

**ПРИОРИТЕТНЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ПРОЕКТ «ОБРАЗОВАНИЕ»
РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ**

С.М. ХАЛАБИ, А.В. МАКАРОВ

**ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ
УПРУГИХ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК
(с использованием проектно-вычислительного
комплекса SCAD)**

Учебное пособие

Москва

2008

**«Создание комплекса инновационных образовательных программ
и формирование инновационной образовательной среды,
позволяющих эффективно реализовывать государственные интересы РФ
через систему экспорта образовательных услуг»**

Экспертное заключение –

кандидат технических наук, доцент кафедры строительной механики
Московского института коммунального хозяйства и строительства (МИКХиС)
А.Р. Хечумов

Халаби С.М., Макаров А.В.

Численный расчет упругих тонких оболочек (с использованием проектно-вычислительного комплекса SCAD): Учеб. пособие. – М.: РУДН, 2008. – 131 с.

Данное пособие является частью учебно-методического курса, основанного на применении современных расчетных комплексов в проектировании тонкостенных пространственных конструкций и направленного на развитие современного подхода к расчету таких конструкций и изучение новых типов используемых в них поверхностей.

В пособии приводятся основные понятия теории построения и расчета поверхностей, методика использования проектно-вычислительного комплекса SCAD при расчете оболочек, очерченных по аналитически заданным поверхностям. Большую/основную часть пособия составляют примеры построения и расчета конкретных поверхностей различных типов.

Пособие ориентировано на специалистов, занимающихся проектированием и расчетами оболочек сложной геометрии, и научных работников, специализирующихся в исследованиях напряженно-деформированного состояния оболочек, а также студентов старших курсов бакалавриата, магистратуры и аспирантов, обучающихся по направлению «Строительство» (специализации «Строительные конструкции, здания и сооружения» и «Строительная механика»).

Учебное пособие выполнено в рамках инновационной образовательной программы Российского университета дружбы народов, направление «Комплекс экспортноориентированных инновационных образовательных программ по приоритетным направлениям науки и технологий», и входит в состав учебно-методического комплекса, включающего описание курса, программу и электронный учебник.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время основополагающими принципами строительства являются эффективность применяемых конструкций, а следовательно, экономия строительных материалов, долговечность и архитектурная выразительность зданий и сооружений. Поэтому главная задача проектировщика – найти оптимальную конструктивную схему здания, в полной мере удовлетворяющую всем перечисленным требованиям. Эта сама по себе нелегкая задача усложняется тем, что набор конструктивных элементов и строительных материалов, используемых в строительных объектах, относительно невелик. Одним из путей развития строительной отрасли является использование тонкостенных пространственных конструкций, обеспечивающих максимальную эффективность используемых материалов. Эти конструкции представляют собой системы, состоящие из тонких оболочек или пластин, подкрепленных опорными элементами.

Оболочечные системы обладают множеством достоинств и широко применяются в различных отраслях техники: авиастроении, судостроении, машиностроении. В строительстве тонкостенные пространственные конструкции в основном используются в качестве большепролётных покрытий сооружений: спортивных объектов, ангаров, выставочных залов, рынков, промышленных зданий. Такие покрытия особенно целесообразны при перекрытии больших пролетов без промежуточных опор, когда применение плоских конструкций затруднительно или невозможно. Если плоские конструкции покрытий способны перекрыть пролет максимум 24 м, то тонкостенные пространственные покрытия – до 100 м и более. Это происходит благодаря особенностям работы пространственных конструкций покрытий под нагрузкой, обусловленным геометрией поверхностей этих конструкций. Применяя тонкостенные

пространственные конструкции, достигают более эффективного использования материалов, их существенную экономию. Меньшая материалоемкость влечет за собой меньшую массу покрытия и, как следствие, меньшую нагрузку на низлежащие конструкции. Практика показала, что пространственные покрытия экономичнее плоских на 25-40%.

Существует огромное множество поверхностей оболочек, которые могут быть использованы в пространственных покрытиях. Оболочки, очерченные по различным поверхностям, по-разному вписываются в конструкцию и по-разному ведут себя под нагрузкой. Поэтому выбор поверхности оболочки должен быть рационален не только с точки зрения эстетичности, но и с точки зрения прочностных свойств конструкции. Применение оболочечных систем придает сооружению особенную архитектурную выразительность.

Кроме покрытий строительных сооружений, оболочечные системы находят применение в различных специальных сооружениях: резервуарах для хранения жидких и сыпучих материалов, газгольдерах, плотинах, тоннелях. Кроме того, оболочки, очерченные по винтовым поверхностям, применяются при проектировании круговых пандусов и лестниц.

Как уже было сказано, причина эффективности применения оболочек заключается в их геометрии, но именно геометрия этих конструкций вызывает трудности при их расчете и возведении. В связи с этим тонкостенные пространственные конструкции не получили широкого распространения, что привело к замедлению развития теории расчета и проектирования таких конструкций. Появление компьютера значительно упростило процесс проектирования и расширило круг доступных для расчета конструкций.

В настоящее время наиболее эффективным и бурно развивающимся методом расчета конструкций является метод конечных элементов. Он

успешно реализован в современных расчетных компьютерных программах и позволяет проводить достаточно точные расчеты сложных конструкций, в том числе и оболочечных систем, входящих в состав тонкостенных пространственных конструкций. Универсальность данного метода расчета дает возможность исследовать напряженно-деформированное состояние оболочек практически любых форм. В современной практике проектирования расчетные комплексы на основе метода конечных элементов широко используются для расчета строительных конструкций, но их применение для расчета оболочек не так широко распространено.

Целью данного справочного пособия является развитие современного подхода к расчету пространственных конструкций и изучение новых типов поверхностей, используемых в них. В пособии приводятся основные понятия теории построения и расчета поверхностей, методика использования проектно-вычислительного комплекса SCAD при расчете оболочек, очерченных по аналитически заданным поверхностям. Пособие не претендует на полноту теоретического материала, а тем более на его новизну. Краткие сведения по геометрии поверхностей, теории расчета и основы метода конечных элементов приведены лишь в качестве напоминания, так как пособие предназначено для людей, знакомых с указанной тематикой.

Основную часть пособия составляют примеры построения и расчета конкретных поверхностей различных типов, в чем авторы видели особую необходимость, так как подход к построению различных поверхностей индивидуален, а результаты расчета во многих случаях уникальны.

Глава 1. ГЕОМЕТРИЯ ОБОЛОЧЕК

1.1. Аналитическое выражение поверхности

Эффективность тонкостенных пространственных конструкций в первую очередь обусловлена геометрическими характеристиками оболочек, входящих в их состав. От пластин оболочки отличаются криволинейностью своей поверхности. Оболочкой называют тело, изогнутое в одном или двух направлениях без изломов и острых вершин и имеющее толщину намного меньшую, чем два других линейных размера. В тонкостенных пространственных конструкциях используют тонкие оболочки, у которых отношение толщины к наименьшему радиусу кривизны не более $1/20$.

Поверхность, которая делит пополам толщину оболочки, называется срединной поверхностью. Форма срединной поверхности и толщина оболочки полностью описывают ее с геометрической стороны.

Поверхностью называют геометрическое место точек, радиус-вектор которых \bar{r} , направленный из фиксированного центра O – начала прямоугольных координат x, y, z (рис. 1), равен:

$$\bar{r} = \bar{r}(x, y, z) = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \quad (1)$$

или

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v). \quad (2)$$

В параметрической форме поверхность определяется тремя уравнениями:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v). \quad (3)$$

Поверхность полностью определяется двумя семействами координатных линий u, v . Если из уравнений (3) исключить u и v , то получается уравнение поверхности в неявной:

$$F(x, y, z) = 0, \quad (4)$$

или явной форме

$$z = f(x, y). \quad (5)$$

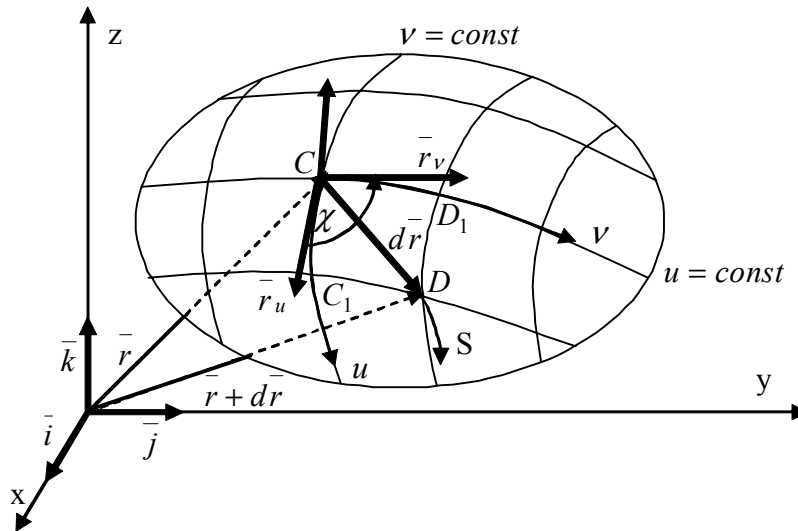


Рис. 1

1.2. Линейный элемент поверхности и первая квадратичная форма

Внутренняя геометрия поверхности может быть охарактеризована первой квадратичной формой поверхности.

Квадрат линейного элемента ds есть квадратичная форма относительно дифференциалов криволинейных координат, а коэффициенты этой формы являются функциями этих же координат и зависят от способа задания рассматриваемой поверхности:

$$ds^2 = |\overline{dr}|^2 = \overline{dr} \overline{dr},$$

$$ds^2 = \overline{r}_u^2 du^2 + 2\overline{r}_u \overline{r}_v dudv + \overline{r}_v^2 dv^2,$$

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

$$I(u, v) = ds^2 = A^2 du^2 + 2Fdudv + B^2 dv^2, \quad (6)$$

где $\overline{r} = \overline{r}(u, v)$ – радиус-вектор поверхности; u, v – криволинейные координаты на поверхности; E, F, G – коэффициенты первой

квадратичной формы поверхности; A, B – коэффициенты Ламе в теории криволинейных координат; ds – линейный элемент поверхности;

$$\bar{r}_u = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u}, \quad \bar{r}_v = \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}. \quad (7)$$

Из формул (6) следует, что

$$A = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \right| - \text{длина вектора } \bar{r}_u,$$

$$B = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right| - \text{длина вектора } \bar{r}_v,$$

$$F = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \right| \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right| \cos \chi = AB \cos \chi, \quad \text{откуда}$$

$$\cos \chi = \frac{F}{AB}, \quad \sin \chi = \frac{\sqrt{A^2 B^2 - F^2}}{AB}, \quad (8)$$

где χ – угол между векторами \bar{r}_u, \bar{r}_v (рис. 1) или

$$\begin{aligned} A^2 &= \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2, \\ F &= \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}, \\ B^2 &= \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 \end{aligned} \quad (9)$$

где x, y, z – координаты поверхности, заданной в векторной или параметрической форме.

Площадь элемента CC_1DD_1 (рис. 1) определяется по формуле:

$$d\sigma = |\bar{r}_u \times \bar{r}_v| = \sqrt{A^2 B^2 - F^2}. \quad (10)$$

Длина координатной линии u , для которой $v = \text{const}$, $dv = 0$, будет:

$$ds_1 = Adu, \quad (11)$$

а длина координатной линии v , для которой $u = \text{const}$, $du = 0$, будет:

$$ds_2 = Bdv. \quad (12)$$

Для разыскания угла φ между двумя направлениями, заданными отношениями $\frac{du}{dv}$ и $\frac{\delta u}{\delta v}$ можно использовать формулу:

$$\cos \varphi = \frac{Edu \delta u + F(du \delta v + dv \delta u) + Gdv \delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} \sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u \delta v + G\delta v^2}}, \quad (13)$$

Для угла χ между координатными линиями u и v имеем $u = const$, $du = 0$, и $v = const$, $\delta v = 0$, тогда из формулы (13) находим:

$$\cos \chi = \frac{Fdv\delta u}{\sqrt{Gdv^2} \sqrt{E\delta u^2}} = \frac{F}{\sqrt{EG}} = \frac{F}{AB}. \quad (14)$$

В основу внутренней геометрии поверхностей Гаусс положил введенную им первую квадратичную форму. Значение ее для внутренней геометрии состоит в том, что задание ее полностью определяет все внутренние свойства поверхности: длины кривых на поверхности, углы между кривыми, площадь области поверхности. При изгибании поверхности ее внутренняя геометрия не изменяется.

Согласно рис. 2а для углов $d\varphi_u$ и $d\varphi_v$, лежащих в двух нормальных к поверхности плоскостях, пересекающихся вдоль оси z под углом χ , получим:

$$d\varphi_u = \frac{\overline{CC_1}}{R_u} = \frac{Adu}{R_u}, \quad d\varphi_v = \frac{\overline{CD_1}}{R_v} = \frac{Bdv}{R_v}, \quad (15)$$

для углов $d\psi_u$ и $d\psi_v$, лежащих в касательной плоскости, используя теорему косинусов (рис. 2б), найдем следующие выражения:

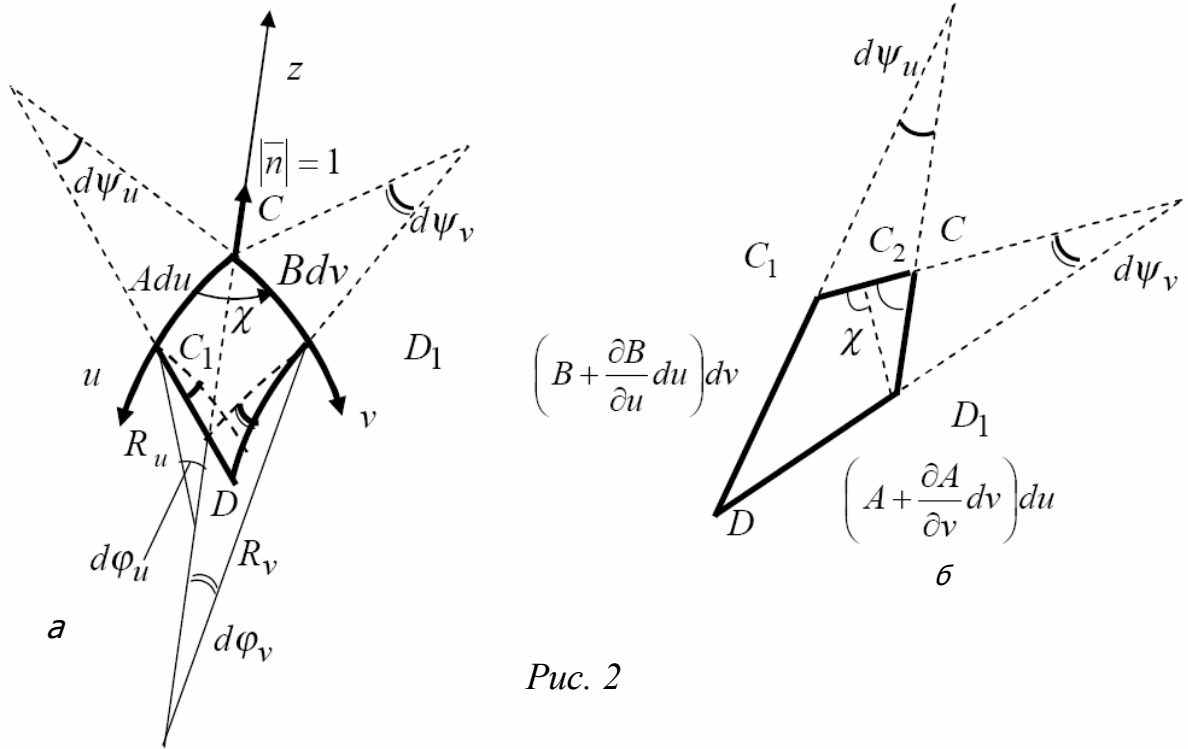


Рис. 2

$$d\psi_u = \frac{\partial A/\partial v - \cos \chi \partial B/\partial u}{B \sin \chi} du, \quad d\psi_v = \frac{\partial B/\partial u - \cos \chi \partial A/\partial v}{A \sin \chi} dv. \quad (16)$$

Если координатные линии u и v являются линиями кривизн α и β , то приведенные выше формулы упрощаются и принимают следующий вид:

$$I(\alpha, \beta) = ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2 = A^2 d\alpha^2 + B^2 d\beta^2, \quad (17)$$

где

$$A^2 = x_\alpha^2 + y_\alpha^2 + z_\alpha^2$$

$$B^2 = x_\beta^2 + y_\beta^2 + z_\beta^2$$

$$\cos \chi = 0, \quad \sin \chi = 1, \quad d\sigma = AB d\alpha d\beta, \quad (18)$$

$$d\varphi_u = \frac{A d\alpha}{R_1}, \quad d\varphi_v = \frac{B dv}{R_2}, \quad (19)$$

$$d\psi_\alpha = \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} d\alpha, \quad d\psi_\beta = \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} d\beta, \quad (20)$$

где R_1 и R_2 – главные радиусы кривизны.

1.3. Расстояние от точки поверхности до касательной плоскости и вторая квадратичная форма

Если на поверхности $\bar{r}(u, v)$ провести различные линии, проходящие через точку C , то касательные к ним в этой точке будут лежать в касательной плоскости к поверхности в этой точке. Это положение не будет относиться к отдельным (изолированным) точкам, подобным вершине конической поверхности, и точкам, лежащим на линиях излома поверхности (особым или неправильным точкам и линиям). Прямая, проходящая через точку C перпендикулярно к касательной плоскости, называется нормалью к поверхности в точке C и обозначается посредством \bar{N} (рис. 3).

Нормальным сечением поверхности в точке C называется сечение некоторой плоскостью, содержащей нормаль \bar{N} к поверхности в этой точке. Такое сечение представляет собой плоскую кривую, главная нормаль которой совпадает по направлению с нормалью к поверхности в данной точке C .

Касательная плоскость проходит через векторы:

$$\bar{r}_u = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \quad \text{и} \quad \bar{r}_v = \frac{\partial \bar{r}}{\partial v},$$

касательные к линиям u и v в точке C .

Обозначим через \bar{r}_s единичный вектор касательной к некоторой линии $s = s(u, v)$ на поверхности (рис. 3), тогда:

$$\bar{r}_s = \frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{r}_u \frac{du}{ds} + \bar{r}_v \frac{dv}{ds}, \quad (21)$$

где s – длина дуги рассматриваемой кривой.

Согласно формуле Серре – Френе, для пространственной кривой [46]:

$$\frac{d\bar{r}_s}{ds} = \frac{\bar{v}}{\rho} = k\bar{v}, \quad (22)$$

где ρ – радиус кривизны кривой линии, $k = 1/\rho$ – ее кривизна, \bar{v} – единичный вектор главной нормали.

Дифференцирование формулы (21) по s , согласно формуле (22), дает вектор кривизны, т.е. вектор, отложенный в положительном направлении по главной нормали \bar{v} , с модулем, равным кривизне k кривой:

$$k\bar{v} = \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} = \bar{r}_{uu} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2\bar{r}_{uv} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \bar{r}_{vv} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + \bar{r}_u \frac{d^2u}{ds^2} + \bar{r}_v \frac{d^2v}{ds^2}. \quad (23)$$

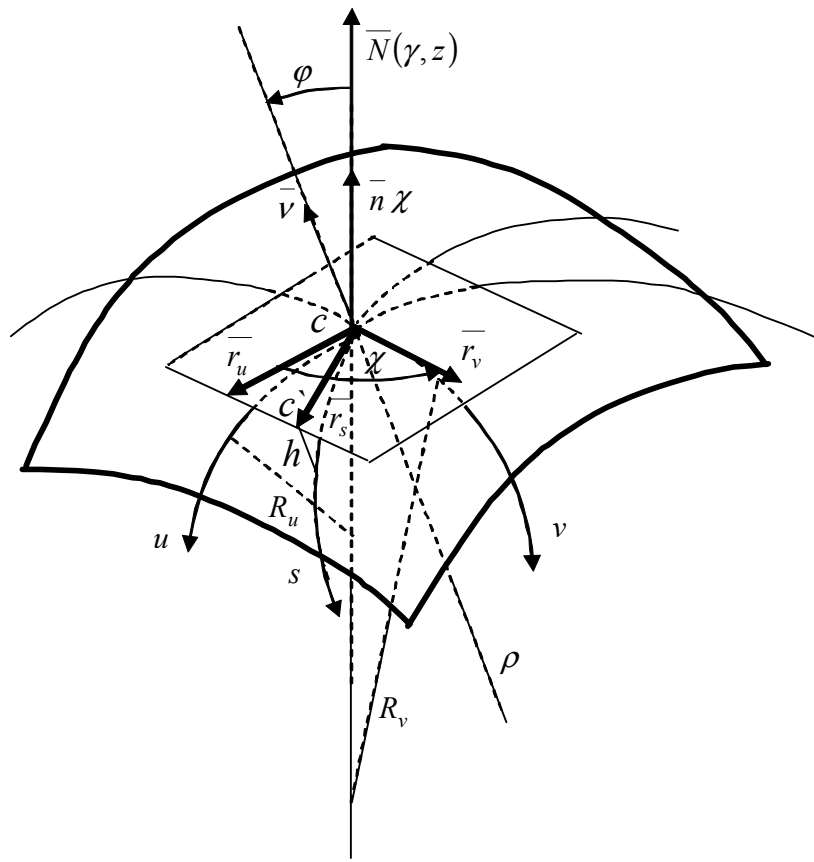


Рис. 3

Для того чтобы освободиться от вторых производных $\frac{d^2u}{ds^2}$ и $\frac{d^2v}{ds^2}$, умножим скалярно обе части равенства (23) на единичный вектор нормали к поверхности \bar{n} (рис. 3), т. е. спроектируем вектор кривизны кривой s ($k\bar{v}$) на нормаль к поверхности и получим:

$$k_n = k \bar{\nu} \bar{n} = k \cos \varphi = \frac{d^2 \bar{r}}{ds^2} \bar{\nu} = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{ds^2}, \quad (24)$$

где k_n – нормальная кривизна линии s на поверхности, т. е. кривизна линии в нормальном сечении, равная кривизне поверхности в направлении этой линии;

$L = \bar{n} \bar{r}_{uu}$, $M = \bar{n} \bar{r}_{uv}$, $N = \bar{n} \bar{r}_{vv}$ – коэффициенты второй квадратичной формы поверхности:

$$II(u, v) = -d\bar{r}d\bar{n} = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2. \quad (25)$$

Расстояние h от точки c' поверхности $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ до касательной плоскости P в бесконечно близкой точке M можно определить по одной из формул:

$$2h = -d\bar{r}d\bar{n} = d^2 \bar{r} \bar{n}, \quad (26)$$

$$2h = (\bar{r}_{uu} \bar{n}) du^2 + 2(\bar{r}_{uv} \bar{n}) dudv + (\bar{r}_{vv} \bar{n}) dv^2, \quad (27)$$

$$2h = (-\bar{r}_u \bar{n}_u) du^2 + (-\bar{r}_u \bar{n}_v - \bar{r}_v \bar{n}_u) dudv + (-\bar{r}_v \bar{n}_v) dv^2, \quad (28)$$

$$2h = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2. \quad (29)$$

Принимая во внимание, что единичный вектор нормали:

$$\bar{n} = \frac{\bar{N}}{|\bar{N}|} = \frac{\bar{r}_u \times \bar{r}_v}{\sqrt{(\bar{r}_u \times \bar{r}_v)^2}} = \frac{\bar{r}_u \times \bar{r}_v}{\sqrt{A^2 B^2 - F^2}}, \quad (30)$$

орт нормали в точке C (рис. 3),

$$L = \bar{r}_{uu} \bar{n} = \frac{\bar{r}_{uu} \times \bar{r}_u \times \bar{r}_v}{|\bar{r}_u \times \bar{r}_v|} = \frac{1}{\sqrt{A^2 B^2 - F^2}} \begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix},$$

$$M = \bar{r}_{uv} \bar{n} = \frac{\bar{r}_{uv} \times \bar{r}_u \times \bar{r}_v}{|\bar{r}_u \times \bar{r}_v|} = \frac{1}{\sqrt{A^2 B^2 - F^2}} \begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix},$$

$$N = \bar{r}_{vv} \bar{n} = \frac{\bar{r}_{vv} \times \bar{r}_u \times \bar{r}_v}{|\bar{r}_u \times \bar{r}_v|} = \frac{1}{\sqrt{A^2 B^2 - F^2}} \begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}, \quad (31)$$

коэффициенты второй квадратичной формы, а выражение (29) называется второй гауссовой квадратичной формой.

Если первая квадратичная форма дает элемент дуги, определяющий внутреннюю геометрию поверхности, то вторая квадратичная форма характеризует внешний вид поверхности и численно меняется при ее изгибании.

1.4. Аналитическое определение главных направлений и главных кривизн

Для нормального сечения в точке C когда $\varphi = 0$ и формула (24) примет вид:

$$k_n = \frac{1}{R} = \frac{II}{I} = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{A^2 du^2 + 2Fdudv + B^2 dv^2}. \quad (32)$$

Нормальные сечения, проведенные в главных направлениях, называются главными сечениями. Кривизны

$$k_1 = \frac{1}{R_1}, \quad k_2 = \frac{1}{R_2} \quad (33)$$

главных сечений называются главными кривизнами поверхности.

Кривизна любого нормального сечения выражается через главные кривизны (33) при помощи формулы Эйлера:

$$k = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi, \quad (34)$$

где через φ обозначен угол между плоскостями, где лежат R_1 и R_2 .

Сумма кривизн двух взаимно перпендикулярных сечений постоянна и равна сумме главных кривизн. Формула для отыскания главных направлений:

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ A^2 & F & B^2 \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0. \quad (35)$$

Для нахождения главных кривизн можно использовать уравнение:

$$\begin{vmatrix} L - kA^2 & M - kF \\ M - kF & N - kB^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (36)$$

Уравнение (36) дает две главные кривизны (33). Если же поверхность задана в линиях главных кривизн, то $M = F = 0$, и из уравнения (36) находим:

$$k_1 = \frac{L}{A^2}, \quad k_2 = \frac{N}{B^2}. \quad (37)$$

При задании поверхности в произвольных криволинейных координатах u, v кривизны координатных линий находим по формуле (32) при условии, что для линии u имеем $dv = 0$, а для линии v имеем $du = 0$.

В этом случае получаем:

$$k_u = \frac{L}{A^2}, \quad k_v = \frac{N}{B^2}. \quad (38)$$

Средняя кривизна поверхности

$$k_{cp} = H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{1}{2} \frac{LB^2 - 2MF + NA^2}{A^2B^2 - F^2}. \quad (39)$$

Если же поверхность задана в линиях главных кривизн, т. е. $M = F = 0$, формула (39) примет вид:

$$k_{cp} = H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{1}{2} \frac{LB^2 + NA^2}{A^2B^2} \quad (40)$$

поверхности, для которых $k_{cp} = H = 0$, т. е. во всех точках $R_1 = -R_2$, называются минимальными. При заданном контуре они имеют наименьшую площадь.

Величина

$$K = k_1 k_2 = \frac{LN - M^2}{A^2 B^2 - F^2}, \quad (41)$$

называется гауссовой (полной) кривизной поверхности. Если гауссова кривизна равна нулю, что справедливо для случая развертывающейся поверхности (R_1 или R_2 равен бесконечности), то геометрия поверхности совпадает с евклидовой; если гауссова кривизна отлична от нуля, то поверхность обладает своей геометрией, отличной от геометрии плоскости.

Существенное место в теории оболочек занимает изучение геометрических характеристик криволинейных поверхностей и способов построения этих поверхностей. В списке литературы приведено несколько публикаций на эту тему.

1.5. Создание поверхностей в SCAD

Современные расчетные программы, основанные на методе конечных элементов, способны рассчитать конструкцию с любой геометрией, но из-за ориентации на практические расчеты строительных сооружений возможности по созданию расчетных схем во многих из них ограничены плоскостными конструкциями. Проектно-вычислительный комплекс SCAD, в отличие от многих подобных программ, содержит достаточно удобный набор средств для задания в расчетной схеме криволинейных поверхностей. Причем возможности по созданию поверхностей не ограничены стандартным набором, а предоставляют определенную свободу для эксперимента. Ниже приведено описание диалоговых окон меню “**Расчетная схема**”, предназначенных для задания сложной геометрии.

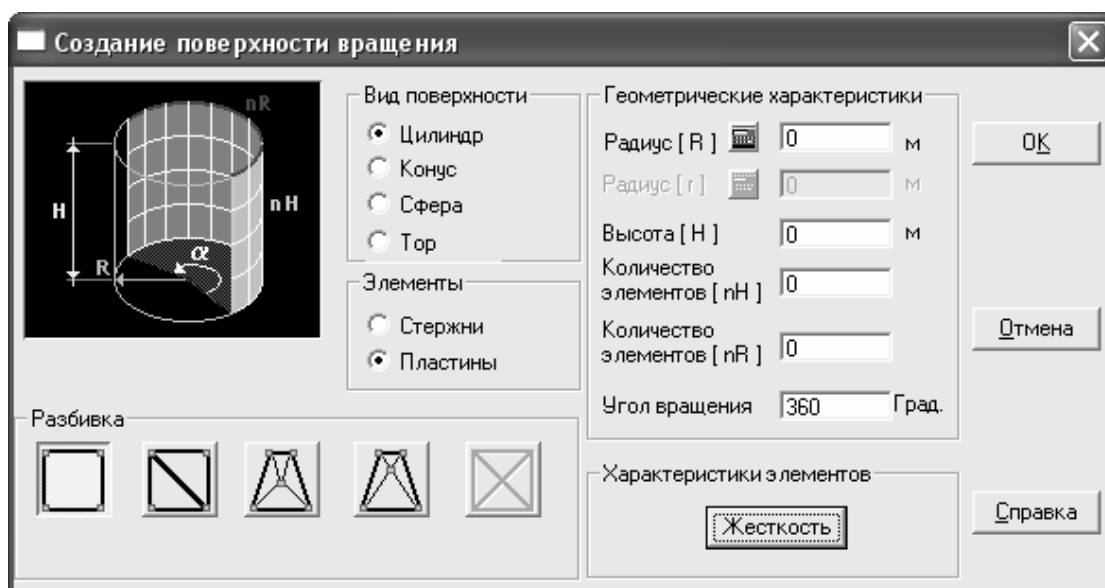


Рис. 4

Диалоговое окно “**Создание поверхности вращения**” позволяет создать поверхность цилиндра, конуса, сферы или тора путем введения их геометрических параметров. При этом задается вид и частота разбивки сетки конечных элементов на поверхности. Данная команда позволяет создавать не только пластинчатые, но и стержневые системы. Есть

возможность задать жесткостные характеристики элементов поверхности (модуль упругости, коэффициент Пуассона, размеры поперечного сечения).

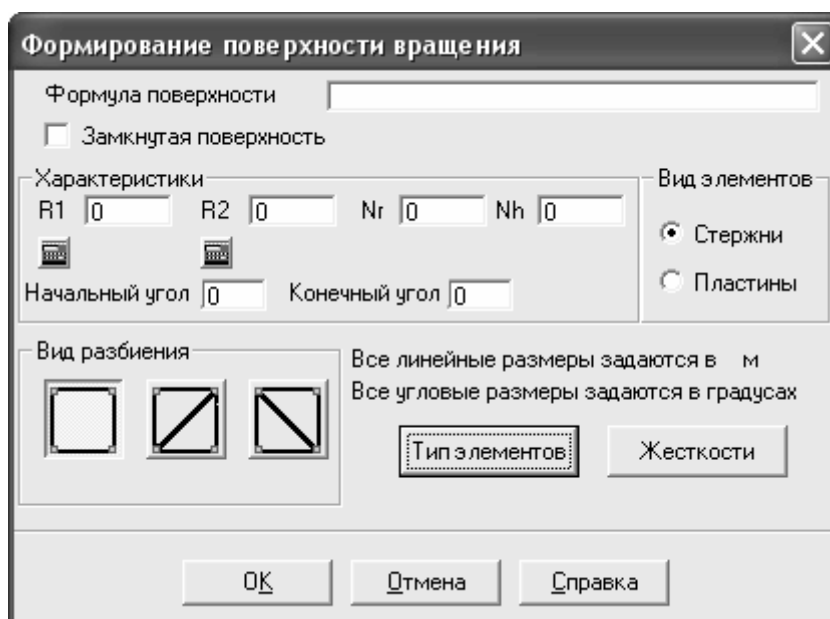


Рис. 5

Диалоговое окно **“Формирование поверхности вращения”** позволяет охватить другие виды поверхностей вращения и предполагает использование уравнения задания образующей кривой в виде $z = f(x, y)$. Кроме образующей, необходимо задать начальный и конечный радиусы вращения точек образующей вокруг оси oz , а также вид и частоту разбиения сетки конечных элементов на поверхности, жесткостные характеристики и тип конечных элементов.

Уравнение задания образующей должно быть оформлено в соответствии со следующими правилами:

- в качестве разделителя дробной и целой частей используется точка;
- в качестве аргументов используются латинские буквы x , y ;
- арифметические операции задаются символами “+”, “=”, “*”, “/”, возведение в степень – “**”;
- аргументы тригонометрических функций задаются в градусах;
- используются следующие математические операторы:

sin () – синус;
cos () – косинус;
tan () – тангенс;
asin () – арксинус;
acos () – арккосинус;
atan () – арктангенс;
sinh () – гиперболический синус;
cosh () – гиперболический косинус;
tanh () – гиперболический тангенс;
sqrt () – корень квадратный;
log () – натуральный логарифм;
log10 () – десятичный логарифм;
exp () – экспонента;
floor () – наибольшее целое превышающее данное;
ceil () – наименьшее целое превышающее данное;
abs () – абсолютное значение.

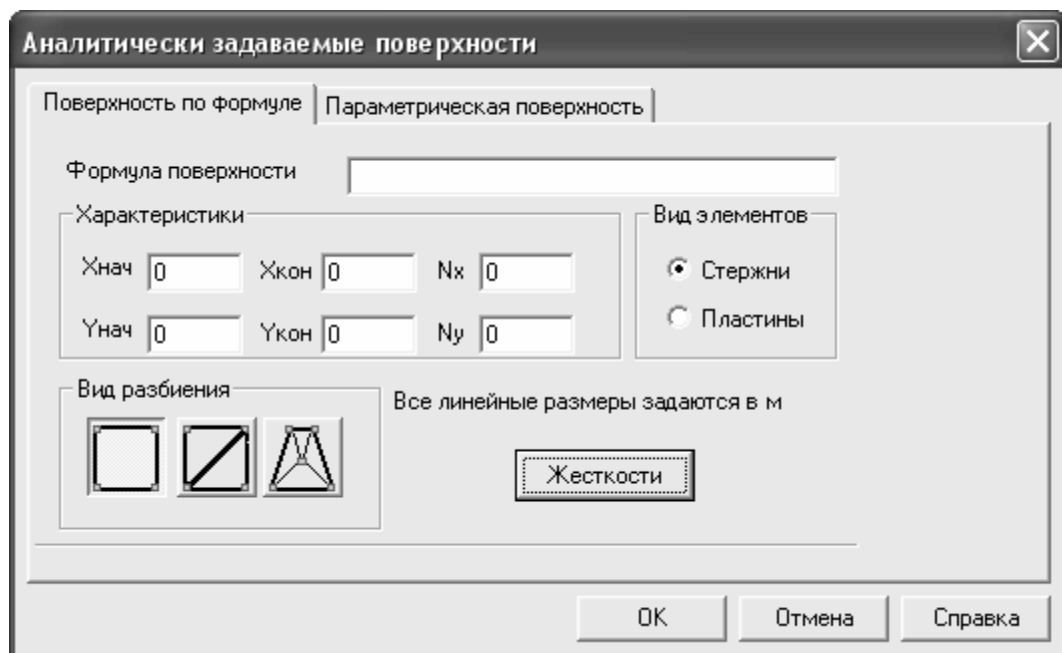


Рис. 6

Диалоговое окно “**Аналитически задаваемые поверхности (поверхность по формуле)**” позволяет создавать поверхности по уравнению в явной форме $z = f(x, y)$, на которое распространяются приведенные выше требования. При этом указываются границы поверхности в плане задания начальных и конечных значений координат x, y .

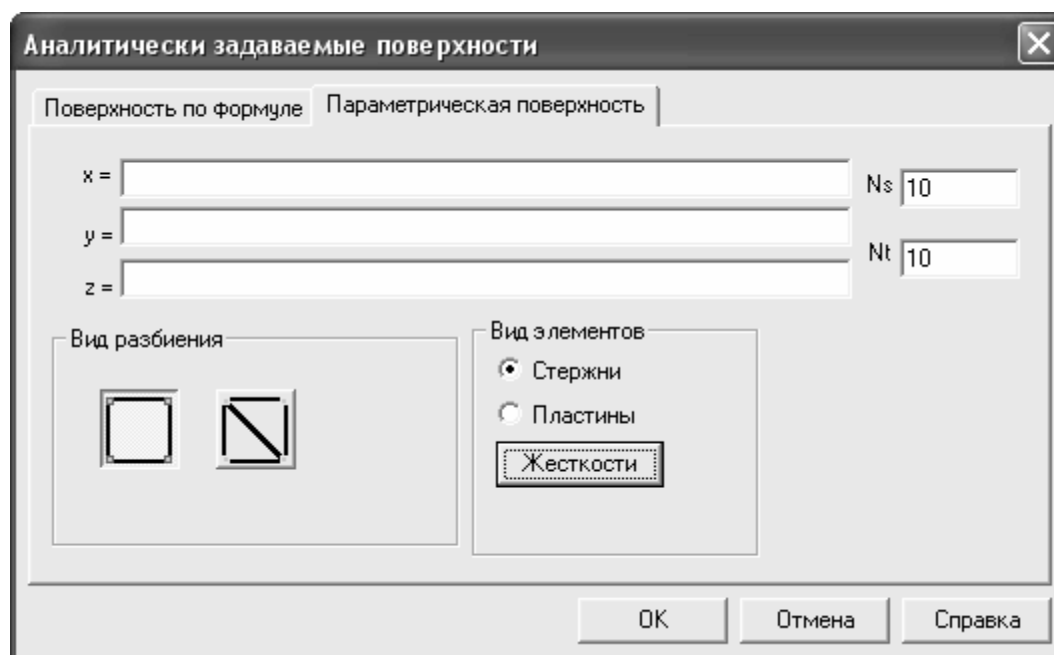


Рис. 7

Диалоговое окно “**Аналитически задаваемые поверхности (параметрическая поверхность)**” позволяет создавать поверхности по параметрическим уравнениям $x = x(s, t)$, $y = y(s, t)$, $z = z(s, t)$ с использованием дополнительных независимых переменных s, t . При написании формул используются дополнительные параметры s, t , которые изменяются в интервалах $[0, 1/Ns, 2/Ns, \dots, 1]$ и $[0, 1/Nt, 2/Nt, \dots, 1]$ соответственно. Дополнительные переменные s, t используются как независимые параметры u, v в теории оболочек. Для конкретных видов поверхностей эти параметры могут иметь другие названия.

Последние два диалоговых окна позволяют построить практически любую поверхность, имеющую аналитическое описание, т.е. уравнение

задания в явном или параметрическом виде. Кроме того, у пользователя появляется возможность для эксперимента и поиска уникальных типов поверхностей.

Полученная геометрия расчетной схемы может быть подкорректирована и дополнена при помощи богатого набора команд меню **“Расчетная схема”** (геометрические преобразования, копирование, добавление и удаление узлов и элементов, сборка схем, смена типа и дробление конечных элементов и т.д.). При создании аналитических поверхностей, рассмотренных в пособии, использовались некоторые из этих команд. Например, при автоматической разбивке поверхности конечные элементы могут оказаться неплоскими или вырожденными, что требует их более мелкой разбивки или удаления. В некоторых случаях для избежания деления на “ноль” в уравнении задания поверхности приходится строить две расчетные схемы с нужным параметром больше и меньше нуля, а впоследствии производить сборку полученных схем. Иногда для удобства дальнейшего расчета поверхность требуется повернуть вокруг одной из осей.

Глава 2. РАСЧЕТ ОБОЛОЧЕК

2.1. Напряженно-деформированное состояние оболочек

Сначала необходимо дать точное определение внутренним усилиям, действующим в оболочке. Представим себе вырезанный из оболочки малый прямоугольный элемент и назовем его стороны ds_x и ds_y , указав тем самым, что мы принимаем их стремящимися в пределе к нулю. По каждой из четырех граней, площади которых равны tds_x и tds_y , действуют напряжения, которые, как увидим ниже, во многих случаях равномерно распределены по рассматриваемым малым поверхностям. В данном случае для определения этих напряжений достаточно было бы дать их равнодействующие; однако последние еще не являются удобными для расчета величинами, так как они, очевидно, зависят от длины ds_x и ds_y .

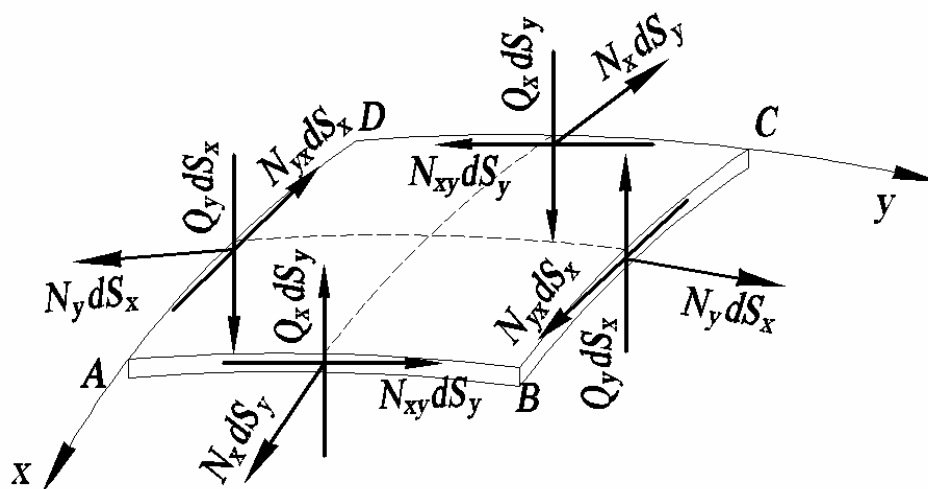


Рис. 8

Разделим напряжения на длины граней, учитывая, что последние стремятся в пределе к нулю; тогда, согласно правилам дифференциального исчисления, отношение примет предельное значение, которое назовем усилием. Оно имеет размерность силы на погонную единицу длины, например g/cm или t/m , и является той силой, которая передается через единицу длины рассматриваемого сечения оболочки. Разложим его по

трем взаимно перпендикулярным осям, из которых одна совпадает с касательной к оболочке и лежит в плоскости сечения, другая – с нормалью к оболочке, третья – с касательной к оболочке, нормальной к плоскости сечения. В соответствии с рис. 8 дадим этим компонентам следующие определения.

В сечении $x = \text{const}$ (сторона AB) силу, действующую в направлении x и отнесенную к единице длины сечения, обозначим N_x и назовем нормальным усилием. Будем считать нормальное усилие положительным, если оно вызывает растяжение, и отрицательным, если оно вызывает сжатие. Подобное же определение может быть дано нормальному усилию N_y .

Силу, действующую в сечении $x = \text{const}$, отнесенную к единице длины сечения и имеющую направление касательной в этом сечении, обозначим N_{xy} и назовем сдвигающим усилием. Будем считать его положительным, если в сечении, в котором положительное нормальное усилие имеет направление положительной оси координат, оно также направлено в сторону возрастающих координат. Подобное же определение может быть дано для сечения $y = \text{const}$ сдвигающему усилию N_{yx} . Зависимость знака сдвигающих усилий от координат выражается в том, что он меняется на обратный, если переменить направление одной из осей координат на обратное.

Иногда более удобно определять усилия исходя из напряжений. В сечении $x = \text{const}$ выделим малый элемент поверхности dF (рис. 9). Действующее в нем нормальное напряжение равно σ_x ; компонент касательного напряжения, параллельный срединной поверхности, будет τ_{xy} , компонент перпендикулярного к нему сдвигающего напряжения τ_{xz} . Соответствующие напряжения в сечении $y = \text{const}$ будут $\sigma_y, \tau_{yx}, \tau_{yz}$. Согласно закону, известному из элементарных курсов сопротивления

материалов, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$. Если напряжение σ_x , равномерно распределено по толщине оболочки t , то равнодействующая нормальная сила, приходящаяся на площадку tds_y , будет равна $\sigma_x tds_y$, а нормальное усилие, согласно данному выше определению, $N_x = \sigma_x t$. Если σ_x изменяется по толщине оболочки, то нужно проинтегрировать силы $\sigma_x dF$:

$$N_x = \frac{1}{ds_y} \int \sigma_x dF. \quad (42)$$

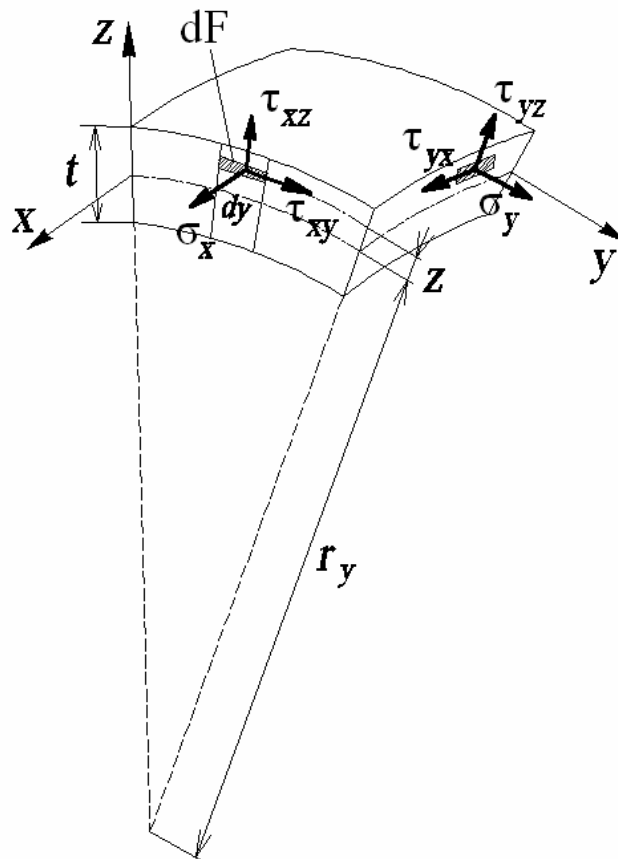


Рис. 9

Обозначим расстояние какой-либо точки до срединной поверхности через z . Тогда элемент площадки имеет высоту dz , но ширина этой площадки не будет равна ds_y , так как вследствие кривизны оболочки нормали в точках A и B (рис. 8) не параллельны между собой, а волокна, параллельные ds_y , на верхней и нижней поверхностях имеют различную длину. Если обозначить радиус кривизны линий $x = const$ через r_y , то

площадка, расположенная на расстоянии z от срединной поверхности, имеет ширину $ds_v \frac{r_y + z}{r_y}$, а для нормального усилия N_x получаем следующее

выражение:

$$N_y = \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_x (1 + z/r_y) dz. \quad (43)$$

Нормальное усилие в перпендикулярном рассмотренному сечении, $y = \text{const}$, будет

$$N_x = \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_y (1 + z/r_x) dz, \quad (44)$$

а оба сдвигающих усилия равны

$$N_{xy} = \int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{xy} (1 + z/r_y) dz, \quad N_{yx} = \int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{yx} (1 + z/r_x) dz. \quad (45)$$

Из последних формул видно, что, несмотря на равенство касательных напряжений, сдвигающие усилия не обязательно должны быть равны между собой. Они равны только тогда, когда $r_x = r_e$ (сферическая оболочка) или если τ_{xy} не зависит от z и может быть вынесено за интеграл; тогда при условии, что $\int_{-t/2}^{+t/2} z dz = 0$, отпадает член, включающий радиус кривизны. Его влияние, разумеется, невелико, так как толщина t должна быть малой по сравнению с радиусами.

Интегрируя третьи компоненты касательных напряжений τ_{xz} и τ_{yz} , получаем поперечные усилия:

$$Q_x = -\int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{xz} (1 + z/r_y) dz; \quad Q_y = \int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{yz} (1 + z/r_x) dz. \quad (46)$$

Они положительны, если в сечении, в котором положительное нормальное усилие имеет направление положительной оси координат, они обращены в направлении убывающей z .

Если напряжения распределены по толщине оболочки t неравномерно, то для их вычисления недостаточно определения их рав-

нодействующей. Чтобы выразить неравномерности их распределения, применяют моменты относительно срединной поверхности: изгибающие моменты

$$M_x = -\int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_x z (1 + z/r_y) dz ; \quad M_y = -\int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_y z (1 + z/r_x) dz. \quad (47)$$

и крутящие моменты

$$M_{xy} = -\int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{xz} z (1 + z/r_y) dz ; \quad M_{yx} = \int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{yz} z (1 + z/r_x) dz. \quad (48)$$

Их знаки выбраны так, что на поверхности $z=-t/2$, иначе говоря, на внутренней поверхности оболочки, действуют растягивающие и положительные касательные напряжения. Даже при неравномерном распределении напряжений τ_{xz} и τ_{yz} моменты от поперечных усилий не возникают.

2.2. Метод конечных элементов

До появления компьютеров существовало множество методов расчета оболочек. Все они были основаны на выводе уравнений для нахождения компонентов напряженно-деформированного состояния из системы уравнений теории оболочек, включающей дифференциальные уравнения равновесия, геометрические и физические уравнения. Эти методы называют аналитическими. Они содержали в себе разнообразные упрощения и допущения, направленные на сокращение количества и трудоемкости вычислений. С появлением компьютеров вычисления перестали быть проблемой, встал вопрос о возможности алгоритмизации необходимых математических операций. Аналитические методы расчета требовали индивидуального подхода к конкретному классу поверхностей, возникла потребность в универсальном методе расчета. Таким методом стал метод конечных элементов (МКЭ), позволяющий рассчитывать любые конструкции с любой геометрией и достаточно простой в алгоритмизации, что вызвало появление множества компьютерных расчетных программ на его основе. В данный момент МКЭ повсеместно применяется и продолжает бурно развиваться.

Численные методы, к которым относится МКЭ, в отличие от аналитических являются приближенными, они заменяют поиск математической записи искомой функции приближенным вычислением конечного числа значений этой функции в нескольких заранее назначенных характерных точках конструкции. Таким образом, в основе МКЭ лежит принцип дискретизации расчетной схемы с целью упрощения математических вычислений (при этом количество вычислений возрастает). Расчетная схема разбивается на множество элементов простой геометрической формы, соединенных между собой в узловых точках. Для каждого конечного элемента получают аналитическое решение уравнения,

описывающего его напряженно-деформированное состояние. На основе этих решений составляется уравнение, описывающее напряженно-деформированное состояние всей конструкции. Метод конечных элементов реализуется в форме метода перемещений, метода сил или смешанного метода. От выбора метода зависят искомые неизвестные, по которым в дальнейшем будут вычислены остальные компоненты напряженно-деформированного состояния конструкции.

Последовательность этапов расчета методом конечных элементов, реализованным в форме метода перемещений, приведена ниже.

1. Дискретизация рассматриваемой конструкции, то есть ее разбиение на конечные элементы определенной формы и размеров, соединенных между собой в узловых точках. При этом конечным элементам назначаются жесткости, загрузки и граничные условия. Происходит нумерация конечных элементов и узлов.

2. Вычисление матриц жесткости отдельных конечных элементов в местной системе координат.

3. Преобразование матриц жесткости элементов в общую для всей конструкции систему координат.

4. Формирование с использованием матриц жесткости элементов системы уравнений движения или равновесия конструкции $L(u_i, v_i, w_i, F) = 0$, где L – некоторый дифференциальный оператор; u_i, v_i, w_i - перемещения узловых точек; $i = 1, 2, \dots, n$; n – число узлов; F – параметр нагрузки.

5. Решение полученной системы уравнений относительно узловых перемещений.

6. Вычисление деформаций элементов по известным узловым перемещениям и вычисление напряжений в элементах по известным деформациям.

Метод конечных элементов получил широкое распространение благодаря достаточно простой алгоритмизации, которая привела к

появлению множества расчетных программ на его основе. Развитие метода конечных элементов в настоящее время продолжается и направлено в первую очередь на ускорение времени расчета и уменьшение погрешностей.

2.3. Расчет оболочек в SCAD

Расчетный процессор проектно-вычислительного комплекса SCAD использует в своей работе метод конечных элементов в перемещениях. Описание реализации МКЭ в SCAD можно прочитать в приведенной литературе.

Для проведения расчета в SCAD, помимо геометрии расчетной схемы, требуется задать жесткостные характеристики элементов, граничные условия путем назначения связей в узлах и загрузки. В рассмотренных примерах представлены расчетные схемы большепролетных покрытий и пандусов, загруженных вертикальной равномерно распределенной нагрузкой, и стены криволинейного очертания в плане, загруженные горизонтальной равномерно распределенной нагрузкой. Материалом конструкций принят железобетон. В узлах контура поверхностей назначены связи по всем шести степеням свободы (три перемещения и три угла поворота), т. е. моделируется заделка.

В процессе расчета определяются все компоненты напряженно-деформированного состояния (НДС): перемещения и углы поворота в узлах, напряжения и моменты в элементах расчетной схемы. По сравнению с аналитическими методами расчета, результатом которых являются эпюры перемещений и усилий по определенным сечениям, МКЭ позволяет получить полную картину НДС по всей поверхности рассматриваемой конструкции. Таким образом, графическим отображением результата расчета являются пространственные эпюры, распределение значений

искомого компонента НДС в которых представлено либо цветом (изополя), либо линиями (изолинии).

Стоит отметить, что перемещения и углы поворота узлов находятся относительно глобальной системы координат, а напряжения и моменты в элементах – относительно местной системы координат конечных элементов, обычно совпадающей с криволинейными координатными линиями поверхности. На рисунке 10 позазана поверхность параболоида вращения с указанием глобальной и местной системы координат.

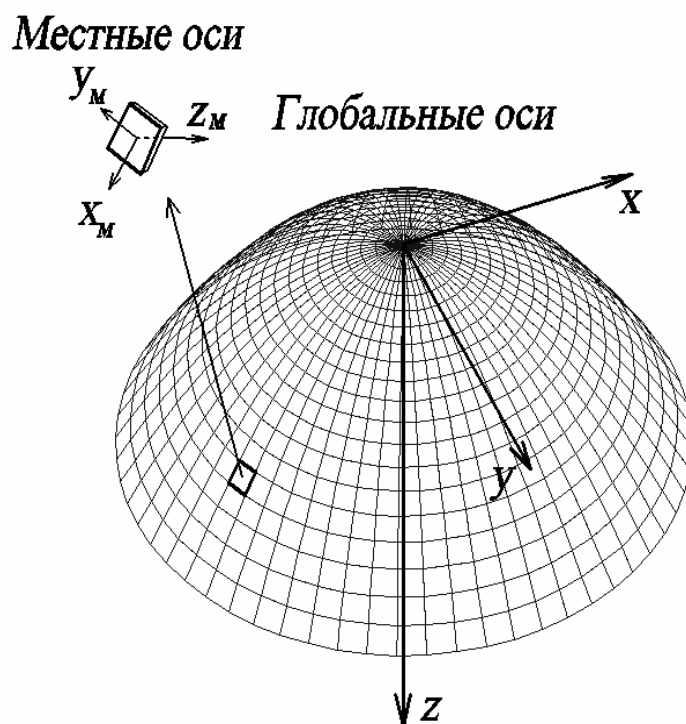


Рис. 10

Глава 3. ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ И РАСЧЕТА

Из огромного множества поверхностей наиболее распространенными в строительстве являются следующие классы:

- линейчатые поверхности;
- поверхности вращения;
- поверхности переноса;
- винтовые поверхности.

