ПРИОРИТЕТНЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ПРОЕКТ «ОБРАЗОВАНИЕ»
РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

А.Л. СКУБАЧЕВСКИЙ

НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ МНОГОМЕРНЫХ ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ И ПРОЦЕССОВ ТЕРМОРЕГУЛЯЦИИ ЖИВЫХ КЛЕТОК

Учебное пособие

Москва
2008

Инновационная образовательная программа
Российского университета дружбы народов

«Создание комплекса инновационных образовательных программ и формирование инновационной образовательной среды, позволяющих эффективно реализовывать государственные интересы РФ через систему экспорта образовательных услуг»

Экспертное заключение –

доктор физико-математических наук, профессор *В.А. Кондратьев*

Скубачевский А.Л.

Нелокальные краевые задачи и их приложения к исследованию многомерных диффузионных процессов и процессов терморегуляции живых клеток: Учеб. пособие. – М.: РУДН, 2008. – 374 с.

Настоящее учебное пособие посвящено теории нелокальных эллиптических задач и их приложению к многомерным диффузионным процессам. Наличие нелокальных членов может привести к возникновению степенных особенностей решений даже в случае гладкой границы. Поэтому решение нелокальных эллиптических задач рассматривается в весовых пространствах, теория которых излагается в начале учебного пособия. Пособие в значительной мере основано на исследованиях автора и на курсах, читавшихся им для студентов и преподавателей математики в Российском университете дружбы народов, Московском авиационном университете и Университете им. Юстаса Либиха в г. Гиссене (Германия).

Для студентов магистратуры, обучающихся по направлению «Функциональные методы в дифференциальных уравнениях и междисциплинарных исследованиях».

Учебное пособие выполнено в рамках инновационной образовательной программы Российского университета дружбы народов, направление «Комплекс экспортоориентированных инновационных образовательных программ по приоритетным направлениям науки и технологий», и входит в состав учебно-методического комплекса, включающего описание курса, программу и электронный учебник.

Оглавление

Введение **5**

Глава 1. Весовые пространства **16**

1.1. Весовые пространства в углах и $\mathbb{R}^n$ 16

1.2. Функциональные пространства с неоднородным весом . . . 32

1.3. Весовые пространства в ограниченных областях 41

Библиографические примечания к главе 1 52

Задачи к главе 1 52

Темы курсовых работ к главе 1 54

Глава 2. Модельные задачи в углах **55**

2.1. Нелокальные эллиптические задачи
в плоских углах 55

2.2. Асимптотическое поведение решений в плоских углах . . . 71

2.3. Нелокальные эллиптические задачи в двугранных углах . 92

2.4. Локальные эллиптические задачи в $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{P}$ 137

Библиографические примечания к главе 2 157

Задачи к главе 2 158

Темы курсовых работ к главе 2 160

Нерешенные задачи к главе 2 161

**Глава 3. Разрешимость эллиптических задач
в ограниченных областях с нелокальными условиями
вблизи границы** **162**

3.1. Локальные эллиптические задачи в плоских областях
с угловыми точками 162

3.2. Нелокальные эллиптические задачи в плоских областях
с носителями нелокальных членов вне множества точек
сопряжения 174

3.3. Нелокальные эллиптические задачи в плоских областях с носителями нелокальных членов вблизи множества точек сопряжения 208
Библиографические примечания к главе 3 241
Задачи к главе 3 242
Темы курсовых работ к главе 3 245
Нерешенные задачи к главе 3 246

Глава 4. Приложения к теории многомерных диффузионных процессов **248**
4.1. Определения и вспомогательные результаты 248
4.2. Полугруппа Феллера, порожденная эллиптическим дифференциальным оператором 256
4.3. Полугруппа Феллера, порожденная эллиптическим интегро-дифференциальным оператором 271
4.4. Некоторые примеры 281
Библиографические примечания к главе 4 287
Задачи к главе 4 287
Темы курсовых работ к главе 4 289
Нерешенные задачи к главе 4 290

Приложения **291**
Приложение A. Линейные операторы 291
Приложение B. Функциональные пространства 304
Приложение C. Обобщенные решения эллиптических задач . . 318

Литература **335**

Описание курса и программа **340**

Введение

I. Эта книга посвящена новой теории нелокальных эллиптических краевых задач и ее приложениям к исследованию многомерных диффузионных процессов и процессов терморегуляции. Различные задачи в данной области изучались многими математиками. Однако ранее никто не рассматривал взаимосвязь между разными направлениями нелокальных эллиптических задач и их приложениями.

Как известно, в классических постановках краевых задач для эллиптических уравнений в каждой точке границы ∂Q области $Q \subset \mathbb{R}^n$ задаются значения неизвестной функции или линейная комбинация неизвестной функции и ее производных. Такие задачи естественно называть локальными. В отличие от локальных краевых задач в нелокальных краевых задачах задается связь между значениями неизвестной функции и ее производных в каждой точке границы ∂Q со значениями на некотором множестве $\Omega \subset \overline{Q}$. Физически такие задачи возникают при аналитическом описании диффузионных процессов, допускающих прыжки частиц с мембраны живой клетки внутрь клетки или в другие точки мембраны, а также процессов управления распределением тепла.

Одной из первых работ, посвященных нелокальным эллиптическим краевым задачам, была работа Т. Карлемана [42], результаты которой он изложил на пленарном докладе во время Международного конгресса математиков в 1932 г. Т. Карлеман рассмотрел задачу о нахождении голоморфной функции в области $Q \subset \mathbb{C}$, удовлетворяющей нелокальному краевому условию, связывающему значения неизвестной функции в точке t границы ∂Q со значениями в точке $\alpha(t)$, где $\alpha(\alpha(t)) \equiv t$ и $\alpha(\partial\Omega) = \partial\Omega$. Данная задача была сведена им к сингулярному интегральному уравнению со сдвигом. Библиографию дальнейших публикаций о сингулярных интегральных уравнениях со сдвигами можно найти в [32].

Независимо от указанных работ рассматривались абстрактные нелокальные эллиптические краевые задачи (см. статьи М. И. Вишика [7], Ф. Браудера [41] и др. В то время были известны лишь примеры эллиптических задач с носителями нелокальных членов на границе. Однако общие результаты, полученные в этих работах, образовали позднее теорию линейных операторов в банаховых пространствах [19], которая используется в современной теории эллиптических задач, включая нелокальные задачи.

Новая нелокальная краевая задача для эллиптического дифференциального уравнения, возникающая в теории плазмы, была сформулирована А. В. Бицадзе и А. А. Самарским [4]:

$$(Aw)(x) = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) w_{x_i x_j}(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) w_{x_i}(x) + a_0(x) w(x) = f_0(x) \quad (x \in Q), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} w(x)|_{M_1} &= b(x) w(\omega(x))|_{M_1} + f_1(x) \quad && (x \in M_1), \\ w(x)|_{M_2} &= f_2(x) && (x \in M_2). \end{aligned} \qquad (2)$$

Здесь

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i \xi_j > 0 \quad (0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n,\ x \in \overline{Q}),$$

$Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей ∂Q, $M_1 \subset \partial Q$ — $(n-1)$-мерное гладкое многообразие, открытое в топологии ∂Q, $M_2 = \partial Q \setminus M_1$ — $(n-1)$-мерное гладкое многообразие; $\omega(x)$ — C^∞-диффеоморфизм, отображающий некоторую окрестность Ω_1 многообразия M_1 на множество $\omega(\Omega_1)$ так, что $\omega(M_1) \subset Q$, a_{ij}, a_i, a_0, $b \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — вещественнозначные функции. Вообще говоря, $\omega(\overline{M}_1) \cap \partial Q \neq \varnothing$, см. рис. 1.

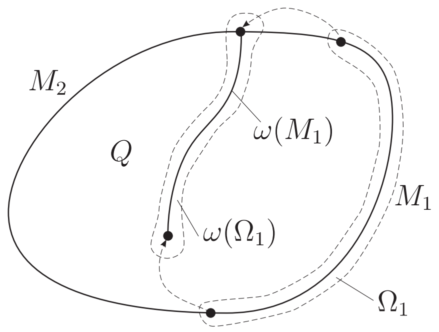

Рис. 1

В [4] была изучена следующая задача:

$$-\triangle w(x) = f_0(x) \quad (x \in Q = (0,2) \times (0,1)), \tag{3}$$

$$\begin{aligned} w(x_1, 0) = w(x_1, 1) = 0 \qquad\qquad & (0 \leqslant x_1 \leqslant 2), \\ w(0, x_2) = \gamma_1 w(1, x_2), \quad w(2, x_2) = \gamma_2 w(1, x_2) \qquad & (0 \leqslant x_2 \leqslant 1) \end{aligned} \tag{4}$$

для $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 1$, где $\triangle$ — оператор Лапласа, $x = (x_1, x_2)$, см. рис. 2.

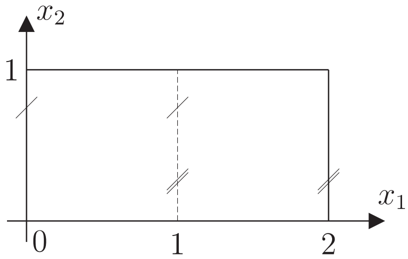

Рис. 2

Поскольку носитель нелокальных членов $\{1\} \times [0,1]$ в задаче (3), (4) имеет пустое пересечение с множеством $\{2\} \times [0,1]$, эта задача была сведена к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Равенства $\gamma_1 = 0$ и $\gamma_2 = 1$ позволяют применить принцип максимума. Таким образом, была доказана единственность классического решения задачи (3), (4). Из единственности решения и теоремы Фредгольма следует существование решения.

В общем случае задача (1), (2) оказалась значительно более сложной. *Вопрос о разрешимости нелокальных эллиптических задач вида* (1), (2) *был сформулирован как нерешенная задача* [27]. Различные случаи эллиптических задач с нелокальными краевыми условиями вида (2) изучались многими авторами. Большинство публикаций было посвящено случаю $M_2 = \varnothing$, $\omega(\partial Q) \cap \partial Q = \varnothing$. В противном случае авторы предполагали, что множество $\omega(M_1)$ удовлетворяет некоторым жестким геометрическим условиям вблизи границы ∂Q, например $\overline{\omega(M_1)} \cap \overline{M}_1 = \varnothing$.

Лишь последние достижения в теории уравнений в частных производных и функционально-дифференциальных уравнений позволили исследовать проблему разрешимости для широкого класса нелокальных эллиптических краевых задач [28–30]. В этих работах была создана классификация нелокальных эллиптических краевых задач, основанная на геометрической структуре носителей нелокальных членов:

(a) $M_2 = \varnothing$, $\omega(\partial Q) \subset Q$, см. рис. 3,

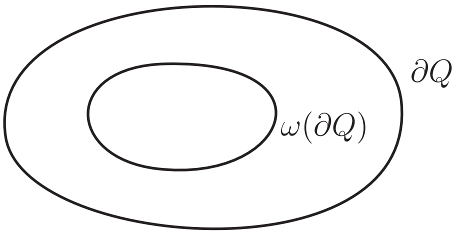

Рис. 3

(b) $M_2 \neq \varnothing$, $\overline{\omega(M_1)} \cap (\overline{M}_1 \setminus M_1) = \varnothing$, см. рис. 4,

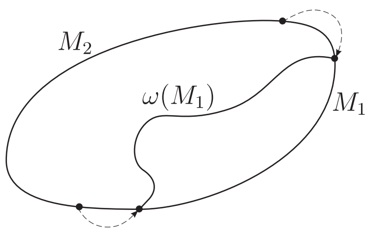

Рис. 4

(c) $M_2 \neq \varnothing$, $\overline{\omega(M_1)} \cap (\overline{M}_1 \setminus M_1) \neq \varnothing$, см. рис. 5.

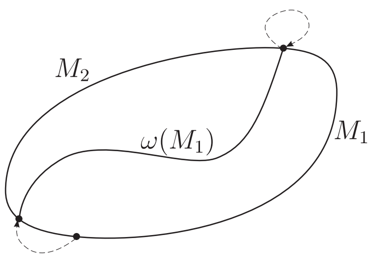

Рис. 5

В соответствии с этой классификацией были изучены фредгольмова и однозначная разрешимость в пространствах Соболева и весовых пространствах Кондратьева, свойства индекса, спектральные свойства соответствующих операторов, асимптотическое поведение решений вблизи точек сопряжения, гладкость обобщенных решений и связь с эллиптическими функционально-дифференциальными уравнениями. Систематическому изложению этой теории посвящена монография [32].

В первом случае, грубо говоря, добавление нелокальных членов не меняет основных свойств эллиптической задачи: имеет место гладкость решений, фредгольмово свойство соответствующего оператора, устойчивость индекса по отношению к произвольным нелокальным возмущениям, дискретность и секториальная структура спектра оператора. Второй и третий случаи значительно более трудные, так как носитель нелокальных членов имеет непустое пересечение с границей. Это приводит к появлению степенных особенностей у решений вблизи множества точек сопряжения $\overline{M}_1 \setminus M_1$. Поэтому нелокальные эллиптические задачи естественно рассматривать в весовых пространствах. Во втором случае добавление нелокальных членов не меняет свойства фредгольмовости и индекса соответствующей локальной эллиптической задачи в весовых пространствах, определенных с помощью расширенного множества точек сопряжения. В третьем случае нелокальная эллиптическая задача может не быть фредгольмовой, в то время как локальная задача фредгольмова. Обратно, нелокальная эллиптическая задача может быть фредгольмовой, тогда как локальная задача не является фредгольмовой. Более того, сколь угодно малые коэффициенты в нелокальных членах могут привести к нарушению гладкости обобщенных решений нелокальной краевой задачи [29].

В первом случае разрешимость нелокальных эллиптических краевых задач в различных пространствах и спектральные свойства соответствующих операторов рассматривались позднее в работах [24, 50, 51] и др. Второй и третий случаи изучались в дальнейшем в [11, 13, 17, 26, 35, 46–48, 51, 52].

II. Нелокальные эллиптические краевые задачи имеют важные приложения к теории многомерных диффузионных процессов и процессов терморегуляции.

В классических исследованиях диффузионных процессов предполагалось, что частица, достигшая мембраны живой клетки, может поглотиться или отразиться. Аналитически эти явления описываются уравнением диффузии с условиями Дирихле или Неймана, соответственно. В середине XX века в биофизике обнаружились новые явления, связанные со случайными блужданиями частиц в живой клетке. А именно: частица, попавшая на мембрану, может совершать малые колебания вблизи мембраны (вязкость), диффузию вдоль мембраны или прыжки с мембраны внутрь клетки или в другую точку мембраны. Аналитически эти явления описываются уравнением диффузии с краевыми условиями, содержащими дифференциальные операторы по пространственным переменным, входящие в уравнение диффузии, дифференциальные операторы второго порядка по касательным направлениям к границе или интегралы по замыканию области.

В работах [43, 44] У. Феллер полностью охарактеризовал аналитическую структуру одномерных диффузионных процессов. Он доказал, что если обыкновенный дифференциальный оператор второго порядка является генератором неотрицательной сжимающей сильно непрерывной полугруппы, то его область определения состоит из функций, удовлетворяющих нелокальным краевым условиям. Позднее такие полугруппы назвали полугруппами Феллера. Обратно, он доказал, что если обыкновенный дифференциальный оператор второго порядка определен на множестве достаточно гладких функций, удовлетворяющих таким нелокальным краевым условиям, то замыкание этого оператора есть генератор полугруппы Феллера. Аналогичная задача для многомерных диффузионных процессов в ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^n$ изучалась А. Д. Вентцелем [5]. Он получил общий вид краевых условий для генератора полугруппы Феллера. В общем случае эти условия содержат значения функции и ее производных вплоть до второго порядка на ∂Q и интеграл по $\overline{Q}$.

Интеграл соответствует диффузии в клетке, когда частица, попадающая на мембрану, может позднее «перепрыгнуть» в точку $x \in \overline{Q}$ (см. рис. 6). Проблема существования полугрупп Феллера изучалась только в так называемом «трансверсальном» случае (см. [5, 49, 53]). Аналитически в трансверсальном случае краевые условия содержат производные функции. Поэтому нелокальное возмущение имеет низший порядок по сравнению со старшими членами. *В нетрансверсальном случае пробле-*

ма существования полугрупп Феллера является нерешенной.

