q$. Следовательно, $z - h_1 \in Q_{r_1} \cap (\partial Q - h_1)$, что противоречит определению множества Q_{r_1}.

Докажем теперь, что если $Q_{r_1} + h_1 \subset Q$, то $Q_{r_1} + h_1 = Q_{r_2}$ для некоторой подобласти Q_{r_2}. Предположим противное: для Q_{r_2} одновременно выполнены соотношения

$$Q_{r_2} \cap (Q_{r_1} + h_1) \neq \varnothing \quad \text{и} \quad Q_{r_2} \bigtriangleup (Q_{r_1} + h_1) \neq \varnothing.$$

Будем считать, для определённости, что $Q_{r_2} \setminus (Q_{r_1} + h_1) \neq \varnothing$. В силу своей связности Q_{r_2} имеет непустое пересечение с $\partial Q_{r_1} + h_1 \subset \bigcup\limits_{h \in M} (\partial Q + h) \cap \overline{Q}$. Вновь получили противоречие с определением множеств Q_r. $\square$

Разбиение $\mathcal{R}$ естественным образом распадается на классы: будем считать, что подобласти $Q_{r_1}, Q_{r_2} \in \mathcal{R}$ принадлежат одному и тому же классу, если существует вектор $h \in M$, для которого $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$. Обозначим подобласти Q_r через Q_{sl}, где s — номер класса, а l — порядковый номер данной подобласти в s-м классе. Вектор h такой, что $Q_{s1} + h = Q_{sl}$, обозначим h_{sl} ($h_{s1} = 0$). Очевидно, что каждый класс состоит из конечного числа $N = N(s)$ подобластей Q_{sl}, причём $N(s) \leqslant ([\operatorname{diam} Q] + 1)^n$. Количество же классов может оказаться достаточно большим даже в самых простейших ситуациях.

Пример 2.2.1 Пусть

$$Q = \left\{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1\right\} \subset \mathbb{R}^2, \quad T = \{(1,0),(0,1)\}.$$

Тогда $M = \mathbb{Z}^2$. Нетрудно видеть, что в этом случае имеется 7 классов подобластей. Первый класс состоит из 4 подобластей:

$$Q_{11} = Q \cap (Q + (0,1)) \cap (Q + (1,0)) \cap (Q + (1,1)),$$

$$Q_{12} = Q_{11} + (-1,0), \quad Q_{13} = Q_{11} + (-1,-1), \quad Q_{14} = Q_{11} + (0,-1).$$

Далее, имеем 4 класса по 3 области в каждом:

$$Q_{21} = Q \cap (Q + (1,1)) \setminus (Q + (1,0)),$$

$$Q_{22} = Q_{21} + (-1,-1), \quad Q_{23} = Q_{21} + (0,-1);$$

$$Q_{31} = Q \cap (Q + (1,1)) \setminus (Q + (0,1)),$$

$$Q_{32} = Q_{31} + (-1,0), \quad Q_{33} = Q_{31} + (-1,-1);$$

$$Q_{41} = Q \cap (Q + (-1,1)) \setminus (Q + (-1,0)),$$

$$Q_{42} = Q_{41} + (0,-1), \quad Q_{43} = Q_{41} + (1,-1);$$

$$Q_{51} = Q \cap (Q + (-1,1)) \setminus (Q + (0,1)),$$

$$Q_{52} = Q_{51} + (1,-1), \quad Q_{53} = Q_{51} + (1,0).$$

Наконец, остаются

$$Q_{61} = Q \cap (Q + (1,0)) \setminus [(Q + (0,1)) \cup (Q + (1,1)) \cup (Q + (0,-1)) \cup (Q + (1,-1))],$$

$$Q_{62} = Q_{61} + (-1,0);$$

$$Q_{71} = Q \cap (Q+(0,1)) \setminus [(Q+(1,0)) \cup (Q+(1,1)) \cup (Q+(-1,0)) \cup (Q+(-1,1))],$$

$$Q_{72} = Q_{71} + (0,-1).$$

В следующем примере число классов счётно.

Пример 2.2.2

$$Q = \left\{ (x_1, x_2) : \frac{1}{3} \exp(-\frac{1}{x_2^2}) \sin \frac{1}{x_2} < x_1 < 2,\ 0 < x_2 < 2 \right\} \subset \mathbb{R}^2,$$
$$T = \{(1,0)\}.$$

Пусть теперь у нас имеется разностный оператор R, который на функции, заданные в $\mathbb{R}^n$, действует по формуле

$$Ru(x) = \sum_{h \in T} a_h u(x+h), \tag{2.14}$$

где a_h — комплексные числа. Очевидно, что $R : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ есть линейный ограниченный оператор, причём сопряжённый оператор имеет вид

$$R^* u(x) = \sum_{h \in T} \overline{a}_h u(x-h). \tag{2.15}$$

Лемма 2.2.2 *Оператор $R + R^* : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ положителен тогда и только тогда, когда*

$$0 \not\equiv \mathrm{Re} \sum_{h \in T} a_h \exp(i(h,\xi)) \geqslant 0 \quad (\xi \in \mathbb{R}^n); \tag{2.16}$$

положительно определён тогда и только тогда, когда

$$\mathrm{Re} \sum_{h \in T} a_h \exp(i(h,\xi)) \geqslant c > 0 \quad (\xi \in \mathbb{R}^n).$$

Доказательство. Достаточно перейти к преобразованию Фурье:

$$((R + R^*)u, u)_{L_2(\mathbb{R}^n)} = 2\mathrm{Re} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{h \in T} a_h \exp(i(h,\xi)) |\tilde{u}(\xi)|^2 \, d\xi.$$

Вторая часть утверждения очевидна. Для доказательства первой части остаётся отметить, что множество корней тригонометрического многочлена имеет лебегову меру нуль. $\square$

Пример 2.2.3 Символ самосопряжённого разностного оператора

$$Ru(x) = 4u(x)+2[u(x_1+1,x_2)+u(x_1-1,x_2)]+2[u(x_1,x_2+1)+u(x_1,x_2-1)]+$$
$$+u(x_1+1,x_2+1)+u(x_1-1,x_2-1)+u(x_1+1,x_2-1)+u(x_1-1,x_2+1)$$

равен

$$4(1+\cos\xi_1+\cos\xi_2+\cos\xi_1\cos\xi_2) = 4(1+\cos\xi_1)(1+\cos\xi_2) \geqslant 0.$$

Таким образом, этот оператор положительный в $L_2(\mathbb{R}^2)$.

При определении разностного оператора в ограниченной области Q мы, не вводя новых обозначений, условимся, как и в главе 1, вначале продолжать функцию нулём в $\mathbb{R}^n \setminus Q$, а после применения (2.14) брать сужение результата на область Q. Таким образом, возникает ограниченный линейный оператор $R : L_2(Q) \to L_2(Q)$, причём сопряжённому оператору $R^* : L_2(Q) \to L_2(Q)$ по-прежнему отвечает формула (2.15). Следующее утверждение также очевидно.

Лемма 2.2.3 *Если оператор $R + R^* : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ положителен, то и оператор $R + R^* : L_2(Q) \to L_2(Q)$ положителен.*

Однако для оператора $R + R^* : L_2(Q) \to L_2(Q)$ условие (2.16) на коэффициенты будет, как мы увидим, лишь достаточным для положительности. Для исследования свойств разностного оператора в ограниченной области больше подходит матричное представление. Дальнейшие конструкции в значительной степени аналогичны одномерному случаю.

Для всякой функции $u \in L_2(Q)$ и $s = 1, 2, \dots$ через $u_s \in L_2(Q)$ обозначается функция, совпадающая с u в подобластях Q_{sl} $(l = 1, \dots, N(s))$

s-го класса и равная нулю вне этих подобластей. Получается ортогональное разложение $u = u_1 + u_2 + \ldots + u_s + \ldots$. Далее, для каждого $s = 1, 2, \ldots$ вводим

$$u_{sl}(x) = u_s(x + h_{sl}) \quad (x \in Q_{s1},\ l = 1, \ldots, N(s)) \tag{2.17}$$

и составляем вектор-функции $U_s \in L_2^N(Q_{s1})$ с координатами $u_{sl}(x)$ (здесь и далее $N = N(s)$). Следующие утверждения очевидны.

Лемма 2.2.4 (a) *Для любых функций $u, v \in L_2(Q)$ имеем*

$$(u, v)_{L_2(Q)} = \sum_s (U_s, V_s)_{L_2^N(Q_{s1})}.$$

(b) *Равенство $Ru = v$ для функций $u, v \in L_2(Q)$ равносильно серии равенств $Ru_s = v_s$ $(s = 1, 2, \ldots)$.*

Наконец, введём квадратные матрицы $\mathbf{R}_s$ порядка $N(s)$ с элементами

$$r_{ij}^s = \begin{cases} a_h, & h = h_{sj} - h_{si} \in T, \\ 0, & h = h_{sj} - h_{si} \notin T. \end{cases} \tag{2.18}$$

Матрицы зависят лишь от разностного оператора R и области Q.

Лемма 2.2.5 *Равенство $v = Ru$ для функций $u, v \in L_2(Q)$ может быть записано в виде серии векторных соотношений*

$$V_s(x) = \mathbf{R}_s U_s(x) \quad (s = 1, 2, \ldots;\ x \in Q_{s1}).$$

Доказательство. Зафиксируем s. Имеем $v_s = Ru_s$. Если $x \in Q_{s1}$, то

$$v_{si}(x) = v_s(x + h_{si}) = \sum_{h \in T} a_h u_s(x + h + h_{si}).$$

Поскольку $u(x) = 0$ в $\mathbb{R}^n \setminus \overline{Q}$, можно считать в силу леммы 2.2.1, что суммирование проводится по всем $h \in T$ таким, что $h + h_{si} = h_{sj}$ для некоторого $1 \leqslant j \leqslant N(s)$. Тогда

$$\sum_{h \in T} a_h u_s(x + h + h_{si}) = \sum_{h_{sj} - h_{si} \in T} a_h u_s(x + h_{sj}) = \sum_{j=1}^{N(s)} r_{ij}^s u_{sj}(x),$$

где r^s_{ij} определяются по формуле (2.18). $\square$

Следующее утверждение очевидно.

Лемма 2.2.6 *Сопряжённому оператору $R^* : L_2(Q) \to L_2(Q)$ отвечают эрмитово сопряжённые матрицы $\mathbf{R}^*_s$ $(s = 1, 2, \ldots)$. Композиции R_1R_2 разностных операторов $R_1, R_2 : L_2(Q) \to L_2(Q)$ отвечает произведение матриц $\mathbf{R}_{1s}\mathbf{R}_{2s}$ $(s = 1, 2, \ldots)$.*

Замечание 2.2.1 При изменении нумерации подобластей класса меняются местами соответствующие строки и столбцы матрицы $\mathbf{R}_s$, но это не влияет на её собственные значения. Важно отметить также, что, хотя число классов и может быть счётным, число различных матриц $\mathbf{R}_s$ конечно. Это следует из ограниченности области Q (ограничены порядки матриц) и формулы (2.18) для элементов матриц (здесь принципиально, что коэффициенты a_h постоянные). Таким образом, множество $\bigcup\limits_s \sigma(\mathbf{R}_s)$ конечно.

Лемма 2.2.7 *Спектр $\sigma(R)$ оператора $R : L_2(Q) \to L_2(Q)$ совпадает с множеством $\bigcup\limits_s \sigma(\mathbf{R}_s)$.*

Доказательство. Пусть $\lambda \notin \bigcup\limits_s \sigma(\mathbf{R}_s)$, т.е. все матрицы $\lambda\mathbf{E}_s - \mathbf{R}_s$ невырождены. Для любой функции $v \in L_2(Q)$ и любого номера s построим функцию u_s, положив $U_s(x) = (\lambda\mathbf{E}_s - \mathbf{R}_s)^{-1}V_s(x)$ для $x \in Q_{s1}$. Но число различных матриц $(\lambda\mathbf{E}_s - \mathbf{R}_s)^{-1}$ конечно (замечание 2.2.1). Поэтому существует такая не зависящая от v и s постоянная $c > 0$, что $\|u_s\|_{L_2(Q)} \leqslant c\|v_s\|_{L_2(Q)}$. Тогда $u = u_1 + u_2 + \ldots \in L_2(Q)$, причём $\|u\|_{L_2(Q)} \leqslant c\|v\|_{L_2(Q)}$. По построению функция u является решением уравнения $\lambda u - Ru = v$. Следовательно, при $\lambda \notin \bigcup\limits_s \sigma(\mathbf{R}_s)$ оператор $\lambda I - R$ имеет ограниченный обратный.

Если же $\lambda \in \bigcup\limits_s \sigma(\mathbf{R}_s)$, то для некоторого $s = s_0$ матрица $\lambda\mathbf{E}_{s_0} - \mathbf{R}_{s_0}$ вырождена и существует нетривиальное решение $U_{s_0} \in \mathbb{C}^N$ системы линейных алгебраических уравнений $\mathbf{R}_{s_0}U_{s_0} = \lambda U_{s_0}$. Ему соответствует (ступенчатая) функция u_{s_0} с носителем в $\bigcup\limits_{l=1}^{N(s)} Q_{sl}$. Лемма 2.2.5 означает, что функция $u = u_{s_0}$ удовлетворяет уравнению $Ru = \lambda u$. $\square$

Итак, обратному оператору $R^{-1} : L_2(Q) \to L_2(Q)$ отвечают обратные матрицы $\mathbf{R}_s^{-1}$ $(s = 1, 2, \ldots)$. Из леммы 2.2.7 вытекает следующее утверждение.

Лемма 2.2.8 *Если оператор* $R+R^* : L_2(Q) \to L_2(Q)$ *положителен, то он положительно определён. Необходимым и достаточным условием положительной определённости оператора* $R + R^* : L_2(Q) \to L_2(Q)$ *является положительность матриц* $\mathbf{R}_s + \mathbf{R}_s^*$, $s = 1, 2, \ldots$.

Из леммы 2.2.8 следует, что условие (2.16) на символ оператора R является достаточным для положительной определённости оператора $R + R^* : L_2(Q) \to L_2(Q)$. Оно грубее необходимого и достаточного условия, выражаемого при помощи матриц $\mathbf{R}_s$. Похожим образом вещественность символа разностного оператора (равносильная самосопряжённости оператора R в $L_2(\mathbb{R}^n)$) выступает в качестве достаточного условия самосопряжённости оператора R в $L_2(Q)$, а необходимым и достаточным является, очевидно, эрмитовость матриц $\mathbf{R}_s$. Причина состоит в том, что условия, формулируемые при помощи символа разностного оператора, не учитывают вид области Q.

Пример 2.2.4 Рассмотрим самосопряжённый разностный оператор

$$Ru(x) = u(x)+a[u(x_1-1, x_2)+u(x_1+1, x_2)]+b[u(x_1, x_2-1)+u(x_1, x_2+1)]$$

в квадрате $Q = \{(x_1, x_2) : |x_1| < 1, |x_2| < 1\}$. Здесь $a, b \in \mathbb{R}$. Разбиение области Q, порождённое разностным оператором R, состоит из 4 подобластей одного класса:

$$Q_{11} = \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\},$$

$$Q_{12} = Q_{11} + (-1, 0),\ Q_{13} = Q_{11} + (-1, -1),\ Q_{14} = Q_{11} + (0, -1).$$

Имеем одну матрицу

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & b \\ a & 1 & b & 0 \\ 0 & b & 1 & a \\ b & 0 & a & 1 \end{pmatrix}.$$

Необходимые и достаточные условия её положительности выглядят следующим образом:

$$1 - a^2 - b^2 > 0, \quad 1 + a^4 + b^4 - 2a^2 - 2b^2 - 2a^2b^2 > 0.$$

Решением этой системы неравенств будет множество $|a| + |b| < 1$. По лемме 2.2.8 оператор $R : L_2(Q) \to L_2(Q)$ положительно определён тогда и только тогда, когда $|a|+|b| < 1$. В то же время условие (2.16) на символ $1 + 2a\cos\xi_1 + 2b\cos\xi_2$ оператора R означает, что $|a| + |b| < 1/2$.

Пример 2.2.5 Если рассмотреть тот же оператор в единичном круге (см. пример 2.2.1), то придётся проверять положительность семи различных матриц, имеющих порядки $2, 3, 4$. При этом матрица $\mathbf{R}_1$ совпадает с матрицей из предыдущего примера,

$$\mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & a \\ b & a & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_3 = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & b \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_4 = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ b & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ a & b & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_6 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_7 = \begin{pmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{pmatrix}.$$

Убеждаемся, что необходимые и достаточные условия положительной определённости разностного оператора будут теми же, что и для квадрата: $|a| + |b| < 1$.

Лемма 2.2.9 *Для любого $k \in \mathbb{N}$ разностный оператор R непрерывно отображает пространство $\mathring{W}_2^k(Q)$ в пространство $W_2^k(Q)$. При этом для функций $u \in \mathring{W}_2^k(Q)$ имеет место тождество*

$$D^\alpha Ru = RD^\alpha u \quad (|\alpha| \leqslant k). \tag{2.19}$$

Доказательство. Очевидно, что тождество (2.19) справедливо для любой функции $u \in C_0^\infty(Q)$. Используя его, в силу ограниченности оператора R в пространстве $L_2(Q)$ получаем

$$\|Ru\|_{W_2^k(Q)} \leqslant c\|u\|_{W_2^k(Q)} \tag{2.20}$$

для любой $u \in C_0^\infty(Q)$. Так как $C_0^\infty(Q)$ всюду плотно в $\mathring{W}_2^k(Q)$, из (2.20) следует ограниченность оператора $R : \mathring{W}_2^k(Q) \to W_2^k(Q)$ и справедливость тождества (2.19) для всех $u \in \mathring{W}_2^k(Q)$. $\square$

Из лемм 2.2.5, 2.2.7 вытекает следующее утверждение.

Лемма 2.2.10 *Для всех функций $u \in L_2(Q)$ таких, что*

$$u \in W_2^k(Q_{sl}) \quad (s = 1, 2, \dots;\ l = 1, \dots, N(s)),$$

имеем $Ru \in W_2^k(Q_{sl})$, причём

$$\|Ru\|_{W_2^k(Q_{sl})} \leqslant c_1 \sum_{j=1}^{N} \|u\|_{W_2^k(Q_{sj})}.$$

Если к тому же $\det \mathbf{R}_s \neq 0$ $(s = 1, 2, \dots)$, *то $R^{-1}u \in W_2^k(Q_{sl})$ и*

$$\|R^{-1}u\|_{W_2^k(Q_{sl})} \leqslant c_2 \sum_{j=1}^{N} \|u\|_{W_2^k(Q_{sj})}.$$

Здесь постоянные $c_1, c_2 > 0$ не зависят от s и u.

Аналог теоремы 1.2.4 об изоморфизме имеет место и в многомерной ситуации [31, 59]. Наиболее общий вариант в данном пособии использоваться не будет, и мы ограничимся частным случаем, когда область Q есть цилиндр,

$$Q = (0, d) \times G, \tag{2.21}$$

а в разностном операторе присутствуют сдвиги лишь вдоль оси цилиндра,

$$Ru(x) = \sum_{j=-N}^{N} a_j u(x_1 + j, x_2, \ldots, x_n). \tag{2.22}$$

Здесь G — ограниченная область в $\mathbb{R}^{n-1}$ (с гладкой границей, если $n \geqslant 3$), $d = N + \theta$, $N \in \mathbb{N}$, $0 < \theta \leqslant 1$, $a_j \in \mathbb{C}$.

Все построения идентичны разделу 1.2.2. Так, имеем в зависимости от θ один или два класса подобластей Q_{sl} и матрицы $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ порядка $(N+1) \times (N+1)$ и $N \times N$ с элементами $r^1_{ij}(r^2_{ij}) = a_{j-i}$. В случае, когда эти матрицы невырождены, по ним однозначно определяются два набора чисел γ_{1i}, γ_{2i} $(i = 1, \ldots, N)$ и вводится подпространство $W^1_{2,\Gamma}(Q)$ функций, удовлетворяющих условию

$$w\,|_{(0,d)\times\partial G} = 0$$

на боковой поверхности цилиндра и нелокальным условиям

$$w\,|_{x_1=0} = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{1i} w\,|_{x_1=0}, \quad w\,|_{x_1=d} = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{2i} w\,|_{x_1=d-i},$$

связывающим следы функции на сдвигах оснований цилиндра.

Теорема 2.2.1 *Предположим, что выполнены условия* (2.21), (2.22) *и матрицы* $\mathbf{R}_1$ *и* $\mathbf{R}_2$ *невырождены. Тогда оператор* R *непрерывно и взаимно однозначно отображает пространство* $\mathring{W}^1_2(Q)$ *на всё пространство* $W^1_{2,\Gamma}(Q)$.

Доказательство полностью повторяет доказательство теоремы 1.2.4.

2.2.2 Разрешимость и спектр первой краевой задачи для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения

Рассмотрим дифференциально-разностное уравнение

$$A_R u = -\sum_{i,j=1}^{n} (R_{ij} u_{x_j})_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} R_i u_{x_i} + R_0 u = f(x) \quad (x \in Q) \tag{2.23}$$

с краевым условием

$$u\mid_{\partial Q} = 0, \tag{2.24}$$

где

$$R_{ij} u(x) = \sum_{h \in T} a_{ijh} u(x+h) \quad (i, j = 1, \ldots, n),$$
$$R_i u(x) = \sum_{h \in T} a_{ih} u(x+h) \quad (i = 0, \ldots, n);$$

$a_{ijh}, a_{ih} \in \mathbb{C}$; $f \in L_2(Q)$ — комплекснозначная функция; область Q удовлетворяет условиям пункта 2.2.1. Кроме того, мы полагаем $u(x+h) = 0$ при $x + h \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{Q}$ (см. пункт 2.2.1).

Краевую задачу (2.23), (2.24) будем называть первой краевой задачей. Результаты раздела 2.1 мотивируют следующее определение.

Дифференциально-разностное уравнение (2.23) называется сильно эллиптическим в $\overline{Q}$, если существуют такие постоянные $c_1 > 0, c_2 \geqslant 0$, что для всех $u \in C_0^\infty(Q)$ выполнено неравенство

$$\operatorname{Re}\,(A_R u, u)_{L_2(Q)} \geqslant c_1 \|u\|^2_{W_2^1(Q)} - c_2 \|u\|^2_{L_2(Q)}. \tag{2.25}$$

Вначале нас будут интересовать условия на коэффициенты оператора A_R, при которых уравнение (2.23) является сильно эллиптическим.

В соответствии с пунктом 2.2.1 для всех $i, j = 1, \ldots, n$ и $s = 1, 2, \ldots$ введём матрицы $\mathbf{R}_{ijs}$ порядка $N(s) \times N(s)$ с элементами

$$r^{ijs}_{km} = \begin{cases} a_{ijh}, & h = h_{sm} - h_{sk} \in T, \\ 0, & h = h_{sm} - h_{sk} \notin T. \end{cases}$$

Далее, для каждого $s = 1, 2, \ldots$ из матриц $\mathbf{R}_{ijs}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ составим блочную матрицу $\mathbf{R}_s$ порядка $nN(s) \times nN(s)$. Вновь отметим, что в силу ограниченности области Q существует лишь конечное число различных матриц $\mathbf{R}_s$.

Удобно также ввести матричный оператор $R : L_2^n(Q) \to L_2^n(Q)$, элементами которого являются разностные операторы $R_{ij} : L_2(Q) \to L_2(Q)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$. Сопряжённому оператору R^* (его элементами являются операторы $R_{ji}^* : L_2(Q) \to L_2(Q)$) отвечают эрмитово сопряжённые матрицы $\mathbf{R}_s^*$.

Лемма 2.2.11 *Оператор* $R+R^*$ *положительно определён тогда и только тогда, когда все матрицы* $\mathbf{R}_s+\mathbf{R}_s^*$ $(s = 1, 2, \ldots)$ *положительно определены.*

Доказательство. Пусть у нас есть вектор-функция $w \in L_2^n(Q)$. Для каждой её компоненты w_i и каждого s по правилу, описанному в пункте 2.2.1, построим вектор-функцию $W_{is} \in L_2^N(Q_{s1})$. Затем из имеющихся $W_{1s}, \ldots, W_{ns}$ составим вектор W_s длины $nN(s)$. Таким образом, для каждого $s = 1, 2, \ldots$ имеем вектор-функцию $W_s \in L_2^{nN}(Q_{s1})$. Теперь неравенство

$$\big((R + R^*)w, w\big)_{L_2^n(Q)} = \sum_{i,j=1}^{n} \big((R_{ij} + R_{ji}^*)w_j, w_i\big)_{L_2(Q)} \geqslant$$
$$\geqslant c\|w\|_{L_2^n(Q)}^2 = c\sum_{i=1}^{n} \|w_i\|_{L_2(Q)}^2 \tag{2.26}$$

для любой вектор-функции $w \in L_2^n(Q)$ в силу лемм 2.2.4, 2.2.5 может быть записано в виде

$$\sum_s \sum_{i,j=1}^{n} \big((\mathbf{R}_{ijs} + \mathbf{R}_{jis}^*)W_{js}, W_{is}\big)_{L_2^N(Q_{s1})} \geqslant c\sum_s \sum_{i=1}^{n} \|W_{is}\|_{L_2^N(Q_{s1})}^2$$

или

$$\sum_s \big((\mathbf{R}_s + \mathbf{R}_s^*)W_s, W_s\big)_{L_2^{nN}(Q_{s1})} \geqslant c\sum_s \|W_s\|_{L_2^{nN}(Q_{s1})}^2. \tag{2.27}$$

Если все матрицы $\mathbf{R}_s+\mathbf{R}_s^*$ (а различных среди них, как мы знаем, лишь конечное число) положительно определены, то найдётся, очевидно, такая константа $c>0$, что выполнено неравенство (2.27). Если же, зафиксировав $s=s_0$, подставлять в неравенство (2.26) функции, равные постоянным в подобластях s_0-го класса и нулю вне этих подобластей, то (2.27) становится условием положительной определённости матрицы $\mathbf{R}_{s_0}+\mathbf{R}_{s_0}^*$. □

Рассмотрим некоторые достаточные условия сильной эллиптичности дифференциально-разностного уравнения.