Линейчатая поверхность – поверхность, полученная движением прямолинейной образующей по направляющей кривой.

Поверхность вращения – поверхность, полученная вращением криволинейной образующей вокруг оси oz .

Поверхность переноса – поверхность, полученная параллельным переносом криволинейной образующей по криволинейной направляющей.

Винтовая поверхность – поверхность, полученная винтовым движением (вращением вокруг оси oz и одновременным поступательным перемещением в направлении оси oz) криволинейной образующей.

Ниже приводится построение и расчет основных видов поверхностей, относящихся к перечисленным классам. Для каждой поверхности приведены определения, уравнения задания, методика построения и расчета в SCAD с конкретными геометрическими размерами, а также графические результаты расчета.

РАЗВЕРТЫВАЮЩИЙСЯ (ЭВОЛЬВЕНТНЫЙ) ГЕЛИКОИД

- торсовая поверхность, образованная касательными к винтовой линии постоянного шага на круговом цилиндре радиусом a . Разверткой поверхности на плоскость является кольцевая область, ограниченная соосными окружностями.

Параметрическая форма задания:

$$\begin{aligned} x &= a \cdot \cos v - a \cdot u \cdot \sin v / m, \\ y &= a \cdot \sin v + a \cdot u \cdot \cos v / m, \\ z &= b \cdot v + b \cdot u / m, \end{aligned}$$

где $m = \sqrt{a^2 + b^2}$; b - шаг винтовой линии $u = 0$ (ребра возврата); v - угол, отсчитываемый от оси ox .

Координатные линии u совпадают с прямолинейными образующими геликоида, координатные линии v представляют собой соосные винтовые линии.

Угол наклона прямолинейных образующих к плоскости xoy $\varphi = \arctg(b/a)$.

Построение:

Ориентировочно задаемся углом наклона образующих $\varphi = 20^\circ$. Тогда отношение $b/a = \tg \varphi = \tg 20^\circ = 0.364$.

В соответствии с этим отношением подбираем $a = 10 \text{ м}$, $b = 4 \text{ м}$. Тогда фактический угол наклона $\varphi = \arctg(b/a) = \arctg(4/10) = 21^\circ 48'$.

Определяем $m = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{10^2 + 4^2} = 10.770$.

Задаемся радиусом проекции поверхности на плоскость xoy $R = 30 \text{ м}$.

Вычисляем длину образующей $l_u = \sqrt{R^2 - a^2} / \cos \varphi = \sqrt{30^2 - 10^2} / \cos 21^\circ 48' = 30.463 \text{ м}$.

Пусть поверхность описывает один полный круг относительно оси oz .

Тогда параметр u изменяется в интервале $[0; 30.463]$, а параметр v изменяется в интервале $[0; 360]$.

Параметры u, v выражаются через переменные s, t следующим образом: $u \rightarrow 30.463 \cdot t$, $v \rightarrow 360 \cdot s$.

Разбиение примем на четырехугольные конечные элементы, количество конечных элементов в направлении u - 20, v - 60.

Получаем уравнения задания поверхности в SCAD:

$$\begin{aligned} X &= 10 \cdot \cos(360 \cdot s) - 10 \cdot 30.463 \cdot t \cdot \sin(360 \cdot s) / 10.770; \\ Y &= 10 \cdot \sin(360 \cdot s) + 10 \cdot 30.463 \cdot t \cdot \cos(360 \cdot s) / 10.770; \\ Z &= 4 \cdot s + 4 \cdot 30.463 \cdot t / 10.770; \\ N_s &= 60; N_t = 20. \end{aligned}$$

Примечание: Вблизи винтовой линии $u = 0$ могут образоваться неплоские конечные элементы, что является ошибкой в расчетной схеме. Проблема решается повторным дроблением указанных элементов на более мелкие либо удалением некорректных конечных элементов.

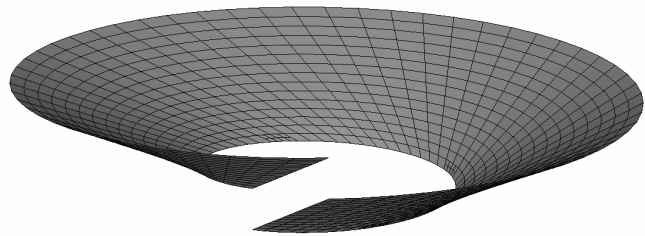


Рис. 1

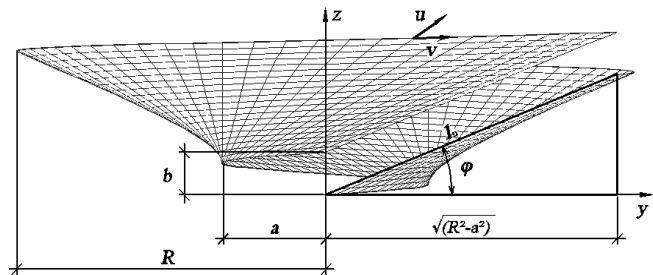


Рис. 2

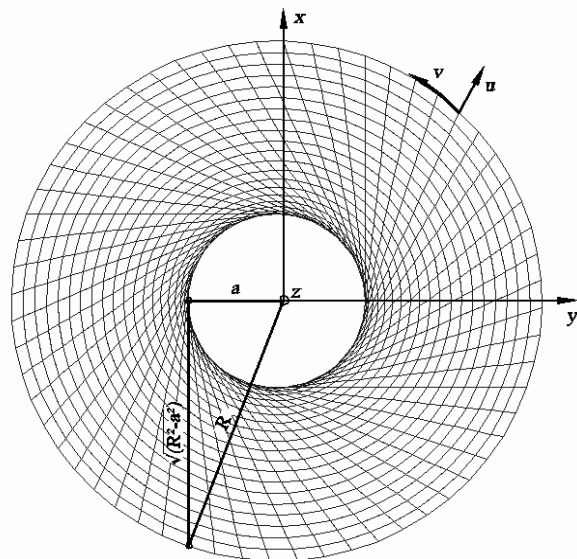


Рис. 3

Расчет:

Жесткостные характеристики:

Модуль упругости $E = 3.06 \cdot 10^6 \text{ т/м}^3$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$, толщина $h = 0.1 \text{ м}$.

Граничные условия:

Заделка по внутреннему и внешнему контуру включая торцы.

Нагрузки:

Равномерно распределенная нагрузка, действующая вдоль оси oz $q = 1 \text{ т/м}^2$.

Деформированная схема:

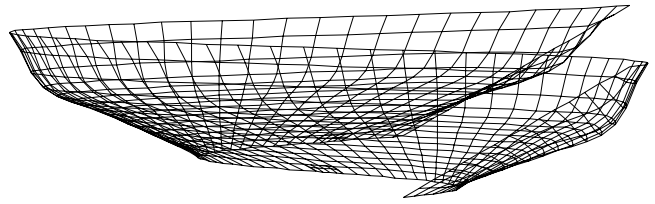


Рис. 4

Результаты расчета:

Изополя перемещений по Z, мм

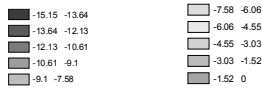
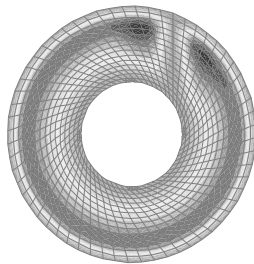


Рис. 5

Изополя напряжений N_x , т/м²

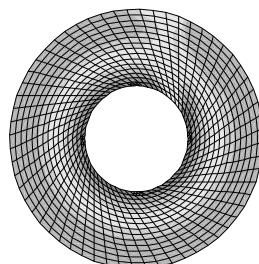


Рис. 6

Изополя напряжений N_y , т/м²

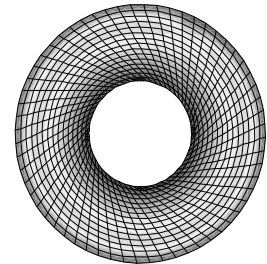


Рис. 7

Изополя напряжений T_{xy} , т/м²

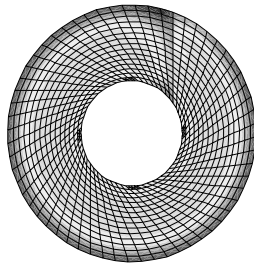


Рис. 8

Изополя напряжений M_x , т·м/м

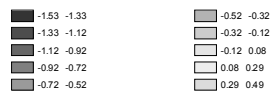
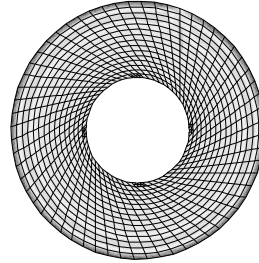


Рис. 9

Изополя напряжений M_y , т·м/м

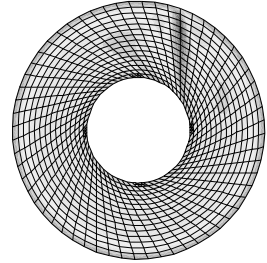


Рис. 10

Изополя напряжений M_{xy} , т·м/м

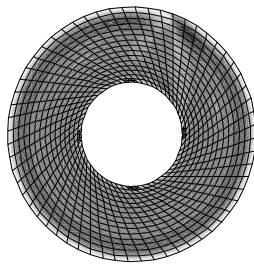


Рис. 11

Изополя напряжений Q_x , т/м

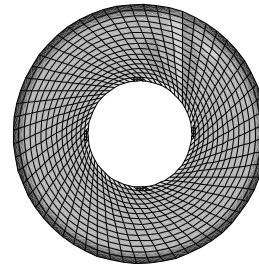


Рис. 12

Изополя напряжений Q_y , т/м

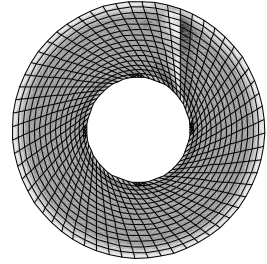


Рис. 13

РЕЗНАЯ ЛИНЕЙЧАТАЯ ПОВЕРХНОСТЬ МОНЖА С КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ НАПРАВЛЯЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

- торсовая поверхность, описываемая прямой линией, принадлежащей плоскости P , при наматывании без скольжения плоскости P на направляющий круговой цилиндр радиусом r ; плоскость P при этом касается кругового цилиндра в любом произвольном положении. Поверхность является поверхностью нулевой гауссовой кривизны и представляет собой часть поверхности развертывающегося геликоида, ограниченную линиями кривизны.

Параметрическая форма задания:

$$\begin{aligned}x &= r \cdot \cos u - t \cdot \sin u, \\y &= r \cdot \sin u + t \cdot \cos u, \\z &= v,\end{aligned}$$

где t, v - прямоугольные координаты произвольной точки образующей прямой, ось v совпадает с линией касания цилиндра и плоскости P ; $t = c \cdot v + b - r \cdot u$; c - длина проекции образующей прямой на плоскость xoy ; b - см. рис. 3; u - угол между осью x и нормалью к плоскости P , отсчитываемый в направлении против часовой стрелки, если смотреть со стороны положительного направления оси z .

Построение:

Пусть $c = 20$ м, $b = 10$ м, $r = 5$ м.

Задаемся углом наклона образующих к плоскости xoy $\varphi = 20^\circ$. Тогда проекция образующей на ось oz $c \cdot \operatorname{tg} \varphi = 20 \cdot \operatorname{tg} 20^\circ = 7.2794$ м.

Пусть поверхность описывает один полный круг относительно оси oz .

Тогда параметр u изменяется в интервале $[0; 360]$, а параметр v изменяется в интервале $[0; 7.2794]$.

Параметры u, v выражаются через переменные s, t следующим образом: $u \rightarrow 360 \cdot s$, $v \rightarrow 7.2794 \cdot t$.

Разбиение примем на четырехугольные конечные элементы, количество конечных элементов в направлении u - 60, v - 20.

Получаем уравнения задания поверхности в SCAD:

$$\begin{aligned}X &= 5 \cdot \cos(360 \cdot s) - (20 \cdot t + 10 - 5 \cdot s) \cdot \sin(360 \cdot s); \\Y &= 5 \cdot \sin(360 \cdot s) + (20 \cdot t + 10 - 5 \cdot s) \cdot \cos(360 \cdot s); \\Z &= 7.2794 \cdot t; \\Ns &= 60; Nt = 20.\end{aligned}$$

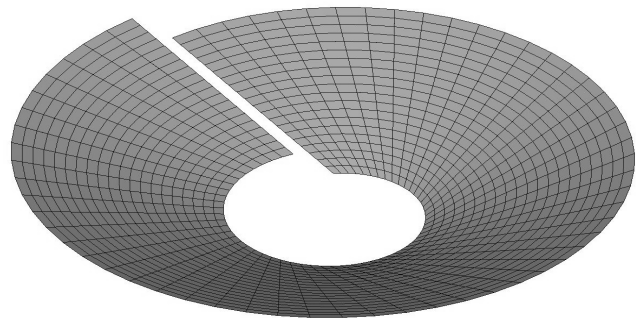
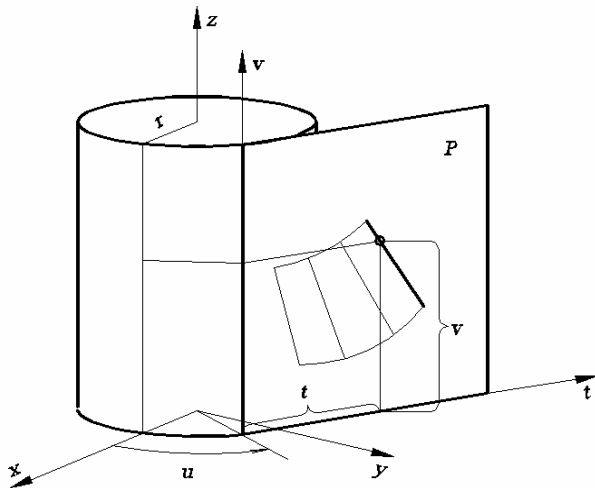


Рис. 1

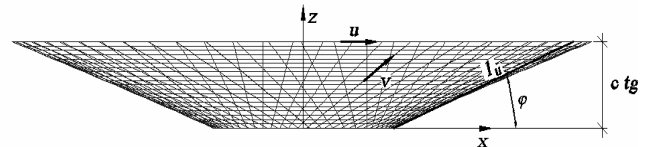


Рис. 2

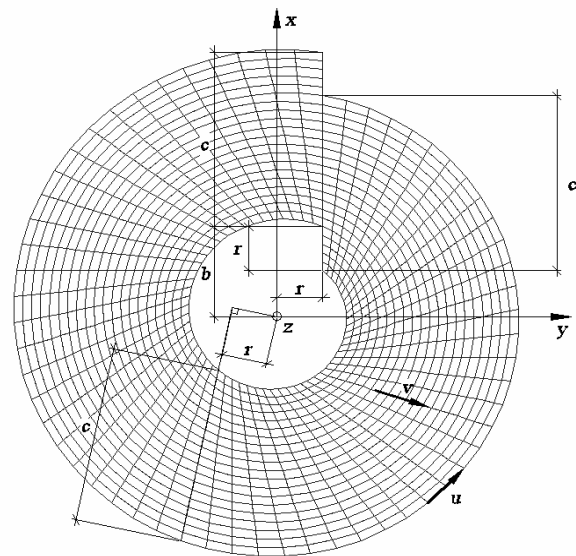


Рис. 3

Расчет:

Жесткостные характеристики:

Модуль упругости $E = 3.06 \cdot 10^6 \text{ т/м}^3$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$, толщина $h = 0.1 \text{ м}$.

Граничные условия:

Заделка по внутреннему и внешнему контуру включая торцы.

Нагрузки:

Равномерно распределенная нагрузка, действующая вдоль оси oz $q = 1 \text{ т/м}^2$.

Деформированная схема:

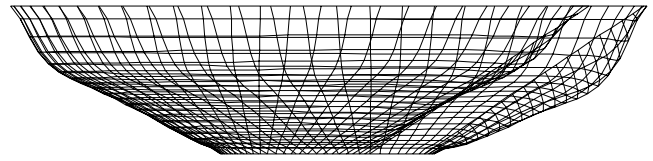


Рис. 4

Результаты расчета:

Изополя перемещений по Z, мм

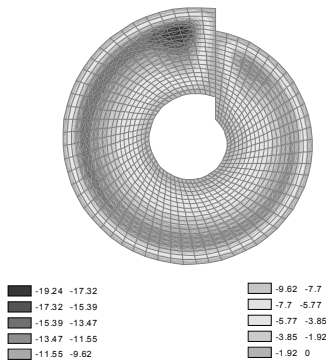


Рис. 5

Изополя напряжений N_x , т/м²

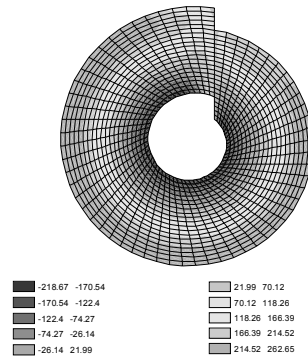


Рис. 6

Изополя напряжений N_y , т/м²

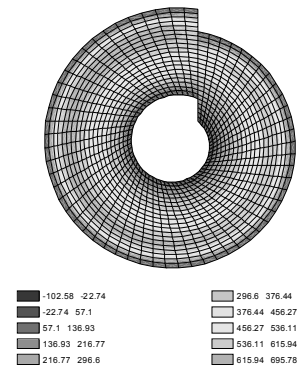


Рис. 7

Изополя напряжений T_{xy} , т/м²

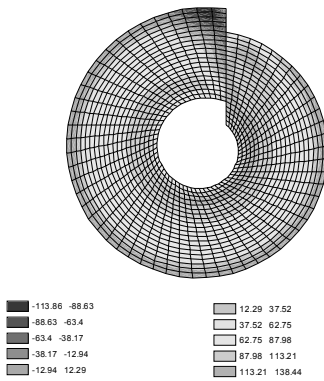


Рис. 8

Изополя напряжений M_x , т·м/м

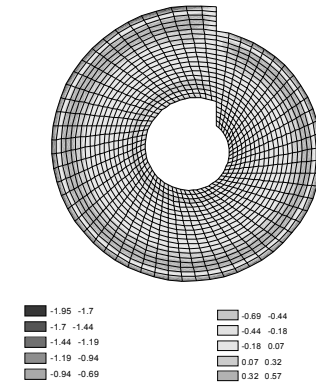


Рис. 9

Изополя напряжений M_y , т·м/м

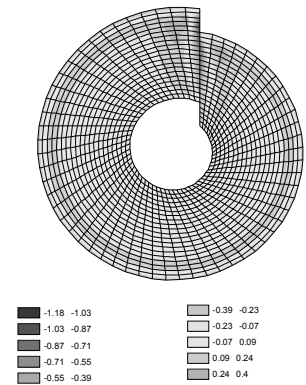


Рис. 10

Изополя напряжений M_{xy} , т·м/м

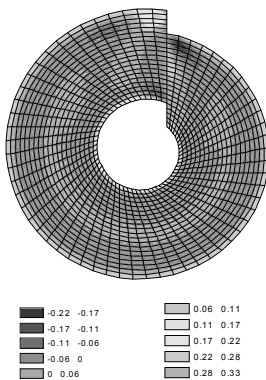


Рис. 11

Изополя напряжений Q_x , т/м

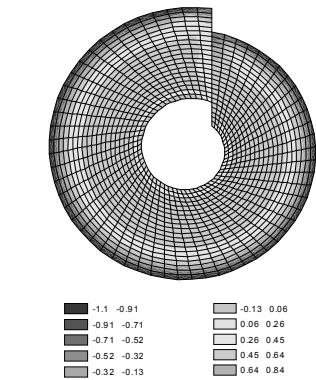


Рис. 12

Изополя напряжений Q_y , т/м

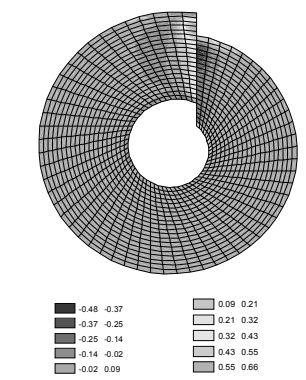


Рис. 13

РАЗВЕРТЫВАЮЩИЙСЯ ГЕЛИКОИД С РЕБРОМ ВОЗВРАТА НА ПАРАБОЛОИДЕ ВРАЩЕНИЯ

- торсовая поверхность, образованная касательными к винтовой кривой с различным законом изменения шага $x = a \cdot \cos t + a \cdot t \cdot \sin t$, $y = a \cdot \sin t - a \cdot t \cdot \cos t$, $z = (a \cdot t^2 / 2) \cdot \operatorname{tg} \beta$, где $\beta = \operatorname{const}$ - угол наклона прямолинейных образующих торса к плоскости xoy ; t - параметр. Проекция ребра возврата на плоскость xoy - эвольвента окружности радиуса a . Само ребро возврата расположено на параболоиде вращения, осевое сечение которого плоскостью yoz описывается уравнением $z = \operatorname{tg} \beta \cdot (y^2 / 2a - a / 2)$, где a - радиус окружности, полученной сечением параболоида вращения плоскостью $z = 0$. Вершина параболоида имеет координаты $z = -(a / 2) \cdot \operatorname{tg} \beta$, $x = y = 0$.

Параметрическая форма задания:

$$x = a \cdot (\cos t + t \cdot \sin t + u \cdot t \cdot \cos t),$$

$$y = a \cdot (\sin t - t \cdot \cos t + u \cdot t \cdot \sin t),$$

$$z = a \cdot (0.5 \cdot t^2 + u \cdot t) \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

Построение:

Пусть $a = 5 \text{ м}$, $\beta = 20^\circ$.

Введем дополнительный параметр b (см. рис.3).

Подбираем значение $b = 4$.

Пусть поверхность описывает один полный круг относительно оси oz .

Тогда параметр t изменяется в интервале $[0; 360]$, а

параметр u изменяется в интервале $[0; b] = [0; 4]$.

Параметры u, t выражаются через переменные s, t следующим образом: $u \rightarrow 4 \cdot s$, $t \rightarrow 360 \cdot t$.

Разбиение примем на четырехугольные конечные элементы, количество конечных элементов в направлении u - 20, t - 60.

Получаем уравнения задания поверхности в SCAD:

$$X = 5 \cdot (\cos(360 \cdot t) + t \cdot \sin(360 \cdot t) + 4 \cdot s \cdot t \cdot \cos(360 \cdot t));$$

$$Y = 5 \cdot (\sin(360 \cdot t) - t \cdot \cos(360 \cdot t) + 4 \cdot s \cdot t \cdot \sin(360 \cdot t));$$

$$Z = 5 \cdot (0.5 \cdot (t)^2 + 4 \cdot s \cdot t) \cdot \tan(20);$$

$$Ns = 20; Nt = 60.$$

Примечание: Вблизи точки с координатами $(0; a; 0)$ четырехугольные конечные элементы вырождаются в треугольные, что является ошибкой в расчетной схеме. Проблема решается удалением указанных элементов.

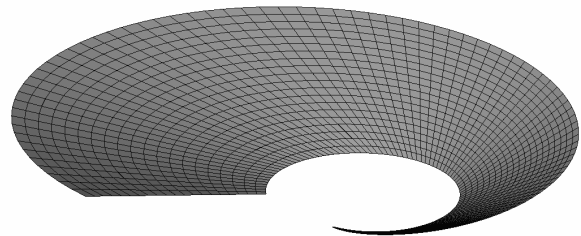


Рис. 1

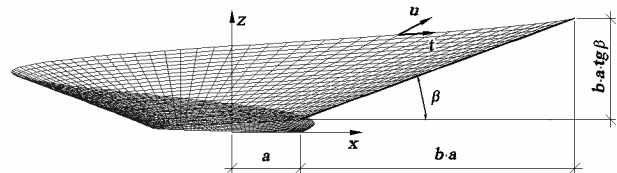


Рис. 2

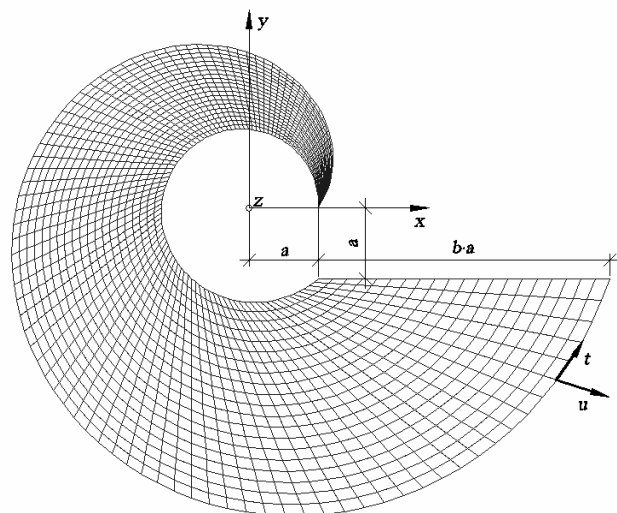


Рис. 3

Расчет:

Жесткостные характеристики:

Модуль упругости $E = 3.06 \cdot 10^6 \text{ т/м}^3$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$, толщина $h = 0.1 \text{ м}$.

Граничные условия:

Заделка по внутреннему и внешнему контуру включая торцы.

Нагрузки:

Равномерно распределенная нагрузка, действующая вдоль оси oz $q = 1 \text{ т/м}^2$.

Деформированная схема:

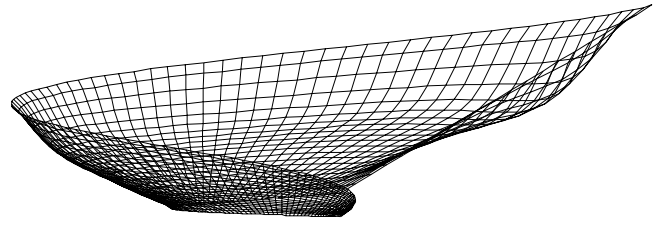


Рис. 4

Результаты расчета:

Изополя перемещений по Z, мм

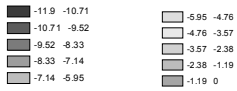
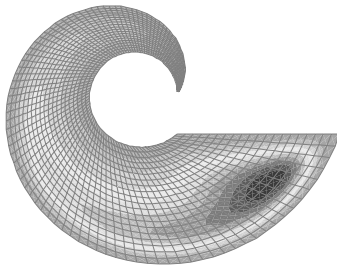


Рис. 5

Изополя напряжений $N_x, \text{ т/м}^2$

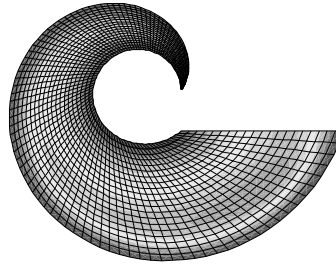


Рис. 6

Изополя напряжений $N_y, \text{ т/м}^2$

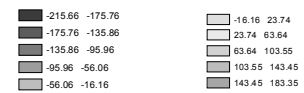
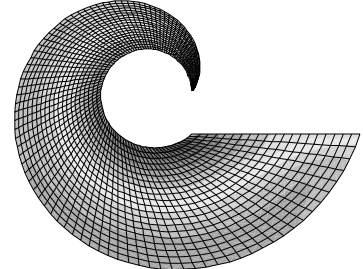


Рис. 7

Изополя напряжений $T_{xy}, \text{ т/м}^2$

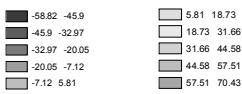
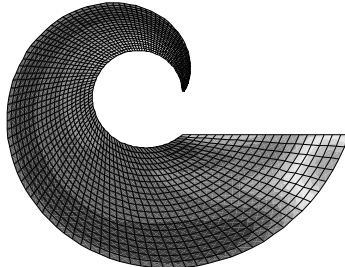


Рис. 8

Изополя напряжений $M_x, \text{ т} \cdot \text{м/м}$

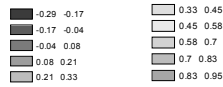
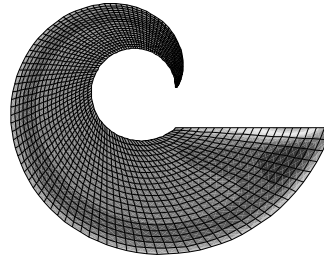


Рис. 9

Изополя напряжений $M_y, \text{ т} \cdot \text{м/м}$

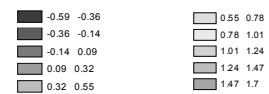
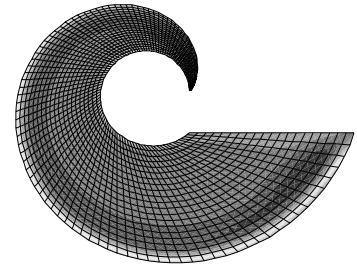


Рис. 10

Изополя напряжений $M_{xy}, \text{ т} \cdot \text{м/м}$

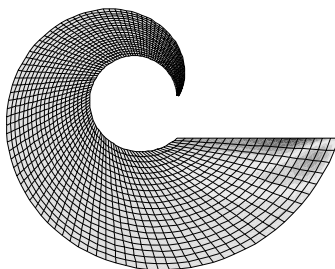


Рис. 11

Изополя напряжений $Q_x, \text{ т/м}$

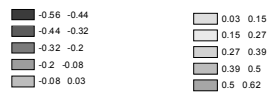
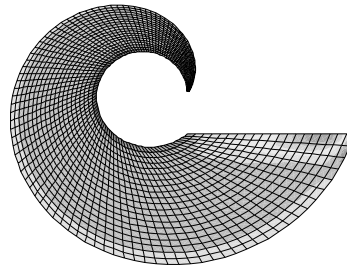


Рис. 12

Изополя напряжений $Q_y, \text{ т/м}$

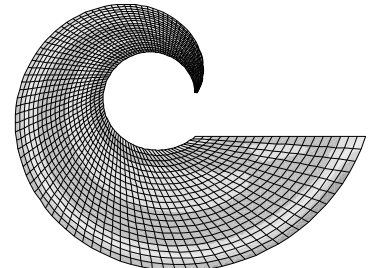


Рис. 13

ТОРС С РЕБРОМ ВОЗВРАТА, ЗАДАННОМ В ВИДЕ $x = e^{-t} \cdot \cos t, y = e^{-t} \cdot \sin t, z = e^{-t}$

- торсовая поверхность с ребром возврата в виде конической спирали $x = e^{-t} \cdot \cos t, y = e^{-t} \cdot \sin t, z = e^{-t}$, лежащей на круговом конусе с $\lambda = 45^\circ$, где λ - угол между осью z и образующей конуса.

Параметрическая форма задания:

$$x = e^{-t} \cdot \cos t - u \cdot \frac{\sin t + \cos t}{\sqrt{3}},$$

$$y = e^{-t} \cdot \sin t - u \cdot \frac{\cos t - \sin t}{\sqrt{3}},$$

$$z = e^{-t} - u \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Построение:

Пусть длина образующей $l_u = 20$ м.

Пусть поверхность описывает один полный круг относительно оси oz .

Тогда параметр u изменяется в интервале $[0; l_u] = [0; 20]$, а параметр t изменяется в интервале $[0; 360]$ в градусах и $[0; 12.56]$ в радианах.

Параметры u, t выражаются через переменные s, t следующим образом: $u \rightarrow 20 \cdot s, t \rightarrow 360 \cdot t$ в градусах и $t \rightarrow 12.56 \cdot t$ в радианах.

Разбиение примем на четырехугольные конечные элементы, количество конечных элементов в направлении u - 20, t - 60.

Получаем уравнения задания поверхности в SCAD:

$$X = \exp(-12.56 \cdot t) \cdot \cos(360 \cdot t) - 20 \cdot s \cdot (\sin(360 \cdot t) + \cos(360 \cdot t)) / \sqrt{3};$$

$$Y = \exp(-12.56 \cdot t) \cdot \sin(360 \cdot t) - 20 \cdot s \cdot (\cos(360 \cdot t) - \sin(360 \cdot t)) / \sqrt{3};$$

$$Z = \exp(-12.56 \cdot t) - 20 \cdot s / \sqrt{3};$$

$$Ns=20; Nt=60.$$

Примечание: Вблизи вершины поверхности четырехугольные конечные элементы вырождаются в треугольные, что является ошибкой в расчетной схеме. Проблема решается удалением указанных элементов.

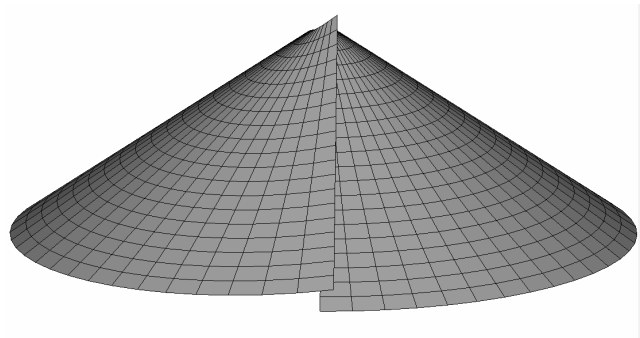


Рис. 1

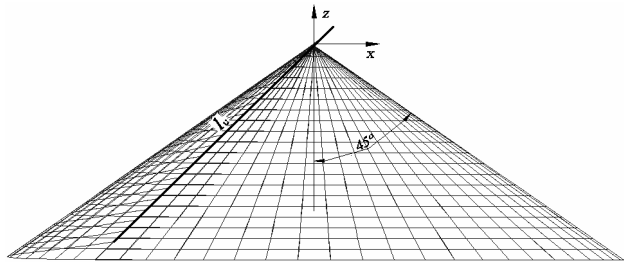


Рис. 2

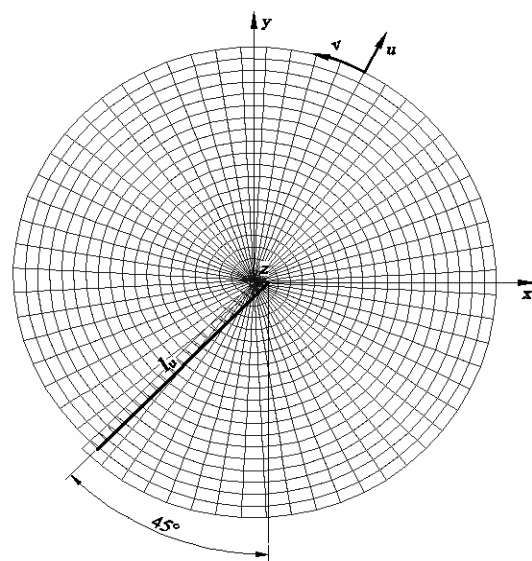


Рис. 3

Расчет:

Жесткостные характеристики:

Модуль упругости $E = 3.06 \cdot 10^6 \text{ т/м}^3$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$, толщина $h = 0.1 \text{ м}$.

Граничные условия:

Заделка по контуру включая торцы.

Нагрузки:

Равномерно распределенная нагрузка, действующая вдоль оси oz $q = 1 \text{ т/м}^2$.

Деформированная схема:

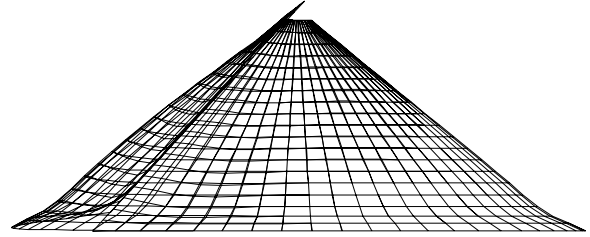


Рис. 4

Результаты расчета:

Изополя перемещений по Z, мм

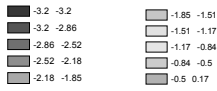
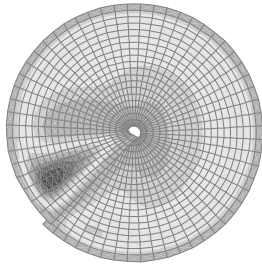


Рис. 5

Изополя напряжений N_x , т/м²

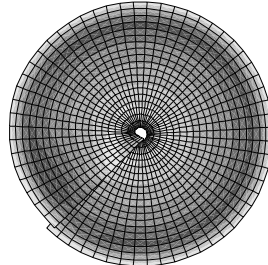


Рис. 6

Изополя напряжений N_y , т/м²

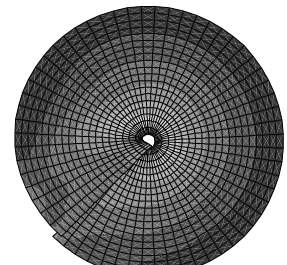


Рис. 7

Изополя напряжений T_{xy} , т/м²

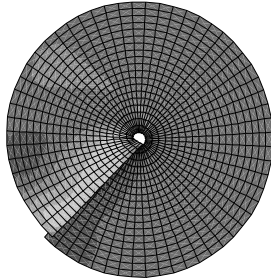


Рис. 8

Изополя напряжений M_x , т·м/м

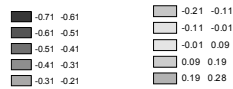
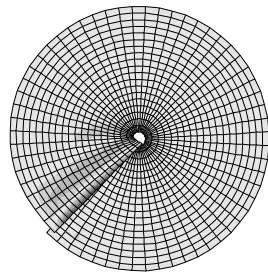


Рис. 9

Изополя напряжений M_y , т·м/м

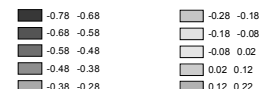
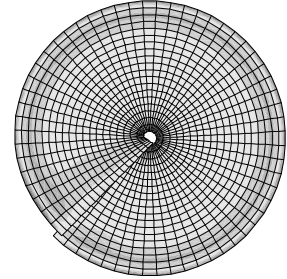


Рис. 10

Изополя напряжений M_{xy} , т·м/м

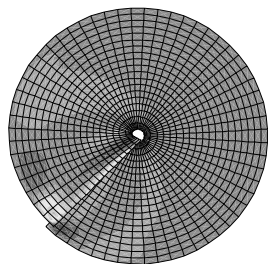


Рис. 11

Изополя напряжений Q_x , т/м

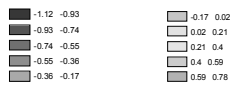
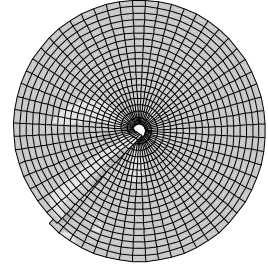


Рис. 12

Изополя напряжений Q_y , т/м

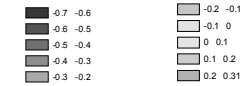
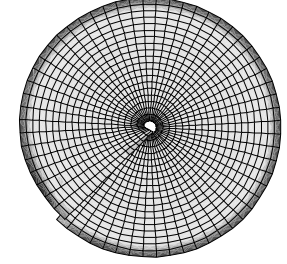


Рис. 13

ТОРС С РЕБРОМ ВОЗВРАТА В ФОРМЕ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ДВУХ ЦИЛИНДРОВ С ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫМИ ОСЯМИ

- торсовая поверхность, образованная касательными к линии пересечения двух цилиндров (кривая четвертого порядка $x^2 + y^2 = r^2, x^2 + z^2 = R^2$), которая является ребром возврата поверхности.

Параметрическая форма задания:

$$x = r \cdot \cos \alpha - u \cdot \sin \alpha \cdot \sqrt{\frac{R^2 - r^2 \cdot \cos^2 \alpha}{R^2 - r^2 \cdot \cos^4 \alpha}},$$

$$y = r \cdot \sin \alpha + u \cdot \cos \alpha \cdot \sqrt{\frac{R^2 - r^2 \cdot \cos^2 \alpha}{R^2 - r^2 \cdot \cos^4 \alpha}},$$

$$z = \sqrt{R^2 - r^2 \cdot \cos^2 \alpha} + \frac{u \cdot r \cdot \sin 2\alpha \cdot (R^2 - r^2 \cdot \cos^4 \alpha)^{-1/2}}{2},$$

где r и R - радиусы двух цилиндров. Координатные линии u совпадают с касательными к линии пересечения двух цилиндров, параметр α изменяется в интервале $[0; 2\pi]$.

Построение:

Принимаем радиусы цилиндров $R=10$ м и $r=5$ м. Пусть параметр u изменяется в интервале $[0; 10]$, где 10 м - длина образующей, а параметр α изменяется в интервале $[0; 360]$, где 360° - угол, огибаемый проекцией линии $u=0$ вокруг оси oz . Тогда параметры u, α выражаются через переменные s, t следующим образом: $u \rightarrow 10 \cdot t, \alpha \rightarrow 360 \cdot s$.

Разбивку на конечные элементы примем четырехугольную, количество конечных элементов в направлении u - 20, α - 60.

Получаем уравнения задания поверхности в SCAD:

```
X=5*cos(360*s)-10*t*sin(360*s)*sqrt((100-25*(cos(360*s)**2)/(100-25*(cos(360*s)**4)));
Y=5*sin(360*s)+10*t*cos(360*s)*sqrt((100-25*(cos(360*s)**2)/(100-25*(cos(360*s)**4)));
Z=sqrt(100-25*(cos(360*s)**2)+10*t*5*sin(720*s)*(100-25*(cos(360*s)**4)**(-0.5)/2;
Ns=60; Nt=20.
```

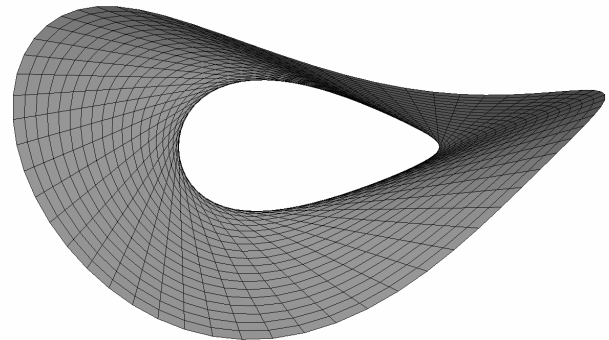
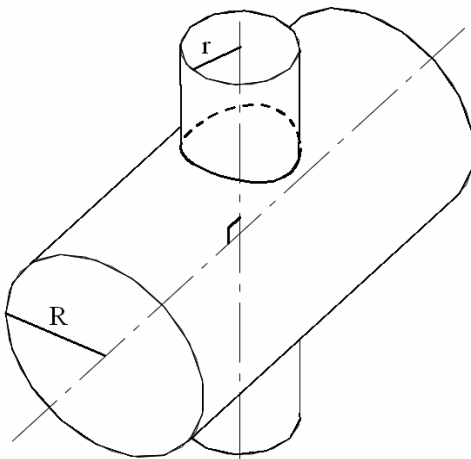


Рис. 1

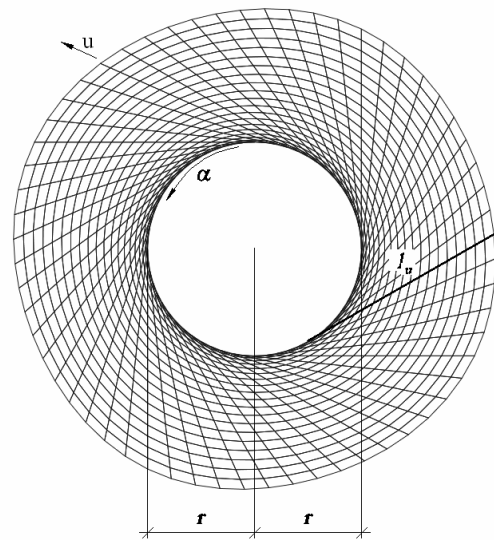


Рис. 2

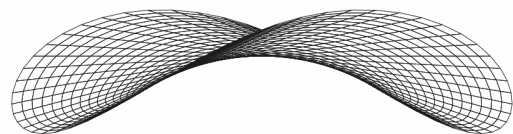


Рис. 3

Расчет:

Жесткостные характеристики:

Модуль упругости $E = 3.06 \cdot 10^6 \text{ т/м}^3$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$, толщина $h = 0.1 \text{ м}$.

Граничные условия:

Заделка по внутреннему и внешнему контуру.

Нагрузки:

Равномерно распределенная нагрузка, действующая вдоль оси oz $q = 1 \text{ т/м}^2$.

Деформированная схема:

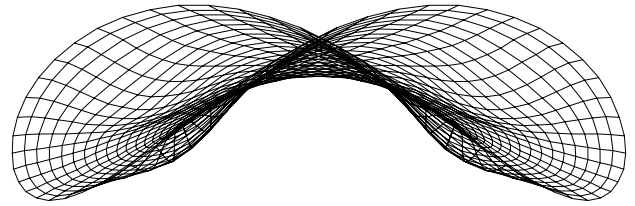


Рис. 4

Результаты расчета:

Изополя перемещений по Z, м

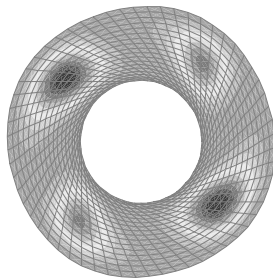


Рис. 5

Изополя напряжений $N_x, \text{ т/м}^2$

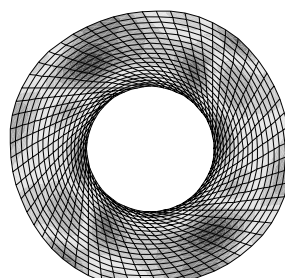


Рис. 6

Изополя напряжений $N_y, \text{ т/м}^2$

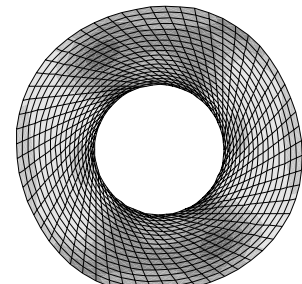


Рис. 7

Изополя напряжений $T_{xy}, \text{ т/м}^2$

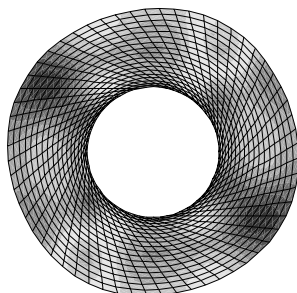


Рис. 8

Изополя напряжений $M_x, \text{ т} \cdot \text{м/м}$

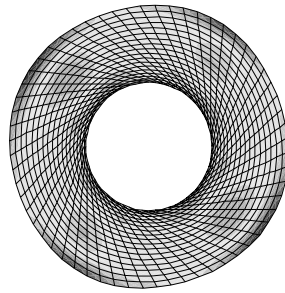


Рис. 9

Изополя напряжений $M_y, \text{ т} \cdot \text{м/м}$

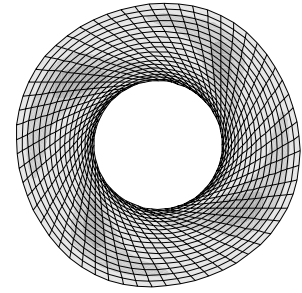


Рис. 10

Изополя напряжений $M_{xy}, \text{ т} \cdot \text{м/м}$

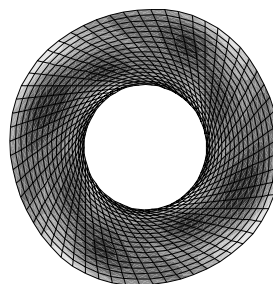


Рис. 11

Изополя напряжений $Q_x, \text{ т/м}$

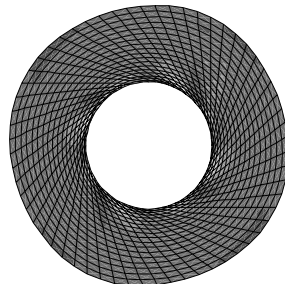


Рис. 12

Изополя напряжений $Q_y, \text{ т/м}$

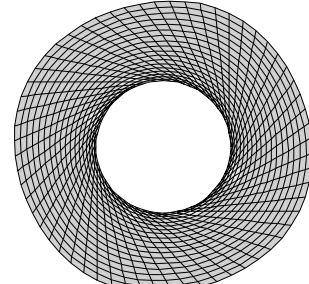


Рис. 13

ТОРС С ДВУМЯ ПАРАБОЛАМИ, ОСИ КОТОРЫХ ПЕРЕСЕКАЮТСЯ

- торсовая поверхность, образованная движением прямой линии по двум направляющим в виде парабол второго порядка $x = \frac{\cos \varphi_1}{2 p_1} \cdot z^2, y = \frac{\sin \varphi_1}{2 p_1} \cdot z^2$ и $x = \frac{\cos \varphi_2}{2 p_2} \cdot z^2 - d, y = l - \frac{\sin \varphi_2}{2 p_2} \cdot z^2$, оси которых пересекаются. Прямолинейные образующие проходят через точки $z = \beta$ первой параболы и $z = \gamma$ второй параболы. Координатная плоскость $z = 0$ является плоскостью симметрии торсовой поверхности.

Координатные линии $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$ совпадают с направляющими параболы. Параметры β и γ совпадают с проекциями направляющих парабол на ось oz , при этом $\gamma = \gamma(\beta)$. Система криволинейных координат λ, β является неортогональной сопряженной.

Параметрическая форма задания:

$$x = \frac{\cos \varphi_1}{2 \cdot p_1} \cdot \beta^2 \cdot (1 - \lambda) + \lambda \cdot \left(\frac{\cos \varphi_2}{2 \cdot p_2} \cdot \gamma^2 - d \right), \quad y = \frac{\sin \varphi_1}{2 \cdot p_1} \cdot \beta^2 \cdot (1 - \lambda) + \lambda \cdot \left(l - \frac{\sin \varphi_2}{2 \cdot p_2} \cdot \gamma^2 \right), \quad z = \beta \cdot (1 - \lambda) + \lambda \cdot \gamma,$$

где $\gamma = \frac{\beta}{2} + \frac{a}{\beta} \pm \sqrt{\frac{a^2}{\beta^2} + \frac{\beta^2}{4} + b}$ ("+" при $\beta < 0$, "-" при $\beta > 0$), $a = \frac{p_1 \cdot (l \cdot \cos \varphi_2 - d \cdot \sin \varphi_2)}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)}$, $b = a - \frac{2 \cdot p_2 \cdot (l \cdot \cos \varphi_1 + d \cdot \sin \varphi_1)}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)}$

Построение:

Примем для первой параболы $\varphi_1 = 30^\circ, p_1 = 10$, для второй $\varphi_2 = 15^\circ, p_2 = 5, d = 3 \text{ м}, l = 40 \text{ м}$.

Тогда $a = \frac{10 \cdot (40 \cdot \cos 15^\circ - 3 \cdot \sin 15^\circ)}{\sin(15^\circ + 30^\circ)} = 535.429$,

$$b = 535.429 - \frac{2 \cdot 5 \cdot (40 \cdot \cos 30^\circ + 3 \cdot \sin 30^\circ)}{\sin(15^\circ + 30^\circ)} = 24.318.$$

Получим $\gamma = \frac{\beta}{2} + \frac{535.429}{\beta} \pm \sqrt{\frac{535.429^2}{\beta^2} + \frac{\beta^2}{4} + 24.318}$.

Пусть параметр β изменяется в интервалах $[-10; -0.01]$ и $[0.01; 10]$ (значение $\beta = 0$ пропущено во избежание деления на ноль), где 10 м - длина проекции на ось oz половины первой параболы (при этом для второй параболы эта величина составит $\gamma(\beta = 10) = 4.54 \text{ м}$).

Параметр λ изменяется в интервале $[0; 1]$.

Таким образом, параметры β, λ выражаются через переменные s, t следующим образом:

$$\beta \rightarrow \pm(10 \cdot s + 0.01), \quad \lambda \rightarrow t.$$

Создаются две поверхности при $\beta < 0$ и $\beta > 0$, которые потом собираются. Полученная схема поворачивается вокруг оси oy на -90° . На рисунках показана поверхность до поворота.

Разбивку на конечные элементы примем четырехугольную, количество конечных элементов в направлении β - 10, λ - 30.

Получаем уравнения задания поверхности в SCAD:

1:

$$X = \cos(30)/2/10*(10*s+0.01)**2*(1-t)+t*(\cos(15)/2/5*((10*s+0.01)/2+535.429/(10*s+0.01)-\sqrt{535.429**2/(10*s+0.01)**2+(10*s+0.01)**2/4+24.318})**2-3);$$

$$Y = \sin(30)/2/10*(10*s+0.01)**2*(1-t)+t*(40-\sin(15)/2/5*((10*s+0.01)/2+535.429/(10*s+0.01)-\sqrt{535.429**2/(10*s+0.01)**2+(10*s+0.01)**2/4+24.318})**2);$$

$$Z = (10*s+0.01)*(1-t)+t*((10*s+0.01)/2+535.429/(10*s+0.01)-\sqrt{535.429**2/(10*s+0.01)**2+(10*s+0.01)**2/4+24.318});$$

2:

$$X = \cos(30)/2/10*(-10*s-0.01)**2*(1-t)+t*(\cos(15)/2/5*((-10*s-0.01)/2+535.429/(-10*s-0.01)+\sqrt{535.429**2/(-10*s-0.01)**2+(-10*s-0.01)**2/4+24.318})**2-3);$$

$$Y = \sin(30)/2/10*(-10*s-0.01)**2*(1-t)+t*(40-\sin(15)/2/5*((-10*s-0.01)/2+535.429/(-10*s-0.01)+\sqrt{535.429**2/(-10*s-0.01)**2+(-10*s-0.01)**2/4+24.318})**2);$$

$$Z = (-10*s-0.01)*(1-t)+t*((-10*s-0.01)/2+535.429/(-10*s-0.01)+\sqrt{535.429**2/(-10*s-0.01)**2+(-10*s-0.01)**2/4+24.318});$$

$$Ns=10; Nt=30.$$

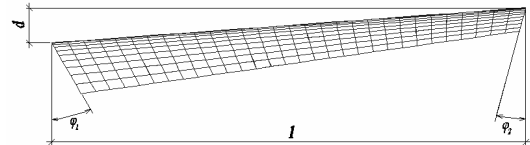


Рис. 2

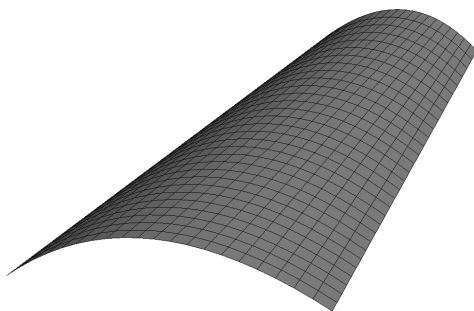


Рис. 1

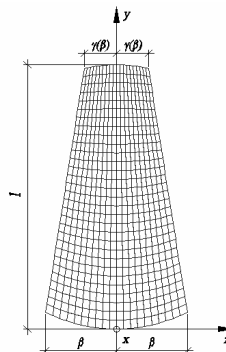


Рис. 3

Расчет:

Жесткостные характеристики:

Модуль упругости $E = 3.06 \cdot 10^6 \text{ т/м}^3$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$, толщина $h = 0.1 \text{ м}$.

Граничные условия:

Заделка по контуру.

Нагрузки:

Равномерно распределенная нагрузка, действующая вдоль оси oz $q = 1 \text{ т/м}^2$.