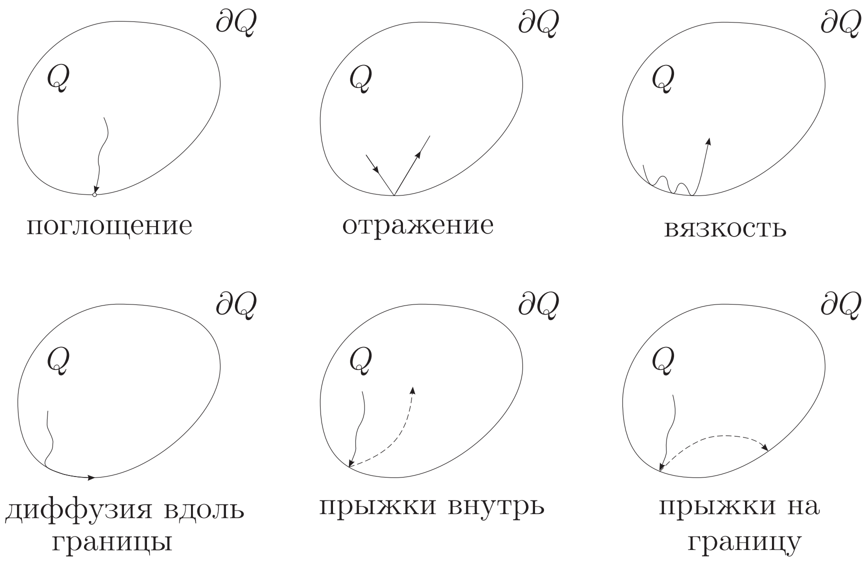

Рис. 6

В этом случае при помощи теоремы Хилле—Иосиды проблему существования полугруппы Феллера можно свести к следующей нелокальной эллиптической задаче:

$$Aw(x) + \lambda w(x) = f_0(x) \qquad (x \in Q), \tag{5}$$

$$\gamma(x)w(x) + \int\limits_{\overline{Q}} [w(x) - w(y)]\, m(x, dy) = 0 \qquad (x \in \partial Q). \tag{6}$$

Здесь A — эллиптический оператор вида (1), $a_0(x) \geqslant 0$ $(x \in \overline{Q})$, $\lambda > 0$, $\gamma(x) \geqslant 0$ $(x \in \partial Q)$, $m(x, \cdot\,)$ — неотрицательная борелевская мера. В частности, если $\gamma(x) = 1$, $m(x, \overline{Q}) = 0$ $(x \in M_2)$, $\gamma(x) = 0$, $m(x, \omega(x)) = 1$ и $m(x, \overline{Q} \setminus \omega(x)) = 0$ $(x \in M_1)$, то мы получим однородные нелокальные условия (2) с $b(x) = 1$. Таким образом, теория многомерных диффузионных процессов тесно связана с теорией нелокальных эллиптических краевых задач. Применение теории нелокальных эллиптических краевых задач позволило создать новый метод исследования многомерных диффузионных процессов в обоих случаях: как трансверсальном, так и нетрансверсальном [9, 31, 50].

Независимо от указанных выше работ, посвященных исследованию полугрупп Феллера для эллиптических дифференциальных операторов с нелокальными краевыми условиями, ряд авторов изучали эллиптические интегро-дифференциальные операторы с «локальными» краевыми условиями, возникающие при описании диффузионных процессов со скачками внутри живой клетки [40]. Отметим, что методы, изучаемые в данной книге, позволяют изучать эллиптические интегро-дифференциальные операторы с нелокальными краевыми условиями [9]. Такие операторы соответствуют диффузионным процессам, содержащим скачки как из одной точки клетки в другую, так и из точек мембраны в другие клетки мембраны.

Рассмотрим также другие приложения теории нелокальных эллиптических краевых задач. Как уже упоминалось, задача (1), (2) возникает в теории плазмы [27]. Физически этой задаче соответствует стационарное распределение тепла в реакторе, генерирующем плазму. При этом на части поверхности реактора M_2 задается некоторая температура, а на оставшейся части поверхности M_1 поддерживается температура, равная температуре на некоторой поверхности $\omega(M_1)$ внутри реактора. Такая задача может рассматриваться как задача управления процессом распределения тепла. Аналогичные задачи возникают также в математических моделях распределения тепла в живых клетках. Отметим, что математическая модель терморегуляции живых клеток и термоконтроля химических реакторов и сталелитейных конверторов в простейшем случае подробно рассмотрена в учебном пособии [12]. В рамках данной модели устройства нагрева занимают всю границу ∂Q области (мембрану клетки или поверхность химического реактора), а датчики температуры находятся внутри области Q. В определенном смысле описанная ситуация соответствует первому случаю классификации нелокальных краевых задач, т.е. решения не имеют особенностей на границе и их можно рассматривать в пространствах Соболева. В общем случае, когда нагревательные устройства занимают лишь часть границы M_1, решения могут иметь особенности на границе. Поэтому при исследовании проблемы термоконтроля необходимо использовать весовые пространства и технику, изложенную в настоящем учебном пособии.

III. Учебное пособие состоит из четырех глав и приложений. В конце каждой главы приводятся задачи для самоконтроля и контрольных работ, а также темы курсовых работ. Отдельно сформулированы нерешенные задачи.

Глава 1 посвящена теории весовых пространств. Рассматриваются весовые пространства Кондратьева в бесконечных углах и в пространстве $\mathbb{R}^n$, а затем и в ограниченных областях с конечным числом угловых точек или ребер. Изучаются основные свойства весовых пространств: эквивалентные нормы, существование операторов следа и поднятия, теоремы о компактности вложения, продолжение функций в бóльшую область, интерполяционные неравенства. Эти результаты используются для исследования разрешимости нелокальных эллиптических задач в бесконечных углах и в ограниченной области в главах 2 и 3. Исследуются также весовые пространства с неоднородным весом в плоских углах. Результаты, полученные для этих пространств, используются при изучении нелокальных эллиптических задач с параметром на единичной сфере в плоских углах, которые возникают в главе 2 при исследовании нелокальных эллиптических задач в двугранных углах.

В главе 2 рассматриваются нелокальные эллиптические задачи в бесконечных углах и локальные задачи в пространстве $\mathbb{R}^n$. Исследуются вопросы однозначной разрешимости и асимптотическое поведение решений в плоских углах в зависимости от величины угла, коэффициентов при нелокальных членах, показателя веса и показателя гладкости решения. Для пространственных нелокальных задач излагается метод сведения к нелокальным задачам в плоских углах с параметром на единичной сфере. Для локальных эллиптических задач в $\mathbb{R}^n$ доказано, что соответствующий оператор не может быть изоморфизмом ни при каких значениях весового параметра. Результаты главы 2 применяются в главе 3 для исследования фредгольмовой разрешимости нелокальных эллиптических задач в ограниченных областях.

Глава 3 посвящена разрешимости эллиптических задач в ограниченных областях с нелокальными условиями вблизи границы. Рассматриваются локальные и нелокальные эллиптические задачи в ограниченных областях, имеющих конечное число угловых точек или ребер. Для плоских областей получены необходимые и достаточные условия фредгольмовой разрешимости, а для пространственных областей — достаточные условия фредгольмовой разрешимости. Доказано, что в случае, когда носители нелокальных членов не подходят к точкам сопряжения нелокальная и соответствующая локальная задачи в весовых пространствах фредгольмовы или нет одновременно. В случае подхода нелокальных членов к точкам сопряжения дополнительно предполагается, что это подход — некасательный. В этом случае локальная задача может быть фредгольмовой, а нелокальная — нет.

В главе 4 рассматриваются математические модели многомерных диффузионных процессов, возникающие при описании случайных блужданий частиц в биологических клетках, включая эффекты прыжков. Получены достаточные условия существования полугрупп Феллера в наиболее трудном нетрансверсальном случае. Для доказательства используется сведение к нелокальным эллиптическим краевым задачам в ограниченных областях. Изложение главы 4 опирается на методы главы 3.

IV. Библиография приведена в конце учебного пособия. К обязательной литературе относятся книги и статьи по некоторым фундаментальным разделам функционального анализа, теории функциональных пространств и эллиптической теории [1, 8, 10, 12, 14–16, 19–21, 23, 36]. Для удобства читателя основные определения и результаты этих разделов, используемые нами, содержатся в приложениях. Кроме того, бóльшая часть результатов цитируемых выше работ содержится в учебных пособиях [2, 12, 38], написанных в рамках той же подпрограммы «Инновационного образовательного проекта», что и данная книга. В списке литературы обязательная литература отмечена звездочками.

V. Обозначения

$\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел;

$\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел;

$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел;

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел;

$\mathbb{R}^n$ — n-мерное вещественное пространство;

$\mathbb{C}^n$ — n-мерное комплексное пространство;

$B_R(x^0)$ — шар $\{x \in B : \|x - x^0\| < R\}$ в банаховом пространстве B;

$B_R = B_R(0)$;

$[a, b]$ — замкнутый интервал $\{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$;

(a, b) — открытый интервал $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$;

$\overline{Q}$ — замыкание Q;

$\prod$ — прямое произведение;

$\oplus$ — ортогональная сумма;

$\square$ — конец доказательства;

$k_1, k_2, \ldots$ и $c_1, c_2, \ldots$ — положительные константы, не зависящие от аргументов или неизвестных функций в неравенстве; в случае других предположений относительно констант это будет оговорено дополнительно.

VI. Учебное пособие предназначено для студентов магистратуры, обучающихся по направлению «Математика. Прикладная математика», и аспирантов.

Книга основана на научных исследованиях автора. Она является расширенным изложением специальных курсов, читавшихся автором и его учениками в Российском университете дружбы народов, Московском авиационном институте и университете им. Юстуса Либига в г. Гиссен (Германия).

Глава 1

Весовые пространства

1.1. Весовые пространства в углах и $\mathbb{R}^n$

Пространства $H_a^k(\Omega)$

Вначале мы рассмотрим плоский случай. Обозначим через

$$\theta = \{y \in \mathbb{R}^2 : d_1 < \varphi < d_2,\ 0 < r\}$$

плоский угол, где r, φ — полярные координаты точки y, $0 < d_2 - d_1 < 2\pi$. Предположим, что $\Omega = \theta$ или $\mathbb{R}^2$.

Определение 1.1.1. Введем весовое пространство Кондратьева $H_a^k(\Omega)$ как пополнение множества $C_0^\infty\big(\overline{\Omega} \setminus \{0\}\big)$ по норме

$$\|u\|_{H_a^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant k} \int_\Omega r^{2(a-k+|\alpha|)} \left| D^\alpha u(y) \right|^2 dy \right)^{1/2}, \qquad (1.1.1)$$

где $C_0^\infty\big(\overline{\Omega} \setminus \{0\}\big)$ — множество бесконечно дифференцируемых функций в $\overline{\Omega}$ с компактными носителями в $\overline{\Omega} \setminus \{0\}$, $k \geqslant 0$ — целое, $a \in \mathbb{R}$.

Для того чтобы ввести эквивалентную норму в пространстве $H_a^k(\Omega)$, мы перейдем к полярным координатам r, φ и сделаем замену переменной $\tau = \ln r$. Тогда угол θ и множество $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ отобразятся в полосы

$$G = \{y' = (\varphi, \tau) : d_1 < \varphi < d_2,\ -\infty < \tau < +\infty\}$$

и

$$G = \{y' = (\varphi, \tau) : 0 \leqslant \varphi < 2\pi,\ -\infty < \tau < +\infty\}$$

соответственно. Функцию $u(y)$ в новой системе координат обозначим через $u(y')$. По индукции легко доказать следующие равенства

$$D_y^\alpha = e^{-|\alpha|\tau} \sum_{|\beta| \leqslant |\alpha|} a_\beta(\varphi) D_{y'}^\beta, \qquad (1.1.2)$$

$$D^{\gamma}_{y'} = \sum_{|\mu|\leqslant|\gamma|} r^{|\mu|} b_{\mu}(\varphi) D^{\mu}_{y}, \tag{1.1.3}$$

где $a_{\beta}, b_{\mu} \in C^{\infty}_{2\pi}[0, 2\pi]$, $C^{\infty}_{2\pi}[0, 2\pi]$ — множество 2π-периодических бесконечно дифференцируемых функций.

Из формул (1.1.1)–(1.1.3) следует, что

$$c_1\|u\|^2_{H^k_a(\Omega)} \leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant k} \int\limits_G e^{2(a-k+1)\tau} |D^{\alpha}_{y'} u(y')|^2 dy' \leqslant c_2 \|u\|^2_{H^k_a(\Omega)}$$

$$\big(u \in H^k_a(\Omega)\big). \tag{1.1.4}$$

Обозначим через

$$\widehat{u}(\varphi, \lambda) = (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(\varphi, \tau) e^{-i\lambda\tau} d\tau$$

преобразование Фурье функции $u(\varphi, \tau)$ по переменной τ. Используя комплексный аналог равенства Парсеваля

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |v(\tau)|^2 e^{2H\tau} d\tau = \int\limits_{-\infty+iH}^{+\infty+iH} |\widehat{v}(\lambda)|^2 d\lambda \tag{1.1.5}$$

для $ve^{H\tau} \in L_2(-\infty, +\infty)$, $H = a - k + 1$, и неравенства (B.25), (1.1.4), мы видим, что $\widehat{u}(\cdot, \lambda) \in W^k(d_1, d_2)$ для п. в. $\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\lambda = H\}$ и

$$c_3\|u\|^2_{H^k_a(\Omega)} \leqslant \int\limits_{-\infty+iH}^{+\infty+iH} \Big(\|\widehat{u}\|^2_{W^k(d_1,d_2)} + |\lambda|^{2k} \|\widehat{u}\|^2_{L_2(d_1,d_2)} \Big) d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant c_4 \|u\|^2_{H^k_a(\Omega)} \qquad \big(u \in H^k_a(\Omega)\big), \tag{1.1.6}$$

где $0 < d_2 - d_1 < 2\pi$, если $\Omega = \theta$, и $d_1 = 0$, $d_2 = 2\pi$, если $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 1.1.1. *Пусть $\Omega = \theta$ или $\mathbb{R}^2$. Тогда мы можем ввести в $H^k_a(\Omega)$ эквивалентные нормы по формулам*

$$\|u\|'_{H^k_a(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leqslant k} \int\limits_G e^{2(a-k+1)\tau} |D^{\alpha}_{y'} u(y')|^2 dy' \right)^{1/2}, \tag{1.1.7}$$

$$\|u\|''_{H^k_a(\Omega)} = \left(\int\limits_{-\infty+iH}^{+\infty+iH} \left(\|\widehat{u}\|^2_{W^k(d_1,d_2)} + |\lambda|^{2k} \|\widehat{u}\|^2_{L_2(d_1,d_2)} \right) d\lambda \right)^{1/2}, \qquad (1.1.8)$$

где $H = a - k + 1$.

Изучим теперь n-мерный случай. Обозначим через

$$\Theta = \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^n : d_1 < \varphi < d_2,\ 0 < r,\ z \in \mathbb{R}^{n-2}\}$$

n-мерный двугранный угол, где r, φ — полярные координаты точки y, $0 < d_2 - d_1 < 2\pi$, $n \geqslant 3$. Пусть

$$\mathcal{P} = \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^n : y = 0,\ z \in \mathbb{R}^{n-2}\} -$$

ребро угла Θ. Предположим, что $\Omega = \Theta$ или $\mathbb{R}^n$.

Определение 1.1.2. Введем весовое пространство Кондратьева $H^k_a(\Omega)$ как пополнение множества $C_0^\infty(\overline{\Omega} \setminus \mathcal{P})$ по норме

$$\|u\|_{H^k_a(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant k} \int\limits_{\Omega} r^{2(a-k+|\alpha|)} |D^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \qquad (1.1.9)$$

где $C_0^\infty(\overline{\Omega} \setminus \mathcal{P})$ — множество бесконечно дифференцируемых функций в $\overline{\Omega}$ с компактными носителями в $\overline{\Omega} \setminus \mathcal{P}$, $k \geqslant 0$ — целое, $a \in \mathbb{R}$.

Перейдем к новым координатам φ, r, $z' = r^{-1}z$ и сделаем преобразование $\tau = \ln r$. Тогда двугранный угол Θ и множество $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{P}$ отобразятся в слои

$$G = \{x' = (\varphi, \tau, z') : d_1 < \varphi < d_2,\ (\tau, z') \in \mathbb{R}^{n-1}\}$$

и

$$G = \{x' = (\varphi, \tau, z') : 0 \leqslant \varphi < 2\pi,\ (\tau, z') \in \mathbb{R}^{n-1}\}$$

соответственно. Функцию $u(x)$ в новой системе координат обозначим через $u(x')$.

Легко показать, что

$$D^\alpha_x = e^{-|\alpha|\tau} \sum_{|\beta| \leqslant |\alpha|} a_\beta(\varphi) D^\beta_{x'}, \qquad (1.1.10)$$

$$D_{x'}^{\gamma} = \sum_{|\mu| \leqslant |\gamma|} r^{|\mu|} b_{\mu}(\varphi) D_x^{\mu}, \tag{1.1.11}$$

где $a_\beta, b_\mu \in C_{2\pi}^{\infty}[0, 2\pi]$.