Теорема 2.2.2 *Если блочные матрицы* $\mathbf{R}_s+\mathbf{R}_s^*$ $(s=1,2,\ldots)$ *положительно определены, то дифференциально-разностное уравнение* (2.23) *сильно эллиптическое.*

Доказательство. Интегрируя по частям, используя лемму 2.2.11, неравенство Коши – Буняковского, ограниченность разностных операторов в $L_2(Q)$ и теорему об эквивалентных нормах в $W_2^1(Q)$, имеем

$$\operatorname{Re}(A_R u,u)_{L_2(Q)}=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\big((R_{ij}+R_{ji}^*)u_{x_j},u_{x_i}\big)_{L_2(Q)}+$$

$$+\operatorname{Re}\Big(\sum_{i=1}^{n}R_iu_{x_i}+R_0u,u\Big)_{L_2(Q)}\geqslant\kappa_1\sum_{i=1}^{n}\|u_{x_i}\|^2_{L_2(Q)}-\kappa_2\|u\|_{W_2^1(Q)}\|u\|_{L_2(Q)}\geqslant$$
$$\geqslant\kappa_3\|u\|^2_{W_2^1(Q)}-\kappa_2\varepsilon\|u\|^2_{W_2^1(Q)}-\kappa_2\varepsilon^{-1}\|u\|^2_{L_2(Q)}\quad(u\in C_0^\infty(Q)),$$

где $\varepsilon>0$ произвольно. При $\varepsilon<\kappa_3/2\kappa_2$ получаем неравенство (2.25). □

Следующее достаточное условие использует символ дифференциально-разностного оператора.

Теорема 2.2.3 *Пусть существуют конечное множество векторов с целыми координатами* $T_1\subset\mathbb{R}^n$ *и числа* $a_{ph}\in\mathbb{R}$ $(p=1,\ldots,n;\ h\in T_1)$

такие, что

$$\mathrm{Re}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{h\in T}a_{ijh}\exp(i(h,\xi))\xi_i\xi_j\geqslant\sum_{p=1}^{n}\sum_{h\in T_1}a_{ph}\cos(h,\xi)\xi_p^2\quad(\xi\in\mathbb{R}^n);\tag{2.28}$$

$$0\not\equiv\sum_{h\in T_1}a_{ph}\cos(h,\xi)\geqslant 0\quad(\xi\in\mathbb{R}^n,\ p=1,\dots,n).\tag{2.29}$$

Тогда уравнение (2.23) *сильно эллиптическое в* $\overline{Q}$.

Доказательство. Без ограничения общности будем рассматривать старшую однородную часть оператора A_R. Применяя теорему Планшереля и условие (2.28), имеем

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\big((R_{ij}+R_{ji}^*)u_{x_j},u_{x_i}\big)_{L_2(Q)}=$$
$$=\mathrm{Re}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Big[\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{h\in T}a_{ijh}\exp(i(h,\xi))\xi_i\xi_j\Big]|\tilde{u}(\xi)|^2\,d\xi\geqslant$$
$$\geqslant\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Big[\sum_{p=1}^{n}\sum_{h\in T_1}a_{ph}\cos(h,\xi)\xi_p^2\Big]|\tilde{u}(\xi)|^2\,d\xi=\sum_{p=1}^{n}(R_pu_{x_p},u_{x_p})_{L_2(Q)},\tag{2.30}$$

где разностные операторы действуют по формулам

$$R_pu(x)=\frac{1}{2}\sum_{h\in T_1}a_{ph}[u(x+h)+u(x-h)]\quad(p=1,\dots,n).$$

Из (2.29) и лемм 2.2.2, 2.2.1 и 2.2.8 следует, что операторы R_p в $L_2(Q)$ положительно определены, поэтому

$$\sum_{p=1}^{n}(R_pu_{x_p},u_{x_p})_{L_2(Q)}\geqslant c\sum_{p=1}^{n}\|u_{x_p}\|^2_{L_2(Q)}\geqslant c_1\|u\|^2_{W_2^1(Q)}\quad(u\in C_0^\infty(Q)).$$

Отсюда и из (2.30) вытекает утверждение теоремы. □

Получены и другие, более тонкие достаточные условия сильной эллиптичности дифференциально-разностных уравнений [58, 59]. Для многих областей они совпадают с необходимыми условиями (см. теорему 2.2.4 и упражнение 5 после главы 2). Окончательно же проблема коэрцитивности для дифференциально-разностных уравнений до сих пор остаётся нерешённой.

Пример 2.2.6 Рассмотрим дифференциально-разностное уравнение

$$-\sum_{i,j=1}^{2}(R_{ij}u_{x_j})_{x_i} = f(x) \quad (x \in Q),$$

где

$$R_{11}u(x) = 2u(x) + \frac{1}{2}[u(x_1+1,x_2) + u(x_1-1,x_2)];$$
$$R_{12}u(x) = R_{21}u(x) = \frac{1}{2}[u(x_1,x_2+1) + u(x_1,x_2-1)];$$
$$R_{22}u(x) = \frac{3}{2}u(x) + \frac{1}{2}[u(x_1+1,x_2) + u(x_1-1,x_2)] +$$
$$+\frac{1}{4}[u(x_1,x_2+2) + u(x_1,x_2-2)].$$

Проверим, что для данного уравнения выполняются неравенства (2.28) и (2.29). Действительно, символ оператора имеет вид

$$\xi_1^2(2+\cos\xi_1) + 2\xi_1\xi_2\cos\xi_2 + \xi_2^2\left(\frac{3}{2} + \cos\xi_1 + \frac{1}{2}\cos 2\xi_2\right) =$$
$$= (\xi_1^2+\xi_2^2)(1+\cos\xi_1) + \xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2\cos\xi_2 + \xi_2^2\cos^2\xi_2 \geqslant (\xi_1^2+\xi_2^2)(1+\cos\xi_1).$$

Таким образом, уравнение сильно эллиптическое для любой ограниченной области Q.

Приведём теперь необходимое условие сильной эллиптичности уравнения (2.23).

Теорема 2.2.4 *Пусть уравнение* (2.23) *сильно эллиптическое в* $\overline{Q}$. *Тогда матрицы*

$$\sum_{i,j=1}^{n}(\mathbf{R}_{ijs} + \mathbf{R}_{ijs}^*)\xi_i\xi_j$$

положительно определены для всех $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$ *и* $s = 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Зафиксируем $s = 1, 2, \ldots$. Подставляя в (2.25) бесконечно дифференцируемые функции с носителями в $\bigcup\limits_{l=1}^{N(s)} Q_{sl}$ и используя лемму 2.2.4, приходим к неравенству

$$\mathrm{Re}\sum_{i,j=1}^{n}(\mathbf{R}_{ijs}U_{sx_j}, U_{sx_i})_{L_2^N(Q_{s1})} \geqslant c_3\|U_s\|^2_{W_2^{1,N}(Q_{s1})} - c_4\|U_s\|^2_{L_2^N(Q_{s1})}.$$

Неравенство выполняется для всех вектор-функций $U_s \in C_0^{\infty,N}(Q_{s1})$ (постоянные c_3, c_4 не зависят от U_s) и, как следует из результатов раздела 2.1, означает сильную эллиптичность матричного дифференциального оператора второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\mathbf{A}_s = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{R}_{ijs} \frac{\partial}{\partial x_j}\,,$$

т.е. условие положительности матричного полинома $\sum\limits_{i,j=1}^{n} (\mathbf{R}_{ijs} + \mathbf{R}_{ijs}^*)\xi_i\xi_j$. $\square$

Замечание 2.2.2 То, что из положительной определённости

$$\operatorname{Re}(\mathbf{R}_s Y, Y) = \sum_{i,j=1}^{n} \operatorname{Re}(\mathbf{R}_{ijs} Y_i, Y_j) \geqslant c \sum_{i=1}^{n} |Y_i|^2 = c|Y|^2, \qquad (2.31)$$

$$Y_1, \dots, Y_n \in \mathbb{C}^N, \quad Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{nN},$$

блочной матрицы $\mathbf{R}_s + \mathbf{R}_s^*$ следует положительная определённость для любого $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$ матрицы $\sum\limits_{i,j=1}^{n} (\mathbf{R}_{ijs} + \mathbf{R}_{ijs}^*)\xi_i\xi_j$, легко проверяется алгебраически: достаточно в неравенстве (2.31) взять $Y_i = \xi_i Y_0$. Обратное, конечно, неверно. Следующий пример показывает, что необходимое условие в теореме 2.2.4 действительно слабее достаточного условия из теоремы 2.2.2.

Пример 2.2.7 Рассмотрим дифференциально-разностное уравнение

$$-\sum_{i,j=1}^{2} (R_{ij} u_{x_j})_{x_i} = f(x_1, x_2) \quad (0 < x_1 < 2,\, 0 < x_2 < 1),$$

где

$$R_{11}u(x) = u(x); \quad R_{22}u(x) = 5u(x);$$

$$R_{12}u(x) = -4u(x_1 - 1, x_2); \quad R_{21}u(x) = -4u(x_1 + 1, x_2).$$

Разбиение области состоит из двух подобластей одного класса

$$Q_{11} = (0,1) \times (0,1), \quad Q_{12} = (1,2) \times (0,1),$$

$$\mathbf{R}_{111} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{R}_{221} = 5\mathbf{E}, \quad \mathbf{R}_{121} = -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_{211} = -\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверяем выполнение необходимого условия. Имеем

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}(\mathbf{R}_{ijs} + \mathbf{R}^*_{ijs})\xi_i\xi_j =$$

$$= \xi_1^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\xi_1\xi_2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \xi_2^2 \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1^2 + 5\xi_2^2 & -4\xi_1\xi_2 \\ -4\xi_1\xi_2 & \xi_1^2 + 5\xi_2^2 \end{pmatrix}.$$

Определитель последней матрицы

$$(\xi_1^2 + 5\xi_2^2)^2 - 16\xi_1^2\xi_2^2 = (\xi_1^2 + 4\xi_1\xi_2 + 5\xi_2^2)(\xi_1^2 - 4\xi_1\xi_2 + 5\xi_2^2) > 0$$

для всех $0 \neq (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$. При этом блочная матрица

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

знакопеременная: $\Delta_3 = 5 - 16 < 0$.

Легко видеть, что символ $\xi_1^2 - 8\xi_1\xi_2 \cos\xi_1 + 5\xi_2^2$ дифференциально-разностного оператора также знакопеременный.

Отметим, однако, что пока не удалось построить пример уравнения (2.23), для которого выполнены условия теоремы 2.2.4, но которое при этом не является сильно эллиптическим.

Рассмотрим важный частный случай дифференциально-разностного уравнения (2.23):

$$ARu = f(x) \quad (x \in Q), \tag{2.32}$$

где A — дифференциальный оператор второго порядка с постоянными вещественными коэффициентами $a_{ij} = a_{ji}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$:

$$A = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + a_0$$

(коэффициенты $a_0, \ldots, a_n$ могут быть и комплексными), а $R = R_{11}$ — разностный оператор вида (2.14) с комплексными коэффициентами. Другими словами, в уравнении (2.23) мы полагаем $R_{ij} = a_{ij} R_{11}$ (то, что разностный оператор вынесен за знак первой производной, оправдывается леммой 2.2.9 и выбором $\mathring{W}_2^1(Q)$ в качестве пространства решений).

Проверим, что для уравнения (2.32) необходимые условия сильной эллиптичности совпадают с достаточными.

Лемма 2.2.12 *Уравнение* (2.32) *сильно эллиптическое тогда и только тогда, когда дифференциальный оператор A эллиптический, а разностный оператор $R + R^* : L_2(Q) \to L_2(Q)$ положительно определённый.*

Доказательство. Пусть уравнение (2.32) сильно эллиптическое. По теореме 2.2.4 для каждого $s = 1, 2 \ldots$ и всех $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$ матрица

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \xi_i \xi_j \right) (\mathbf{R}_{11s} + \mathbf{R}_{11s}^*)$$

положительно определена. Отсюда следует, что квадратичная форма $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} \xi_i \xi_j$ и матрица $\mathbf{R}_{11s} + \mathbf{R}_{11s}^*$ одновременно либо положительно, либо отрицательно определены. Без ограничения общности можно считать их положительно определёнными. Таким образом, оператор A эллиптический и, по лемме 2.2.8, оператор $R_{11} + R_{11}^*$ в $L_2(Q)$ положительно определён.

Наоборот, пусть оператор A эллиптичен. Поскольку $a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}$, квадратичная форма $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} \xi_i \xi_j$ знакоопределена. Можем считаь её положительно определённой:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant c|\xi|^2 \quad (\xi \in \mathbb{R}^n).$$

С учётом симметричности коэффициентов отсюда легко получить

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\eta_i\overline{\eta}_j \geqslant c|\eta|^2 \quad (\eta \in \mathbb{C}^n).$$

Оператор $R_{11} + R_{11}^* : L_2(Q) \to L_2(Q)$, будучи положительно определённым, обладает положительно определённым квадратным корнем $S = \sqrt{R_{11} + R_{11}^*} : L_2(Q) \to L_2(Q)$. Тогда для любой $u \in C_0^\infty(Q)$ имеем (полагаем для краткости $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$)

$$\operatorname{Re}(ARu, u)_{L_2(Q)} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}((R_{11} + R_{11}^*)u_{x_i}, u_{x_j})_{L_2(Q)} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(Su_{x_i}, Su_{x_j})_{L_2(Q)} = \frac{1}{2}\int\limits_Q \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}Su_{x_i}\overline{Su_{x_j}}\,dx \geqslant$$

$$\geqslant \frac{c}{2}\int\limits_Q \sum_{i=1}^{n} |Su_{x_i}|^2\,dx \geqslant c_1\sum_{i=1}^{n} \|u_{x_i}\|^2_{L_2(Q)},$$

т.е. получаем (2.25). $\square$

Введём отвечающий краевой задаче (2.23), (2.24) неограниченный оператор $A_R : L_2(Q) \to L_2(Q)$, действующий в пространстве распределений по формуле

$$A_R u = -\sum_{i,j=1}^{n} (R_{ij}u_{x_j})_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} R_i u_{x_i} + R_0 u,$$

с областью определения $D(A_R) = \left\{u \in \mathring{W}_2^1(Q) : A_R u \in L_2(Q)\right\}$.

Всюду далее будем предполагать, что дифференциально-разностные уравнения сильно эллиптические. Оператор A_R будем называть сильно эллиптическим, если он соответствует сильно эллиптическому дифференциально-разностному уравнению (2.23).

Функцию u будем называть обобщённым решением краевой задачи (2.23), (2.24), если $u \in D(A_R)$ и

$$A_R u = f. \tag{2.33}$$

Эквивалентным образом можно определить обобщённое решение задачи (2.23), (2.24) как функцию $u \in \mathring{W}_2^1(Q)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\sum_{i,j=1}^{n} (R_{ij} u_{x_j}, v_{x_i})_{L_2(Q)} + \sum_{i=1}^{n} (R_i u_{x_i}, v)_{L_2(Q)} + (R_0 u, v)_{L_2(Q)} = (f, v)_{L_2(Q)} \tag{2.34}$$

для всех $v \in \mathring{W}_2^1(Q)$, где $f \in L_2(Q)$.

Вместе с A_R будем рассматривать также неограниченный оператор $\widehat{A}_R : L_2(Q) \to L_2(Q)$, действующий в пространстве распределений по формуле

$$\widehat{A}_R u = -\sum_{i,j=1}^{n} (R_{ji}^* u_{x_j})_{x_i} - \sum_{i=1}^{n} R_i^* u_{x_i} + R_0^* u,$$

с областью определения $D(\widehat{A}_R) = \Big\{ u \in \mathring{W}_2^1(Q) : \widehat{A}_R u \in L_2(Q) \Big\}$.

Операторы A_R и $\widehat{A}_R$ формально сопряжённые, т.е.

$$(A_R u, v)_{L_2(Q)} = (u, \widehat{A}_R v)_{L_2(Q)} \quad (u, v \in C_0^\infty(Q)),$$

и поскольку

$$\operatorname{Re}(A_R u, u)_{L_2(Q)} = \operatorname{Re}(\widehat{A}_R u, u)_{L_2(Q)} \quad (u \in C_0^\infty(Q)),$$

оператор $\widehat{A}_R$ также сильно эллиптический.

Доказательство фредгольмовости и дискретности спектра сильно эллиптического оператора A_R проводится стандартными методами и опирается на неравенство (2.25). Однако для полноты картины приведём эти доказательства.

Лемма 2.2.13 *В пространстве* $\mathring{W}_2^1(Q)$ *можно ввести эквивалентное скалярное произведение по формуле*

$$(u,v)'_{\mathring{W}_2^1(Q)} = \frac{1}{2}\Bigg\{\sum_{i,j=1}^{n}\big((R_{ij}+R_{ji}^*)u_{x_j}, v_{x_i}\big)_{L_2(Q)} + \sum_{i=1}^{n}((R_i - R_i^*)u_{x_i}, v)_{L_2(Q)} +$$

$$+ ((R_0+R_0^*)u,v)_{L_2(Q)}\Bigg\} + \mu(u,v)_{L_2(Q)}, \qquad (2.35)$$

где $\mu \geqslant c_2$, c_2 *— постоянная из неравенства* (2.25).

Доказательство. Действительно, правая часть (2.35) является непрерывной в $\mathring{W}_2^1(Q) \times \mathring{W}_2^1(Q)$ эрмитовой полуторалинейной формой. При $u = v \in C_0^\infty(Q)$ соответствующая квадратичная форма совпадает с $\mathrm{Re}\,(A_R u,u)_{L_2(Q)} + \mu\|u\|^2_{L_2(Q)}$. Из неравенства (2.25) и плотности $C_0^\infty(Q)$ в $\mathring{W}_2^1(Q)$ следует утверждение леммы. $\square$

Лемма 2.2.14 *Для каждого* $\gamma \in \mathbb{R}$ *существует линейный ограниченный оператор* $K : \mathring{W}_2^1(Q) \to \mathring{W}_2^1(Q)$ *такой, что* $K^* = -K$ *и*

$$\frac{1}{2}\Bigg\{\sum_{i,j=1}^{n}\big((R_{ij}-R_{ji}^*)u_{x_j}, v_{x_i}\big)_{L_2(Q)} + \sum_{i=1}^{n}((R_i + R_i^*)u_{x_i}, v)_{L_2(Q)} +$$

$$+ ((R_0-R_0^*)u,v)_{L_2(Q)}\Bigg\} + i\gamma(u,v)_{L_2(Q)} = (Ku,v)'_{\mathring{W}_2^1(Q)} \qquad (2.36)$$

для всех $u, v \in \mathring{W}_2^1(Q)$.

Доказательство. Обозначим полуторалинейную форму, стоящую в левой части (2.36), через $B(u,v)$. Нетрудно проверить, что эта полуторалинейная форма является кососимметрической, т.е.

$$B(v,u) = -\overline{B(u,v)} \quad (u, v \in \mathring{W}_2^1(Q)).$$

Из непрерывности $B(u,v)$ по $u, v \in \mathring{W}_2^1(Q)$ и теоремы Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве следует, что для каждого $u \in \mathring{W}_2^1(Q)$ существует единственным образом определённый элемент $w \in \mathring{W}_2^1(Q)$ такой, что

$$(w, v)'_{\mathring{W}_2^1(Q)} = B(u, v),$$

причём соответствие $u \mapsto w$ является линейным непрерывным оператором в $\mathring{W}_2^1(Q)$. Обозначим его через K. Тогда

$$(Ku, v)'_{\mathring{W}_2^1(Q)} = B(u, v) = -\overline{B(v, u)} = -\overline{(Kv, u)'}_{\mathring{W}_2^1(Q)} = -(u, Kv)'_{\mathring{W}_2^1(Q)}$$

для всех $u, v \in \mathring{W}_2^1(Q)$, т.е. $K^* = -K$. $\square$

Теорема 2.2.5 *Пусть оператор $A_R : L_2(Q) \to L_2(Q)$ сильно эллиптический. Тогда его спектр $\sigma(A_R)$ состоит из изолированных собственных значений конечной кратности и лежит в правой полуплоскости $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > -c_2\}$, где $c_2 \geqslant 0$ — постоянная из неравенства* (2.25). *Если $\lambda \notin \sigma(A_R)$, то резольвента $\mathcal{R}(\lambda, A_R) : L_2(Q) \to L_2(Q)$ — компактный оператор. Кроме того, $A_R^* = \widehat{A}_R$, $\widehat{A}_R^* = A_R$.*

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$A_R u - \lambda u = f \tag{2.37}$$

при условии $\operatorname{Re}\lambda \leqslant -c_2$. Обозначим $\mu = -\operatorname{Re}\lambda$, $\gamma = -\operatorname{Im}\lambda$ и введём в пространстве $\mathring{W}_2^1(Q)$ эквивалентное скалярное произведение и оператор K в соответствии с леммами 2.2.13, 2.2.14. По теореме Рисса существует линейный ограниченный оператор $\Lambda : L_2(Q) \to \mathring{W}_2^1(Q)$ такой, что

$$(f, v)_{L_2(Q)} = (\Lambda f, v)'_{\mathring{W}_2^1(Q)}$$

для всех $f \in L_2(Q)$, $v \in \mathring{W}_2^1(Q)$. Из определения обобщённого решения и лемм 2.2.13, 2.2.14 следует, что уравнение (2.37) эквивалентно тождеству

$$(u + Ku, v)'_{\mathring{W}_2^1(Q)} = (\Lambda f, v)'_{\mathring{W}_2^1(Q)} \quad (v \in \mathring{W}_2^1(Q)),$$

которое, в свою очередь, можно переписать в виде уравнения в пространстве $\mathring{W}_2^1(Q)$:

$$(I + K)u = \Lambda f. \tag{2.38}$$

Поскольку оператор K кососимметрический, оператор $I+K$ имеет ограниченный обратный в $\mathring{W}_2^1(Q)$. Следовательно, уравнение (2.38) имеет единственное решение $u = (I+K)^{-1}\Lambda f$. Таким образом, при $\operatorname{Re}\lambda \leqslant -c_2$ оператор $A_R - \lambda I$ имеет ограниченный обратный

$$\mathcal{R}(\lambda, A_R) = (I+K)^{-1}\Lambda : L_2(Q) \to \mathring{W}_2^1(Q).$$

В силу компактности вложения $\mathring{W}_2^1(Q)$ в $L_2(Q)$ резольвента $\mathcal{R}(\lambda, A_R)$ является компактным оператором в $L_2(Q)$. Но, как нам уже известно, в этом случае спектр $\sigma(A_R)$ оператора состоит из изолированных собственных значение конечной кратности и для любого $\lambda \notin \sigma(A_R)$ резольвента $\mathcal{R}(\lambda, A_R) : L_2(Q) \to L_2(Q)$ компактна.

Далее, из определения операторов A_R и $\widehat{A}_R$ следует, что

$$(A_R u, v)_{L_2(Q)} = \sum_{i,j=1}^{n} (R_{ij} u_{x_j}, v_{x_i})_{L_2(Q)} + \sum_{i=1}^{n} (R_i u_{x_i}, v)_{L_2(Q)} + (R_0 u, v)_{L_2(Q)} \tag{2.39}$$

для любых функций $u \in D(A_R)$ и $v \in C_0^\infty(Q)$, и

$$(u, \widehat{A}_R v)_{L_2(Q)} = \sum_{i,j=1}^{n} (R_{ij} u_{x_j}, v_{x_i})_{L_2(Q)} + \sum_{i=1}^{n} (R_i u_{x_i}, v)_{L_2(Q)} + (R_0 u, v)_{L_2(Q)} \tag{2.40}$$

для любых функций $u \in C_0^\infty(Q)$ и $v \in D(\widehat{A}_R)$.

Поскольку $C_0^\infty(Q)$ всюду плотно в $\mathring{W}_2^1(Q)$, тождества (2.39), (2.40) справедливы для любых $u \in D(A_R)$, $v \in D(\widehat{A}_R)$. Это означает, что $\widehat{A}_R \subset A_R^*$ и $A_R \subset \widehat{A}_R^*$. А так как по доказанному выше спектры операторов A_R и $\widehat{A}_R$ дискретны ($\widehat{A}_R$ также сильно эллиптический), то с использованием леммы 3 [8, с. 889] получаем $A_R^* = \widehat{A}_R$, $\widehat{A}_R^* = A_R$. $\square$

Пример 2.2.8 Рассмотрим уравнение

$$-\Delta R u = f(x) \quad (x \in Q), \tag{2.41}$$

где $Q = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\right\}$,

$$Ru(x) = u(x) - \frac{1}{4}u(x_1 + 1, x_2) + \frac{1}{4}u(x_1, x_2 - 1).$$

Основываясь на примере 2.2.5, убеждаемся, что разностный оператор $R + R^* : L_2(Q) \to L_2(Q)$ положительно определён. Тогда

$$\operatorname{Re}\,(-\Delta Ru, u)_{L_2(Q)} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\left((R + R^*)u_{x_i}, u_{x_i}\right)_{L_2(Q)} \geqslant$$

$$\geqslant c\sum_{i=1}^{2}(u_{x_i}, u_{x_i})_{L_2(Q)} \geqslant c_1\|u\|^2_{W_2^1(Q)} \quad (u \in C_0^\infty(Q)),$$

т.е. дифференциально-разностное уравнение 2.41 сильно эллиптическое в $\overline{Q}$, причём $c_2 = 0$. Следовательно, по теореме 2.2.5 первая краевая задача для уравнения (2.41) имеет единственное обобщённое решение для любой правой части $f \in L_2(Q)$.

Теорема 2.2.6 *Сильно эллиптический оператор $A_R : L_2(Q) \to L_2(Q)$ фредгольмов.*

Доказательство следует из представления

$$A_R = [I + \lambda\mathcal{R}(\lambda, A_R)](A_R - \lambda I) \quad (\lambda \notin \sigma(A_R))$$

и компактности резольвенты $\mathcal{R}(\lambda, A_R) : L_2(Q) \to L_2(Q)$ (см. теорему 1.2.3).

Теорема 2.2.7 *Пусть сильно эллиптический оператор A_R симметрический, т.е.*

$$(A_R u, v)_{L_2(Q)} = (u, A_R v)_{L_2(Q)}$$

для всех $u, v \in C_0^\infty(Q)$.

Тогда оператор $A_R : L_2(Q) \to L_2(Q)$ самосопряжённый, собственные значения λ_m оператора A_R вещественны и $\lambda_m \to +\infty$ при $m \to +\infty$. Собственные функции u_m оператора A_R образуют ортонормированный *базис в пространстве* $L_2(Q)$, *а функции* $u_m/\sqrt{\lambda_m + c_2}$ — *ортонормированный базис в пространстве* $\mathring{W}_2^1(Q)$ *со скалярным произведением по формуле* (2.35), *в которой* $\mu = c_2$.