Деформированная схема:

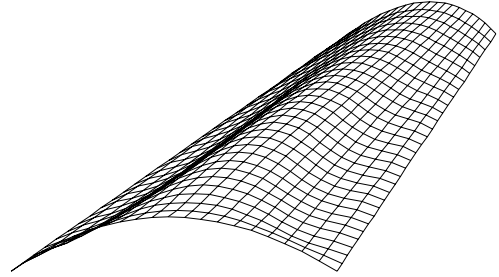


Рис. 4

Результаты расчета:

Изополя перемещений по Z, мм

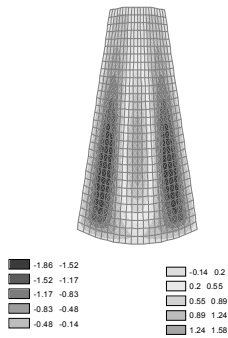


Рис. 5

Изополя напряжений $N_x, \text{ т/м}^2$

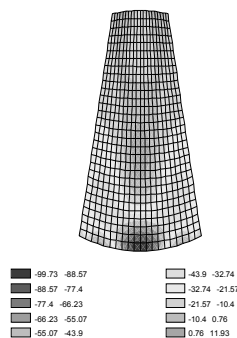


Рис. 6

Изополя напряжений $N_y, \text{ т/м}^2$

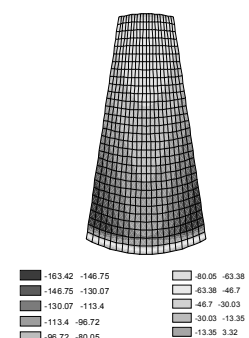


Рис. 7

Изополя напряжений $T_{xy}, \text{ т/м}^2$

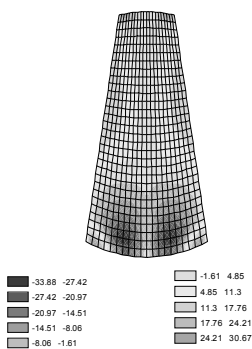


Рис. 8

Изополя напряжений $M_x, \text{ т} \cdot \text{м/м}$

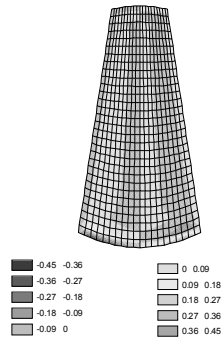


Рис. 9

Изополя напряжений $M_y, \text{ т} \cdot \text{м/м}$

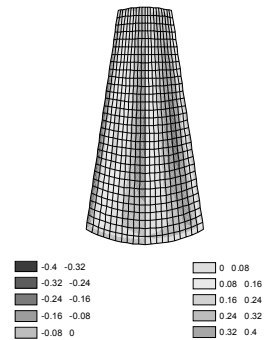


Рис. 10

Изополя напряжений $M_{xy}, \text{ т} \cdot \text{м/м}$

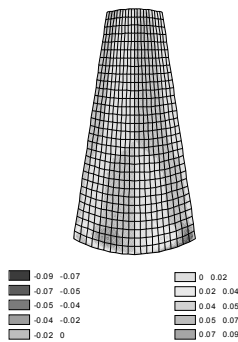


Рис. 11

Изополя напряжений $Q_x, \text{ т/м}$

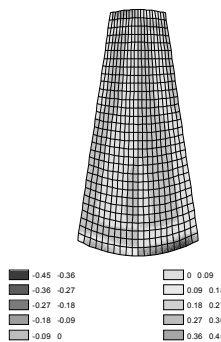


Рис. 12

Изополя напряжений $Q_y, \text{ т/м}$

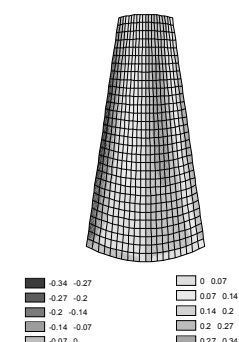


Рис. 13

ТОРС С ДВУМЯ ЭЛЛИПСАМИ, ЛЕЖАЩИМИ В ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПЛОСКОСТЯХ, И С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ОСЯМИ

- торсовая поверхность, содержащая в качестве направляющих кривых два эллипса

$$\frac{(y-m)^2}{c^2} + \frac{(z-n)^2}{d^2} = 1, x=l \quad \text{и} \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1, x=0.$$

Прямолинейные образующие торса проходят через точку $z=\beta$ эллипса, лежащего в плоскости $x=l$ и соответствующую точку $z=\gamma$ второго эллипса, лежащего в координатной плоскости yoz ,

$$\gamma = \frac{a^2 c (\beta - n)}{\sqrt{b^2 d^4 + (\beta - n)^2 (a^2 c^2 - b^2 d^2)}}.$$

Параметрическая форма задания:

$$x = \lambda l,$$

$$y = b \sin u [1 - \lambda + \lambda a / f(u)],$$

$$z = \cos u [a - a\lambda + \lambda d^2 / f(u)],$$

где $f^2(u) = d^2 \cos^2 u + a^2 \sin^2 u$, $0 \leq \lambda \leq 1$. Координатные линии $\lambda=0$ и $\lambda=1$ совпадают с направляющими эллипсами, заданными в форме: $x=0, y=b \sin u, z=a \cos u$ и $x=l, y=b \sin v, z=d \cos v$.

Система криволинейных координат u, λ является неортогональной и сопряженной.

Построение:

Пусть требуется перекрыть прямоугольный план $2b \times l = 20 \times 40$ м. Тогда принимаем $b=10$ м и $l=40$ м.

Принимаем высоты эллипсов $a=5$ м и $d=10$ м.

Тогда

$$f^2(u) = 10^2 \cos^2 u + 5^2 \sin^2 u,$$

$$f(u) = \sqrt{10^2 \cos^2 u + 5^2 \sin^2 u}.$$

Пусть параметр λ изменяется в интервале $[0; 1]$, а параметр u изменяется в интервале $[0; 180]$.

Тогда параметры λ, u выражаются через переменные s, t следующим образом: $\lambda \rightarrow s, u \rightarrow 180 \cdot t$.

Разбивку на конечные элементы примем четырехугольную, количество конечных элементов в направлении образующей λ - 30, направляющей u - 20.

Создаются две поверхности с положительным и отрицательным значением уравнения $Y=f(s,t)$, которые потом собираются. Часть полученной поверхности, расположенная ниже плоскости xoy , удаляется.

Получаем уравнения задания поверхности в SCAD:

$$X = s * 40;$$

$$Y = \pm 10 * \sin(180 * t) * (1 - s + s * 5 / \sqrt{100 * (\cos(180 * t))^2 + 25 * (\sin(180 * t))^2});$$

$$Z = \cos(180 * t) * (5 - 5 * s + s * 10 / \sqrt{100 * (\cos(180 * t))^2 + 25 * (\sin(180 * t))^2});$$

$$Ns = 30; Nt = 20.$$

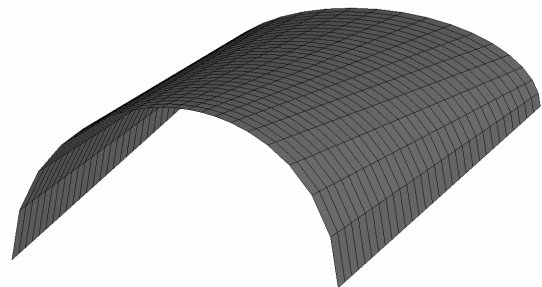


Рис. 1

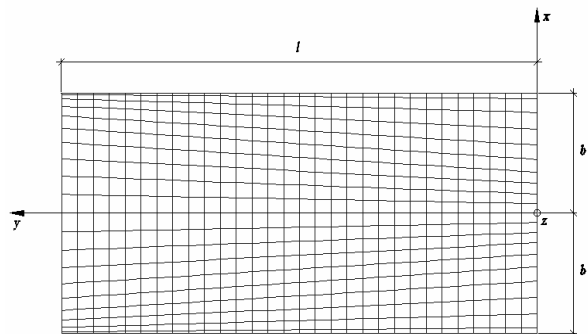


Рис. 2

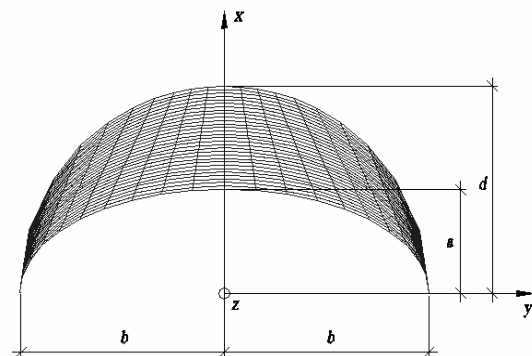


Рис. 3

Расчет:

Жесткостные характеристики:

Модуль упругости $E = 3.06 \cdot 10^6 \text{ т/м}^3$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$, толщина $h = 0.1 \text{ м}$.

Граничные условия:

Заделка по контуру.

Нагрузки:

Равномерно распределенная нагрузка, действующая вдоль оси oz $q = 1 \text{ т/м}^2$.

Деформированная схема:

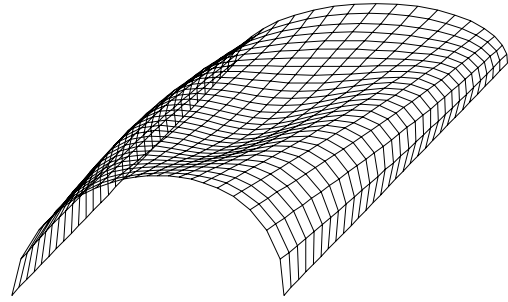


Рис. 4

Результаты расчета:

Изополя перемещений по Z, мм

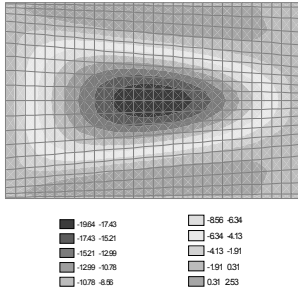


Рис. 5

Изополя напряжений N_x , т/м²

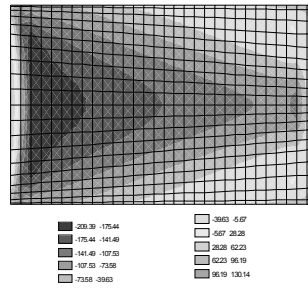


Рис. 6

Изополя напряжений N_y , т/м²

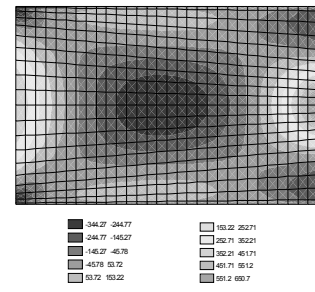


Рис. 7

Изополя напряжений T_{xy} , т/м²

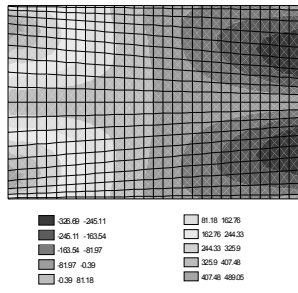


Рис. 8

Изополя напряжений M_x , т·м/м

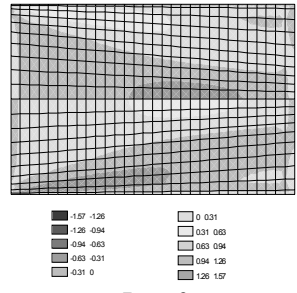


Рис. 9

Изополя напряжений M_y , т·м/м

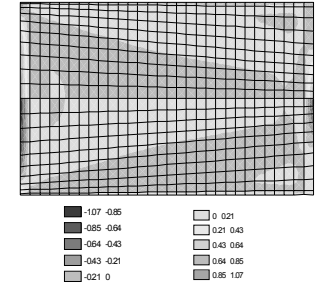


Рис. 10

Изополя напряжений M_{xy} , т·м/м

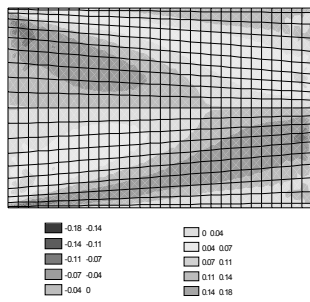


Рис. 11

Изополя напряжений Q_x , т/м

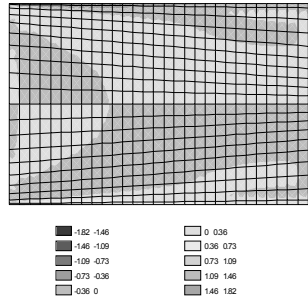


Рис. 12

Изополя напряжений Q_y , т/м

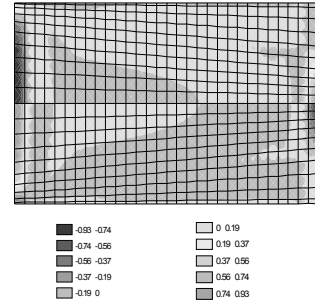


Рис. 13

ТОРС С ПАРАБОЛОЙ И ОКРУЖНОСТЬЮ В ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПЛОСКОСТЯХ

- торсовая поверхность, содержащая в качестве направляющих кривых окружность и параболу:

$$x = -\sqrt{R^2 - z^2}, y = 0 \text{ и } x = \frac{z^2}{2p}, y = h.$$

Прямолинейные образующие тора будут проходить через точку $z = \beta$ окружности радиусом R , лежащей в координатной плоскости xoz , и соответствующую точку $z = \gamma$ параболы, $\gamma = p\beta / \sqrt{R^2 - \beta^2}, \beta < R$.

Параметрическая форма задания:

$$x = (\lambda - 1)\sqrt{R^2 - \beta^2} + \frac{\lambda p \beta^2}{2(R^2 - \beta^2)},$$

$$y = \lambda h,$$

$$z = \beta \left(1 - \lambda + \frac{p\lambda}{\sqrt{R^2 - \beta^2}} \right)$$

где $0 \leq \lambda \leq 1$. Координатная линия $\lambda = 0$ совпадает с окружностью, а линия $\lambda = 1$ - с параболой. Система криволинейных координат β, λ является неортогональной и сопряженной.

Построение:

Примем для окружности $R = 15 \text{ м}$,

для параболы $p = 10, h = 40 \text{ м}$.

Получим $\gamma = p\beta / \sqrt{R^2 - \beta^2} = 10 \cdot \beta / \sqrt{225 - \beta^2}$.

Пусть параметр β изменяется в интервалах $[-10; 10]$, где 10 м - длина проекции на ось oz половины окружности (при этом для параболы эта величина составит $\gamma(\beta = 10) = 8.94 \text{ м}$). Параметр λ изменяется в интервале $[0; 1]$.

Таким образом, параметры β, λ выражаются через переменные s, t следующим образом:

$$\beta \rightarrow \pm(10 \cdot s), \lambda \rightarrow t.$$

Создаются две поверхности при $\beta < 0$ и $\beta > 0$, которые потом собираются. Полученная схема поворачивается вокруг оси oy на -90° . На рисунках показана поверхность до поворота.

Разбивку на конечные элементы примем четырехугольную, количество конечных элементов в направлении β - 10, λ - 30.

Получаем уравнения задания поверхности в SCAD:

$$X = (t - 1) \cdot \sqrt{225 - (10 \cdot s)^2} + t \cdot 10 \cdot (10 \cdot s)^2 / (2 \cdot (225 - (10 \cdot s)^2));$$

$$Y = t \cdot 40;$$

$$Z = \pm 10 \cdot s \cdot (1 - t + 10 \cdot t / \sqrt{225 - (10 \cdot s)^2})$$

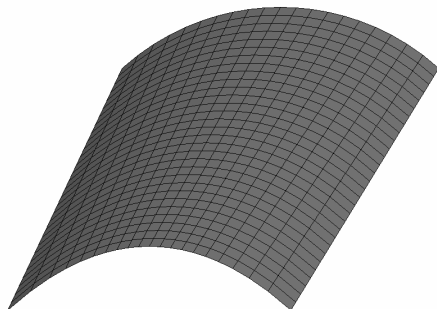


Рис. 1

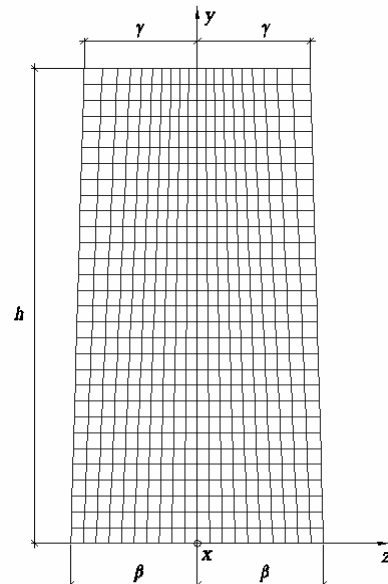


Рис. 2

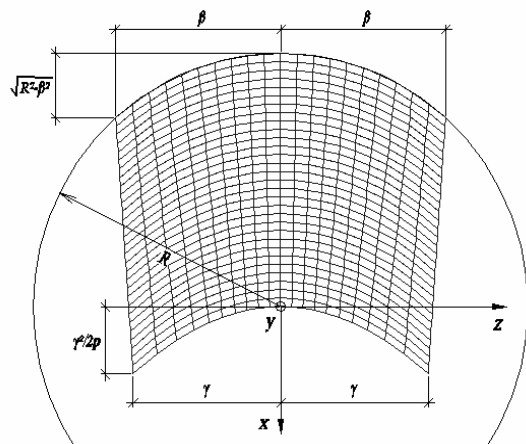


Рис. 3

Расчет:

Жесткостные характеристики:

Модуль упругости $E = 3.06 \cdot 10^6 \text{ т/м}^3$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$, толщина $h = 0.1 \text{ м}$.

Граничные условия:

Заделка по контуру.

Нагрузки:

Равномерно распределенная нагрузка, действующая вдоль оси oz $q = 1 \text{ т/м}^2$.

Деформированная схема:

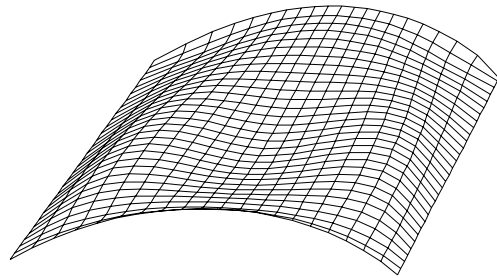


Рис. 4

Результаты расчета:

Изополя перемещений по Z, мм

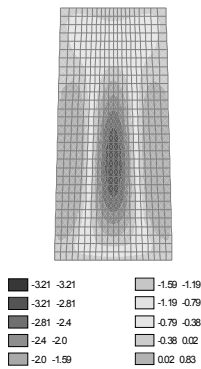


Рис. 5

Изополя напряжений $N_x, \text{ т/м}^2$

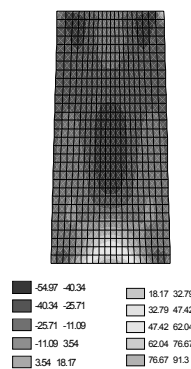


Рис. 6

Изополя напряжений $N_y, \text{ т/м}^2$

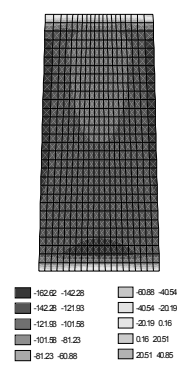


Рис. 7

Изополя напряжений $T_{xy}, \text{ т/м}^2$

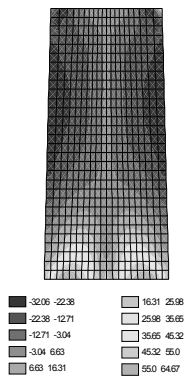


Рис. 8

Изополя напряжений $M_x, \text{ т} \cdot \text{м/м}$

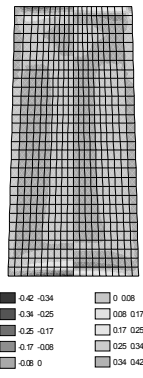


Рис. 9

Изополя напряжений $M_y, \text{ т} \cdot \text{м/м}$

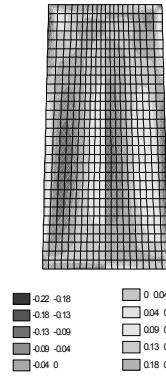


Рис. 10

Изополя напряжений $M_{xy}, \text{ т} \cdot \text{м/м}$

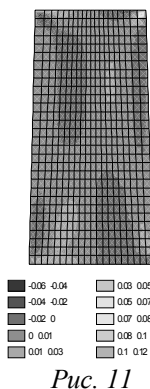


Рис. 11

Изополя напряжений $Q_x, \text{ т/м}$

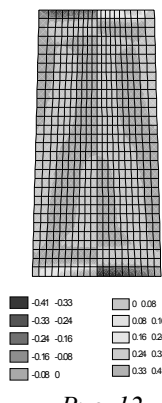


Рис. 12

Изополя напряжений $Q_y, \text{ т/м}$

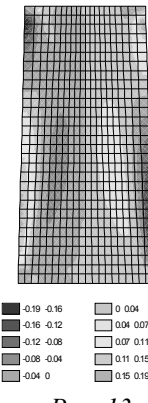


Рис. 13

ТОРС ОДИНАКОВОГО СКАТА С НАПРАВЛЯЮЩИМ ЭЛЛИПСОМ

- линейчатая поверхность, имеющая постоянный угол α между прямолинейными образующими и соответствующими главными нормальными направляющего эллипса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

Параметрическая форма задания:

$$x = a \cdot \cos v + \frac{u \cdot b \cdot \cos \alpha \cdot \cos v}{\sqrt{a^2 \cdot \sin^2 v + b^2 \cdot \cos^2 v}},$$

$$y = b \cdot \sin v + \frac{u \cdot a \cdot \cos \alpha \cdot \sin v}{\sqrt{a^2 \cdot \sin^2 v + b^2 \cdot \cos^2 v}},$$

$$z = -u \cdot \sin \alpha,$$

где α - угол наклона образующих прямых к главным нормальным направляющего эллипса. Координатная линия $u=0$ совпадает с направляющим эллипсом, а семейство линий u - прямолинейные образующие поверхности.

Построение:

Примем для направляющего эллипса $a=20$ м, $b=10$ м.

Примем $\alpha=60^\circ$.

Пусть параметр u изменяется в интервале $[0;10]$, где 10 м - длина образующей, а параметр v изменяется в интервале $[0;360]$, где 360° - угол, огибаемый направляющим эллипсом вокруг оси oz . Тогда параметры u, v выражаются через переменные s, t следующим образом: $u \rightarrow 10 \cdot t, v \rightarrow 360 \cdot s$.

Разбивку на конечные элементы примем четырехугольную, количество конечных элементов в направлении образующей u - 20, направляющей v - 60.

Получаем уравнения задания поверхности в SCAD:

$$X=20 \cdot \cos(360 \cdot s) + 10 \cdot t \cdot 10 \cdot \cos(60) \cdot \cos(360 \cdot s) / \sqrt{20^2 \cdot (\sin(360 \cdot s))^2 + 10^2 \cdot (\cos(360 \cdot s))^2};$$

$$Y=10 \cdot \sin(360 \cdot s) + 10 \cdot t \cdot 20 \cdot \cos(60) \cdot \sin(360 \cdot s) / \sqrt{20^2 \cdot (\sin(360 \cdot s))^2 + 10^2 \cdot (\cos(360 \cdot s))^2};$$

$$Z=-10 \cdot t \cdot \sin(60);$$

$$Ns=60; Nt=20.$$

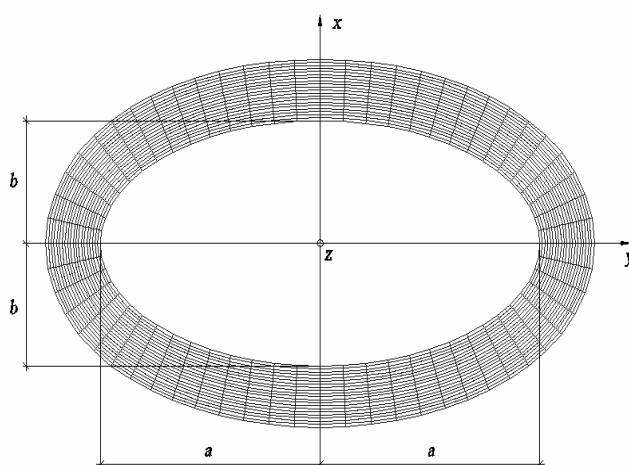


Рис. 2

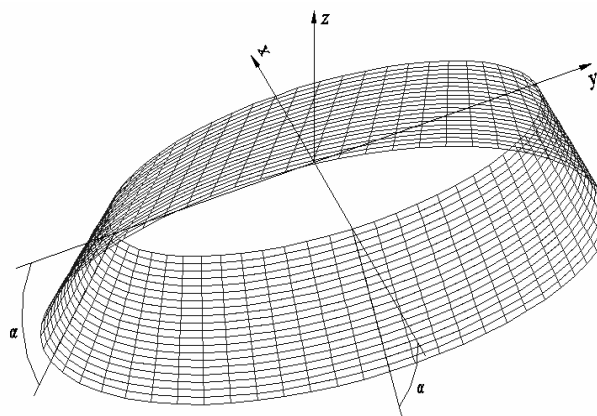


Рис. 3

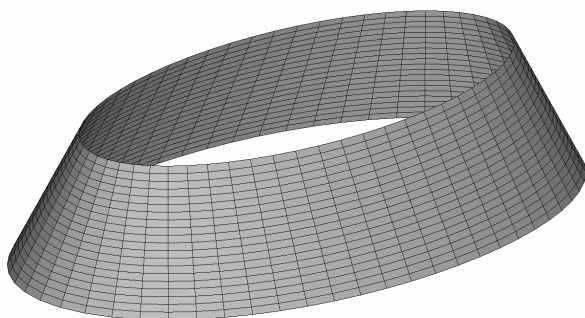


Рис. 1

Расчет:

Жесткостные характеристики:

Модуль упругости $E = 3.06 \cdot 10^6 \text{ т/м}^3$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$, толщина $h = 0.1 \text{ м}$.

Граничные условия:

Заделка по верхнему и нижнему контуру.

Нагрузки:

Равномерно распределенная нагрузка, действующая вдоль местной оси z к центру $q = 1 \text{ т/м}^2$.

Деформированная схема:

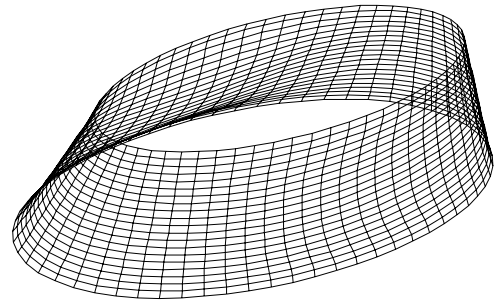


Рис. 4

Результаты расчета:

Изополя перемещений по Y, мм

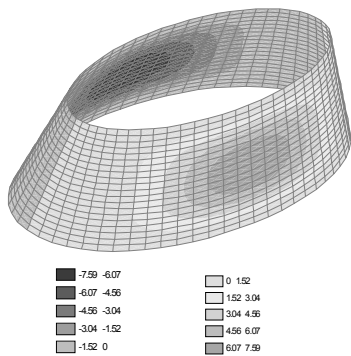


Рис. 5

Изополя напряжений $N_x, \text{ т/м}^2$

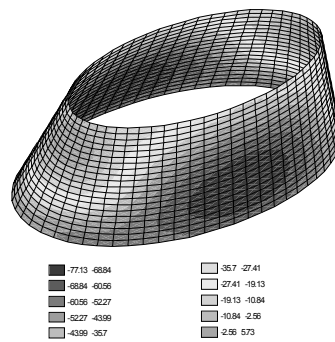


Рис. 6

Изополя напряжений $N_y, \text{ т/м}^2$

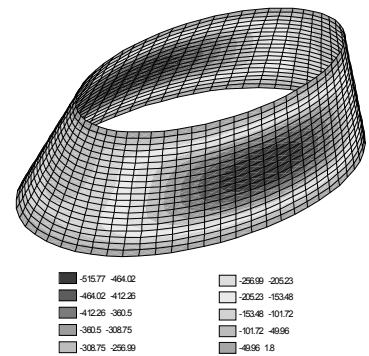


Рис. 7

Изополя напряжений $T_{xy}, \text{ т/м}^2$

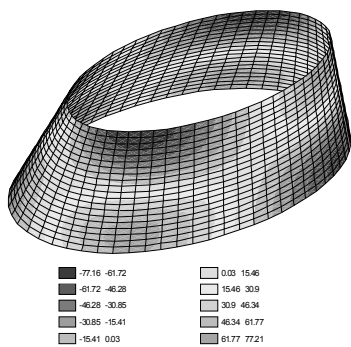


Рис. 8

Изополя напряжений $M_x, \text{ т} \cdot \text{м/м}$

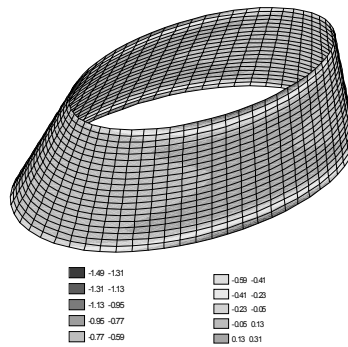


Рис. 9

Изополя напряжений $M_y, \text{ т} \cdot \text{м/м}$

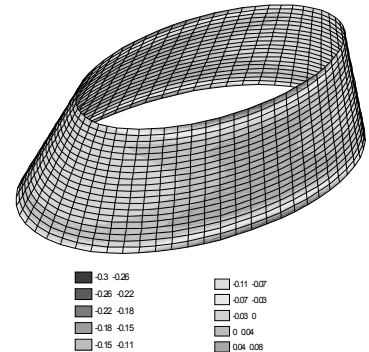


Рис. 10

Изополя напряжений $M_{xy}, \text{ т} \cdot \text{м/м}$

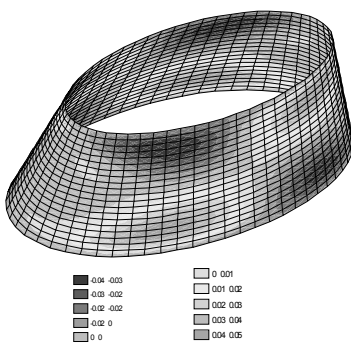


Рис. 11

Изополя напряжений $Q_x, \text{ т/м}$

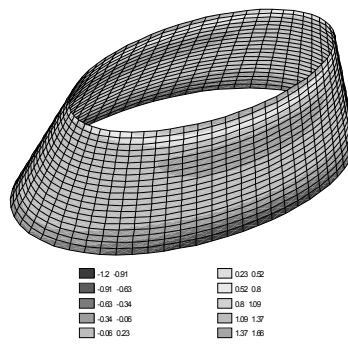


Рис. 12

Изополя напряжений $Q_y, \text{ т/м}$

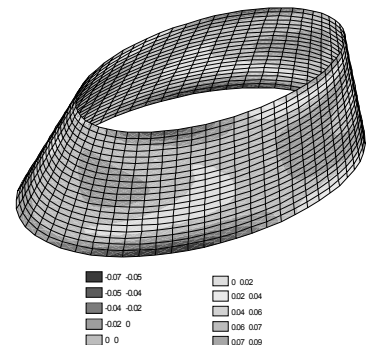


Рис. 13

ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ВИНТОВАЯ ПОВЕРХНОСТЬ (ПОЛОСА)

- линейчатая поверхность, полученная движением прямой образующей постоянной или переменной длины по винтовой направляющей, причем прямолинейная образующая во всех положениях должна быть параллельна оси винтовой направляющей, а ее длина должна быть меньше шага винтовой направляющей. Таким образом, цилиндрическая винтовая полоса является частью цилиндрической поверхности, ограниченной двумя соосными винтовыми линиями.

Координатные линии $v = const$ - прямолинейные образующие винтовой полосы, а координатные линии $u = const$ - винтовые линии с одинаковым постоянным шагом, лежащие на прямом круговом цилиндре радиусом a . Криволинейные контуры полосы постоянной ширины совпадают с винтовыми координатными линиями $u = 0$ и $u = b$, где b - ширина полосы, $b < 2\pi c$

Параметрическая форма задания:

$$x = a \cdot \cos v,$$

$$y = a \cdot \sin v,$$

$$z = c \cdot v + u,$$

где a - радиус прямого кругового цилиндра, на котором лежат винтовые направляющие; c - шаг винтовой направляющей по высоте.

Построение:

Примем радиус прямого кругового цилиндра $a = 20 \text{ м}$.

Примем шаг винтовой направляющей $c = 10 \text{ м}$.

Пусть параметр u изменяется в интервале $[0; 10]$, где 10 м - длина образующей, а параметр v изменяется в интервале $[0; 360]$, где 360° - угол, огибаемый

направляющими винтовыми линиями вокруг оси oz . Тогда параметры u, v выражаются через переменные s, t следующим образом: $u \rightarrow 10 \cdot t, v \rightarrow 360 \cdot s$.

Разбивку на конечные элементы примем четырехугольную, количество конечных элементов в направлении образующей u - 10, направляющей v - 60.

Получаем уравнения задания поверхности в SCAD:

$$X = 20 \cdot \cos(360 \cdot s);$$

$$Y = 20 \cdot \sin(360 \cdot s);$$

$$Z = 10 \cdot s + 10 \cdot t;$$

$$Ns = 60; Nt = 10.$$

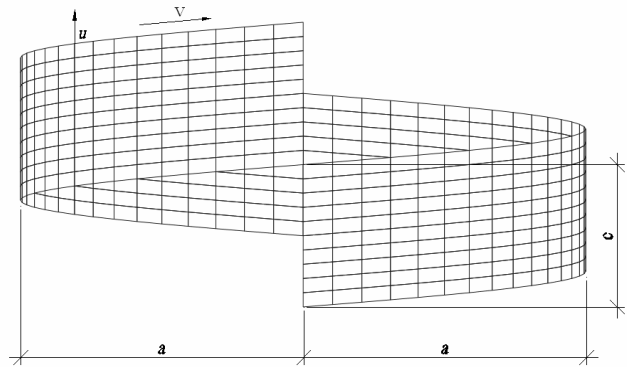


Рис. 2

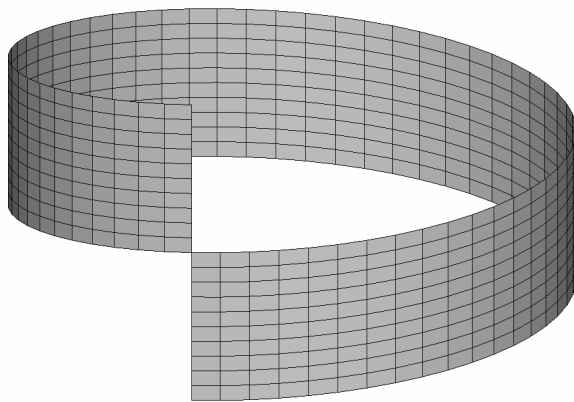


Рис. 1

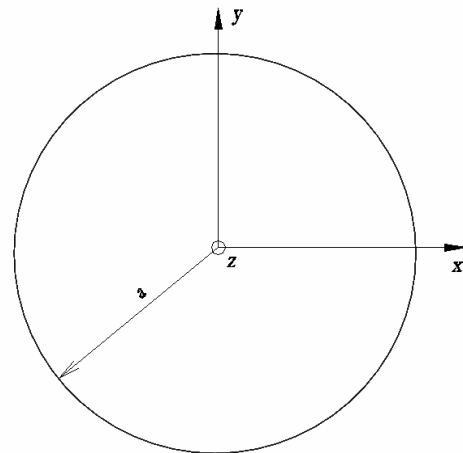


Рис. 3

Расчет:

Жесткостные характеристики:

Модуль упругости $E = 3.06 \cdot 10^6 \text{ т/м}^3$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$, толщина $h = 0.1 \text{ м}$.

Граничные условия:

Заделка по верхнему и нижнему контуру включая торцы.

Нагрузки:

Равномерно распределенная нагрузка, действующая вдоль местной оси z к центру $q = 1 \text{ т/м}^2$.

Деформированная схема:

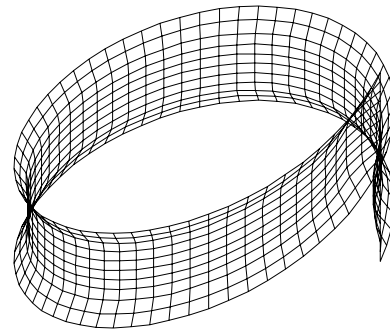


Рис. 4

Результаты расчета:

Изополю перемещений по X, мм

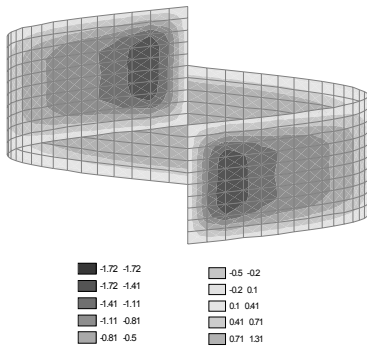


Рис. 5

Изополю напряжений $N_x, \text{ т/м}^2$

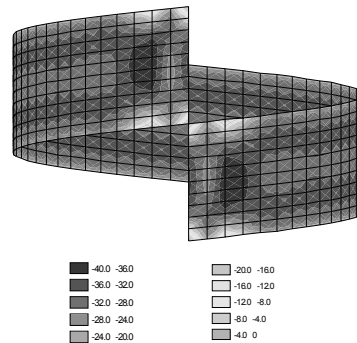


Рис. 6

Изополю напряжений $N_y, \text{ т/м}^2$

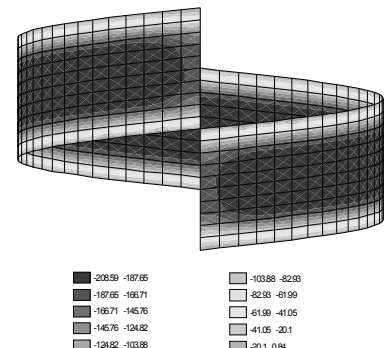


Рис. 7

Изополю напряжений $T_{xy}, \text{ т/м}^2$

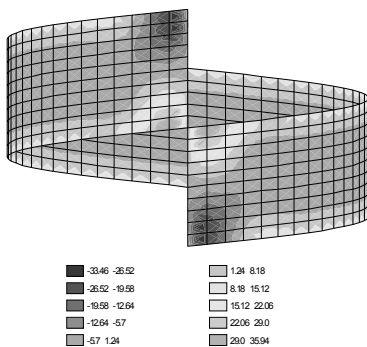


Рис. 8

Изополю напряжений $M_x, \text{ т} \cdot \text{м/м}$

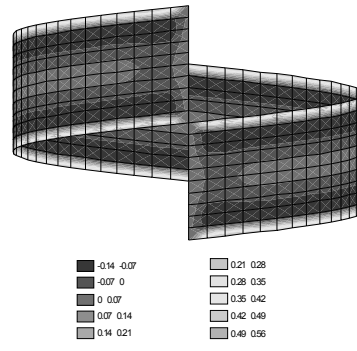


Рис. 9

Изополю напряжений $M_y, \text{ т} \cdot \text{м/м}$

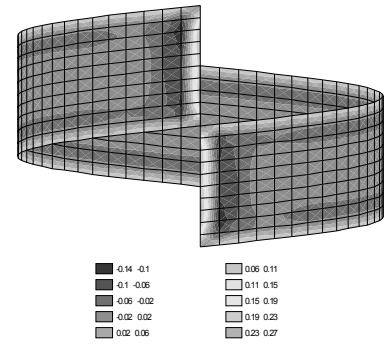


Рис. 10

Изополю напряжений $M_{xy}, \text{ т} \cdot \text{м/м}$

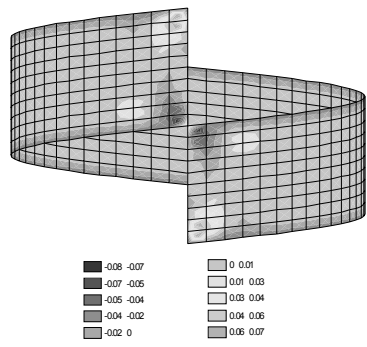


Рис. 11

Изополю напряжений $Q_x, \text{ т/м}$

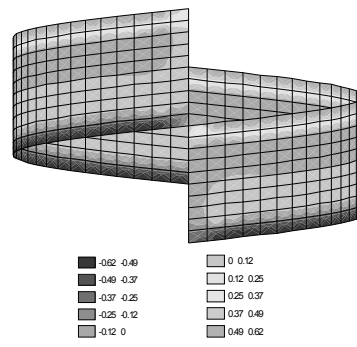


Рис. 12

Изополю напряжений $Q_y, \text{ т/м}$

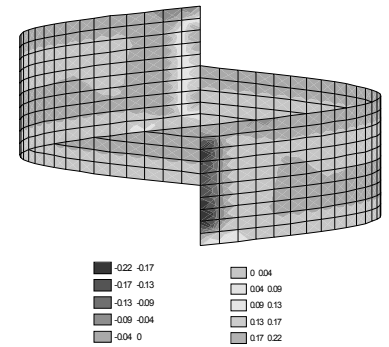


Рис. 13

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ЦИЛИНДР

- поверхность прямого эллиптического цилиндра, ограниченная двумя плоскостями, перпендикулярными его прямому образующим. Направляющей поверхности является кривая в виде эллипса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

Прямолинейные образующие поверхности параллельны оси oz . Параметр α отражает угол, отсчитываемый вокруг оси oz .

Параметрическая форма задания:

$$x = r \cdot \cos \alpha,$$

$$y = r \cdot \sin \alpha,$$

$$z = z,$$

$$\text{где } r = a \cdot b / \sqrt{a^2 \cdot \sin^2 \alpha + b^2 \cdot \cos^2 \alpha}.$$

Построение:

Примем для направляющего эллипса $a = 20 \text{ м}, b = 10 \text{ м}$.

$$\text{Тогда } r = 20 \cdot 10 / \sqrt{20^2 \cdot \sin^2 \alpha + 10^2 \cdot \cos^2 \alpha}$$

Пусть параметр z изменяется в интервале $[0; 10]$, где 10 м - длина образующей, а параметр α изменяется в интервале $[0; 360]$, где 360° - угол, огибаемый направляющим эллипсом вокруг оси oz . Тогда параметры z, α выражаются через переменные s, t следующим образом: $z \rightarrow 10 \cdot t, \alpha \rightarrow 360 \cdot s$.

Разбивку на конечные элементы примем четырехугольную, количество конечных элементов в направлении образующей z - 10, направляющей α - 60.

Получаем уравнения задания поверхности в SCAD:

```
X=20*10/sqrt(20**2*(sin(360*s))**2
+10**2*(cos(360*s))**2)*cos(360*s);
Y=20*10/sqrt(20**2*(sin(360*s))**2
+10**2*(cos(360*s))**2)*sin(360*s);
Z=10*t;
Ns=60; Nt=10.
```

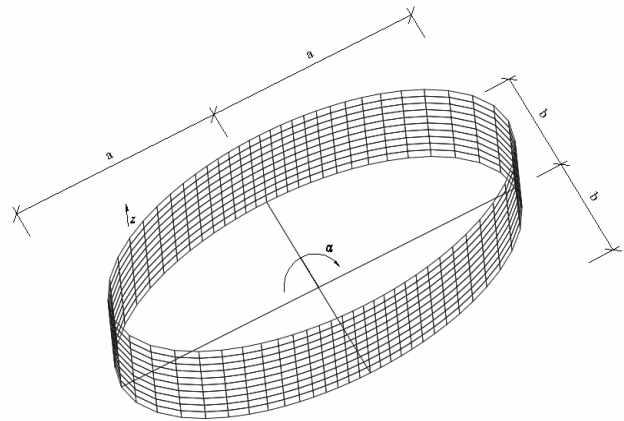


Рис. 2

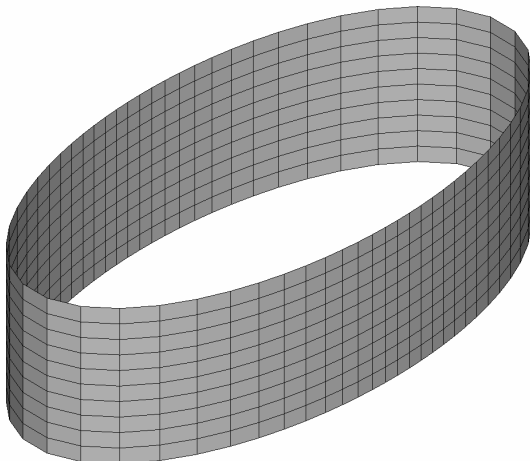


Рис. 1

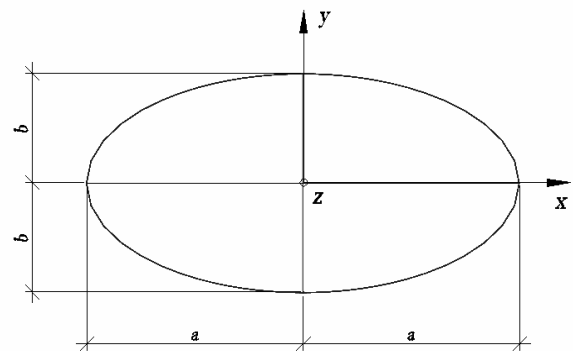


Рис. 3

Расчет:

Жесткостные характеристики:

Модуль упругости $E = 3.06 \cdot 10^6 \text{ т/м}^3$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$, толщина $h = 0.1 \text{ м}$.

Граничные условия:

Заделка по верхнему и нижнему контуру.

Нагрузки:

Равномерно распределенная нагрузка, действующая вдоль местной оси z к центру $q = 1 \text{ т/м}^2$.

Деформированная схема:

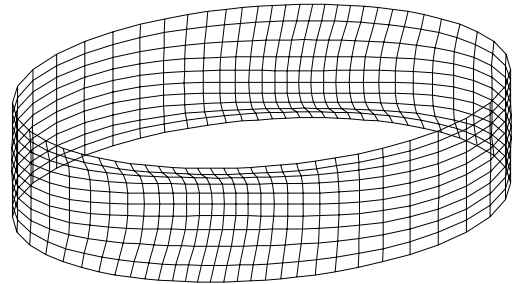


Рис. 4

Результаты расчета:

Изополя перемещений по Y, мм

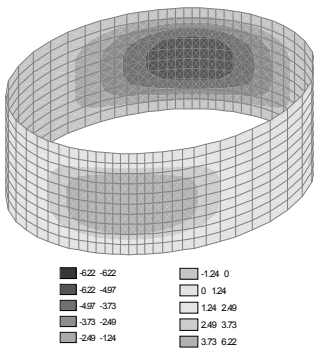


Рис. 5

Изополя напряжений N_x , т/м²

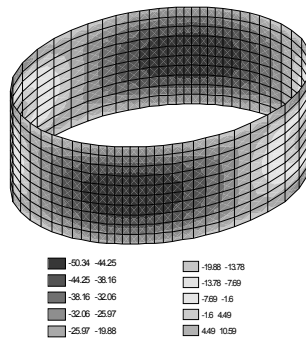


Рис. 6

Изополя напряжений N_y , т/м²

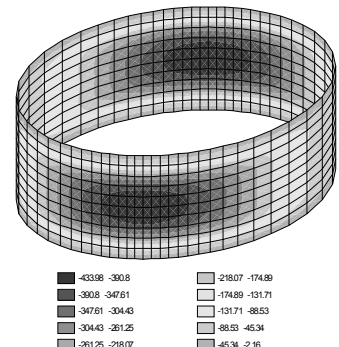


Рис. 7

Изополя напряжений T_{xy} , т/м²

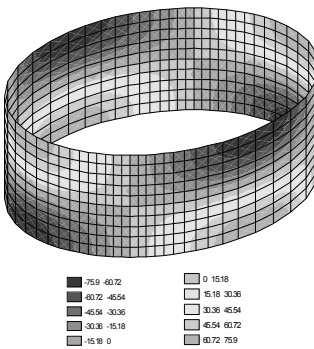


Рис. 8

Изополя напряжений M_x , т·м/м

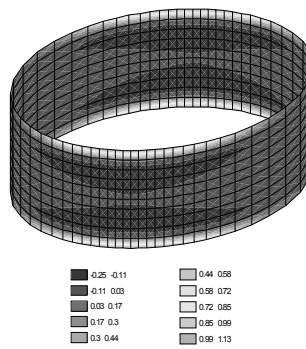


Рис. 9

Изополя напряжений M_y , т·м/м

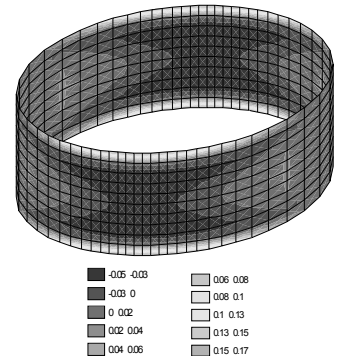


Рис. 10

Изополя напряжений M_{xy} , т·м/м

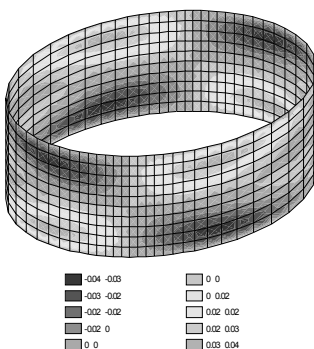


Рис. 11

Изополя напряжений Q_x , т/м

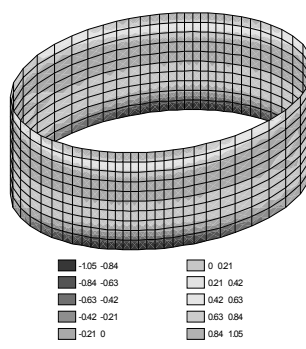


Рис. 12

Изополя напряжений Q_y , т/м

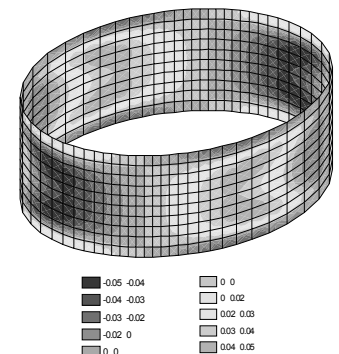


Рис. 13

ПРЯМАЯ АСТРОИДАЛЬНАЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ

- поверхность, полученная движением прямолинейных образующих по астроиде. Такая поверхность имеет четыре особые прямые. Каждая плоскость, перпендикулярная оси поверхности, пересекает ее по астроиде – плоской алгебраической кривой шестого порядка, которая описывается точкой окружности радиуса r , катящейся по внутренней стороне окружности радиуса $a = 4 \cdot r$. Астроиду называют также четырехугольной гипоциклоидой. Она огибает семейство эллипсов, у которых сумма полуосей имеет постоянную величину. Координатные линии z совпадают с прямолинейными образующими цилиндра. Координатные линии $t = 0, t = \pi/2, t = \pi, t = 3\pi/2$ - ребра возврата цилиндрической поверхности.

Длина всех четырех дуг астроида равна $6 \cdot a$.

Параметрическая форма задания:

$$x = a \cdot \cos^3 t,$$

$$y = a \cdot \sin^3 t,$$

$$z = z.$$

Построение:

Пусть требуется получить поверхность, размеры в плане, которой $20 \times 20 \text{ м}$. Тогда $a = 20 \text{ м}$. Из $4 \cdot r = 20$ находим $r = 5 \text{ м}$.

Пусть параметр z изменяется в интервале $[0; 10]$, где 10 м - длина образующей, а параметр t изменяется в интервале $[0; 360]$, где 360° - угол, огибаемый направляющей астроидой вокруг оси oz . Тогда параметры z, t выражаются через переменные s, t следующим образом: $z \rightarrow 10 \cdot t, t \rightarrow 360 \cdot s$.

Разбивку на конечные элементы примем четырехугольную, количество конечных элементов в направлении образующей z - 10, направляющей t - 60.

Получаем уравнения задания поверхности в SCAD:

$$X = 20 * (\cos(360 * s)) ** 3;$$

$$Y = 20 * (\sin(360 * s)) ** 3;$$

$$Z = 10 * t;$$

$$Ns = 60; Nt = 10.$$

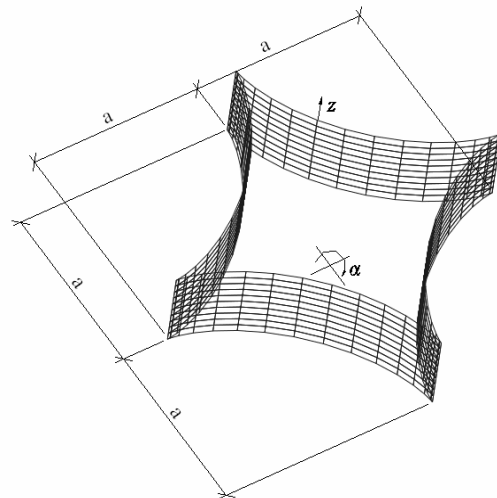


Рис. 2

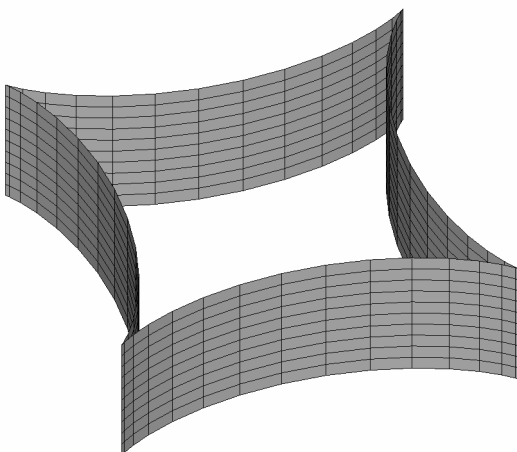


Рис. 1

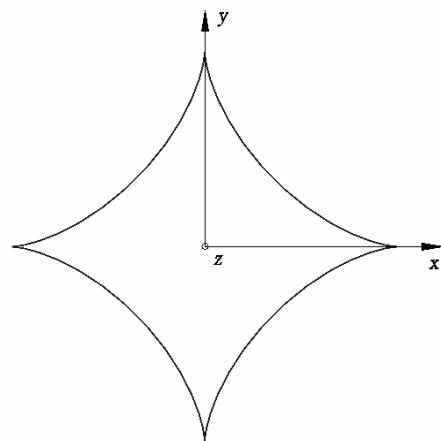


Рис. 3

Расчет:

Жесткостные характеристики:

Модуль упругости $E = 3.06 \cdot 10^6 \text{ т/м}^3$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$, толщина $h = 0.1 \text{ м}$.

Граничные условия:

Заделка по верхнему и нижнему контуру.

Нагрузки:

Равномерно распределенная нагрузка, действующая вдоль местной оси z от центра $q = 1 \text{ т/м}^2$.