Из (1.1.10), (1.1.11) мы выводим следующее неравенство:

$$c_5 \|u\|^2_{H_a^k(\Omega)} \leqslant \sum_{|\alpha| \leqslant k} \int_G e^{2(a-k+n/2)\tau} |D_{x'}^{\alpha} u(x')|^2 dx' \leqslant c_6 \|u\|^2_{H_a^k(\Omega)}$$

$$\big(u \in H_a^k(\Omega)\big). \tag{1.1.12}$$

Обозначим через

$$\widehat{u}(\varphi, \lambda, z') = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\varphi, \tau, z') e^{-i\lambda\tau} d\tau$$

преобразование Фурье функции $u(\varphi, \tau, z')$ по переменной τ. Используя комплексный аналог равенства Парсеваля (1.1.5) с $H = a - k + n/2$ и неравенства (В.20), (1.1.12), мы убеждаемся, что $\widehat{u}(\cdot, \lambda, \cdot) \in W^k(G_0)$ для п. в. $\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\lambda = H\}$ и

$$c_7 \|u\|^2_{H_a^k(\Omega)} \leqslant \int_{-\infty+iH}^{+\infty+iH} \Big(\|\widehat{u}\|^2_{W^k(G_0)} + |\lambda|^{2k} \|\widehat{u}\|^2_{L_2(G_0)}\Big) d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant c_8 \|u\|^2_{H_a^k(\Omega)} \qquad \big(u \in H_a^k(\Omega)\big), \tag{1.1.13}$$

где $G_0 = (d_1, d_2) \times \mathbb{R}^{n-2}$, $0 < d_2 - d_1 < 2\pi$, если $\Omega = \Theta$, и $d_1 = 0$, $d_2 = 2\pi$, если $\Omega = \mathbb{R}^n$.

Таким образом, мы доказали следующий результат.

Теорема 1.1.2. *Предположим, что $\Omega = \Theta$ или $\mathbb{R}^n$. Тогда мы можем ввести эквивалентные нормы в $H_a^k(\Omega)$ по формулам*

$$\|u\|'_{H_a^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant k} \int_G e^{2(a-k+n/2)\tau} |D_{x'}^{\alpha} u(x')|^2 dx'\right)^{1/2}, \tag{1.1.14}$$

$$\|u\|''_{H_a^k(\Omega)} = \left(\int_{-\infty+iH}^{+\infty+iH} \Big(\|\widehat{u}\|^2_{W^k(G_0)} + |\lambda|^{2k} \|\widehat{u}\|^2_{L_2(G_0)}\Big) d\lambda\right)^{1/2}, \tag{1.1.15}$$

где $H = a - k + n/2$.

Пространства следов

Далее в этом параграфе мы будем предполагать, что $\Omega=\theta$ или $\mathbb{R}^2$, если $n=2$, и $\Omega=\Theta$ или $\mathbb{R}^n$, если $n\geqslant 3$. Здесь $\mathcal{P}=\{0\}$, если $n=2$, и $\mathcal{P}=\{x=(y,z)\in\mathbb{R}^n: y=0,\ z\in\mathbb{R}^{n-2}\}$, если $n\geqslant 3$.

Вначале мы докажем два вспомогательных результата об умножении на функцию в весовых пространствах.

Лемма 1.1.1. *Предположим, что* $g\in C^k\big(\overline{\Omega}\setminus\mathcal{P}\big)$ *и*

$$|r^{b+|\beta|}D^\beta g(x)|\leqslant c_9 \qquad \big(|\beta|\leqslant k,\ x\in\overline{\Omega}\setminus\mathcal{P}\big), \tag{1.1.16}$$

где $c_9>0$ *не зависит от* x, $b\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{N}$.

Тогда для всех $u\in H_a^k(\Omega)$

$$\|gu\|_{H_{a+b}^k(\Omega)}\leqslant c_9c_{10}\|u\|_{H_a^k(\Omega)}, \tag{1.1.17}$$

где $c_{10}>0$ *не зависит от* u *и* g.

Доказательство. Очевидно, $D^\alpha(gu)$ $(|\alpha|\leqslant k)$ — линейная комбинация функций

$$D^{\alpha-\beta}gD^\beta u \qquad (\beta_j\leqslant\alpha_j,\ j=1,\dots,n).$$

В силу (1.1.16) мы имеем

$$|D^{\alpha-\beta}gD^\beta u|\leqslant c_9r^{-b-|\alpha-\beta|}|D^\beta u|.$$

Поэтому мы получим

$$\|gu\|^2_{H_{a+b}^k(\Omega)}=\sum_{|\alpha|\leqslant k}\int\limits_\Omega r^{2(a+b-k+|\alpha|)}|D^\alpha(gu)|^2dx\leqslant$$
$$\leqslant c_9c_{10}\sum_{|\beta|\leqslant k}\int\limits_\Omega r^{2(a-k+|\beta|)}|D^\beta u|^2dx=c_9c_{10}\|u\|^2_{H_a^k(\Omega)}. \quad\square$$

Следствие 1.1.1. *Пусть числа* $d_1,d_2\in\mathbb{R}$ *таковы, что* $0<d_2-d_1<2\pi$, *если* $\Omega=\theta$ *или* Θ, *и* $d_1=0$, $d_2=2\pi$, *если* $\Omega=\mathbb{R}^n$. *Предположим, что функция* $\xi\in\dot{C}^\infty(d_1,d_2)$ *такова, что* $\xi(\varphi)=1$ *при* $\varphi\in[b_1,b_2]$, $\xi(\varphi)=0$ *при* $\varphi\notin[(b_1+d_1)/2,(b_2+d_2)/2]$, $0\leqslant\xi(\varphi)\leqslant 1$, *где* $d_1<b_1<b_2<d_2$. *Тогда оператор умножения на функцию* $D_y^\alpha\xi$, *действующий из* $H_a^k(\Omega)$ *в* $H^k_{a+|\alpha|}(\Omega)$, *ограничен.*

Доказательство следует из формулы (1.1.2) и леммы 1.1.1.

Пусть $\Gamma \subset \overline{\Omega}$ — полупрямая вида $\Gamma = \{y \in \mathbb{R}^2 : \varphi = \varphi_0,\ 0 < r\}$, если $n = 2$, и полуплоскость вида $\Gamma = \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^n : \varphi = \varphi_0,\ 0 < r,$ $z \in \mathbb{R}^{n-2}\}$, если $n \geqslant 3$.

Обозначим через $H_a^{k-1/2}(\Gamma)$ пространство следов на Γ с нормой

$$\|\psi\|_{H_a^{k-1/2}(\Gamma)} = \inf_v \|v\|_{H_a^k(\Omega)} \qquad \bigl(v \in H_a^k(\Omega) : v|_\Gamma = \psi\bigr), \tag{1.1.18}$$

где $k \in \mathbb{N}$.

Пусть $\{\xi_s\}_{s=-\infty}^{+\infty}$ — разбиение единицы на $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ такое, что

$$\begin{gathered} \xi_s \in \dot{C}^\infty\bigl(\mathbb{R}^2\bigr), \qquad \sum_s \xi_s(y) \equiv 1 \quad \bigl(y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\bigr), \\ \operatorname{supp} \xi_s \subset \{y \in \mathbb{R}^2 : 2^{s-1} < r < 2^{s+1}\}, \\ |D^\alpha \xi_s(y)| \leqslant c_\alpha 2^{-|\alpha| s}, \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,\ |\alpha| \geqslant 0, \end{gathered} \tag{1.1.19}$$

где $c_\alpha > 0$ не зависит от s.

Лемма 1.1.2. *Норма* (1.1.18) *эквивалентна норме*

$$\|\psi\|'_{H_a^{k-1/2}(\Gamma)} = \left(\sum_{s=-\infty}^{+\infty} \|\xi_s \psi\|^2_{H_a^{k-1/2}(\Gamma)}\right)^{1/2}. \tag{1.1.20}$$

Доказательство. 1. Вначале мы докажем, что

$$\|\psi\|'_{H_a^{k-1/2}(\Gamma)} \leqslant k_1 \|\psi\|_{H_a^{k-1/2}(\Gamma)} \qquad \bigl(\psi \in H_a^{k-1/2}(\Gamma)\bigr). \tag{1.1.21}$$

Пусть $u \in H_a^k(\Omega)$ — продолжение функции $\psi \in H_a^{k-1/2}(\Gamma)$ такое, что

$$\|u\|_{H_a^k(\Omega)} \leqslant 2\|\psi\|_{H_a^{k-1/2}(\Gamma)}. \tag{1.1.22}$$

В силу (1.1.18) мы имеем

$$\|\psi\|'_{H_a^{k-1/2}(\Gamma)} \leqslant \left(\sum_{s=-\infty}^{+\infty} \|\xi_s u\|^2_{H_a^k(\Omega)}\right)^{1/2}. \tag{1.1.23}$$

Из определения функций ξ_s и леммы 1.1.1 мы получим

$$\|\xi_s u\|^2_{H_a^k(\Omega)} \leqslant k_2 \|u\|^2_{H_a^k(\Omega_s)}, \tag{1.1.24}$$

где $k_2 > 0$ не зависит от u и s,

$$\Omega_s = \{x \in \Omega : 2^{s-1} < r < 2^{s+1}\},$$

норма $\|u\|_{H_a^k(\Omega_s)}$ определена по формуле (1.1.1) с Ω_s вместо Ω.

Неравенства (1.1.23), (1.1.24) дают нам следующее неравенство:

$$\|\psi\|'_{H_a^{k-1/2}(\Gamma)} \leqslant k_3 \|u\|_{H_a^k(\Omega)}. \tag{1.1.25}$$

Из (1.1.25), (1.1.22) мы получаем (1.1.21).

2. Докажем теперь, что

$$\|\psi\|_{H_a^{k-1/2}(\Gamma)} \leqslant k_4 \|\psi\|'_{H_a^{k-1/2}(\Gamma)} \qquad \big(\psi \in H_a^{k-1/2}(\Gamma)\big). \tag{1.1.26}$$

Обозначим через $\sigma_s(y)$ $(s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ функцию из $\dot{C}^\infty\big(\mathbb{R}^2\big)$ такую, что

$$\begin{gathered} \operatorname{supp} \sigma_s \subset \{y \in \mathbb{R}^2 : 2^{s-2} < r < 2^{s+2}\}, \\ \sigma_s(y) \equiv 1 \quad \text{при } 2^{s-1} < r < 2^{s+1}, \qquad |D^\alpha \sigma_s(y)| \leqslant k_\alpha 2^{-|\alpha| s}, \\ s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \ |\alpha| \geqslant 0, \end{gathered} \tag{1.1.27}$$

где $k_\alpha > 0$ не зависит от s.

Пусть $v_s \in H_a^k(\Omega)$ — продолжение функции $\xi_s \psi$ на Ω такое, что

$$\|v_s\|_{H_a^k(\Omega)} \leqslant 2 \|\xi_s \psi\|_{H_a^{k-1/2}(\Gamma)}.$$

Из леммы 1.1.1 мы получим

$$\|\sigma_s v_s\|_{H_a^k(\Omega)} \leqslant k_5 \|v_s\|_{H_a^k(\Omega)},$$

где $k_5 > 0$ не зависит от v_s и s.

Следовательно, мы имеем

$$\|\psi\|'_{H_a^{k-1/2}(\Gamma)} \geqslant k_6 \left(\sum_{s=-\infty}^{+\infty} \|\sigma_s v_s\|^2_{H_a^k(\Omega)} \right)^{1/2} \geqslant k_7 \left\| \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \sigma_s v_s \right\|_{H_a^k(\Omega)}. \tag{1.1.28}$$

Поскольку $\left(\sum\limits_s \sigma_s v_s \right)\Big|_\Gamma = \psi$, то $\quad \left\| \sum\limits_{s=-\infty}^{+\infty} \sigma_s v_s \right\|_{H_a^k(\Omega)} \geqslant \|\psi\|_{H_a^{k-1/2}(\Gamma)}$.

Из (1.1.28) и из последнего неравенства следует (1.1.26). □

Лемма 1.1.3. *Норма* (1.1.18) *эквивалентна норме*

$$\|\psi\|''_{H_a^{k-1/2}(\Gamma)} =$$
$$= \left(\int\limits_\Gamma \int\limits_\Gamma \sum_{|\alpha|=k-1} \big| |y_1|^a \left(D^\alpha \psi\right)(y_1) - |y_2|^a \left(D^\alpha \psi\right)(y_2) \big|^2 \frac{d\Gamma_{y_1} d\Gamma_{y_2}}{|y_1 - y_2|^2} + \right.$$
$$\left. + \int\limits_\Gamma \sum_{|\alpha|\leqslant k-1} |\left(D^\alpha \psi\right)(y)|^2 \frac{d\Gamma_y}{|y|^{2(k-a-|\alpha|)-1}} \right)^{1/2}, \quad (1.1.29)$$

если $n = 2$, *и норме*

$$\|\psi\|''_{H_a^{k-1/2}(\Gamma)} =$$
$$= \left(\int\limits_\Gamma \int\limits_\Gamma \sum_{|\alpha|=k-1} \big| |x_1|^a \left(D^\alpha \psi\right)(x_1) - |x_2|^a \left(D^\alpha \psi\right)(x_2) \big|^2 \frac{d\Gamma_{x_1} d\Gamma_{x_2}}{|x_1 - x_2|^n} + \right.$$
$$\left. + \int\limits_\Gamma \sum_{|\alpha|\leqslant k-1} |\left(D^\alpha \psi\right)(x)|^2 \frac{d\Gamma_x}{|x|^{2(k-a-|\alpha|)-1}} \right)^{1/2}, \quad (1.1.30)$$

если $n \geqslant 3$.

Доказательство. 1. Доказательство в случае $n = 2$ аналогично доказательству в случае $n \geqslant 3$. Поэтому, не ограничивая общности, будем предполагать, что $n \geqslant 3$.

Положим

$$\Gamma_s = \{x = (y, z) \in \Gamma : 2^{s-1} < r < 2^{s+1}\},$$
$$Q_s = \{x = (y, z) \in \Omega : 2^{s-2} < r < 2^{s+2}\},$$

где $s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Обозначим через $\mathring{H}_a^{k-1/2}(\Gamma_s)$ подпространство функций в $H_a^{k-1/2}(\Gamma)$ с носителями на $\overline{\Gamma}_s$. Вначале мы докажем, что формула

$$\|\psi\|'_{\mathring{H}_a^{k-1/2}(\Gamma_0)} = \inf_w \|w\|_{H_a^k(\Omega)} \qquad \left(w \in H'_\psi\right)$$

задает эквивалентное скалярное произведение в $\mathring{H}_a^{k-1/2}(\Gamma_0)$, где

$$H'_\psi = \{w \in H_a^k(\Omega) : w|_\Gamma = \psi,\ \operatorname{supp} w \subset \overline{Q_0}\}.$$

Введем функцию $\sigma_0 \in \dot{C}^\infty\big(\mathbb{R}^2\big)$ по формуле (1.1.27) при $s=0$. Тогда по лемме 1.1.1

$$\inf_{w\in H'_\psi} \|w\|_{H_a^k(\Omega)} \leqslant \inf_{v\in H_\psi} \|\sigma_0 v\|_{H_a^k(\Omega)} \leqslant k_1 \inf_{v\in H_\psi} \|v\|_{H_a^k(\Omega)} \leqslant k_1 \inf_{w\in H'_\psi} \|w\|_{H_a^k(\Omega)},$$

где $H_\psi = \{v \in H_a^k(\Omega) : v|_\Gamma = \psi\}$.

2. Очевидно, нормы $\|v\|_{W^k(Q_0)}$ и $\|v\|_{H_a^k(Q_0)}$ для $v \in H_a^k(Q_0)$ таких, что $\operatorname{supp} v \subset \overline{Q}_0$, эквивалентны. Поэтому из первой части доказательства и из замечания B.1 следует, что

$$k_2\|\psi\|_{H_a^{k-1/2}(\Gamma)} \leqslant \|\psi\|_{W^{k-1/2}(\Gamma)} \leqslant k_3\|\psi\|_{H_a^{k-1/2}(\Gamma)}$$

для всех $\psi \in \mathring{H}_a^{k-1/2}(\Gamma_0)$, где

$$\|\psi\|_{W^{k-1/2}(\Gamma)} = \left(\int\limits_\Gamma \int\limits_\Gamma \sum_{|\alpha|=k-1} \big|\,(D^\alpha\psi)\,(x_1) - (D^\alpha\psi)\,(x_2)\,\big|^2 \frac{d\Gamma_{x_1} d\Gamma_{x_2}}{|x_1-x_2|^n} + \right.$$
$$\left. + \int\limits_\Gamma \sum_{|\alpha|\leqslant k-1} \big|\,(D^\alpha\psi)\,(x)\,\big|^2 d\Gamma_x \right)^{1/2}. \quad (1.1.31)$$

Для $\psi \in \mathring{H}_a^{k-1/2}(\Gamma_0)$ норма (1.1.31) эквивалентна норме (1.1.30). Следовательно,

$$k_4\|\psi\|_{H_a^{k-1/2}(\Gamma)} \leqslant \|\psi\|''_{H_a^{k-1/2}(\Gamma)} \leqslant k_5\|\psi\|_{H_a^{k-1/2}(\Gamma)} \qquad (1.1.32)$$

для всех $\psi \in \mathring{H}_a^{k-1/2}(\Gamma_0)$.