Доказательство. Первая часть заключения теоремы 2.2.10 вытекает из теоремы 2.2.5. Пусть $u \in D(A_R)$ — собственная функция оператора A_R, соответствующая собственному значению λ. Тогда $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\lambda > -c_2$. Из леммы 2.2.13 и доказательства теоремы 2.2.5 следует, что

$$(u, v)'_{\mathring{W}_2^1(Q)} = (c_2 + \lambda)(u, v)_{L_2(Q)} = (c_2 + \lambda)(\Lambda u, v)'_{\mathring{W}_2^1(Q)} \tag{2.42}$$

для всех $v \in \mathring{W}_2^1(Q)$. Здесь $\Lambda : L_2(Q) \to \mathring{W}_2^1(Q)$ — ограниченный линейный оператор такой, что

$$(\Lambda f, v)'_{\mathring{W}_2^1(Q)} = (f, v)_{L_2(Q)} \quad (f \in L_2(Q),\ v \in \mathring{W}_2^1(Q)).$$

Обозначим Λ_0 сужение оператора A на $\mathring{W}_2^1(Q)$. Тогда Λ_0 будет эрмитовым, положительным, компактным оператором из $\mathring{W}_2^1(Q)$ в $\mathring{W}_2^1(Q)$. Действительно, для любых $w, v \in \mathring{W}_2^1(Q)$ имеем

$$(\Lambda_0 w, v)'_{\mathring{W}_2^1(Q)} = (w, v)_{L_2(Q)} = \overline{(v, w)}_{L_2(Q)} = \overline{(\Lambda_0 v, w)'}_{\mathring{W}_2^1(Q)} = (w, \Lambda_0 v)'_{\mathring{W}_2^1(Q)}$$

и $(\Lambda_0 v, v)'_{\mathring{W}_2^1(Q)} = \|v\|^2_{L_2(Q)}$, в то время как компактность Λ_0 следует из компактности вложения $\mathring{W}_2^1(Q)$ в $L_2(Q)$.

Итак, интегральное тождество (2.42) эквивалентно операторному уравнению

$$\Lambda_0 u = \frac{1}{c_2 + \lambda}\, u$$

в пространстве $\mathring{W}_2^1(Q)$. По теореме Гильберта – Шмидта существует ортогональный базис в $\mathring{W}_2^1(Q)$ со скалярным произведением по формуле (2.35) с $\mu = c_2$, состоящий из собственных функций u_m оператора Λ_0, которые соответствуют собственным значениям $1/(\lambda_m + c_2)$. Будем считать, что $\|u_m\|_{L_2(Q)} = 1$. Отсюда и из (2.42) имеем

$$(u_m, u_k)_{L_2(Q)} = (u_m, u_k)'_{\mathring{W}_2^1(Q)}/(\lambda_m + c_2) = 0 \quad (m \neq k);$$

$$\Big(u_m/\sqrt{\lambda_m+c_2}, u_m/\sqrt{\lambda_m+c_2}\Big)'_{\mathring{W}_2^1(Q)} = (u_m, u_m)_{L_2(Q)} = 1 \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Следовательно, функции $u_m/\sqrt{\lambda_m+c_2}$ составляют ортонормированный базис в $\mathring{W}_2^1(Q)$, а u_m в силу того, что $\mathring{W}_2^1(Q)$ плотно в $L_2(Q)$, — ортонормированный базис в $L_2(Q)$. $\square$

2.2.3 Гладкость обобщённых решений первой краевой задачи для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения

В целом исследование гладкости обобщённых решений является весьма трудоёмким. Совсем легко, однако, доказать внутреннюю гладкость обобщённого решения в подобластях Q_{sl}.

Теорема 2.2.8 *Пусть уравнение* (2.23) *сильно эллиптическое в Q, а функция u есть обобщённое решение краевой задачи* (2.23), (2.24). *Тогда $u \in W^2_{2,loc}(Q_{sl})$ для всех s, l.*

Доказательство. Пусть $u \in \mathring{W}_2^1(Q)$ и выполняется интегральное тождество (2.34). Обозначим $f' = f - \sum\limits_{i=1}^{n} R_i u_{x_i} - R_0 u$. Очевидно, $f' \in L_2(Q)$.

Зафиксируем s. В (2.34) положим $v = v_s \in C_0^\infty(\bigcup\limits_{l=1}^{N} Q_{sl})$. Тогда из (2.34) в силу лемм 2.2.4, 2.18 будет следовать, что

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_Q (\mathbf{R}_{ijs} U_{sx_j}, V_{sx_i})\, dx = \int\limits_Q (F'_s, V_s)\, dx.$$

Здесь $(.,.)$ означает скалярное произведение в $\mathbb{C}^N$, $N = N(s)$. Поскольку V_s — произвольная вектор-функция из $C_0^{\infty,N}(Q_{s1})$, получается, что вектор-функция $U_s \in W_2^{1,N}(Q_{s1})$ есть обобщённое решение системы

$$-\sum_{i,j=1}^{n} (\mathbf{R}_{ijs} U_{sx_j})_{x_i} = F'_s(x) \quad (x \in Q_{s1})$$

N дифференциальных уравнений с частными производными. По теореме 2.2.4 эта система сильно эллиптическая, а $F'_s \in L_2^N(Q_{s1})$. Поэтому принадлежность U_s пространству $W^{2,N}_{2,loc}(Q_{s1})$ следует из известных результатов по сильно эллиптическим системам [7]. Таким образом, функция $u \in W^2_{2,loc}(Q_{sl})$ для всех s, l. $\square$

Принципиальным является следующий момент: будучи гладким внутри Q_{sl}, обобщённое решение задачи (2.23), (2.24) может иметь особенности при подходе к границе ∂Q_{sl} и, таким образом, не принадлежать $W_2^2(Q_{sl})$ даже в отдельно взятой подобласти Q_{sl}. Приведём соответствующий пример.

Пример 2.2.9 Рассмотрим краевую задачу

$$-\Delta Ru = f(x) \quad (x \in Q), \tag{2.43}$$

$$u\,|_{\partial Q} = 0. \tag{2.44}$$

Здесь Q — квадрат $(0, 4/3) \times (0, 4/3)$,

$$Ru(x) = u(x) + au(x_1 + 1, x_2 + 1) + au(x_1 - 1, x_2 - 1), \quad 0 < a < 1.$$

Очевидно, что уравнение 2.43 сильно эллиптическое.

Разбиение области Q, порождённое разностным оператором R, состоит из двух классов. В первый входят квадраты $Q_{11} = (0, 1/3) \times (0, 1/3)$, $Q_{12} = (1, 4/3) \times (1, 4/3)$, а второй класс состоит из одной подобласти $Q_{21} = Q \setminus (\overline{Q_{11}} \cup \overline{Q_{12}})$.

Введём срезающую функцию $\xi \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+)$:

$$0 \leqslant \xi(r) \leqslant 1, \quad \xi(r) = 1 \ (r \leqslant 1/8), \quad \xi(r) = 0 \ (r \geqslant 1/6),$$

а также функции

$$u_1(r, \varphi) = \xi(r) r^\lambda \sin \lambda\varphi, \quad u_2(r, \varphi) = u_1(r, 3\pi/2 - \varphi),$$

в угле $G = \{(r,\varphi) : 0 < r, 0 < \varphi < 3\pi/2\}$, где r, φ — полярные координаты, а

$$0 < \lambda = (2/\pi)\arccos(a/2) < 1.$$

Непосредственно проверяется, что в окрестности начала координат функции u_1, u_2 гармонические и принадлежат $W_2^1(G)$, но не принадлежат $W_2^2(G)$.

Наконец, в области Q рассмотрим функцию

$$u(x) = \begin{cases} u_1(x_1 - 1/3, x_2) - au_2(x_1 - 1/3, x_2) & (x \in Q_{11}), \\ -au_1(x_1 - 4/3, x_2 - 1) + u_2(x_1 - 4/3, x_2 - 1) & (x \in Q_{12}), \\ (1 - a^2)[u_1(x_1 - 1/3, x_2) + u_2(x_1 - 4/3, x_2 - 1)] & (x \in Q_{21}). \end{cases}$$

Легко видеть, что $u \in \mathring{W}_2^1(Q)$, но $u \notin W_2^2(Q_{sl})$. В то же время

$$Ru(x) = (1 - a^2)[u_1(x_1 - 1/3, x_2) + u_2(x_1 - 4/3, x_2 - 1)] \quad (x \in Q),$$

так что $Ru \in C^\infty(Q)$ и $\Delta Ru \in C_0^\infty(Q)$. Очевидно, что построенная функция $u(x)$ является обобщённым решением краевой задачи (2.43), (2.44) с финитной бесконечно гладкой правой частью.

Конечно, наличие негладкого обобщённого решения в данном примере никак не связано с тем, что гладкость границы нарушается в вершинах квадрата (сглаживание углов не отразилось бы на построениях).

В [58] (см. также [32,33,59]) показано, что гладкость обобщённых решений в подобластях на самом деле может нарушаться лишь вблизи точек множества

$$\mathcal{K} = \bigcup_{h_1, h_2 \in M} \left\{ \overline{Q} \cap (\partial Q + h_1) \cap \overline{[(\partial Q + h_2) \setminus (\partial Q + h_1)]} \right\}.$$

Так, в предыдущем примере

$$\mathcal{K} = \{(1/3, 0),\ (0, 1/3),\ (4/3, 1),\ (1, 4/3)\}.$$

Множество $\mathcal{K}$ может иметь весьма сложную структуру даже в случае $\partial Q \in C^\infty$. В частности, существуют области Q, для которых множество $\mathcal{K} \cap \partial Q$ имеет ненулевую $(n-1)$-мерную лебегову меру.

Приведём без доказательства теорему о гладкости обобщённых решений в подобластях (см. [59]).

Теорема 2.2.9 *Пусть область Q удовлетворяет условиям пункта* 2.2.1 *и, кроме того, $\mu_{n-1}(\mathcal{K} \cap \partial Q) = 0$. Предположим, что уравнение* (2.23) *сильно эллиптическое в Q, а функция u есть обобщённое решение краевой задачи* (2.23), (2.24). *Тогда $u \in W_2^2(Q_{sl} \setminus \overline{\mathcal{K}^\varepsilon})$ для любого $\varepsilon > 0$ $(s = 1, 2, \dots; \ l = 1, \dots, N(s))$, где $\mathcal{K}^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x, \mathcal{K}) < \varepsilon\}$.*

Доказательство основано на известном (см., например, [18]) методе аппроксимации дифференциальных операторов разностными. Отметим, что здесь при реализации этого метода приходится преодолевать дополнительные трудности, вызванные нелокальной «природой» дифференциально-разностных уравнений. Так, рассматривая гладкость решений в окрестности точки $y \in \partial Q_{sl} \backslash \mathcal{K}$, в то же время мы должны рассматривать соответствующие окрестности всех точек $y + h \in \overline{Q}$, где $h \in M$.

В ряде случаев, однако, можно гарантировать гладкость обобщённых решений целиком в подобластях Q_{sl}. Примером является краевая задача

$$ARu = f(x) \quad (x \in Q), \tag{2.45}$$

$$u \,|_{\partial Q} = 0 \tag{2.46}$$

в цилиндре $Q = (0, d) \times G$. Здесь

$$A = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + a_0$$

— дифференциальный оператор второго порядка с постоянными коэффициентами, причём $a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}$ $(i, j = 1, \dots, n)$, а разностный оператор имеет вид

$$Ru(x) = \sum_{j=-N}^{N} b_j u(x_1 + j, x_2, \dots, x_n) \quad (b_j \in \mathbb{C}),$$

т.е. сдвиги присутствуют лишь вдоль оси цилиндра. Область $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ считаем ограниченной с гладкой границей, $d = N + \theta$, $N \in \mathbb{N}$, $0 < \theta \leqslant 1$.

Теорема 2.2.10 *Пусть уравнение* (2.45) *сильно эллиптическое, а функция* u *есть обобщённое решение задачи* (2.45), (2.46), *где* $f \in L_2(Q)$. *Тогда* $u \in W_2^2(Q_{sl})$, *где*

$$Q_{1l} = (l-1, l-1+\theta) \times G \quad (l = 1, \dots, N+1),$$

$$Q_{2l} = (l-1+\theta, l) \times G \quad (l = 1, \dots, N)$$

при $\theta < 1$, *и*

$$Q_{1l} = (l-1, l) \times G \quad (l = 1, \dots, N+1)$$

при $\theta = 1$.

Доказательство. По лемме 2.2.12 дифференциальный оператор A эллиптичен, а разностный оператор $R + R^*$ в $L_2(Q)$ положительно определён и, как следствие, оператор R в $L_2(Q)$ невырожден. По теореме 2.2.1 функция $u \in \mathring{W}_2^1(Q)$ есть обобщённое решение краевой задачи (2.45), (2.46) тогда и только тогда, когда функция $w = Ru$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_Q \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} w_{x_j} \overline{v}_{x_i} \, dx = \int\limits_Q f' \overline{v} \, dx \quad (v \in \mathring{W}_2^1(Q)), \tag{2.47}$$

где $f' = f - \sum\limits_{i=1}^{n} R_i u_{x_i} - R_0 u \in L_2(Q)$, и условиям

$$w \mid_{(0,d)\times\partial G} = 0, \tag{2.48}$$

$$w \mid_{x_1=0} = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{1i} w \mid_{x_1=0}, \quad w \mid_{x_1=d} = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{2i} w \mid_{x_1=d-i} . \tag{2.49}$$

По предположению, боковая поверхность цилиндра является гладкой. В силу теоремы о гладкости вблизи границы обобщённых решений задачи Дирихле для эллиптического уравнения (см., например, [18, глава 4, § 2]), из (2.47) с учётом (2.48) вытекает, что $w \in W_2^2((\varepsilon, d-\varepsilon)\times G)$ для любого $\varepsilon > 0$.

Введём функцию $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\eta(t) = 1\,(|t| < \delta)$, $\eta(t) = 0\,(|t| \geqslant 2\delta)$, где $0 < \delta < \theta/4$, и функцию

$$\xi(x) = \begin{cases} \eta(x_1)\sum\limits_{j=1}^{N}\gamma_{1j}w(x_1+j, x_2, \dots, x_n), & x_1 \in (0, 2\delta),\\ \eta(x_1-d)\sum\limits_{j=1}^{N}\gamma_{2j}w(x_1-j, x_2, \dots, x_n), & x_1 \in (d-2\delta, d). \end{cases}$$

Очевидно, $\xi \in W_2^2(Q)$ и $w - \xi \in \mathring{W}_2^1(Q)$. Кроме того, функция $w - \xi$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_Q \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(w-\xi)_{x_j}\overline{v}_{x_i}\,dx = \int\limits_Q f''\overline{v}\,dx \quad (v \in \mathring{W}_2^1(Q)),$$

где $f'' = f' + \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_{x_jx_i} \in L_2(Q)$. Другими словами, $w-\xi$ есть обобщённое решение эллиптического дифференциального уравнения в цилиндре с однородным условием Дирихле и правой частью из $L_2(Q)$. Хорошо известно [17, глава III, теорема 10.1], что в этом случае обобщённое решение также принадлежит $W_2^2(Q)$. Таким образом, решение $w = Ru$ нелокальной задачи (2.47), (2.48), (2.49) принадлежит $W_2^2(Q)$ и утверждение теоремы вытекает из леммы 2.2.10. $\square$

Совсем легко построить пример, демонстрирующий нарушение гладкости обобщённого решения на границе соседних подобластей.

Пример 2.2.10 Рассмотрим краевую задачу (2.45), (2.46), когда Q есть прямоугольник $(0,2)\times(0,1)$, а $Ru(x) = 2u(x)+u(x_1-1, x_2)+u(x_1+1, x_2)$, $A = -\Delta$. Уравнение (2.45) будет сильно эллиптическим в $\overline{Q}$. Достаточно построить функцию $u \in \mathring{W}_2^1(Q)$ такую, что $u \in W_2^2(Q_{1l})$ и

$$Ru_{x_1}\,|_{x_1=1-0} = Ru_{x_1}\,|_{x_1=1+0}, \quad u_{x_1}\,|_{x_1=1-0} \neq u_{x_1}\,|_{x_1=1+0}\,. \tag{2.50}$$

Пусть $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ — срезающая функция,

$$\xi(x) = 1 \ (|x| < 1/4), \quad \xi(x) = 0 \ (|x| > 1/3).$$

Рассмотрим в прямоугольнике Q функцию

$$u(x) = \begin{cases} 2\xi(x_1, x_2 - 1/2)x_1 + \xi(x_1 - 1, x_2 - 1/2)(x_1 - 1) & (x \in Q_{11}), \\ 0 & (x \in Q_{12}). \end{cases}$$

Очевидно, что $u \in \mathring{W}_2^1(Q)$, $u \in W_2^2(Q_{1l})$ и выполнены соотношения (2.50).

Наконец отметим, что существуют сильно эллиптические уравнения (2.23) такие, что любое обобщённое решение краевой задачи (2.23), (2.24) при f из $L_2(Q)$ принадлежит $W_2^2(Q)$.

Пример 2.2.11 Убедимся, что обобщённое решение первой краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения

$$-(R_1u)_{x_1x_1} - (R_2u)_{x_2x_2} = f(x_1, x_2) \quad \big((x_1, x_2) \in Q = (0, 2) \times (0, 2)\big), \tag{2.51}$$

где разностные операторы определены выражениями

$$R_1u(x) = 2u(x) + u(x_1, x_2 + 1) + u(x_1, x_2 - 1),$$

$$R_2u(x) = 2u(x) + u(x_1 + 1, x_2) + u(x_1 - 1, x_2),$$

при любой функции $f \in L_2(Q)$ существует, единственно и принадлежит пространству $W_2^2(Q)$.

Разностные операторы R_1, R_2, очевидно, самосопряжённые и положительно определённые в $L_2(Q)$ и уравнение (2.51) сильно эллиптическое:

$$(-(R_1w)_{x_1x_1} - (R_2w)_{x_2x_2}, w)_{L_2(Q)} = (R_1w_{x_1}, w_{x_1})_{L_2(Q)} + (R_2w_{x_2}, w_{x_2})_{L_2(Q)} \geqslant$$
$$\geqslant c\left(\|w_{x_1}\|^2_{L_2(Q)} + \|w_{x_2}\|^2_{L_2(Q)}\right) \quad (w \in C_0^\infty(Q)).$$

По теореме 2.2.5 для любой функции $f \in L_2(Q)$ существует единственное обобщённое решение $u \in \mathring{W}_2^1(Q)$ первой краевой задачи для уравнения (2.51). Покажем, что $u \in W_2^2(Q)$. Ключевой момент состоит в том, что всякая функция $u \in \mathring{W}_2^1(Q) \cap W_2^2(Q)$, удовлетворяющая уравнению (2.51) в подобластях

$$Q_{11} = (0,1) \times (0,1), \quad Q_{12} = (1,2) \times (0,1),$$

$$Q_{13} = (0,1) \times (1,2), \quad Q_{14} = (1,2) \times (1,2),$$

есть обобщённое решение первой краевой задачи для уравнения (2.51) во всей области Q. Действительно, интегрируя по частям в интегралах по Q_{1l}, видим, что тождество

$$\sum_{l=1}^{4} \left[(R_1 u_{x_1}, v_{x_1})_{L_2(Q_{1l})} + (R_2 u_{x_2}, v_{x_2})_{L_2(Q_{1l})} \right] = \sum_{l=1}^{4} (f, v)_{L_2(Q_{1l})},$$

определяющее обобщённое решение, сводится к проверке равенства следов

$$R_1 u_{x_1} \mid_{x_1=1-0} = R_1 u_{x_1} \mid_{x_1=1+0}, \tag{2.52}$$

$$R_2 u_{x_2} \mid_{x_2=1-0} = R_2 u_{x_2} \mid_{x_2=1+0} . \tag{2.53}$$

Условие (2.52) можно переписать в виде равенств

$$2u_{x_1}|_{x_1=1-0} + u_{x_1}(x_1, x_2+1)|_{x_1=1-0} = 2u_{x_1}|_{x_1=1+0} + u_{x_1}(x_1, x_2+1)|_{x_1=1+0}$$

при $0 < x_2 < 1$, и

$$2u_{x_1}|_{x_1=1-0} + u_{x_1}(x_1, x_2-1)|_{x_1=1-0} = 2u_{x_1}|_{x_1=1+0} + u_{x_1}(x_1, x_2-1)|_{x_1=1+0}$$

при $1 < x_2 < 2$. Выписанные соотношения очевидным образом вытекают из равенства

$$u_{x_1}|_{x_1=1-0} = u_{x_1}|_{x_1=1+0} \quad (0 < x_2 < 2)$$

(вспомним, что $u \in W_2^2(Q)$). Так же получается и (2.53).

Остаётся убедиться в существовании функции $u \in \mathring{W}_2^1(Q) \cap W_2^2(Q)$, удовлетворяющей уравнению (2.51) в подобластях Q_{1l}. Для этого удобно ввести ограниченные операторы

$$A_0, A_1 : W_{2,0}^2(Q) = \mathring{W}_2^1(Q) \cap W_2^2(Q) \longrightarrow L_2(Q)$$

по формулам

$$A_0 u = -2\Delta u,$$

$$A_1 u(x) = \begin{cases} -u_{x_1x_1}(x_1, x_2+1) - u_{x_2x_2}(x_1+1, x_2), & x \in Q_{11}, \\ -u_{x_1x_1}(x_1, x_2+1) - u_{x_2x_2}(x_1-1, x_2), & x \in Q_{12}, \\ -u_{x_1x_1}(x_1, x_2-1) - u_{x_2x_2}(x_1+1, x_2), & x \in Q_{13}, \\ -u_{x_1x_1}(x_1, x_2-1) - u_{x_2x_2}(x_1-1, x_2), & x \in Q_{14}. \end{cases}$$

Хорошо известно, что для всех $f \in L_2(Q)$ уравнение $A_0 u = f$ имеет единственное решение

$$u(x) = \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{2(f, u_{ij})_{L_2(Q)}}{\pi^2(i^2+j^2)}\, u_{ij}(x), \tag{2.54}$$

где $u_{ij}(x) = \sin(\pi i x_1/2) \cdot \sin(\pi j x_2/2)$. Ряд (2.54) сходится в $W_2^2(Q)$, причём

$$\|u\|^2_{W_2^2(Q)} \leqslant c_1 \|f\|^2_{L_2(Q)} \leqslant c_2 \left(\|u_{x_1x_1}\|^2_{L_2(Q)} + \|u_{x_2x_2}\|^2_{L_2(Q)} \right).$$

Таким образом, в подпространстве $W_{2,0}^2(Q)$ пространства $W_2^2(Q)$ можно ввести эквивалентную норму

$$\|u\|'_{W_{2,0}^2(Q)} = \left\{ \|u_{x_1x_1}\|^2_{L_2(Q)} + \|u_{x_2x_2}\|^2_{L_2(Q)} \right\}^{1/2},$$

обеспечивая оценку $\|u\|'_{W_{2,0}^2(Q)} \leqslant \|f\|_{L_2(Q)}/2$, как показывает (2.54) и равенство Парсеваля. Следовательно, относительно введённой нормы в $W_{2,0}^2(Q)$ будем иметь $\|A_0^{-1}\| \leqslant 1/2$. С другой стороны, непосредственная проверка даёт

$$\|A_1 u\|^2_{L_2(Q)} = \sum_{l=1}^{4} \|A_1 u\|^2_{L_2(Q_{1l})} \leqslant 2 \left\{ \|u_{x_1x_1}\|^2_{L_2(Q_{13})} + \|u_{x_2x_2}\|^2_{L_2(Q_{12})} + \right.$$

$$+\|u_{x_1x_1}\|^2_{L_2(Q_{14})} + \|u_{x_2x_2}\|^2_{L_2(Q_{11})} + \|u_{x_1x_1}\|^2_{L_2(Q_{11})} + \|u_{x_2x_2}\|^2_{L_2(Q_{14})} +$$

$$+\|u_{x_1x_1}\|^2_{L_2(Q_{12})} + \|u_{x_2x_2}\|^2_{L_2(Q_{13})}\Big\} = 2\left(\|u\|'_{W^2_{2,0}(Q)}\right)^2,$$

т.е. $\|A_1\| \leqslant \sqrt{2}$. Таким образом, норма оператора $A_0^{-1}A_1$ в $W^2_{2,0}(Q)$ не превосходит $1/\sqrt{2}$, и оператор $A_0 + A_1 = A_0(I + A_0^{-1}A_1)$ имеет ограниченный обратный $(A_0 + A_1)^{-1} : L_2(Q) \to W^2_{2,0}(Q)$. Тогда для любой функции $f \in L_2(Q)$ определена функция $u = (A_0 + A_1)^{-1}f \in W^2_{2,0}(Q)$, которая и является искомой.

Конечно, причиной сохранения гладкости решения во всей области Q в этом примере является то, что сдвиги в разностных операторых и дифференцирование производятся по разным переменным.

2.3 Первая краевая задача для сильно эллиптического функционально-дифференциального уравнения с растяжениями и сжатиями аргументов

2.3.1 Операторы растяжения и сжатия в $\mathbb{R}^n$ и ограниченной области

С этого момента мы будем иметь дело с функциональными операторами вида

$$Ru = \sum_{j=-J}^{J} a_j P^j u = \sum_{j=-J}^{J} a_j u(q^{-j}x_1, \dots, q^{-j}x_n) \quad (q > 1,\, a_j \in \mathbb{C}), \quad (2.55)$$

рассматривая их в $\mathbb{R}^n$, а также в ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^n$. Во втором случае действует прежнее соглашение: вначале продолжаем функцию нулём в $\mathbb{R}^n \setminus \overline{Q}$, а от того, что получилось в результате применения (2.55), берём сужение на Q. Принципиальное отличие от разностных операторов возникает, когда область Q содержит начало координат —

неподвижную точку для операторов сжатия и растяжения. В этом случае появляются классы разбиения, состоящие уже из бесконечного числа подобластей.

Сопряжённым к оператору R в $L_2(\mathbb{R}^n)$ (и в $L_2(Q)$) будет оператор

$$R^* = \sum_{j=-J}^{J} \overline{a}_j P^{j*} = \sum_{j=-J}^{J} \overline{a}_j q^{nj} P^{-j} = \sum_{j=-J}^{J} \overline{a}_{-j} q^{-nj} P^j.$$

Очевидно, что преобразование Фурье $u(x) \mapsto \tilde{u}(\xi)$ превращает P в P^*. Поэтому оператор (2.55) в образах Фурье заменяется оператором

$$\widetilde{R} = \sum_{j=-J}^{J} a_j P^{j*} = \sum_{j=-J}^{J} a_{-j} q^{-nj} P^j$$

того же вида.