Деформированная схема:

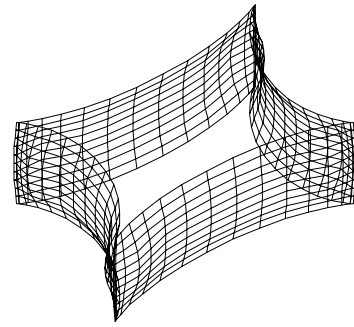


Рис. 4

Результаты расчета:

Изополя перемещений по X, мм

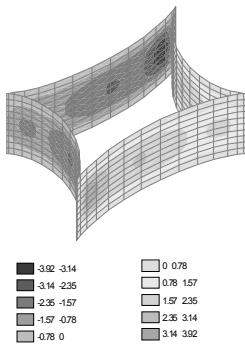


Рис. 5

Изополя напряжений $N_x, \text{ т/м}^2$

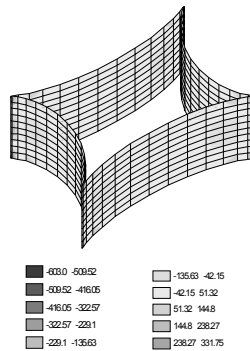


Рис. 6

Изополя напряжений $N_y, \text{ т/м}^2$

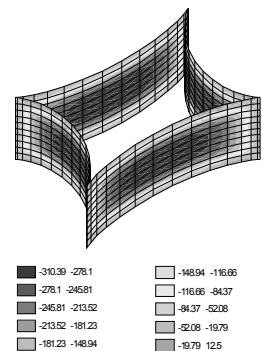


Рис. 7

Изополя напряжений $T_{xy}, \text{ т/м}^2$

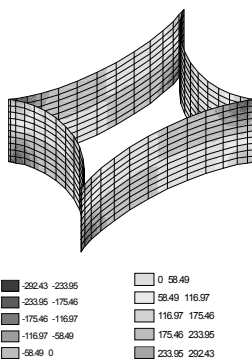


Рис. 8

Изополя напряжений $M_x, \text{ т} \cdot \text{м/м}$

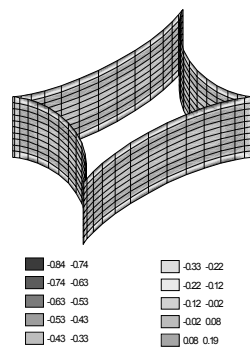


Рис. 9

Изополя напряжений $M_y, \text{ т} \cdot \text{м/м}$

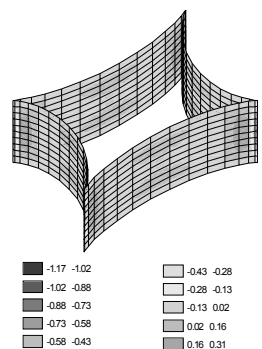


Рис. 10

Изополя напряжений $M_{xy}, \text{ т} \cdot \text{м/м}$

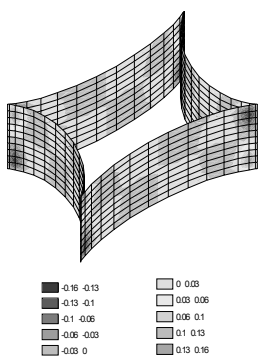


Рис. 11

Изополя напряжений $Q_x, \text{ т/м}$

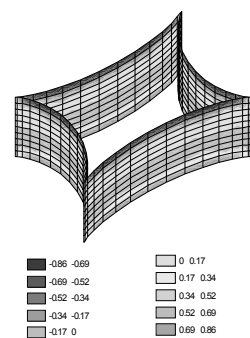


Рис. 12

Изополя напряжений $Q_y, \text{ т/м}$

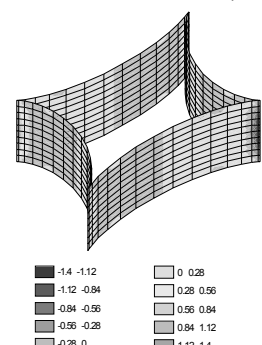


Рис. 13

ПРЯМОЙ ЦИЛИНДР С НАПРАВЛЯЮЩЕЙ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ СПИРАЛЬЮ

- цилиндрическая поверхность направляющей логарифмической спиралью, заданной в полярных координатах уравнением $\rho = a \cdot e^{m\varphi}$, имеющая цилиндрически-коническую винтовую линию откоса $r = r(\varphi) = e^{m\varphi} (a \cdot \cos \varphi i + a \cdot \sin \varphi j + bk)$, $b = const$. Логарифмическая спираль пересекает все свои радиус-векторы под постоянным углом θ : $\text{ctg} \theta = m$. Длина логарифмической спирали $s = a\sqrt{1+m^2} (e^{m\varphi} - e^{m\varphi_0})$.

Параметрическая форма задания:

$$x = a \cdot e^{m\varphi} \cos \varphi,$$

$$y = a \cdot e^{m\varphi} \sin \varphi,$$

$$z = z,$$

где координатная линия $z=0$ совпадает с направляющей логарифмической спиралью.

Построение:

Принимаем начальный радиус поверхности $a=5$ м.

Пусть $m=0.1$, тогда угол, составляемый касательной в произвольной точке логарифмической спирали с радиус-вектором точки касания будет равен

$$\theta = \text{arctg} \frac{1}{m} = \text{arctg} \frac{1}{0.1} = 84^\circ 17'.$$

Пусть параметр z изменяется в интервале $[0; 10]$, где 10 м - длина образующей, а параметр φ изменяется в интервале $[0; 360]$, где 360° - угол, огибаемый поверхностью вокруг оси oz . Тогда параметры z, φ выражаются через переменные s, t следующим образом: $z \rightarrow 10 \cdot t$, $\varphi \rightarrow 360 \cdot s$ в градусах, $\varphi \rightarrow 12.56 \cdot s$ в радианах.

Разбивку на конечные элементы примем четырехугольную, количество конечных элементов в направлении z - 10, φ - 60.

Получаем уравнения задания поверхности в SCAD:

$$X=5*\exp(0.1*12.56*s)*\cos(360*s);$$

$$Y=5*\exp(0.1*12.56*s)*\sin(360*s);$$

$$Z=10*t;$$

$$Ns=60; Nt=10.$$

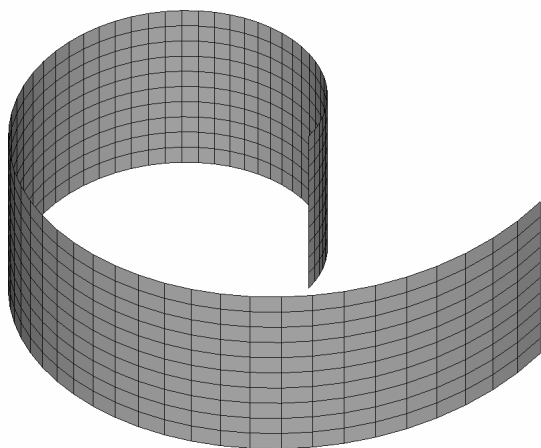


Рис. 1

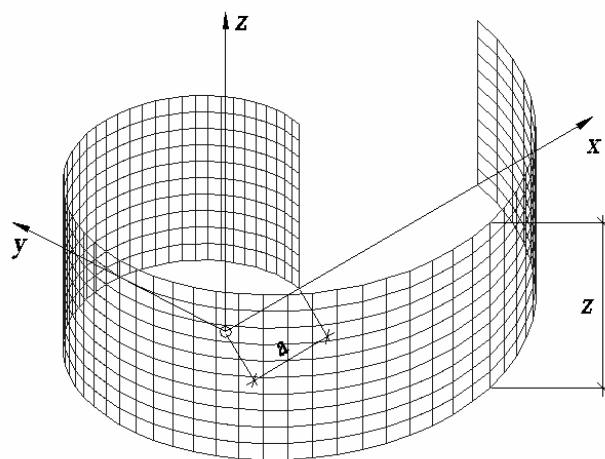


Рис. 2

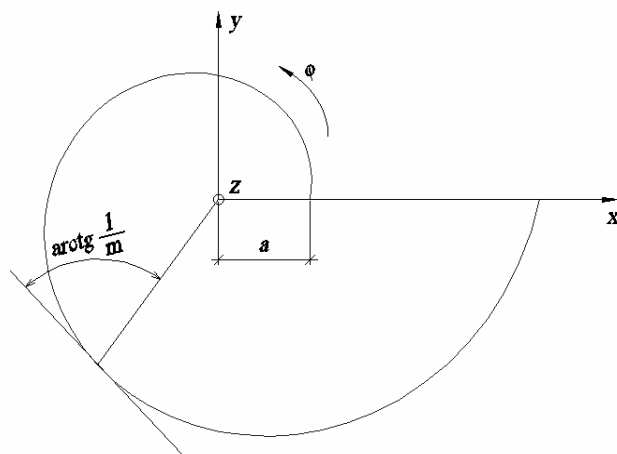


Рис. 3

Расчет:

Жесткостные характеристики:

Модуль упругости $E = 3.06 \cdot 10^6 \text{ т/м}^3$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$, толщина $h = 0.1 \text{ м}$.

Граничные условия:

Заделка по верхнему и нижнему контуру включая торцы.

Нагрузки:

Равномерно распределенная нагрузка, действующая вдоль местной оси z к центру $q = 1 \text{ т/м}^2$.

Деформированная схема:

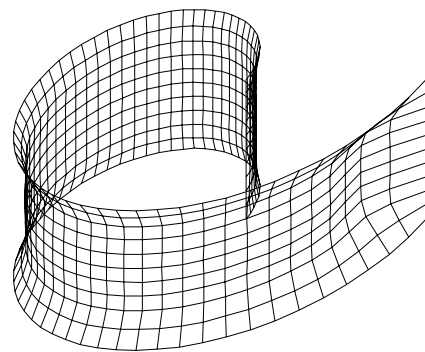


Рис. 4

Результаты расчета:

Изополя перемещений по Y, мм

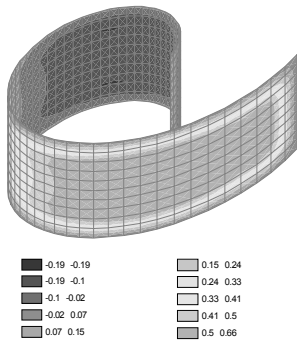


Рис. 5

Изополя напряжений $N_x, \text{ т/м}^2$

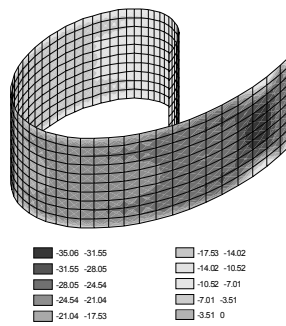


Рис. 6

Изополя напряжений $N_y, \text{ т/м}^2$

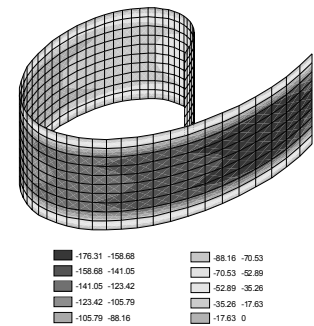


Рис. 7

Изополя напряжений $T_{xy}, \text{ т/м}^2$

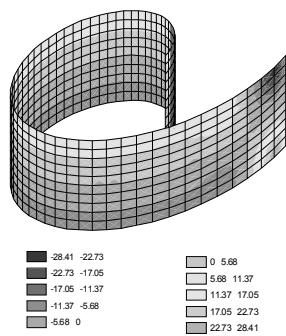


Рис. 8

Изополя напряжений $M_x, \text{ т} \cdot \text{м/м}$

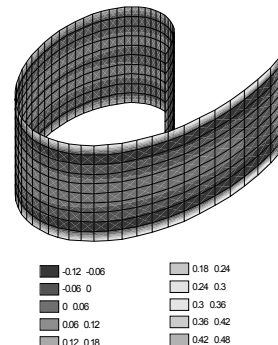


Рис. 9

Изополя напряжений $M_y, \text{ т} \cdot \text{м/м}$

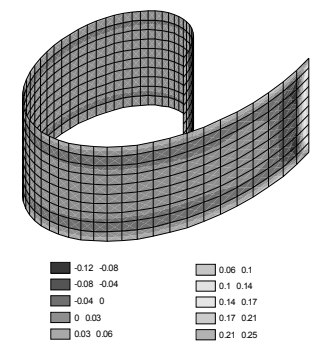


Рис. 10

Изополя напряжений $M_{xy}, \text{ т} \cdot \text{м/м}$

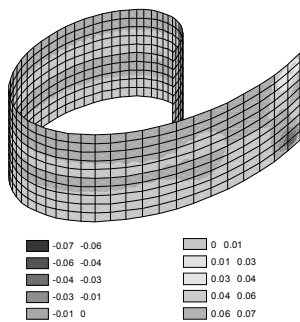


Рис. 11

Изополя напряжений $Q_x, \text{ т/м}$

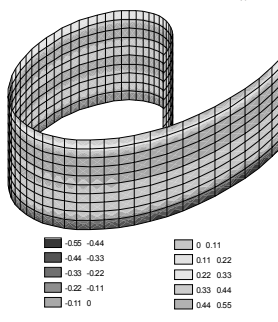


Рис. 12

Изополя напряжений $Q_y, \text{ т/м}$

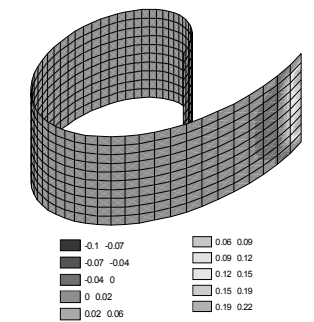


Рис. 13

ЦИЛИНДРО-КОНИЧЕСКАЯ ВИНТОВАЯ ПОЛОСА

- поверхность, образованная движением прямой образующей постоянной длины по конической спирали, причем прямолинейная образующая во всех положениях остается параллельной оси конической спирали $x = r_0 \sin \lambda \cos \varphi \cdot e^{k\varphi}$, $y = r_0 \sin \lambda \sin \varphi \cdot e^{k\varphi}$, $z = r_0 \cos \lambda \cdot e^{k\varphi}$, лежащей на круговом конусе, где λ - угол между осью oz и образующей конуса; долгота φ - угол между плоскостью xoz и подвижной плоскостью осевого сечения; k - некоторое положительное или отрицательное постоянное число; r_0 - постоянная величина.

Параметрическая форма задания:

$$x = r_0 \sin \lambda \cos \varphi \cdot e^{k\varphi},$$

$$y = r_0 \sin \lambda \sin \varphi \cdot e^{k\varphi},$$

$$z = r_0 \cos \lambda \cdot e^{k\varphi} + u,$$

где координатная линия $u = 0$ совпадает с направляющей конической спиралью.

Построение:

Принимаем начальный радиус поверхности $r_0 \cdot \sin \lambda = 5$, угол наклона образующей конуса $\lambda = 60^\circ$.

$$\text{Тогда } r_0 = \frac{5}{\sin 60} = 5.7735.$$

Пусть $k = 0.1$, тогда угол, составляемый касательной в произвольной точке логарифмической спирали с радиус-вектором точки касания будет равен

$$\theta = \arctg \frac{1}{k} = \arctg \frac{1}{0.1} = 84^\circ 17'.$$

Пусть параметр u изменяется в интервале $[0; 10]$, где 10 м - длина образующей, а параметр φ изменяется в интервале $[0; 540]$, где 540° - угол, огибаемый поверхностью вокруг оси oz . Тогда параметры u, φ выражаются через переменные s, t следующим образом: $u \rightarrow 10 \cdot t$, $\varphi \rightarrow 540 \cdot s$ в градусах, $\varphi \rightarrow 18.84 \cdot s$ в радианах.

Для того, чтобы коническая спираль "раскручивалась" против оси oz , необходимо использовать отрицательное значение уравнения $Z = f(\varphi)$ при задании конической спирали.

Разбивку на конечные элементы примем четырехугольную, количество конечных элементов в направлении u - 10, φ - 90.

Получаем уравнения задания поверхности в SCAD:

$$X = 5.7735 \cdot \sin(60) \cdot \exp(0.1 \cdot 18.84 \cdot s) \cdot \cos(540 \cdot s);$$

$$Y = 5.7735 \cdot \sin(60) \cdot \exp(0.1 \cdot 18.84 \cdot s) \cdot \sin(540 \cdot s);$$

$$Z = -5.7735 \cdot \cos(60) \cdot \exp(0.1 \cdot 18.84 \cdot s) + 10 \cdot t;$$

$$Ns = 90; Nt = 10.$$

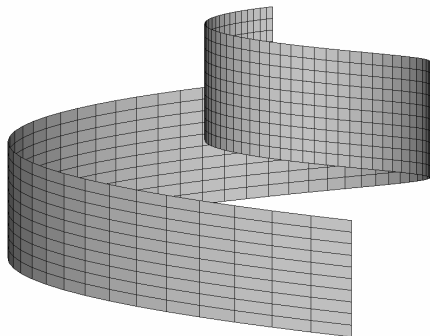


Рис. 1

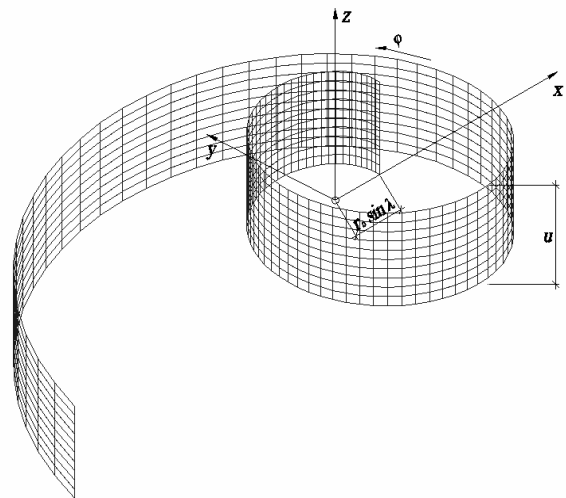


Рис. 2

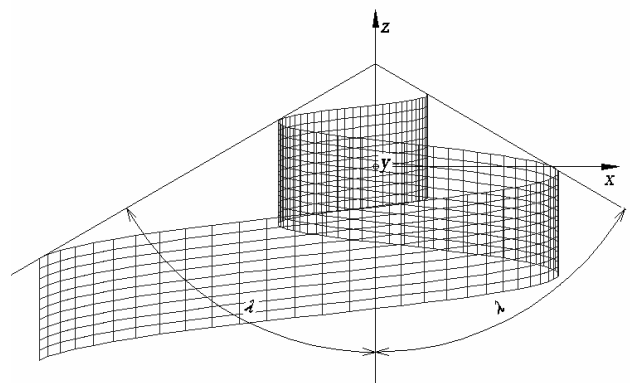


Рис. 3

Расчет:

Жесткостные характеристики:

Модуль упругости $E = 3.06 \cdot 10^6 \text{ т/м}^3$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$, толщина $h = 0.1 \text{ м}$.

Граничные условия:

Заделка по верхнему и нижнему контуру, включая торцы.

Нагрузки:

Равномерно распределенная нагрузка, действующая вдоль местной оси z к центру $q = 1 \text{ т/м}^2$.

Деформированная схема:

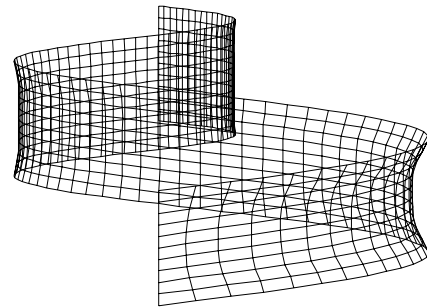


Рис. 4

Результаты расчета:

Изополя перемещений по Y, мм

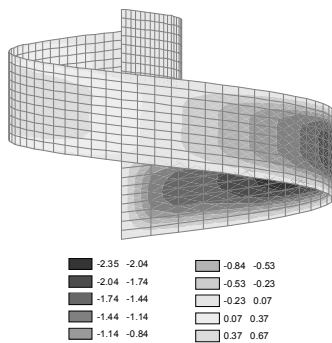


Рис. 5

Изополя напряжений N_x , т/м²

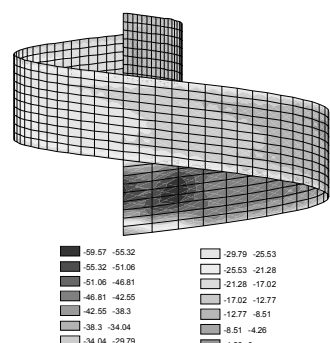


Рис. 6

Изополя напряжений N_y , т/м²

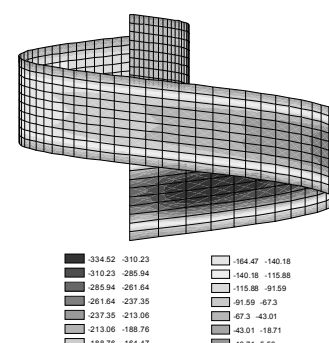


Рис. 7

Изополя напряжений T_{xy} , т/м²

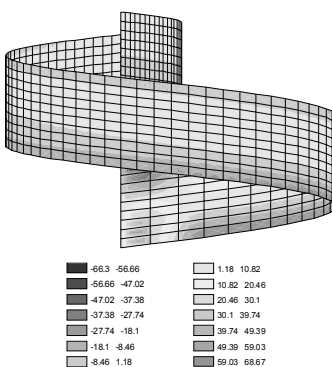


Рис. 8

Изополя напряжений M_x , т·м/м

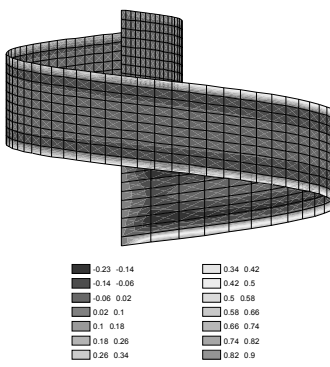


Рис. 9

Изополя напряжений M_y , т·м/м

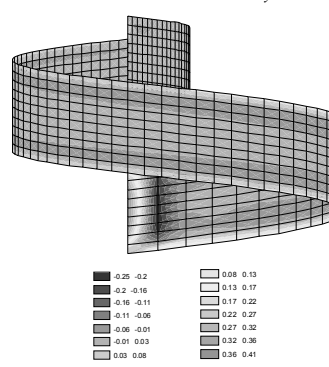


Рис. 10

Изополя напряжений M_{xy} , т·м/м

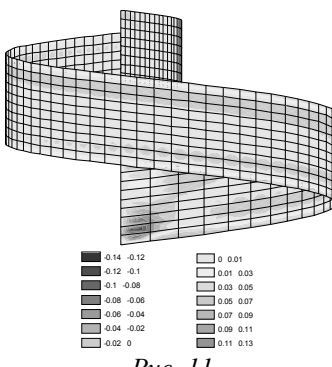


Рис. 11

Изополя напряжений Q_x , т/м

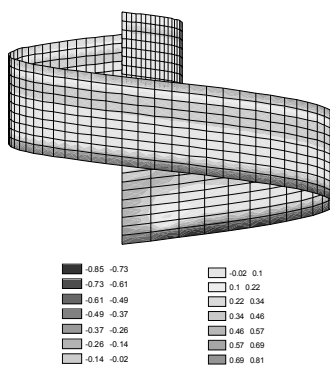


Рис. 12

Изополя напряжений Q_y , т/м

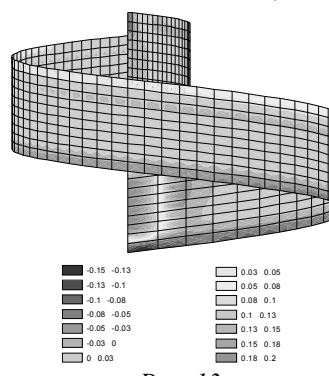


Рис. 13

НАКЛОННЫЙ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДР

Наклонная круговая цилиндрическая поверхность образовывается прямыми образующими, пересекающими направляющую окружность, при этом оставаясь параллельными осевому направлению цилиндра, которое образует с основанием цилиндра острый угол φ . Наклонным круговым цилиндром называется объем, ограниченный цилиндрической боковой поверхностью и двумя круговыми основаниями.

Наклонную круговую цилиндрическую поверхность можно получить как огибающую однопараметрического семейства плоскостей, касающихся одновременно двух направляющих окружностей радиусом a :

$$(y-m)^2 + (z-n)^2 = a^2, x=l \text{ и } y^2 + z^2 = a^2, x=0.$$

Эти окружности лежат в параллельных плоскостях, расстояние между которыми равно l . В этом случае уравнение однопараметрического семейства касательных плоскостей имеет вид:

$$M(x, y, z, v) = x \left[nv + m\sqrt{a^2 - v^2} \right] + la^2 - lvz - ly\sqrt{a^2 - v^2} = 0,$$

где $v = z$ окружности, лежащей в плоскости $x=0$; $-a \leq v \leq a, v = \beta - n$, где $\beta = z$ другой направляющей окружности.

Параметрическая форма задания:

$$x = x,$$

$$y = a \sin \alpha + \frac{m}{l} x,$$

$$z = a \cos \alpha + \frac{n}{l} x.$$

где α - угол, отсчитываемый от оси oz в сторону оси oy .

Построение:

Принимаем радиус окружности $a = 10 \text{ м}$.

Пусть $l = 20 \text{ м}, m = 10 \text{ м}, n = 5 \text{ м}$, тогда центр верхнего кругового основания цилиндра будет в точке с координатами $(l, m, n) = (20, 10, 5)$, а угол наклона прямых образующих к координатной плоскости $x=0$ будет

$$\varphi = \arctg(l / \sqrt{m^2 + n^2}) = \arctg(20 / \sqrt{10^2 + 5^2}) = 60^\circ 47'.$$

Пусть параметр x изменяется в интервале $[0; 20]$, где

20 м - высота цилиндра, а параметр α изменяется в интервале $[0; 360]$, где 360° - угол, огибаемый

поверхностью вокруг своей оси. Тогда параметры x, α выражаются через переменные s, t следующим образом: $x \rightarrow 20 \cdot t, \alpha \rightarrow 360 \cdot s$.

Разбивку на конечные элементы примем четырехугольную, количество конечных элементов в направлении образующей $x - 20$, направляющей $\alpha - 60$.

Получаем уравнения задания поверхности в SCAD:

$$X = 20 * t;$$

$$Y = 10 * \sin(360 * s) + 10 * 20 * t / 20;$$

$$Z = 10 * \cos(360 * s) + 5 * 20 * t / 20;$$

$$Ns = 60; Nt = 20.$$

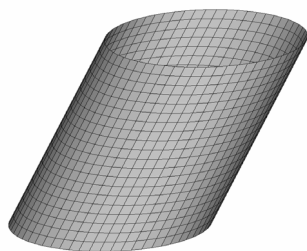


Рис. 1

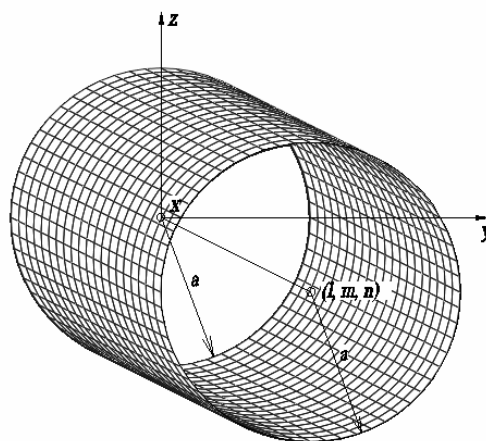


Рис. 2

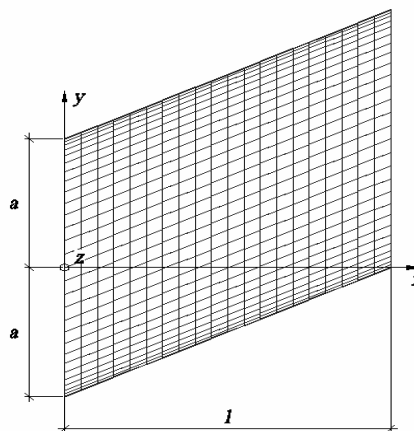


Рис. 3

Расчет:

Жесткостные характеристики:

Модуль упругости $E = 3.06 \cdot 10^6 \text{ т/м}^3$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$, толщина $h = 0.1 \text{ м}$.

Граничные условия:

Заделка по верхнему и нижнему контуру.

Нагрузки:

Равномерно распределенная нагрузка, действующая вдоль местной оси z от центра $q = 1 \text{ т/м}^2$.

Деформированная схема:

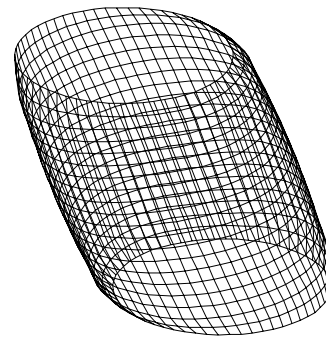


Рис. 4

Результаты расчета:

Изополя перемещений по Y, мм

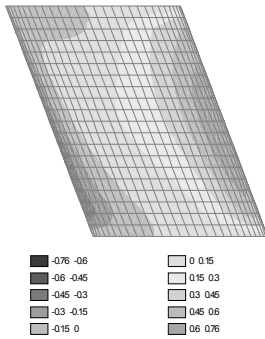


Рис. 5

Изополя напряжений $N_x, \text{ т/м}^2$

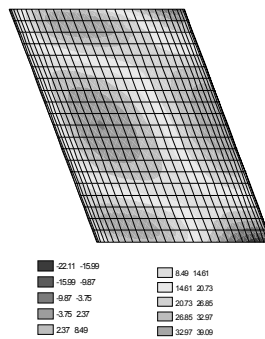


Рис. 6

Изополя напряжений $N_y, \text{ т/м}^2$

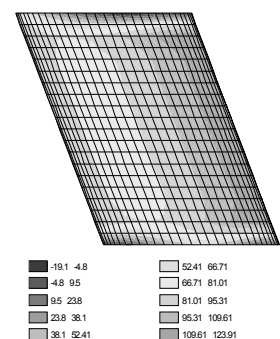


Рис. 7

Изополя напряжений $T_{xy}, \text{ т/м}^2$

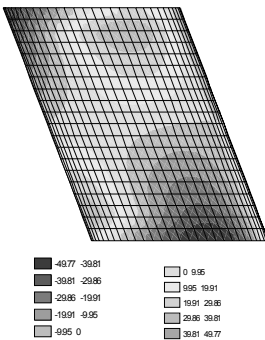


Рис. 8

Изополя напряжений $M_x, \text{ т} \cdot \text{м/м}$

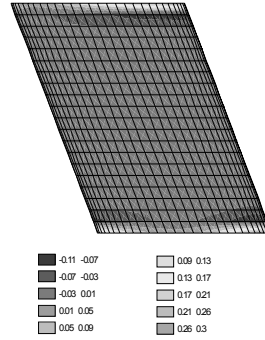


Рис. 9

Изополя напряжений $M_y, \text{ т} \cdot \text{м/м}$

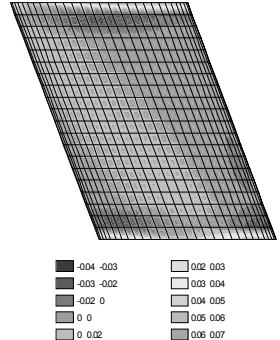


Рис. 10

Изополя напряжений $M_{xy}, \text{ т} \cdot \text{м/м}$

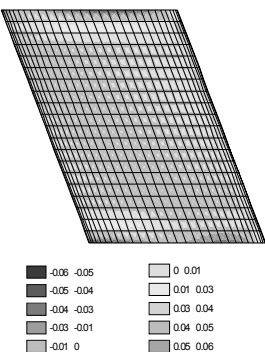


Рис. 11

Изополя напряжений $Q_x, \text{ т/м}$

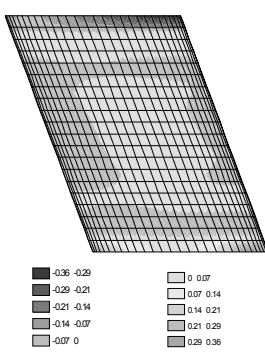


Рис. 12

Изополя напряжений $Q_y, \text{ т/м}$

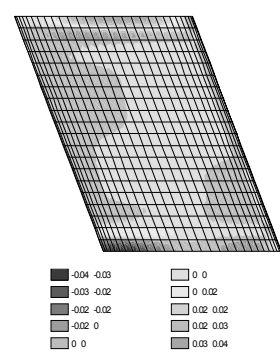


Рис. 13

НАКЛОННЫЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ЦИЛИНДР

Наклонная эллиптическая цилиндрическая поверхность образовывается прямыми образующими, пересекающими направляющий эллипс и остающимися параллельными осевому направлению цилиндра, которое образует с основанием цилиндра острый угол φ . Наклонным эллиптическим цилиндром называется объем, ограниченный цилиндрической боковой поверхностью и двумя эллиптическими основаниями.

Наклонную эллиптическую цилиндрическую поверхность можно получить как огибающую однопараметрического семейства плоскостей, касающихся одновременно двух направляющих эллипсов:

$$\frac{(y-m)^2}{b^2} + \frac{(z-n)^2}{a^2} = 1, x=l \quad \text{и} \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1, x=0.$$

Эти эллипсы лежат в параллельных плоскостях, расстояние между которыми равно l . В этом случае уравнение однопараметрического семейства плоскостей имеет вид:

$$M(x, y, z, v) = x \left[bnv + ma\sqrt{a^2 - v^2} \right] + bla^2 - lbvz - lay\sqrt{a^2 - v^2} = 0,$$

где $v = \beta - n$; $-a \leq v \leq a$, $\beta = z$ эллипса, который расположен в плоскости $x=l$; $v = z$ эллипса, который лежит в плоскости $x=0$.

Параметрическая форма задания:

$$x = x,$$

$$y = b \sin \lambda + \frac{m}{l} x,$$

$$z = a \cos \lambda + \frac{n}{l} x,$$

где λ - угловой параметр, $0 \leq \lambda \leq 2\pi$.

Построение:

Принимаем $a=5$ м, $b=10$ м.

Пусть $l=20$ м, $m=10$ м, $n=5$ м, тогда центр верхнего эллиптического основания цилиндра будет в точке с координатами $(l, m, n) = (20, 10, 5)$, а угол наклона прямых образующих к координатной плоскости $x=0$ будет $\varphi = \arctg(l/\sqrt{m^2 + n^2}) = \arctg(20/\sqrt{10^2 + 5^2}) = 60^\circ 47'$.

Пусть параметр x изменяется в интервале $[0; 20]$, где 20 м - высота цилиндра, а параметр λ изменяется в интервале $[0; 360]$, где 360° - угол, огибаемый поверхностью вокруг своей оси. Тогда параметры x, λ выражаются через переменные s, t следующим образом: $x \rightarrow 20 \cdot t$, $\lambda \rightarrow 360 \cdot s$.

Разбивку на конечные элементы примем четырехугольную, количество конечных элементов в направлении образующей x - 20, направляющей λ - 60.

Получаем уравнения задания поверхности в SCAD:

$$X=20*t;$$

$$Y=10*\sin(360*s)+10*20*t/20;$$

$$Z=5*\cos(360*s)+5*20*t/20;$$

$$Ns=60; Nt=20.$$

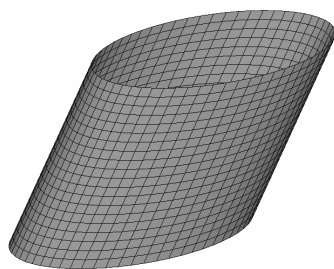


Рис. 1

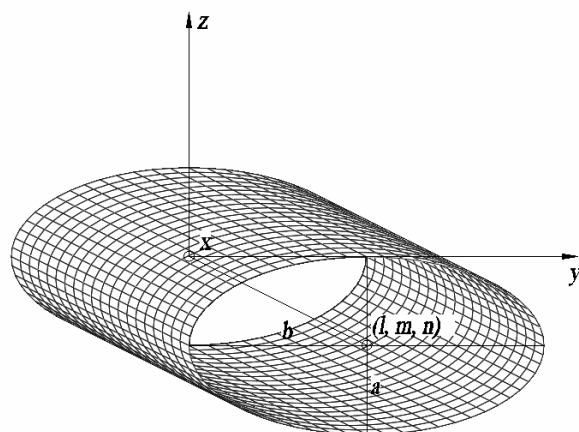


Рис. 2

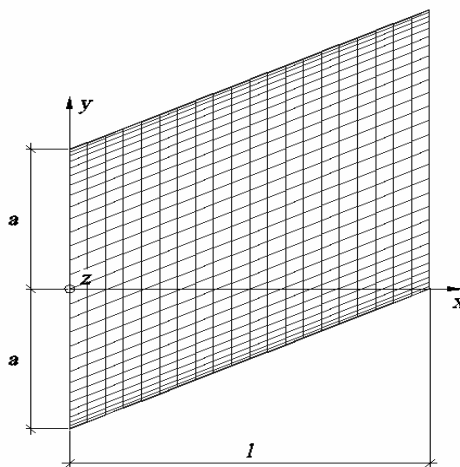


Рис. 3

Расчет:

Жесткостные характеристики:

Модуль упругости $E = 3.06 \cdot 10^6 \text{ т/м}^3$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$, толщина $h = 0.1 \text{ м}$.

Граничные условия:

Заделка по верхнему и нижнему контуру.

Нагрузки:

Равномерно распределенная нагрузка, действующая вдоль местной оси z от центра $q = 1 \text{ т/м}^2$.

Деформированная схема:

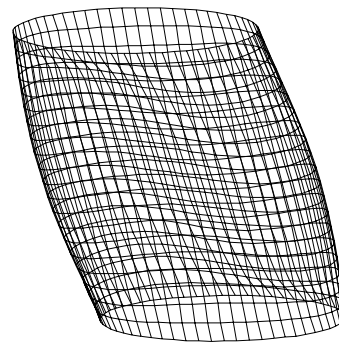


Рис. 4

Результаты расчета:

Изополя перемещений по Y, мм

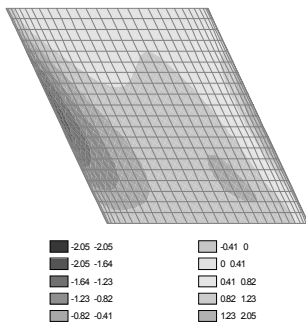


Рис. 5

Изополя напряжений N_x , т/м²

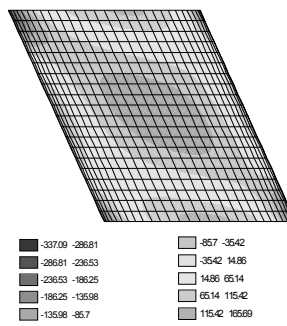


Рис. 6

Изополя напряжений N_y , т/м²

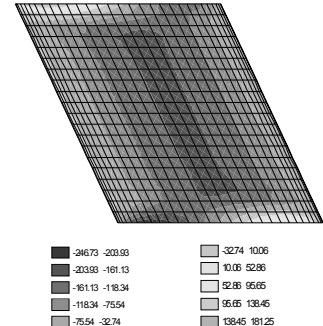


Рис. 7

Изополя напряжений T_{xy} , т/м²

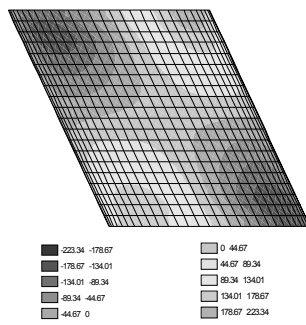


Рис. 8

Изополя напряжений M_x , т·м/м

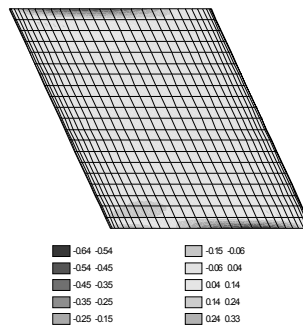


Рис. 9

Изополя напряжений M_y , т·м/м

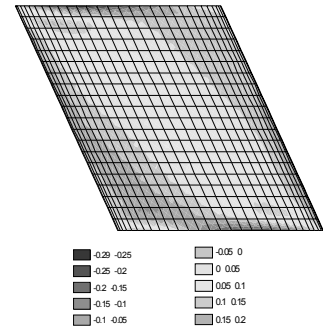


Рис. 10

Изополя напряжений M_{xy} , т·м/м

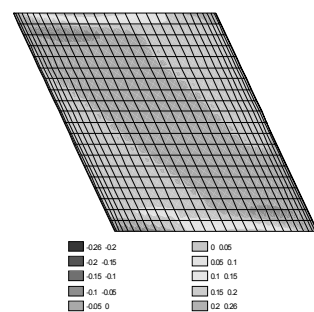


Рис. 11

Изополя напряжений Q_x , т/м

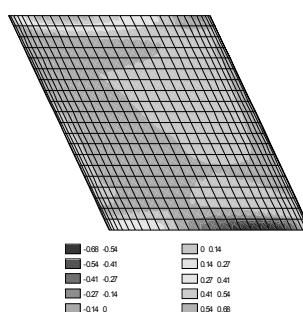


Рис. 12

Изополя напряжений Q_y , т/м

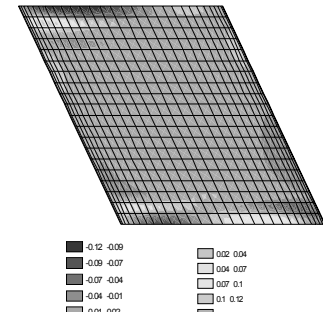


Рис. 13

ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ КОНИЧЕСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ

- действительный конус второго порядка, образованный движением прямой, проходящей через данную точку и пересекающей направляющий эллипс $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Перпендикуляр к плоскости направляющего эллипса, опущенный из вершины эллиптического конуса, проходит через точку пересечения осей направляющего эллипса.

Параметрическая форма задания:

$$x = a \cdot u \cdot \cos v,$$

$$y = b \cdot u \cdot \sin v,$$

$$z = c \cdot u,$$

где $u = z/c$ - безразмерная величина, равная высоте конуса, деленной на параметр c ; $0 \leq v \leq 2\pi$.

Построение:

Примем для направляющего эллипса $a = 20 \text{ м}$, $b = 10 \text{ м}$.

Безразмерный параметр u изменяется в интервале $[0; 1]$. При $u = z/c$ уравнение $z = c \cdot u$ принимает вид $z = c \cdot z/c = z$, где z - параметр, изменяющийся в интервале $[0; 10]$, где 10 м - высота конуса, а параметр v изменяется в интервале $[0; 360]$, где 360° - угол, огибаемый направляющим эллипсом вокруг оси oz . Тогда параметры u, v, z выражаются через переменные s, t следующим образом:

$$u \rightarrow t, \quad v \rightarrow 360 \cdot s, \quad z \rightarrow 10 \cdot t.$$

Разбивку на конечные элементы примем четырехугольную, количество конечных элементов в направлении u - 20, v - 60.

Для получения конуса, расположенного ниже плоскости xoy необходимо задать отрицательное значение уравнения Z .

Получаем уравнения задания поверхности в SCAD:

$$X = 20 \cdot t \cdot \cos(360 \cdot s);$$

$$Y = 10 \cdot t \cdot \sin(360 \cdot s);$$

$$Z = -10 \cdot t;$$

$$Ns = 60; \quad Nt = 20.$$

Примечание: Вблизи вершины конуса четырехугольные конечные элементы вырождаются в треугольные, что является ошибкой расчетной схемы. Проблема решается удалением указанных элементов и добавлением стержневых конечных элементов, образующих вершину конуса.

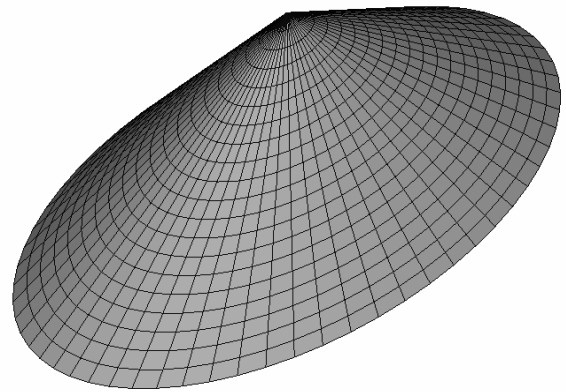


Рис. 1

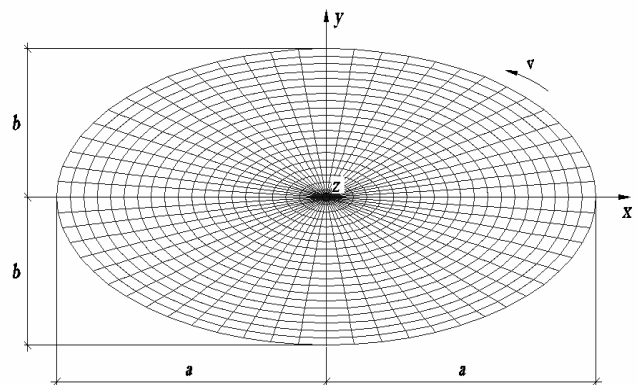


Рис. 2

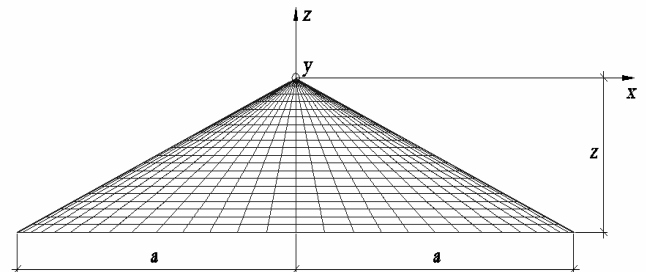


Рис. 3

Расчет:

Жесткостные характеристики:

Модуль упругости $E = 3.06 \cdot 10^6 \text{ т/м}^3$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$, толщина $h = 0.1 \text{ м}$.

Граничные условия:

Заделка по контуру.

Нагрузки:

Равномерно распределенная нагрузка, действующая вдоль оси oz $q = 1 \text{ т/м}^2$.

Деформированная схема:

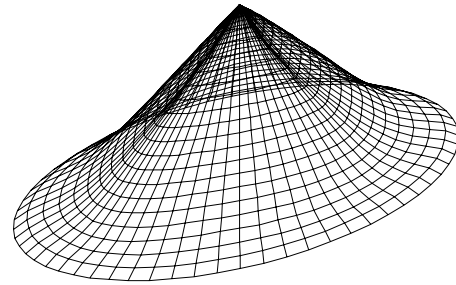


Рис. 4

Результаты расчета:

Изополя перемещений по Z, мм

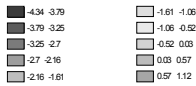
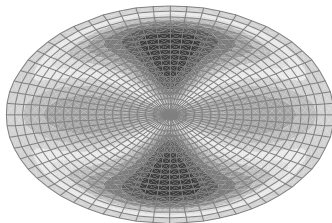


Рис. 5

Изополя напряжений N_x , т/м²

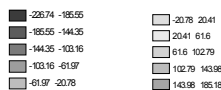
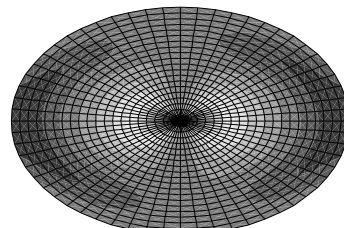


Рис. 6

Изополя напряжений N_y , т/м²

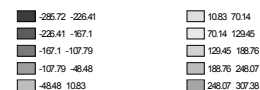
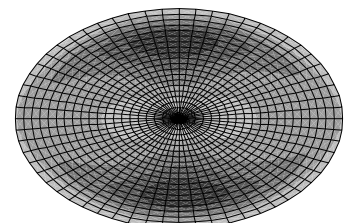


Рис. 7

Изополя напряжений T_{xy} , т/м²

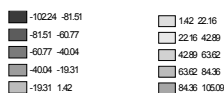
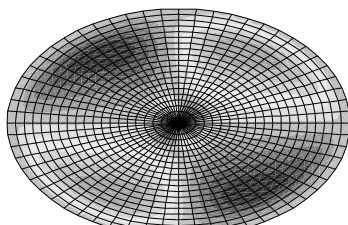


Рис. 8

Изополя напряжений M_x , т·м/м

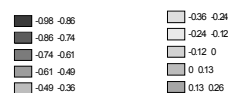
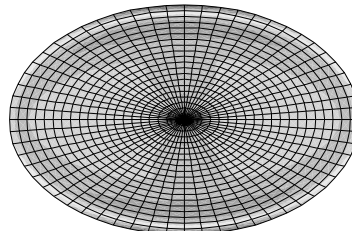


Рис. 9

Изополя напряжений M_y , т·м/м

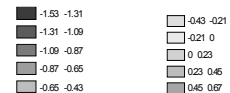
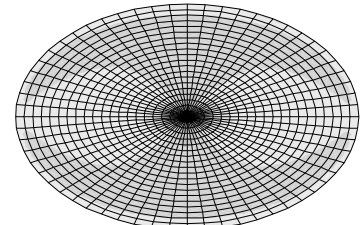


Рис. 10

Изополя напряжений M_{xy} , т·м/м

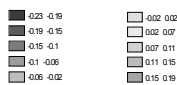
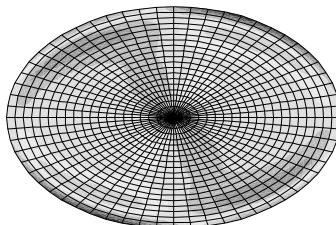


Рис. 11

Изополя напряжений Q_x , т/м

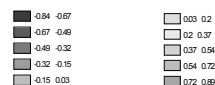
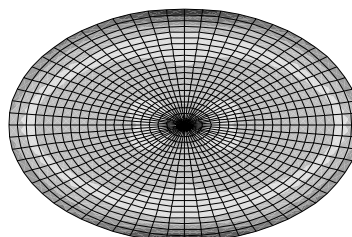


Рис. 12

Изополя напряжений Q_y , т/м

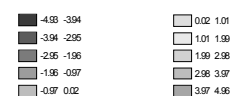
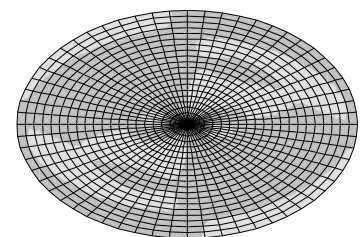


Рис. 13

НАКЛОННАЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ КОНИЧЕСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ

- коническая поверхность второго порядка, которая образуется движением прямой, проходящей через определенную точку и пересекающей направляющий эллипс. Перпендикуляр к плоскости направляющего эллипса, опущенный из вершины конической поверхности, не проходит через центр направляющего эллипса.

Наклонную эллиптическую коническую поверхность можно получить как огибающую однопараметрического семейства плоскостей, касающихся одновременно двух направляющих эллипсов с полуосями a, b и c, d . Для того чтобы получилась коническая поверхность, необходимо, чтобы отношение полуосей двух направляющих эллипсов было одинаковым, т.е. $a/b = d/c$. Если принять в качестве независимых параметров a, b, c , тогда $d = ac/b$. В этом случае уравнения двух направляющих эллипсов можно записать в виде:

$x = l, \frac{(y-m)^2}{c^2} + \frac{b^2(z-n)^2}{a^2c^2} = 1$ и $x = 0, \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$, где l - расстояние между плоскостями с направляющими эллипсами; координаты центров направляющих эллипсов $(0, 0, 0)$ и $(0, m, n)$.

Параметрическая форма задания:

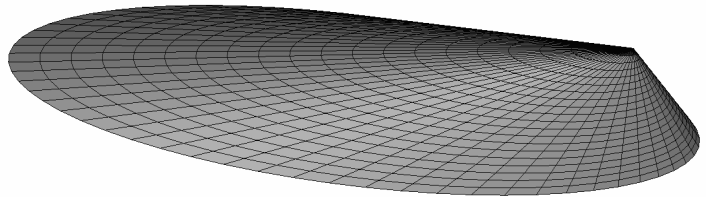
$$x = x,$$

$$y = mx/l + \frac{bl - x(b-c)}{l} \sin \lambda,$$

$$z = nx/l + a \frac{bl - x(b-c)}{bl} \cos \lambda,$$

где λ - угловой параметр, $0 \leq \lambda \leq 2\pi$.

Рис. 1



Построение:

Принимаем полуоси направляющих эллипсов $a = 20$ м, $b = 10$ м, $c = 5$ м. Тогда $d = ac/b = 20 \cdot 5 / 10 = 10$ м.

Принимаем расстояние $l = 5$ м, смещение направляющих эллипсов по y $m = 3$ м, по z $n = 5$ м. Тогда наклон оси конуса к плоскости $x = 0$:

$$\operatorname{tg} \varphi = l / \sqrt{m^2 + n^2} = 5 / \sqrt{3^2 + 5^2} = 0.857, \text{ отсюда}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}(0.857) = 40^\circ 36'.$$

Пусть параметр x изменяется в интервале $[0; 10]$, где 10 м - высота конуса, а параметр λ изменяется в интервале $[0; 360]$, где 360° - угол, огибаемый поверхностью вокруг оси oz . Тогда параметры x, λ выражаются через переменные s, t следующим образом: $x \rightarrow 10 \cdot t, \lambda \rightarrow 360 \cdot s$. Разбивку на конечные элементы примем четырехугольную, количество конечных элементов в направлении образующей x - 20, направляющей λ - 60.

Полученная схема поворачивается вокруг оси oy на 90° .

На рисунках показана поверхность до поворота.

Получаем уравнения задания поверхности в SCAD:

$$X = 10 * t;$$

$$Y = 5 * 10 * t / 5 + (10 * 5 - 10 * t * (10 - 5)) * \sin(360 * s) / 5;$$

$$Z = 10 * 10 * t / 5 + 20 * (10 * 5 - 10 * t * (10 - 5)) * \cos(360 * s) / 50;$$

$$Ns = 60; Nt = 20.$$

Примечание: Вблизи вершины конуса четырехугольные конечные элементы вырождаются в треугольные, что является ошибкой расчетной схемы. Проблема решается удалением указанных элементов и добавлением стержневых конечных элементов, образующих вершину конуса.

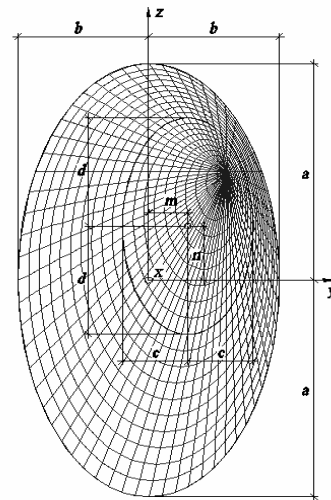


Рис. 2

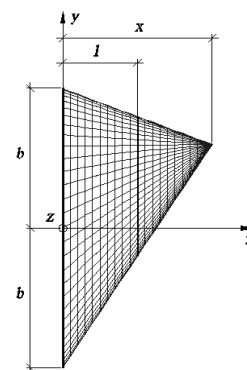


Рис. 3

Расчет:

Жесткостные характеристики:

Модуль упругости $E = 3.06 \cdot 10^6 \text{ т/м}^3$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$, толщина $h = 0.1 \text{ м}$.

Граничные условия:

Заделка по контуру.

Нагрузки:

Равномерно распределенная нагрузка, действующая вдоль оси oz $q = 1 \text{ т/м}^2$.