Умножим неравенство (1.1.32) на $2^{s(a+n/2-k)}$. Используя преобразование переменных $x' = 2^s x$, мы перейдем от множества Γ_0 к множеству Γ_s. Тогда для всех $\psi \in H_a^{k-1/2}(\Gamma)$ и $s = 0, \pm1, \pm2, \dots$ мы имеем

$$k_6\|\xi_s\psi\|_{H_a^{k-1/2}(\Gamma)} \leqslant \|\xi_s\psi\|''_{H_a^{k-1/2}(\Gamma)} \leqslant k_7\|\xi_s\psi\|_{H_a^{k-1/2}(\Gamma)}, \qquad (1.1.33)$$

где $k_6, k_7 > 0$ не зависят от ψ и s.

3. Докажем теперь, что для всех $\psi \in H_a^{k-1/2}(\Gamma)$

$$k_8\|\psi\|_{H_a^{k-1/2}(\Gamma)} \leqslant \|\psi\|''_{H_a^{k-1/2}(\Gamma)} \leqslant k_9\|\psi\|_{H_a^{k-1/2}(\Gamma)}. \qquad (1.1.34)$$

Вначале покажем, что выполняется второе неравенство в (1.1.34). Обозначим через (r, φ_0), (r_1, φ_0) и (r_2, φ_0) полярные координаты точек y, y_1 и y_2 соответственно, где $x = (y, z)$, $x_1 = (y_1, z_1)$, $x_2 = (y_2, z_2) \in \Gamma$. Введем множества

$$G_1 = \{r_1, r_2 > 0 : r_2 < r_1/2\}, \quad G_2 = \{r_1, r_2 > 0 : 2r_1 < r_2\},$$
$$G_3 = \{r_1, r_2 > 0 : r_1/2 < r_2 < 2r_1\}.$$

Тогда мы можем переписать норму (1.1.30) в виде

$$\|\psi\|''_{H_a^{k-1/2}(\Gamma)} = \left(\sum_{i=0}^{3} I_i\right)^{1/2}, \tag{1.1.35}$$

где

$$I_0 = \sum_{|\alpha| \leqslant k-1} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} dz \int\limits_0^\infty r^{2(a-k+|\alpha|)+1} |D^\alpha \psi(x)|^2 dr,$$
$$I_i = \sum_{|\alpha| = k-1} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} dz_1 \int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} dz_2 \int\limits_{G_i} |r_1^a (D^\alpha \psi)(x_1) - r_2^a (D^\alpha \psi)(x_2)|^2 \frac{dr_1 dr_2}{|x_1 - x_2|^n}$$
$$(i = 1, 2, 3).$$

Легко видеть, что

$$|x_1 - x_2|^{-n} = |r_1 - r_2|^{-n} \left(1 + \left|\frac{z_1 - z_2}{r_1 - r_2}\right|^2\right)^{-n/2}.$$

Обозначим

$$\rho = \frac{|z_1 - z_2|}{|r_1 - r_2|}.$$

Тогда мы получим

$$\sum_{|\alpha| = k-1} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} dz_1 \int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} dz_2 \int\limits_{G_1} \frac{r_1^{2a} |(D^\alpha \psi)(x_1)|^2}{|x_1 - x_2|^n} dr_1 dr_2 \leqslant$$
$$\leqslant k_{10} \sum_{|\alpha| = k-1} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} dz_1 \int\limits_0^\infty r_1^{2a} |(D^\alpha \psi)(x_1)|^2 dr_1 \int\limits_0^{r_1/2} \frac{dr_2}{|r_1 - r_2|^2} \int\limits_0^\infty \frac{\rho^{n-3} d\rho}{(1 + \rho^2)^{n/2}} \leqslant$$
$$\leqslant k_{11} \sum_{|\alpha| = k-1} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} dz_1 \int\limits_0^\infty r_1^{2a-1} |(D^\alpha \psi)(x_1)|^2 dr_1 \leqslant k_{11} I_0. \tag{1.1.36}$$

Аналогично мы имеем
$$\sum_{|\alpha|=k-1} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} dz_1 \int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} dz_2 \int\limits_{G_1} \frac{r_2^{2a}|(D^\alpha\psi)(x_2)|^2}{|x_1-x_2|^n} dr_1 dr_2 \leqslant k_{11} I_0. \tag{1.1.37}$$
Из (1.1.36), (1.1.37) следует, что
$$I_1 \leqslant 4k_{11} I_0. \tag{1.1.38}$$
Используя симметрию углов G_1 и G_2, мы получим
$$I_2 \leqslant 4k_{11} I_0. \tag{1.1.39}$$
Легко видеть, что
$$G_3 \subset \bigcup_{s=-\infty}^{+\infty} (\gamma_s \times \gamma_s),$$
где $\gamma_s = \big(2^{s-1}, 2^{s+1}\big)$. В силу (1.1.19) мы имеем
$$\xi_{s-1}(y) + \xi_s(y) + \xi_{s+1}(y) \equiv 1 \qquad \big(2^{s-1} < |y| < 2^{s+1}\big). \tag{1.1.40}$$
Таким образом, получаем следующую оценку:
$$\begin{aligned} I_3 \leqslant \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \sum_{|\alpha|=k-1} \int\limits_{\Gamma_s} \int\limits_{\Gamma_s} \big| r_1^a D^\alpha((\xi_{s-1}+\xi_s+\xi_{s+1})\psi)(x_1) - \\ - r_2^a D^\alpha((\xi_{s-1}+\xi_s+\xi_{s+1})\psi)(x_2)\big|^2 \frac{d\Gamma_{x_1} d\Gamma_{x_2}}{|x_1-x_2|^n} \leqslant \\ \leqslant k_{12} \sum_s \sum_{|\alpha|=k-1} \int\limits_{\Gamma} \int\limits_{\Gamma} \big| r_1^a (D^\alpha(\xi_s\psi))(x_1) - r_2^a (D^\alpha(\xi_s\psi))(x_2)\big|^2 \frac{d\Gamma_{x_1} d\Gamma_{x_2}}{|x_1-x_2|^n} \leqslant \\ \leqslant k_{12} \sum_s \Big(\|\xi_s\psi\|''_{H_a^{k-1/2}(\Gamma)} \Big)^2. \end{aligned} \tag{1.1.41}$$
Аналогично из неравенств (1.1.38)–(1.1.40) выводим
$$\begin{aligned} I_0 + I_1 + I_2 \leqslant (1+8k_{11}) \sum_s \sum_{|\alpha|\leqslant k-1} \int\limits_{\Gamma_s} r^{2(a-k+|\alpha|)+1} |(D^\alpha\psi)(x)|^2 d\Gamma_x \leqslant \\ \leqslant k_{13} \sum_s \sum_{|\alpha|\leqslant k-1} \int\limits_{\Gamma} r^{2(a-k+|\alpha|)+1} |(D^\alpha(\xi_s\psi))(x)|^2 d\Gamma_x \leqslant \\ \leqslant k_{13} \sum_s \Big(\|\xi_s\psi\|''_{H_a^{k-1/2}(\Gamma)} \Big)^2. \end{aligned} \tag{1.1.42}$$

Из неравенств (1.1.41), (1.1.42), (1.1.33) и леммы 1.1.2 следует, что

$$\|\psi\|''_{H_a^{k-1/2}(\Gamma)} \leqslant k_{14}\left(\sum_s \left(\|\xi_s\psi\|''_{H_a^{k-1/2}(\Gamma)}\right)^2\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant k_{15}\left(\sum_s \|\xi_s\psi\|^2_{H_a^{k-1/2}(\Gamma)}\right)^{1/2} \leqslant k_{16}\|\psi\|_{H_a^{k-1/2}(\Gamma)}.$$

Докажем теперь левую часть неравенства (1.1.34). Обозначим через $\|\psi\|''_{H_a^{k-1/2}(\Gamma_s)}$ норму, заданную формулой (1.1.30) с Γ_s вместо Γ. Используя преобразования переменных $x' = 2^{-s}x$ и формулу (1.1.19), мы имеем

$$|D^\alpha \xi_s(y')| \leqslant k_\alpha, \tag{1.1.43}$$

где $k_\alpha > 0$ не зависит от s. Поскольку нормы в $H_a^{k-1/2}(\Gamma_0)$ и $W^{k-1/2}(\Gamma_0)$ эквивалентны, из неравенства (1.1.43) вытекает, что

$$\begin{aligned}\|\xi_s\psi\|''_{H_a^{k-1/2}(\Gamma)} = \|\xi_s(y)\psi(x)\|''_{H_a^{k-1/2}(\Gamma_s)} &= 2^{s(a-k+n/2)}\|\xi_s(y')\psi(x')\|''_{H_a^{k-1/2}(\Gamma_0)} \leqslant \\ \leqslant k_{17}2^{s(a-k+n/2)}\|\psi(x')\|''_{H_a^{k-1/2}(\Gamma_0)} &= k_{17}\|\psi(x)\|''_{H_a^{k-1/2}(\Gamma_s)},\end{aligned} \tag{1.1.44}$$

где $k_{17} > 0$ не зависит от ψ и s.

Из леммы 1.1.3 и неравенств (1.1.33), (1.1.44) мы получаем

$$\|\psi\|_{H_a^{k-1/2}(\Gamma)} \leqslant k_{18}\left(\sum_s \|\xi_s\psi\|^2_{H_a^{k-1/2}(\Gamma)}\right)^{1/2} \leqslant k_{19}\left(\sum_s \left(\|\xi_s\psi\|''_{H_a^{k-1/2}(\Gamma)}\right)^2\right)^{1/2}$$

$$\leqslant k_{17}k_{19}\left(\sum_s \left(\|\psi\|''_{H_a^{k-1/2}(\Gamma_s)}\right)^2\right)^{1/2} \leqslant k_{20}\|\psi\|''_{H_a^{k-1/2}(\Gamma)}. \qquad \square$$

Лемма 1.1.4. *Предположим, что* $g \in C^k\big(\overline{\Omega} \setminus \mathcal{P}\big)$ *удовлетворяет неравенству* (1.1.16), $k \in \mathbb{N}$.

Тогда для всех $\psi \in H_a^{k-1/2}(\Gamma)$

$$\|g\psi\|_{H_{a+b}^{k-1/2}(\Gamma)} \leqslant c_9c_{11}\|\psi\|_{H_a^{k-1/2}(\Gamma)}, \tag{1.1.45}$$

где $c_{11} > 0$ *не зависит от* ψ *и* g.

Доказательство. По определению для любой функции $\psi \in H_a^{k-1/2}(\Gamma)$ существует такая функция $u \in H_a^k(\Omega)$, что $u|_\Gamma = \psi$ и

$$\|u\|_{H_a^k(\Omega)} \leqslant 2\|\psi\|_{H_a^{k-1/2}(\Gamma)}.$$

Из этого неравенства и леммы 1.1.1 мы получаем

$$\|g\psi\|_{H^{k-1/2}_{a+b}(\Gamma)} \leqslant \|gu\|_{H^k_{a+b}(\Omega)} \leqslant c_9c_{10}\|u\|_{H^k_a(\Omega)} \leqslant 2c_9c_{10}\|\psi\|_{H^{k-1/2}_a(\Gamma)}. \qquad \square$$

Лемма 1.1.5. *Существует линейный ограниченный оператор $S_H : H^{k-1/2}_a(\Gamma) \to H^k_a(\Omega)$ такой, что $(S_H\psi)|_\Gamma = \psi$ $\big(\psi \in H^{k-1/2}_a(\Gamma)\big)$.*

Доказательство. 1. Обозначим $\Gamma_s = \{x \in \Gamma : 2^{s-1} < r < 2^{s+1}\}$, $Q_s = \{x \in \Omega : 2^{s-2} < r < 2^{s+2}\}$, $s \in \mathbb{Z}$. Вначале пусть функция $\psi \in H^{k-1/2}_a(\Gamma)$ такова, что $\operatorname{supp}\psi \subset \Gamma_0$. Очевидно, нормы $\|\psi\|_{H^{k-1/2}_a(\Gamma)}$ и $\|\psi\|_{W^{k-1/2}(\Gamma)}$ эквивалентны. В силу теоремы B.6 существует функция $u \in W^k(\Omega)$ такая, что $\operatorname{supp} u \subset \overline{Q}_0$, $u|_\Gamma = \psi$ и $\|u\|_{W^k(\Omega)} \leqslant k_1\|\psi\|_{W^{k-1/2}(\Gamma)}$. Поэтому $u \in H^k_a(\Omega)$ и $\|u\|_{H^k_a(\Omega)} \leqslant k_2\|\psi\|_{H^{k-1/2}_a(\Gamma)}$.

2. Пусть теперь функция $\psi \in H^{k-1/2}_a(\Gamma)$ такова, что $\operatorname{supp}\psi \subset \Gamma_s$, $s \in \mathbb{Z}$. Вводя новые переменные $x = 2^{-s}x$ $(x' \in \Gamma_s)$ и умножая обе части последнего неравенства на $2^{s(a+n/2-k)}$, мы можем свести этот случай к части 1 доказательства. Поэтому существует функция $u \in H^k_a(\Omega)$ такая, что $\operatorname{supp} u \subset \overline{Q}_s$, $u|_\Gamma = \psi$ и $\|u\|_{H^k_a(\Omega)} \leqslant k_3\|\psi\|_{H^{k-1/2}_a(\Gamma)}$, где $k_3 > 0$ не зависит от ψ и s.

3. Наконец, пусть $\psi \in H^{k-1/2}_a(\Gamma)$ — произвольная функция. Обозначим через u_s функцию из $H^k_a(\Omega)$ такую, что $\operatorname{supp} u_s \subset \overline{Q}_s$ и

$$u_s|_\Gamma = \xi_s\psi, \tag{1.1.46}$$

$$\|u_s\|_{H^s_a(\Omega)} \leqslant k_3\|\xi_s\psi\|_{H^{k-1/2}_a(\Gamma)}. \tag{1.1.47}$$

Введем функцию

$$u = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} u_s.$$

Из (1.1.46) следует, что $u|_\Gamma = \psi$. В силу (1.1.47) и леммы 1.1.2 мы имеем

$$\|u\|^2_{H^k_a(\Omega)} \leqslant k_4\sum_s \|u_s\|^2_{H^k_a(\Omega)} \leqslant k_5\sum_s \|\xi_s\psi\|^2_{H^{k-1/2}_a(\Gamma)} \leqslant k_6\|\psi\|^2_{H^{k-1/2}_a(\Gamma)}.$$

Очевидно, оператор S_H, заданный формулой $S_H\psi = u$, является линейным ограниченным оператором, отображающим $H^{k-1/2}_a(\Gamma)$ в $H^k_a(\Omega)$ так, что $(S_H\psi)|_\Gamma = \psi$. $\square$

Интерполяционные неравенства

Лемма 1.1.6. *Для любых $u \in H^k_a(\Omega)$ и $q > 0$*

$$q^s \|u\|_{H^{k-s}_{a-s}(\Omega)} \leqslant c_{ls}\Big(\|u\|_{H^k_a(\Omega)} + q^k \|u\|_{H^0_{a-k}(\Omega)}\Big), \qquad (1.1.48)$$

где $c_{ls} > 0$ не зависит от u и q, $0 < s < k$ — целые.

Доказательство. Не ограничивая общности, предположим, что $n \geqslant 3$.

Перейдем к новым координатам φ, r и $z' = r^{-1}z$ и сделаем преобразование $\tau = \ln r$. Тогда Ω отобразится в слой $G = \{x' = (\varphi, \tau, z') : d_1 < \varphi < d_2,\ (\tau, z') \in \mathbb{R}^{n-1}\}$, если $\Omega = \Theta$, или в слой $G = \{x' = (\varphi, \tau, z') : 0 \leqslant \varphi < 2\pi,\ (\tau, z') \in \mathbb{R}^{n-1}\}$, если $\Omega = \mathbb{R}^n$. Функцию $u(x)$ $\big(u \in H^k_a(\Omega)\big)$ в новой системе координат обозначим через $u(x')$.

Пусть $\widehat{u}(\varphi, \lambda, z') = (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(\varphi, \tau, z') e^{-i\lambda\tau} d\tau$ — преобразование Фурье функции $u(\varphi, \tau, z')$ по переменной τ.

Из неравенств (1.1.13) и (B.20) следует, что

$$\|u\|^2_{H^{k-s}_{a-s}(\Omega)} \leqslant k_1 \int\limits_{-\infty+iH}^{+\infty+iH} \big(\|\widehat{u}\|^2_{W^{k-s}(G_0)} + |\lambda|^{2(k-s)} \|\widehat{u}\|^2_{L_2(G_0)}\big) d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant k_2 \int\limits_{-\infty+iH}^{+\infty+iH} \Big(q^{-2s} \|\widehat{u}\|^2_{W^k(G_0)} + \Big(q^{2(k-s)} + |\lambda|^{2(k-s)}\Big) \|\widehat{u}\|^2_{L_2(G_0)}\Big) d\lambda,$$

где $H = a - k + n/2$, $k_1, k_2 > 0$ не зависят от u и q.