С точки зрения алгебраических свойств (обратимость, положительность и т.д.) операторов $R : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$, удобно использовать преобразование Гельфанда, как это и было сделано в главе 1 для $n = 1$. Оператору R, заданному формулой (2.55), ставится в соответствие функция (символ оператора)

$$r(\lambda) = \sum_{j=-J}^{J} a_j \lambda^j, \quad \lambda \in \sigma(P), \tag{2.56}$$

рассматриваемая на спектре $\sigma(P)$ оператора P в $\mathcal{B}(L_2(\mathbb{R}^n))$. Это соответствие однозначно продолжается до сохраняющего инволюцию изометрического изоморфизма между коммутативной B^*-алгеброй $\mathcal{A}_R$ ограниченных операторов в $L_2(\mathbb{R}^n)$, порождённой операторами P и P^*, и алгеброй $C(\sigma(P))$ комплекснозначных непрерывных функций на спектре оператора P. Отсюда, в частности, следует, что спектр оператора $R : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ совпадает с множеством значений его символа $r(\lambda)$. Аналогично пункту 1.3.1 доказывается, что $\sigma(P) = \big\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = q^{n/2}\big\}$.

Символами операторов R^* и $\widetilde{R}$ будут выражения $\overline{r(\lambda)}$ и $r(\overline{\lambda})$ соответственно.

Для решения проблемы коэрцитивности в следующем пункте нам понадобится более широкая операторная алгебра, в которую включены также операторы умножения на однородные функции нулевой степени. Начнём с предварительных рассуждений.

Пусть S^{n-1} есть единичная сфера в $\mathbb{R}^n$. Поставим в соответствие каждой функции $g \in C(S^{n-1})$ функцию $G \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ по правилу

$$G(x) = g(x/|x|) \quad (x \in \mathbb{R}^n,\, x \neq 0). \tag{2.57}$$

Умножение на $G(x)$ в $L_2(\mathbb{R}^n)$ представляет собой ограниченный оператор, который мы также будем обозначать через G. Итак,

$$Gu(x) = G(x)u(x) = g(x/|x|)u(x).$$

Отображение $g \mapsto G$ есть, очевидно, гомоморфизм алгебры $C(S^{n-1})$ в алгебру ограниченных операторов $\mathcal{B}\left(L_2(\mathbb{R}^n)\right)$. Покажем, что оно является изометрией. С одной стороны,

$$\|Gu\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |G(x)|^2 |u(x)|^2\, dx\Big)^{1/2} \leqslant \|G\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} =$$

$$= \|g\|_{C(S^{n-1})}\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}, \quad \text{т.е.} \quad \|G\| \leqslant \|g\|_{C(S^{n-1})}. \tag{2.58}$$

С другой стороны, пусть $|G(\xi^0)| = \|g\|_{C(S^{n-1})}$ и пусть

$$u_\varepsilon(x) = 1 \ (|x-\xi^0| < \varepsilon), \quad u_\varepsilon(x) = 0 \ (|x-\xi^0| > \varepsilon).$$

Тогда по теореме о среднем

$$\frac{\|Gu_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}}{\|u_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}} = \Big(\frac{1}{\sigma_n \varepsilon^n} \int\limits_{|x-\xi^0|<\varepsilon} |G(x)|^2\, dx\Big)^{1/2} = |G(\tilde{x})|$$

для некоторого $\tilde{x}$, $|\tilde{x} - \xi^0| < \varepsilon$, так что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\|Gu_\varepsilon\|}{\|u_\varepsilon\|} = |G(\xi^0)| = |g(\xi^0)|. \tag{2.59}$$

Из (2.58) и (2.59) следует, что$\|G\| = \|g\|_{C(S^{n-1})}$.

Таким образом, алгебра $C(S^{n-1})$ изометрически изоморфна замкнутой подалгебре $\mathcal{A}_G$ алгебры $\mathcal{B}\left(L_2(\mathbb{R}^n)\right)$, состоящей из операторов умножения на функции $G(x)$ вида (2.57). Отсюда заключаем, что, во-первых, каждый комплексный гомоморфизм h алгебры $\mathcal{A}_G$ имеет вид

$$h(G) = g(\xi^h) \quad (\xi^h \in S^{n-1}).$$

Во-вторых, так как полиномы $\mathrm{Pol}\,(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ плотны в $C(S^{n-1})$ (по теореме Стоуна – Вейерштрасса [29, с. 137]), то в алгебре $\mathcal{A}_G$ плотны полиномы $\mathrm{Pol}\,(G_1, \ldots, G_n)$, где G_i обозначает оператор умножения на функцию $G_i(x) = x_i/|x|$.

Далее, операторы P и P^* коммутируют с операторами из $\mathcal{A}_G$. Следовательно, замыкание (по операторной норме) множества полиномов $\mathrm{Pol}\,(P, P^*, G_1, \ldots, G_n)$ есть коммутативная B^*-алгебра (как подалгебра B^*-алгебры $\mathcal{B}\left(L_2(\mathbb{R}^n)\right)$). Обозначим её $\mathcal{A}_{R,G}$. Очевидно, $\mathcal{A}_G$ является замкнутой подалгеброй в $\mathcal{A}_{R,G}$.

По теореме Гельфанда – Наймарка [29, с. 311] преобразование Гельфанда осуществляет изометрический изоморфизм

$$\mathcal{A}_{R,G} \ni T \mapsto \widehat{T} \in C(\Delta_{R,G})$$

алгебры $\mathcal{A}_{R,G}$ на алгебру $C(\Delta_{R,G})$, где $\Delta_{R,G}$ — пространство максимальных идеалов алгебры $\mathcal{A}_{R,G}$. Пространство $\Delta_{R,G}$ снабжается топологией Гельфанда, которая является хаусдорфовой и компактной [29, с. 300].

Покажем, что $\Delta_{R,G}$ есть, с точностью до гомеоморфизма, некоторый компакт $K \subset \{(\lambda, \xi) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^n : |\lambda| = q^{n/2},\ |\xi| = 1\}$. Для этого рассмотрим отображение $\phi : \Delta_{R,G} \to \mathbb{C}^{n+1}$, заданное формулой

$$\phi(h) = \big(\widehat{P}(h), \widehat{G}_1(h), \ldots, \widehat{G}_n(h)\big).$$

По определению преобразования Гельфанда оно непрерывно, а множество значений первой координаты есть $\sigma(P)$. Если h — гомоморфизм

$\mathcal{A}_{R,G}$, то h есть гомоморфизм $\mathcal{A}_G$, и поэтому

$$h(G) = g(\xi^h) \quad (\xi^h \in S^{n-1}).$$

Но тогда

$$\big(\widehat{G}_1(h), \ldots, \widehat{G}_n(h)\big) = \big(h(G_1), \ldots, h(G_n)\big) = (\xi_1^h, \ldots, \xi_n^h) = \xi^h.$$

Таким образом, множество значений векторной функции $\phi(h)$ есть компакт $K \subset \sigma(P) \times S^{n-1}$.

Далее, пусть $\phi(h_1) = \phi(h_2)$, т.е. $h_1(P) = h_2(P)$ и $h_1(G_i) = h_2(G_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Так как преобразование Гельфанда сохраняет инволюцию, то $h_1(P^*) = h_2(P^*)$. Отсюда следует, что гомоморфизмы совпадают на полиномах $\operatorname{Pol}(P, P^*, G_1, \ldots, G_n)$, и в силу плотности последних получаем $h_1 = h_2$. Итак, отображение ϕ взаимно однозначно, а, как известно, непрерывное взаимно однозначное отображение компактного пространства в хаусдорфово есть гомеоморфизм.

В результате имеем изометрический изоморфизм

$$\Psi : \mathcal{A}_{R,G} \to C(K), \quad \Psi(T) = \widehat{T} \circ \phi^{-1} \; (T \in \mathcal{A}_{R,G}),$$

при этом

$$\Psi(P)(\lambda, \xi) = \widehat{P}\left(\phi^{-1}(\lambda, \xi)\right) = \lambda,$$

$$\Psi(G_i)(\lambda, \xi) = \widehat{G}_i\left(\phi^{-1}(\lambda, \xi)\right) = \xi_i \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Так как Ψ — гомоморфизм, то

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|=m} \sum_j a_{\alpha\beta j} P^j G_1^{\alpha_1+\beta_1} \ldots G_n^{\alpha_n+\beta_n} \xrightarrow{\Psi} \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} \sum_j a_{\alpha\beta j} \lambda^j \xi^{\alpha+\beta}$$

$$((\lambda, \xi) \in K).$$

Здесь $a_{\alpha\beta j} \in \mathbb{C}$; $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ — мультииндексы; индекс j пробегает конечное множество целых значений.

Обозначим

$$R_{\alpha\beta}=\sum_j a_{\alpha\beta j}P^j,\quad r_{\alpha\beta}(\lambda)=\sum_j a_{\alpha\beta j}\lambda^j,$$
$$G^{\alpha+\beta}=G_1^{\alpha_1+\beta_1}\dots G_n^{\alpha_n+\beta_n}.$$

Лемма 2.3.1 *Пусть*

$$\mathrm{Re}\sum_{|\alpha|,|\beta|=m} r_{\alpha\beta}(\lambda)\xi^{\alpha+\beta}>0\quad((\lambda,\xi)\in\sigma(P)\times S^{n-1}).$$

Тогда оператор

$$T=\sum_{|\alpha|,|\beta|=m}(R_{\alpha\beta}+R^*_{\alpha\beta})G^{\alpha+\beta}:L_2(\mathbb{R}^n)\to L_2(\mathbb{R}^n)$$

положительно определён, т.е.

$$\mathrm{Re}\,(Tu,u)_{L_2(\mathbb{R}^n)}\geqslant c\|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)}\quad(u\in L_2(\mathbb{R}^n)).$$

Лемма вытекает из построенного изоморфизма и того факта, что спектр оператора один и тот же во всех *-алгебрах, его содержащих.

Систематическое применение матричного подхода в духе разностных операторов к изучению операторов (2.55) затруднительно вследствие бесконечной размерности получающихся матриц — так будет, если область содержит начало координат. С другой стороны, эта «бесконечность» даёт возможность предельного перехода. Приведём один результат такого сорта. Он будет использован в следующем пункте.

Пусть ограниченное открытое множество $\Omega_1\subset\mathbb{R}^n$ таково, что $q^{-1}\Omega_1\cap\Omega_1=\varnothing$, и пусть N — натуральное число. Положим

$$\Omega_k=q^{1-k}\Omega_1,\ k=1,\dots,N,\quad \Omega=\bigcup_{k=1}^N\Omega_k.$$

Имеем $\Omega_{k_1}\cap\Omega_{k_2}=\varnothing$ при $k_1\neq k_2$.

По всякой функции $u\in L_2(\Omega)$ строим вектор-функцию

$$U=(u_1\ \dots\ u_N)^T\in L_2^N(\Omega_1),$$

$$u_k(x) = q^{n(1-k)/2}u(q^{1-k}x) \quad (x \in \Omega_1,\ k = 1, \ldots, N). \tag{2.60}$$

Отображение $u \mapsto U$ является унитарным. Действительно, используя замену переменных, будем иметь

$$(u,v)_{L_2(\Omega)} = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{\Omega_k} u(x)\overline{v(x)}\,dx = \sum_{k=1}^{N} q^{n(1-k)} \int\limits_{\Omega_1} u(q^{1-k}x)\overline{v(q^{1-k}x)}\,dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} (u_k, v_k)_{L_2(\Omega_1)} = (U,V)_{L_2^N(\Omega_1)}. \tag{2.61}$$

Далее, по заданному формулой (2.55) оператору R строим матрицу $\mathbf{R}$ порядка $N \times N$ с элементами

$$\rho_{jk} = \begin{cases} q^{n(k-j)/2}a_{k-j}, & |k-j| \leqslant J, \\ 0, & |k-j| > J. \end{cases}$$

Тогда, если $u \in L_2(\Omega)$, $v = Ru$ и $V = (v_1 \ldots v_N)^T \in L_2^N(\Omega_1)$ — соответствующая вектор-функция, то

$$v_k(x) = q^{n(1-k)/2}(Ru)(q^{1-k}x) = \sum_{|j|\leqslant J} q^{n(1-k)/2}a_j u(q^{1-(k+j)}x) =$$

$$= \sum_{|l-k|\leqslant J} q^{n(1-l)/2}q^{n(l-k)/2}a_{l-k}u(q^{1-l}x) = \sum_{l=1}^{N} \rho_{kl}u_l(x) \quad (x \in \Omega_1).$$

Таким образом,

$$v = Ru\ (u,v \in L_2(\Omega)) \Longleftrightarrow V = \mathbf{R}U\ (U,V \in L_2^N(\Omega_1)). \tag{2.62}$$

Лемма 2.3.2 *Пусть матрицы* $\mathbf{R}+\mathbf{R}^*$ *равномерно по* N *положительно определены, т.е. существует постоянная* $c > 0$ *такая, что*

$$\operatorname{Re}(\mathbf{R}Y, Y) \geqslant c|Y|^2 \quad (N = 1, 2, \ldots;\ Y \in \mathbb{C}^N).$$

Тогда оператор $R + R^* : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ *положительно определён.*

Доказательство. Зафиксируем натуральное N. Положим

$$\Omega_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^n : q^{-1}M < |x| < M\right\}, \quad \Omega = \bigcup_{k=1}^{N} q^{1-k}\Omega_1,$$

где $M > 0$ произвольно. Пусть $u \in L_2(\mathbb{R}^n)$, $u = 0$ вне Ω. Используя условие леммы, (2.61) и (2.62), будем иметь

$$\mathrm{Re}\,(Ru, u)_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \mathrm{Re}\,(v, u)_{L_2(\Omega)} = \mathrm{Re}\,(V, U)_{L_2^N(\Omega_1)} =$$

$$= \mathrm{Re}\,(\mathbf{R}U, U)_{L_2^N(\Omega_1)} \geqslant c\|U\|^2_{L_2^N(\Omega_1)} = c\|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)},$$

причём c не зависит от N, M, u. Но при $M \to \infty$ и $N \to \infty$ функция u пробегает всюду плотное в $L_2(\mathbb{R}^n)$ подмножество. Поэтому неравенство $\mathrm{Re}\,(Ru, u)_{L_2(\mathbb{R}^n)} \geqslant c\|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)}$ выполняется для любых $u \in L_2(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Из положительной определённости оператора $R + R^*$ в $L_2(\mathbb{R}^n)$, в свою очередь, следует, что

$$\mathrm{Re}\, r(\lambda) = \mathrm{Re} \sum_{|j| \leqslant J} a_j \lambda^j > 0 \quad (|\lambda| = q^{n/2}).$$

В качестве примера применения леммы (2.3.2) приведём следующий результат.

Лемма 2.3.3 *Предположим, что выполнено условие* $0 \in Q$ *и оператор* $R + R^* : L_2(Q) \to L_2(Q)$ *положительно определён. Тогда положительно определённым будет и оператор* $R + R^* : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Имеем

$$\mathrm{Re}\,(Ru, u)_{L_2(Q)} \geqslant c\|u\|^2_{L_2(Q)} \quad (u \in L_2(Q)). \tag{2.63}$$

Возьмём лежащую в Q шаровую окрестность B начала координат и положим

$$\Omega_1 = B \setminus q^{-1}\overline{B}, \quad \Omega_k = q^{1-k}\Omega_1 \ (k = 1, \ldots, N), \quad \Omega = \bigcup_{k=1}^{N} \Omega_k.$$

Подставляя в (2.63) функцию y, принимающую постоянное значение на Ω_k и равную нулю вне Ω, получим с помощью (2.61) и (2.62)

$$\mathrm{Re}\,(Ry, y)_{L_2(\Omega)} = \mathrm{Re}\,(\mathbf{R}Y, Y)_{L_2^N(\Omega_1)} = \mu(\Omega_1)\mathrm{Re}\,(\mathbf{R}Y, Y) \geqslant$$

$$\geqslant c\|y\|^2_{L_2(\Omega)} = c\|Y\|^2_{L_2^N(\Omega_1)} = c\mu(\Omega_1)|Y|^2 \quad (Y \in \mathbb{C}^N).$$

Таким образом, матрицы $\mathbf{R} + \mathbf{R}^*$ положительно определены равномерно по N. Остаётся применить лемму 2.3.2. $\square$

Рассмотрим теперь ограниченную область Q, удовлетворяющую условию

$$q^{-1}\overline{Q} \subset Q. \tag{2.64}$$

Для неё имеют место аналоги лемм 1.3.2 и 1.3.4.

Лемма 2.3.4 *Пусть для ограниченной области Q выполнено условие* (2.64). *Тогда*

(a) *если $|\lambda_0| > q^{n/2}$, то для всех $k = 0, 1, \ldots$ отображение*

$$P - \lambda_0 I : W_2^k(Q) \to W_2^k(Q)$$

является изоморфизмом;

(b) *если $|\lambda_0| < q^{n/2-k}$ $(k = 0, 1, \ldots)$, то отображение*

$$P - \lambda_0 I : \mathring{W}_2^k(Q) \to \mathring{W}_2^k(qQ)$$

является изоморфизмом.

Лемма 2.3.5 *Пусть ограниченная область Q удовлетворяет условию* (2.64), *$|\lambda_0| = q^{n/2}$, $u \in L_2(Q)$, $v = (P - \lambda_0 I)u \in L_2(Q)$. Тогда*

$$u(x) = -\sum_{m=0}^{\infty} \lambda_0^{-(m+1)} v(q^{-m}x) \quad (x \in Q),$$

$$v \in W_2^k(Q) \Longrightarrow u \in W_2^k(Q).$$

Доказательства основаны на формулах для резольвенты оператора P,

$$(P - \lambda_0 I)^{-1} u(x) = \begin{cases} -\sum\limits_{m=0}^{\infty} \lambda_0^{-(m+1)} u(q^{-m}x), & |\lambda_0| > q^{n/2}, \\ \sum\limits_{m=1}^{\infty} \lambda_0^{m-1} u(q^m x), & |\lambda_0| < q^{n/2}, \end{cases} \tag{2.65}$$

и полностью повторяют доказательства лемм 1.3.2 и 1.3.4.

2.3.2 Проблема коэрцитивности для функционально-дифференциального уравнения с растяжениями и сжатиями аргументов

Используемый подход позволяет изложить результат сразу для уравнения высокого порядка с постоянными коэффициентами без потери наглядности.

В ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^n$ рассмотрим уравнение порядка $2m$

$$A_R u = \sum_{|\alpha|,|\beta| \leqslant m} D^\alpha R_{\alpha\beta} D^\beta u = f(x) \quad (x \in Q), \tag{2.66}$$

где

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}, \quad D_p = -i\partial/\partial x_p \quad (p = 1, \dots, n),$$

$$R_{\alpha\beta} u(x) = \sum_{j=-J}^{J} a_{\alpha\beta j} u(q^{-j} x) \quad (q > 1,\, a_{\alpha\beta j} \in \mathbb{C}),$$

$f \in L_2(Q)$, $u(x) = 0$ при $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{Q}$.

Символом уравнения будем называть выражение

$$a_R(\lambda, \xi) = \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} \sum_j a_{\alpha\beta j} \lambda^j \xi^{\alpha+\beta} \quad (\lambda \in \mathbb{C},\, \xi \in \mathbb{R}^n).$$

По аналогии с дифференциально-разностными уравнениями назовём уравнение (2.66) сильно эллиптическим в $\overline{Q}$, если существуют такие постоянные $c_1 > 0, c_2 \geqslant 0$, что для всех $u \in C_0^\infty(Q)$ выполнено неравенство

$$\operatorname{Re}(A_R u, u)_{L_2(Q)} \geqslant c_1 \|u\|^2_{W_2^m(Q)} - c_2 \|u\|^2_{L_2(Q)}. \tag{2.67}$$

Следующая теорема даёт достаточные условия сильной эллиптичности. Эти условия не зависят от области Q.

Теорема 2.3.1 *Предположим, что*

$$\operatorname{Re} a_R(\lambda, \xi) > 0 \quad (|\lambda| = q^{n/2},\, |\xi| = 1). \tag{2.68}$$

Тогда для любой ограниченной области Q уравнение (2.66) *сильно эллиптическое в $\overline{Q}$.*

Доказательство. Используя интегрирование по частям, неравенство Коши – Буняковского, ограниченность операторов $R_{\alpha\beta}$ в $L_2(Q)$ и оценки раздела 2.1, будем иметь (суммирование по всем мультииндексам α и β таким, что $|\alpha| \leqslant m$, $|\beta| \leqslant m$, $|\alpha| + |\beta| < 2m$)

$$\left|\sum \left(D^\alpha R_{\alpha\beta} D^\beta u, u\right)_{L_2(Q)}\right| = \left|\sum \left(R_{\alpha\beta} D^\beta u, D^\alpha u\right)_{L_2(Q)}\right| \leqslant$$

$$\leqslant M\|u\|_{W_2^m(Q)}\|u\|_{W_2^{m-1}(Q)} \leqslant M_1\left(\varepsilon\|u\|^2_{W_2^m(Q)} + \varepsilon^{1-2m}\|u\|^2_{L_2(Q)}\right) \qquad (2.69)$$

для всех $u \in C_0^\infty(Q)$ и $\varepsilon > 0$. Далее,

$$\overline{a_R(\lambda, \xi)} = \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} \overline{r_{\alpha\beta}(\lambda)}\xi^{\alpha+\beta} = \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} \overline{r_{\beta\alpha}(\lambda)}\xi^{\alpha+\beta},$$

поэтому

$$2\mathrm{Re}\, a_R(\lambda, \xi) = \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} \left(r_{\alpha\beta}(\lambda) + \overline{r_{\beta\alpha}(\lambda)}\right)\xi^{\alpha+\beta}.$$

Кроме того, подставляя $\overline{\lambda}$ вместо λ в условие (2.73) и вводя обозначение $\tilde{r}_{\alpha\beta}(\lambda) = r_{\alpha\beta}(\overline{\lambda})$ (выражение $\tilde{r}_{\alpha\beta}(\lambda)$ — символ оператора $\widetilde{R}_{\alpha\beta}$), перепишем это условие в эквивалентной форме

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|=m} \left(\tilde{r}_{\alpha\beta}(\lambda) + \overline{\tilde{r}_{\beta\alpha}(\lambda)}\right)\xi^{\alpha+\beta} > 0 \quad (|\lambda| = q^{n/2},\ |\xi| = 1). \qquad (2.70)$$

Слева в (2.67) рассмотрим слагаемые, входящие в старшую часть оператора A_R. После интегрирования по частям с учётом $\operatorname{supp} u \subset Q$ и применения теоремы Платншереля получаем (суммирование по всем мультииндексам α и β таким, что $|\alpha| = |\beta| = m$)

$$2\mathrm{Re}\sum \left(D^\alpha R_{\alpha\beta} D^\beta u, u\right)_{L_2(Q)} = \sum \left((R_{\alpha\beta} + R^*_{\beta\alpha})D^\beta u, D^\alpha u\right)_{L_2(\mathbb{R}^n)} =$$

$$= \sum\left((\widetilde{R}_{\alpha\beta} + \widetilde{R}^*_{\beta\alpha})(\xi^\beta \tilde{u}), \xi^\alpha \tilde{u}\right)_{L_2(\mathbb{R}^n)} =$$

$$= \sum\left(\left(\widetilde{R}_{\alpha\beta} + \widetilde{R}^*_{\beta\alpha}\right)\frac{\xi^\beta}{|\xi|^m}|\xi|^m\tilde{u}, \frac{\xi^\alpha}{|\xi|^m}|\xi|^m\tilde{u}\right)_{L_2(\mathbb{R}^n)} =$$

$$= \sum\left(\left(\widetilde{R}_{\alpha\beta} + \widetilde{R}^*_{\beta\alpha}\right)\frac{\xi^{\alpha+\beta}}{|\xi|^{2m}}|\xi|^m\tilde{u}, |\xi|^m\tilde{u}\right)_{L_2(\mathbb{R}^n)} =$$

$$= \Big(\sum (\widetilde{R}_{\alpha\beta} + \widetilde{R}^*_{\beta\alpha}) G^{\alpha+\beta}(|\xi|^m \tilde{u}), |\xi|^m \tilde{u}\Big)_{L_2(\mathbb{R}^n)}. \qquad (2.71)$$

Здесь мы воспользовались тем, что операторы (2.55) коммутируют с операторами умножения на однородные функции нулевой степени. Остаётся воспользоваться соотношением (2.70) и леммой 2.3.2. Продолжая (2.71), будем иметь

$$\Big(\sum (\widetilde{R}_{\alpha\beta} + \widetilde{R}^*_{\beta\alpha}) G^{\alpha+\beta}(|\xi|^m \tilde{u}), |\xi|^m \tilde{u}\Big)_{L_2(\mathbb{R}^n)} \geqslant c \big\| |\xi|^m \tilde{u} \big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)} \geqslant c_1 \|u\|^2_{W_2^m(Q)} \qquad (2.72)$$

по теореме об эквивалентных нормах в $\mathring{W}_2^m(Q)$.

Из (2.69), (2.71) и (2.72) следует (2.67). Теорема доказана. □

Достаточное условие (2.73) кажется весьма грубым, поскольку оно не учитывает вид области Q и, кроме того, положительность символа проверяется на всём прямом произведении $\sigma(P) \times S^{n-1}$, а не на компакте K, который есть, вообще говоря, подмножество $\sigma(P) \times S^{n-1}$. Тем не менее для областей, содержащих начало координат, это условие оказывается и необходимым для сильной эллиптичности.

Теорема 2.3.2 *Пусть* $0 \in Q$ *и уравнение* (2.66) *сильно эллиптическое в* $\overline{Q}$. *Тогда*

$$\operatorname{Re} a_R(\lambda, \xi) > 0 \quad (|\lambda| = q^{n/2},\ |\xi| = 1). \qquad (2.73)$$

Доказательство. Интегрируя в (2.67) по частям и оценивая младшие члены уравнения, будем иметь

$$\operatorname{Re} \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} \big(R_{\alpha\beta} D^\beta u, D^\alpha u\big)_{L_2(Q)} \geqslant c_3 \|u\|^2_{W_2^m(Q)} - c_4 \|u\|^2_{L_2(Q)} \qquad (2.74)$$

для некоторых не зависящих от $u \in C_0^\infty(Q)$ постоянных $c_3 > 0$, $c_4 \geqslant 0$. Зафиксируем лежащую в Q шаровую окрестность B начала координат и натуральное N. Обозначим

$$\Omega_1 = B \setminus q^{-1}\overline{B}, \quad \Omega_k = q^{1-k}\Omega_1 \ (k = 2, \dots, N), \quad \Omega = \bigcup_{k=1}^N \Omega_k.$$

Будем подставлять в неравенство (2.74) функции с носителями в Ω, $u \in C_0^\infty(\Omega) \subset C_0^\infty(Q)$. По каждой такой функции $u(x)$ определяем вектор-функцию

$$H = (h_1 \dots h_N)^T \in C_0^{\infty,N}(\Omega_1),$$
$$h_k(x) = q^{m(k-1)} u_k(x) \quad (x \in \Omega_1;\ k = 1, \dots, N)$$

(см. (2.60)).