Деформированная схема:

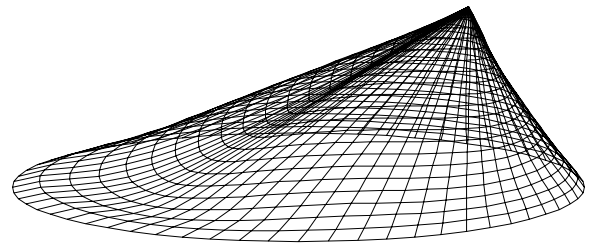


Рис. 4

Результаты расчета:

Изополя перемещений по Z, мм

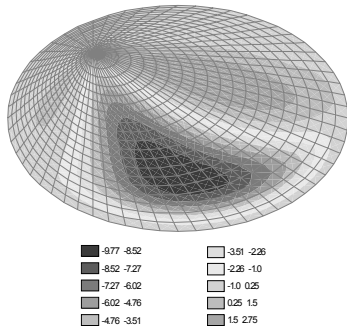


Рис. 5

Изополя напряжений $N_x, \text{ т/м}^2$

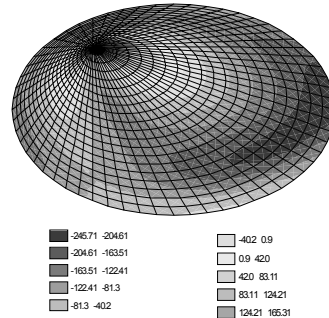


Рис. 6

Изополя напряжений $N_y, \text{ т/м}^2$

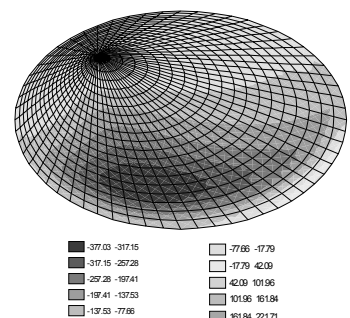


Рис. 7

Изополя напряжений $T_{xy}, \text{ т/м}^2$

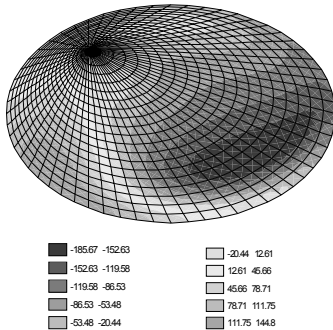


Рис. 8

Изополя напряжений $M_x, \text{ т} \cdot \text{м/м}$

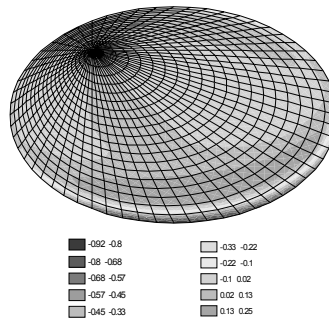


Рис. 9

Изополя напряжений $M_y, \text{ т} \cdot \text{м/м}$

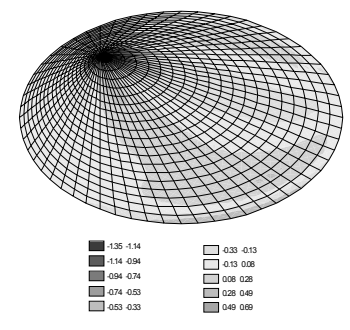


Рис. 10

Изополя напряжений $M_{xy}, \text{ т} \cdot \text{м/м}$

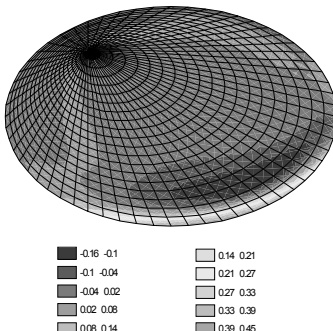


Рис. 11

Изополя напряжений $Q_x, \text{ т/м}$

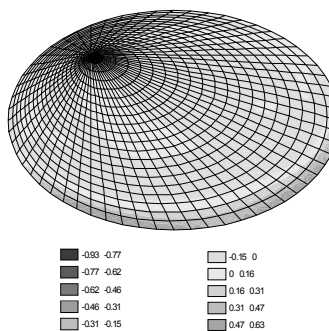


Рис. 12

Изополя напряжений $Q_y, \text{ т/м}$

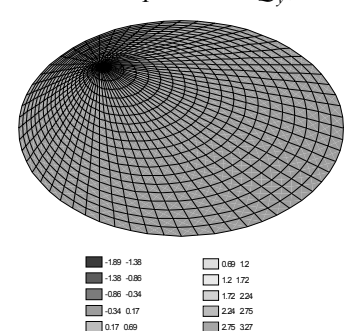


Рис. 13

КОНИЧЕСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ С НАПРАВЛЯЮЩЕЙ КРИВОЙ В ФОРМЕ АНЬЕЗИАНЫ

- поверхность с направляющей кривой в форме аньезианы $z = \frac{2B^2T}{4y^2 + B^2} - T$,

где $-B/2 \leq y \leq B/2$, $0 \leq z \leq T$, образуется движением прямой, проходящей через вершину поверхности $(L; 0; 0)$ и пересекающей заданную направляющую аньезиану. Направляющая кривая лежит в координатной плоскости yoz .

Параметрическая форма задания:

$$x = x,$$

$$y = (L - x) \operatorname{tg} \alpha,$$

$$z = \frac{T(L - x)}{L} \left(\frac{2B^2}{4L^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + B^2} - 1 \right),$$

где α - угол в плоскости xoy с вершиной в точке $(L; 0; 0)$, отсчитываемый от оси ox ;
 $-B/(2L) \leq \operatorname{tg} \alpha \leq B/(2L)$.

Построение:

Принимаем параметры аньезианы $B/2 = 10 \text{ м}$, $B = 20$ и $T = 5 \text{ м}$, длину поверхности $L = 40 \text{ м}$.

Пусть параметр x изменяется в интервале $[0; L] = [0; 40]$, а параметр α изменяется в интервале $[0; 30]$. Тогда параметры x, α выражаются через переменные s, t следующим образом:

$$x \rightarrow 40 \cdot t, \quad \alpha \rightarrow 30 \cdot s.$$

Разбивку на конечные элементы примем четырехугольную, количество конечных элементов в направлении x - 40, α - 10.

Создаются две поверхности при $-30^\circ \leq \alpha \leq 0$ и $0 \leq \alpha \leq 30^\circ$, которые потом собираются.

Получаем уравнения задания поверхности в SCAD:

1:

$$X = 40 \cdot t;$$

$$Y = (40 - 40 \cdot t) \cdot \tan(30 \cdot s);$$

$$Z = (5 \cdot (40 - 40 \cdot t) / 40) \cdot (2 \cdot 20^2 / (4 \cdot 40^2 \cdot \tan^2(30 \cdot s) + 20^2) - 1).$$

2:

$$X = 40 \cdot t;$$

$$Y = (40 - 40 \cdot t) \cdot \tan(-30 \cdot s);$$

$$Z = (5 \cdot (40 - 40 \cdot t) / 40) \cdot (2 \cdot 20^2 / (4 \cdot 40^2 \cdot \tan^2(-30 \cdot s) + 20^2) - 1);$$

$$Ns = 10; \quad Nt = 40.$$

Примечание: Вблизи вершины поверхности четырехугольные конечные элементы вырождаются в треугольные, что является ошибкой расчетной схемы. Проблема решается удалением указанных элементов и добавлением стержневых конечных элементов, образующих вершину поверхности.

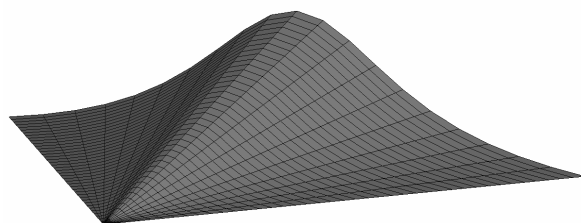


Рис. 1

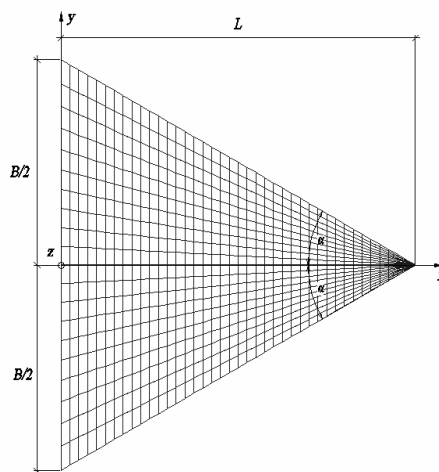


Рис. 2

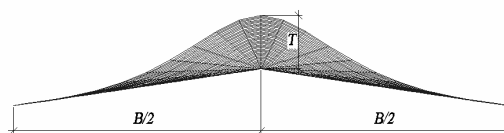


Рис. 3

Расчет:

Жесткостные характеристики:

Модуль упругости $E = 3.06 \cdot 10^6 \text{ т/м}^3$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$, толщина $h = 0.1 \text{ м}$.

Граничные условия:

Заделка по контуру.

Нагрузки:

Равномерно распределенная нагрузка, действующая вдоль оси oz $q = 1 \text{ т/м}^2$.

Деформированная схема:

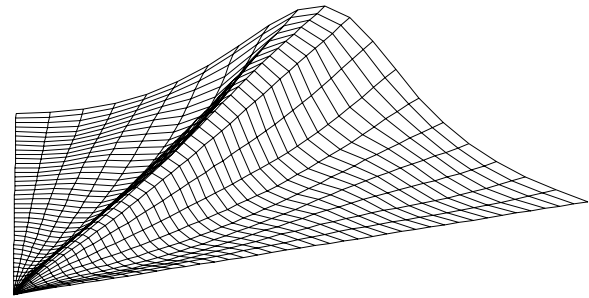


Рис. 4

Результаты расчета:

Изополя перемещений по Z, мм

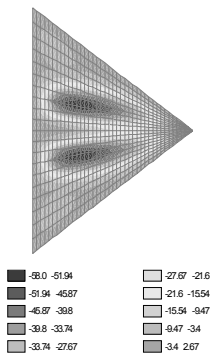


Рис. 5

Изополя напряжений $N_x, \text{ т/м}^2$

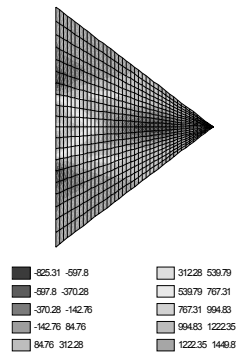


Рис. 6

Изополя напряжений $N_y, \text{ т/м}^2$

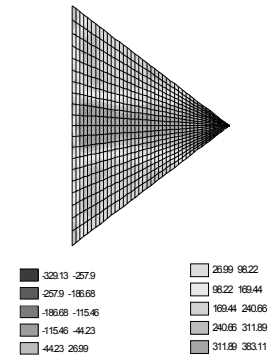


Рис. 7

Изополя напряжений $T_{xy}, \text{ т/м}^2$

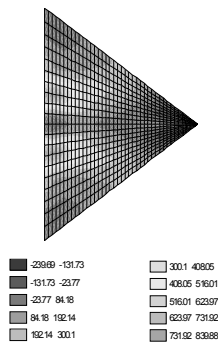


Рис. 8

Изополя напряжений $M_x, \text{ т} \cdot \text{м/м}$

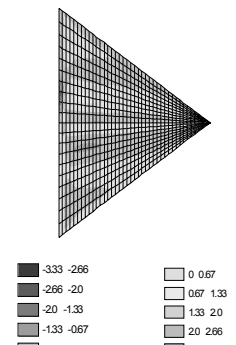


Рис. 9

Изополя напряжений $M_y, \text{ т} \cdot \text{м/м}$

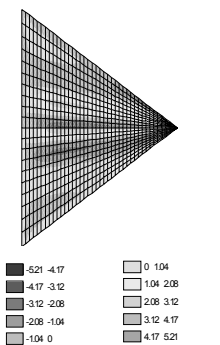


Рис. 10

Изополя напряжений $M_{xy}, \text{ т} \cdot \text{м/м}$

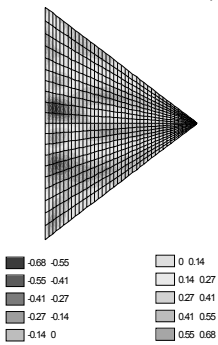


Рис. 11

Изополя напряжений $Q_x, \text{ т/м}$

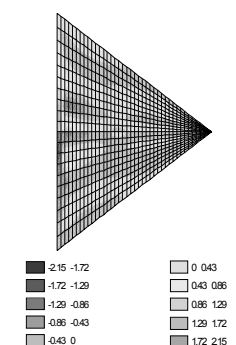


Рис. 12

Изополя напряжений $Q_y, \text{ т/м}$

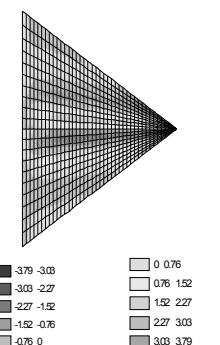


Рис. 13

ПРЯМАЯ КОНИЧЕСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ С ПЛОСКОЙ НАПРАВЛЯЮЩЕЙ КРИВОЙ В ФОРМЕ КРУГОВОЙ СИНУСОИДЫ

- поверхность, полученная движением прямой линии, одна точка которой неподвижна, а другая описывает синусоиду относительно базисного круга радиусом $r = z \cdot \operatorname{tg} \theta_0$ в плоскости, перпендикулярной оси конуса.

При $u = 0$ образующая прямая наклонена к оси конуса под углом ν_0 .

Параметрическая форма задания:

$$x = v \cdot t \cdot S(u) \cdot \cos u,$$

$$y = v \cdot t \cdot S(u) \cdot \sin u,$$

$$z = v,$$

где $S(u) = 1 + \mu \cdot \sin(m \cdot u)$; μ - амплитуда синусоиды относительно единичного круга, находящегося в сечении $z = \operatorname{ctg} \theta_0$; m - число волн синусоиды; $t = \operatorname{tg} \theta_0$; $0 \leq u \leq 2\pi$.

Построение:

Примем радиус базисного круга $r = 20 \text{ м}$, высоту конуса $z = 10 \text{ м}$, найдем $t = \operatorname{tg} \theta_0 = r/z = 20/10 = 2$.

Примем для синусоиды $\mu = 0.3$, $m = 5$, тогда $S(u) = 1 + 0.3 \cdot \sin(5 \cdot u)$.

Амплитуда синусоиды задается относительно радиуса базисного круга. При $r = 20 \text{ м}$ и $\mu = 0.3$ отклонение синусоиды от базисного круга будет $20 \cdot 0.3 = 6 \text{ м}$.

Пусть параметр v изменяется в интервале $[0; 10]$, где 10 м - высота конуса, а параметр u изменяется в интервале $[0; 360]$, где 360° - угол, огибаемый базисным кругом вокруг оси oz . Тогда параметры u, v выражаются через переменные s, t следующим образом: $v \rightarrow 10 \cdot t$, $u \rightarrow 360 \cdot s$.

Разбивку на конечные элементы примем четырехугольную, количество конечных элементов в направлении v - 10, u - 60.

Для получения поверхности, расположенной ниже плоскости xoy , необходимо задать отрицательное значение уравнения Z .

Получаем уравнения задания поверхности в SCAD:

$$X = 10 * t * 2 * (1 + 0.3 * \sin(5 * 360 * s)) * \cos(360 * s);$$

$$Y = 10 * t * 2 * (1 + 0.3 * \sin(5 * 360 * s)) * \sin(360 * s);$$

$$Z = -10 * t;$$

$$Ns = 60; Nt = 10.$$

Примечание: Вблизи вершины поверхности четырехугольные конечные элементы вырождаются в треугольные, что является ошибкой расчетной схемы. Проблема решается удалением указанных элементов и добавлением стержневых конечных элементов, образующих вершину поверхности.

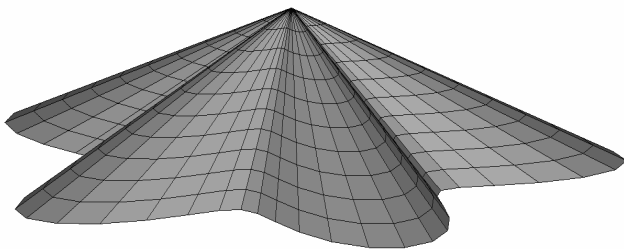


Рис. 1

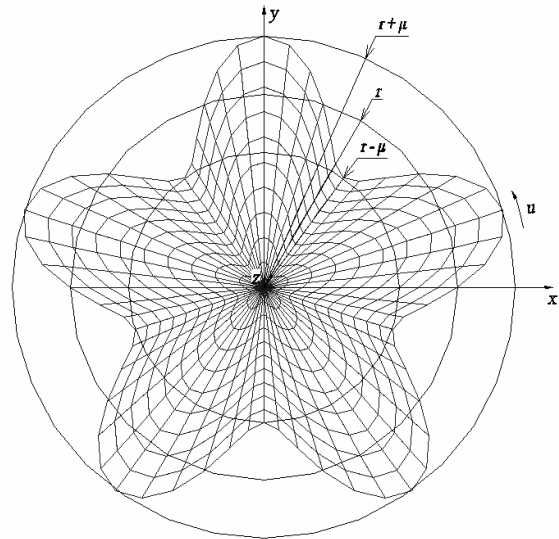


Рис. 2

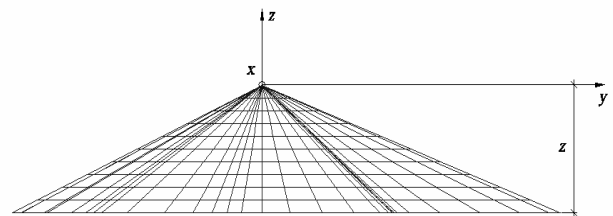


Рис. 3

Расчет:

Жесткостные характеристики:

Модуль упругости $E = 3.06 \cdot 10^6 \text{ т/м}^3$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$, толщина $h = 0.1 \text{ м}$.

Граничные условия:

Заделка по контуру.

Нагрузки:

Равномерно распределенная нагрузка, действующая вдоль оси oz $q = 1 \text{ т/м}^2$.

Деформированная схема:

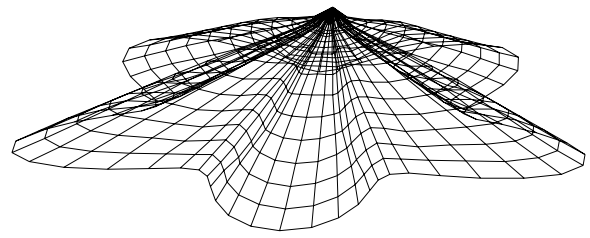


Рис. 4

Результаты расчета:

Изополя перемещений по Z, мм

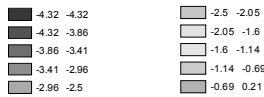
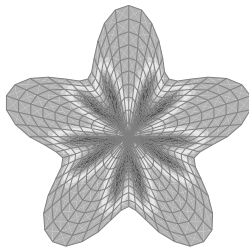


Рис. 5

Изополя напряжений $N_x, \text{ т/м}^2$

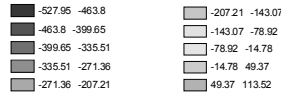
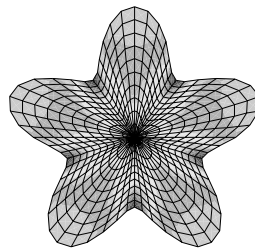


Рис. 6

Изополя напряжений $N_y, \text{ т/м}^2$

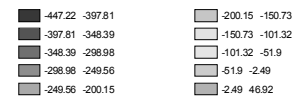
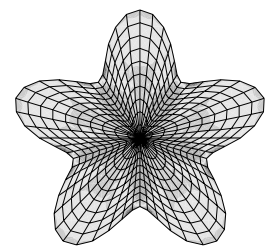


Рис. 7

Изополя напряжений $T_{xy}, \text{ т/м}^2$

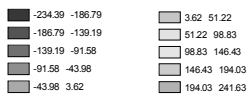
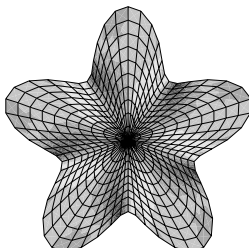


Рис. 8

Изополя напряжений $M_x, \text{ т} \cdot \text{м/м}$

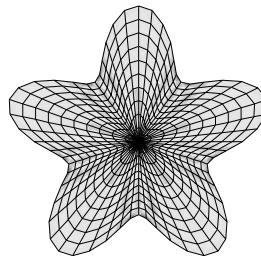


Рис. 9

Изополя напряжений $M_y, \text{ т} \cdot \text{м/м}$

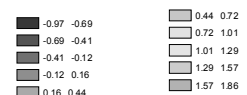
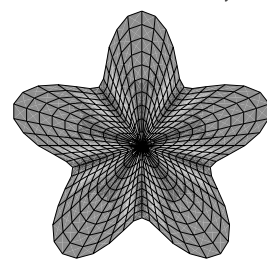


Рис. 10

Изополя напряжений $M_{xy}, \text{ т} \cdot \text{м/м}$

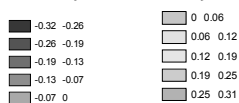
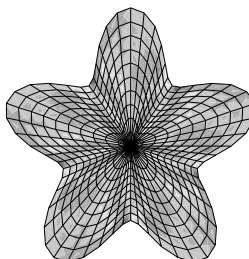


Рис. 11

Изополя напряжений $Q_x, \text{ т/м}$

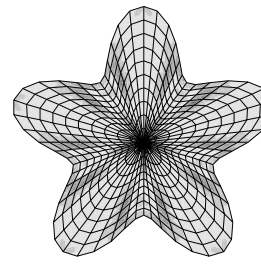


Рис. 12

Изополя напряжений $Q_y, \text{ т/м}$

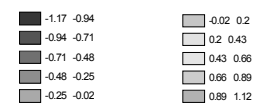
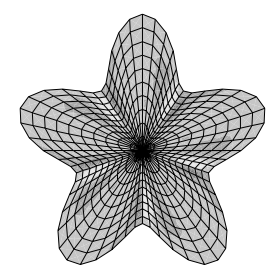


Рис. 13

КОСОЙ ГЕЛИКОИД

- винтовая линейчатая поверхность, описываемая прямой, которая пересекает ось геликоида под постоянным углом α , не равным 90° , вращается с постоянной угловой скоростью вокруг этой оси и одновременно перемещается поступательно с постоянной скоростью вдоль этой же оси. Скорости этих движений пропорциональны. Прямолинейные образующие косого геликоида параллельны образующим его направляющего конуса.

Координатные линии u совпадают с прямолинейными образующими геликоида, линии v представляют собой соосные винтовые линии.

Параметрическая форма задания:

$$x = u \cdot \sin \alpha \cdot \cos v,$$

$$y = u \cdot \sin \alpha \cdot \sin v,$$

$$z = c \cdot v + u \cdot \cos \alpha,$$

где c - смещение образующей прямой при повороте ее на 1 рад; α - угол наклона образующих к оси геликоида.

Построение:

Примем угол наклона образующих $\alpha = 60^\circ$.

Шаг винтовой направляющей по высоте примем 3 м , тогда $c \cdot v \rightarrow 3 \cdot v$, где $0 \leq v \leq 1$.

Радиус поверхности в плане получим

$$l_u \cdot \sin \alpha = 10 \cdot \sin 60^\circ = 8.66 \text{ м}, \text{ где } l_u = 10 \text{ м} - \text{длина}$$

прямолинейной образующей поверхности.

Пусть параметр u изменяется в интервале

$[0; l_u] = [0; 10]$, а параметр v изменяется в интервале

$[0; 360]$, где 360° - угол, огибаемый винтовой линией

$u = 0$ вокруг оси oz . Тогда параметры u, v

выражаются через переменные s, t следующим

образом: $u \rightarrow 10 \cdot t, v \rightarrow 360 \cdot s$.

Разбивку на конечные элементы примем

четырёхугольную, количество конечных элементов в

направлении образующей u - 20, направляющей v -

60.

Получаем уравнения задания поверхности в SCAD:

$$X = 10 * t * \sin(60) * \cos(360 * s);$$

$$Y = 10 * t * \sin(60) * \sin(360 * s);$$

$$Z = 3 * s + 10 * t * \cos(60);$$

$$Ns = 60; Nt = 20.$$

Примечание: Вблизи вершины поверхности четырёхугольные конечные элементы вырождаются в треугольные, что является ошибкой в расчетной схеме. Проблема решается дроблением указанных элементов на треугольные.

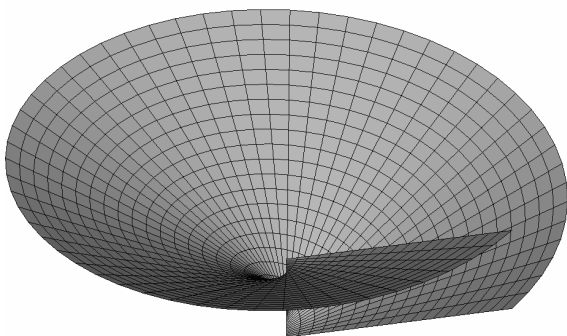


Рис. 1

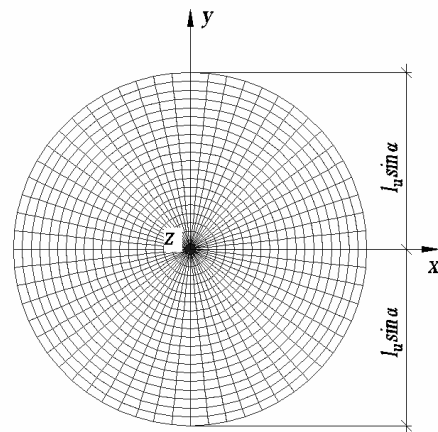


Рис. 2

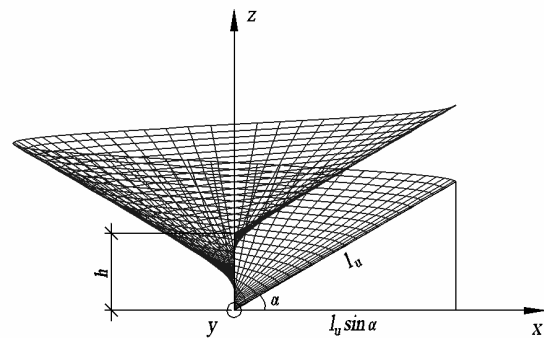


Рис. 3

Расчет:

Жесткостные характеристики:

Модуль упругости $E = 3.06 \cdot 10^6 \text{ т/м}^3$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$, толщина $h = 0.1 \text{ м}$.

Граничные условия:

Заделка по контуру включая торцы.

Нагрузки:

Равномерно распределенная нагрузка, действующая вдоль оси oz $q = 1 \text{ т/м}^2$.

Деформированная схема:

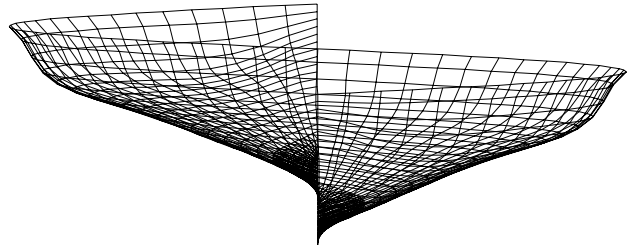


Рис. 4

Результаты расчета:

Изополя перемещений по Z, мм

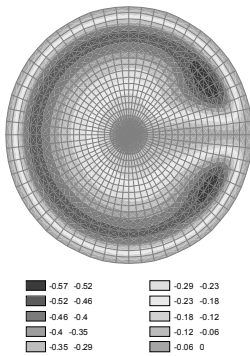


Рис. 5

Изополя напряжений N_x , т/м²

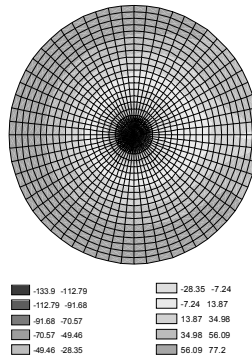


Рис. 6

Изополя напряжений N_y , т/м²

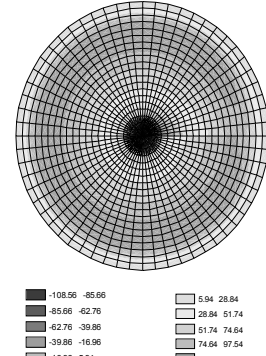


Рис. 7

Изополя напряжений T_{xy} , т/м²

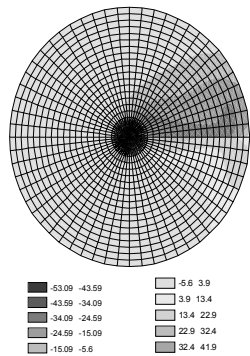


Рис. 8

Изополя напряжений M_x , т·м/м

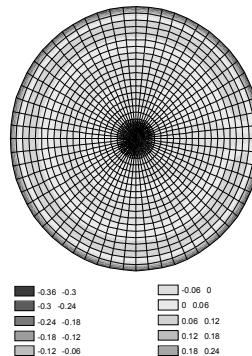


Рис. 9

Изополя напряжений M_y , т·м/м

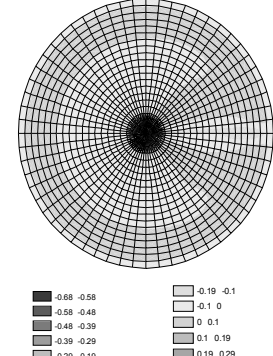


Рис. 10

Изополя напряжений M_{xy} , т·м/м

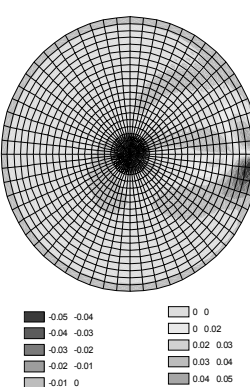


Рис. 11

Изополя напряжений Q_x , т/м

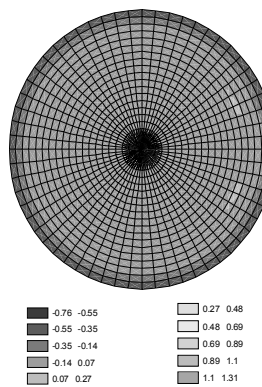


Рис. 12

Изополя напряжений Q_y , т/м

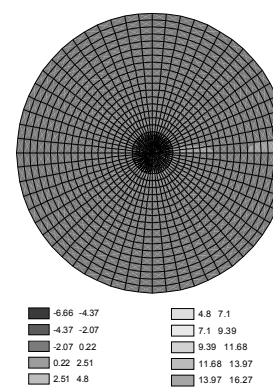


Рис. 13

ЗОНТИК УИТНИ (ЗОНТИК КАРТАНА)

- линейчатая поверхность отрицательной гауссовой кривизны, содержащая двойную линию. В сечении поверхности плоскостями $y = -b = const$ лежат параболы $z = x^2 / b^2$. Когда y переходит через нуль, парабола “складывается”, переходя через двойную линию, и снова “раскрывается” по мере того, как ее плоскость $y = b$ движется вперед вдоль оси y . В сечении поверхности плоскостями $z = c > 0 = const$ лежат две пересекающиеся на оси z прямые $y = \pm x / \sqrt{c}$. При движении этой плоскости вдоль оси oz вниз до положения $z = 0$, а затем снова вверх, прямые поворачиваются вокруг оси oz , все время оставаясь параллельными плоскости $z = const$.

Параметрическая форма задания:

$$x = rt,$$

$$y = r,$$

$$z = t^2.$$

Построение:

Для построения поверхности в SCAD используются следующие параметрические уравнения

$x = \pm a \cdot s \cdot t$, $y = \pm b \cdot s$, $z = c \cdot t^2$, где a - длина проекции направляющей параболы на плоскость xoy ; b - расстояние от направляющей параболы до плоскости $y = 0$; c - расстояние от плоскости расположения образующих прямых до плоскости $z = 0$.

Пусть $a = 10$ м, $b = 20$ м, $c = 10$ м.

Параметры s, t изменяются в интервале $[0; 1]$.

Разбивку на конечные элементы примем четырехугольную, количество конечных элементов в направлении s - 10, t - 10.

Создаются четыре поверхности при $\pm a$ и $\pm b$, которые потом собираются. Полученная схема поворачивается вокруг оси oy на 180° .

На рисунках показана поверхность до поворота.

Получаем уравнения задания поверхности в SCAD:

$$X = \pm 10 * s * t;$$

$$Y = \pm 20 * s;$$

$$Z = 10 * t ** 2;$$

$$Ns = 10; Nt = 10.$$

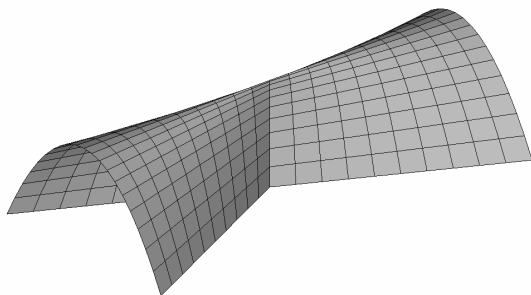


Рис. 1

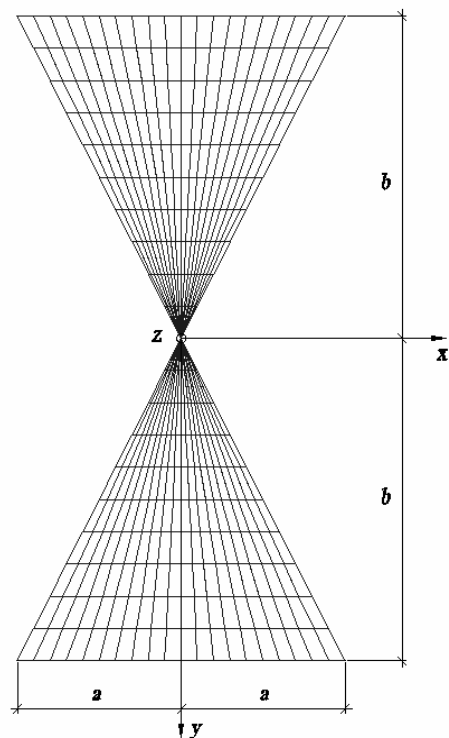


Рис. 2

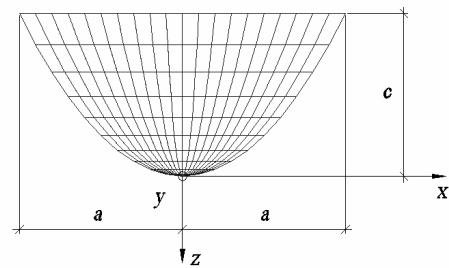


Рис. 3

Расчет:

Жесткостные характеристики:

Модуль упругости $E = 3.06 \cdot 10^6 \text{ т/м}^3$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$, толщина $h = 0.1 \text{ м}$.

Граничные условия:

Заделка по контуру, включая торцы.

Нагрузки:

Равномерно распределенная нагрузка, действующая вдоль оси oz $q = 1 \text{ т/м}^2$.

Деформированная схема:

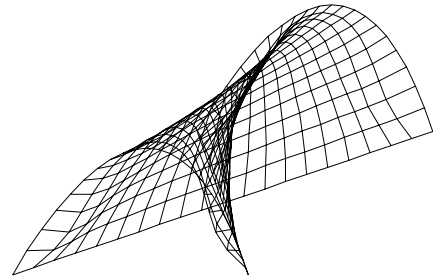


Рис. 4

Результаты расчета:

Изополя перемещений по Z, мм

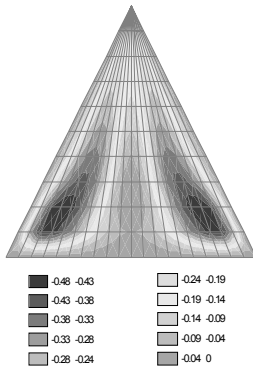


Рис. 5

Изополя напряжений N_x , т/м²

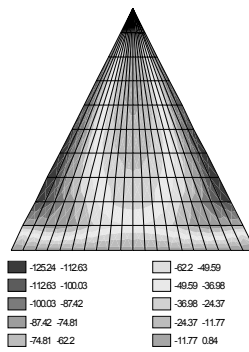


Рис. 6

Изополя напряжений N_y , т/м²

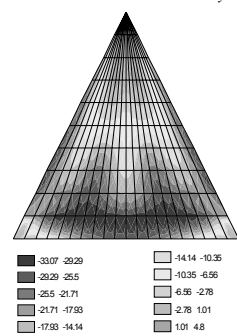


Рис. 7

Изополя напряжений T_{xy} , т/м²

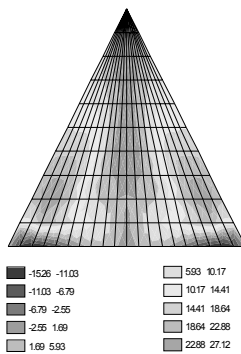


Рис. 8

Изополя напряжений M_x , т·м/м

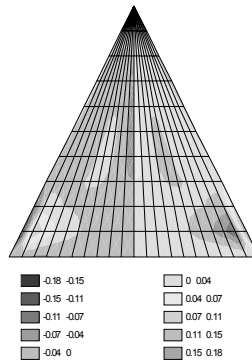


Рис. 9

Изополя напряжений M_y , т·м/м

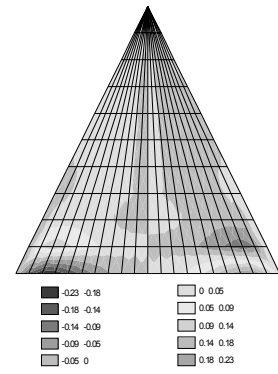


Рис. 10

Изополя напряжений M_{xy} , т·м/м

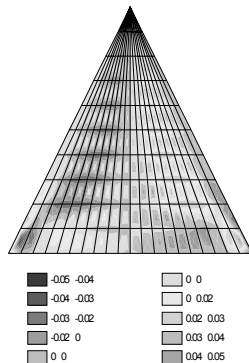


Рис. 11

Изополя напряжений Q_x , т/м

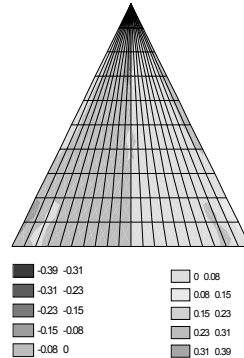


Рис. 12

Изополя напряжений Q_y , т/м

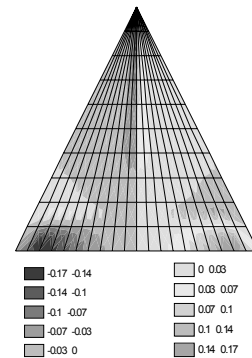


Рис. 13

ПСЕВДО-РАЗВЕРТЫВАЮЩИЙСЯ ГЕЛИКОИД

- линейчатая поверхность отрицательной гауссовой кривизны, образованная проекциями касательных винтовой линии постоянного шага $2\pi \cdot b$ на цилиндре радиусом a на плоскость, перпендикулярную к оси винтовой линии. Угол между касательной к винтовой линии и прямолинейной образующей поверхности $\varphi = \arctg(b/a)$. Координатные линии u совпадают с прямолинейными образующими геликоида, линии v представляют собой соосные винтовые линии.

Параметрическая форма задания:

$$x = a \cdot \cos v - u \cdot \sin v,$$

$$y = a \cdot \sin v + u \cdot \cos v,$$

$$z = b \cdot v,$$

где a - радиус кругового цилиндра; b - шаг винтовой линии по высоте.

Построение:

Примем радиус кругового цилиндра $a = 5 \text{ м}$.

Шаг винтовой направляющей по высоте $b = 3 \text{ м}$.

Пусть параметр u изменяется в интервале $[0; 10]$, где 10 м - длина образующей, а параметр v изменяется в интервале $[0; 360]$, где 360° - угол, огибаемый винтовой линией $u=0$ вокруг оси oz . Тогда параметры u, v выражаются через переменные s, t следующим образом: $u \rightarrow 10 \cdot t, v \rightarrow 360 \cdot s$.

Разбивку на конечные элементы примем треугольную, количество конечных элементов в направлении образующей u - 20, направляющей v - 60.

Получаем уравнения задания поверхности в SCAD:

$$X = 5 \cdot \cos(360 \cdot s) - 10 \cdot t \cdot \sin(360 \cdot s);$$

$$Y = 5 \cdot \sin(360 \cdot s) + 10 \cdot t \cdot \cos(360 \cdot s);$$

$$Z = 3 \cdot s;$$

$$Ns = 60; Nt = 20.$$

Примечание: Вблизи винтовой линии $u = 0$ могут образоваться неплоские конечные элементы, что является ошибкой в расчетной схеме. Проблема решается повторным дроблением указанных элементов на более мелкие либо удалением некорректных конечных элементов.

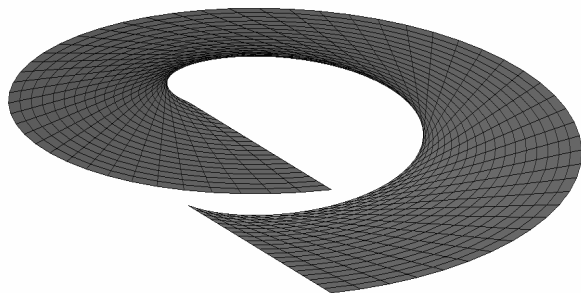


Рис. 1

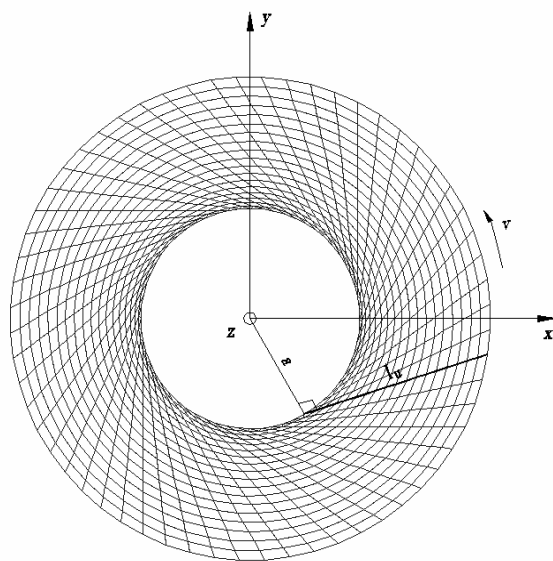


Рис. 2

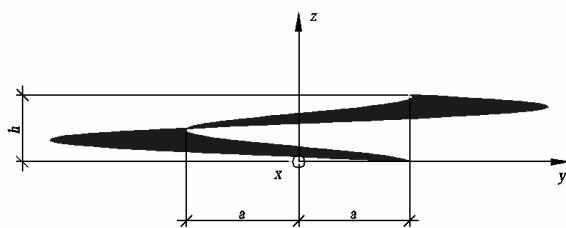


Рис. 3

Расчет:

Жесткостные характеристики:

Модуль упругости $E = 3.06 \cdot 10^6 \text{ т/м}^3$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$, толщина $h = 0.1 \text{ м}$.

Граничные условия:

Заделка по внутреннему и внешнему контуру, включая торцы.

Нагрузки:

Равномерно распределенная нагрузка, действующая вдоль оси oz $q = 1 \text{ т/м}^2$.

Деформированная схема:

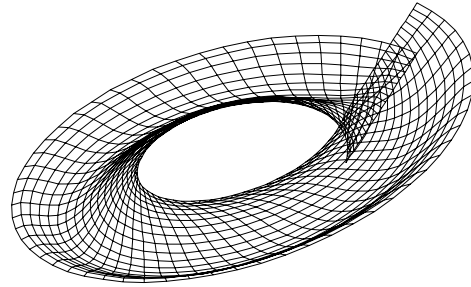


Рис. 4

Результаты расчета:

Изополя перемещений по Z, мм

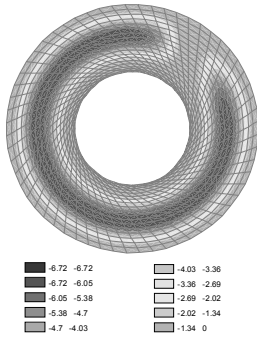


Рис. 5

Изополя напряжений $N_x, \text{ т/м}^2$

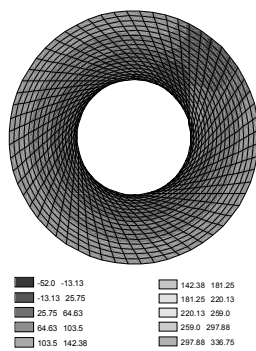


Рис. 6

Изополя напряжений $N_y, \text{ т/м}^2$

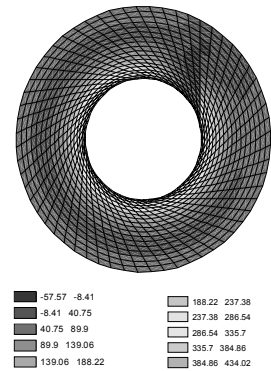


Рис. 7

Изополя напряжений $T_{xy}, \text{ т/м}^2$

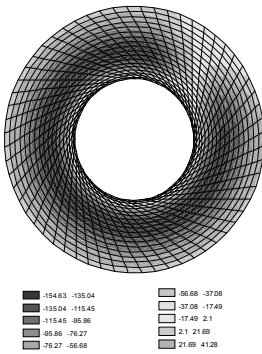


Рис. 8

Изополя напряжений $M_x, \text{ т} \cdot \text{м/м}$

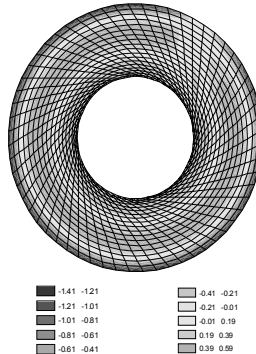


Рис. 9

Изополя напряжений $M_y, \text{ т} \cdot \text{м/м}$

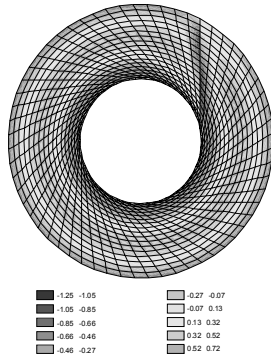


Рис. 10

Изополя напряжений $M_{xy}, \text{ т} \cdot \text{м/м}$

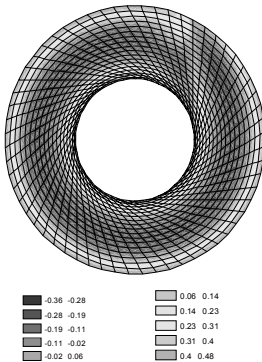


Рис. 11

Изополя напряжений $Q_x, \text{ т/м}$

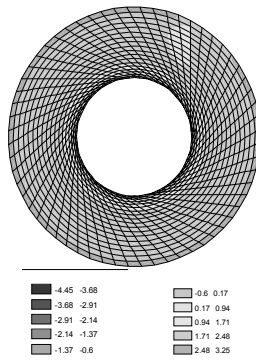


Рис. 12

Изополя напряжений $Q_y, \text{ т/м}$

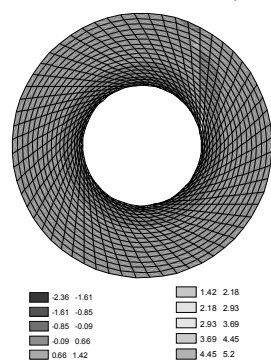


Рис. 13

ПАРАБОЛИЧЕСКИЙ КОНОИД

- линейчатая поверхность, образованная движением прямой, которая пересекает неподвижную прямую и неподвижную направляющую параболу. Образующая прямая остается параллельной фиксированной плоскости, которая перпендикулярна плоскости, в которой находится направляющая парабола, и проходит через ось параболы. Направляющая прямая перпендикулярна фиксированной плоскости.

Явная форма задания:

$$z = c \cdot (y^2 - b^2) \cdot (a - x) / (a \cdot b^2),$$

где c - вершина направляющей параболы; a - расстояние между направляющими параболой и прямой; $2 \cdot b$ - длина направляющей прямой/ проекции направляющей параболы.

Построение:

Примем $a = 40 \text{ м}$, $b = 10 \text{ м}$, $c = 10 \text{ м}$.

Тогда поверхность будет перекрывать план $2b \times a = 20 \times 40 \text{ м}$, уклон прямой образующей, проходящей через вершину направляющей параболы $\text{tg} \varphi = c/a = 0.25$, $\varphi = \text{arctg}(0.25) = 14^\circ 02'$.

Поверхность будем задавать в явном виде. Разбивку на конечные элементы примем треугольную, количество конечных элементов в направлении x - 40, y - 20.

Получаем уравнение задания поверхности в SCAD:

$$Z = -10 \cdot (y^2 - 10^2) \cdot (40 - x) / (40 \cdot 10^2);$$

$X_{\text{нач}} = 0$; $X_{\text{кон}} = 40$; $N_x = 40$.

$Y_{\text{нач}} = -10$; $Y_{\text{кон}} = 10$; $N_y = 20$.

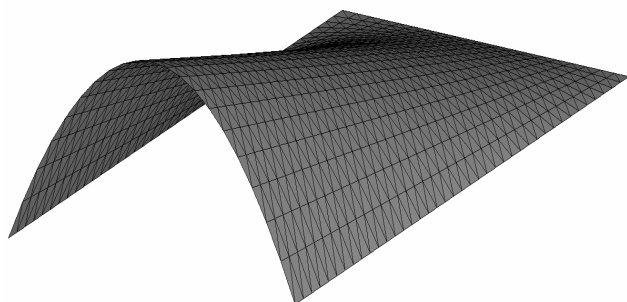


Рис. 1

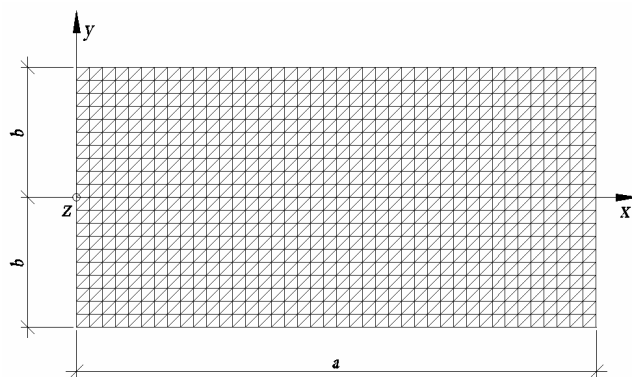


Рис. 2

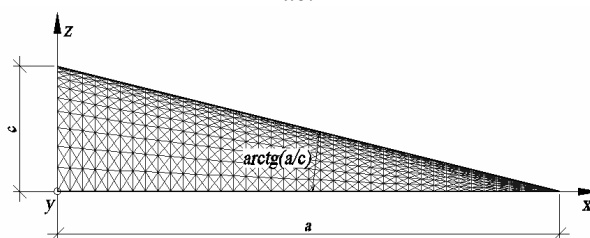


Рис. 3

Расчет:

Жесткостные характеристики:

Модуль упругости $E = 3.06 \cdot 10^6 \text{ т/м}^3$, коэффициент

Пуассона $\nu = 0.2$, толщина $h = 0.1 \text{ м}$.

Граничные условия:

Заделка по контуру.

Нагрузки:

Равномерно распределенная нагрузка, действующая вдоль оси oz $q = 1 \text{ т/м}^2$.

Деформированная схема:

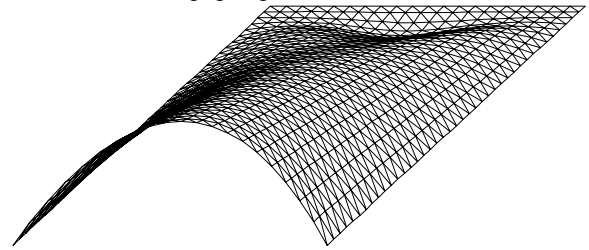


Рис. 4

Результаты расчета:

Изополя перемещений по Z, мм

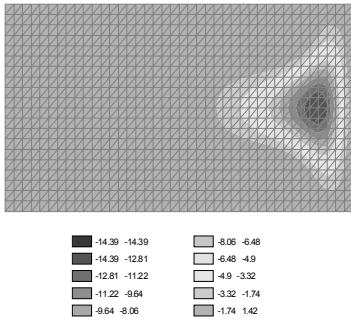


Рис. 5

Изополя напряжений N_x , т/м²

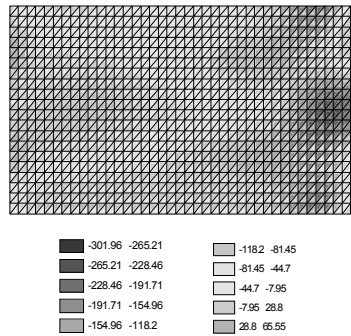


Рис. 6

Изополя напряжений N_y , т/м²

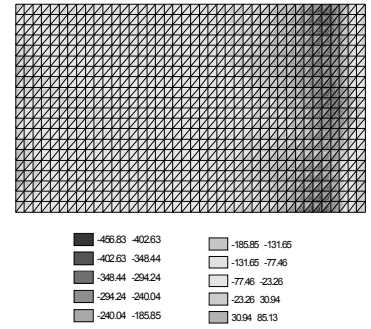


Рис. 7

Изополя напряжений T_{xy} , т/м²

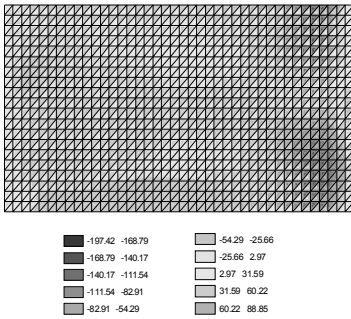


Рис. 8

Изополя напряжений M_x , т·м/м

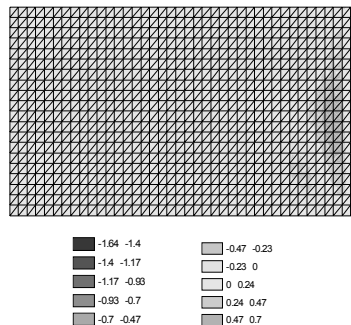


Рис. 9

Изополя напряжений M_y , т·м/м

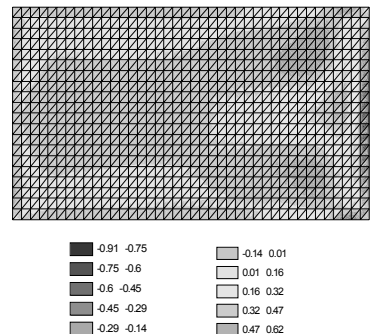


Рис. 10

Изополя напряжений M_{xy} , т·м/м

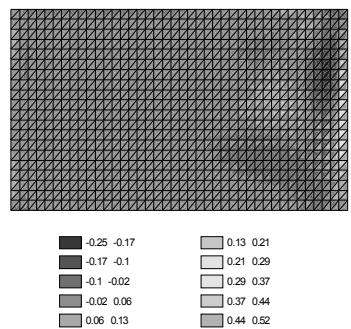


Рис. 11

Изополя напряжений Q_x , т/м

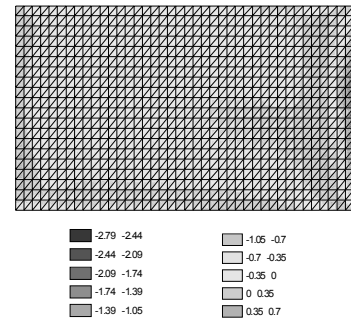


Рис. 12

Изополя напряжений Q_y , т/м

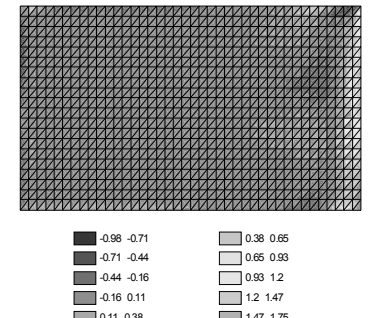


Рис. 13

КОНОИД С НАПРАВЛЯЮЩЕЙ ОКРУЖНОСТЬЮ

- линейчатая поверхность, образованная движением прямой, которая пересекает неподвижную прямую и неподвижную направляющую окружность. Образующая прямая остается параллельной фиксированной плоскости, которая перпендикулярна плоскости, в которой находится направляющая окружность, и перпендикулярна оси коноида. Коноид с направляющей окружностью является поверхностью отрицательной гауссовой кривизны, которая задана в криволинейных неортогональных несопряженных координатах x, y .