Используя это неравенство и неравенство

$$|\lambda|^{2(k-s)} \leqslant q^{-2s} |\lambda|^{2k} + q^{2(k-s)},$$

мы получаем

$$\|u\|^2_{H^{k-s}_{a-s}(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant k_2 \int\limits_{-\infty+iH}^{+\infty+iH} \Big(q^{-2s}\Big(\|\widehat{u}\|^2_{W^k(G_0)} + |\lambda|^{2k} \|\widehat{u}\|^2_{L_2(G_0)}\Big) + 2q^{2(k-s)} \|\widehat{u}\|^2_{L_2(G_0)}\Big) d\lambda.$$

Вновь применяя неравенство (1.1.13), мы имеем

$$\|u\|^2_{H^{k-s}_{a-s}(\Omega)} \leqslant k_3 \Big(q^{-2s} \|u\|^2_{H^k_a(\Omega)} + q^{2(k-s)} \|u\|^2_{H^0_{a-k}(\Omega)}\Big). \qquad \square$$

Пусть $\Gamma \subset \overline{\Omega}$ — полупрямая вида $\Gamma = \{y \in \mathbb{R}^2 : \varphi = \varphi_0,\ 0 < r\}$, если $n = 2$, или полуплоскость вида $\Gamma = \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^n : \varphi = \varphi_0,$ $0 < r,\ z \in \mathbb{R}^{n-2}\}$, если $n \geqslant 3$. Обозначим через $H_a^0(\Gamma)$ пополнение множества $C_0^\infty(\Gamma)$ по норме

$$\|\psi\|_{H_a^0(\Gamma)} = \left(\int\limits_\Gamma r^{2a}|u(x)|^2dx\right)^{1/2}.$$

Лемма 1.1.7. *Для любых $u \in H_a^1(\Omega)$ и $q > 0$*

$$q^{1/2}\|u|_\Gamma\|_{H^0_{a-1/2}(\Gamma)} \leqslant c_{12}\Big(\|u\|_{H_a^1(\Omega)} + q\|u\|_{H^0_{a-1}(\Omega)}\Big), \tag{1.1.49}$$

где $c_{12} > 0$ не зависит от u и q.

Доказательство. В силу интерполяционного неравенства (B.21) для всех $v \in W^1(\Omega)$ таких, что $\operatorname{supp} v \subset \overline{Q}_0$, и любого $q > 0$

$$q\|v|_{\Gamma_0}\|^2_{L_2(\Gamma_0)} \leqslant k_1\Big(\|v\|^2_{W^1(Q_0)} + q^2\|v\|^2_{L_2(Q_0)}\Big), \tag{1.1.50}$$

где $k_1 > 0$ не зависит от u и q.

Пусть $\{\xi_s\}_{s=-\infty}^{+\infty}$ — разбиение единицы на $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, удовлетворяющее условиям (1.1.19). Тогда, используя преобразование переменных $x' = 2^s x$, перейдем от множеств Q_0 и Γ_0 к множествам Ω_s и Γ_s соответственно. Следовательно, из (1.1.50) мы выводим

$$q2^{-(n-1)s}\int\limits_{\Gamma_s}|(\xi_s u)(x')|_{\Gamma_s}|^2 d\Gamma_{x'} \leqslant$$
$$\leqslant k_1\left(\sum_{|\alpha|\leqslant 1} 2^{-ns+2|\alpha|s}\int\limits_{\Omega_s}|D^\alpha_{x'}(\xi_s u)(x')|^2dx' + q^2 2^{-ns}\int\limits_{\Omega_s}|(\xi_s u)(x')|^2dx'\right)$$

для любого $u \in H_a^1(\Omega)$, $q > 0$ и $s = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

Умножая обе части последнего неравенства на $2^{(2a-2+n)s}$, имеем

$$q\|(\xi_s u)|_{\Gamma_s}\|^2_{H^0_{a-1/2}(\Gamma)} \leqslant k_2\Big(\|\xi_s u\|^2_{H_a^1(\Omega)} + q^2\|\xi_s u\|^2_{H^0_{a-1}(\Omega)}\Big),$$

где $k_2 > 0$ не зависит от u, s и q.

Суммируя обе части этого неравенства по s и используя (1.1.24), получим

$$q\|u|_\Gamma\|^2_{H^0_{a-1/2}(\Gamma)} \leqslant k_3\Big(\|u\|^2_{H^1_a(\Omega)} + q^2\|u\|^2_{H^0_{a-1}(\Omega)}\Big),$$

где $k_3 > 0$ не зависит от u и q. □

Лемма 1.1.8. *Пусть $l_2 \geqslant l_1$ и $a_2 - l_2 < a_1 - l_1$, где $l_1, l_2 \geqslant 0$ — целые числа. Тогда для любого a такого, что $a_2 - l_2 \leqslant a - l_1 \leqslant a_1 - l_1$, и для всех $u \in H^{l_1}_{a_1}(\Omega) \cap H^{l_2}_{a_2}(\Omega)$ мы имеем $u \in H^{l_1}_a(\Omega)$ и*

$$\|u\|_{H^{l_1}_a(\Omega)} \leqslant c_{13}\Big(\|u\|_{H^{l_1}_{a_1}(\Omega)} + \|u\|_{H^{l_2}_{a_2}(\Omega)}\Big), \tag{1.1.51}$$

где $c_{13} > 0$ не зависит от a и u.

Доказательство. Пусть $\xi_1 \in C^\infty[0,\infty)$, $\xi_1(r) = 0$ при $r < 1/2$ и $\xi_1(r) = 1$ при $r > 1$. Положим $\xi_2 = 1 - \xi_1$.

Из неравенства $a \leqslant a_1$ и леммы 1.1.1 следует, что

$$\|\xi_1 u\|_{H^{l_1}_a(\Omega)} \leqslant k_1\|\xi_1 u\|_{H^{l_1}_{a_1}(\Omega)} \leqslant k_2\|u\|_{H^{l_1}_{a_1}(\Omega)}, \tag{1.1.52}$$

где k_1, $k_2 > 0$ не зависят от a и u.

Поскольку $a_2 - l_2 + l_1 \leqslant a$, в силу леммы 1.1.1 имеем

$$\|\xi_2 u\|_{H^{l_1}_a(\Omega)} \leqslant \|\xi_2 u\|_{H^{l_1}_{a_2-l_2+l_1}(\Omega)} \leqslant \|\xi_2 u\|_{H^{l_2}_{a_2}(\Omega)} \leqslant k_3\|u\|_{H^{l_2}_{a_2}(\Omega)}, \tag{1.1.53}$$

где $k_3 > 0$ не зависит от a и u.

Неравенство (1.1.51) следует из (1.1.52), (1.1.53). □

Лемма 1.1.9. *Пусть $l_2 \geqslant l_1$ и $a_2 - l_2 < a_1 - l_1$, где $l_1, l_2 \in \mathbb{N}$. Тогда для a такого, что $a_2 - l_2 \leqslant a - l_1 \leqslant a_1 - l_1$, и для всех $\psi \in H^{l_1-1/2}_{a_1}(\Gamma) \cap H^{l_2-1/2}_{a_2}(\Gamma)$ мы имеем $\psi \in H^{l_1-1/2}_a(\Gamma)$ и*

$$\|\psi\|_{H^{l_1-1/2}_a(\Gamma)} \leqslant c_{14}\big(\|\psi\|_{H^{l_1-1/2}_{a_1}(\Gamma)} + \|\psi\|_{H^{l_2-1/2}_{a_2}(\Gamma)}\big), \tag{1.1.54}$$

где $c_{14} > 0$ не зависит от a и ψ.

Доказательство. Существуют функции $v_1 \in H^{l_1}_{a_1}(\Omega)$ и $v_2 \in H^{l_2}_{a_2}(\Omega)$ такие, что

$$v_1|_\Gamma = \psi, \qquad \|v_1\|_{H^{l_1}_{a_1}(\Omega)} \leqslant 2\|\psi\|_{H^{l_1-1/2}_{a_1}(\Gamma)},$$

$$v_2|_\Gamma = \psi, \qquad \|v_2\|_{H^{l_2}_{a_2}(\Omega)} \leqslant 2\|\psi\|_{H^{l_2-1/2}_{a_2}(\Gamma)}.$$

Из (1.1.52), (1.1.53) следует, что $\xi_1 v_1$, $\xi_2 v_2 \in H^{l_1}_a(\Omega)$ и

$$\|\xi_1 v_1\|_{H^{l_1}_a(\Omega)} \leqslant k_1\|v_1\|_{H^{l_1}_{a_1}(\Omega)} \leqslant 2k_1\|\psi\|_{H^{l_1-1/2}_{a_1}(\Gamma)},$$

$$\|\xi_2 v_2\|_{H^{l_1}_a(\Omega)} \leqslant k_2\|v_2\|_{H^{l_2}_{a_2}(\Omega)} \leqslant 2k_2\|\psi\|_{H^{l_2-1/2}_{a_2}(\Gamma)},$$

где k_1, $k_2 > 0$ не зависят от a и ψ, а функции ξ_1 и ξ_2 определены в доказательстве леммы 1.1.8.

Очевидно, $(\xi_1 v_1 + \xi_2 v_2)|_\Gamma = \psi$. Поэтому

$$\|\psi\|_{H^{l_1-1/2}_a(\Gamma)} = \inf_{v\in H^{l_1}_a(\Omega):v|_\Gamma=\psi} \|v\|_{H^{l_1}_a(\Omega)} \leqslant \|\xi_1 v_1 + \xi_2 v_2\|_{H^{l_1}_a(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant 2k_1\|\psi\|_{H^{l_1-1/2}_{a_1}(\Gamma)} + 2k_2\|\psi\|_{H^{l_2-1/2}_{a_2}(\Gamma)}. \qquad \square$$

1.2. Функциональные пространства с неоднородным весом

Пространства $E^k_a(\boldsymbol{\omega})$ и пространства следов

Предположим, что $\boldsymbol{\omega} = \theta$ или $\mathbb{R}^2$, где $\theta = \{y \in \mathbb{R}^2 : d_1 < \varphi < d_2,\ 0 < r\}$ — плоский угол, $0 < d_2 - d_1 < 2\pi$.

Обозначим через $E^k_a(\boldsymbol{\omega})$ пополнение множества $C^\infty_0(\overline{\boldsymbol{\omega}} \setminus \{0\})$ по норме

$$\|u\|_{E^k_a(\boldsymbol{\omega})} = \left(\sum_{|\alpha|\leqslant k}\int\limits_{\boldsymbol{\omega}} r^{2a}\Big(r^{2(|\alpha|-k)}+1\Big)|D^\alpha u(y)|^2 dy\right)^{1/2}, \tag{1.2.1}$$

где $k \geqslant 0$ — целое, $a \in \mathbb{R}$.

Пусть $\gamma \subset \overline{\boldsymbol{\omega}}$ — полупрямая, заданная формулой $\gamma = \{y \in \mathbb{R}^2 : \varphi = \varphi_0,\ 0 < r\}$. Введем пространство следов $E^{k-1/2}_a(\gamma)$ с нормой

$$\|\psi\|_{E^{k-1/2}_a(\gamma)} = \inf_v \|v\|_{E^k_a(\boldsymbol{\omega})} \qquad \big(v \in E^k_a(\boldsymbol{\omega}) : v|_\gamma = \psi\big), \tag{1.2.2}$$

где $k \in \mathbb{N}$.

Лемма 1.2.1. *Предположим, что* $g \in C^k(\overline{\boldsymbol{\omega}} \setminus \{0\})$ *и*

$$|r^{b+|\beta|}D^\beta g(y)| \leqslant c_1 \qquad (|\beta| \leqslant k,\ x \in \overline{\boldsymbol{\omega}} \setminus \{0\}), \tag{1.2.3}$$

где $c_1 > 0$ *не зависит от* y, $b \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. *Тогда для всех* $u \in E_a^k(\boldsymbol{\omega})$

$$\|gu\|_{E_{a+b}^k(\boldsymbol{\omega})} \leqslant c_1 c_2 \|u\|_{E_a^k(\boldsymbol{\omega})}, \tag{1.2.4}$$

где $c_2 > 0$ *не зависит от* u *и* g.

Доказательство. В силу (1.2.3) мы имеем

$$|D^{\alpha-\beta} g D^\beta u| \leqslant c_1 r^{-b-|\alpha-\beta|} |D^\beta u| \qquad (\beta_j \leqslant \alpha_j,\ j = 1, \ldots, n).$$

Поэтому мы получим

$$\|gu\|^2_{E_{a+b}^k(\boldsymbol{\omega})} \leqslant$$
$$\leqslant 2 \sum_{|\alpha| \leqslant k} \left(\int\limits_{r<1} r^{2(a+b-k+|\alpha|)} |D^\alpha(gu)|^2 dy + \int\limits_{r\geqslant 1} r^{2(a+b)} |D^\alpha(gu)|^2 dy \right) \leqslant$$
$$\leqslant k_1 \sum_{|\beta| \leqslant k} \left(\int\limits_{r<1} r^{2(a-k+|\beta|)} |D^\beta u|^2 dy + \int\limits_{r\geqslant 1} r^{2a} |D^\beta u|^2 dy \right) \leqslant k_1 \|u\|^2_{E_a^k(\boldsymbol{\omega})}. \quad \square$$

Лемма 1.2.2. *Норма* (1.2.2) *эквивалентна норме*

$$\|\psi\|'_{E_a^{k-1/2}(\gamma)} = \left(\sum_{s=-\infty}^{+\infty} \|\xi_s \psi\|^2_{E_a^{k-1/2}(\gamma)} \right)^{1/2}, \tag{1.2.5}$$

где $\{\xi_s\}_{s=-\infty}^{+\infty}$ *— разбиение единицы множества* $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, *удовлетворяющее условию* (1.1.19).

В силу леммы 1.2.1 доказательство аналогично доказательству леммы 1.1.2.

Лемма 1.2.3. *Предположим, что функция* $g \in C^k(\overline{\boldsymbol{\omega}} \setminus \{0\})$ *удовлетворяет неравенству* (1.2.3). *Тогда для всех* $\psi \in E_a^{k-1/2}(\gamma)$

$$\|g\psi\|_{E_{a+b}^{k-1/2}(\gamma)} \leqslant c_1 c_3 \|\psi\|_{E_a^{k-1/2}(\gamma)}, \tag{1.2.6}$$

где $c_3 > 0$ *не зависит от* ψ *и* g.

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.1.4 и основано на использовании леммы 1.2.1.

Лемма 1.2.4. *Норма* (1.2.2) *эквивалентна норме*

$$\|\psi\|''_{E_a^{k-1/2}(\gamma)} =$$
$$= \left(\int\limits_\gamma \int\limits_\gamma \sum_{|\alpha|=k-1} \left| |y_1|^a \left(D^\alpha \psi\right)(y_1) - |y_2|^a \left(D^\alpha \psi\right)(y_2) \right|^2 \frac{d\gamma_{y_1} d\gamma_{y_2}}{|y_1 - y_2|^2} + \right.$$
$$\left. + \int\limits_\gamma |y|^{2a} \sum_{|\alpha| \leqslant k-1} \left(|y|^{2(|\alpha|-k)+1} + 1 \right) |\left(D^\alpha \psi\right)(y)|^2 d\gamma_y \right)^{1/2}. \quad (1.2.7)$$

Доказательство. 1. Пусть (r, φ_0), (r_1, φ_0), (r_2, φ_0) — полярные координаты точек $y, y_1, y_2 \in \gamma$ соответственно. Обозначим $\psi(r) = \psi(y)$ и $\psi(r_j) = \psi(y_j)$ для $y, y_j \in \gamma$ $(j = 1, 2)$. Тогда мы можем переписать норму (1.2.7) в виде

$$\|\psi\|''_{E_a^{k-1/2}(\gamma)} = \left(\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \left| r_1^a \left(D_{r_1}^{k-1} \psi\right)(r_1) - r_2^a \left(D_{r_2}^{k-1} \psi\right)(r_2) \right|^2 \frac{dr_1 dr_2}{|r_1 - r_2|^2} + \right.$$
$$\left. + \sum_{l \leqslant k-1} \int\limits_0^\infty r^{2a} \left(r^{2(l-k)+1} + 1 \right) \left| \left(D_r^l \psi\right)(r) \right|^2 dr \right)^{1/2}. \quad (1.2.8)$$

2. Положим

$$\gamma_s = \left\{ y \in \gamma : 2^{s-1} < r < 2^{s+1} \right\}, \qquad \boldsymbol{\omega}_s = \left\{ y \in \boldsymbol{\omega} : 2^{s-2} < r < 2^{s+2} \right\}.$$

Обозначим через $\mathring{E}_a^{k-1/2}(\gamma_s)$ подпространство функций в $E_a^{k-1/2}(\gamma)$ с носителями, лежащими в $\overline{\gamma}_s$ $(s = 1, 2, \dots)$. Используя лемму 1.2.1, аналогично первой части доказательства леммы 1.1.3 мы убеждаемся, что формула

$$\|\psi\|'_{\mathring{E}_a^{k-1/2}(\gamma_0)} = \inf_w \|w\|_{E_a^{k-1/2}(\boldsymbol{\omega})} \qquad \left(w \in E_a^k(\boldsymbol{\omega}) : w|_{\gamma_0} = \psi,\ \operatorname{supp} w \subset \overline{\boldsymbol{\omega}}_0 \right)$$

задает эквивалентное скалярное произведение в $\mathring{E}_a^{k-1/2}(\gamma_0)$.