Для всех мультииндексов α, $|\alpha| = m$, справедливы соотношения

$$(D^\alpha u)_k(x) = q^{n(1-k)/2} D^\alpha u(y)\,|_{y=q^{1-k}x} = q^{m(k-1)} q^{n(1-k)/2} D^\alpha \big(u(q^{1-k}x)\big) =$$
$$= q^{m(k-1)} D^\alpha u_k(x) = D^\alpha h_k(x),$$

т.е. функции $D^\alpha u$ отвечает вектор-функция $D^\alpha H$ в области Ω_1. Отсюда с учётом (2.61), (2.62) получаем

$$(R_{\alpha\beta} D^\beta u, D^\alpha u)_{L_2(Q)} = (R_{\alpha\beta} D^\beta u, D^\alpha u)_{L_2(\Omega)} = (\mathbf{R}_{\alpha\beta} D^\beta H, D^\alpha H)_{L_2^N(\Omega_1)},$$

$$\|u\|^2_{W_2^m(Q)} \sim \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|^2_{L_2(\Omega)} = \sum_{|\alpha|=m} \sum_{k=1}^N \|(D^\alpha u)_k\|^2_{L_2(\Omega_1)} =$$
$$= \sum_{|\alpha|=m} \sum_{k=1}^N \|D^\alpha h_k\|^2_{L_2(\Omega_1)} = \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha H\|^2_{L_2^N(\Omega_1)} \sim \|H\|^2_{W_2^{m,N}(\Omega_1)},$$
$$\|u\|^2_{L_2(Q)} = \sum_{k=1}^N \|u_k\|^2_{L_2(\Omega_1)} = \sum_{k=1}^N q^{2m(1-k)} \|h_k\|^2_{L_2(\Omega_1)} \leqslant \|H\|^2_{L_2^N(\Omega_1)}.$$

Теперь неравенство (2.74) может быть переписано в виде

$$\operatorname{Re} \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} \big(\mathbf{R}_{\alpha\beta} D^\beta H, D^\alpha H\big)_{L_2^N(\Omega_1)} \geqslant c_5 \|H\|^2_{W_2^{m,N}(\Omega_1)} - c_4 \|H\|^2_{L_2^N(\Omega_1)},$$

где $H \in C_0^{\infty,N}(\Omega_1)$ — произвольная вектор-функция, а c_4, c_5 не зависят от N и H. Отсюда и из результатов раздела 2.1 следует, что для всех натуральных N матричный оператор $\sum\limits_{|\alpha|,|\beta|=m} D^\alpha R_{\alpha\beta} D^\beta$ сильно эллиптический:

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|=m} \xi^{\alpha+\beta} \big((\mathbf{R}_{\alpha\beta} + \mathbf{R}^*_{\alpha\beta})Y, Y\big) \geqslant c_5 |\xi|^{2m} |Y|^2 \quad (\xi \in \mathbb{R}^n,\ Y \in \mathbb{C}^N).$$

Другими словами, для каждого $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$ матрицы

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|=m} \xi^{\alpha+\beta}(\mathbf{R}_{\alpha\beta} + \mathbf{R}^*_{\alpha\beta})$$

положительно определены равномерно по N. По лемме 2.3.2 оператор

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|=m} \xi^{\alpha+\beta}(R_{\alpha\beta} + R^*_{\alpha\beta}) : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$$

положительно определён. Будучи оператором вида (2.55) (ξ здесь — фиксированный вектор), он имеет символ с положительной вещественной частью:

$$\operatorname{Re} \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} r_{\alpha\beta}(\lambda)\xi^{\alpha+\beta} > 0 \quad (|\lambda| = q^{n/2}).$$

□

2.3.3 Разрешимость и спектр задачи Дирихле для сильно эллиптического уравнения с растяжениями и сжатиями аргументов

Пусть Q — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. В случае, когда граница ∂Q является гладким многообразием, пространство $\mathring{W}_2^m(Q)$ (замыкание множества $C_0^\infty(Q)$ в $W_2^m(Q)$) совпадает с подпространством

$$\{u \in W_2^m(Q) : D_\nu^\mu u|_{\partial Q} = 0,\ \mu = 0, \dots, m-1\}.$$

Здесь $D_\nu = -i\partial/\partial\nu$; ν — внешняя нормаль к границе ∂Q. Кроме того, $\mathring{W}_2^m(Q)$ можно отождествить с подпространством функций из $W_2^m(\mathbb{R}^n)$, обращающихся в ноль вне Q.

Аналогом первой краевой задачи (условие $u|_{\partial Q} = 0$) в случае сильно эллиптического уравнения высокого порядка (2.66) является задача с краевыми условиями

$$D_\nu^\mu u\,|_{\partial Q} = 0 \quad (\mu = 0, \dots, m-1), \tag{2.75}$$

которую также принято называть задачей Дирихле. С задачей (2.66), (2.75) связывается неограниченный оператор

$$A_R : L_2(Q) \to L_2(Q),$$

$$A_R u = \sum_{|\alpha|,|\beta| \leqslant m} D^\alpha R_{\alpha\beta} D^\beta u, \quad D(A_R) = \{u \in \mathring{W}_2^m(Q) : A_R u \in L_2(Q)\}.$$

Под обобщённым решением краевой задачи (2.66), (2.75) понимаем функцию u такую, что $u \in D(A_R)$ и $A_R u = f$. Можно дать другое, эквивалентное определение, называя обобщённым решением функцию $u \in \mathring{W}_2^m(Q)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\sum_{|\alpha|,|\beta| \leqslant m} (R_{\alpha\beta} D^\beta u, D^\alpha v)_{L_2(Q)} = (f, v)_{L_2(Q)}$$

при всех $v \in \mathring{W}_2^m(Q)$, где $f \in L_2(Q)$.

В этом пункте мы предполагаем, что функционально-дифференциальное уравнение (2.66) сильно эллиптическое. Оператор A_R в этом случае также называется сильно эллиптическим.

Вместе с A_R будем рассматривать и формально сопряжённый оператор $\widehat{A}_R : L_2(Q) \to L_2(Q)$,

$$\widehat{A}_R u = \sum_{|\alpha|,|\beta| \leqslant m} D^\alpha R^*_{\beta\alpha} D^\beta u, \quad D(\widehat{A}_R) = \{u \in \mathring{W}_2^m(Q) : \widehat{A}_R u \in L_2(Q)\}.$$

Он также сильно эллиптический.

Теорема 2.3.3 *Пусть оператор A_R сильно эллиптический. Тогда*

(a) *оператор $A_R : L_2(Q) \to L_2(Q)$ фредгольмов;*

(b) *спектр $\sigma(A_R)$ состоит из изолированных собственных значений конечной кратности, причём $\sigma(A_R) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > -c_2\}$, где $c_2 \geqslant 0$ — постоянная из неравенства* (2.67)*;*

(c) *если $\lambda \notin \sigma(A_R)$, то резольвента $\mathcal{R}(\lambda, A_R) : L_2(Q) \to L_2(Q)$ — компактный оператор;*

(d) $A_R^* = \widehat{A}_R$, $\widehat{A}_R^* = A_R$;

(e) *если к тому же оператор A_R симметрический, т.е.*

$$(A_R u, v)_{L_2(Q)} = (u, A_R v)_{L_2(Q)} \quad (u, v \in C_0^\infty(Q)),$$

то он самосопряжённый, его собственные значения λ_s вещественны и $\lambda_s \to +\infty$ при $s \to +\infty$; собственные функции u_s оператора A_R образуют ортонормированный базис в пространстве $L_2(Q)$, а функции $u_s/\sqrt{\lambda_s + c_2}$ — ортонормированный базис в пространстве $\mathring{W}_2^m(Q)$ со скалярным произведением по формуле

$$(u, v)'_{\mathring{W}_2^m(Q)} = \frac{1}{2} \sum_{|\alpha|,|\beta| \leqslant m} \big((R_{\alpha\beta} + R_{\beta\alpha}^*) D^\beta u, D^\alpha v\big)_{L_2(Q)} + c_2 (u, v)_{L_2(Q)}. \tag{2.76}$$

Доказательство всех утверждений теоремы проводится по той же схеме, что и в разделе 2.2 для случая дифференциально-разностного уравнения второго порядка и опирается на возможность ввести в пространстве $\mathring{W}_2^m(Q)$ эквивалентное скалярное произведение (2.76).

Пример 2.3.1 В ограниченной области Q, содержащей начало координат, рассмотрим краевую задачу

$$-\Delta[u(x) + a u(x/q)] = f(x) \quad (x \in Q), \tag{2.77}$$

$$u\,|_{\partial Q} = 0, \tag{2.78}$$

где $0 \neq a \in \mathbb{C}$, $f \in L_2(Q)$.

Символ уравнения (2.77) имеет вид $(1 + a\lambda/q)|\xi|^2$, и условие положительности действительной части символа при $|\lambda| = q^{n/2}$, $\xi \neq 0$ означает, что $|a| < q^{1-n/2}$. В силу теорем 2.3.1 и 2.3.2 уравнение (2.77) будет сильно эллиптическим в $\overline{Q}$ тогда и только тогда, когда $|a| < q^{1-n/2}$. И поскольку постоянная c_2 в неравенстве (2.67) очевидно равна нулю, по теореме 2.3.3 краевая задача (2.77), (2.78) имеет при $|a| < q^{1-n/2}$ единственное обобщённое решение $u \in \mathring{W}_2^1(Q)$ для любой функции $f \in L_2(Q)$.

2.3.4 Гладкость обобщённых решений первой краевой задачи для сильно эллиптического уравнения с растяжениями и сжатиями аргументов

Более подробно остановимся на структуре решений первой краевой задачи для частного случая сильно эллиптического уравнения второго порядка

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(Ru_{x_j})_{x_i} = f(x) \quad (x \in Q). \tag{2.79}$$

Здесь Q — ограниченная область с гладкой границей, удовлетворяющая условию (2.64), $a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}$ $(i, j = 1, \dots, n)$, а R — функциональный оператор вида (2.55) с комплексными коэффициентами:

$$R = R(P) = \sum_{l=-J}^{J} b_l P^l \quad (b_l \in \mathbb{C}).$$

Запишем символ уравнения (2.79):

$$a_R(\lambda, \xi) = a(\xi) r(\lambda), \quad a(\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j, \quad r(\lambda) = \sum_{l=-J}^{J} b_l \lambda^l.$$

Отсюда и из теорем 2.3.1, 2.3.2 следует, что сильная эллиптичность уравнения (2.79) в $\overline{Q}$ равносильна эллиптичности дифференциального оператора $A = -\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, \partial^2/\partial x_i \partial x_j$ и положительной определённости оператора $R + R^* : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$.

Отметим важное для дальнейшего следствие из условия

$$\operatorname{Re} r(\lambda) > 0 \quad (|\lambda| = q^{n/2}).$$

Данное условие означает, что на комплексной плоскости вектор, изображающий $r(\lambda)$, не совершает ни одного оборота вокруг начала координат, когда точка λ проходит окружность $|\lambda| = q^{n/2}$. В соответствии с принципом аргумента количество нулей функции $r(\lambda)$ в круге $|\lambda| < q^{n/2}$ совпадает с количеством полюсов $r(\lambda)$ в этом же круге. Но единственным конечным полюсом (кратным) функции $r(\lambda)$ может быть лишь начало координат.

Оформим сделанное наблюдение.

Лемма 2.3.6 *Пусть уравнение* (2.79) *сильно эллиптическое в* $\overline{Q} \subset qQ$. *Тогда символ* $r(\lambda)$ *оператора* R *может быть записан в виде*

$$r(\lambda) = \sum_{l=-J_2}^{J_1} b_l \lambda^l = \lambda^{-J_2} \sum_{l=0}^{J_1+J_2} b_{l-J_2} \lambda^l,$$

где $J_1 \geqslant 0$, $J_2 \geqslant 0$, $b_{J_1} \neq 0$, $b_{J_2} \neq 0$.

Функция $r(\lambda)$ *имеет на комплексной плоскости* $J_1 + J_2$ *нулей, из которых* J_1 *удовлетворяют условию* $|\lambda| > q^{n/2}$, *а остальные* J_2 *— условию* $|\lambda| < q^{n/2}$.

Если $\lambda_1, \dots, \lambda_{J_1+J_2}$ — корни $r(\lambda)$, то без ограничения общности считаем

$$|\lambda_j| > q^{n/2} \ (j = 1, \dots, J_1), \quad |\lambda_j| < q^{n/2} \ (j = J_1 + 1, \dots, J_1 + J_2).$$

Будем пользоваться разложением оператора

$$R = \sum_{l=-J_2}^{J_1} b_l P^l = P^{-J_2} \sum_{l=0}^{J_1+J_2} b_{l-J_2} P^l$$

в произведение $R = R_1 R_2$, где

$$R_1 = R_1(P) = b_{J_1}(P - \lambda_1 I) \dots (P - \lambda_{J_1} I),$$

$$R_2 = R_2(P) = P^{-J_2}(P - \lambda_{J_1+1} I) \dots (P - \lambda_{J_1+J_2} I).$$

Напомним, что обобщённое решение первой краевой задачи $u|_{\partial Q} = 0$ для уравнения (2.79) есть функция $u \in \mathring{W}_2^1(Q)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} R u_{x_j}, v_{x_i})_{L_2(Q)} = (f, v)_{L_2(Q)} \tag{2.80}$$

при всех $v \in \mathring{W}_2^1(Q)$, где $f \in L_2(Q)$.

Теорема 2.3.4 *Пусть Q — ограниченная область с гладкой границей, удовлетворяющая условию* (2.64), *уравнение* (2.79) *сильно эллиптическое в $\overline{Q}$ и, кроме того, $J_2 = 0$. Тогда всякое обобщённое решение первой краевой задачи для уравнения* (2.79) *принадлежит $W_2^2(Q)$.*

Другими словами, если в сильно эллиптическом уравнении (2.79) присутствуют лишь сжатия аргументов, гладкость обобщённого решения сохраняется во всей области.

Доказательство. В условиях теоремы

$$R = R_1 = b_{J_1}(P - \lambda_1 I)\dots(P - \lambda_{J_1} I). \qquad (2.81)$$

Предположим вначале, что $R = P - \lambda_0 I$, где $|\lambda_0| > q^{n/2}$.

Пусть $u \in \mathring{W}_2^1(Q)$ — обобщённое решение первой краевой задачи для уравнения (2.79), т.е. имеет место интегральное тождество (2.80). Введём функцию $w = (qP - \lambda_0 I)u \in W_2^1(Q)$. Тогда $w_{x_j} = Ru_{x_j} \in L_2(Q)$ и по лемме 2.3.4 с учётом (2.65) будем иметь

$$u_{x_j}(x) = -\sum_{m=0}^{\infty} \lambda_0^{-(m+1)} w_{x_j}(q^{-m}x) \quad (x \in Q). \qquad (2.82)$$

Для функции $v \in \mathring{W}_2^1(Q)$ функция $P^{-m}v(x) = v(q^m x)$ также принадлежит $\mathring{W}_2^1(Q)$. Подставив её в тождество (2.80) вместо v, получим

$$\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} w_{x_j}, (P^{-m}v)_{x_i})_{L_2(Q)} = (f, P^{-m}v)_{L_2(Q)}$$

или

$$\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} P^m w_{x_j}, v_{x_i})_{L_2(Q)} = (q^{-m} P^m f, v)_{L_2(Q)}.$$

Мы воспользовались тем, что $(P^{-m}v)_{x_i} = q^m P^{-m} v_{x_i}$ и $(P^{-m})^* = q^{-nm} P^m$. Просуммировав полученные соотношения по всем $m = 0, 1, \dots$ с коэффициентами $-\lambda_0^{-(m+1)}$, будем иметь

$$\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} u_{x_j}, v_{x_i})_{L_2(Q)} = ((q^{-1}P - \lambda_0 I)^{-1} f, v)_{L_2(Q)}$$

в силу (2.65). По лемме 2.3.4 оператор $(q^{-1}P-\lambda_0 I)^{-1}$ ограничен в $L_2(Q)$ (а также в $W_2^p(Q)$ для любого $p=1,2,\ldots$).

Если оператор R имеет вид (2.81), то после J_1 однотипных итераций приходим к интегральному тождеству

$$\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}u_{x_j},v_{x_i})_{L_2(Q)}=(g,v)_{L_2(Q)}\,, \tag{2.83}$$

где $g=[R(q^{-1}P)]^{-1}f\in L_2(Q)$. Из (2.83), в свою очередь, следует (2.80). Остаётся заметить, что тождество (2.83) определяет обобщённое решение первой краевой задачи для эллиптического уравнения

$$-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}u_{x_ix_j}=g(x)\quad(x\in Q) \tag{2.84}$$

с постоянными коэффициентами и правой частью из $L_2(Q)$ в ограниченной области Q с гладкой границей. $\square$

Замечание 2.3.1 Из доказательства теоремы 2.3.4 видно, что обобщённое решение существует, единственно и принадлежит $W_2^2(Q)$ и при менее жёстком ограничении $|\lambda_j|\geqslant q^{n/2}$ на корни $\lambda_1,\ldots,\lambda_{J_1}$ полинома $r(\lambda)$, хотя уравнение (2.79) уже не будет в этом случае сильно эллиптическим. Дело в том, что ряд в правой части (2.82) будет сходиться к u_{x_j} в $L_2(Q)$ и для $|\lambda_0|=q^{n/2}$ (лемма 2.3.5). Поэтому с точки зрения обобщённого решения первой краевой задачи сохраняется эквивалентность уравнений (2.79) и (2.84).

Как и прежде, обозначим $\Omega_1=Q\setminus q^{-1}\overline{Q}$, $\Omega_k=q^{1-k}\Omega_1$ $(k=2,3,\ldots)$.

Теорема 2.3.5 *Пусть Q — ограниченная область с гладкой границей, удовлетворяющая условию* (2.64), *а уравнение* (2.79) *сильно эллиптическое в $\overline{Q}$. Если $u\in\mathring{W}_2^1(Q)$ — обобщённое решение первой краевой задачи для уравнения* (2.79), *то $u\in W_2^2(\Omega_k)$ при $k=1,2,\ldots$.*

Доказательство. Для $u \in \mathring{W}_2^1(Q)$ можем записать

$$Ru_{x_j} = R_1R_2u_{x_j} = R_1(P)[R_2(qP)u]_{x_j}.$$

Рассмотрим оператор

$$R_2(qP) = (qP)^{-J_2}(qP - \lambda_{J_1+1}I)\dots(qP - \lambda_{J_1+J_2}I) =$$

$$= P^{-J_2}(P - q^{-1}\lambda_{J_1+1}I)\dots(P - q^{-1}\lambda_{J_1+J_2}I).$$

Имеем $|q^{-1}\lambda_{J_1+1}| < q^{n/2-1}, \dots, |q^{-1}\lambda_{J_1+J_2}| < q^{n/2-1}$. Применяя пункт (b) леммы 2.3.4, заключаем, что оператор $R_2(qP)$ есть изоморфизм пространства $\mathring{W}_2^1(Q)$. Поэтому, полагая $w = R_2(qP)u \in \mathring{W}_2^1(Q)$, приходим к равносильной записи интегрального тождества (2.80):

$$\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}R_1w_{x_j}, v_{x_i})_{L_2(Q)} = (f, v)_{L_2(Q)}.$$

Отсюда и из доказательства теоремы 2.3.4 вытекает, что функция w является обобщённым решением первой краевой задачи для эллиптического уравнения

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}w_{x_ix_j} = g_1(x) \quad (x \in Q)$$

с правой частью $g_1 = [R_1(q^{-1}P)]^{-1}f \in L_2(Q)$; следовательно, $w \in W_2^2(Q)$.

Находя решение u исходной задачи по формуле $u = [R_2(qP)]^{-1}w$, заметим, что при обращении оператора $R_2(qP)$ в $\mathring{W}_2^1(Q)$ мы пользуемся второй строкой формул (2.65). При этом в силу финитности функции w ряд для определения $u|_{\Omega_k}$ вырождается в конечную сумму. $\square$

Нарушение гладкости обобщённого решения на границе соседних подобластей Ω_k в случае уравнения с растяжениями аргументов ($J_2 > 0$) имеет ту же природу, что и для дифференциально-разностных уравнений — соответствующие примеры легко строятся. Напротив, следующий эффект нарушения гладкости связан именно с наличием в области Q начала координат — неподвижной точки преобразования $x \mapsto q^{-1}x$.

Пример 2.3.2 Рассмотрим краевую задачу

$$-\Delta[u(x)+au(qx)]=f(x)\quad (x\in Q), \tag{2.85}$$

$$u\,|_{\partial Q}=0, \tag{2.86}$$

где Q — ограниченная область с гладкой границей, удовлетворяющая условию (2.64); $0\neq a\in\mathbb{C}$, $f\in L_2(Q)$.

Критерием сильной эллиптичности уравнения (2.85) является условие $|a|<q^{n/2-1}$ (ср. с примером 2.3.1). Здесь $R_1=I$, а $R_2(qP)=I+aP^{-1}=P^{-1}(P+aI)$. Из доказательства теоремы 2.3.5 видно, что при $|a|<q^{n/2-1}$ краевая задача (2.85), (2.86) имеет единственное обобщённое решение $u=(P+aI)^{-1}Pw$, где w — решение задачи

$$-\Delta w=f(x)\quad (x\in Q),\qquad w\,|_{\partial Q}=0.$$

Предположим теперь, что $q^{n/2-2}\leqslant|a|<q^{n/2-1}$. Возьмём $w_0\in C_0^\infty(\Omega_1)$ и обозначим $f_0=-\Delta w_0$, $u_0=(P+aI)^{-1}Pw_0$. Функция $u_0\in\mathring{W}_2^1(Q)$ есть обобщённое решение краевой задачи (2.85), (2.86) при $f=f_0\in C_0^\infty(\Omega_1)$. Находим его, используя (2.65):

$$u_0(x)=\sum_{m=0}^{\infty}(-a)^m w_0(q^m x).$$

Очевидно, что

$$C_0^\infty(\Omega_k)\ni u_0|_{\Omega_k}=(-a)^{k-1}w_0(q^{k-1}x)\quad (x\in\Omega_k;\ k=1,2,\ldots).$$

Поэтому $u_0\in W_2^2(Q\setminus\overline{B}_\varepsilon)$ для любой ε-окрестности B_ε начала координат. В то же время вторые производные решения u_0 растут при $x\to 0$ так, что

$$\left\|u_0|_{\Omega_k}\right\|^2_{W_2^2(\Omega_k)}\geqslant$$

$$\geqslant\sum_{|\alpha|=2}\int\limits_{\Omega_k}\left|D^\alpha u_0(x)\right|^2dx=|a|^{2(k-1)}\sum_{|\alpha|=2}\int\limits_{\Omega_k}\left|D^\alpha\left(w_0(q^{k-1}x)\right)\right|^2dx=$$

$$= |a|^{2(k-1)} q^{4(k-1)} \sum_{|\alpha|=2} \int\limits_{\Omega_k} \left| D^\alpha w_0(q^{k-1}x) \right|^2 dx =$$

$$= |a|^{2(k-1)} q^{(4-n)(k-1)} \sum_{|\alpha|=2} \int\limits_{\Omega_1} |D^\alpha w_0(x)|^2 \, dx \geqslant \sum_{|\alpha|=2} \int\limits_{\Omega_1} |D^\alpha w_0|^2 \, dx.$$

Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \|u_0|_{\Omega_k}\|^2_{W_2^2(\Omega_k)}$ расходится и, следовательно, $u_0 \notin W_2^2(Q)$.

Наконец отметим, что для сильно эллиптического уравнения

$$-\sum_{i,j=1}^{n} (R_{ij} u_{x_j})_{x_i} = f(x)$$

с различными операторами R_{ij} вида (2.55) остаётся открытым вопрос даже о внутренней гладкости обобщённых решений первой краевой задачи в подобластях Ω_k. Препятствием к применению в этой ситуации методов, развитых для дифференциально-разностных уравнений, является то, что приходится одновременно рассматривать поведение решения на бесконечном наборе окрестностей вида $q^{-k}\mathcal{O}(x_0)$, $k = 0, 1, \ldots$. Очевидные трудности здесь связаны, например, с аппроксимацией обобщённых производных конечными разностями.

2.3.5 Случай переменных коэффициентов

Переход к переменным коэффициентам при получении глобальных результатов для дифференциальных уравнений (например, оценки во всей области, доказательство фредгольмовой разрешимости путём построения регуляризатора и др.) обычно основан на принципе локализации. В разделе 2.1 таким способом доказано неравенство Гординга для сильно эллиптического дифференциального уравнения с переменными коэффициентами; впервые это было сделано в работе [45]. Важным элементом принципа локализации является построение разбиения единицы, подчинённого специальному покрытию $\overline{Q}$ открытыми множествами (такими, в которых коэффициенты мало меняются). Аналогичное применение локализации в теории функционально-дифференциальных уравнений сопровождается необходимостью накладывать дополнительные условия на разбиение единицы. Эти условия являются существенными и носят алгебраический характер: умножение на функции, составляющие разбиение единицы, должно коммутировать или «почти» коммутировать с действием функциональных операторов того или иного класса. В случае разностных операторов с соизмеримыми сдвигами доказано (см., например, [59, Chapter II, Lemma 9.1]) существование разбиения единицы из M-периодических функций. Это позволило применить принцип локализации для дифференциально-разностных уравнений с гладкими переменными коэффициентами и получить достаточные условия сильной эллиптичности, обобщающие соответствующие условия в случае постоянных коэффициентов. Если же рассматривать операторы со сжатиями и растяжениями аргументов, то, напротив, нетрудно убедиться (см. [30]) в несуществовании q-периодического разбиения единицы для $\overline{Q} \subset qQ$ (т.е. такого, что $\varphi_j(qx) = \varphi_j(x)$). Продемонстрируем, как можно преодолеть возникающие трудности, на примере исследования краевой задачи

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(Ru_{x_j})_{x_i} = f(x) \quad (x \in Q), \tag{2.87}$$

$$u\,|_{\partial Q} = 0 \tag{2.88}$$

в предположении, что $\overline{Q} \subset qQ$, $a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}$, а функциональный оператор R имеет вид

$$Ru(x) = \sum_{l=0}^{J} b_l(x)u(q^{-l}x), \tag{2.89}$$

где $b_l(x)$ — комплекснозначные функции из $C^1(\overline{Q})$. С уравнением (2.87) связывается переменный (по x) символ

$$a_R(x, \lambda, \xi) = a(\xi) r(x, \lambda), \quad a(\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j, \quad r(x, \lambda) = \sum_{l=0}^{J} b_l(x)\lambda^l.$$

На уравнение (2.87) накладывается условие

$$a_R(x, 0, \xi) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_0(x)\xi_i\xi_j \neq 0 \quad (x \in \overline{Q},\ 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n), \tag{2.90}$$

выражающее эллиптичность его «локальной» части в $\overline{Q}$.