Явная форма задания:

$$z = \frac{x}{l} \cdot (a - f - \sqrt{a^2 - y^2}),$$

где a - радиус направляющей окружности; f - расстояние от вершины окружности, лежащей в плоскости $x = l$, до плоскости $z = 0$. Коноид перекрывает прямоугольный план $l \times 2\sqrt{f(2a-f)}$, $-\sqrt{f(2a-f)} \leq y \leq \sqrt{f(2a-f)}$.

Построение:

Примем $a = 10 \text{ м}, l = 40 \text{ м}, f = 10 \text{ м}$.

Тогда поверхность будет перекрывать план $l \times 2\sqrt{f(2a-f)} = 40 \times 2\sqrt{10 \cdot (2 \cdot 10 - 10)} = 40 \times 20 \text{ м}$, уклон прямой образующей, проходящей через вершину направляющей окружности $\text{tg} \varphi = f/l = 0.25$, $\varphi = \text{arctg}(0.25) = 14^\circ 02'$.

Разбивку на конечные элементы примем треугольную, количество конечных элементов в направлении образующей x - 40, направляющей y - 20.

Получаем уравнение задания поверхности в SCAD:

$$Z = -x/40 \cdot (10 - 10 - \sqrt{10^2 - y^2});$$

$$X_{\text{нач}} = 0; X_{\text{кон}} = 40; N_x = 40.$$

$$Y_{\text{нач}} = -10; Y_{\text{кон}} = 10; N_y = 20.$$

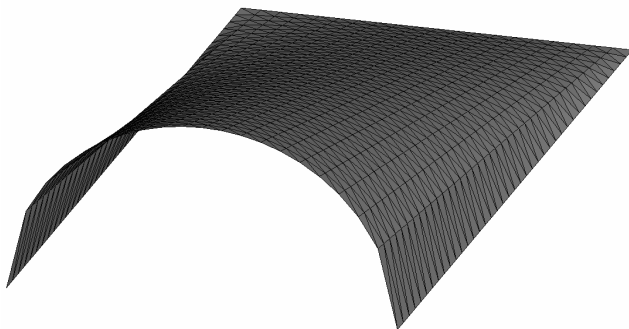


Рис. 1

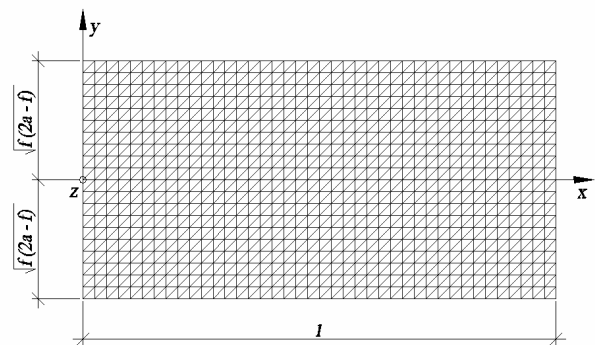


Рис. 2

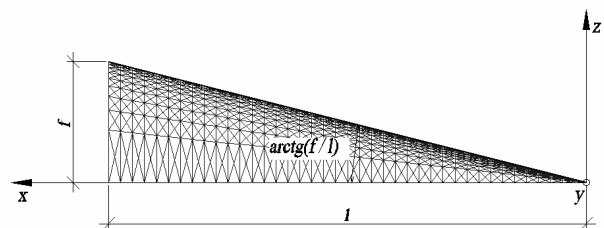


Рис. 3

Расчет:

Жесткостные характеристики:

Модуль упругости $E = 3.06 \cdot 10^6 \text{ т/м}^3$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$, толщина $h = 0.1 \text{ м}$.

Граничные условия:

Заделка по контуру.

Нагрузки:

Равномерно распределенная нагрузка, действующая вдоль оси oz $q = 1 \text{ т/м}^2$.

Деформированная схема:

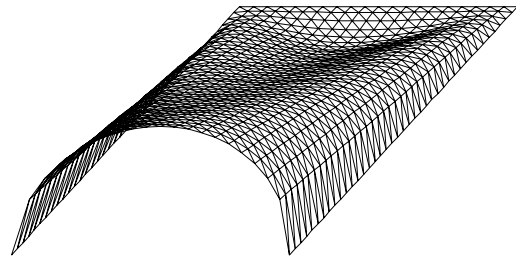


Рис. 4

Результаты расчета:

Изополя перемещений по Z, мм

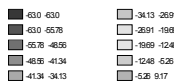
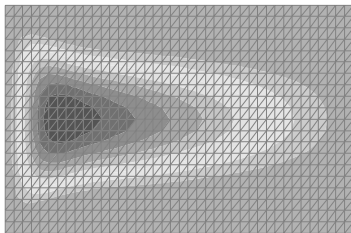


Рис. 5

Изополя напряжений N_x , т/м²

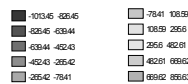
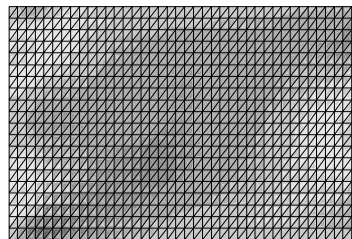


Рис. 6

Изополя напряжений N_y , т/м²

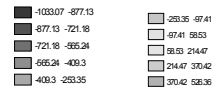
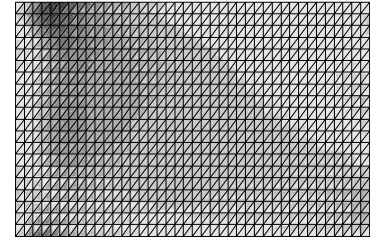


Рис. 7

Изополя напряжений T_{xy} , т/м²

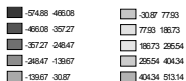
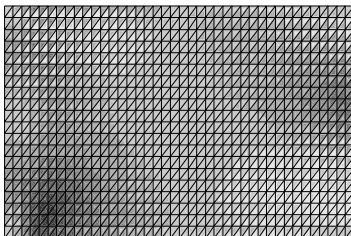


Рис. 8

Изополя напряжений M_x , т·м/м

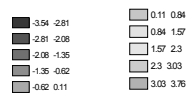
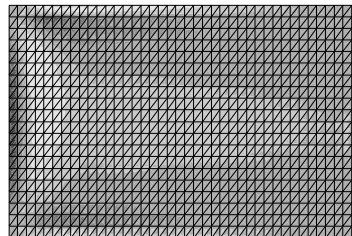


Рис. 9

Изополя напряжений M_y , т·м/м

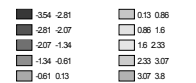
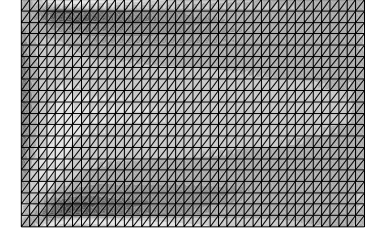


Рис. 10

Изополя напряжений M_{xy} , т·м/м

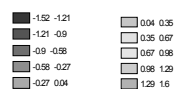
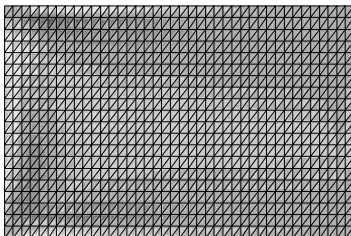


Рис. 11

Изополя напряжений Q_x , т/м

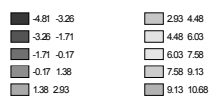
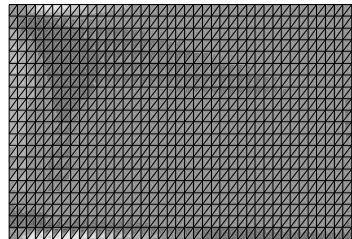


Рис. 12

Изополя напряжений Q_y , т/м

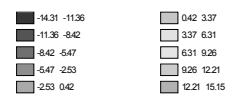
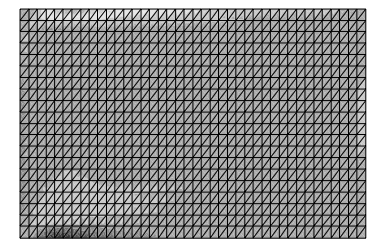


Рис. 13

ПРЯМОЙ СИНУСОИДАЛЬНЫЙ КОНОИД

- линейчатая поверхность, образованная движением прямой, которая пререскает неподвижную прямую и неподвижную направляющую синусоиду. Образующая прямая остается параллельной фиксированной плоскости, которая перпендикулярна плоскости, в которой находится направляющая синусоида, и перпендикулярна фиксированной прямой. Неподвижная прямая направляющая является осью коноида.

Явная форма задания:

$$z = \frac{l-x}{l} \cdot \left(a \cdot \cos \frac{n \cdot \pi \cdot y}{b} + c \right),$$

где a - амплитуда синусоиды; n - число целых полувольт синусоиды, помещающихся на отрезке длиной b ; l - расстояние от оси коноида до плоскости с направляющей синусоидой.

Построение:

Примем $a = 5 \text{ м}$, $b = 20 \text{ м}$, $l = 40 \text{ м}$.

Число целых полувольт синусоиды, помещающихся на отрезке длиной $b = 20 \text{ м}$ примем $n = 6$.

Тогда поверхность будет перекрывать план $l \times b/2 = 40 \times 20 \text{ м}$, уклон прямой образующей, проходящей через вершины синусоиды $\text{tg} \varphi = f/l = 0.25$, $\varphi = \text{arctg}(0.25) = 14^\circ 02'$.

Разбивку на конечные элементы примем треугольную, количество конечных элементов в направлении образующей x - 40, направляющей y - 20.

Получаем уравнение задания поверхности в SCAD:

$$Z = (40-x)/40 \cdot (5 \cdot \cos(6 \cdot 180 \cdot y/20) + 5);$$

$X_{\text{нач}}=0$; $X_{\text{кон}}=40$; $N_x=40$.

$Y_{\text{нач}}=-10$; $Y_{\text{кон}}=10$; $N_y=20$.

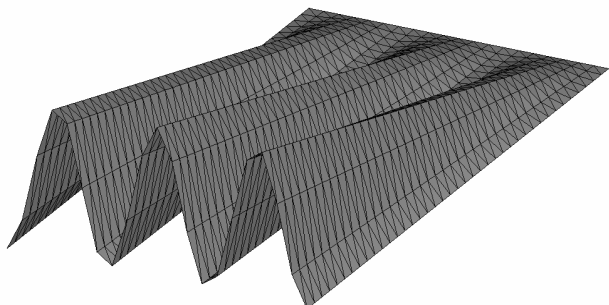


Рис. 1

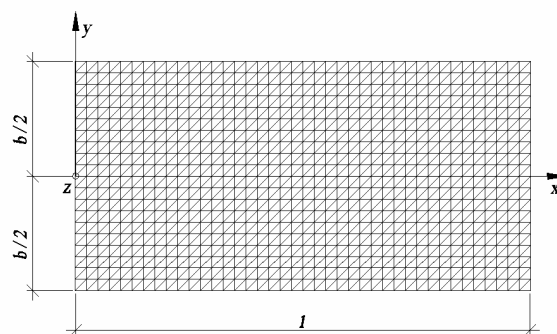


Рис. 2

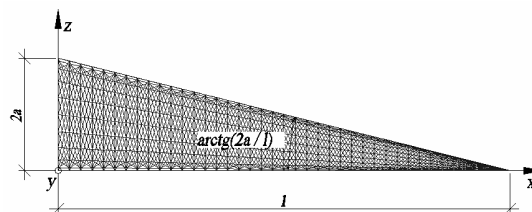


Рис. 3

Расчет:

Жесткостные характеристики:

Модуль упругости $E = 3.06 \cdot 10^6 \text{ т/м}^3$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$, толщина $h = 0.1 \text{ м}$.

Граничные условия:

Заделка по контуру.

Нагрузки:

Равномерно распределенная нагрузка, действующая вдоль оси oz $q = 1 \text{ т/м}^2$.

Деформированная схема:

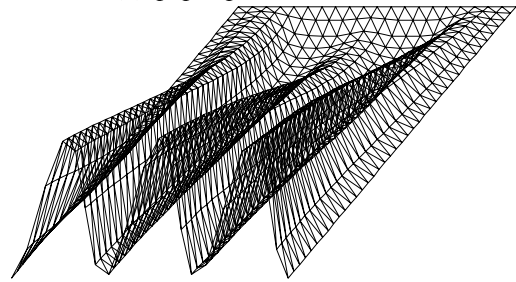


Рис. 4

Результаты расчета:

Изополя перемещений по Z, мм

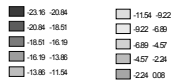
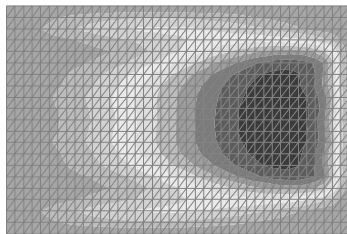


Рис. 5

Изополя напряжений N_x , т/м²

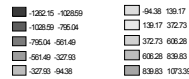
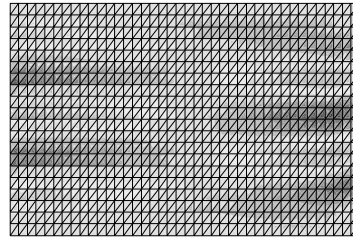


Рис. 6

Изополя напряжений N_y , т/м²

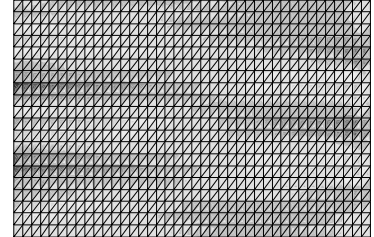


Рис. 7

Изополя напряжений T_{xy} , т/м²

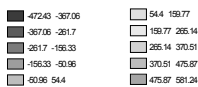
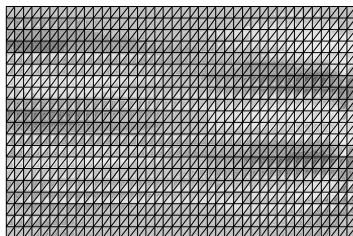


Рис. 8

Изополя напряжений M_x , т·м/м

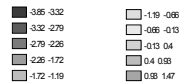
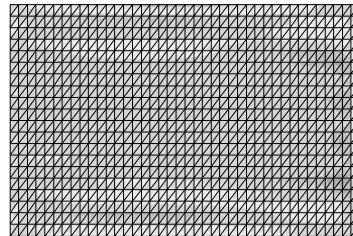


Рис. 9

Изополя напряжений M_y , т·м/м

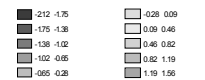
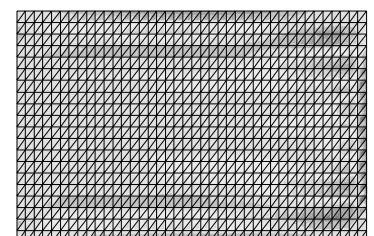


Рис. 10

Изополя напряжений M_{xy} , т·м/м

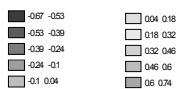
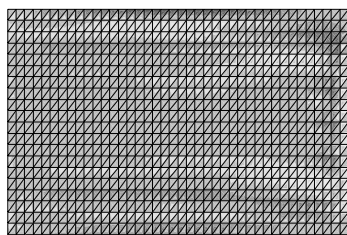


Рис. 11

Изополя напряжений Q_x , т/м

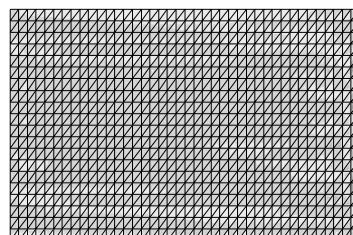


Рис. 12

Изополя напряжений Q_y , т/м

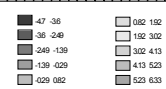
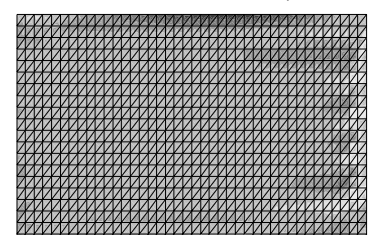


Рис. 13

ЦИЛИНДРОИД С ДВУМЯ НАПРАВЛЯЮЩИМИ ЭЛЛИПСАМИ

- линейчатая поверхность, образованная движением прямолинейной образующей по двум криволинейным направляющим в виде эллипсов ($x=a, \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ и $x=0, \frac{y^2}{d^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$), причем во всех положениях образующая прямая параллельна плоскости параллелизма xoy .

Параметрическая форма задания:

$$\begin{aligned} x &= a - a \cdot \lambda, \\ y &= (b - \lambda \cdot (b - d)) \cdot \cos u, \\ z &= c \cdot \sin u, \end{aligned}$$

где a - расстояние между плоскостями направляющих эллипсов; b, c и d, c - геометрические параметры первого и второго эллипса; $0 \leq \lambda \leq 1$.

Построение:

Примем $a = 40$ м, $b = 10$ м, $d = 5$ м, $c = 10$ м.

Пусть параметр u изменяется в интервале $[0; 180]$, где 180° - угол, огибаемый направляющими эллипсами вокруг оси oz .

Параметр λ изменяется в интервале $[0; 1]$.

Тогда параметры u, λ выражаются через переменные s, t следующим образом: $\lambda \rightarrow t, u \rightarrow 180 \cdot s$.

Разбивку на конечные элементы примем четырехугольную, количество конечных элементов в направлении λ - 20, u - 20.

Получаем уравнения задания поверхности в SCAD:

$$\begin{aligned} X &= 40 - 40 \cdot t; \\ Y &= (10 - t \cdot (10 - 5)) \cdot \cos(180 \cdot s); \\ Z &= 10 \cdot \sin(180 \cdot s); \\ Ns &= 20; Nt = 20. \end{aligned}$$

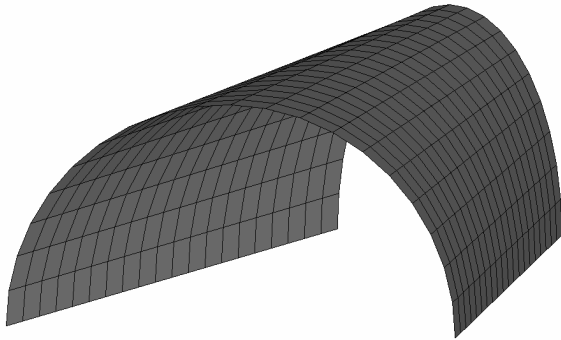


Рис. 1

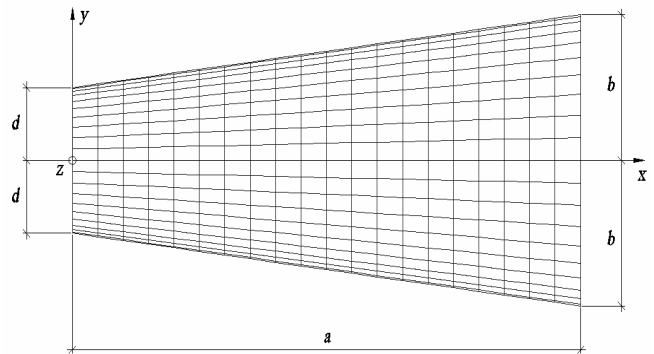


Рис. 2

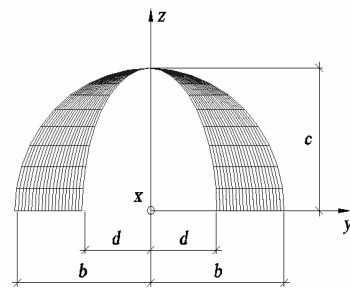


Рис. 3

Расчет:

Жесткостные характеристики:

Модуль упругости $E = 3.06 \cdot 10^6 \text{ т/м}^3$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$, толщина $h = 0.1 \text{ м}$.

Граничные условия:

Заделка по контуру, включая торцы.

Нагрузки:

Равномерно распределенная нагрузка, действующая вдоль оси oz $q = 1 \text{ т/м}^2$.

Деформированная схема:

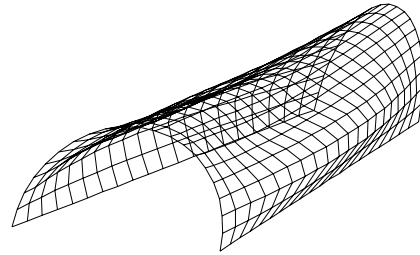


Рис. 4

Результаты расчета:

Изополю перемещений по Z, мм

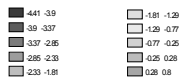
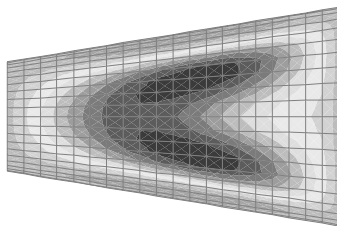


Рис. 5

Изополю напряжений N_x , т/м²

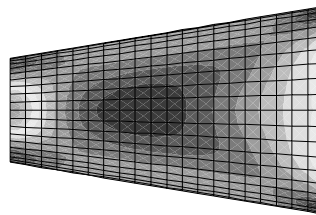


Рис. 6

Изополю напряжений N_y , т/м²

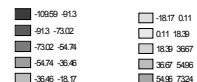
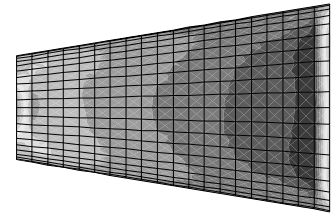


Рис. 7

Изополю напряжений T_{xy} , т/м²

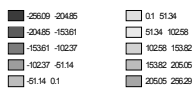
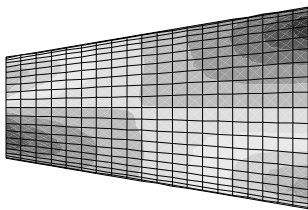


Рис. 8

Изополю напряжений M_x , т·м/м

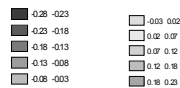
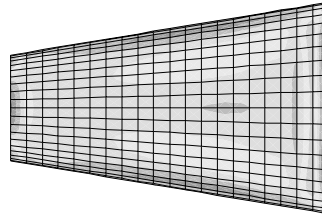


Рис. 9

Изополю напряжений M_y , т·м/м

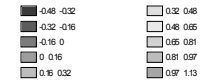
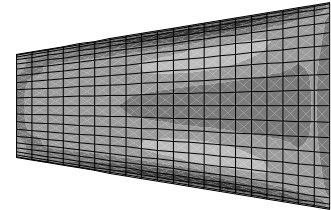


Рис. 10

Изополю напряжений M_{xy} , т·м/м

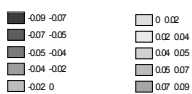
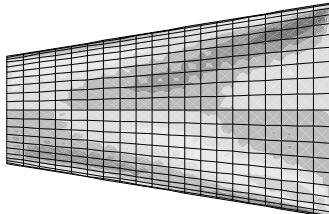


Рис. 11

Изополю напряжений Q_x , т/м

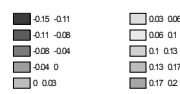
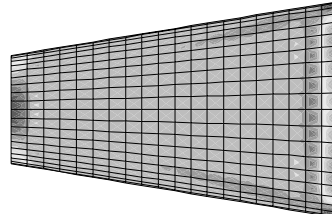


Рис. 12

Изополю напряжений Q_y , т/м

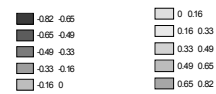
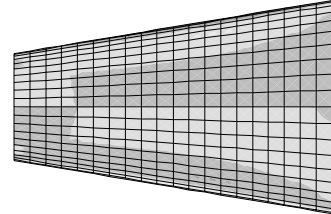


Рис. 13

ОДНОПОЛОСТНЫЙ ГИПЕРБОЛОИД ВРАЩЕНИЯ

- поверхность, полученная вращением гиперболы $x^2/a^2 - z^2/c^2 = 1$ вокруг оси oz . Это дважды линейчатая поверхность. Через каждую точку поверхности проходят две прямые, лежащие целиком на гиперboloиде. Параллель, лежащая в плоскости $z=0$, имеет радиус $r=a$ и называется горловой окружностью. Координатные линии v совпадают с прямолинейными образующими гиперboloида. Координатные линии u являются параллелями гиперboloида.

Параметрическая форма задания:

$$x = -a \cdot \sin u \pm a \cdot v \cdot \cos u,$$

$$y = a \cdot \cos u \pm a \cdot v \cdot \sin u,$$

$$z = \pm c \cdot v,$$

где a - радиус горловой окружности; c - расстояние от горловой окружности до параллели, ограничивающей поверхность ($2c$ - высота гиперboloида).

Построение:

Пусть радиус горловой окружности $a = 5 \text{ м}$.

Высота поверхности $2 \cdot c = 10 \text{ м}$, откуда $c = 5 \text{ м}$.

Тогда параметр v изменяется в интервале $[0; 1]$, а

параметр u изменяется в интервале $[0; 360]$, где 360°

- угол, огибаемый горловым кольцом вокруг оси oz .

Тогда параметры u, v выражаются через переменные s, t следующим образом: $v \rightarrow t, u \rightarrow 360 \cdot s$.

Разбивку на конечные элементы примем четырехугольную, количество конечных элементов в направлении v - 10, u - 30.

Создаются две поверхности с верхними и нижними знаками в параметрических уравнениях, которые потом собираются.

Получаем уравнения задания поверхности в SCAD:

1:

$$X = -5 \cdot \sin(360 \cdot s) + 5 \cdot t \cdot \cos(360 \cdot s);$$

$$Y = 5 \cdot \cos(360 \cdot s) + 5 \cdot t \cdot \sin(360 \cdot s);$$

$$Z = 5 \cdot t;$$

2:

$$X = -5 \cdot \sin(360 \cdot s) - 5 \cdot t \cdot \cos(360 \cdot s);$$

$$Y = 5 \cdot \cos(360 \cdot s) - 5 \cdot t \cdot \sin(360 \cdot s);$$

$$Z = -5 \cdot t;$$

$$Ns = 30; Nt = 10.$$

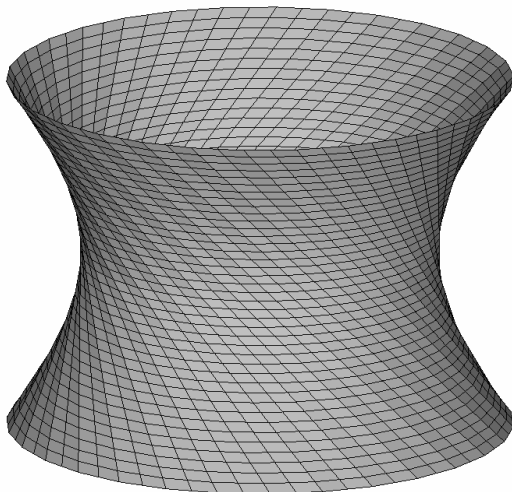


Рис. 1

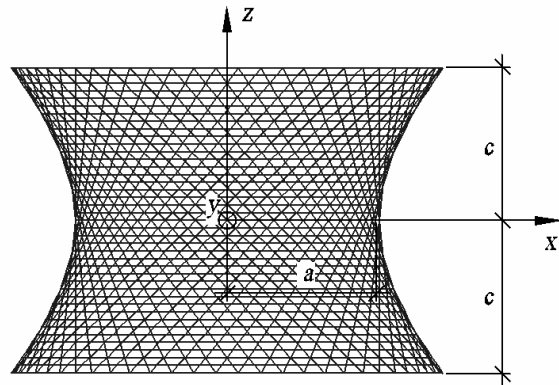


Рис. 2

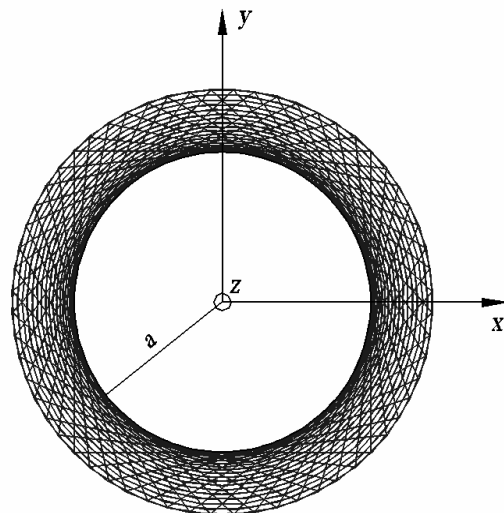


Рис. 3

Расчет:

Жесткостные характеристики:

Модуль упругости $E = 3.06 \cdot 10^6 \text{ т/м}^3$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$, толщина $h = 0.1 \text{ м}$.

Граничные условия:

Заделка по верхнему и нижнему контуру.

Нагрузки:

Равномерно распределенная нагрузка, действующая вдоль местной оси oz от центра $q = 1 \text{ т/м}^2$.

Деформированная схема:

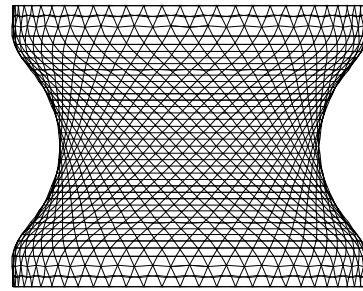


Рис. 4

Результаты расчета:

Изополя перемещений по X, мм

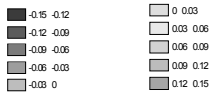
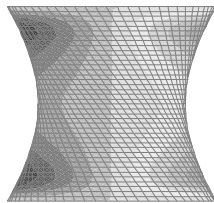


Рис. 5

Изополя напряжений $N_x, \text{ т/м}^2$

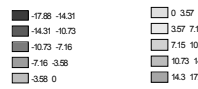
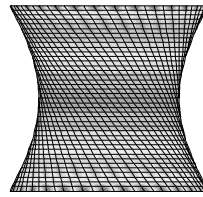


Рис. 6

Изополя напряжений $N_y, \text{ т/м}^2$

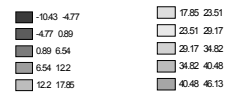
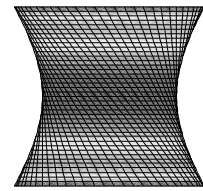


Рис. 7

Изополя напряжений $T_{xy}, \text{ т/м}^2$

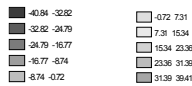
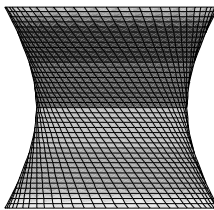


Рис. 8

Изополя напряжений $M_x, \text{ т} \cdot \text{м/м}$

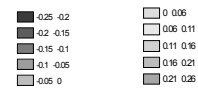
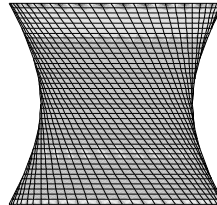


Рис. 9

Изополя напряжений $M_y, \text{ т} \cdot \text{м/м}$

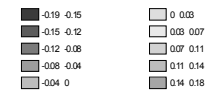
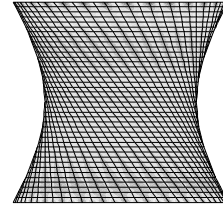


Рис. 10

Изополя напряжений $M_{xy}, \text{ т} \cdot \text{м/м}$

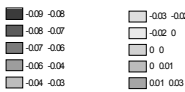
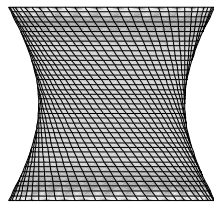


Рис. 11

Изополя напряжений $Q_x, \text{ т/м}$

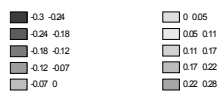
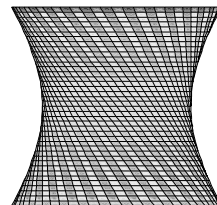


Рис. 12

Изополя напряжений $Q_y, \text{ т/м}$

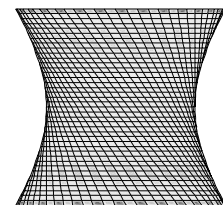


Рис. 13

ПАРАБОЛОИД ВРАЩЕНИЯ

- поверхность, полученная вращением параболы $z = \frac{x^2}{2 \cdot p}$ вокруг оси oz . Поверхность можно также получить движением подвижной параболы $z = \frac{y^2}{2 \cdot p}$ вдоль неподвижной $z = \frac{x^2}{2 \cdot p}$. При этом необходимо, чтобы вершина подвижной параболы скользила по неподвижной, а плоскость и ось подвижной параболы оставались параллельными. Обе параболы должны быть обращены вогнутостью в одну сторону.

Параметрическая форма задания:

$$x = r \cdot \cos \beta,$$

$$y = r \cdot \sin \beta,$$

$$z = r^2 / (2 \cdot p),$$

где параметр β отсчитывает угол вращения параболы вокруг оси oz .

Построение:

Предположим, что диаметр опорного контура должен быть 20 м. Тогда уравнение образующей параболы

$$z = \frac{x^2}{2 \cdot 5}.$$

Высота поверхности 10 м.

Параметр r изменяется в интервале $[0; 10]$, где 10 м - высота поверхности, а параметр β изменяется в интервале $[0; 360]$, где 360° - угол, огибаемый образующей параболой вокруг оси oz . Тогда параметры r, β выражаются через переменные s, t следующим образом: $r \rightarrow 10 \cdot t, \beta \rightarrow 360 \cdot s$.

Разбивку на конечные элементы примем четырехугольную, количество конечных элементов в направлении r - 20, β - 60.

Полученную поверхность следует повернуть вокруг оси oy на 180° .

Получаем уравнения задания поверхности в SCAD:

$$X = 10 * t * \cos(360 * s);$$

$$Y = 10 * t * \sin(360 * s);$$

$$Z = (10 * t) ** 2 / (2 * 5);$$

$$Ns = 60; Nt = 20.$$

Примечание: Вблизи вершины конуса четырехугольные конечные элементы вырождаются в треугольные, что является ошибкой расчетной схемы. Проблема решается удалением указанных элементов и добавлением стержневых конечных элементов, образующих вершину конуса.

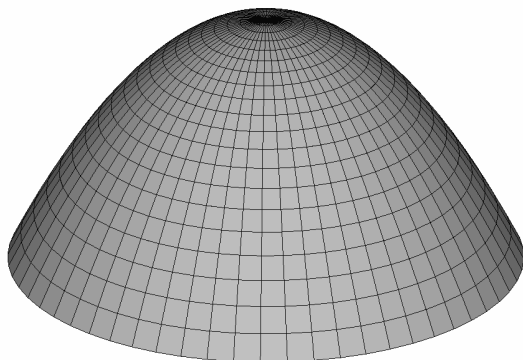


Рис. 1

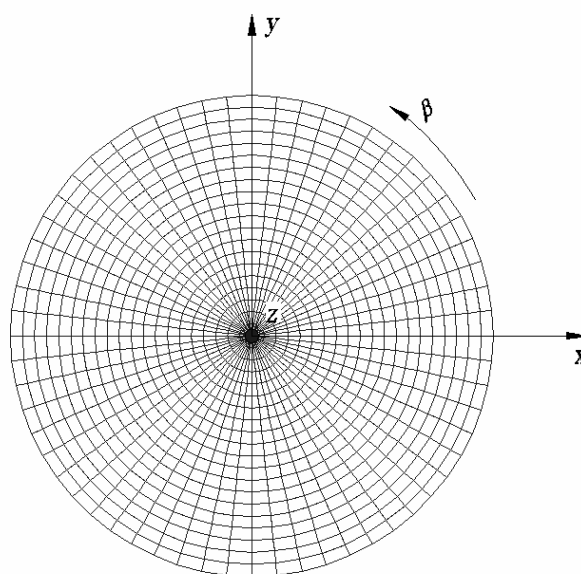


Рис. 2

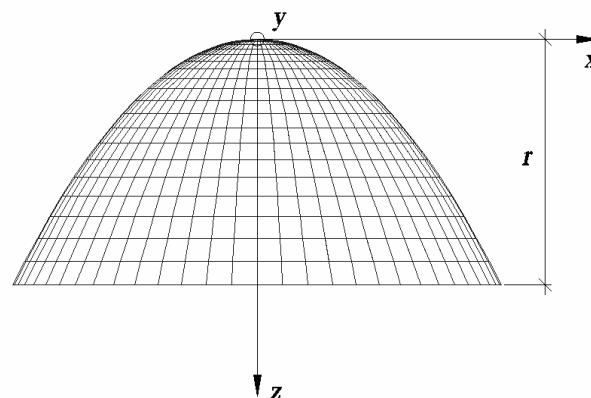


Рис. 3

Расчет:

Жесткостные характеристики:

Модуль упругости $E = 3.06 \cdot 10^6 \text{ т/м}^3$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$, толщина $h = 0.1 \text{ м}$.

Граничные условия:

Заделка по контуру.

Нагрузки:

Равномерно распределенная нагрузка, действующая вдоль оси oz $q = 1 \text{ т/м}^2$.

Деформированная схема:

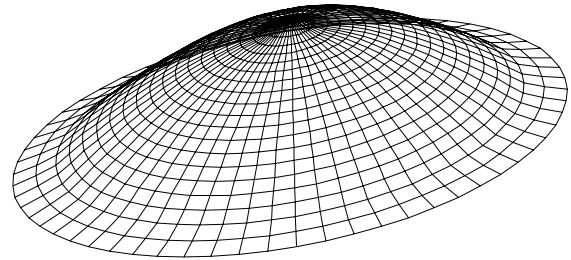


Рис. 4

Результаты расчета:

Изополя перемещений по Z, мм

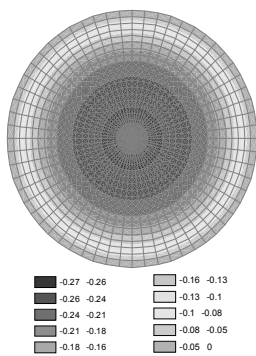


Рис. 5

Изополя напряжений $N_x, \delta / \delta^2$

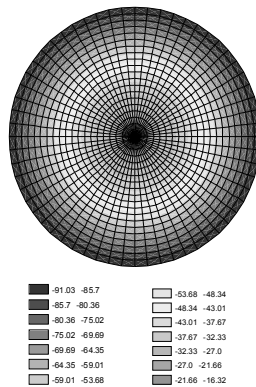


Рис. 6

Изополя напряжений $N_y, \delta / \delta^2$

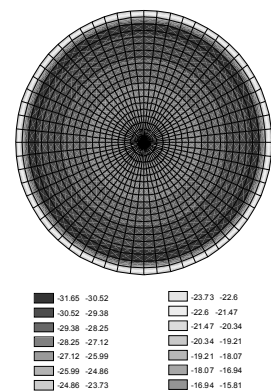


Рис. 7

Изополя напряжений $T_{xy}, \delta / \delta^2$

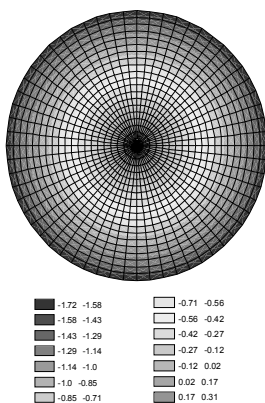


Рис. 8

Изополя напряжений $M_x, \delta \cdot \delta / \delta^2$

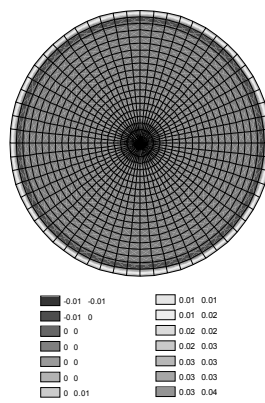


Рис. 9

Изополя напряжений $M_y, \delta \cdot \delta / \delta^2$

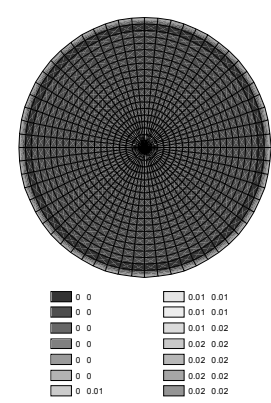
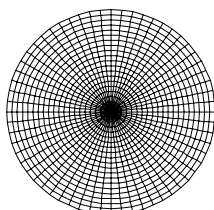


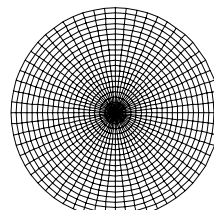
Рис. 10

Изополя напряжений $M_{xy}, \delta \cdot \delta / \delta^2$



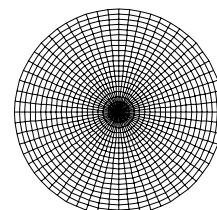
$M_{xy} = 0$
Рис. 11

Изополя напряжений $Q_x, \delta / \delta^2$



$Q_x = 0$
Рис. 12

Изополя напряжений $Q_y, \delta / \delta^2$



$Q_y = 0$
Рис. 13

КРУГОВОЙ ТОР

- поверхность, полученная вращением окружности $(x-a)^2 + z^2 = b^2$ вокруг оси oz . При этом ось oz может находиться как за пределами вращающейся окружности (открытый тор), так и внутри нее (закрытый тор).

Параметрическая форма задания:

$$x = (a + b \cos v) \cos u,$$

$$y = (a + b \cos v) \sin u,$$

$$z = b \sin v,$$

где a - расстояние от оси вращения до центра образующей окружности; b - радиус образующей окружности, угол u называют внутренней широтой точки тора; $0 \leq u \leq 2\pi$; $0 \leq v \leq 2\pi$; отношение b/a - эксцентриситет тора.

Построение:

Принимаем радиус образующей окружности $b=10$ м, расстояние $a=15$ м.

Пусть параметр u изменяется в интервале $[0; 360]$, где 360° - угол, огибаемый образующей окружностью вокруг оси oz , а параметр v изменяется в интервале $[0; 180]$, где 180° - угол, огибаемый образующей окружностью вокруг своей оси. Тогда параметры u, v выражаются через переменные s, t следующим образом: $u \rightarrow 360 \cdot t$, $v \rightarrow 180 \cdot s$.

Разбивку на конечные элементы примем четырехугольную, количество конечных элементов в направлении u - 60, v - 20.

Получаем уравнения задания поверхности в SCAD:

$$X = (15 + 10 \cdot \cos(180 \cdot s)) \cdot \cos(360 \cdot t);$$

$$Y = (15 + 10 \cdot \cos(180 \cdot s)) \cdot \sin(360 \cdot t);$$

$$Z = 10 \cdot \sin(180 \cdot s);$$

$$Ns = 20; Nt = 60.$$

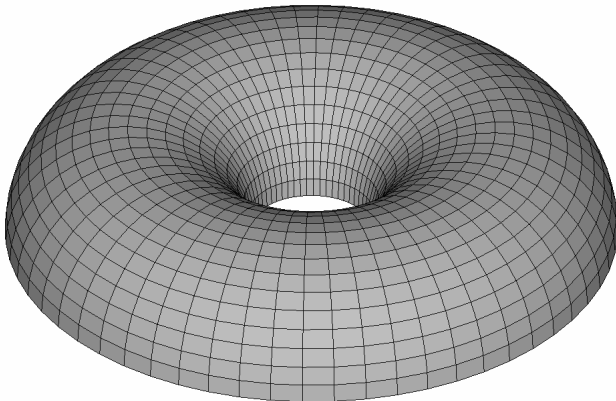


Рис. 1

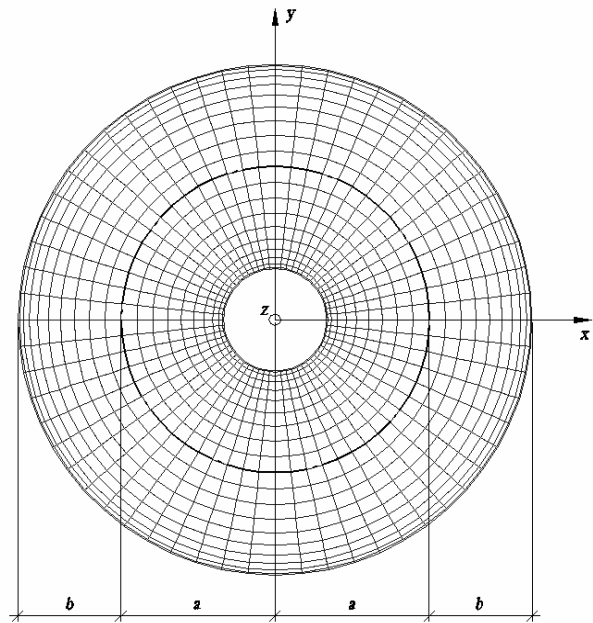


Рис. 2

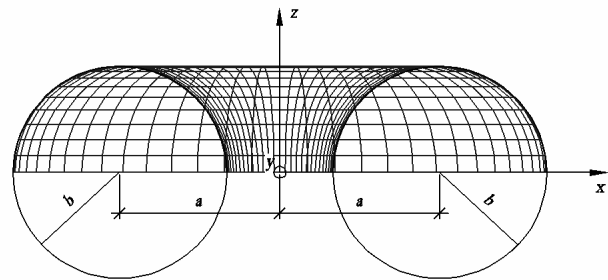


Рис. 3

Расчет:

Жесткостные характеристики:

Модуль упругости $E = 3.06 \cdot 10^6 \text{ т/м}^3$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$, толщина $h = 0.1 \text{ м}$.

Граничные условия:

Заделка по внутреннему и внешнему контуру.

Нагрузки:

Равномерно распределенная нагрузка, действующая вдоль оси oz $q = 1 \text{ т/м}^2$.

Деформированная схема:

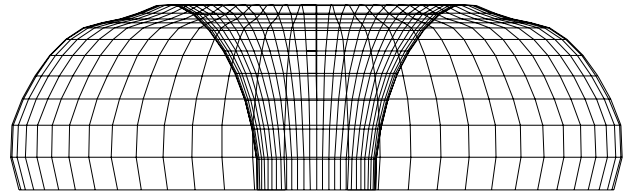


Рис. 4

Результаты расчета:

Изополя перемещений по Z, мм

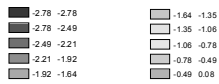
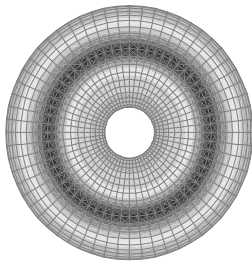


Рис. 5

Изополя напряжений $N_x, \text{ т/м}^2$

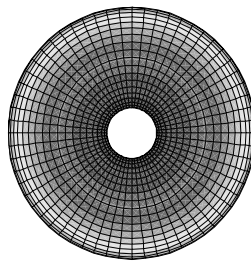


Рис. 6

Изополя напряжений $N_y, \text{ т/м}^2$

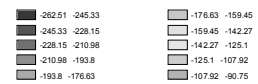
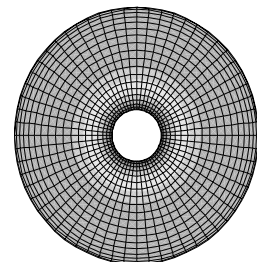
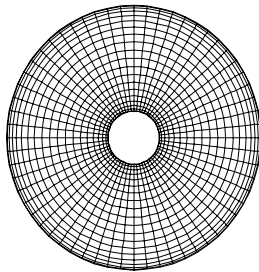


Рис. 7

Изополя напряжений $T_{xy}, \text{ т/м}^2$



$T_{xy} = 0$

Рис. 8

Изополя напряжений $M_x, \text{ т} \cdot \text{м/м}$

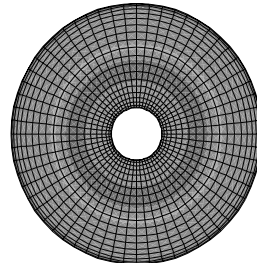


Рис. 9

Изополя напряжений $M_y, \text{ т} \cdot \text{м/м}$

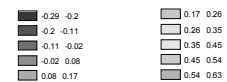
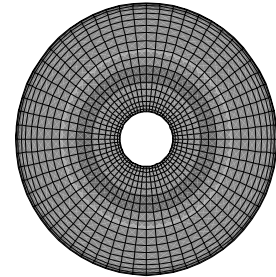
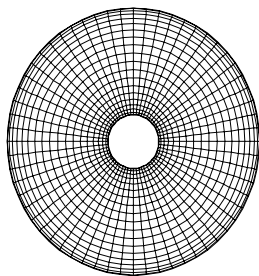


Рис. 10

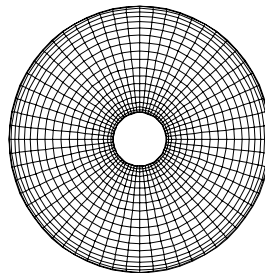
Изополя напряжений $M_{xy}, \text{ т} \cdot \text{м/м}$



$M_{xy} = 0$

Рис. 11

Изополя напряжений $Q_x, \text{ т/м}$



$Q_x = 0$

Рис. 12

Изополя напряжений $Q_y, \text{ т/м}$

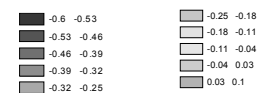
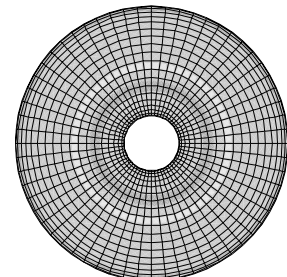


Рис. 13

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ТОР

- поверхность, полученная вращением эллипса произвольного положения $x = a + r \cdot \cos v, z = r \cdot \sin v$, где $r = \frac{cb}{\sqrt{b^2 \sin^2 \beta + c^2 \cos^2 \beta}}$, а $\beta = v - \theta$, вокруг оси oz . $\theta = const$ - угол наклона полуоси эллипса ξ к плоскости xoy . При этом ось oz может находиться как за пределами вращающегося эллипса (открытый тор), так и внутри него (закрытый тор).

Параметрическая форма задания:

$$x = (a + r \cos v) \cos u,$$

$$y = (a + r \cos v) \sin u,$$

$$z = r \sin v,$$

где a - расстояние от оси вращения до точки пересечения осей ξ и η образующего эллипса; r - расстояние от точки пересечения осей эллипса до произвольной точки M_o , принадлежащей эллипсу; b, c - полуоси эллипса; $0 \leq u \leq 2\pi$; $0 \leq v \leq 2\pi$; u - угол, отсчитываемый от оси ox в сторону оси oy .

Построение:

Принимаем полуоси эллипса $b=10$ м, $c=5$ м, угол наклона полуоси эллипса ξ к плоскости xoy $\theta = 45^\circ$, расстояние $a=15$ м. Тогда

$$r = \frac{5 \cdot 10}{\sqrt{10^2 \sin^2(v - 45^\circ) + 5^2 \cos^2(v - 45^\circ)}}$$

Пусть параметр u изменяется в интервале $[0; 360]$, где 360° - угол, огибаемый образующим эллипсом вокруг оси oz , а параметр v изменяется в интервале $[0; 180]$, где 180° - угол, огибаемый образующим эллипсом вокруг своей оси. Тогда параметры u, v выражаются через переменные s, t следующим образом:

$$u \rightarrow 360 \cdot t, \quad v \rightarrow 180 \cdot s.$$

Разбивку на конечные элементы примем четырехугольную, количество конечных элементов в направлении образующей u - 60, направляющей v - 20.

Получаем уравнения задания поверхности в SCAD:
 $X = (15 + (50/\sqrt{100 * (\sin(180 * s - 45))^{**2} + 25 * (\cos(180 * s - 45))^{**2}})) * \cos(180 * s) * \cos(360 * t);$
 $Y = (15 + (50/\sqrt{100 * (\sin(180 * s - 45))^{**2} + 25 * (\cos(180 * s - 45))^{**2}})) * \cos(180 * s) * \sin(360 * t);$
 $Z = (50/\sqrt{100 * (\sin(180 * s - 45))^{**2} + 25 * (\cos(180 * s - 45))^{**2}}) * \sin(180 * s);$
 $Ns = 20; Nt = 60.$

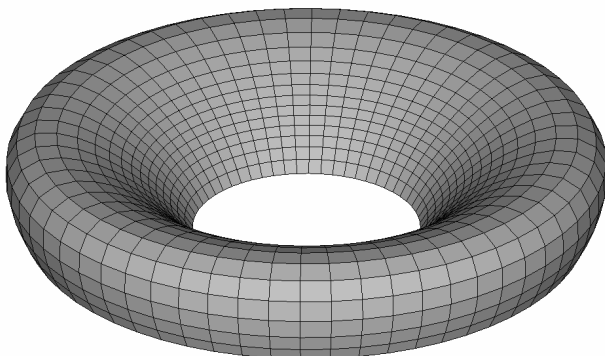


Рис. 1

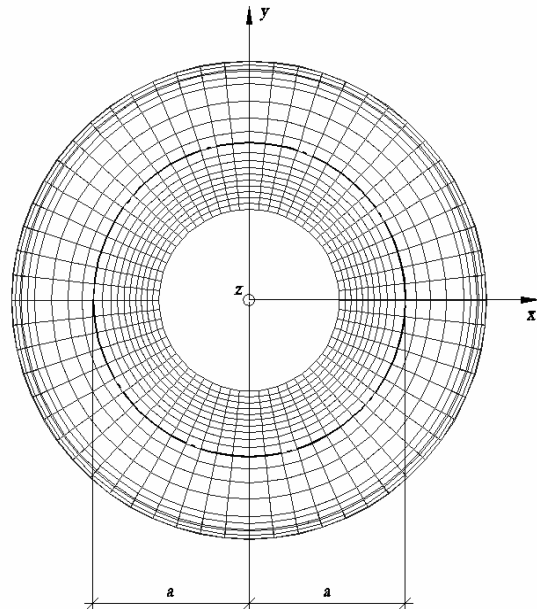


Рис. 2

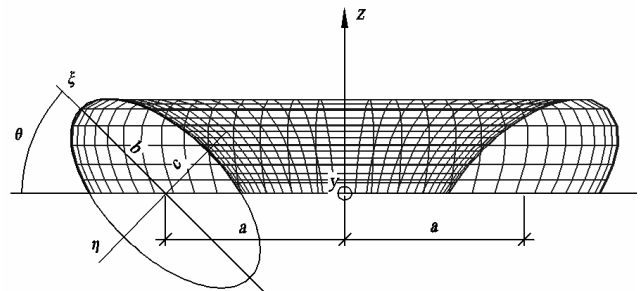


Рис. 3

Расчет:

Жесткостные характеристики:

Модуль упругости $E = 3.06 \cdot 10^6 \text{ т/м}^3$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$, толщина $h = 0.1 \text{ м}$.

Граничные условия:

Заделка по внутреннему и внешнему контуру.

Нагрузки:

Равномерно распределенная нагрузка, действующая вдоль оси oz $q = 1 \text{ т/м}^2$.