3. Докажем, что для всех $\psi \in E_a^{k-1/2}(\gamma)$ и $s = 0, 1, \dots$

$$k_1 \|\xi_s \psi\|_{E_a^{k-1/2}(\gamma)} \leqslant \|\xi_s \psi\|''_{E_a^{k-1/2}(\gamma)} \leqslant k_2 \|\xi_s \psi\|_{E_a^{k-1/2}(\gamma)}, \quad (1.2.9)$$

где $k_1, k_2 > 0$ не зависят от ψ и s.

Очевидно, для всех $v \in E_a^k(\boldsymbol{\omega})$ таких, что $\operatorname{supp} v \subset \overline{\boldsymbol{\omega}}_s$, и всех $s > 0$

$$k_3 2^{as} \|v\|_{W^k(\boldsymbol{\omega})} \leqslant \|v\|_{E_a^k(\boldsymbol{\omega})} \leqslant k_4 2^{as} \|v\|_{W^k(\boldsymbol{\omega})}, \tag{1.2.10}$$

где $k_3, k_4 > 0$ не зависят от v и s.

Из второй части доказательства и замечания B.1 следует, что для всех $\eta \in E_a^{k-1/2}(\gamma)$ таких, что $\operatorname{supp} \eta \subset \overline{\gamma}_s$, и всех $s > 0$

$$k_5 2^{as} \|\eta\|_{W^{k-1/2}(\gamma)} \leqslant \|\eta\|_{E_a^{k-1/2}(\gamma)} \leqslant k_6 2^{as} \|\eta\|_{W^{k-1/2}(\gamma)}, \tag{1.2.11}$$

где $k_5, k_6 > 0$ не зависят от ψ и s.

В силу (1.2.11), (1.1.31), производя замену переменных $r' = 2^{-s} r$, $r_j' = 2^{-s} r_j$ $(j = 1, 2)$, используя неравенства

$$2^{2s(a-k+1)} < 2^{2s(a-l+1/2)} \quad (s > 0,\ l \leqslant k-1), \qquad 2^{s-1} < r < 2^{s+1} \quad (y \in \gamma_s)$$

и переходя к старым переменным $r = 2^s r'$, $r_j = 2^s r_j'$, мы имеем

$$\begin{gathered}
\|\xi_s \psi\|_{E_a^{k-1/2}(\gamma)} \leqslant k_6 2^{as} \|\xi_s \psi\|_{W^{k-1/2}(\gamma_s)} = \\
= k_6 2^{as} \Bigg(\int\limits_{l_s} \int\limits_{l_s} \left| \left(D_{r_1}^{k-1} (\xi_s \psi)\right)(r_1) - \left(D_{r_2}^{k-1} (\xi_s \psi)\right)(r_2) \right|^2 \frac{dr_1 dr_2}{|r_1 - r_2|^2} + \\
+ \sum_{l \leqslant k-1} \int\limits_{l_s} \left| \left(D_r^l (\xi_s \psi)\right)(r) \right|^2 dr \Bigg)^{1/2} = \\
= k_6 \Bigg(\int\limits_{l_0} \int\limits_{l_0} 2^{2s(a-k+1)} \left| \left(D_{r_1'}^{k-1} (\xi_s \psi)\right)(r_1') - \left(D_{r_2'}^{k-1} (\xi_s \psi)\right)(r_2') \right|^2 \frac{dr_1' dr_2'}{|r_1' - r_2'|^2} + \\
+ \sum_{l \leqslant k-1} 2^{2s(a-l+1/2)} \int\limits_{l_0} \left| \left(D_{r'}^l (\xi_s \psi)\right)(r') \right|^2 dr' \Bigg)^{1/2} \leqslant \\
\leqslant k_7 p_s (\xi_s \psi) \leqslant k_8 \|\xi_s \psi\|''_{E_a^{k-1/2}(\gamma)},
\end{gathered}$$

где $l_s = \left(2^{s-1}, 2^{s+1}\right)$,

$$p_s\left(\xi_s\psi\right)=\Bigg(\int\limits_{l_0}\int\limits_{l_0}2^{2s(a-k+1)}\bigg|\left(r_1'\right)^a\left(D^{k-1}_{r_1'}\left(\xi_s\psi\right)\right)\left(r_1'\right)-$$

$$-\left(r_2'\right)^a\left(D^{k-1}_{r_2'}\left(\xi_s\psi\right)\right)\left(r_2'\right)\bigg|^2\frac{dr_1'dr_2'}{|r_1'-r_2'|^2}+$$

$$+\sum_{l\leqslant k-1}\int\limits_{l_0}2^{2s(a-l+1/2)}\left|\left(D^l_{r'}\left(\xi_s\psi\right)\right)\left(r'\right)\right|^2dr'\Bigg)^{1/2},$$

$k_7, k_8>0$ не зависят от ψ и s.

Таким образом, мы доказали первое неравенство в (1.2.9). Аналогично мы можем получить второе неравенство.

4. Докажем теперь, что для всех $\psi\in E_a^{k-1/2}(\gamma)$

$$k_9\|\psi\|_{E_a^{k-1/2}(\gamma)}\leqslant\|\psi\|''_{E_a^{k-1/2}(\gamma)}\leqslant k_{10}\|\psi\|_{E_a^{k-1/2}(\gamma)}. \qquad (1.2.12)$$

Достаточно доказать эти неравенства для $\psi\in E_a^{k-1/2}(\gamma)$ таких, что $\operatorname{supp}\psi\subset\{y\in\gamma: r>1\}$. Это следует из разбиения единицы и лемм 1.1.3, 1.1.4 и 1.2.3.

Вначале мы покажем, что выполняется второе неравенство в (1.2.12).

Обозначим

$$G_1=\{r_1,\ r_2>0: r_2<r_1/2\},\ G_2=\{r_1,\ r_2>0: 2r_1<r_2\},$$
$$G_3=\{r_1,\ r_2>0: r_1/2<r_2<2r_1\}.$$

Поскольку $\operatorname{supp}\psi\subset\{y\in\gamma: r>1\}$, мы можем оценить норму (1.2.8) следующим образом:

$$\|\psi\|''_{E_a^{k-1/2}(\gamma)}\leqslant k_{11}\left(\sum_{i=0}^{3}I_i\right)^{1/2}, \qquad (1.2.13)$$

где

$$I_0=\sum_{l\leqslant k-1}\int\limits_0^\infty r^{2a}\left|\left(D^l_r\psi\right)(r)\right|^2dr,$$

$$I_i=\int\limits_{G_i}\left|r_1^a\left(D^{k-1}_{r_1}\psi\right)(r_1)-r_2^a\left(D^{k-1}_{r_2}\psi\right)(r_2)\right|^2\frac{dr_1dr_2}{|r_1-r_2|^2}\qquad(i=1,2,3).$$

Аналогично (1.1.38), (1.1.39) и (1.1.42) мы получим

$$I_0 + I_1 + I_2 \leqslant k_{12} \sum_{l \leqslant k-1} \int\limits_0^\infty r^{2a} \left| \left(D_r^l \psi\right)(r) \right|^2 dr \leqslant$$

$$\leqslant k_{13} \sum_s \sum_{l \leqslant k-1} \int\limits_0^\infty r^{2a} \left| D_r^l (\xi_s \psi)(r) \right|^2 dr \leqslant$$

$$\leqslant k_{13} \sum_s \left(\|\xi_s \psi\|''_{E_a^{k-1/2}(\Gamma)} \right)^2. \quad (1.2.14)$$

С другой стороны, аналогично (1.1.41) мы выводим

$$I_3 \leqslant \sum_s \int\limits_{l_s} \int\limits_{l_s} \left| r_1^a \left(D_r^{k-1} (\xi_{s-1} + \xi_s + \xi_{s+1}) \psi \right)(r_1) - \right.$$

$$\left. - r_2^a \left(D_r^{k-1} (\xi_{s-1} + \xi_s + \xi_{s+1}) \psi \right)(r_2) \right|^2 \frac{dr_1 dr_2}{|r_1 - r_2|^2} \leqslant$$

$$\leqslant k_{14} \sum_s \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \left| r_1^a \left(D_r^{k-1} (\xi_s \psi) \right)(r_1) - r_2^a \left(D_r^{k-1} (\xi_s \psi) \right)(r_2) \right|^2 \frac{dr_1 dr_2}{|r_1 - r_2|^2} \leqslant$$

$$\leqslant k_{14} \sum_s \left(\|\xi_s \psi\|''_{E_a^{k-1/2}(\gamma)} \right)^2. \quad (1.2.15)$$

Неравенства (1.2.13)–(1.2.15), (1.2.9) и лемма 1.2.2 дают нам

$$\|\psi\|''_{E_a^{k-1/2}(\gamma)} \leqslant k_{15} \left(\sum_s \left(\|\xi_s \psi\|''_{E_a^{k-1/2}(\gamma)} \right)^2 \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant k_{16} \left(\sum_s \|\xi_s \psi\|^2_{E_a^{k-1/2}(\gamma)} \right)^{1/2} \leqslant k_{17} \|\psi\|_{E_a^{k-1/2}(\gamma)}.$$

Остается доказать первое неравенство в (1.2.12). Обозначим через $\|\psi\|''_{E_a^{k-1/2}(\gamma_s)}$ норму, заданную формулой (1.2.7) с γ_s вместо γ. Используя замену переменных $r' = 2^{-s} r$, $r'_j = 2^{-s} r_j$ $(j = 1, 2)$, формулу Лейбница, неравенства (1.1.43) и возвращаясь вновь к старым переменным $r = 2^s r'$, $r_j = 2^s r'_j$ $(j = 1, 2)$, для $s > 0$ имеем

$$\|\xi_s \psi\|''_{E_a^{k-1/2}(\gamma)} \leqslant k_{18} p_s(\xi_s \psi) \leqslant k_{19} p_s(\psi) \leqslant k_{20} \|\psi\|''_{E_a^{k-1/2}(\gamma_s)}, \qquad (1.2.16)$$

где $k_{18}, k_{19}, k_{20} > 0$ не зависят от ψ и s.

Из леммы 1.2.2 и неравенств (1.2.9) и (1.2.16) мы получаем

$$\|\psi\|_{E_a^{k-1/2}(\gamma)} \leqslant k_{21}\left(\sum_s \|\xi_s\psi\|^2_{E_a^{k-1/2}(\gamma)}\right)^{1/2} \leqslant k_{22}\left(\sum_s \left(\|\xi_s\psi\|''_{E_a^{k-1/2}(\gamma)}\right)^2\right)^{1/2}$$
$$\leqslant k_{23}\left(\sum_s \left(\|\psi\|''_{E_a^{k-1/2}(\gamma_s)}\right)^2\right)^{1/2} \leqslant k_{24}\|\psi\|''_{E_a^{k-1/2}(\gamma)}. \qquad \square$$

Лемма 1.2.5. *Существует линейный ограниченный оператор* $S_E : E_a^{k-1/2}(\gamma) \to E_a^k(\boldsymbol{\omega})$ *такой, что* $(S_E\psi)|_\gamma = \psi$ $\left(\psi \in E_a^{k-1/2}(\gamma)\right)$.

Доказательство. 1. Пусть $\psi \in E_a^{k-1/2}(\gamma)$ таково, что $\operatorname{supp}\psi \subset \gamma_s$, $s \in \mathbb{Z}$.

Предположим вначале, что $s \leqslant 0$. Тогда нормы $\|u\|_{H_a^k(\boldsymbol{\omega})}$ и $\|u\|_{E_a^k(\boldsymbol{\omega})}$ эквивалентны для всех $u \in H_a^k(\boldsymbol{\omega})$ таких, что $\operatorname{supp} u \subset \overline{\boldsymbol{\omega}}_s$. Из лемм 1.1.3 и 1.2.4 следует, что нормы $\|\psi\|_{H_a^{k-1/2}(\gamma)}$ и $\|\psi\|_{E_a^{k-1/2}(\gamma)}$ также эквивалентны. Поэтому из доказательства леммы 1.1.5 следует существование функции $u \in E_a^k(\boldsymbol{\omega})$ такой, что $\operatorname{supp} u \subset \overline{\boldsymbol{\omega}}_s$ и

$$u|_\gamma = \psi, \tag{1.2.17}$$
$$\|u\|_{E_a^k(\boldsymbol{\omega})} \leqslant k_1\|\psi\|_{E_a^{k-1/2}(\gamma)}, \tag{1.2.18}$$

где $k_1 > 0$ не зависит от ψ и s.

Предположим, что $s > 0$. Тогда из неравенств (1.2.10), (1.2.11) и теоремы B.6 вытекает существование функции $u \in E_a^k(\boldsymbol{\omega})$ такой, что $\operatorname{supp} u \subset \overline{\boldsymbol{\omega}}_s$ и выполняются условия (1.2.17) и (1.2.18).

2. Пусть теперь $\psi \in E_a^{k-1/2}(\gamma)$ — произвольная функция. Обозначим через u_s функцию из $E_a^k(\boldsymbol{\omega})$ с носителем $\operatorname{supp} u_s \subset \overline{\boldsymbol{\omega}}_s$, удовлетворяющую условиям

$$u_s|_\gamma = \xi_s\psi, \tag{1.2.19}$$
$$\|u_s\|_{E_a^k(\boldsymbol{\omega})} \leqslant k_1\|\xi_s\psi\|_{E_a^{k-1/2}(\gamma)}, \tag{1.2.20}$$

где $s \in \mathbb{Z}$.

Введем функцию $u = \sum\limits_s u_s$. Из (1.2.19) следует, что $u|_\gamma = \psi$. В силу неравенства (1.2.20) и леммы 1.2.2 имеем

$$\|u\|^2_{E_a^k(\boldsymbol{\omega})} \leqslant k_2\sum_s \|u_s\|^2_{E_a^k(\boldsymbol{\omega})} \leqslant k_3\sum_s \|\xi_s\psi\|^2_{E_a^{k-1/2}(\gamma)} \leqslant k_4\|\psi\|^2_{E_a^{k-1/2}(\gamma)}.$$

Очевидно, оператор S_E, заданный формулой $S_E\psi = u$, является линейным ограниченным оператором, отображающим $H_a^{k-1/2}(\gamma)$ в $H_a^k(\boldsymbol{\omega})$ так, что $(S_E\psi)|_\gamma = \psi$. $\square$

Связь между пространствами $H_a^k(\Omega)$ и $E_a^k(\boldsymbol{\omega})$

Предположим, что $n \geqslant 3$. Пусть $\Omega = \Theta = \{x = (y,z) \in \mathbb{R}^n : d_1 < \varphi < d_2,\ 0 < r,\ z \in \mathbb{R}^{n-2}\}$ или $\Omega = \mathbb{R}^n$. Пусть $\boldsymbol{\omega} = \theta = \{y \in \mathbb{R}^2 : d_1 < \varphi < d_2,\ 0 < r\}$ или $\boldsymbol{\omega} = \mathbb{R}^2$, где $\mathcal{P} = \{x = (y,z) \in \mathbb{R}^n : y = 0,\ z \in \mathbb{R}^{n-2}\}$, $0 < d_2 - d_1 < 2\pi$.

Обозначим через

$$\widehat{u}(y,\varkappa) = F_{z\to\varkappa}u = (2\pi)^{-(n-2)/2} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} u(y,z)e^{-i(\varkappa,z)}dz$$

преобразование Фурье функции $u(y,z)$ по переменным z.

Лемма 1.2.6. *Формула*

$$\|u\|'_{H_a^k(\Omega)} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} |\varkappa|^{2(k-a)-2}\|U(\cdot,\varkappa)\|^2_{E_a^k(\boldsymbol{\omega})}d\varkappa\right)^{1/2} \qquad (1.2.21)$$

задает эквивалентную норму в $H_a^k(\Omega)$, *где* $U(Y,\varkappa) = \widehat{u}\big(|\varkappa|^{-1}Y,\varkappa\big)$.

Доказательство. Используя равенство Парсеваля и переходя к новым переменным $Y = |\varkappa|y$, мы получаем

$$\begin{aligned}\|u\|^2_{H_a^k(\Omega)} &= \sum_{|\sigma|\leqslant k}\int\limits_\Omega |y|^{2(a-k+|\sigma|)}|D_y^\alpha D_z^\beta u(y,z)|^2dydz = \\ &= \sum_{|\sigma|\leqslant k}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} |\varkappa^\beta|^2 \int\limits_{\boldsymbol{\omega}} |y|^{2(a-k+|\sigma|)}|D_y^\alpha\widehat{u}(y,\varkappa)|^2dyd\varkappa = \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} |\varkappa|^{2(k-a)-2}\sum_{|\alpha|\leqslant k}\sum_{|\beta|\leqslant k-|\alpha|}\left(|\varkappa^\beta|^2|\varkappa|^{-2|\beta|}\right) \\ &\qquad \int\limits_{\boldsymbol{\omega}} |Y|^{2(a-k+|\sigma|)}|D_Y^\alpha U(Y,\varkappa)|^2dYd\varkappa,\end{aligned}$$

где $\sigma = (\alpha,\beta)$.