Оказывается, для фредгольмовой разрешимости краевой задачи (2.87), (2.88) достаточно дополнительно потребовать необращение в ноль символа в круге $|\lambda| \leqslant q^{n/2}$ и лишь при $x = 0$:

$$r(0, \lambda) \neq 0 \quad (|\lambda| \leqslant q^{n/2}). \tag{2.91}$$

Таким образом, значения коэффициентов $b_1(x), \ldots, b_J(x)$ вне начала координат не влияют на фредгольмову разрешимость. Кроме того, будет показано, что всякое обобщённое решение краевой задачи (2.87), (2.88) в случае выполнения (2.90), (2.91) принадлежит $W_2^2(Q)$.

Для более общего уравнения $-\sum\limits_{i,j=1}^{n} (R_{ij} u_{x_j})_{x_i} = f(x)$ с переменными коэффициентами в операторах R_{ij} (а также для уравнения $2m$-го порядка с краевыми условиями общего вида) фредгольмова разрешимость краевой задачи доказана в работе [26] путём построения регуляризатора с привлечением техники псевдодифференциальных операторов. В случае же уравнения (2.87) с одним оператором вида (2.89) приведённое ниже доказательство основано на исследовании обратимости функционального оператора.

Вначале введём алгебру операторов $R(x, P)$ с переменными коэффициентами. Пусть B есть банахово пространство. Пространство всех аналитических в открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{C}$ функций со значениями в

B обозначается $\mathcal{H}(\Omega, B)$. Когда $\Omega = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < \rho\}$, $B = C^k(\overline{Q})$, $k = 0, 1, \ldots$, будем для краткости писать $\mathcal{H}(\Omega, B) = \mathcal{H}(\rho, k)$, а всякую функцию $r \in \mathcal{H}(\rho, k)$ рассматривать как функцию двух аргументов, $r = r(x, \lambda)$, $x \in Q$, $|\lambda| < \rho$. Для произвольной фиксированной последовательности $0 < \rho_1 < \rho_2 < \ldots < \rho$, $\rho_j \to \rho$, счётный набор полунорм $\max\limits_{|\lambda|=\rho_j} \|r(\cdot, \lambda)\|_{C^k(\overline{Q})}$ задаёт на пространстве $\mathcal{H}(\rho, k)$ топологию пространства Фреше.

Опираясь на интегральную формулу Коши, легко показать аналогично скалярному случаю ($B = \mathbb{C}$), что функции $r \in \mathcal{H}(\rho, k)$ есть в точности суммы степенных рядов $\sum\limits_{m=0}^{\infty} a_m(x)\lambda^m$ с коэффициентами $a_m \in C^k(\overline{Q})$, удовлетворяющими условию: для любого $\rho' < \rho$ найдётся постоянная $M_k(\rho') > 0$ такая, что

$$\|a_m\|_{C^k(\overline{Q})} \leqslant M_k(\rho')\rho'^{-m} \quad (m = 0, 1, \ldots). \tag{2.92}$$

Более того, $a_m(x) = (1/m!)r_\lambda^{(m)}(x, 0)$, а в качестве $M_k(\rho')$ можно взять $\max\limits_{|\lambda|=\rho'} \|r(\cdot, \lambda)\|_{C^k(\overline{Q})}$.

Лемма 2.3.7 *Пусть $r \in \mathcal{H}(\rho, k)$, где $\rho > q^{n/2}$, $k = 0, 1, \ldots$. Тогда формулой*

$$R(x, P)u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} r_\lambda^{(m)}(x, 0)u(q^{-m}x) \tag{2.93}$$

определён ограниченный оператор $R(x, P) : W_2^k(Q) \to W_2^k(Q)$ для всякой ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^n$ такой, что $\overline{Q} \subset qQ$.

Доказательство. Вначале докажем ограниченность оператора (2.93) в $L_2(Q)$. Если r есть полином от λ, то для области Q указанного вида оператор $R(x, P)$ корректно определён и утверждение очевидно. Докажем сходимость ряда (2.93) по операторной норме. Прежде всего заметим, что норма оператора P^m в $\mathcal{B}(L_2(Q))$ не превосходит его нормы в $\mathcal{B}(L_2(\mathbb{R}^n))$, которая равна $q^{mn/2}$. Действительно,

$$\sup\left\{\|P^m u\|_{L_2(Q)} \mid u \in L_2(Q),\ \|u\|_{L_2(Q)} = 1\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sup\left\{\|P^m u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \mid u \in L_2(\mathbb{R}^n),\ \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = 1,\ u(x) = 0\,(x \notin Q)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sup\left\{\|P^m u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \mid u \in L_2(\mathbb{R}^n),\ \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = 1\right\}.$$

Далее, $\|gu\|_{L_2(Q)} \leqslant \|g\|_{C(\overline{Q})}\|u\|_{L_2(Q)}$ при $g \in C(\overline{Q})$, $u \in L_2(Q)$. Из принадлежности $r \in \mathcal{H}(\rho, k)$ и оценки (2.92) в таком случае следует, что $\|a_m P^m\|_{\mathcal{B}(L_2(Q))} \leqslant M_0(\rho')(q^{n/2}/\rho')^m$ при $\rho' < \rho$. Но по условию леммы можно взять $q^{n/2} < \rho' < \rho$, откуда вытекает оценка

$$\|R\|_{\mathcal{B}(L_2(Q))} \leqslant \frac{\rho'}{\rho' - q^{n/2}} \max_{|\lambda|=\rho'} \|r(\cdot, \lambda)\|_{C^k(\overline{Q})}.$$

Для доказательства ограниченности оператора $R(x, P)$ в $W_2^k(Q)$, в силу теоремы о замкнутом графике, достаточно показать, что $Ru \in W_2^k(Q)$, если $u \in W_2^k(Q)$. По формуле Лейбница для мультииндекса α, $|\alpha| \leqslant k$, будем иметь

$$D^\alpha R(x, P)u(x) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} R_{\alpha-\beta}(x, q^{-|\beta|}P) D^\beta u(x),$$

где $R_\alpha(x, P)$ означает оператор с символом $D_x^\alpha r(x, \lambda)$ (результат дифференцирования коэффициентов). Очевидно, символ $D_x^{\alpha-\beta} r(x, q^{-|\beta|}\lambda)$ принадлежит $\mathcal{H}\left(q^{|\beta|}\rho, k - |\alpha| + |\beta|\right) \subset \mathcal{H}(\rho, |\beta|)$. Поэтому по уже доказанному оператор $R_{\alpha-\beta}(x, q^{-|\beta|}P) : L_2(Q) \to L_2(Q)$ ограничен. Учитывая $D^\beta u \in L_2(Q)$, получаем $D^\alpha Ru \in L_2(Q)$. $\square$

Операторы с символами из $\mathcal{H}(\rho, k)$ также образуют алгебру (обозначим её $\mathcal{A}_{\rho,k}$), но уже не коммутативную. Перемножая соответствующие ряды, мы получаем формулу композиции. Если

$$R_1(x, P) = \sum_{m=0}^\infty a_m(x) P^m, \quad R_2(x, P) = \sum_{m=0}^\infty b_m(x) P^m,$$

где $r_1, r_2 \in \mathcal{H}(\rho, k)$, то композиция $R_1 R_2$ представляет собой оператор $R_3(x, P) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m(x) P^m$ с коэффициентами

$$c_m(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j(x) b_{m-j}(q^{-j} x) \quad (m = 0, 1, \ldots). \tag{2.94}$$

Легко проверить, что символ $r_3(x, \lambda) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m(x) \lambda^m$ также принадлежит классу $\mathcal{H}(\rho, k)$.

Центральным местом этого пункта является следующая ниже теорема об обратимости.

Теорема 2.3.6 *Пусть $r(x, \lambda) = \sum\limits_{j=0}^{J} a_j(x) \lambda^j$, где $a_j \in C^k(\overline{Q})$ для некоторого $k \geqslant 1$, и выполнены следующие условия:*

$$r(x, 0) \neq 0 \quad (x \in \overline{Q}), \tag{2.95}$$

$$r(0, \lambda) \neq 0 \quad (|\lambda| < \rho). \tag{2.96}$$

Тогда существует обратный оператор $R^{-1}(x, P) \in \mathcal{A}_{\rho,k}$.

Доказательству теоремы предпошлём лемму.

Лемма 2.3.8 *Пусть $\mathcal{B}$ — банахова алгебра; $g, g_n \in \mathcal{B}$, $n = 1, 2, \ldots$, и $\|g_n - g\|_{\mathcal{B}} \leqslant c d^n$ для некоторых $c > 0$, $0 < d < 1$. Тогда*

$$\limsup_{n \to \infty} \|g_n g_{n-1} \ldots g_1\|_{\mathcal{B}}^{1/n} \leqslant \rho(g),$$

где $\rho(g)$ обозначает спектральный радиус элемента g в $\mathcal{B}$.

Доказательство леммы. Обозначим

$$g_n - g = \Delta g_n, \quad g_n g_{n-1} \ldots g_1 - g^n = \Delta_n.$$

Оценим $\|\Delta_n\|$ (здесь и далее в доказательстве $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\mathcal{B}}$). Разность $\Delta_n = (g + \Delta g_n)(g + \Delta g_{n-1}) \ldots (g + \Delta g_1) - g^n$ сгруппируем в n сумм

$\Delta_{n,m}$ $(m = 1, \ldots, n)$ так, что в $\Delta_{n,m}$ в каждом слагаемом m сомножителей составляют Δg_i:

$$\Delta_n = \sum_{m=1}^{n} \Delta_{n,m}, \qquad \Delta_{n,m} = \sum_{i_1=m}^{n} g^{n-i_1}(\Delta g_{i_1}) \sum_{i_2=m-1}^{i_1-1} g^{i_1-1-i_2}(\Delta g_{i_2}) \times \ldots$$

$$\ldots \times \sum_{i_m=1}^{i_{m-1}-1} g^{i_{m-1}-1-i_m}(\Delta g_{i_m}) g^{i_m-1}.$$

Из формулы спектрального радиуса $\rho(g) = \lim\limits_{n\to\infty} \|g^n\|^{1/n}$ следует, что $\|g^n\| \leqslant M(\bar\rho)\bar\rho^{n+1}$ для произвольного $\bar\rho > \rho(g)$ (при этом можно взять $M(\bar\rho) = \max\limits_{|\lambda|=\bar\rho} \|g - \lambda e\|$). Приходим к неравенству

$$\|g^{n-i_1}\| \, \|g^{i_1-1-i_2}\| \times \ldots \times \|g^{i_{m-1}-1-i_m}\| \, \|g^{i_m-1}\| \leqslant$$

$$\leqslant [M(\bar\rho)]^{m+1} \bar\rho^{n-i_1+1+i_1-1-i_2+1+\ldots+i_{m-1}-1-i_m+1+i_m-1+1} = [M(\bar\rho)]^{m+1}\bar\rho^{n+1}.$$

Отсюда и из условия леммы получаем

$$\|\Delta_{n,m}\| \leqslant [M(\bar\rho)]^{m+1}\bar\rho^{n+1} c^m \sum_{i_1=m}^{n} \sum_{i_2=m-1}^{i_1-1} \ldots \sum_{i_m=1}^{i_{m-1}-1} d^{i_1+i_2+\ldots+i_m}.$$

Последняя сумма оценивается непосредственно:

$$\sum_{i_1=m}^{n} \sum_{i_2=m-1}^{i_1-1} \ldots \sum_{i_m=1}^{i_{m-1}-1} d^{i_1+i_2+\ldots+i_m} \leqslant \sum_{i_1=m}^{\infty} d^{i_1} \sum_{i_2=m-1}^{\infty} d^{i_2} \ldots d^{i_{m-1}} \sum_{i_m=1}^{\infty} d^{i_m} =$$

$$= \frac{d^{m(m+1)/2}}{(1-d)^m}.$$

Таким образом,

$$\|\Delta_{n,m}\| \leqslant \left[\frac{cM(\bar\rho)d^{(m+1)/2}}{1-d}\right]^m M(\bar\rho)\bar\rho^{n+1},$$

$$\|\Delta_n\| \leqslant \sum_{m=1}^{n} \|\Delta_{n,m}\| \leqslant M(\bar\rho)\bar\rho^{n+1} \sum_{m=1}^{n} \left[\frac{cM(\bar\rho)d^{(m+1)/2}}{1-d}\right]^m.$$

Но последовательность $\left[\frac{cM(\bar\rho)d^{(m+1)/2}}{1-d}\right]^m$ мажорируется убывающей геометрической прогрессией, так что $\|\Delta_n\| \leqslant M_{c,d}(\bar\rho)\bar\rho^n$. Окончательно

$$\|g_n g_{n-1} \ldots g_1\| = \|g^n + \Delta_n\| \leqslant \|g^n\| + \|\Delta_n\| \leqslant \tilde M(\bar\rho)\bar\rho^n. \qquad (2.97)$$

Отсюда следует, что $\limsup\limits_{n\to\infty} \|g_n g_{n-1} \dots g_1\|^{1/n} \leqslant \bar{\rho}$. Но $\bar{\rho} > \rho(g)$ произвольно, и лемма доказана. $\square$

Замечание 2.3.2 Доказанное утверждение в определённом смысле обобщает известное свойство непрерывности сверху спектрального радиуса:

$$\|g_n - g\| \to 0 \implies \limsup_{n\to\infty} \rho(g_n) \leqslant \rho(g).$$

Замечание 2.3.3 Из доказательства леммы 2.3.8 видно, что постоянная $\tilde{M}(\bar{\rho})$ зависит (помимо $\bar{\rho}$) лишь от предельного элемента g и параметров c, d в оценке сходимости, но не зависит от начального элемента последовательности. Поэтому с той же постоянной верно неравенство

$$\|g_{j+n} g_{j+n-1} \dots g_{j+1}\| \leqslant \tilde{M}(\bar{\rho}) \bar{\rho}^n$$

для любых натуральных n и j.

Доказательство теоремы. Благодаря условию (2.95) можно без ограничения общности считать, что $r(x, 0) = a_0(x) = 1$ (в противном случае на коэффициент $a_0(x)$ следует предварительно разделить). Воспользуемся формулой композиции (2.94) для построения обратного оператора $R^{-1}(x, P) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} b_m(x) P^m$. Равенство $RR^{-1} = I$ приводит к системе

$$\begin{cases} b_0(x) = 1, \\ b_m(x) = -\sum\limits_{j=1}^{\min(J,m)} a_j(x) b_{m-j}(q^{-j}x) \quad (m = 1, 2, \dots), \end{cases} \tag{2.98}$$

а равенство $R^{-1}R = I$ даёт

$$\begin{cases} b_0(x) = 1, \\ b_m(x) = -\sum\limits_{j=1}^{\min(J,m)} a_j(q^{j-m}x) b_{m-j}(x) \quad (m = 1, 2, \dots). \end{cases} \tag{2.99}$$

Покажем, что обе системы определяют одну и ту же последовательность коэффициентов $b_m(x)$ $(m = 1, 2, \dots)$.

Введём матрицы $A_m(x)$ ($x \in \overline{Q}$; $m = 1, 2, \ldots$) порядка $m \times m$:

$$A_m(x) = \begin{pmatrix} a_1(x) & a_2(x) & \ldots & a_{m-1}(x) & a_m(x) \\ 1 & a_1(q^{-1}x) & \ldots & a_{m-2}(q^{-1}x) & a_{m-1}(q^{-1}x) \\ 0 & 1 & \ldots & a_{m-3}(q^{-2}x) & a_{m-2}(q^{-2}x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & a_1(q^{1-m}x) \end{pmatrix}.$$

Мы утверждаем, что функции $b_m(x)$ в (2.98) и (2.99) вычисляются по формуле

$$b_m(x) = (-1)^m \det A_m(x).$$

Докажем это индукцией по $m = 1, 2, \ldots$. При $m = 1$ равенство очевидно. Предполагая, что оно имеет место для всех номеров вплоть до некоторого m, проверим его и для номера $m + 1$.

Раскрывая $\det A_{m+1}(x)$ по первому столбцу и используя предположение индукции, получим

$$b_{m+1}(x) = (-1)^{m+1} \left\{a_1(x) \det A_m(q^{-1}x) - a_2(x) \det A_{m-1}(q^{-2}x) + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + (-1)^{m-1} a_m(x) \det A_1(q^{-m}x) + (-1)^m a_{m+1}(x)\right\} =$$

$$= -a_1(x)(-1)^m \det A_m(q^{-1}x) - a_2(x)(-1)^{m-1} \det A_{m-1}(q^{-2}x) - \ldots$$

$$\ldots - a_m(x)(-1) \det A_1(q^{-m}x) - a_{m+1}(x) = -\sum_{j=1}^{m+1} a_j(x) b_{m+1-j}(q^{-j}x),$$

что совпадает с (2.98). Чтобы прийти к (2.99), надо раскрыть $\det A_{m+1}(x)$ по последней строке:

$$b_{m+1}(x) = (-1)^{m+1} \left\{a_1(q^{-m}x) \det A_m(x) - a_2(q^{1-m}x) \det A_{m-1}(x) + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + (-1)^{m-1} a_m(q^{-1}x) \det A_1(x) + (-1)^m a_{m+1}(x)\right\} =$$

$$= -a_1(q^{-m}x)(-1)^m \det A_m(x) - a_2(q^{1-m}x)(-1)^{m-1} \det A_{m-1}(x) - \ldots$$

$$\ldots - a_m(q^{-1}x)(-1) \det A_1(x) - a_{m+1}(x) = -\sum_{j=1}^{m+1} a_j(q^{j-m-1}x) b_{m+1-j}(x).$$

Из (2.98) следует, что $b_m \in C^k(\overline{Q})$, $m = 0, 1, \ldots$. Необходимо убедиться, что для любого $\rho' < \rho$ найдётся постоянная $M_k = M_k(\rho') > 0$ такая, что

$$\|b_m\|_{C^k(\overline{Q})} \leqslant M_k(\rho')\rho'^{-m} \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Введём вектор-столбец $B_m(x) = (b_{m+J}(x), \ldots, b_{m+1}(x))^T$ $(m = 0, 1, \ldots)$ и матрицу $G(x)$ порядка $J \times J$:

$$G(x) = \begin{pmatrix} -a_1(q^{1-J}x) & -a_2(q^{2-J}x) & \ldots & -a_{J-1}(q^{-1}x) & -a_J(x) \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Положим $G_m(x) = G(q^{-m}x)$, $m = 1, 2, \ldots$. Система (2.99) равносильна рекуррентным соотношениям $B_m = G_m B_{m-1}$, или

$$B_m = G_m G_{m-1} \ldots G_1 B_0 \quad (m = 1, 2, \ldots). \tag{2.100}$$

Теорема будет доказана, если для всех мультииндексов α, $|\alpha| \leqslant k$, будет получена оценка

$$\max_{x \in \overline{Q}} \|D^\alpha(G_m \ldots G_1)(x)\| \leqslant c_k(\rho')\rho'^{-m} \quad (\rho' < \rho;\ m = 1, 2, \ldots) \tag{2.101}$$

(здесь $\|\cdot\|$ означает матричную норму).

Докажем (2.101) индукцией по α. Вначале пусть $|\alpha| = 0$. Сейчас через $\mathcal{B}$ обозначим банахову алгебру непрерывных на компакте $\overline{Q}$ матричных функций порядка $J \times J$. Если $g_m = G_m$, $g = G(0)$, то $g, g_m \in \mathcal{B}$ и, как нетрудно видеть, $\|g_m - g\|_{\mathcal{B}} \leqslant cq^{-m}$. Это следует из гладкости коэффициентов $a_j(x)$ — достаточно применить дифференциальную теорему о среднем. По лемме 2.3.8 для всякого $\bar\rho > \rho(g)$ найдётся постоянная $\tilde M = \tilde M(\bar\rho)$ такая, что

$$\|g_m \ldots g_1\|_{\mathcal{B}} \leqslant \tilde M(\bar\rho)\bar\rho^m \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Оценим спектральный радиус $\rho(g)$ элемента $g \in \mathcal{B}$. Он совпадает с наибольшим из модулей собственных значений постоянной матрицы $G(0)$. Характеристическое уравнение для определения этих собственных значений имеет вид

$$z^J + a_1(0)z^{J-1} + \ldots + a_J(0) = 0 \tag{2.102}$$

(достаточно раскрыть $\det(G(0)-zE)$ по первому столбцу). Делая замену $z = \lambda^{-1}$, получаем уравнение $1+a_1(0)\lambda+\ldots+a_J(0)\lambda^J = 0$, т.е. $r(0,\lambda) = 0$. Условие (2.96) означает, что все корни λ_j многочлена $r(0,\lambda)$ таковы, что $|\lambda_j| \geqslant \rho$. Следовательно, все корни z_j уравнения (2.102) удовлетворяют условию $|z_j| \leqslant \rho^{-1}$. Итак, $\rho(g) \leqslant \rho^{-1}$. Поэтому если $\rho' < \rho$, то $\bar{\rho} = \rho'^{-1} > \rho^{-1} \geqslant \rho(g)$ и

$$\max_{x\in\overline{Q}} \|(G_m \ldots G_1)(x)\| = \|g_m \ldots g_1\|_{\mathcal{B}} \leqslant c_0(\rho')\rho'^{-m} \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Здесь $c_0(\rho') = \tilde{M}(\bar{\rho})$. Для $|\alpha| = 0$ оценка (2.101) доказана.

Предположим, что оценка (2.101) справедлива для всех мультииндексов α таких, что $|\alpha| \leqslant s < k$. Рассмотрим

$$\frac{\partial}{\partial x_i} D^\alpha (G_m \ldots G_1)(x) = D^\alpha \frac{\partial}{\partial x_i}(G_m \ldots G_1)(x) \quad (|\alpha| = s;\ i = 1, \ldots, n).$$

По формуле Лейбница

$$D^\alpha \frac{\partial}{\partial x_i}(G_m \ldots G_1) = D^\alpha \sum_{j=1}^{m} G_m \ldots G_{j+1} \frac{\partial G_j}{\partial x_i} G_{j-1} \ldots G_1 =$$

$$= \sum_{\gamma\leqslant\beta\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\beta}\binom{\beta}{\gamma} \sum_{j=1}^{m} D^\gamma (G_m \ldots G_{j+1}) \left(D^{\beta-\gamma} \frac{\partial G_j}{\partial x_i} \right) D^{\alpha-\beta}(G_{j-1} \ldots G_1).$$

Понятно, что величина $\|D^\gamma G_j(x)\|$ ограничена для всех γ, $|\gamma| \leqslant k$, равномерно по $x \in \overline{Q}$ и $j = 1, 2, \ldots$. Опираясь на предположение индукции, с учётом замечания 2.3.3 будем при $\rho' < \rho$ иметь

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_i} D^\alpha (G_m \ldots G_1)(x) \right\| \leqslant c_1(k) \sum_{\gamma\leqslant\beta\leqslant\alpha} \sum_{j=1}^{m} \|D^\gamma (G_m \ldots G_{j+1})(x)\| \times$$

$$\times \| D^{\alpha-\beta}(G_{j-1}\dots G_1)(x)\| \leqslant c_1(k) \sum_{\gamma\leqslant\beta\leqslant\alpha} \sum_{j=1}^{m} c_s(\rho')\rho'^{j-m} c_s(\rho')\rho'^{1-j} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\gamma\leqslant\beta\leqslant\alpha} [c_1(k)\rho' c_s^2(\rho')] m\rho'^{-m} \leqslant [c_2(k)\rho c_s^2(\rho')] m\rho'^{-m}$$

для всех $x \in \overline{Q}$. Заменим в правой части полученного неравенства ρ' на $\rho' + \varepsilon$, где ε достаточно мало (чтобы $\rho' + \varepsilon < \rho$), и воспользуемся неравенством

$$m(\rho'+\varepsilon)^{-m} = m\left(\frac{\rho'}{\rho'+\varepsilon}\right)^m \rho'^{-m} \leqslant \frac{\rho'^{-m}}{e[\ln(\rho'+\varepsilon)-\ln\rho']}$$

(максимум функции $f(t) = th^{-t}$ на полупрямой $t > 0$ при $h > 1$ равен $(e\ln h)^{-1}$). В результате получаем (2.101) и для $|\alpha| = s+1$ с постоянной $c_{s+1}(\rho') = c_2(k)\rho(c_s(\rho'+\varepsilon))^2 e^{-1}[\ln(\rho'+\varepsilon)-\ln\rho']^{-1}$. Оценка (2.101), а вместе с ней и теорема доказаны. $\square$

Приведём вытекающее из теоремы 2.3.6 и леммы 2.3.7 утверждение об изоморфизме пространств Соболева.

Следствие 2.3.1 *Пусть* $r(x,\lambda) = \sum\limits_{j=0}^{J} a_j(x)\lambda^j$, *где* $a_j \in C^k(\overline{Q})$ *при некотором* $k \geqslant 1$, *и выполнены следующие условия:*

$$r(x,0) \neq 0 \quad (x \in \overline{Q}),$$

$$r(0,\lambda) \neq 0 \quad (|\lambda| \leqslant q^{n/2}).$$

Тогда для всякой ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^n$ *такой, что* $\overline{Q} \subset qQ$, *оператор*

$$R(x,P) : W_2^k(Q) \to W_2^k(Q)$$

является изоморфизмом.

Перейдём теперь к краевой задаче (2.87), (2.88). По-прежнему, под её обобщённым решением будем понимать функцию $u \in \mathring{W}_2^1(Q)$, удовлетворяющую при всех $v \in \mathring{W}_2^1(Q)$ интегральному тождеству

$$\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}Ru_{x_j}, v_{x_i})_{L_2(Q)} = (f,v)_{L_2(Q)}. \tag{2.103}$$

Вновь вводя неограниченный оператор $A_R : L_2(Q) \to L_2(Q)$, действующий по формуле $A_R u = -\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(Ru_{x_j})_{x_i}$, с областью определения $D(A_R) = \{u \in \mathring{W}_2^1(Q) : A_R u \in L_2(Q)\}$, приходим к эквивалентному определению обобщённого решения задачи (2.87), (2.88) как решения операторного уравнения $A_R u = f$ в $L_2(Q)$.

Теорема 2.3.7 *Предположим, что Q — ограниченная область с гладкой границей, удовлетворяющая условию $\overline{Q} \subset qQ$, $a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}$, коэффициенты $b_0(x), \ldots, b_J(x)$ оператора R, заданного формулой* (2.89), *принадлежат классу $C^1(\overline{Q})$ и, кроме того, выполнены условия* (2.90) *и* (2.91).

Тогда оператор A_R фредгольмов и $D(A_R) = \mathring{W}_2^1(Q) \cap W_2^2(Q)$.

Доказательство. Доказательство теоремы проводим путём сведения уравнения (2.87) к уравнению с эллиптической локальной старшей частью.