Деформированная схема:

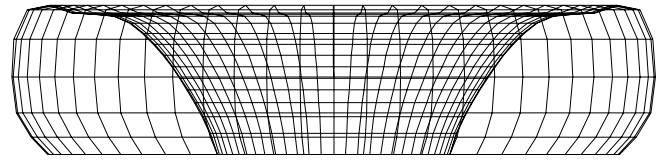


Рис. 4

Результаты расчета:

Изополю перемещений по Z, мм

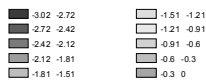
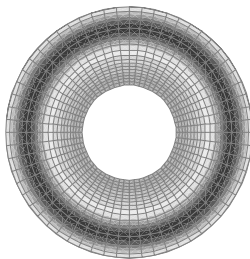


Рис. 5

Изополю напряжений N_x , т/м²

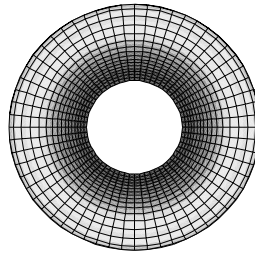


Рис. 6

Изополю напряжений N_y , т/м²

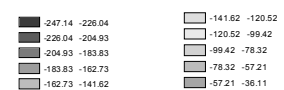
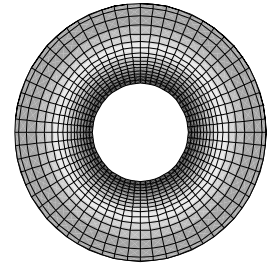
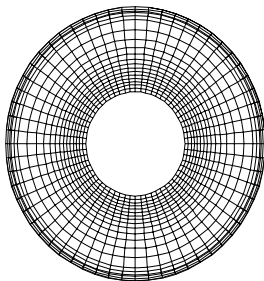


Рис. 7

Изополю напряжений T_{xy} , т/м²



$T_{xy} = 0$

Рис. 8

Изополю напряжений M_x , т·м/м

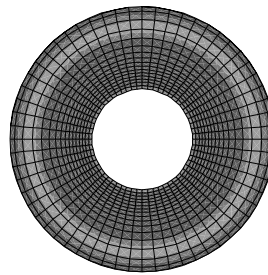


Рис. 9

Изополю напряжений M_y , т·м/м

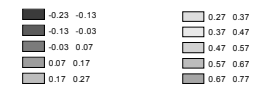
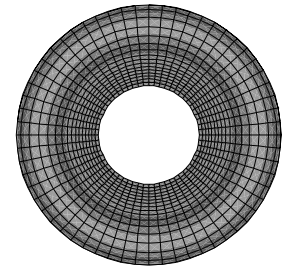
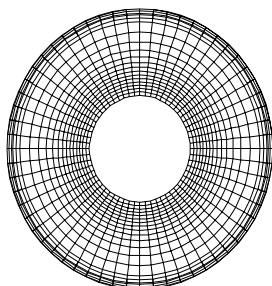


Рис. 10

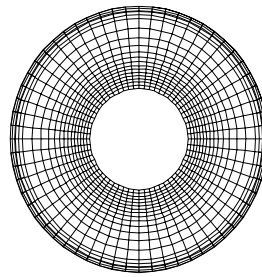
Изополю напряжений M_{xy} , т·м/м



$M_{xy} = 0$

Рис. 11

Изополю напряжений Q_x , т/м



$Q_x = 0$

Рис. 12

Изополю напряжений Q_y , т/м

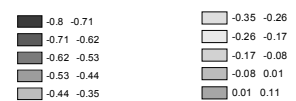
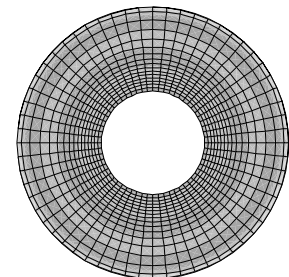


Рис. 13

ПОВЕРХНОСТЬ СОПРЯЖЕНИЯ ДВУХ СООСНЫХ ЦИЛИНДРОВ РАЗНЫХ ДИАМЕТРОВ

- поверхность, полученная вращением косинусоиды вокруг общей оси двух сопрягаемых цилиндров. При этом закон изменения радиуса рассматриваемой поверхности сопряжения вдоль оси oz (оси вращения) - $r = \frac{R_2 - R_1}{2} \cdot (1 - \cos \frac{\pi\alpha}{2b}) + R_1 = (R_2 - R_1) \cdot \sin^2 \frac{\pi\alpha}{4b} + R_1$, где $R_2 > R_1$, $0 \leq \alpha \leq 2b$, $2b$ - длина участка между двумя цилиндрами разного диаметра, β - угол в плоскостях параллелей поверхности, отсчитываемый от оси ox в сторону оси oy ($0 \leq \beta \leq 2\pi$).

Параметрическая форма задания:

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos \beta, \\ y &= r \cdot \sin \beta, \\ z &= \alpha. \end{aligned}$$

Построение:

Пусть радиусы цилиндров $R_1 = 5 \text{ м}$, $R_2 = 10 \text{ м}$,
расстояние между сопрягаемыми цилиндрами
 $2b = 40 \text{ м}$.

Тогда $r = (10 - 5) \cdot \sin^2 \frac{180 \cdot \alpha}{80} + 5$.

Параметр α изменяется в интервале $[0; 40]$, где 40 м - расстояние $2b$, а параметр β изменяется в интервале $[0; 180]$, где 180° - угол, огибаемый цилиндрами вокруг оси oz . Тогда параметры α, β выражаются через переменные s, t следующим образом:

$$\alpha \rightarrow 40 \cdot t, \quad \beta \rightarrow 180 \cdot s.$$

Разбивку на конечные элементы примем четырехугольную, количество конечных элементов в направлении α - 60, β - 30.

Полученную поверхность следует повернуть вокруг оси ox на 90° .

Получаем уравнения задания поверхности в SCAD:

$$X = ((10 - 5) \cdot (\sin(180 \cdot 40 \cdot t / 80))^2 + 5) \cdot \cos(180 \cdot s);$$

$$Y = ((10 - 5) \cdot (\sin(180 \cdot 40 \cdot t / 80))^2 + 5) \cdot \sin(180 \cdot s);$$

$$Z = 40 \cdot t;$$

$$Ns = 30; Nt = 60.$$

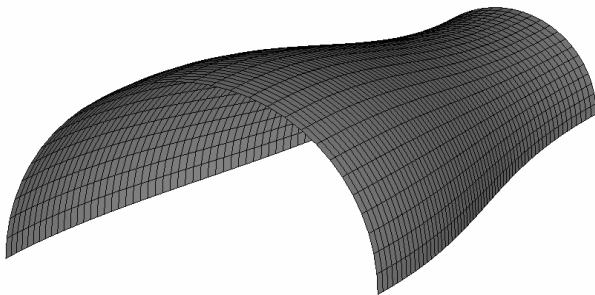


Рис. 1

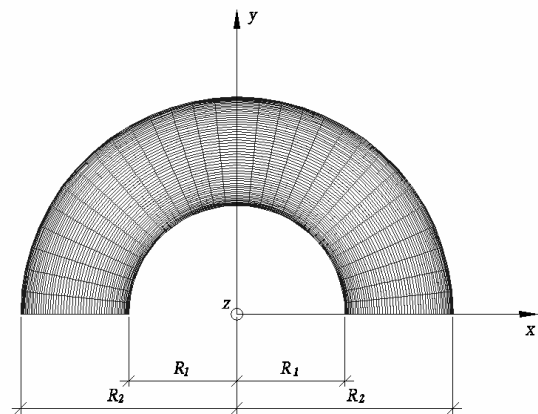


Рис. 2

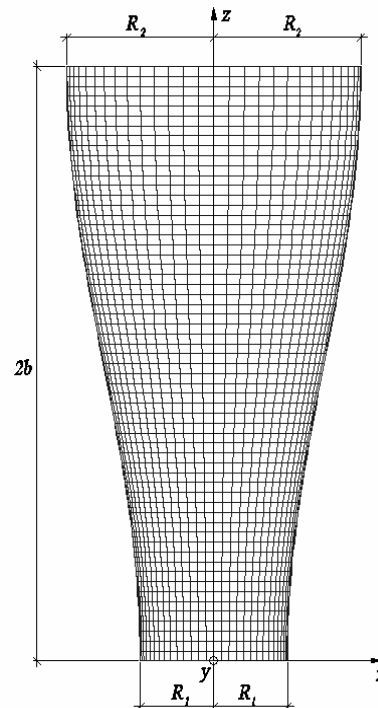


Рис. 3

Расчет:

Жесткостные характеристики:

Модуль упругости $E = 3.06 \cdot 10^6 \text{ т/м}^3$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$, толщина $h = 0.1 \text{ м}$.

Граничные условия:

Заделка по контуру.

Нагрузки:

Равномерно распределенная нагрузка, действующая вдоль оси oz $q = 1 \text{ т/м}^2$.

Деформированная схема:

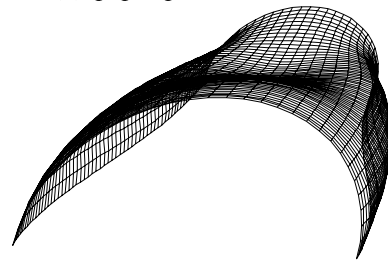


Рис. 4

Результаты расчета:

Изополя перемещений по Z, мм

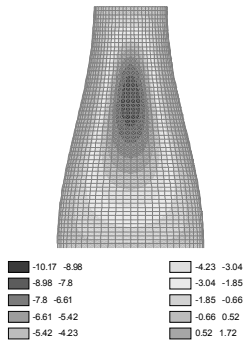


Рис. 5

Изополя напряжений $N_x, \text{ т/м}^2$

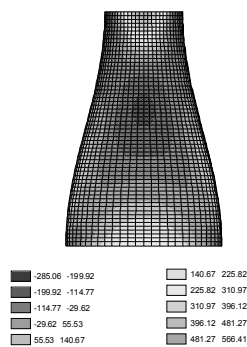


Рис. 6

Изополя напряжений $N_y, \text{ т/м}^2$

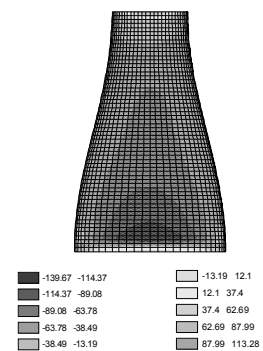


Рис. 7

Изополя напряжений $T_{xy}, \text{ т/м}^2$

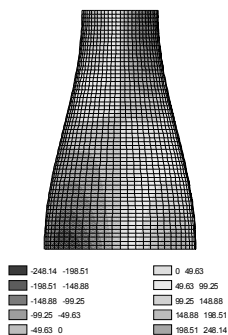


Рис. 8

Изополя напряжений $M_x, \text{ т} \cdot \text{м/м}$

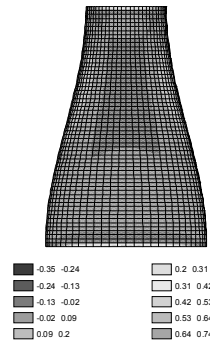


Рис. 9

Изополя напряжений $M_y, \text{ т} \cdot \text{м/м}$

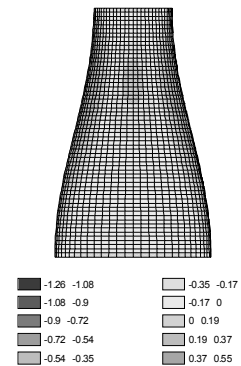


Рис. 10

Изополя напряжений $M_{xy}, \text{ т} \cdot \text{м/м}$

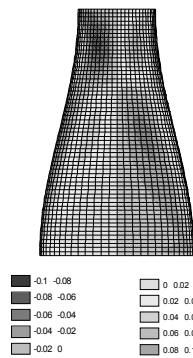


Рис. 11

Изополя напряжений $Q_x, \text{ т/м}$

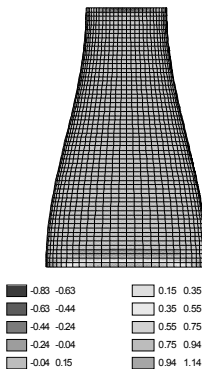


Рис. 12

Изополя напряжений $Q_y, \text{ т/м}$

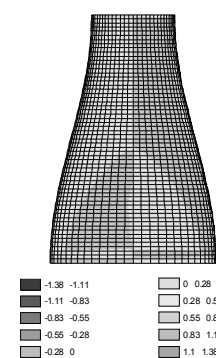


Рис. 13

ПОВЕРХНОСТЬ ВРАЩЕНИЯ С ЗАТУХАЮЩИМИ ОКРУЖНЫМИ ВОЛНАМИ

- поверхность, полученная вращением кривой $z = ae^{-mx} \sin(\omega x + \varphi)$ вокруг оси oz . Уравнение кривой представляет собой зависимость амплитуды колебаний от времени при исследовании свободных колебаний с затуханием.

Параметрическая форма задания:

$$x = r \cos u,$$

$$y = r \sin u,$$

$$z = a \cdot e^{-mr} \sin(\omega r + \varphi),$$

где $\omega = m\pi/b$; m - число целых полуволн, помещающихся на отрезке длиной b ; $\varphi = const$; a - начальная амплитуда образующей кривой.

Построение:

Пусть $a=1.5$ м, $b=10$ м, $m=5$, $\varphi=0^\circ$, $n=0.1$. Тогда

$$\omega = 5\pi/10 = 90^\circ.$$

Параметр r изменяется в интервале $[0; b] = [0; 10]$, а параметр u изменяется в интервале $[0; 360]$, где 360° - угол, огибаемый поверхностью вокруг оси oz . Тогда параметры r, u выражаются через переменные s, t следующим образом: $r \rightarrow 10 \cdot t$, $u \rightarrow 360 \cdot s$.

Разбивку на конечные элементы примем четырехугольную, количество конечных элементов в направлении r - 30, u - 60.

Получаем уравнения задания поверхности в SCAD:

$$X=10*t*\cos(360*s);$$

$$Y=10*t*\sin(360*s);$$

$$Z=1.5*\exp(-0.1*10*t)*\sin(90*10*t+0);$$

$$Ns=60; Nt=30.$$

Примечание: Вблизи центра поверхности четырехугольные конечные элементы вырождаются в треугольные, что является ошибкой расчетной схемы. Проблема решается удалением указанных элементов и добавлением стержневых конечных элементов, образующих вершину конуса, либо установкой граничных связей.

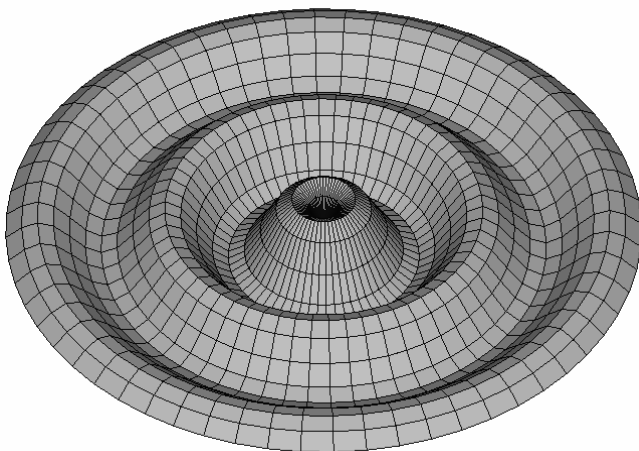


Рис. 1

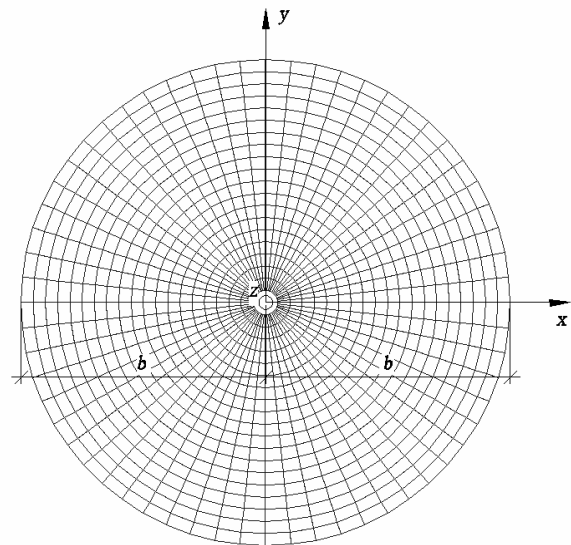


Рис. 2

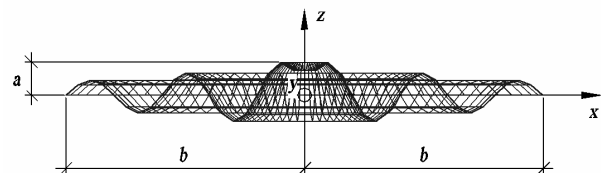


Рис. 3

Расчет:

Жесткостные характеристики:

Модуль упругости $E = 3.06 \cdot 10^6 \text{ т/м}^3$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$, толщина $h = 0.1 \text{ м}$.

Граничные условия:

Заделка по внутреннему и внешнему контуру.

Нагрузки:

Равномерно распределенная нагрузка, действующая вдоль оси oz $q = 1 \text{ т/м}^2$.

Деформированная схема:

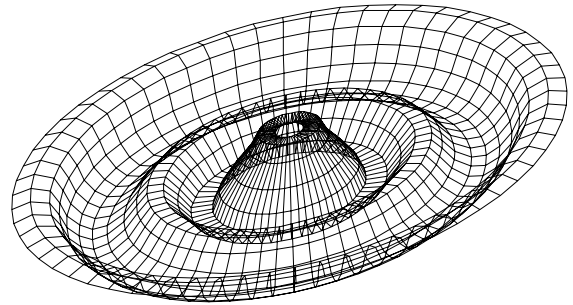


Рис. 4

Результаты расчета:

Изополя перемещений по Z, мм

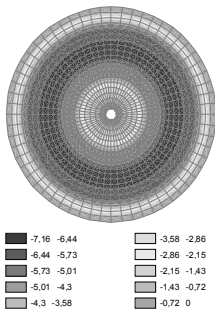


Рис. 5

Изополя напряжений N_x , т/м²

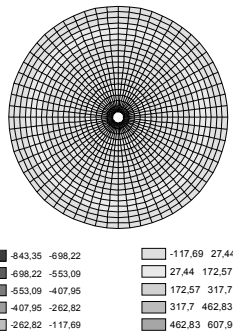


Рис. 6

Изополя напряжений N_y , т/м²

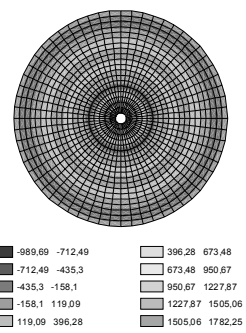


Рис. 7

Изополя напряжений T_{xy} , т/м²

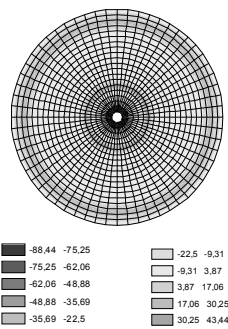


Рис. 8

Изополя напряжений M_x , т·м/м

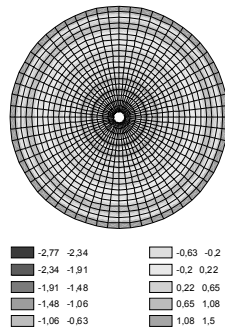


Рис. 9

Изополя напряжений M_y , т·м/м

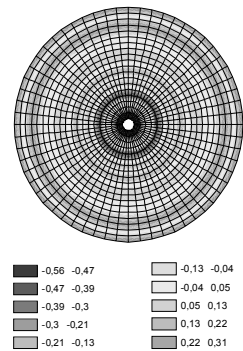


Рис. 10

Изополя напряжений M_{xy} , т·м/м

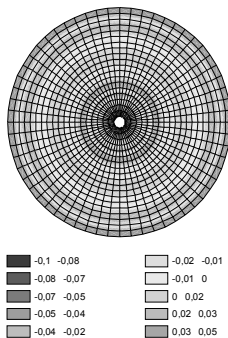


Рис. 11

Изополя напряжений Q_x , т/м

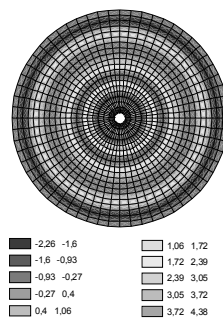


Рис. 12

Изополя напряжений Q_y , т/м

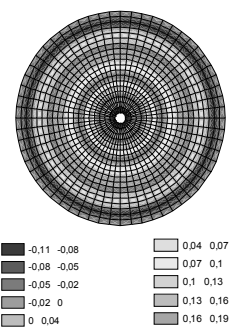


Рис. 13

ПОВЕРХНОСТЬ ВРАЩЕНИЯ ОБЩЕЙ СИНУСОИДЫ

- поверхность, полученная вращением общей синусоиды $z = a \sin(n\pi x / R)$ вокруг оси oz . Общая синусоида вытянута вдоль оси oz в $|a|$ раз, сжата вдоль оси ox $R/(n\pi)$ раз, где n - целое число, R - размер, в который укладывается целое число n полуволн синусоиды, и сдвинута влево на отрезок $R/(2n)$. Период функции $T = 2R/n$, точки пересечения функции с осью ox имеют координаты $[(k+1/2)R/n; 0]$

Параллели β и медианы r поверхности совпадают с линиями главных кривизн.

Параметрическая форма задания:

$$x = r \cos \beta,$$

$$y = r \sin \beta,$$

$$z = a \sin \frac{n\pi r}{R}$$

Построение:

Пусть $a=1.5$ м, $R=10$ м, $n=5$.

Параметр r изменяется в интервале $[0; R]=[0; 10]$, а параметр β изменяется в интервале $[0; 360]$, где 360° - угол, огибаемый поверхностью вокруг оси oz . Тогда параметры r, β выражаются через переменные s, t следующим образом: $r \rightarrow 10 \cdot t, \beta \rightarrow 360 \cdot s$.

Разбивку на конечные элементы примем четырехугольную, количество конечных элементов в направлении r - 30, β - 60.

Получаем уравнения задания поверхности в SCAD:

$$X=10 \cdot t \cdot \cos(360 \cdot s);$$

$$Y=10 \cdot t \cdot \sin(360 \cdot s);$$

$$Z=1.5 \cdot \sin(5 \cdot 180 \cdot 10 \cdot t / 10);$$

$$Ns=60; Nt=30.$$

Примечание: Вблизи центра поверхности четырехугольные конечные элементы вырождаются в треугольные, что является ошибкой расчетной схемы. Проблема решается удалением указанных элементов и добавлением стержневых конечных элементов, образующих вершину конуса, либо установкой граничных связей.

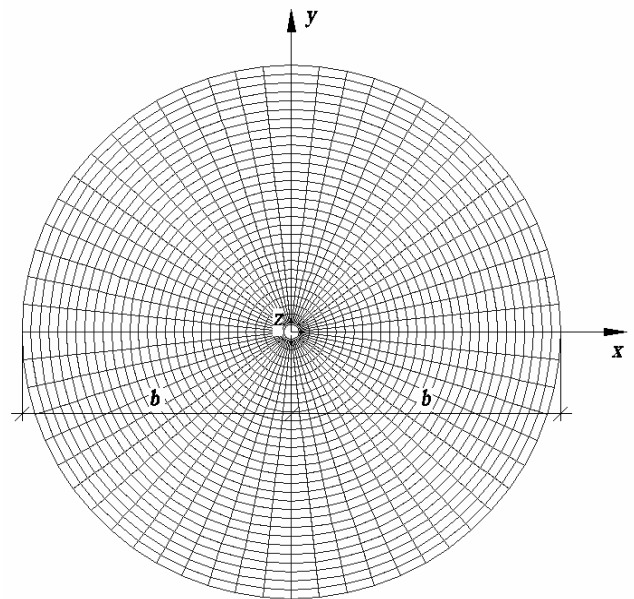


Рис. 2

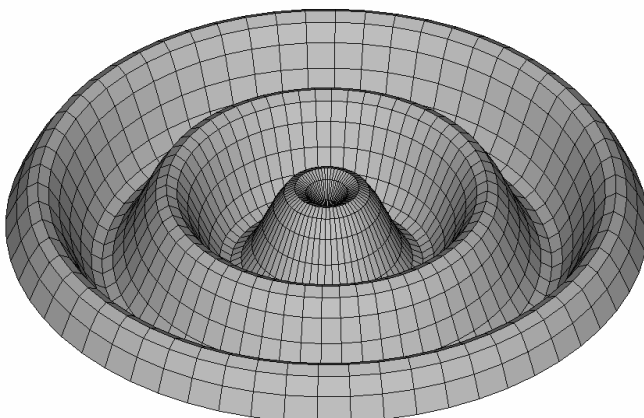


Рис. 1

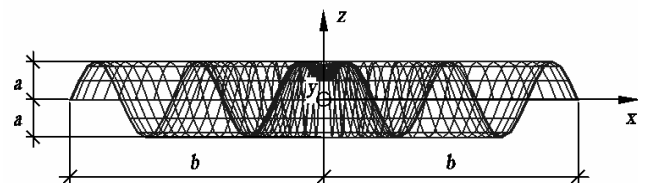


Рис. 3

Расчет:

Жесткостные характеристики:

Модуль упругости $E = 3.06 \cdot 10^6 \text{ т/м}^3$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$, толщина $h = 0.1 \text{ м}$.

Граничные условия:

Заделка по внутреннему и внешнему контуру.

Нагрузки:

Равномерно распределенная нагрузка, действующая вдоль оси oz $q = 1 \text{ т/м}^2$.

Деформированная схема:

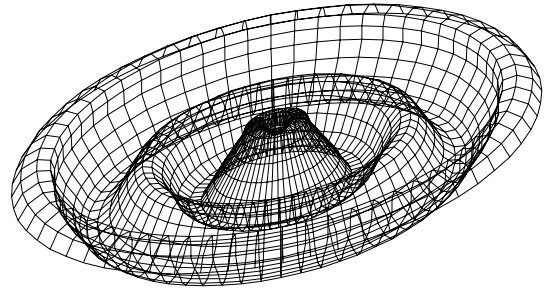


Рис. 4

Результаты расчета:

Изополя перемещений по Z, мм

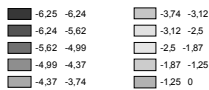
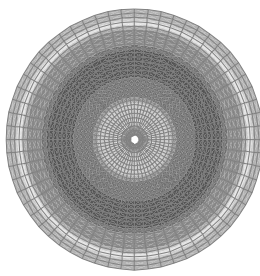


Рис. 5

Изополя напряжений $N_x, \text{ т/м}^2$

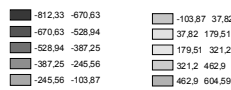
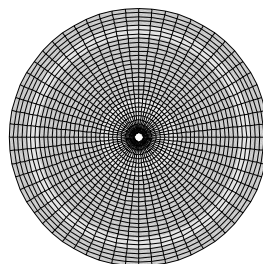


Рис. 6

Изополя напряжений $N_y, \text{ т/м}^2$

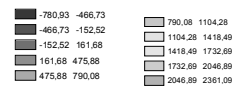
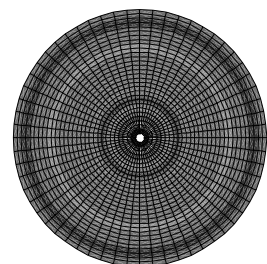


Рис. 7

Изополя напряжений $T_{xy}, \text{ т/м}^2$

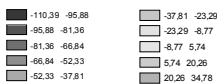
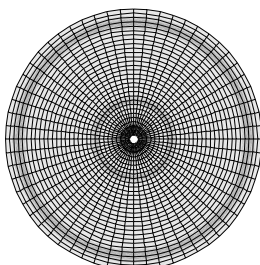


Рис. 8

Изополя напряжений $M_x, \text{ т} \cdot \text{м/м}$

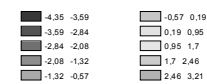
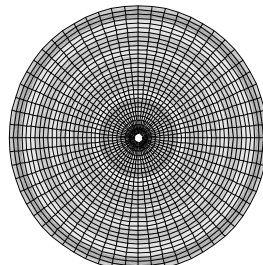


Рис. 9

Изополя напряжений $M_y, \text{ т} \cdot \text{м/м}$

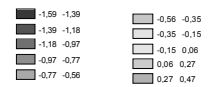
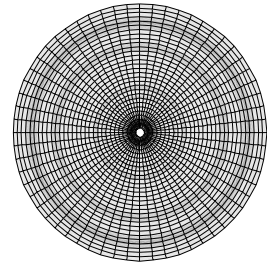


Рис. 10

Изополя напряжений $M_{xy}, \text{ т} \cdot \text{м/м}$

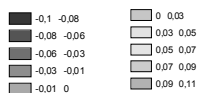
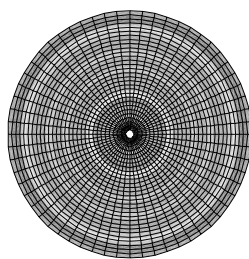


Рис. 11

Изополя напряжений $Q_x, \text{ т/м}$

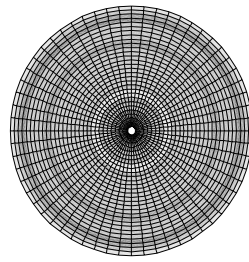


Рис. 12

Изополя напряжений $Q_y, \text{ т/м}$

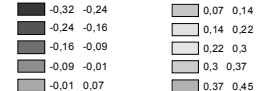
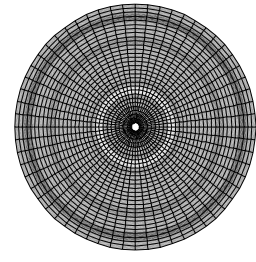


Рис. 13

ПОВЕРХНОСТЬ ВРАЩЕНИЯ “ЯЙЦО”

- поверхность, моделирующая скорлупу птичьего яйца; описывается неявным уравнением четвертого порядка $z^2 + y^2 = 3x(2a-x) \left[1 - \frac{c^2}{(x-a)^2} \right] / 4$, где $2a$ - длина большой оси (оси вращения поверхности); c - межфокусное расстояние; $(a-c)/2$ - расстояние от начала координат до первого фокуса меридиональной кривой.

Параметрическая форма задания:

$$\begin{aligned} x &= x, \\ y &= r \cos \varphi, \\ z &= r \sin \varphi, \end{aligned}$$

где $r = \sqrt{\frac{3}{4}x \cdot (2a-x) \cdot \left[1 - \frac{a^2 \beta^2}{(x+a)^2} \right]}$, $\beta = c/a$ - коэффициент, характеризующий форму меридиана.

Построение:

Пусть $2a = 20$, т.е. $a = 10$ м, $\beta = c/a = 0.9$, откуда $c = 0.9 \cdot a = 0.9 \cdot 10 = 9$, тогда $(a-c)/2 = (10-9)/2 = 0.5$.

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\frac{3}{4}x \cdot (2 \cdot 10 - x) \cdot \left[1 - \frac{10^2 \cdot 0.9^2}{(x+10)^2} \right]} = \\ &= \sqrt{0.75x \cdot (20-x) \cdot \left[1 - \frac{81}{(x+10)^2} \right]}. \end{aligned}$$

Параметр x изменяется в интервале $[0; 2a] = [0; 20]$, а параметр φ изменяется в интервале $[0; 180]$, где 180° - угол, огибаемый поверхностью вокруг оси ox . Тогда параметры x, φ выражаются через переменные s, t следующим образом: $x \rightarrow 20 \cdot s$, $\varphi \rightarrow 180 \cdot t$.

Разбивку на конечные элементы примем четырехугольную, количество конечных элементов в направлении x - 60, φ - 30.

Полученную поверхность следует повернуть вокруг оси ox на 90° .

Получаем уравнения задания поверхности в SCAD:

```
X=10*s;
Y=sqrt(0.75*10*s*(20-10*s)*(1-81/(10*s+10)**2))*cos(180*t);
Z=sqrt(0.75*10*s*(20-10*s)*(1-81/(10*s+10)**2))*sin(180*t);
Ns=30; Nt=30.
```

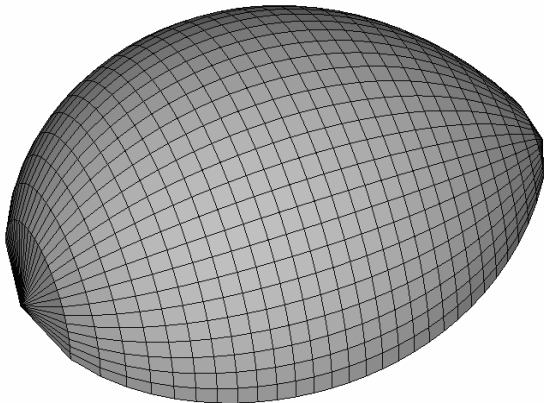


Рис. 1

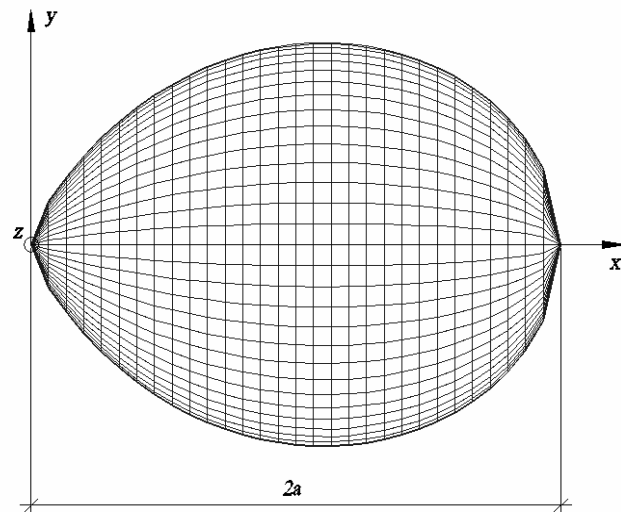


Рис. 2

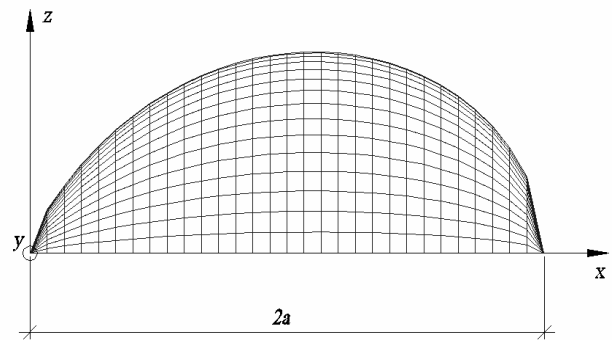


Рис. 3

Расчет:

Жесткостные характеристики:

Модуль упругости $E = 3.06 \cdot 10^6 \text{ т/м}^3$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$, толщина $h = 0.1 \text{ м}$.

Граничные условия:

Заделка по контуру.

Нагрузки:

Равномерно распределенная нагрузка, действующая вдоль оси oz $q = 1 \text{ т/м}^2$.

Деформированная схема:

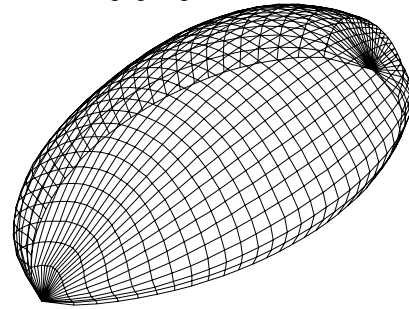


Рис. 4

Результаты расчета:

Изополю перемещений по Z, мм

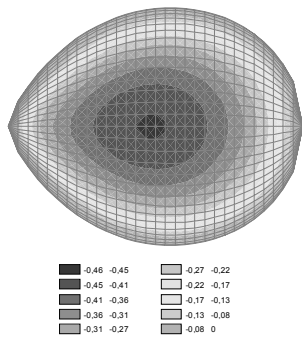


Рис. 5

Изополю напряжений N_x , т/м²

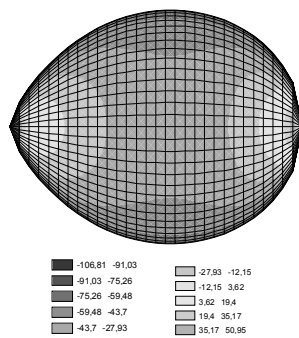


Рис. 6

Изополю напряжений N_y , т/м²

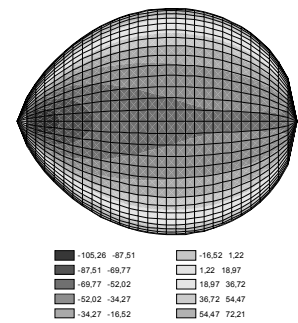


Рис. 7

Изополю напряжений T_{xy} , т/м²

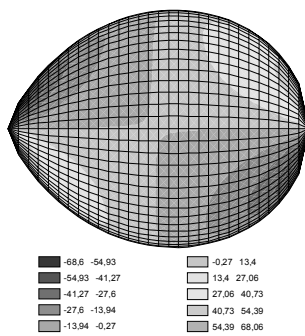


Рис. 8

Изополю напряжений M_x , т·м/м

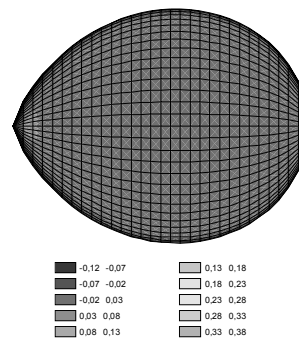


Рис. 9

Изополю напряжений M_y , т·м/м

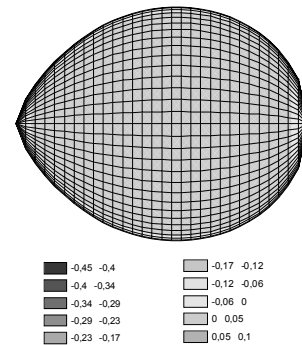


Рис. 10

Изополю напряжений M_{xy} , т·м/м

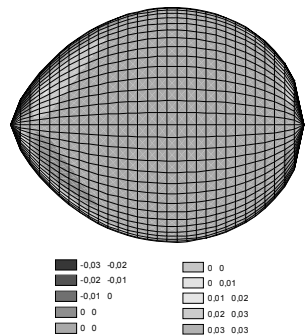


Рис. 11

Изополю напряжений Q_x , т/м

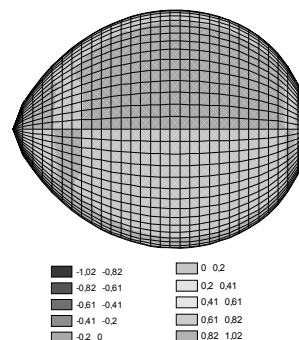


Рис. 12

Изополю напряжений Q_y , т/м

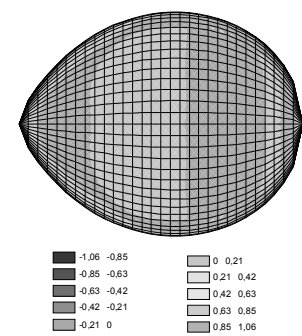


Рис. 13

КРУГОВАЯ ПОВЕРХНОСТЬ ПЕРЕНОСА (положительной гауссовой кривизны)

- поверхность, образованная движением образующей окружности с радиусом R_2 по направляющей окружности с радиусом R_1 . В круговой поверхности переноса положительной гауссовой кривизны центры обеих окружностей расположены по одну сторону поверхности.

Явная форма задания:

$$z = R_1 - \sqrt{R_1^2 - x^2} + R_2 - \sqrt{R_2^2 - y^2},$$

Построение:

Пусть радиусы окружностей $R_1 = 30$ м, $R_2 = 15$ м,

размеры в плане $a \times b = 40 \times 20$ м

Разбивку на конечные элементы примем треугольную, количество конечных элементов в направлении a - 40, b - 20.

Получаем уравнение задания поверхности в SCAD:

$$Z = 30 - \sqrt{30^2 - x^2} + (15 - \sqrt{15^2 - y^2});$$

Xнач=-20; Xкон=20; Nx=40.

Yнач=-10; Yкон=10; Ny=20.

Полученную поверхность следует повернуть вокруг оси oy на 180° .

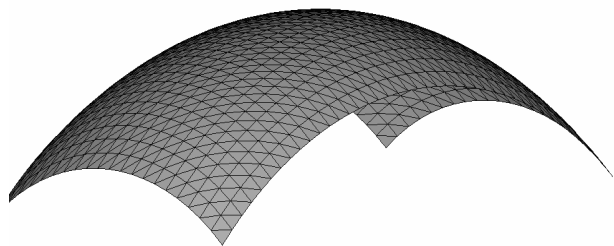


Рис. 1

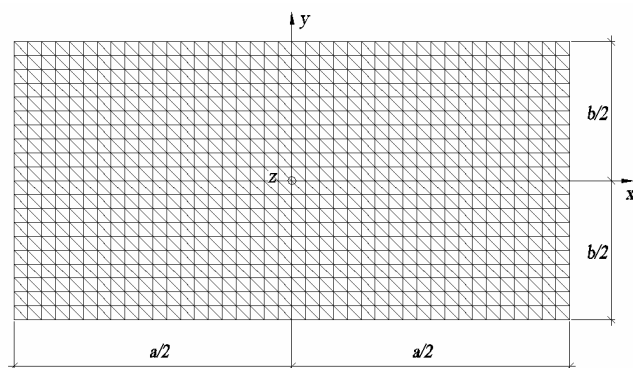


Рис. 2

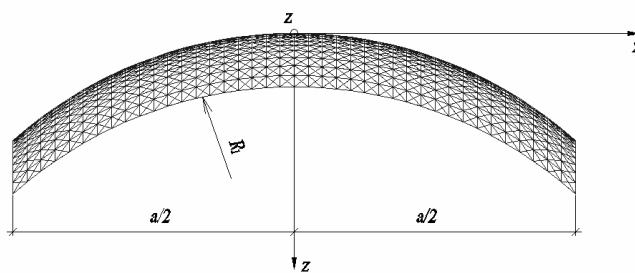


Рис. 3

Расчет:

Жесткостные характеристики:

Модуль упругости $E = 3.06 \cdot 10^6 \text{ т/м}^3$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$, толщина $h = 0.1 \text{ м}$.

Граничные условия:

Заделка по контуру.

Нагрузки:

Равномерно распределенная нагрузка, действующая вдоль оси oz $q = 1 \text{ т/м}^2$.

Деформированная схема:

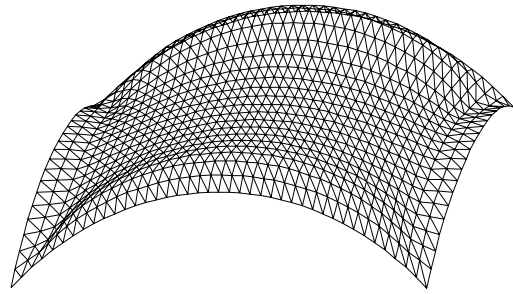


Рис. 4

Результаты расчета:

Изополя перемещений по Z, мм

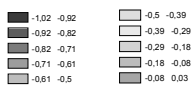
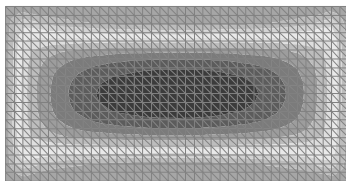


Рис. 5

Изополя напряжений N_x , т/м²

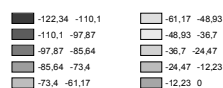
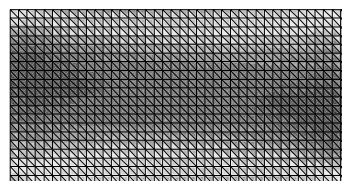


Рис. 6

Изополя напряжений N_y , т/м²

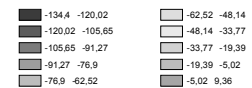
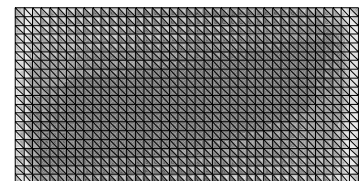


Рис. 7

Изополя напряжений T_{xy} , т/м²

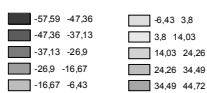
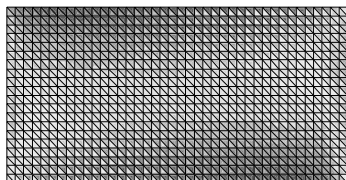


Рис. 8

Изополя напряжений M_x , т·м/м

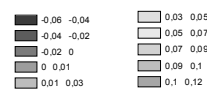
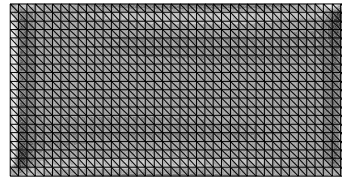


Рис. 9

Изополя напряжений M_y , т·м/м

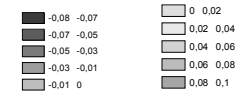
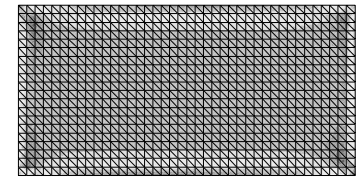


Рис. 10

Изополя напряжений M_{xy} , т·м/м

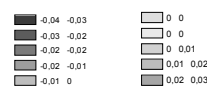
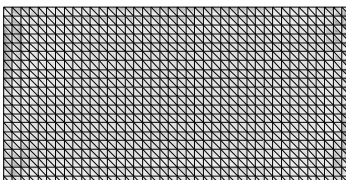


Рис. 11

Изополя напряжений Q_x , т/м

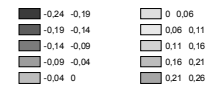
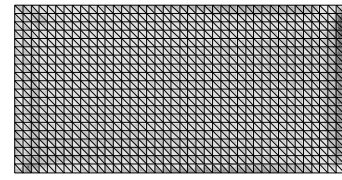


Рис. 12

Изополя напряжений Q_y , т/м

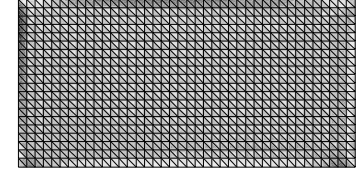


Рис. 13

КРУГОВАЯ ПОВЕРХНОСТЬ ПЕРЕНОСА (отрицательной гауссовой кривизны)

- поверхность, образованная движением образующей окружности с радиусом R_2 по направляющей окружности с радиусом R_1 . В круговой поверхности переноса отрицательной гауссовой кривизны центры окружностей расположены по разные стороны поверхности.

Явная форма задания:

$$z = R_1 - \sqrt{R_1^2 - x^2} - (R_2 - \sqrt{R_2^2 - y^2}),$$

Построение:

Пусть радиусы окружностей $R_1 = 30$ м, $R_2 = 15$ м, размеры в плане $a \times b = 40 \times 20$ м

Разбивку на конечные элементы примем треугольную, количество конечных элементов в направлении a - 40, b - 20.

Получаем уравнение задания поверхности в SCAD:

$$Z = 30 - \sqrt{30^2 - x^2} - (15 - \sqrt{15^2 - y^2});$$

Xнач=-20; Xкон=20; Nx=40.

Yнач=-10; Yкон=10; Ny=20.

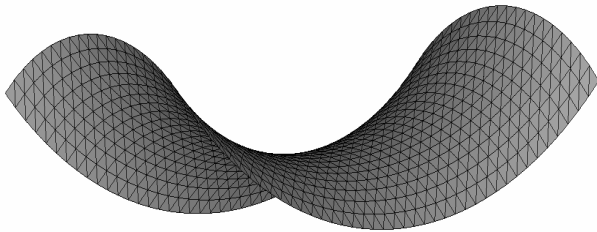


Рис. 1

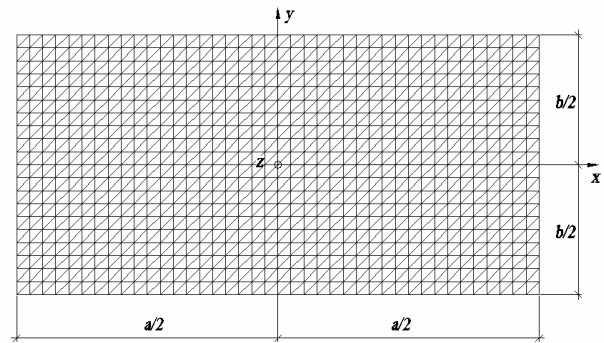


Рис. 2

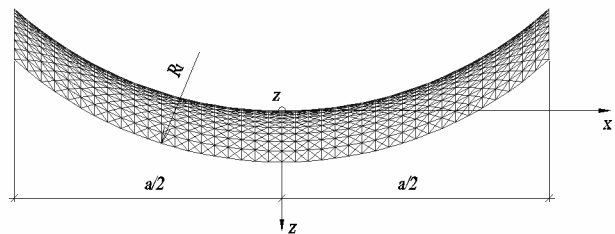


Рис. 3

Расчет:

Жесткостные характеристики:

Модуль упругости $E = 3.06 \cdot 10^6 \text{ т/м}^3$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$, толщина $h = 0.1 \text{ м}$.

Граничные условия:

Заделка по контуру.

Нагрузки:

Равномерно распределенная нагрузка, действующая вдоль оси oz $q = 1 \text{ т/м}^2$.

Деформированная схема:

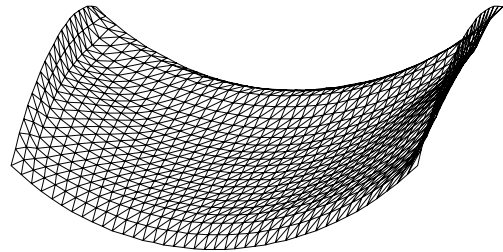


Рис. 4

Результаты расчета:

Изополя перемещений по Z, мм

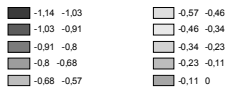
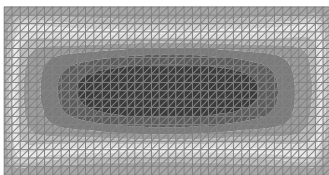


Рис. 5

Изополя напряжений $N_x, \text{ т/м}^2$

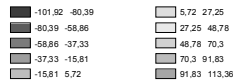
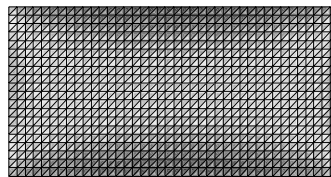


Рис. 6

Изополя напряжений $N_y, \text{ т/м}^2$

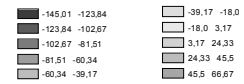
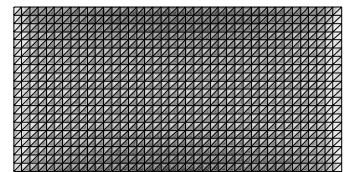


Рис. 7

Изополя напряжений $T_{xy}, \text{ т/м}^2$

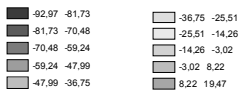
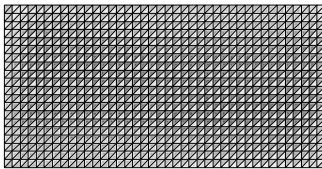


Рис. 8

Изополя напряжений $M_x, \text{ т} \cdot \text{м/м}$

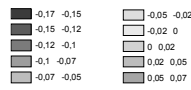
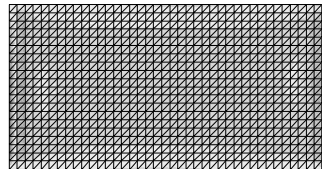


Рис. 9

Изополя напряжений $M_y, \text{ т} \cdot \text{м/м}$

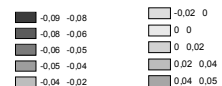
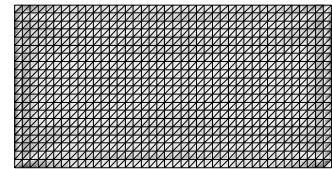


Рис. 10

Изополя напряжений $M_{xy}, \text{ т} \cdot \text{м/м}$

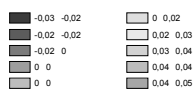
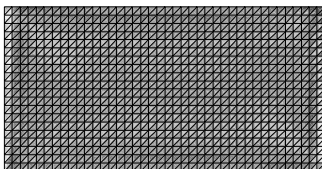


Рис. 11

Изополя напряжений $Q_x, \text{ т/м}$

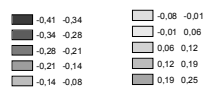
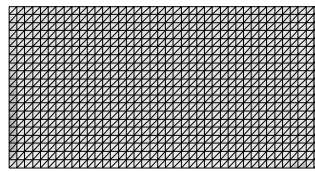


Рис. 12

Изополя напряжений $Q_y, \text{ т/м}$

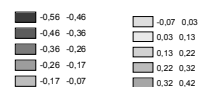
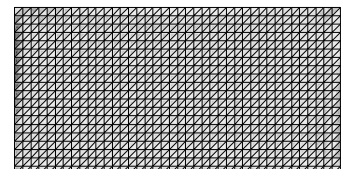


Рис. 13

ПОВЕРХНОСТЬ ПЕРЕНОСА СИНУСОИДЫ ПО СИНУСОИДЕ

- поверхность, образованная параллельным переносом синусоиды $z = c \cdot \sin(n \cdot \pi \cdot x / a)$ по синусоиде $z = d \cdot \sin(m \cdot \pi \cdot y / b)$, где n, m - число целых полуволн, содержащихся на участках длиной a, b соответственно; c, d - амплитуды синусоид. Направляющая и образующая синусоиды лежат во взаимно перпендикулярных плоскостях. Криволинейная координатная сеть на поверхности является неортогональной и сопряженной. Только координатные линии, проходящие через вершины поверхности, пересекаются под прямым углом.

Явная форма задания:

$$z = c \cdot \sin(n\pi x / a) + d \cdot \sin(m\pi y / b).$$

Построение:

Пусть требуется перекрыть прямоугольный план $a \times b = 40 \times 20$ м. Пусть амплитуды синусоид $c = 1.5$ м, $d = 1$ м, число полуволн $n = 9, m = 5$. Разбивку на конечные элементы примем треугольную, количество конечных элементов в направлении a - 40, b - 20.

Получаем уравнение задания поверхности в SCAD:

$$Z = 1.5 \cdot \sin(9 \cdot 180 \cdot x / 40) + 1 \cdot \sin(5 \cdot 180 \cdot y / 20);$$

$X_{нач} = -20$; $X_{кон} = 20$; $N_x = 40$.

$Y_{нач} = -10$; $Y_{кон} = 10$; $N_y = 20$.