Поэтому

$$k_1 I(u) \leqslant \|u\|^2_{H^k_a(\Omega)} \leqslant k_2 I(u), \tag{1.2.22}$$

где

$$I(u) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} |\varkappa|^{2(k-a)-2} \sum_{|\alpha|\leqslant k} \int\limits_{\boldsymbol{\omega}} g_\alpha(Y)|Y|^{2a}|D^\alpha_Y U(Y,\varkappa)|^2 dY d\varkappa,$$

$$g_\alpha(Y) = \sum_{|\beta|\leqslant k-|\alpha|} |Y|^{2(|\alpha|+|\beta|-k)}.$$

Очевидно,

$$k_3\Big(1+|Y|^{2(|\alpha|-k)}\Big) \leqslant g_\alpha(Y) \leqslant k_4\Big(1+|Y|^{2(|\alpha|-k)}\Big). \tag{1.2.23}$$

Из неравенств (1.2.22) и (1.2.23) следует, что формула (1.2.21) задает эквивалентную норму в $H^k_a(\Omega)$. □

Обозначим через $\Gamma \subset \overline{\Omega}$ полуплоскость вида $\Gamma = \{x = (y,z) \in \mathbb{R}^n : \varphi = \varphi_0,\ 0 < r,\ z \in \mathbb{R}^{n-2}\}$, а через $\gamma \subset \overline{\boldsymbol{\omega}}$ — полупрямую вида $\gamma = \{y \in \mathbb{R}^2 : \varphi = \varphi_0,\ 0 < r\}$.

Лемма 1.2.7. *Формула*

$$\|v\|'_{H^{k-1/2}_a(\Gamma)} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} |\varkappa|^{2(k-a)-2}\|V(\cdot,\varkappa)\|^2_{E^{k-1/2}_a(\gamma)} d\varkappa\right)^{1/2} \tag{1.2.24}$$

задает эквивалентную норму в $H^{k-1/2}_a(\Gamma)$, *где* $V(Y,\varkappa) = \widehat{v}\big(|\varkappa|^{-1}Y,\varkappa\big)$.

Доказательство. 1. В силу леммы 1.1.5 существует линейный ограниченный оператор

$$S_H : H^{k-1/2}_a(\Gamma) \to H^k_a(\Omega)$$

такой, что $(S_H v)|_\Gamma = v$ $\big(v \in H^{k-1/2}_a(\Gamma)\big)$. Обозначим $u = S_H v$. Тогда, применяя лемму 1.2.6 и равенство $U(\cdot,\varkappa)|_\gamma = V(\cdot,\varkappa)$ $\big(\varkappa \in \mathbb{R}^{n-2}\big)$, мы получим

$$\|v\|_{H^{k-1/2}_a(\Gamma)} \geqslant k_1\|u\|_{H^k_a(\Omega)} \geqslant k_2 \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} |\varkappa|^{2(k-a)-2}\|U(\cdot,\varkappa)\|^2_{E^k_a(\boldsymbol{\omega})} d\varkappa\right)^{1/2} \geqslant$$

$$\geqslant k_2 \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} |\varkappa|^{2(k-a)-2}\|V(\cdot,\varkappa)\|^2_{E^{k-1/2}_a(\gamma)} d\varkappa\right)^{1/2} = k_2\|v\|'_{H^{k-1/2}_a(\Gamma)}.$$

2. С другой стороны, в силу леммы 1.2.5 существует линейный ограниченный оператор $S_E : E_a^{k-1/2}(\gamma) \to E_a^k(\boldsymbol{\omega})$ такой, что $(S_E\psi)|_\gamma = \psi$ $\Big(\psi \in E_a^{k-1/2}(\Gamma)\Big)$. Обозначим $U(\cdot,\varkappa) = S_E V(\cdot,\varkappa)$ $\big(\varkappa \in \mathbb{R}^{n-2}\big)$. Тогда мы имеем

$$
\begin{aligned}
\|v\|'_{H_a^{k-1/2}(\gamma)} = \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} |\varkappa|^{2(k-a)-2}\|V(\cdot,\varkappa)\|^2_{E_a^{k-1/2}(\gamma)}d\varkappa\Bigg)^{1/2} \geqslant \\
\geqslant k_3\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} |\varkappa|^{2(k-a)-2}\|U(\cdot,\varkappa)\|^2_{E_a^{k}(\boldsymbol{\omega})}d\varkappa\Bigg)^{1/2}.
\end{aligned}
\tag{1.2.25}
$$

Пусть $F^{-1}_{\varkappa\to z}U(y|\varkappa|,\varkappa) = u(y,z)$ — обратное преобразование Фурье U по переменной $\varkappa$. Тогда из неравенства (1.2.25), леммы 1.2.6 и равенства $u|_\Gamma = v$ следует, что $u \in H_a^k(\Omega)$ и

$$
\|v\|'_{H_a^{k-1/2}(\Gamma)} \geqslant k_4\|u\|_{H_a^k(\Omega)} \geqslant k_4\|v\|_{H_a^{k-1/2}(\Gamma)}. \qquad \square
$$

1.3. Весовые пространства в ограниченных областях

Теоремы вложения и интерполяционные неравенства

Вначале мы дадим некоторые определения.

Определение 1.3.1. Будем говорить, что $Q \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ — *ограниченная область с конечным числом ребер или угловых точек*, если граница ∂Q имеет вид

$$
\partial Q = \Big(\bigcup_i M_i\Big) \cup \Big(\bigcup_p \mathcal{K}_{1p}\Big) \qquad (i = 1,\dots,N_0,\ p = 1,\dots,N_1),
$$

где M_i — непересекающиеся $(n-1)$-мерные многообразия класса C^∞, открытые и связные в топологии ∂Q, $\mathcal{K}_{1p}$ — непересекающиеся замкнутые $(n-2)$-мерные связные многообразия класса C^∞, и если в некоторой окрестности каждой точки $g \in \bigcup\limits_p \mathcal{K}_{1p}$ область Q диффеоморфна n-мерному двугранному углу $\Theta = \{x = (y,z) \in \mathbb{R}^n : d_1 < \varphi < d_2,\ 0 < r,$ $z \in \mathbb{R}^{n-2}\}$ при $n \geqslant 3$ и плоскому углу $\theta = \{x = y \in \mathbb{R}^2 : d_1 < \varphi < d_2,$ $0 < r\}$ при $n = 2$; здесь r, φ — полярные координаты с полюсом в точке g, $0 < d_2 - d_1 < 2\pi$.

Если $n = 2$, то M_i — открытые кривые класса C^∞, $\mathcal{K}_{1p}$ — изолированные точки; в этом случае для простоты мы предполагаем, что $N_0 = N_1$.

В дальнейшем в этом параграфе мы будем предполагать, что Q — ограниченная область с конечным числом угловых точек или ребер.

Введем множество $\mathcal{K} = \mathcal{K}(Q)$ следующим образом:

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3,$$

где

$$\mathcal{K}_1 = \bigcup_p \mathcal{K}_{1p}, \qquad \mathcal{K}_2 = \bigcup_p \mathcal{K}_{2p} \subset \bigcup_i M_i, \qquad \mathcal{K}_3 = \bigcup_p \mathcal{K}_{3p} \subset Q,$$

$\mathcal{K}_{jp}$ $(j = 1, 2, 3,\ p = 1, \dots, N_j)$ — непересекающиеся $(n-2)$-мерные связные многообразия класса C^∞.

Замечание 1.3.1. Множества $\mathcal{K}_2$ и $\mathcal{K}_3$ могут быть пустыми.

Используя разбиение единицы, легко показать, что для каждой области $Q \subset \mathbb{R}^n$ с конечным числом угловых точек или ребер существует функция $\rho = \rho(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K})$ такая, что в некоторой окрестности $\mathcal{K}^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x, \mathcal{K}) < \varepsilon\}$ функция $\rho(x)$ эквивалентна $\rho(x, \mathcal{K})$ и $\rho(x) \geqslant c > 0$ $\big(x \in \overline{Q} \setminus \mathcal{K}^\varepsilon\big)$, где $\rho(x, \mathcal{K}) = \inf\limits_{y \in \mathcal{K}} |x - y|$.

Определение 1.3.2. Введем весовое пространство Кондратьева $H_a^k(Q) = H_a^k(Q, \mathcal{K})$ как пополнение множества $C_0^\infty\big(\overline{Q} \setminus \mathcal{K}\big)$ по норме

$$\|u\|_{H_a^k(Q)} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant k} \int_Q \rho^{2(a-k+|\alpha|)} |D^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \tag{1.3.1}$$

где $C_0^\infty\big(\overline{Q} \setminus \mathcal{K}\big)$ — множество бесконечно дифференцируемых в $\overline{Q}$ функций с компактными носителями, принадлежащими $\overline{Q} \setminus \mathcal{K}$, $k \geqslant 0$ — целое, $a \in \mathbb{R}$.

Пусть $M \subset \overline{Q}$ — $(n-1)$-мерное многообразие класса C^∞ с границей $\partial M \in C^\infty$ такое, что если для некоторых $j, 1 \leqslant j \leqslant 3$, и $p, 1 \leqslant p \leqslant N_j$, выполнено соотношение $\overline{M} \cap \mathcal{K}_{jp} \neq \varnothing$, то $\mathcal{K}_{jp} \subset \overline{M}$. Далее в этом параграфе мы будем предполагать, что $(n-1)$-мерное многообразие M удовлетворяет этому условию.

Обозначим через $H_a^{k-1/2}(M)$ пространство следов на $(n-1)$-мерном многообразии $M \subset \overline{Q}$ класса C^∞ с нормой

$$\|\psi\|_{H_a^{k-1/2}(M)} = \inf \|v\|_{H_a^k(Q)} \qquad \big(v \in H_a^k(Q) : v|_M = \psi\big). \tag{1.3.2}$$

Замечание 1.3.2. Используя разбиение единицы для M, локальную замену переменных и лемму 1.1.3, легко получить эквивалентную норму в пространстве $H_a^{k-1/2}(M)$ в явном виде.

Из определения пространства $H_a^k(Q)$ получаем следующее утверждение.

Лемма 1.3.1. *Пусть $0 < k$ и $0 \leqslant s \leqslant k$ — целые числа, и пусть $b \geqslant a$. Тогда $H_a^k(Q)$ непрерывно вложено в $H_{b-s}^{k-s}(Q)$.*

Лемма 1.3.2. *Пусть $0 < k$ и $0 \leqslant s < k$ — целые числа, и пусть $b \geqslant a$. Предположим, что $M \subset \overline{Q}$ — $(n-1)$-мерное многообразие класса C^∞. Тогда $H_a^{k-1/2}(M)$ непрерывно вложено $H_{b-s}^{k-s-1/2}(M)$.*

Доказательство. Пусть $\psi \in H_a^{k-1/2}(M)$. Тогда существует функция $v \in H_a^k(Q)$ такая, что $v|_M = \psi$ и

$$\|v\|_{H_a^k(Q)} \leqslant 2\|\psi\|_{H_a^{k-1/2}(M)}. \tag{1.3.3}$$

Из леммы 1.3.1 следует, что $v \in H_{b-s}^{k-s}(Q)$ и

$$\|v\|_{H_{b-s}^{k-s}(Q)} \leqslant k_1 \|v\|_{H_a^k(Q)}. \tag{1.3.4}$$

Поэтому $\psi \in H_{b-s}^{k-s-1/2}(M)$ и из (1.3.3), (1.3.4) мы имеем

$$\|\psi\|_{H_{b-s}^{k-s-1/2}(M)} \leqslant \|v\|_{H_{b-s}^{k-s}(Q)} \leqslant 2k_1 \|\psi\|_{H_a^{k-1/2}(M)}. \qquad \square$$

Аналогично доказательству лемм 1.1.1 и 1.1.4 мы получим следующие результаты.

Лемма 1.3.3. *Предположим, что* $g \in C^k(\overline{Q} \setminus \mathcal{K})$ ($k \geqslant 0$ *— целое*) *и*

$$|(\rho(x))^{b+|\beta|} D^\beta g(x)| \leqslant c_1 \qquad \bigl(|\beta| \leqslant k,\ x \in \overline{Q} \setminus \mathcal{K}\bigr), \tag{1.3.5}$$

где $c_1 > 0$ *не зависит от* x, $b \in \mathbb{R}$.

Тогда для всех $u \in H_a^k(Q)$

$$\|gu\|_{H_{a+b}^k(Q)} \leqslant c_1 c_2 \|u\|_{H_a^k(Q)}, \tag{1.3.6}$$

где $c_2 > 0$ *не зависит от* u *и* g.

Лемма 1.3.4. *Предположим, что* $g \in C^k(\overline{Q} \setminus \mathcal{K})$ ($k \in \mathbb{N}$) *удовлетворяет неравенству* (1.3.5). *Пусть* $M \subset \overline{Q}$ *—* $(n-1)$*-мерное многообразие класса* C^∞. *Тогда для всех* $\psi \in H_a^{k-1/2}(M)$

$$\|g\psi\|_{H_{a+b}^{k-1/2}(M)} \leqslant c_1 c_3 \|\psi\|_{H_a^{k-1/2}(M)}, \tag{1.3.7}$$

где $c_3 > 0$ *не зависит от* u *и* g.

Используя разбиение единицы, эквивалентность норм в пространстве $H_a^k(\cdot)$ относительно невырожденной гладкой замены переменных, леммы 1.1.6 и 1.1.7, а также лемму 1.3.3 для $b = 0$, получаем следующие утверждения.

Лемма 1.3.5. *Для любых* $u \in H_a^k(Q)$ *и* $q > 0$

$$q^s \|u\|_{H_{a-s}^{k-s}(Q)} \leqslant c_{ls}\Bigl(\|u\|_{H_a^k(Q)} + q^k \|u\|_{H_{a-k}^0(Q)}\Bigr), \tag{1.3.8}$$

где $c_{ls} > 0$ *не зависит от* u *и* q; $0 < s < k$ *— целые числа.*

Лемма 1.3.6. *Пусть* $M \subset \overline{Q}$ *—* $(n-1)$*-мерное многообразие класса* C^∞. *Тогда для любых* $u \in H_a^1(Q)$ *и* $q > 0$

$$q^{1/2} \|u|_M\|_{H_{a-1/2}^0(M)} \leqslant c_4\Bigl(\|u\|_{H_a^1(Q)} + q\|u\|_{H_{a-1}^0(Q)}\Bigr), \tag{1.3.9}$$

где $c_4 > 0$ *не зависит от* u *и* q.