Условие (2.90) означает, что $b_0(x)$ не обращается в ноль на $\overline{Q}$, а выражение $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j$ не равно нулю нигде в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Условия на оператор $R = R(x, P)$ позволяют применить теорему 2.3.6, по которой этот оператор обратим в алгебре $\mathcal{A}_{\rho,1}$ для некоторого $\rho > q^{n/2}$. Обратный к R оператор $R^{-1}(x, P)$ можно представить в виде ряда

$$T(x, P) = R^{-1}(x, P) = \sum_{m=0}^{\infty} h_m(x) P^m$$

с коэффициентами $h_m \in C^1(\overline{Q})$. По лемме 2.3.7 оператор $T(x, P)$ ограничен в $L_2(Q)$ и в $W_2^1(Q)$.

Вместо функции $v \in \mathring{W}_2^1(Q)$ подставим в интегральное тождество (2.103) функцию $P^{-m}\overline{h}_m v$, также принадлежащую $\mathring{W}_2^1(Q)$. Получим

$$\sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij} R u_{x_j}, q^m P^{-m} \left(\overline{h}_m v\right)_{x_i}\right)_{L_2(Q)} = (f, P^{-m}\overline{h}_m v)_{L_2(Q)}$$

или, после очевидных преобразований,

$$\sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij} h_m P^m R u_{x_j}, v_{x_i}\right)_{L_2(Q)} + \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij} h_{m x_i} P^m R u_{x_j}, v\right)_{L_2(Q)} =$$

$$= (q^{-m} h_m P^m f, v)_{L_2(Q)}. \qquad (2.104)$$

Отметим, что операторы

$$T_{x_i}(x,P) = \sum_{m=0}^{\infty} h_{m x_i}(x) P^m \quad (i = 1, \dots, n).$$

также являются ограниченными в $L_2(Q)$. Поэтому, суммируя (2.104) по всем $m = 0, 1, \dots$, в пределе получим

$$\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} u_{x_j}, v_{x_i})_{L_2(Q)} + \left(\sum_{j=1}^{n} R_j u_{x_j}, v\right)_{L_2(Q)} = (\widetilde{T} f, v)_{L_2(Q)}$$

для любой функции $v \in \mathring{W}_2^1(Q)$, где операторы $R_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} T_{x_i}(x,P) R$ и $\widetilde{T} = T(x, q^{-1}P)$ ограничены в $L_2(Q)$, причём оператор $\widetilde{T}$ является обратным к $\widetilde{R} = R(x, q^{-1}P)$.

Таким образом, всякое обобщённое решение краевой задачи (2.87), (2.88) является и обобщённым решением краевой задачи для уравнения

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} R_i u_{x_i} = \widetilde{T} f \quad (x \in Q) \qquad (2.105)$$

с эллиптическим дифференциальным оператором в старшей части. Проводя аналогичным образом выкладки в обратном направлении, убеждаемся в эквивалентности задач (2.87), (2.88) и (2.105), (2.88) (с точки зрения обобщённого решения). Поэтому если стандартным образом связать с задачей (2.105), (2.88) неограниченный оператор A_0, действующий в $L_2(Q)$ по формуле $A_0 u = -\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum\limits_{i=1}^{n} R_i u_{x_i}$ с областью определения $D(A_0) = \{u \in \mathring{W}_2^1(Q) : A_0 u \in L_2(Q)\}$, то можно будет записать $A_R = \widetilde{R} A_0$. Утверждение теоремы теперь следует из соответствующих свойств оператора A_0. $\square$

Замечание 2.3.4 Фактически решение задачи (2.87), (2.88) свелось к тому, что в уравнении (2.87) мы вынесли функциональный оператор $R(x, P)$ за знак второй производной, а затем, применив ограниченный обратный оператор $[R(x, q^{-1}P)]^{-1}$ к обеим частям уравнения, пришли к (сильно) эллиптическому дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами, возмущённому нелокальными, но достаточно регулярными младшими членами. Для этого пришлось, однако, производить соответствующие выкладки в интегральном тождестве, поскольку гладкость обобщённого решения заранее не была известна.

В конце пункта ещё раз отметим, что на фредгольмову разрешимость задачи (2.87), (2.88) в предположении эллиптичности локальной части уравнения (2.87) влияют лишь значения коэффициентов в начале координат. Так, $b_1(x), \dots, b_J(x)$ могут быть сколь угодно велики (по сравнению с $b_0(x)$) вне сколь угодно малой окрестности начала координат.

2.3.6 Приложение к проблеме коэрцитивности для дифференциально-разностных операторов

Пусть $Q = (0, d) \times G$, где $d = N + \theta$, $N \in \mathbb{N}$, $0 < \theta \leqslant 1$, а G — область в $\mathbb{R}^{n-1}$. Рассмотрим дифференциально-разностное уравнение

$$-\sum_{i,j=1}^{n} (R_{ij} u_{x_j})_{x_i} = f(x) \quad (x \in Q), \tag{2.106}$$

в котором разностные операторы R_{ij} имеют вид

$$R_{ij} u(x) = \sum_{k=-N}^{N} a_{ijk} u(x_1 + k, x_2, \dots, x_n) \quad (a_{ijk} \in \mathbb{C}).$$

Из результатов пункта 2.2.2 следует, что необходимым условием сильной эллиптичности уравнения (2.106) является положительная определённость для всех $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$ матриц $\sum\limits_{i,j=1}^{n} \xi_i \xi_j (\mathbf{R}_{ij} + \mathbf{R}_{ij}^*)$, где $\mathbf{R}_{ij}$ —

матрица порядка $(N+1)\times(N+1)$ с элементами $r_{kl}^{ij}=a_{ij,l-k}$.

Можно показать, что при $\theta\neq 1$ приведённое необходимое условие является и достаточным, в то время как для целого d вопрос остаётся открытым.

Предельным переходом при неограниченном увеличении порядка матриц по аналогии с пунктами 2.3.1, 2.3.2 можно получить для случая бесконечного цилиндра $(0,\infty)\times G$ одновременно необходимые и достаточные условия сильной эллиптичности в терминах скалярного символа дифференциально-разностного оператора (этот символ отличается от обычного).

Следующая лемма вполне аналогична лемме 2.3.2.

Лемма 2.3.9 *Предположим, что имеется разностный оператор*

$$Ru(x)=\sum_{l=-J}^{J}a_lu(x_1+l,x_2,\dots,x_n)\quad(a_l\in\mathbb{C}),\tag{2.107}$$

и для каждого натурального N матрица $\mathbf{R}=\mathbf{R}(N)$ есть матрица порядка $N\times N$ с элементами

$$\rho_{kl}=\begin{cases}a_{l-k}, & |l-k|\leqslant J,\\ 0, & |l-k|>J\end{cases}\qquad(k,l=1,\dots,N).\tag{2.108}$$

Если матрицы $\mathbf{R}+\mathbf{R}^*$ положительно определены равномерно по N, то оператор $R+R^*:L_2(\mathbb{R}^n)\to L_2(\mathbb{R}^n)$ положительно определён.

Доказательство. Зафиксируем натуральное N и введём обозначения $\Pi_k=(k-1,k)\times\mathbb{R}^{n-1}$, $\Pi=\bigcup\limits_{k=1}^{N}\Pi_k$. Рассмотрим (унитарное) отображение

$$L_2(\Pi)\ni u\longmapsto U=(u_1\ \dots\ u_N)^T\in L_2^N(\Pi_1),$$

$$u_k(x)=u(x_1+k-1,x_2,\dots,x_n)\quad(x\in\Pi_1,\ k=1,\dots,N).$$

Разностному оператору (2.107) в $L_2(\Pi)$ отвечает оператор умножения на матрицу (2.108) в пространстве вектор-функций $L_2^N(\Pi_1)$:

$$v=Ru\ (u,v\in L_2(\Pi))\Longleftrightarrow V=\mathbf{R}U\ (U,V\in L_2^N(\Pi_1)).$$

Возьмём произвольную финитную функцию $u \in L_2(\mathbb{R}^n)$. Поскольку скалярное произведение $(Ru, u)_{L_2(\mathbb{R}^n)}$ инвариантно относительно сдвигов на векторы из $\mathbb{R}^n$, можно без ограничения общности считать, что носитель функции u лежит в Π для некоторого N. Тогда в силу условий леммы

$$\operatorname{Re}(Ru, u)_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \operatorname{Re}(Ru, u)_{L_2(\Pi)} = \frac{1}{2}((\mathbf{R} + \mathbf{R}^*)U, U)_{L_2^N(\Pi_1)} \geqslant$$
$$\geqslant c\|U\|^2_{L_2^N(\Pi_1)} = c\|u\|^2_{L_2(\Pi)} = c\|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)},$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от N и u. Остаётся заметить, что финитные функции всюду плотны в $L_2(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Теорема 2.3.8 *Пусть $Q = (0, \infty) \times G$, G — область в $\mathbb{R}^{n-1}$. Уравнение* (2.106) *с разностными операторами*

$$R_{ij}u(x) = \sum_{k=-J}^{J} a_{ijk}u(x_1 + k, x_2, \dots, x_n) \quad (a_{ijk} \in \mathbb{C}) \tag{2.109}$$

является сильно эллиптическим в $\overline{Q}$ тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{|k| \leqslant J} a_{ijk} \exp(ik\eta)\xi_i\xi_j > 0 \quad (\eta \in \mathbb{R},\ 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n). \tag{2.110}$$

Доказательство. *Необходимость.* Аналогично доказательству теоремы 2.3.2 из неравенства

$$\operatorname{Re}\big(-\sum_{i,j=1}^{n}(R_{ij}u_{x_j})_{x_i}, u\big)_{L_2(Q)} \geqslant c_1\|u\|^2_{W_2^1(Q)} - c_2\|u\|^2_{L_2(Q)} \quad (u \in C_0^\infty(Q))$$

выводим для любого $N = 1, 2, \dots$ оценку

$$\sum_{i,j=1}^{n} \xi_i\xi_j\left((\mathbf{R}_{ij} + \mathbf{R}_{ij}^*)Y, Y\right) \geqslant c_3|\xi|^2|Y|^2 \quad (\xi \in \mathbb{R}^n,\ Y \in \mathbb{C}^N),$$

в которой матрицы $\mathbf{R}_{ij}$ строятся по операторам R_{ij} по правилу (2.107) — (2.108), а постоянная $c_3 > 0$ определяется постоянными c_1, c_2 и не зависит от N, Y и ξ. Применяя лемму 2.3.9 к разностному оператору

$$\sum_{i,j=1}^{n} \xi_i\xi_j R_{ij} : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n),$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \xi_j R_{ij} u(x) = \sum_{k=-J}^{J} \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ijk} \xi_i \xi_j \right) u(x_1 + k, x_2, \ldots, x_n)$$

и вспоминая, что положительная определённость разностного оператора в $L_2(\mathbb{R}^n)$ равносильна положительности его символа, получаем (2.110) (переменная η — двойственная к x_1 переменная относительно преобразования Фурье).

Достаточность. Пусть $u \in C_0^\infty(Q)$. Интегрируя по частям и применяя теорему Планшереля, получим

$$\operatorname{Re} \big(-\sum_{i,j=1}^{n} (R_{ij} u_{x_j})_{x_i}, u \big)_{L_2(Q)} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{|k| \leqslant J} a_{ijk} \exp(ik\xi_1) \xi_i \xi_j |\tilde{u}(\xi)|^2 \, d\xi.$$

Из (2.110) вытекает существование постоянной $\kappa > 0$ такой, что

$$\operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{|k| \leqslant J} a_{ijk} \exp(ik\eta) \xi_i \xi_j \geqslant \kappa |\xi|^2 \quad (\eta \in \mathbb{R},\ \xi \in \mathbb{R}^n).$$

Это неравенство выполняется, в частности, при $\eta = \xi_1$. Поэтому

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{|k| \leqslant J} a_{ijk} \exp(ik\xi_1) \xi_i \xi_j |\tilde{u}(\xi)|^2 \, d\xi \geqslant \kappa \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 |\tilde{u}(\xi)|^2 \, d\xi \geqslant$$

$$\geqslant c_1 \|u\|^2_{W_2^1(Q)} - c_2 \|u\|^2_{L_2(Q)}.$$

$\square$

Замечание 2.3.5 В отличие от обычного символа дифференциально-разностного оператора — квазиполинома от ξ, используемый в теореме 2.3.8 аналог зависит от двух величин: переменной $\xi \in \mathbb{R}^n$, отвечающей дифференциальной части, и переменной $\eta \in \mathbb{R}$, отвечающей разностным операторам (ср. с λ и ξ в символе функционально-дифференциального оператора с растяжениями и сжатиями аргументов). Отметим также следующий интересный факт, полученный в ходе доказательства теоремы: для положительности выражения $\operatorname{Re} \sum\limits_{i,j=1}^{n} \sum\limits_{|k| \leqslant J} a_{ijk} \exp(ik\eta) \xi_i \xi_j$ при всех $\eta \in \mathbb{R}$ и $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$ (изменяющихся независимо) достаточно потребовать его положительность лишь при $\eta = \xi_1$.

Примечания

Эквивалентность понятия сильной эллиптичности выполнению оценок (2.4), (2.12) для дифференциальных операторов впервые была доказана в работах [6] (случай системы и уравнений высокого порядка) и [45] (случай переменных коэффициентов).

Свойства разностных операторов в $L_2(Q)$ и пространствах Соболева для ограниченной области Q пространства $\mathbb{R}^n$, а также связанные с этим вопросы о разбиении области Q на подобласти Q_r (пункт 2.2.1) рассматривались прежде в работах [32, 58].

Первые теоремы о фредгольмовой разрешимости, спектре и гладкости обобщённых решений краевых задач для дифференциально-разностных уравнений (пункты 2.2.2 и 2.2.3) были получены в работах [32,33]. В статье [58] эти результаты обобщены на случай первой краевой задачи для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения порядка $2m$. Там же приведены как необходимые, так и достаточные условия сильной эллиптичности в алгебраической форме для уравнения высокого порядка, показан эффект нарушения гладкости обобщённых решений в подобластях (пример 2.2.9) и установлены необходимые и достаточные условия сохранения гладкости на границе соседних подобластей. В настоящее время для более обстоятельного введения в теорию краевых задач для дифференциально-разностных уравнений можно порекомендовать монографию [59], содержащую и подробное описание некоторых приложений этой теории.

В настоящем пособии не отражены исследования второй и третьей краевых задач для эллиптических дифференциально-разностных уравнений. Им посвящены работы [35,37] и др. Уместно также вспомнить, что обобщённые решения краевых задач для эллиптических дифференциально-разностных уравнений могут иметь степенные особенности в точках множества $\mathcal{K}$. Поэтому естественно рассматривать общие краевые задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений в весовых пространствах [36]. Впервые эти пространства изучались и систематически использовались В. А. Кондратьевым [14].

Имеются исследования и по дифференциально-разностным уравнениям с вырождением (например, когда рассматривается уравнение (2.32) с вырожденным оператором R). Этот материал также отражён в [59].

Свойства функциональных операторов с растяжениями и сжатиями аргументов в $L_2(\mathbb{R}^n)$, а также в $W_2^k(Q)$ и $\mathring{W}_2^k(Q)$ для ограниченной области Q, удовлетворяющей условию $\overline{Q} \subset qQ$, рассматривались в [23, 26]. Проблема коэрцитивности для функционально-дифференциальных уравнений с растяжениями и сжатиями аргументов в старших производных (пункт 2.3.2) была решена в работе [23, 24]. В случае переменных коэффициентов вопрос о необходимых и достаточных условиях выполнения неравенства Гординга остаётся открытым. Разрешимость и гладкость решений первой краевой задачи для модельного уравнения вида (2.79) (пункты 2.3.4, 2.3.5) исследованы в статье [26]. Указанная статья содержит и не вошедшие в пособие результаты по общим краевым задачам для функционально-дифференциальных уравнений высокого порядка со сжатиями аргументов в старших производных и с переменными коэффициентами (доказана теорема о фредгольмовой разрешимости в шкале пространств Соболева). Результаты пункта 2.3.6 опубликованы в [25].

Аналогично дифференциально-разностным уравнениям, весовые пространства оказываются полезными и при исследовании уравнений с растяжениями и сжатиями аргументов: здесь при помощи веса удобно контролировать поведение решений вблизи особой точки — начала координат. Разрешимости в шкале весовых пространств посвящены работы [27, 28, 55].

В связи с коэрцитивными задачами стоит упомянуть известную проблему Т. Като о квадратном корне из диссипативного оператора. Эта проблема важна для описания пространства начальных данных для дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве [49, 52]. В [39] дано положительное решение проблемы Като для широкого класса операторов, включающего, в частности, дифференциально-разностные операторы и функционально-дифференциальные операторы с растяжением и сжатием аргументов.

В заключение отметим, что краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений изучались, кроме названных, и в ряде других работ [2, 54]. Однако в них предполагалось, что сдвиги отображают область на себя и образуют конечную группу. Это позволяло свести названные задачи к системе эллиптических дифференциальных уравнений без отклонений аргументов. Вследствие этого полученные результаты были сходны с известными результатами для эллиптических дифференциальных уравнений. Эллиптические дифференциально-разностные уравнения в пространстве $\mathbb{R}^n$ и в полупространстве исследовались, например, в статье [21]. Фредгольмовости функционально-дифференциального оператора с частными производными, содержащего линейное преобразование аргумента, посвящена работа [3]. Принципиальным отличием задач, рассматриваемых в настоящем пособии, от задач, описанных в перечисленных работах, является возможность сдвигов точек границы ∂Q внутрь области Q, что приводит к нарушению гладкости обобщённых решений внутри этой области и ряду других новых свойств.

Упражнения

1. Найти все значения параметров $a, b \in \mathbb{C}$, при которых уравнение

$$-\Delta Ru + Ru_{x_1} = f(x_1, x_2),$$

$$Ru(x_1, x_2) = u(x_1, x_2) + au(x_1 + 1, x_2) + bu(x_1 - 1, x_2 + 1),$$

будет сильно эллиптическим в $\overline{Q}$, если $Q = (-1, 1) \times (-1, 1)$.

2. Исследовать разрешимость краевой задачи

$$-\Delta Ru + (1 + x_2 \sin x_1)u = f(x_1, x_2) \quad (x_1^2 + 4x_2^2 < 4),$$

$$u = 0 \quad (x_1^2 + 4x_2^2 \geqslant 4),$$

где разностный оператор задан формулой

$$Ru(x_1, x_2) = u(x_1, x_2) + u(x_1 - 1, x_2) + u(x_1 + 2, x_2),$$

а $f \in L_2\big(x_1^2 + 4x_2^2 < 4\big)$.

3. Решить краевую задачу

$$-\Delta Ru(x_1, x_2) = 1 \quad \big((x_1, x_2) \in Q = (0, 2) \times (0, 1)\big),$$

$$u|_{\partial Q} = 0,$$

где $Ru(x_1, x_2) = 2u(x_1, x_2) + u(x_1 - 1, x_2) + u(x_1 + 1, x_2)$.

4. Найти минимум квадратичного функционала

$$J(u) = \iint\limits_Q \big[u_{x_1}^2(x_1, x_2) + u_{x_2}^2(x_1, x_2) + u_{x_1}(x_1 - 1, x_2)u_{x_1}(x_1, x_2) +$$

$$+ u_{x_2}(x_1 - 1, x_2)u_{x_2}(x_1, x_2) + u(x_1, x_2)f(x_1, x_2)\big]\, dx_1 dx_2$$

на пространстве функций $u \in \mathring{W}_2^1(Q)$, обращающихся в ноль в $\mathbb{R}^n \setminus Q$, где $Q = (0, 2) \times (0, 1)$, $f \in L_2(Q)$ — вещественная функция.

Указание: свести задачу на экстремум функционала к краевой задаче для дифференциально-разностного уравнения, применить метод Фурье.

5*. Доказать, что условие

$$\sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \xi_j (\mathbf{R}_{ij} + \mathbf{R}_{ij}^*) > 0 \quad (0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n)$$

является достаточным для сильной эллиптичности дифференциально-разностного уравнения

$$-\sum_{i,j=1}^{n} (R_{ij} u_{x_j})_{x_i} = f(x)$$

в цилиндре $Q = (0, d) \times G$ при $d = N + \theta$, $0 < \theta < 1$. Здесь

$$R_{ij} u(x) = \sum_{k=-N}^{N} a_{ijk} u(x_1 + k, x_2, \ldots, x_n) \quad (a_{ijk} \in \mathbb{C}),$$

а $\mathbf{R}_{ij}$ — матрица размера $(N+1) \times (N+1)$ с элементами $r_{kl}^{ij} = a_{ij,l-k}$.

6. Исследовать разрешимость краевой задачи

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\big(u(x) + \alpha u(x/2)\big) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\big(u(x) + \beta u(x/4)\big) = f(x) \quad (|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 < 1),$$

$$u(x) = 0 \quad (|x| = 1)$$

при $f \in L_2\,(|x| < 1)$.

7. Исследовать разрешимость краевой задачи

$$-\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\big(u(x) + \alpha u(x/3)\big) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + 2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\big(u(x) + \beta u(x/3)\big)\right] + u(x)/2 =$$

$$= f(x), \quad x = (x_1, x_2) \in Q = (-1, 1) \times (-1, 1),$$

$$u|_{\partial Q} = 0$$

при $f \in L_2(Q)$.

8. Исследовать разрешимость и гладкость обобщённых решений первой краевой задачи для уравнения

$$-\Delta \left[\cos(\pi(x_1 - x_2)/3)\, u(x) + (x_1^2 + x_2^2) u(x/2)\right] = f(x)$$

в квадрате $|x_1| + |x_2| < 1$.

9. Доказать, что условие

$$r(\lambda) \equiv \sum_{l=0}^{J} b_l \lambda^l \neq 0 \quad \Big(|\lambda| < q^{n/2-1}\Big)$$

является необходимым и достаточным для фредгольмовой разрешимости краевой задачи

$$-\Delta Ru + A_1 u = f \quad (x \in Q),$$

$$u\,|_{\partial Q} = 0.$$

Здесь $A_1 : W_2^1(Q) \to L_2(Q)$ — произвольный линейный ограниченный оператор, $f \in L_2(Q)$, оператор R имеет вид

$$Ru(x) = \sum_{l=0}^{J} b_l u(q^{-l}x) \quad (b_l \in \mathbb{C},\ q > 1),$$

а ограниченная область $Q \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию $\overline{Q} \subset qQ$.

10. Решить краевую задачу

$$-\Delta[2u(x_1, x_2) - u(x_1/2, x_2/2)] = x_1 \quad (|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 < 1),$$

$$u(x) = 0 \quad (|x| = 1).$$

Принадлежит ли решение пространству $W_2^2\,(|x| < 1)$?

11. Найти обобщённое решение краевой задачи

$$-\Delta[5u(x_1, x_2) + u(3x_1, 3x_2)] = 2(x_1^2 + x_2^2) - 1 \quad (|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 < 1),$$

$$u(x_1, x_2) = 0 \quad (|x| \geqslant 1).$$

Принадлежит ли это решение пространству $W_2^2\,(|x| < 1)$?

Литература

[1] *Агранович М. С., Вишик М. И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // УМН. — 1964. — *19*, № 3. — С. 53–161.

[2] *Антоневич А. Б.* Об индексе и нормальной разрешимости общей эллиптической краевой задачи с конечной группой сдвигов на границе // Дифференц. уравнения. — 1972. — *8*, № 2. — С. 309–317.

[3] *Антоневич А. Б., Лебедев А. В.* О нётеровости функционально-дифференциального оператора с частными производными, содержащего линейное преобразование аргумента // Дифференц. уравнения. — 1982. — *18*, № 6. — С. 987–996.

[4] *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. — М.: Мир, 1967.

[5] *Бицадзе А. В., Самарский А. А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // ДАН СССР. — 1969. — *185*, № 4. — С. 739–740.

[6] *Вишик М. И.* О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений // Мат. сб. — 1951. — *29*, № 3. — С. 615–676.

[7] *Гусева О. В.* О краевых задачах для сильно эллиптических систем // ДАН СССР. — 1955. — *102*, № 6. — С. 1069–1072.

[8] *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. — Т. 2 — М.: Мир, 1966.

[9] *Каменский Г. А.* Вариационные и краевые задачи с отклоняющимся аргументом // Дифференц. уравнения. — 1970. — *6*, № 8. — С. 1349–1358.

[10] *Каменский Г. А., Мышкис А. Д.* К постановке краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом и несколькими старшими членами // Дифференц. уравнения. — 1974. — *10*, № 3. — С. 409–418.

[11] *Каменский Г. А., Мышкис А. Д., Скубачевский А. Л.* О гладких решениях краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения нейтрального типа // Укр. мат. журн. — 1985. — *37*, № 5. — С. 581–590.

[12] *Каменский Г. А., Хвилон Е. А.* Необходимые условия оптимального управления для систем с отклоняющимся аргументом нейтрального типа // Автомат. и телемех. — 1969. — *3*, № 5. — С. 20–32.

[13] *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.

[14] *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1967. — *16*. — С. 209–292.

[15] *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.

[16] *Кук К., Россовский Л. Е., Скубачевский А. Л.* Краевая задача для функционально-дифференциального уравнения с линейно преобразованным аргументом // Дифференц. уравнения. — 1995. — *31*, № 3. — С. 1366–1370.

[17] *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. — М.: Наука, 1964.

[18] *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1976.

[19] *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. — М.: Наука, 1972.

[20] *Онанов Г. Г., Скубачевский А. Л.* Дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами в стационарных задачах механики деформируемого тела // Прикл. мех. — 1979. — *15*, № 5. — С. 39–47.

[21] *Рабинович В. С.* О разрешимости дифференциально-разностных уравнений в $\mathbb{R}^n$ и полупространстве // ДАН СССР. — 1978. — *243*, № 5. — С. 1134–1137.

[22] *Россовский Л. Е.* Задача об успокоении системы с запаздыванием, линейно зависящим от времени // Проблемы современной математики и приложения к задачам физики и механики. — М.: Изд-во МФТИ, 1995. — С. 172-182.

[23] *Россовский Л. Е.* Коэрцитивность функционально-дифференциальных уравнений // Мат. замет. — 1996. — *59*, № 1. — С. 103–113.

[24] *Россовский Л. Е.* Коэрцитивность одного класса функционально-дифференциальных уравнений // Функц. анал. и его прил. — 1996. — *30*, № 1. — С. 81–83.

[25] *Россовский Л. Е.* Сильно эллиптические дифференциально-разностные операторы в полуограниченном цилиндре // Фунд. и прикл. мат. — 2001. — *7*, № 1. — С. 289–293.

[26] *Россовский Л. Е.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений с растяжением и сжатием аргументов // Тр. Моск. мат. о-ва. — 2001. — *62.* — С. 199–228.