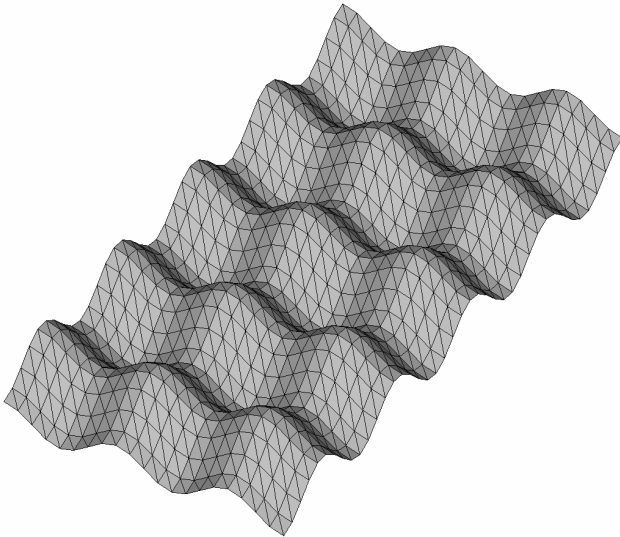


Рис. 1

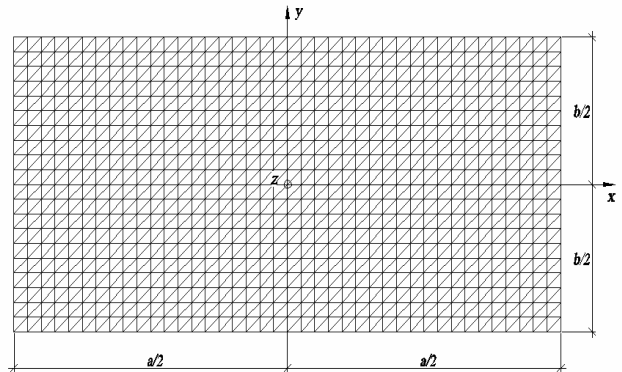


Рис. 2

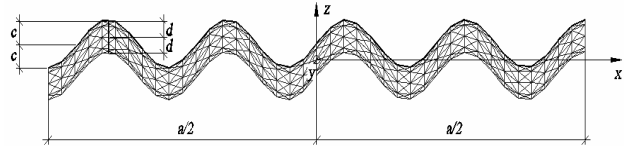


Рис. 3

Расчет:

Жесткостные характеристики:

Модуль упругости $E = 3.06 \cdot 10^6 \text{ т/м}^3$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$, толщина $h = 0.1 \text{ м}$.

Граничные условия:

Заделка по контуру.

Нагрузки:

Равномерно распределенная нагрузка, действующая вдоль оси oz $q = 1 \text{ т/м}^2$.

Деформированная схема:

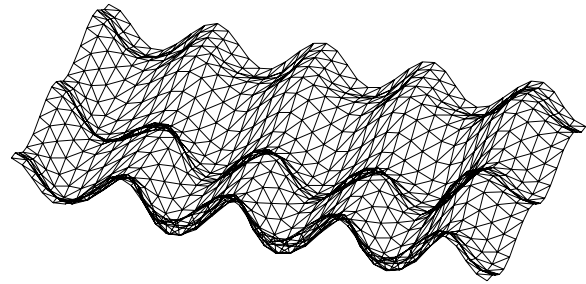


Рис. 4

Результаты расчета:

Изополя перемещений по Z, мм

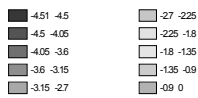
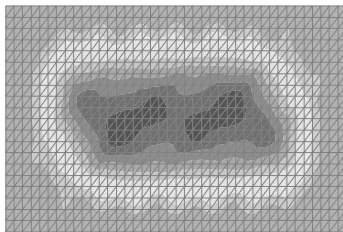


Рис. 5

Изополя напряжений N_x , т/м²

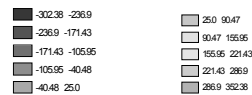
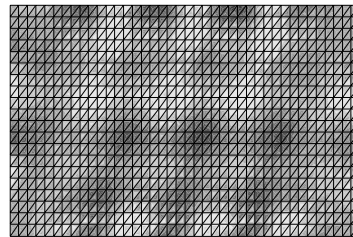


Рис. 6

Изополя напряжений N_y , т/м²

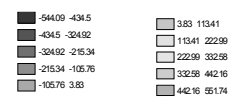
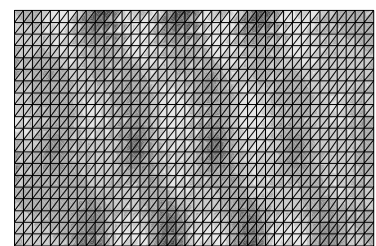


Рис. 7

Изополя напряжений T_{xy} , т/м²

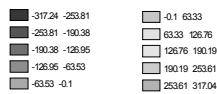
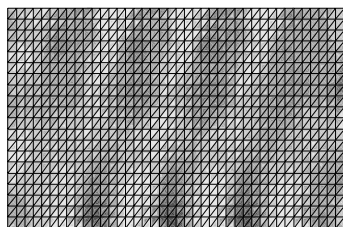


Рис. 8

Изополя напряжений M_x , т·м/м

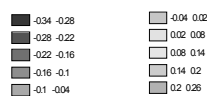
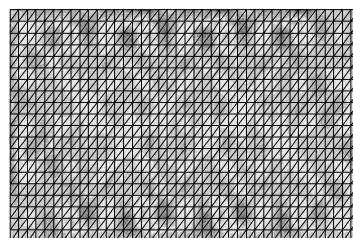


Рис. 9

Изополя напряжений M_y , т·м/м

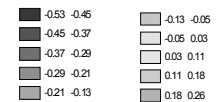
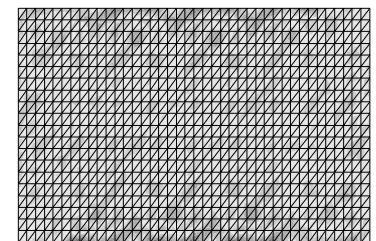


Рис. 10

Изополя напряжений M_{xy} , т·м/м

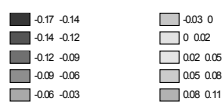
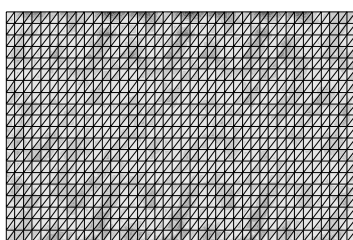


Рис. 11

Изополя напряжений Q_x , т/м

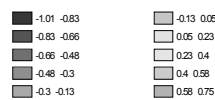
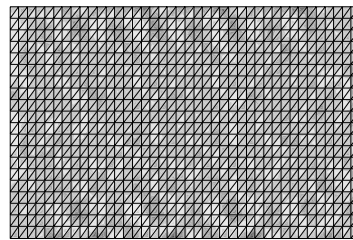


Рис. 12

Изополя напряжений Q_y , т/м

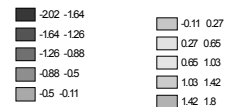
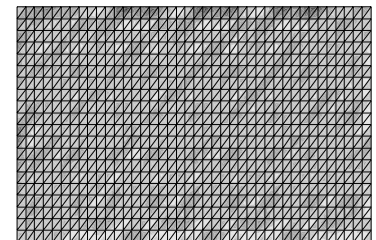


Рис. 13

ДИАГОНАЛЬНАЯ ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ ПЕРЕНОСА

- поверхность переноса, образованная параллельным движением плоской параболы вдоль диагонали ромбического контура. При этом две симметричные точки параболической образующей скользят по плоскому неподвижному контуру.

Параметрическая форма задания:

$$x = \frac{(u+v) \cdot c}{a} - c,$$

$$y = \frac{(u-v) \cdot d}{a},$$

$$z = \frac{2d^2}{p} \left(1 - \frac{u+v}{a} + \frac{uv}{a^2}\right),$$

где $a = \sqrt{c^2 + d^2}$ - длина стороны ромбического контура; $2c$ и $2d$ - размеры диагоналей ромбического плоского контура в направлении осей x и y соответственно; p - геометрическая характеристика образующей параболы. В сечении поверхности плоскостью $y=0$ лежит парабола $z = d^2(c-x)^2 / (2pc^2)$, а в сечении $x=0$ находится образующая парабола $z = (d^2 - y^2) / (2p)$. Максимальное превышение поверхности над плоскостью $z=0$ будет равно $z_{\max} = d^2 / (2p)$. Координатные линии u, v являются прямыми линиями.

Построение:

Принимаем $a=30$ м, $c=20$ м, тогда

$$d = \sqrt{a^2 - c^2} = 22.36 \text{ м. Пусть } p = 20.$$

Параметры u, v изменяются в интервале $[0; a] = [0; 30]$.

Тогда параметры u, v выражаются через переменные s, t следующим образом: $u \rightarrow 30 \cdot t, v \rightarrow 30 \cdot s$.

Разбивку на конечные элементы примем четырехугольную, количество конечных элементов в направлении образующей u - 20, направляющей v - 60.

Получаем уравнения задания поверхности в SCAD:

$$X = (30 \cdot t + 30 \cdot s) \cdot 10 / 30 - 10;$$

$$Y = (30 \cdot t - 30 \cdot s) \cdot 22.36 / 30;$$

$$Z = (2 \cdot 22.36 \cdot 2 / 20) \cdot \left(1 - \frac{30 \cdot t + 30 \cdot s}{30} + \frac{30 \cdot t \cdot 30 \cdot s}{30 \cdot 30}\right);$$

$$Ns = 60; Nt = 20.$$

Полученную поверхность следует повернуть вокруг оси oy на 90° .

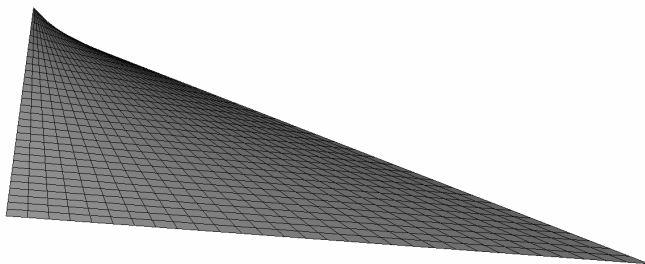


Рис. 1

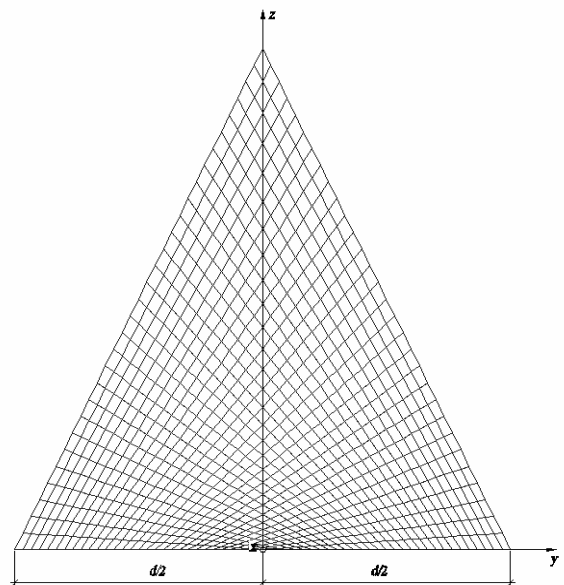


Рис. 2

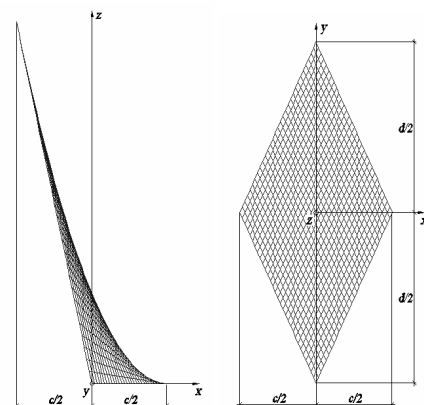


Рис. 3

Расчет:

Жесткостные характеристики:

Модуль упругости $E = 3.06 \cdot 10^6 \text{ т/м}^3$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$, толщина $h = 0.1 \text{ м}$.

Граничные условия:

Заделка по контуру.

Нагрузки:

Равномерно распределенная нагрузка, действующая вдоль оси oz $q = 1 \text{ т/м}^2$.

Деформированная схема:

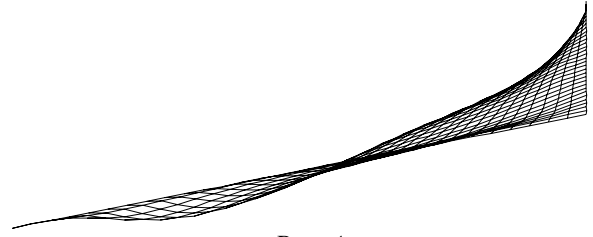


Рис. 4

Результаты расчета:

Изополя перемещений по Z, мм

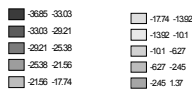
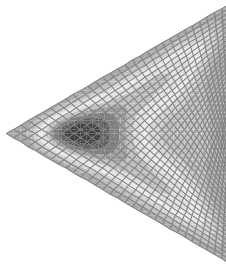


Рис. 5

Изополя напряжений $N_x, \text{ т/м}^2$

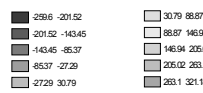
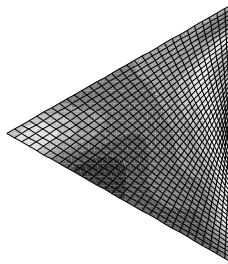


Рис. 6

Изополя напряжений $N_y, \text{ т/м}^2$

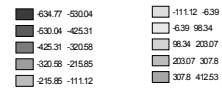
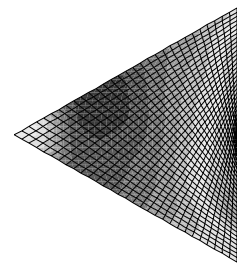


Рис. 7

Изополя напряжений $T_{xy}, \text{ т/м}^2$

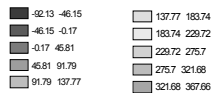
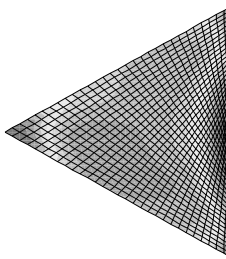


Рис. 8

Изополя напряжений $M_x, \text{ т} \cdot \text{м/м}$

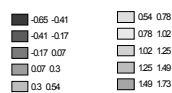
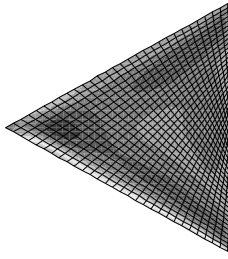


Рис. 9

Изополя напряжений $M_y, \text{ т} \cdot \text{м/м}$

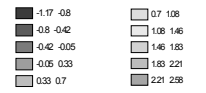
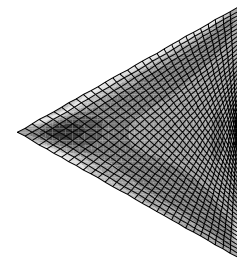


Рис. 10

Изополя напряжений $M_{xy}, \text{ т} \cdot \text{м/м}$

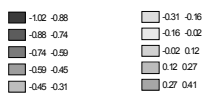
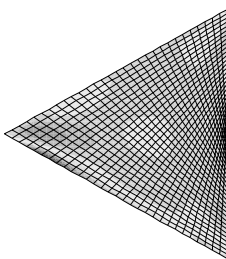


Рис. 11

Изополя напряжений $Q_x, \text{ т/м}$

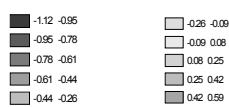
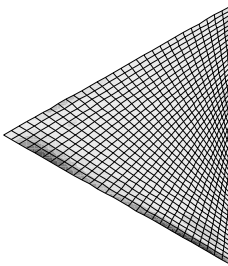


Рис. 12

Изополя напряжений $Q_y, \text{ т/м}$

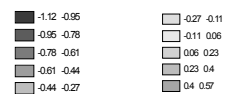
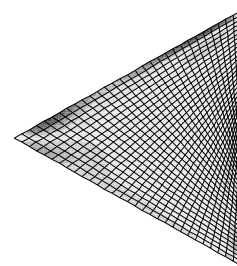


Рис. 13

СИНУСОИДАЛЬНЫЙ ВЕЛАРОИД

- поверхность переноса на плоском прямоугольном плане с образующей кривой переменной кривизны. Поверхность ограничена четырьмя взаимно ортогональными контурными прямыми $k_x = k_y = 0$, лежащими в одной плоскости. Синусоидальный велароид образовывается двумя семействами полуволн синусоид, лежащих во взаимно перпендикулярных плоскостях и обращенных выпуклостями в одну и ту же сторону. Каждое семейство синусоид имеет одинаковый период.

Явная форма задания:

$$z = f \cdot \sin \frac{\pi x}{a} \cdot \sin \frac{\pi y}{b},$$

где a, b - размеры поверхности в плане в направлении x и y соответственно. Максимальный подъем f поверхности над плоскостью $z=0$ будет в точке с координатами $x=a/2; y=b/2$. В сечениях поверхности плоскостями $x=x_c = const$ будут синусоиды с амплитудами $f \cdot \sin \frac{\pi x_c}{a}$, а в сечениях поверхности плоскостями $y=y_c = const$ будут синусоиды с амплитудами $f \cdot \sin \frac{\pi y_c}{b}$.

Построение:

Пусть размеры в плане $a=40 \text{ м}, b=20 \text{ м}$, максимальный подъем поверхности $f=10 \text{ м}$. Разбивку на конечные элементы примем треугольную, количество конечных элементов в направлении a - 40, b - 20.

Получаем уравнение задания поверхности в SCAD:

$$Z = 10 \cdot \sin(180 \cdot x / 40) \cdot \sin(180 \cdot y / 20);$$

$$X_{\text{нач}}=0; X_{\text{кон}}=40; N_x=40.$$

$$Y_{\text{нач}}=0; Y_{\text{кон}}=20; N_y=20.$$

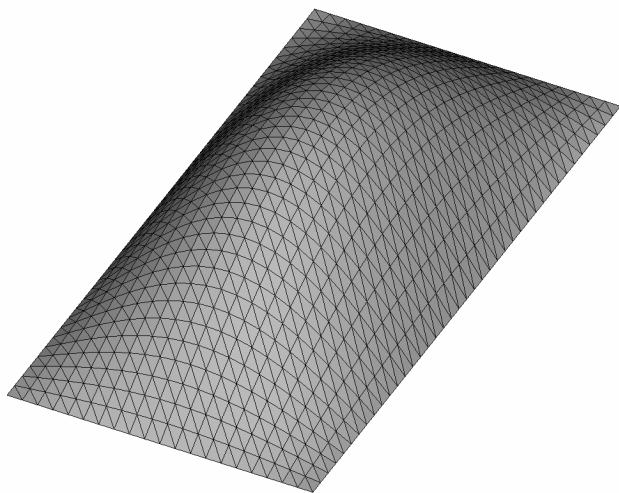


Рис. 1

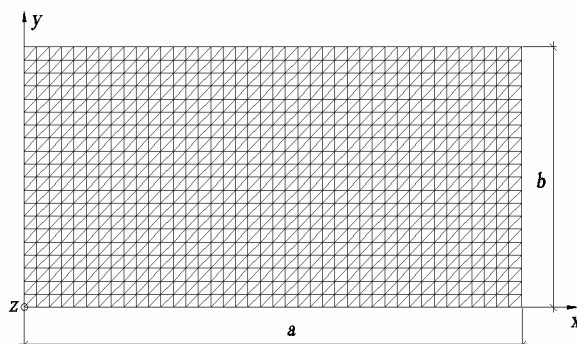


Рис. 2

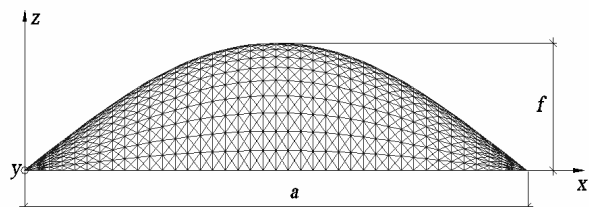


Рис. 3

Расчет:

Жесткостные характеристики:

Модуль упругости $E = 3.06 \cdot 10^6 \text{ т/м}^3$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$, толщина $h = 0.1 \text{ м}$.

Граничные условия:

Заделка по контуру.

Нагрузки:

Равномерно распределенная нагрузка, действующая вдоль оси oz $q = 1 \text{ т/м}^2$.

Деформированная схема:

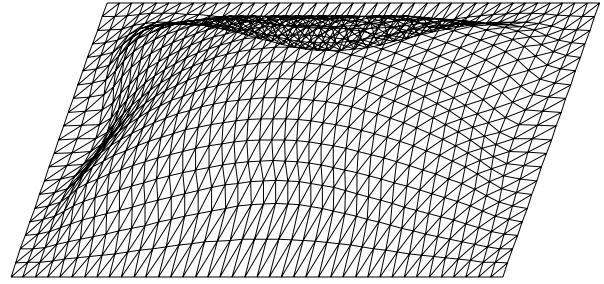


Рис. 4

Результаты расчета:

Изополя перемещений по Z, мм

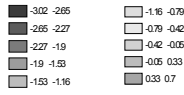
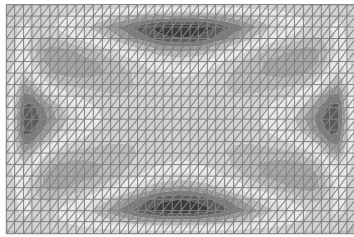


Рис. 5

Изополя напряжений N_x , т/м²

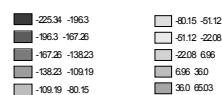
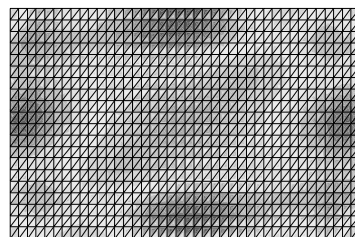


Рис. 6

Изополя напряжений N_y , т/м²

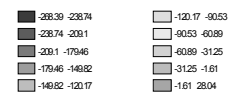
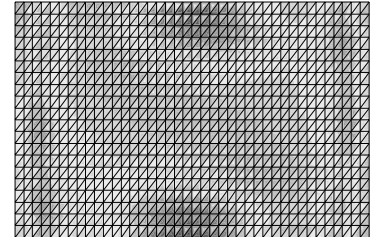


Рис. 7

Изополя напряжений T_{xy} , т/м²

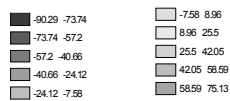
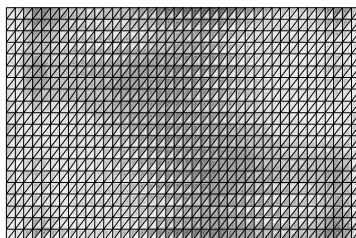


Рис. 8

Изополя напряжений M_x , т·м/м

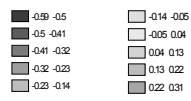
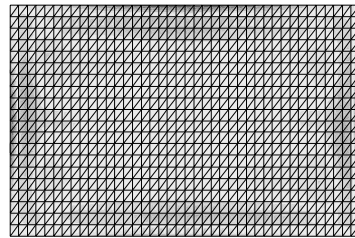


Рис. 9

Изополя напряжений M_y , т·м/м

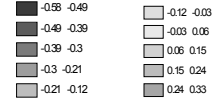
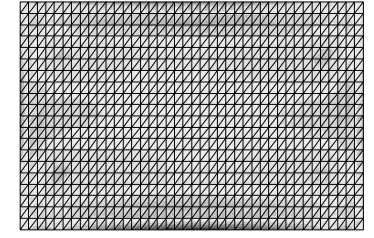


Рис. 10

Изополя напряжений M_{xy} , т·м/м

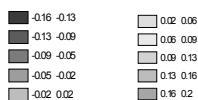
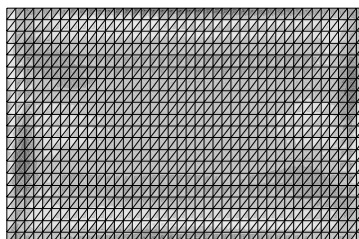


Рис. 11

Изополя напряжений Q_x , т/м

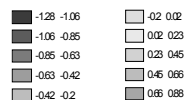
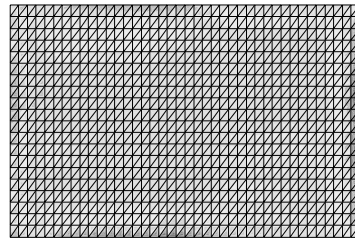


Рис. 12

Изополя напряжений Q_y , т/м

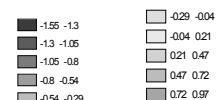
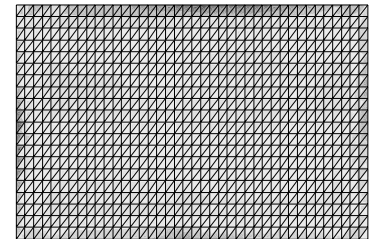


Рис. 13

ТЕМЫ КУРСОВЫХ РАБОТ

1. Построение и расчет одной из поверхностей, представленных в пособии, с различными граничными условиями, геометрическими и жесткостными характеристиками.

2. Сравнительный анализ результатов расчета поверхности с различными граничными условиями, геометрическими и жесткостными характеристиками.

3. Построение и расчет нескольких видов поверхностей одного типа (торсовые поверхности, поверхности одинакового ската, цилиндрические поверхности, конические поверхности, поверхности вращения, поверхности переноса и т.д.) с проведением сравнительного анализа результатов.

4. Построение и расчет поверхности, не рассмотренной в пособии.

5. Построение и расчет поверхности, использованной в реальном строительном объекте.

Темы курсовых проектов выбираются студентами. Курсовой проект основан на самостоятельной разработке определенного вида поверхности (представленной в пособии, но с отличными граничными условиями, геометрическими и жесткостными характеристиками или не представленной в пособии), анализе напряженно-деформированного состояния этой поверхности и применении полученной поверхности в конкретной строительной конструкции с численным обоснованием.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. С.Н. Кривошапко, В.Н. Иванов, С.М. Халаби. Аналитические поверхности: материалы по геометрии 500 поверхностей и информация к расчету на прочность тонких оболочек. – М.: Наука, 2006 - 544 с.
2. А.В. Перельмутер, В.И. Сливкер. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. – Киев.: Изд-во “Сталь”, 2002. – 600 с.
3. С.Н. Кривошапко. Торсовые поверхности и оболочки: Справочник. – М.: Издательство УДН, 1991 – 287 с.
4. В.П. Агапов. Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости конструкций. – М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2004 – 248 с.
5. Р.А. Хечумов, Х. Кеплер, В.И. Прокопьев. Применение метода конечных элементов к расчету конструкций: Учебное пособие для технических вузов. – М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 1994 – 353 с.
6. Флюгге В. Статика и динамика оболочек. – М.: МАИ, 1961. – 305 с.
7. Голдценвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. – М.:Гостехиздат, 1953. – 512 с.
8. Выгодский М.Я. Дифференциальная геометрия. – М. – Л.: ГИТТЛ, 1949. – 511 с.
9. Рекач В.Г., Кривошапко С.Н. Расчет оболочек сложной геометрии. – М.: Изд-во УДН, 1988. – 177 с.
10. Люкшин В.С. Теория винтовых линий и поверхностей. – М.: Московский станкоинструментальный ин-т, 1963. – 217 с.
11. Можяев С.С. Аналитическая теория спирального сверла. – М. – Л.: Гос-техиздат, 1948.

12. Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И. Линейная теория тонких оболочек. – Л.: Политехника, 1991. – 656 с.
13. Карташов А.И. Поверхности одинакового ската: Дисс. канд. техн. наук. – Л.: ЛИИЖТ, 1954.
14. Кривошапко С. Н., Халаби С.М. Пять типов винтовых линейчатых поверхностей для пандусов автомобильных стоянок // Современные проблемы геометрического моделирования: Сборник трудов Украинно-Российской научно-практической конференции. Спец выпуск. – Харьков, – 2005. – С. 88 – 95.
15. Назаров А.А. Основы теории и методы расчета пологих оболочек. – Л. – М: Стройиздат, 1966. – 303 с.
16. Рекач В.Г., Кривошапко С.Н. Расчет невырожденных торсовых оболочек в криволинейных неортогональных координатах // Строит. мех. и расчет сооружений. – 1982. – №6.
17. Ржаницын А.Р. Расчет упругих оболочек произвольного очертания в прямоугольных координатах // Строит. мех. и расчет сооружений. – 1977. – №1.
18. Рекач В.Г. Расчет пологих винтовых (геликоидальных) оболочек // Труды МИСИ. – М., 1957. – №27. – с.113-132.

ОПИСАНИЕ КУРСА И ПРОГРАММА

Цели и задача курса:

Целью курса является ознакомление студентов с теорией построения и расчета аналитических поверхностей, обучение навыкам работы с проектно-вычислительным комплексом SCAD OFFICE и применение указанного комплекса при определении и анализе компонентов напряженно-деформированного состояния аналитических поверхностей.

Задачами курса являются:

- ознакомление с историей развития теории поверхностей;
- изучение аналитических методов построения и расчета поверхностей;
- изучение численных методов расчета поверхностей;
- обучение пользованию проектно-вычислительным комплексом SCAD OFFICE;
- практическое применение проектно-вычислительного комплекса SCAD OFFICE при построении и расчете поверхностей различной формы.

Курс ориентирован на бакалавров и магистров, обучающихся по направлению “Строительство”, а также аспирантов специализации “Строительные конструкции, здания и сооружения” и “Строительная механика” направления “Строительство”. Курс может быть полезен бакалаврам, магистрам и аспирантам других смежных направлений. Возможны варианты курса дополнительного профессионального образования или курса по выбору для магистров, обучающихся по направлению “Строительство”.

Курс состоит из теоретической составляющей (лекционных занятий) и практической составляющей (практические занятия).

Иновационность курса:

Последние несколько десятилетий тонкостенные пространственные конструкции, включающие различные оболочки, являются наиболее эффективным и экономичным конструктивным решением покрытий и перекрытий большепролетных сооружений. Применение таких конструкций придает сооружению особенную архитектурную выразительность. Но в связи со сложностью расчета и изготовления оболочек тонкостенные пространственные конструкции не получили широкого распространения, что привело к замедлению развития теории расчета и проектирования таких конструкций.

В настоящее время наиболее эффективным и бурно развивающимся методом расчета конструкций является метод конечных элементов. Он успешно реализован в современных расчетных компьютерных программах и позволяет проводить достаточно точные расчеты сложных конструкций, в том числе и оболочечных систем, входящих в состав тонкостенных пространственных конструкций. Универсальность данного метода расчета дает возможность исследовать напряженно-деформированное состояние новых видов поверхностей оболочек, не рассчитанных до сих пор. В современной практике проектирования расчетные комплексы на основе метода конечных элементов широко используются для расчета строительных конструкций, но их применение для расчета поверхностей не так широко распространено.

Предлагаемый курс основан на использовании современных расчетных комплексов в проектировании тонкостенных пространственных конструкций и направлен на развитие современного подхода к расчету таких конструкций и изучение новых типов поверхностей, используемых в них. Курс включает в себя последние научные достижения в области расчета и проектирования оболочечных систем и основан на применении современного проектно-вычислительного комплекса SCAD OFFICE, с

помощью которого студент сможет не только исследовать напряженно-деформированное состояние оболочки, но и построить и рассчитать уникальную поверхность оболочки со своими геометрическими характеристиками, основываясь на теории построения поверхностей.

Инновационность методики преподавания данного курса состоит в том, что студент, получив теоретические сведения о расчете и выполнив практические примеры, самостоятельно выбирает свой тип поверхности со своими геометрическими характеристиками и проводит расчет этой поверхности. Полученный результат является уникальным в своем роде и может быть использован для последующей систематизации и подготовки более глубокого исследования. Эта возможность будет полезна для аспирантов, обучающихся на специальности “Строительная механика”.

Кроме того, данный курс предполагает широкое применение компьютерных мультимедийных технологий при чтении лекционного материала и самостоятельной работе студента (применение электронного учебника, проектора), проведении практических занятий и оценке текущих, результирующих и остаточных знаний курса студентов с помощью компьютерных тестов.

В рамках предлагаемого курса разрабатывается справочное пособие по расчету аналитических поверхностей с применением пактно-вычислительного комплекса SCAD OFFICE, содержащее необходимые сведения по теории построения и расчета аналитических поверхностей с применением указанного расчетного комплекса, а также практические примеры, охватывающие все возможные варианты применения данной методики. Данное справочное пособие представляет собой электронный учебник, который может быть использован как для обучения, так и для самостоятельной работы студента.

Структура курса:

Лекции – 36 / 36 часов (количество часов аудиторных / самостоятельной работы);

Практические занятия – 36 / 36 часов;

Рубежный контроль – 4 / 4 часа.

Темы лекций:

Лекция №1 (2 часа, 1/18 кредита). Введение (тематика и терминология). Возникновение тонкостенных пространственных конструкций. История развития методов построения и расчета оболочек, входящих в состав тонкостенных пространственных конструкций.

Лекция №2 (2 часа, 1/18 кредита). Срединная поверхность оболочек. Геометрические характеристики поверхностей. Кривизна поверхностей. Классификация поверхностей.

Лекция №3 (2 часа, 1/18 кредита). Уравнения задания поверхностей. Вывод уравнений задания поверхностей различного типа.

Лекция №4 (2 часа, 1/18 кредита). Построение линейчатых поверхностей.

Лекция №5 (2 часа, 1/18 кредита). Построение поверхностей вращения и переноса.

Лекция №6 (2 часа, 1/18 кредита). Построение винтовых поверхностей и остальных типов поверхностей.

Лекция №7 (2 часа, 1/18 кредита). Аналитический расчет поверхностей. Методы аналитического расчета, их достоинства и недостатки.

Лекция №8 (2 часа, 1/18 кредита). Численный расчет поверхностей. Методы численного расчета, их достоинства и недостатки.

Лекция №9 (2 часа, 1/18 кредита). Расчет поверхностей оболочек в составе тонкостенных пространственных конструкций. Контурные элементы. Реализация в строительной практике.

Лекция №10 (2 часа, 1/18 кредита). Теоретические основы метода конечных элементов. Типы конечных элементов. Матрицы жесткости. Связи и нагрузки.

Лекция №11 (2 часа, 1/18 кредита). Описание проектно-вычислительного комплекса SCAD OFFICE. Область применения и возможности.

Лекция №12 (2 часа, 1/18 кредита). Создание расчетной схемы в системе SCAD. Построение, назначение жесткостей, наложение связей, загрузки.

Лекция №13 (2 часа, 1/18 кредита). Построение поверхностей в системе SCAD. Построение стандартных поверхностей. Построение поверхностей по заданному уравнению. Построение поверхностей по параметрическим уравнениям.

Лекция №14 (2 часа, 1/18 кредита). Проведение расчета поверхностей в системе SCAD. Вывод значений компонентов напряженно-деформированного состояния, анализ результатов.

Лекция №15 (2 часа, 1/18 кредита). Расчет поверхностей оболочек в составе тонкостенных пространственных конструкций в системе SCAD.

Лекция №16 (2 часа, 1/18 кредита). Использование программ, входящих в проектно-вычислительный комплекс SCAD OFFICE, при расчете тонкостенных пространственных конструкций.

Лекция №17 (2 часа, 1/18 кредита). Обзор других современных расчетных комплексов, предназначенных для расчета и проектирования строительных конструкций (Лира, STARK ES, NASTRAN, ANSYS).

Лекция №18 (2 часа, 1/18 кредита). Экспорт расчетных схем в другие системы. Сравнительный анализ результатов расчета в различных расчетных комплексах.

Лекции проходят в компьютерном зале с использованием компьютеров. Для проведения лекций необходимы компьютеры с установленным

комплексом SCAD OFFICE. Количество студентов в группе – не более 10 человек.

На практических занятиях производится контроль знаний и выполнение примеров по теме соответствующих лекций и семинарских занятий с использованием компьютеров.

Описание системы контроля знаний:

Контроль знаний производится на практических занятиях посредством проведения теоретических либо практических работ с использованием компьютеров.

Рубежный контроль 1. (0,5 часа, $\frac{1}{72}$ кредита).

Рубежный контроль 2. (0,5 часа, $\frac{1}{72}$ кредита).

Рубежный контроль 3. (0,5 часа, $\frac{1}{72}$ кредита).

Рубежный контроль 4. (0,5 часа, $\frac{1}{72}$ кредита).

Рубежный контроль (текущая аттестация студентов) производится в плановые часы занятий. Каждый студент индивидуально выполняет теоретическую (тест) или практическую работу. Рубежный контроль проводится четыре раза в семестр (в сентябре, октябре, ноябре и декабре осеннего семестра и феврале, марте, апреле и мае весеннего семестра) с проставлением результатов с 20-го по последний день текущего месяца на сайте контроля текущей успеваемости студентов. После наступления нового месяца, проставленные баллы за предыдущий месяц, не могут быть исправлены. Кроме аттестационных работ студент выполняет курсовой проект и сдает его до окончания курса.

Баллы проставляются нарастающим итогом и в конце курса по их количеству определяется дальнейшее действия студента: согласие на автоматическое выставление оценки или участие в экзамене.

Общие правила выполнения контрольных заданий

Устанавливаются и доводятся до сведения студентов следующие условия начисления баллов по курсу и на рубежной аттестации:

- посещение лекций, практических занятий за 2 часа (пару) – 1 балл (всего максимум 18 - лекции, 18 – практические дают в сумме 36 баллов);
- рубежный контроль, каждый до 8 баллов (всего максимум студент на 4-х аттестациях может получить в сумме 32 балла)
- курсовой проект – максимум 32 балла.

Студент за время обучения в семестре может набрать до 100 баллов.

Примерные типы работ

Теоретические:

Рубежный контроль проводится в письменной форме в виде теста. Студент должен ответить на восемь вопросов, выбрав по каждому один из четырех предложенных ответов. За каждый правильный ответ он получает 1 балл.

Практические:

Рубежный контроль проводится на компьютере. Студент демонстрирует владение материалом, полученным на соответствующих лекциях и практических работах. По результатам работы выставляются баллы до 8.

Курсовой проект:

Курсовой проект основывается на самостоятельном практическом применении полученных в течение курса знаний.

Шкала оценок, итоговые оценки (методика выставления).

Сумма баллов, набранная студентом на аттестациях, позволяет получить оценку по итогам работы в семестре и не сдавать экзаменов,

исходя из следующей шкалы (1-й и 2-й столбцы таблицы 1). Студенты, получившие оценки за экзамены по результатам работы в семестре, но претендующие на получение более высокой оценки, могут участвовать в сдаче экзаменов в сессию (см. 3, 4 и 5 столбцы таблицы 1).

Таблица 1

Сумма баллов, полученная за семестр на аттестациях	Автоматическая оценка за работу в семестре	Баллы, полученные на экзамене	Общая сумма баллов за работу в семестре и на экзамене	Итоговая оценка
91 – 100	5	-	91 - 100	5
76 – 90	4	0 -25	76 – 100 более 100	4 5
56 – 75	3	0 – 25	56 – 85 86 - 100	3 4
35 – 55	нет, обязательная сдача экзамена	0 - 25	60 - 80	3
менее 35	нет	недопуск	менее 35	2

Таблица 2

Сумма баллов, полученная за семестр на аттестациях	Автоматическая оценка за работу в семестре	Баллы, полученные на зачете	Общая сумма баллов за работу в семестре и на зачете	Итоговая оценка
> 55	Зачет	-	> 55	Зачет
35 - 55	нет, обязательная сдача зачета	0 - 25	не менее 60	Зачет
менее 35	нет	-	менее 35	Незачет

Зачет можно получить по результатам работы в семестре (см. 1-й и 2-й столбцы таблицы 2) или приняв участие в зачетной сессии (см. 3, 4 и 5

столбцы таблицы 2).

Результаты проставляются в зачетные ведомости и книжки:

- зачеты – в день проведения зачета;

- экзамены – в день проведения экзамена при наличии штампа допуска к сессии.

Лекционный курс имеет трудоемкость 1 кредит. (18 лекций по 2 часа, $\frac{1}{18}$ кредита).

Практические занятия и текущий контроль знаний имеют общую трудоемкость 1 кредит (18 практически занятий по 2 часа, $\frac{1}{18}$ кредита).

Программа курса УМК

Аннотированное содержание курса

В настоящее время основополагающими принципами строительства являются эффективность применяемых конструкций, экономия строительных материалов и архитектурная выразительность зданий и сооружений. Применение тонкостенных пространственных конструкций в качестве покрытий и перекрытий строительных сооружений в полной мере удовлетворяет всем перечисленным требованиям.

Тонкостенные пространственные конструкции представляют собой системы, состоящие из тонких оболочек или пластин, подкрепленных опорными элементами. Оболочечные системы обладают множеством достоинств и широко применяются в различных отраслях техники: авиастроении, судостроении, машиностроении. В строительстве тонкостенные пространственные конструкции в основном используются в качестве большепролётных покрытий сооружений: спортивных объектов, ангаров, выставочных залов, рынков, промышленных зданий. Такие покрытия особенно целесообразны при перекрытии больших пролетов без промежуточных опор, когда применение плоских конструкций затруднительно. Если плоские конструкции покрытий способны перекрыть пролет максимум 24 м, то тонкостенные пространственные покрытия – до 100 м и более. Это происходит благодаря особенностям работы пространственной конструкции покрытия под нагрузкой (безмоментность и работа оболочки в плане в двух направлениях).

Используя тонкостенные пространственные конструкции, достигают лучшего использования материалов, их существенную экономию. Меньшая материалоемкость влечет за собой меньшую массу покрытия и, как следствие, меньшую нагрузку на низлежащие конструкции. Практика показала, что пространственные покрытия экономичнее плоских на 25-40%.

Существует огромное множество поверхностей оболочек, которые могут быть использованы в пространственных покрытиях. Оболочки, очерченные по различным поверхностям, по-разному вписываются в конструкцию и по-разному ведут себя под нагрузкой. Поэтому выбор поверхности оболочки должен быть рационален не только с точки зрения эстетичности, но с точки зрения прочностных свойств конструкции. Применение оболочечных систем придает сооружению особенную архитектурную выразительность.

Кроме покрытий строительных сооружений оболочечные системы находят применение в различных специальных сооружениях: резервуары

для хранения жидких и сыпучих материалов, газгольдеры, плотины, тоннели и др. Кроме того, оболочки, очерченные по винтовым поверхностям, применяются при проектировании круговых пандусов и лестниц.

Несмотря на все свои преимущества строительные пространственные конструкции получили не достаточно широкое распространение из-за сложности проектирования и возведения. Возможно, в будущем с развитием теории проектирования и технологии возведения строительных конструкций эти недостатки станут менее важными. По крайней мере, появление компьютера (а именно компьютерных расчетных программ) уже значительно упростило процесс проектирования и расширило круг доступных для расчета пространственных конструкций.

Предлагаемый курс посвящен расчету оболочек, входящих в состав тонкостенных пространственных конструкций, с использованием современных компьютерных расчетных программ (на примере проектно-вычислительного комплекса SCAD OFFICE). SCAD OFFICE, как и большинство программных комплексов, предназначенных для расчета и проектирования строительных конструкций, в качестве теоретической основы использует метод конечных элементов как наиболее универсальный и относительно простой в алгоритмизации. Несмотря на то, что этот метод считается приближенным, он обладает достаточной точностью для использования в практических расчетах и благодаря реализации в современных расчетных программах позволяет выполнять расчеты в кратчайшие сроки.

Эффективность тонкостенных пространственных конструкций в первую очередь обусловлена геометрическими характеристиками оболочек, входящих в их состав. От пластин оболочки отличаются криволинейностью своей поверхности. Оболочкой называют тело, изогнутое в одном или двух направлениях без изломов и острых вершин и имеющее толщину намного меньшую, чем два других линейных размера. В тонкостенных пространственных конструкциях используют тонкие оболочки, у которых отношение толщины к наименьшему радиусу кривизны не более $1/20$.

Поверхность, которая делит пополам толщину оболочки, называется срединной поверхностью. Форма срединной поверхности и толщина оболочки полностью описывают ее с геометрической стороны.

Существенное место в теории оболочек занимает изучение геометрических характеристик криволинейных поверхностей и способов построения этих поверхностей. Любая поверхность как геометрическое место точек может быть задана уравнением в явной или неявной форме, либо тремя параметрическими уравнениями.

В курсе рассматриваются практически все типы и виды поверхностей, описанных аналитически на сегодняшний момент.

Проектно-вычислительный комплекс SCAD OFFICE включает несколько программ, предназначенных для различных целей. Основной программой, в которой происходит построение расчетной схемы, ее расчет и анализ результатов, является программа SCAD.

Работа с программой SCAD заключается в задании исходных данных (создание геометрии расчетной схемы, назначение жесткостных характеристик и граничных условий, задание нагрузок), проведении расчета (линейный и нелинейный расчет, расчет на сочетание нагрузок или усилий, расчет на устойчивость и другие варианты расчета). После проведения расчета появляется возможность анализа результатов, отображаемых графически или численно.

Из огромного множества поверхностей наиболее распространенными в строительстве являются следующие классы:

- линейчатые поверхности;
- поверхности вращения;
- поверхности переноса;
- винтовые поверхности.

Линейчатая поверхность - поверхность, полученная движением прямолинейной образующей по направляющей кривой.

Поверхность вращения – поверхность, полученная вращением криволинейной образующей вокруг оси oz .

Поверхность переноса – поверхность, полученная параллельным переносом криволинейной образующей по криволинейной направляющей.

Винтовая поверхность – поверхность, полученная винтовым движением (вращением вокруг оси oz и одновременным поступательным перемещением в направлении оси oz) криволинейной образующей.

В прилагаемом к курсу справочном пособии рассматривается построение и расчет практически всех видов поверхностей, относящихся к перечисленным классам, а также к другим менее распространенным классам. Для каждой поверхности приведены уравнения задания, методика построения и расчета в SCAD с конкретными геометрическими размерами.

Освоив предлагаемую методику построения и расчета поверхностей, студент получает возможность самостоятельно разработать уникальный вид поверхности и проанализировать напряженно-деформированное состояние в полученной поверхности, что стимулирует студента к дальнейшему изучению дисциплины “Строительная механика пластин и оболочек” и проведению аналитического расчета данной поверхности.

Список обязательной и дополнительной литературы:

1. С.Н. Кривошапко, В.Н. Иванов, С.М. Халаби “Аналитические поверхности: материалы по геометрии 500 поверхностей и информация к расчету на прочность тонких оболочек” – М.: Наука, 2006 - 544 с.
2. А.В. Перельмутер, В. И. Сливкер “Расчетные модели сооружений и возможность их анализа” – М.: ДМК Пресс, 2007 - 595 с.
3. С.Н. Кривошапко “Торсовые поверхности и оболочки: Справочник” – М.: Издательство УДН, 1991 – 287 с.
4. В.П. Агапов “Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости конструкций” – М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2004 – 248 с.
5. Р.А. Хечумов, Х. Кеплер, В.И. Прокопьев “Применение метода конечных элементов к расчету конструкций: Учебное пособие для технических вузов” – М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 1994 – 353 с.
6. В. Флюгге “Статика и динамика оболочек” – М.: Госстройиздат, 1961 – 290 с.

Темы курсовых проектов:

Темы курсовых проектов выбираются студентами с согласованием с преподавателем. Курсовой проект основан на самостоятельной разработке определенного вида поверхности, анализе напряженно-деформированного состояния этой поверхности и применении полученной поверхности в конкретной строительной конструкции с численным обоснованием. Таким образом, тему курсового проекта называет и развивает сам студент, что способствует стимулированию ответственности и стремлению качественно выполнить поставленную задачу. Прделанная студентами работа может послужить дополнительным материалом для последующего переиздания справочного пособия по предлагаемому курсу.

Учебный тематический план курса УМК

Учебная неделя	Виды занятий	
1	Лекция 1 (2 ч., $\frac{1}{18}$ кредита)	Практическое занятие 1 (2 ч., $\frac{1}{18}$ кред.)
2	Лекция 2 (2 ч., $\frac{1}{18}$ кредита)	Практическое занятие 2 (2 ч., $\frac{1}{18}$ кред.)
3	Лекция 3 (2 ч., $\frac{1}{18}$ кредита)	Практическое занятие 3 (2 ч., $\frac{1}{18}$ кред.)
4	Лекция 4 (2 ч., $\frac{1}{18}$ кредита) Рубежный контроль 1. (0,5 часа, $\frac{1}{72}$ кредита)	Практическое занятие 4 (2 ч., $\frac{1}{18}$ кред.)
5	Лекция 5 (2 ч., $\frac{1}{18}$ кредита)	Практическое занятие 5 (2 ч., $\frac{1}{18}$ кред.)
6	Лекция 6 (2 ч., $\frac{1}{18}$ кредита)	Практическое занятие 6 (2 ч., $\frac{1}{18}$ кред.)
7	Лекция 7 (2 ч., $\frac{1}{18}$ кредита)	Практическое занятие 7 (2 ч., $\frac{1}{18}$ кред.)
8	Лекция 8 (2 ч., $\frac{1}{18}$ кредита) Рубежный контроль 2. (0,5 часа, $\frac{1}{72}$ кредита)	Практическое занятие 8 (2 ч., $\frac{1}{18}$ кред.)
9	Лекция 9 (2 ч., $\frac{1}{18}$ кредита)	Практическое занятие 9 (2 ч., $\frac{1}{18}$ кред.)
10	Лекция 10 (2 ч., $\frac{1}{18}$ кредита)	Практическое занятие 10 (2 ч., $\frac{1}{18}$ кред.)
11	Лекция 11 (2 ч., $\frac{1}{18}$ кредита)	Практическое занятие 11 (2 ч., $\frac{1}{18}$ кред.)
12	Лекция 12 (2 ч., $\frac{1}{18}$ кредита) Рубежный контроль 3. (0,5 часа, $\frac{1}{72}$ кредита)	Практическое занятие 12 (2 ч., $\frac{1}{18}$ кред.)
13	Лекция 13 (2 ч., $\frac{1}{18}$ кредита)	Практическое занятие 13 (2 ч., $\frac{1}{18}$ кред.)

14	Лекция 14 (2 ч., $\frac{1}{18}$ кредита)	Практическое занятие 14 (2 ч., $\frac{1}{18}$ кред.)
15	Лекция 15 (2 ч., $\frac{1}{18}$ кредита)	Практическое занятие 15 (2 ч., $\frac{1}{18}$ кред.)
16	Лекция 16 (2 ч., $\frac{1}{18}$ кредита)	Практическое занятие 16 (2 ч., $\frac{1}{18}$ кред.)
17	Лекция 17 (2 ч., $\frac{1}{18}$ кредита) Рубежный контроль 4. (0,5 часа, $\frac{1}{72}$ кредита)	Практическое занятие 17 (2 ч., $\frac{1}{18}$ кред.)
18	Лекция 18 (2 ч., $\frac{1}{18}$ кредита)	Практическое занятие 18 (2 ч., $\frac{1}{18}$ кред.)
Экзаменационная сессия	Экзамен	

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
Глава 1. ГЕОМЕТРИЯ ОБОЛОЧЕК.....	6
1.1. Аналитическое выражение поверхности	6
1.2. Линейный элемент поверхности и первая квадратичная форма	7
1.3. Расстояние от точки поверхности до касательной плоскости и вторая квадратичная форма.....	11
1.4. Аналитическое определение главных направлений и главных кривизн	14
1.5. Создание поверхностей в SCAD.....	17
Глава 2. РАСЧЕТ ОБОЛОЧЕК	22
2.1. Напряженно-деформированное состояние оболочек	22
2.2. Метод конечных элементов	27
2.3. Расчет оболочек в SCAD	29
Глава 3. ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ И РАСЧЕТА	31
РАЗВЕРТЫВАЮЩИЙСЯ (ЭВОЛЬВЕНТНЫЙ) ГЕЛИКОИД.....	32
РЕЗНАЯ ЛИНЕЙЧАТАЯ ПОВЕРХНОСТЬ МОНЖА С КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ НАПРАВЛЯЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ	34
РАЗВЕРТЫВАЮЩИЙСЯ ГЕЛИКОИД С РЕБРОМ ВОЗВРАТА НА ПАРАБОЛОИДЕ ВРАЩЕНИЯ.....	36
ТОРС С РЕБРОМ ВОЗВРАТА, ЗАДАННОМ В ВИДЕ $x = e^{-t} \cdot \cos t, y = e^{-t} \cdot \sin t, z = e^{-t}$	38
ТОРС С РЕБРОМ ВОЗВРАТА В ФОРМЕ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ДВУХ ЦИЛИНДРОВ С ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫМИ ОСЯМИ	40
ТОРС С ДВУМЯ ПАРАБОЛАМИ, ОСИ КОТОРЫХ ПЕРЕСЕКАЮТСЯ.....	42
ТОРС С ДВУМЯ ЭЛЛИПСАМИ, ЛЕЖАЩИМИ В ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПЛОСКОСТЯХ, И С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ОСЯМИ.....	44
ТОРС С ПАРАБОЛОЙ И ОКРУЖНОСТЬЮ В ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПЛОСКОСТЯХ....	46
ТОРС ОДИНАКОВОГО СКАТА С НАПРАВЛЯЮЩИМ ЭЛЛИПСОМ	48
ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ВИНТОВАЯ ПОВЕРХНОСТЬ (ПОЛОСА)	50
ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ЦИЛИНДР	52
ПРЯМАЯ АСТРОИДАЛЬНАЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ.....	54
ПРЯМОЙ ЦИЛИНДР С НАПРАВЛЯЮЩЕЙ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ СПИРАЛЬЮ ..	56
ЦИЛИНДРО-КОНИЧЕСКАЯ ВИНТОВАЯ ПОЛОСА	58
НАКЛОННЫЙ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДР	60
НАКЛОННЫЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ЦИЛИНДР	62
ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ КОНИЧЕСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ	64
НАКЛОННАЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ КОНИЧЕСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ.....	66
КОНИЧЕСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ С НАПРАВЛЯЮЩЕЙ КРИВОЙ В ФОРМЕ АНЪЕЗИАНЫ	68
ПРЯМАЯ КОНИЧЕСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ С ПЛОСКОЙ НАПРАВЛЯЮЩЕЙ КРИВОЙ В ФОРМЕ КРУГОВОЙ СИНУСОИДЫ	70
КОСОЙ ГЕЛИКОИД	72
ЗОНТИК УИТНИ (ЗОНТИК КАРТАНА).....	74
ПСЕВДО-РАЗВЕРТЫВАЮЩИЙСЯ ГЕЛИКОИД.....	75
ПАРАБОЛИЧЕСКИЙ КОНОИД	78
КОНОИД С НАПРАВЛЯЮЩЕЙ ОКРУЖНОСТЬЮ	80

ПРЯМОЙ СИНУСОИДАЛЬНЫЙ КОНОИД	82
ЦИЛИНДРОИД С ДВУМЯ НАПРАВЛЯЮЩИМИ ЭЛЛИПСАМИ	84
ОДНОПОЛОСТНЫЙ ГИПЕРБОЛОИД ВРАЩЕНИЯ	86
ПАРАБОЛОИД ВРАЩЕНИЯ	88
КРУГОВОЙ ТОР	90
ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ТОР	92
ПОВЕРХНОСТЬ СОПРЯЖЕНИЯ ДВУХ СООСНЫХ ЦИЛИНДРОВ РАЗНЫХ ДИАМЕТРОВ	94
ПОВЕРХНОСТЬ ВРАЩЕНИЯ С ЗАТУХАЮЩИМИ ОКРУЖНЫМИ ВОЛНАМИ	96
ПОВЕРХНОСТЬ ВРАЩЕНИЯ ОБЩЕЙ СИНУСОИДЫ	98
ПОВЕРХНОСТЬ ВРАЩЕНИЯ “ЯЙЦО”	100
КРУГОВАЯ ПОВЕРХНОСТЬ ПЕРЕНОСА (положительной гауссовой кривизны)	102
КРУГОВАЯ ПОВЕРХНОСТЬ ПЕРЕНОСА (отрицательной гауссовой кривизны).....	104
ПОВЕРХНОСТЬ ПЕРЕНОСА СИНУСОИДЫ ПО СИНУСОИДЕ.....	106
ДИАГОНАЛЬНАЯ ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ ПЕРЕНОСА	108
СИНУСОИДАЛЬНЫЙ ВЕЛАРОИД.....	110
ТЕМЫ КУРСОВЫХ РАБОТ.....	112
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	113
ОПИСАНИЕ КУРСА И ПРОГРАММА.....	115