[27] *Россовский Л. Е.* Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатиями аргументов // ДАН. — 2006. — *411*, № 2. — С. 161–163.

[28] *Россовский Л. Е.* Разрешимость эллиптических функционально-дифференциальных уравнений со сжатиями аргументов в весовых пространствах // Труды семинара им. И. Г. Петровского. — 2007. — *26.* — С. 37–55.

[29] *Рудин У.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975.

[30] *Скрябин М. А.* Разбиение единицы для функционально-дифференциальных уравнений // Соврем. мат. фунд. направл. — 2008 (принято к печати).

[31] *Скубачевский А. Л.* О спектре некоторых нелокальных эллиптических краевых задач // Мат. сб. — 1982. — *117*, № 4. — С. 548–558.

[32] *Скубачевский А. Л.* О некоторых нелокальных краевых задачах // Дифференц. уравнения. — 1982. — *18*, № 9. — С. 1590–1599.

[33] *Скубачевский А. Л.* Гладкость обобщённых решений первой краевой задачи для эллиптического дифференциально-разностного уравнения // Мат. замет. — 1983. — *34*, № 1. — С. 105–112.

[34] *Скубачевский А. Л.* Задача об успокоении системы управления с последействием // ДАН. — 1994. — *335*, № 2. — С. 157–160.

[35] *Скубачевский А. Л., Цветков Е. Л.* Вторая краевая задача для эллиптических дифференциально-разностных уравнений // Дифференц. уравнения. — 1989. — *25*, № 10. — С. 1766–1776.

[36] *Скубачевский А. Л., Цветков Е. Л.* Общие краевые задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений // Тр. С.-Петербург. мат. о-ва. — 1998. — *5*. — С. 223–288.

[37] *Цветков Е. Л.* Разрешимость и спектр третьей краевой задачи для эллиптического дифференциально-разностного уравнения // Мат. заметки. — 1992. — *51*, № 1. — С. 107–114.

[38] *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984.

[39] *Шамин Р.В.* О пространствах начальных данных для дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве // Мат. сб. — 2003. — *194*, № 9. — С. 1411–1426.

[40] *Agmon S.* The coerciveness problem for integro-differential forms // J. Analyse Math. — 1958. — *6*, № 1. — P. 183–223.

[41] *Cooke K., Wiener J.* Distributional and analytic solutions of functional–differential equations // J. Math. Anal. Appl. — 1984. — *98*, № 1. — P. 111–129.

[42] *Feller W.* Diffusion processes in one dimension // Trans. Amer. Math. Soc. — 1954. — *77*. — P. 1–30.

[43] *Figueiredo D. G.* The coerciveness problem for forms over vector-valued functions // Comm. Pure Appl. Math. — 1963. — *16*, № 1. — P. 63–94.

[44] *Fox L., Mayers D. F., Ockendon J. R., Tayler A. B.* On a functional–differential equation // J. Inst. Math. Appl. — 1971. — *8*, № 3. — P. 271–307.

[45] *Gårding L.* Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations // Math. Scand. — 1953. — *1*, № 1. — P. 55–72.

[46] *Gurevich P. L.* Solvability of the boundary value problem for some differential-difference equations // Functional Differential Equations. — 1998. — *5*, № 1-2. — P. 139–157.

[47] *Iserles A., Liu Y.* On neutral functional–differential equations with proportional delays // J. Math. Anal. Appl. — 1997. — *207*, № 1. — P. 73–95.

[48] *Kamenskii G. A., Myshkis A. D.* Variational and boundary value problems for differential equations with deviating argument // Lect. Notes Math. — 1979. — *703*. — P. 179–188.

[49] *Kato T.* Fractional powers of dissipative operators // J. Math. Soc. Japan. — 1961. — *13*. — P. 246–274.

[50] *Kato T., Mcleod J. B.* Functional–differential equation $\dot{y} = ay(\lambda t) + by(t)$ // Bull. Amer. Math. Soc. — 1971. — *77*, № 6. — P. 891–937.

[51] *Liu Y.* Asymptotic behaviour of functional-differential equations with proportional time delays // European J. Appl. Math. — 1996. — *7*, № 1. — P. 11–30.

[52] *McIntosh A.* On the Comparability of $A^{1/2}$ and $A^{*1/2}$ // Proc. Amer. Math. Soc. — 1972. — *32*. — P. 430–434.

[53] *Onanov G. G., Tsvetkov E. L.* On the minimum of the energy functional with respect to functions with deviating argument in a stationary problem of elasticity theory // Russian J. Math. Phys. — 1996. — *3*. — P. 491–500.

[54] *Przeworska-Rolewicz D.* Equations with transformed argument. — Amsterdam: Elsevier, 1973.

[55] *Rossovskii L. E.* On the boundary value problem for the elliptic functional-differential equation with contractions // Functional Differential Equations. — 2001. — *8*, № 3-4. — P. 395–406.

[56] *Rossovskii L. E.* On boundary value problems for a class of functional-differential equations // Nonlinear Analysis. — 2002. — *49*, № 6. — P. 799–816.

[57] *Schulman L S.* Some difference-differential equations containing both advance retardiation // J. Math. Phys. — 1974. — *15*, № 3. — P. 295–298.

[58] *Skubachevskii A. L.* The first boundary value problem for strongly elliptic differential-difference equations // J. Differential Equations. — 1986. — *63*, № 3. — P. 332–361.

[59] *Skubachevskii A. L.* Elliptic Functional Differential Equations and Applications. — Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser, 1996.

[60] *Wheeler J. A., Feynman R. P.* Classical electrodynamics in terms of direct interparticle actions // Rev. of Modern Phys. — 1949. — *21*, № 3. — P. 425–433.

[61] *Vorontsov M. A., Iroshnikov N. G., Abernathy R. L.* Diffractive patterns in a nonlinear optical two-dimensional feedback system with field rotation // Chaos, Solitons, and Fractals. — 1994. — *4*. — P. 1701–1716.

ОПИСАНИЕ КУРСА И ПРОГРАММА

Цели и задачи курса

- представленный в курсе материал относится к области дифференциальных уравнений (математика)
- целью курса является знакомство с основными свойствами и современными методами качественного исследования краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений в ограниченных областях евклидова пространства, включая дифференциально-разностные уравнения и уравнения, содержащие растяжения и сжатия аргументов
- курс предназначен для бакалаврской программы обучения
- рекомендуется в качестве спецкурса по выбору для студентов физико-математических факультетов вузов и университетов, обучающихся по направлению *«Математика»*
- курс носит теоретический характер
- курс рассчитан на 144 часа учебной нагрузки (один семестр, 4 кредита), из которых 36 часов отводится на лекции, 36 часов – на практические занятия, 72 часа – на самостоятельную работу студента

Инновационность курса

- представленный в курсе материал опирается на современные исследования и содержит ряд новых результатов, в том числе и результаты автора, которые до настоящего момента не были отражены в учебно-методической литературе
- курс готовится с учётом реализации в рамках кредитно-модульной системы

Структура курса

Тема 1. Вариационные задачи, приводящие к краевым задачам для функционально-дифференциальных уравнений (лекции – 2 часа, практические занятия – 2 часа, самостоятельная работа – 4 часа).

Модельная задача для дифференциально-разностного уравнения. Модельная задача для уравнения со сжатием и растяжением аргумента.

Тема 2. Решение линейных краевых задач для обыкновенных дифференциально-разностных уравнений (лекции – 8 часов, практические занятия – 8 часов, самостоятельная работа – 16 часов).

Дифференциальные уравнения с нелокальными краевыми условиями. Разрешимость и спектр. Разностные операторы на конечных интервалах. Теорема об изоморфизме соболевских пространств, порождённом разностным оператором. Постановка краевых задач для дифференциально-разностных уравнений. Понятие обобщённого решения. Сведение к дифференциальным уравнениям с нелокальными краевыми условиями. Фредгольмова разрешимость. Гладкость обобщённых решений. Достаточные условия дискретности спектра дифференциально-разностного оператора с однородными краевыми условиями. Случай вещественного спектра. Случай полуограниченного спектра. Примеры решения краевых задач для дифференциально-разностных уравнений.

Тема 3. Решение линейных краевых задач для обыкновенных функционально-дифференциальных уравнений с растяжениями и сжатиями аргумента (лекции – 8 часов, практические занятия – 8 часов, самостоятельная работа – 16 часов).

Свойства функциональных операторов. Теорема об изоморфизме соболевских пространств, порождённом оператором со сжатием аргумента. Краевая задача для функционально-дифференциального уравнения со сжатиями аргумента. Постановка задачи, понятие обобщённого решения.

Критерий однозначной разрешимости. Случай бесконечномерного ядра. Гладкость обобщённых решений. Пример решения краевой задачи для уравнения со сжатием аргумента. Краевая задача для функционально-дифференциального уравнения со сжатиями и растяжениями аргумента. Критерий однозначной разрешимости. Случаи бесконечномерного ядра и коядра. Теорема о гладкости обобщённых решений. Приложение к задаче об успокоении системы управления с запаздыванием, пропорциональным времени. Фредгольмовость и спектр функционально-дифференциального оператора с растяжениями и сжатиями аргумента.

Тема 4. Сильно эллиптические дифференциальные уравнения и системы уравнений с частными производными (лекции – 2 часа, практические занятия – 2 часа, самостоятельная работа – 4 часа).

Классическое неравенство Гординга. Проблема коэрцитивности. Решение проблемы коэрцитивности для дифференциальных уравнений и систем уравнений.

Тема 5. Сильно эллиптические дифференциально-разностные уравнения (лекции – 6 часов, практические занятия – 6 часов, самостоятельная работа – 12 часов).

Разностные операторы в ограниченных областях евклидова пространства. Геометрические вопросы. Разбиение области, порождённое разностным оператором. Матричное описание разностного оператора. Неравенство типа Гординга для линейных дифференциально-разностных операторов. Необходимые условия в алгебраической форме выполнения неравенства типа Гординга. Достаточные условия выполнения неравенства типа Гординга. Разрешимость и спектральные свойства задачи Дирихле для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения. Гладкость обобщённых решений.

Тема 6. Теория Гельфанда коммутативных банаховых алгебр (лекции – 4 часа, практические занятия – 4 часа, самостоятельная работа – 8 часов). Комплексные алгебры. Гомоморфизмы, обратимость, спектр. Банаховы алгебры. Комплексные гомоморфизмы банаховых алгебр. Коммутативные банаховы алгебры. Пространство максимальных идеалов. Преобразование Гельфанда. Топология Гельфанда. Радикал алгебры. Банаховы алгебры с инволюцией. Коммутативные B*-алгебры. Теорема Гельфанда-Наймарка.

Тема 7. Сильно эллиптические функционально-дифференциальные уравнения с растяжениями и сжатиями аргументов (лекции – 6 часов, практические занятия – 6 часов, самостоятельная работа – 12 часов).
Решение проблемы коэрцитивности задачи Дирихле для функционально-дифференциальных уравнений с растяжениями и сжатиями аргументов. Символ функционально-дифференциального оператора с растяжениями и сжатиями аргументов. Достаточные условия выполнения неравенства Гординга. Необходимые и достаточные условия выполнения неравенства Гординга в области, удовлетворяющей условию типа «звёздности». Приложение к дифференциально-разностным операторам в полуограниченном цилиндре. Разрешимость и спектральные свойства задачи Дирихле для сильно эллиптического функционально-дифференциального уравнения с растяжениями и сжатиями аргументов.

Система контроля знаний

включает

- промежуточный контроль в форме письменной контрольной работы
- написание реферата по выбранной теме
- итоговый контроль в форме письменной итоговой работы

На письменную контрольную работу отводится одно практическое занятие на 8-10-й неделе семестра. Целью работы является проверка усвоения материала первой части курса, охватывающего краевые задачи для обыкновенных функционально-дифференциальных уравнений (темы 1-3). Работа выполняется каждым студентом в аудитории, без обращения к конспектам и литературе по предмету. Контрольная работа состоит из трёх задач по темам 2 и 3. Оцениваются как ход решения (чёткость рассуждений, достаточная аргументация), так и правильность полученного ответа. Точное содержание контрольной работы студентам заранее неизвестно. Примерные варианты приведены ниже.

Вариант 1

1. Разностный оператор действует по формуле $Ry(t) = 3y(t)/4 + y(t - 1)$.
Будет ли положительным оператор

а) $R + R^* : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$,

б) $R + R^* : L_2(0,2) \to L_2(0,2)$?

2. Решить краевую задачу

$$-(Ry)'' = t \quad (t \in (0,3)),$$

$$y(t)=0 \quad (t \in [-1,0] \cup [3,5]),$$

где $Ry(t) = 2y(t) + y(t - 1) + y(t + 2)$.

3. Решить краевую задачу

$$(-y'(t) + (i/2)y'(t/3))' = t \quad (t \in (0,1)),$$

$$y(0) = y(1) = 0.$$

Вариант 2

1. Функциональный оператор задан формулой $Ry(t) = y(t) + \alpha y(t/q) + \beta y(qt)$.

При каких значениях параметров $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $q > 1$ оператор

$$R : L_2(\mathbb{R}_+) \to L_2(\mathbb{R}_+)$$

а) самосопряжённый,

б) положительно определённый?

2. Решить краевую задачу

$$(3y'(t) + y'(t/2) + 2y'(2t))' = 0 \quad (0 < t < 1),$$

$$y(0) = 1, \quad y(t) = 0 \quad (t \geq 1).$$

3. Решить краевую задачу

$$-(Ry)'' + 2(Ry)' = 1 \quad (t \in (0,2)),$$

$$y(t)=0 \quad (t \in [-1,0] \cup [2,3]),$$

где $Ry(t) = 3y(t) + 2y(t - 1) - 2y(t + 1)$.

Написание реферата является самостоятельной неаудиторной формой работы студента в семестре. Распределение тем рефератов происходит в течение первой недели, а представление рефератов – не позднее, чем за неделю до проведения итогового контроля. Целью написания реферата является более глубокое освоение студентом изучаемого предмета, включая связи с другими областями, а также выработка навыков самостоятельной работы с современной математической литературой. При оценке реферата учитываются стиль и последовательность изложения, соответствие написанного заданной теме, умение выделить главные моменты.

При подготовке реферата недопустимо включать в свою работу выдержки из работ других авторов без указания на это, пересказывать чужую работу близко к тексту без отсылки к ней, использовать чужие идеи без указания первоисточников (это касается и источников, найденных в Интернете). Все случаи плагиата должны быть исключены. В конце работы даётся исчерпывающий список всех использованных источников.

В конце обучения проводится итоговая работа, охватывающая весь материал курса. Задание к итоговой работе включает два теоретических вопроса и одну задачу. Один из вопросов должен отражать темы 1-3, а другой вопрос и задача должны отражать темы 4-7. Перечень вопросов и основные типы задач, выносимых на итоговую работу, даются за неделю до неё. Каждый студент выполняет итоговую работу в аудитории, письменно отвечая по памяти, «своими словами». Время, выделяемое на написание итоговой работы – не более двух академических часов. В ходе итогового контроля проверяются способность свободно ориентироваться в пройденном материале и наличие практических навыков по его применению. Ниже приведены возможные варианты заданий к итоговой работе.

Вариант 1

1. Сведение краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения к обыкновенному дифференциальному уравнению с нелокальными краевыми условиями.

2. Разрешимость и спектральные свойства задачи Дирихле для сильно эллиптического функционально-дифференциального уравнения с растяжениями и сжатиями аргументов.

3. Исследовать краевую задачу

$$-[\partial^2(u(x) + \alpha u(x/3))/\partial x_1^2 + \partial^2 u(x)/\partial x_1\partial x_2 + 2\partial^2(u(x) + \beta u(x/3))/\partial x_2^2] +$$

$$+u(x)/2 = f(x) \quad (|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 < 4),$$

$$u(x) = 0 \quad (|x| = 2)$$

на однозначную разрешимость.

Вариант 2

1. Гладкость обобщённых решений первой краевой задачи для функционально-дифференциального уравнения со сжатиями аргумента.

2. Разностные операторы в ограниченных областях евклидова пространства.

3. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$-\Delta(u(x,y) + au(x-1,y) + au(x+1,y)) = f(x,y)$$

будет сильно эллиптическим в круге $(x^2 + y^2 \leq 1)$.

Для оценки работы студента применяется балльная система. Наилучшему результату соответствуют 100 баллов, которые распределяются по видам контроля следующим образом:

- промежуточная контрольная работа – от 0 до 30 баллов;
- реферат – от 0 до 20 баллов;
- итоговая работа – от 0 до 50 баллов.

Соответствие суммарного количества набранных баллов итоговой оценке (по пятибалльной шкале и европейскому стандарту) показано в таблицах.

Баллы	0-50	51-68	69-85	86-100
Оценка	неуд.	удовл.	хорошо	отлично

Баллы	0-30	31-50	51-62	63-73	74-83	84-92	93-100
Оценка	F	FX	E	D	B	C	A

Методика выставления и шкала итоговых оценок отвечают принятым в РУДН для теоретических дисциплин.

Программа курса

<u>Аннотированное содержание курса</u>

Раздел 1.

Темы: 1, 2

Трудоёмкость: 1 кредит, 40 часов, из них

- лекции – 10 часов,

- практическия занятия – 10 часов,

- самостоятельная работа – 20 часов.

В курсе изучаются краевые задачи для функционально-дифференциальных уравнений второго порядка, отвечающие вариационным задачам для функционалов с отклоняющимся аргументом, а также их непосредственные обобщения. Вначале рассматриваются два примера задач на экстремум квадратичного функционала с отклоняющимся аргументом. Показывается при определённых ограничениях, что функция реализует минимум функционала тогда и только тогда, когда она является обобщённым решением краевой задачи для симметрического функционально-дифференциального оператора. Далее исследуются свойства получающейся краевой задачи в случае дифференциально-разностного уравнения. При этом применяется метод сведения к дифференциальному уравнению с нелокальными краевыми условиями, позволяющий рассматривать и несимметрические дифференциально-разностные операторы. При естественных предположениях о невырожденности разностного оператора доказывается фредгольмова разрешимость краевой задачи, демонстрируется эффект нарушения гладкости обобщённого решения, даются достаточные условия дискретности спектра. Приводится пример невырожденного симметрического дифференциально-разностного оператора, спектр которого не является полуограниченным.

Раздел 2.

Темы: 3

Трудоёмкость: 1 кредит, 32 часа, из них

- лекции – 8 часов,

- практическия занятия – 8 часов,

- самостоятельная работа – 16 часов.

В этом разделе подробно рассматривается другой представитель класса функционально-дифференциальных уравнений – уравнение, содержащее сжатия и растяжения аргумента под знаком второй производной. Изучаются разрешимость, гладкость решений, спектр краевой задачи. По своим свойствам и методам исследования эти уравнения существенно отличаются от дифференциально-разностных. Причина в том, что конец интервала является неподвижной точкой для оператора сжатия (растяжения). Эта особенность создаёт дополнительные трудности при анализе таких уравнений и приводит к ряду новых свойств, таких, как существование бесконечномерного ядра и нарушение гладкости обобщённых решений даже в том случае, когда преобразования аргумента отображают интервал внутрь себя. В конце раздела развитые методы применяются для исследования задачи Н.Н. Красовского об успокоении системы управления с запаздыванием, пропорциональным времени.

Раздел 3.

Темы: 4, 5

Трудоёмкость: 1 кредит, 32 часа, из них

лекции – 8 часов,

практическия занятия – 8 часов,

самостоятельная работа – 16 часов.

Этот и следующий разделы посвящены многомерным аналогам рассмотренных выше задач. Основным инструментом здесь является неравенство Гординга, или свойство коэрцитивности оператора, играющее важную роль и в теории эллиптических уравнений и систем. Вначале приводится (с доказательством) классический результат от том, что необходимым и достаточным условием выполнения неравенства Гординга для системы дифференциальных уравнений является сильная эллиптичность этой системы. Аналогичный вопрос о нахождении необходимых и достаточных условий в алгебраической форме выполнения неравенства типа Гординга (проблема коэрцитивности) является существенным и в теории функционально-дифференциальных уравнений (как с частными производными, так и обыкновенных). В данном разделе решается проблема коэрцитивности для линейных дифференциально-разностных операторов. Для широкого класса областей найденные необходимые условия и достаточные условия совпадают и выражаются в виде положительности конечного числа матричных полиномов. Далее доказываются фредгольмова разрешимость, дискретность и полуограниченность спектра задачи Дирихле для сильно эллиптического дифференциально-разностного оператора. Затрагивается вопрос о гладкости обобщённых решений.

Раздел 4.

Темы: 6, 7
Трудоёмкость: 1 кредит, 40 часов, из них
лекции – 10 часов,
практическия занятия – 10 часов,
самостоятельная работа – 20 часов.

Последний раздел посвящён сильно эллиптическим функционально-дифференциальным уравнениям с растяжениями и сжатиями аргументов. Для решения проблемы коэрцитивности в этом случае наряду с техникой, развитой для дифференциально-разностных уравнений, эффективной оказывается комбинация преобразований Фурье и Гельфанда. Она позволяет получить достаточные условия выполнения неравенства Гординга, совпадающие с необходимыми для широкого класса областей и формулируемые при помощи скалярного «символа» функционально-дифференциального оператора. Далее стандартными методами проводится доказательство фредгольмовости, дискретности и полуограниченности спектра задачи Дирихле для сильно-эллиптического уравнения. В конце рассматривается приложение развитой в этом разделе техники к дифференциально-разностным операторам со сдвигами вдоль оси полуограниченного цилиндра. Здесь также удаётся получить одновременно необходимые и достаточные условия сильной эллиптичности через скалярный символ дифференциально-разностного оператора (несколько отличающегося от обычного символа – квазиполинома).

Список литературы

Обязательная литература

1. *Г.А. Каменский, А.Л. Скубачевский.* Линейные краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений. – М.: Издательство МАИ, 1992 (темы 2, 5).
2. *Л.Е. Россовский.* Коэрцитивность функционально-дифференциальных уравнений // Матем. заметки. – 1996. – *59*, № 1. – С. 103-113 (тема 7).
3. *L.E. Rossovskii.* On boundary value problems for a class of functional-differential equations // Nonlinear Analysis. – 2002. – *49*. – P. 799-816 (тема 3).

Дополнительная литература

1. *М.С. Агранович, М.И. Вишик.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Успехи матем. наук. – 1964. – *19,* № 3. – С. 53-161 (тема 2).
2. *И.М. Вишик.* О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений // Мат. сб. – 1951. *– 29,* № 3. – С. 615-676 (тема 4).
3. *Н. Данфорд, Дж. Шварц.* Линейные операторы. Т.2. – М.: Мир, 1966 (темы 2, 3, 5, 7).
4. *Г.А. Каменский, А.Л.Скубачевский.* Экстремумы функционалов с отклоняющимися аргументами. – М.: Издательство МАИ, 1979 (тема 1).
5. *Т. Като.* Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972 (темы 2, 3, 5, 7).
6. *Л.Е. Россовский.* Сильно эллиптические дифференциально-разностные операторы в полуограниченном цилиндре //

Фундаментальная и прикладная математика. – 2001. – *7,* № 1. – С. 289-293 (тема 7).

7. *Л.Е. Россовский.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений с растяжением и сжатием аргументов // Тр. Моск. мат. о-ва. – 2001. – *62.* – С. 199-228 (тема 7).
8. *У. Рудин.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1975 (тема 6).
9. *A.L. Skubachevskii.* Elliptic Functional Differential Equations and Applications. – Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser, 1996 (темы 2, 5).

Темы рефератов

1. Вариационные и краевые задачи с отклоняющимся аргументом.
2. Гладкие решения краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений.
3. Функционально-дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами.
4. Коммутативные банаховы алгебры в теории функционально-дифференциальных уравнений.
5. Общие краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений.
6. Нелокальные эллиптические задачи.
7. Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений в весовых пространствах.
8. Эллиптические дифференциально-разностные уравнения с вырождением.
9. Сильно эллиптические дифференциально-разностные уравнения высокого порядка.
10. Спектральные свойства сильно эллиптических функционально-дифференциальных операторов

Учебный тематический план курса

№	Название разделов и тем	Всего часов	в том числе		
			лекции	практ. занятия	самост. работа
1.	**Вариационные задачи, приводящие к краевым задачам для функционально-дифференциальных уравнений**	**8**	**2**	**2**	**4**
2.	**Решение линейных краевых задач для обыкновенных дифференциально-разностных уравнений**	**32**	**8**	**8**	**16**
2.1	Дифференциальные уравнения с нелокальными краевыми условиями	8	2	2	4
2.2	Свойства разностных операторов на конечных интервалах	8	2	2	4
2.3	Разрешимость и гладкость решений краевых задач для дифференциально-разностных уравнений	8	2	2	4
2.4	Спектр дифференциально-разностного оператора с однородными краевыми условиями	8	2	2	4

№	Название разделов и тем	Всего часов	в том числе		
			лекции	практ. занятия	самост. работа
3.	**Решение линейных краевых задач для обыкновенных функционально-дифференциальных уравнений с растяжениями и сжатиями аргумента**	**32**	**8**	**8**	**16**
3.1	Свойства функциональных операторов	8	2	2	4
3.2	Краевая задача для уравнения со сжатиями аргумента	8	2	2	4
3.3	Краевая задача для уравнения со сжатиями и растяжениями аргумента	8	2	2	4
3.4	Приложение к задаче об успокоении системы управления с запаздыванием	8	2	2	4
4.	**Сильно эллиптические дифференциальные уравнения и системы уравнений с частными производными**	**8**	**2**	**2**	**4**
5.	**Сильно эллиптические дифференциально-разностные уравнения**	**24**	**6**	**6**	**12**
5.1	Разностные операторы в ограниченных областях евклидова пространства	8	2	2	4

№	Название разделов и тем	Всего часов	в том числе		
			лекции	практ. занятия	самост. работа
5.2	Решение проблемы коэрцитивности для линейных дифференциально-разностных уравнений	8	2	2	4
5.3	Разрешимость и спектр задачи Дирихле для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения	8	2	2	4
6.	**Теория Гельфанда коммутативных банаховых алгебр**	**16**	**4**	**4**	**8**
6.1	Гомоморфизмы банаховых алгебр	8	2	2	4
6.2	Теорема Гельфанда-Наймарка	8	2	2	4
7.	**Сильно эллиптические функционально-дифференциальные уравнения с растяжениями и сжатиями аргументов**	**24**	**6**	**6**	**12**
7.1	Символ функционально-дифференциального оператора	8	2	2	4
7.2	Неравенство Гординга: необходимые и достаточные условия	8	2	2	4
7.3	Приложение к дифференциально-разностным операторам в полуограниченном цилиндре	8	2	2	4
Итог		**144**	**36**	**36**	**72**