Продолжение функций в весовых пространствах

Лемма 1.3.7. *Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с конечным числом угловых точек или ребер, и пусть $Q_1 \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial Q_1 \in C^\infty$ такая, что $\overline{Q} \subset Q_1$. Предположим, что $\mathcal{K}(Q_1) = \mathcal{K}(Q)$. Тогда для любой функции $u \in H_a^k(Q)$ существует функция $U \in H_a^k(Q_1)$ такая, что $U(x) = u(x)$ для $x \in Q$ и*

$$\|U\|_{H_a^k(Q_1)} \leqslant c_5 \|u\|_{H_a^k(Q)}. \tag{1.3.10}$$

Доказательство. Не ограничивая общности, будем предполагать, что $n \geqslant 3$. Используя разбиение единицы, легко показать, что для доказательства достаточно установить следующий результат. *Для любой функции $v \in H_a^k(\Theta)$ существует функция $V \in H_a^k(\mathbb{R}^n)$ такая, что $V(x) = v(x)$ для $x \in \Theta$ и*

$$\|V\|_{H_a^k(\mathbb{R}^n)} \leqslant k_1 \|v\|_{H_a^k(\Theta)}. \tag{1.3.11}$$

Перейдем к переменным φ, τ, z' и обозначим через $\widehat{v}(\varphi, \lambda, z')$ преобразование Фурье функции $v(\varphi, \tau, z')$ по τ, где φ, r — полярные координаты точки $y \in \mathbb{R}^n$, $\tau = \ln r$, $z' = r^{-1}z$, $z \in \mathbb{R}^{n-2}$. Из теоремы 1.1.2 следует, что для п. в.

$$\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \lambda = H\}$$

мы имеем $\widehat{v}(\varphi, \lambda, z') \in W^k(G_0)$, где $H = a - k + n/2$, $G_0 = \{(\varphi, z') : d_1 < \varphi < d_2,\ z' \in \mathbb{R}^{n-2}\}$. Не ограничивая общности, мы будем предполагать, что $0 < d_1 < d_2 < 2\pi$. По теореме B.5 о продолжении функций в пространствах Соболева существует функция $V_1 \in W^k(G_1)$ такая, что $V_1(\varphi, \lambda, z') = \widehat{v}(\varphi, \lambda, z')$ для $d_1 < \varphi < d_2$, $V_1(\varphi, \lambda, z') = 0$ для $0 \leqslant \varphi \leqslant d_1/2$ и $\pi + d_2/2 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ и

$$\|V_1\|^2_{W^k(G_1)} + |\lambda|^{2k} \|V_1\|^2_{L_2(G_1)} \leqslant k_2 \Big(\|\widehat{v}\|^2_{W^k(G_0)} + |\lambda|^{2k} \|\widehat{v}\|^2_{L_2(G_0)} \Big),$$

где $G_1 = \{(\varphi, z') : 0 < \varphi < 2\pi,\ z' \in \mathbb{R}^{n-2}\}$. Поэтому в силу теоремы Планшереля (см. теорему B.3) и леммы 1.1.2 интеграл

$$(2\pi)^{-1/2} \int\limits_{-\infty+iH}^{+\infty+iH} V_1(\varphi, \lambda, z') e^{i\lambda\tau} d\lambda$$

сходится в смысле главного значения к функции $V(\varphi, \tau, z')$ такой, что $\widehat{V}(\varphi, \lambda, z') = V_1(\varphi, \lambda, z')$, и

$$\|V\|^2_{H^k_a(\mathbb{R}^n)} \leqslant k_3 \int\limits_{-\infty+iH}^{+\infty+iH} \Big(\|V_1\|^2_{W^k(G_1)} + |\lambda|^{2k}\|V_1\|^2_{L_2(G_1)}\Big) d\lambda \leqslant$$
$$\leqslant k_4 \int\limits_{-\infty+iH}^{+\infty+iH} \Big(\|\widehat{v}\|^2_{W^k(G_0)} + |\lambda|^{2k}\|\widehat{v}\|^2_{L_2(G_0)}\Big) d\lambda \leqslant k_5 \|v\|^2_{H^k_a(\Theta)}. \qquad \square$$

Компактность операторов вложения

Теорема 1.3.1. *Предположим, что* $0 \leqslant l < k$ *и* $a - b < k - l$, *где* k *и* l *— целые,* $a, b \in \mathbb{R}$. *Тогда оператор вложения* $H^k_a(Q)$ *в* $H^l_b(Q)$ *компактный.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{u_s\}$, ограниченную в $H^k_a(Q)$. Тогда существует константа $M > 0$ такая, что

$$\sum_{|\alpha| \leqslant k} \int\limits_Q \rho^{2(a-k+|\alpha|)} |D^\alpha u_s|^2 dx \leqslant M.$$

Следовательно,

$$\sum_{|\alpha| \leqslant l} \int\limits_{\Omega_\eta} \rho^{2(b-l+|\alpha|)} |D^\alpha u_s|^2 dx \leqslant \eta^{2(b-a+k-l)} M, \qquad (1.3.12)$$

где $\Omega_\eta = \{x \in Q : \rho(x) < \eta\}$.

Для каждого $\varepsilon > 0$ мы выбираем $\eta > 0$ так, что

$$\eta^{2(b-a+k-l)} M < \varepsilon^2/8. \qquad (1.3.13)$$

Обозначим $\Lambda_p = \{x \in Q : \rho(x) > 2^{-p}\} = Q \setminus \overline{\Omega}_{2^{-p}}$ $(p = 1, 2, \dots)$. Поскольку оператор вложения $W^k(\Lambda_p)$ в $W^l(\Lambda_p)$ компактный, а нормы в $W^l(\Lambda_p)$ и $H^l_b(\Lambda_p)$ эквивалентны, мы можем выбрать подпоследовательность $\{u^1_s\}$ последовательности $\{u_s\}$, сходящуюся в $H^l_b(\Lambda_1)$. Из $\{u^1_s\}$ мы можем выбрать подпоследовательность $\{u^2_s\}$, сходящуюся в $H^l_b(\Lambda_2)$, и т. д.

Рассмотрим диагональную последовательность $u^1_1, u^2_2, \dots, u^s_s, \dots$ Эта последовательность сходится в каждом пространстве $H^l_b(\Lambda_p)$ $(p = 1, 2, \dots)$.

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует $N > 0$ такое, что для всех $s, m \geqslant N$

$$\|u_s^s - u_m^m\|^2_{H_b^l(\Lambda_p)} \leqslant \varepsilon^2/2, \tag{1.3.14}$$

где p выбирается из условия $2^{-p} < \eta$.

Из неравенств (1.3.12)–(1.3.14) вытекает, что

$$\begin{aligned}\|u_s^s - u_m^m\|^2_{H_b^l(Q)} \leqslant \|u_s^s - u_m^m\|^2_{H_b^l(\Omega_\eta)} + \|u_s^s - u_m^m\|^2_{H_b^l(\Lambda_p)} \leqslant \\ \leqslant 2\Big(\|u_s^s\|^2_{H_b^l(\Omega_\eta)} + \|u_m^m\|^2_{H_b^l(\Omega_\eta)}\Big) + \|u_s^s - u_m^m\|^2_{H_b^l(\Lambda_p)} \leqslant \\ \leqslant 2\left(\frac{\varepsilon^2}{8} + \frac{\varepsilon^2}{8}\right) + \frac{\varepsilon^2}{2} = \varepsilon^2. \quad \square\end{aligned}$$

Из теоремы 1.3.1 мы получаем следующий результат.

Следствие 1.3.1. *Пусть $M \subset \overline{Q}$ — $(n-1)$-мерное многообразие класса C^∞. Предположим, что $0 < l < k$ и $a - b < k - l$, где k и l — целые, $a, b \in R$. Тогда оператор вложения $H_a^{k-1/2}(M)$ в $H_b^{l-1/2}(M)$ компактный.*

Вложение пространств Соболева в весовые пространства

Очевидно, $H_0^k(Q) \subset W^k(Q)$. Сформулируем теперь достаточные условия принадлежности функции $u \in W^k(Q)$ пространству $H_a^k(Q)$.

Лемма 1.3.8. *Пусть $a > l + 2m - 1$. Предположим, что число $\delta > 0$ удовлетворяет следующим условиям:*

(a) $\mathcal{K}_1^\delta \cap (\mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3) = \varnothing$, *если* $\mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3 \neq \varnothing$,

(b) $\mathcal{K}_2^\delta \cap (\mathcal{K} \setminus \mathcal{K}_2) = \varnothing$, *если* $\mathcal{K}_2 \neq \varnothing$,

(c) $\mathcal{K}_3^\delta \subset Q$ *и* $\mathcal{K}_3^\delta \cap (\mathcal{K} \setminus \mathcal{K}_3) = \varnothing$, *если* $K_3 \neq \varnothing$,

(d) *число* $\delta > 0$ *произвольно, если* $\mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3 = \varnothing$.

Тогда

$$\|u\|_{H_a^{l+2m}(\mathcal{K}_j^\delta \cap Q)} \leqslant c_1 \|u\|_{W^{l+2m}(\mathcal{K}_j^\delta \cap Q)} \tag{1.3.15}$$

для всех $u \in W^{l+2m}\big(\mathcal{K}_j^\delta \cap Q\big)$, *если* $\mathcal{K}_j \neq \varnothing$ $(j = 1, 2)$, *и*

$$\|u\|_{H_a^{l+2m}(\mathcal{K}_3^\delta)} \leqslant c_2 \|u\|_{W^{l+2m}(\mathcal{K}_3^\delta)} \tag{1.3.16}$$

для всех $u \in W^{l+2m}\big(\mathcal{K}_3^\delta\big)$, *если* $\mathcal{K}_3 \neq \varnothing$.

Доказательство. Докажем неравенство (1.3.15). Не ограничивая общности, предположим, что $n \geqslant 3$. Используя разбиение единицы, гладкое невырожденное преобразование переменных и теорему B.5 о продолжении функций в пространствах Соболева, мы видим, что достаточно доказать оценку

$$I_\alpha(v) = \int\limits_{|z|<d} dz \int\limits_{|y|<R} |y|^{2(a-l-2m+|\alpha|)} |D^\alpha v|^2 dy \leqslant k_1 \|v\|^2_{W^{l+2m}(G)} \qquad (1.3.17)$$

для всех $v \in W^{l+2m}(G)$ и $|\alpha| \leqslant l+2m$, где $G = \{(y,z) : |y| < R,\ |z| < d\}$.

Если $|\alpha| \geqslant l+2m-1$, условие $a > l+2m-1$ влечет за собой оценку $a-l-2m+|\alpha| > l+2m-2 \geqslant 0$. Таким образом, неравенство (1.3.17) выполняется для $|\alpha| \geqslant l+2m-1$.

Рассмотрим теперь случай $|\alpha| \leqslant l+2m-2$. По теореме вложения Соболева (см. теорему B.7) для п. в. $|z| < d$ справедливо следующее неравенство:

$$\sup_{|y| \leqslant R} |D^\alpha v(y,z)| \leqslant k_2 \|v(\cdot,z)\|_{W^{l+2m}(B_R)}, \qquad (1.3.18)$$

где $k_2 > 0$ не зависит от v и z.

Из условия $a > l+2m-1$ следует, что $2(a-l-2m+|\alpha|)+1 > -1$. Поэтому в силу (1.3.18) мы имеем

$$I_\alpha(v) \leqslant k_3 \int\limits_{|z|<\alpha} \|v\|^2_{W^{l+2m}(B_r)} dz \int\limits_{r<R} r^{2(a-l-2m+|\alpha|)+1} dr \leqslant k_4 \|v\|^2_{W^{l+2m}(G)}. \qquad \square$$

Неравенство (1.3.16) можно доказать аналогично.

Для каждого $p = 1, 2, \ldots, N_1$ через M_{p1} и M_{p2} обозначим $(n-1)$-мерные многообразия M_i такие, что $\mathcal{K}_{1p} \subset \overline{M}_{p1} \cap \overline{M}_{p2}$.

Лемма 1.3.9. *Пусть $u \in W^k(Q)$ и $\operatorname{supp} u \cap \mathcal{K}_3 = \varnothing$. Предположим, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\mathcal{K}_1^\varepsilon \cap \mathcal{K}_2^\varepsilon = \varnothing$ и*

1) *$D_\nu^l u|_{M_{pj} \cap \mathcal{K}_1^\varepsilon} = 0$ для некоторого $j = j(p)$ и для любых $p = 1, \ldots, N_1$ и $l = 0, \ldots, k-1$,*

2) *$D_\nu^l u|_{M_i \cap \mathcal{K}_2^\varepsilon} = 0$ для любых $i = 1, \ldots, N_0$ и $l = 0, \ldots, k-1$, если $\mathcal{K}_2 \neq \varnothing$.*

Тогда $u \in H_0^k(Q)$.

Доказательство. Используя разбиение единицы, легко видеть, что для доказательства достаточно получить следующее утверждение. *Пусть* $u \in W^k(\Omega)$, $\operatorname{supp} u \subset B_2$, *и пусть* $D^l_\nu u|_{\Gamma_d} = 0$ $(l = 0, 1, \dots, k-1)$, *где* $\Omega = \theta$, $\Gamma_d = \{x = y \in \mathbb{R}^2 : \varphi = d,\ 0 < r\}$ *при* $n = 2$ *и* $\Omega = \Theta$, $\Gamma_d = \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^n : \varphi = d,\ 0 < r,\ z \in \mathbb{R}^{n-2}\}$ *при* $n \geqslant 3$, $d = d_1$ *или* d_2. *Тогда* $u \in H^k_0(\Omega)$.

Легко показать, что для всех $v \in W^k(\Omega_0)$ таких, что $D^l_\nu v|_{\Gamma_d} = 0$ $(l = 0, 1, \dots, k-1)$, мы имеем

$$\sum_{|\alpha| \leqslant k} \int\limits_{\Omega_0} |D^\alpha v(x)|^2 dx \leqslant k_1 \sum_{|\alpha| = k} \int\limits_{\Omega_0} |D^\alpha v(x)|^2 dx, \tag{1.3.19}$$

где $\Omega_s = \{x = \Omega : 2^{s-1} < r < 2^{s+1}\}$.

Используя замену переменных $x' = 2^s x$ $(s = 0, -1, -2, \dots)$, перейдем от множества Ω_0 к множеству Ω_s. Следовательно, из (1.3.19) выводим

$$\sum_{|\alpha| \leqslant k} 2^{s(2|\alpha| - n)} \int\limits_{\Omega_s} |D^\alpha_{x'} u(x')|^2 dx' \leqslant k_1 \sum_{|\alpha| = k} 2^{s(2k-n)} \int\limits_{\Omega_s} |D^\alpha_{x'} u(x')|^2 dx' \tag{1.3.20}$$

для любого $u \in W^k(\Omega)$ такого, что $\operatorname{supp} u \subset B_2$ и $D^l_\nu u|_{\Gamma_d} = 0$
$(l = 0, 1, \dots, k-1)$.

Умножая обе части (1.3.20) на $2^{(n-2k)s}$ и заменяя переменные x' на x, имеем

$$\sum_{|\alpha| \leqslant k} \int\limits_{\Omega_s} r^{2(|\alpha| - k)} |D^\alpha_x u(x)|^2 dx \leqslant k_2 \sum_{|\alpha| = k} \int\limits_{\Omega_s} |D^\alpha_x u(x)|^2 dx.$$

Суммируя обе части последнего неравенства по $s = 0, -1, -2, \dots$, получим

$$\|u\|^2_{H^k_0(\Omega)} \leqslant k_3 \|u\|^2_{W^k(\Omega)}. \qquad \square$$

Квазиполиномы в весовых пространствах и пространствах Соболева

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с конечным числом угловых точек. Предположим, что в некоторой окрестности каждой точки $g \in \mathcal{K}_1$ область Q совпадает с некоторым углом

$$\theta = \{(r, \varphi) : 0 < r,\ d_1 < \varphi < d_2\},$$

$d_1 = d_1(g)$, $d_2 = d_2(g)$, $0 < d_2 - d_1 < 2\pi$. Пусть в некоторой окрестности каждой точки $g \in \mathcal{K}_2$ область Q совпадает с полуплоскостью $\mathbb{R}^2_+$. Тогда существует $0 < \varepsilon < 1/e$ такое, что $B_\varepsilon(g) \cap B_\varepsilon(h) = \varnothing$ для любых $g, h \in \mathcal{K}$, $g \neq h$, $\mathcal{K}_3^\varepsilon \subset Q$ и $Q \cap B_\varepsilon(g) = \theta \cap B_\varepsilon(g)$ для каждой точки $g \in \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$, где $0 < d_2 - d_1 < 2\pi$, $d_1 = d_1(g)$, $d_2 = d_2(g)$ для $g \in \mathcal{K}_1$ и $d_1 = 0$, $d_2 = \pi$ для $g \in \mathcal{K}_2$. Для каждой точки $g \in \mathcal{K}$ мы введем полярные координаты r, φ в $B_\varepsilon(g)$ с полюсом в точке g. Определим функцию $\xi \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R})$ такую, что $0 \leqslant \xi(t) \leqslant 1$, $\xi(t) = 1$ $(|t| \leqslant \varepsilon/2)$, $\operatorname{supp} \xi \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Лемма 1.3.10. *Пусть $g \in \mathcal{K}$ и функция $\Phi(\varphi) \not\equiv 0$ таковы, что $\Phi \in C^\infty[d_1, d_2]$, если $g \in \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$, и $\Phi \in C^\infty_{2\pi}[0, 2\pi]$, если $g \in \mathcal{K}_3$. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ и $p \geqslant 0$ — целое число. Тогда функция $v = r^\lambda \ln^p r \Phi(\varphi)\xi(r)$ принадлежит $H^k_a(Q)$ в том и только в том случае, если*

$$\operatorname{Re}\lambda + a - k + 1 > 0.$$

Доказательство. 1. Пусть $\operatorname{Re}\lambda + a - k + 1 > 0$. Очевидно,

$$|D^\alpha v(y)| \leqslant k_1 r^{\operatorname{Re}\lambda - |\alpha|} |\ln^p r| \qquad (y \in Q \cap B_\varepsilon(g)).$$

Следовательно, для $|\alpha| \leqslant k$ мы имеем

$$\int\limits_Q r^{2(a-k+|\alpha|)} |D^\alpha v(y)|^2 dy \leqslant k_2 \int\limits_0^\varepsilon r^{2(\operatorname{Re}\lambda + a - k)+1} |\ln^p r|^2 dr < \infty,$$

т. е. $v \in H^k_a(Q)$.

2. Пусть $\operatorname{Re}\lambda + a - k + 1 \leqslant 0$. Тогда

$$\int\limits_Q r^{2(a-k)} |v(y)|^2 dy \geqslant k_3 \int\limits_0^{\varepsilon/2} r^{2(\operatorname{Re}\lambda + a - k)+1} |\ln^p r|^2 dr \geqslant k_3 \int\limits_0^{\varepsilon/2} r^{-1} dr = \infty,$$

т. е. $v \notin H^k_a(Q)$. □

Лемма 1.3.11. *Пусть $g \in \mathcal{K}$, и пусть $\Gamma_0 \subset \overline{Q}$ — интервал вида*

$$\Gamma_0 = \{y \in \mathbb{R}^2 : \varphi = \varphi_0,\ 0 < r < \varepsilon\},$$

где r, φ — полярные координаты точки y с полюсом в точке g. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ и $p \geqslant 0$ — целое. Тогда функция $\psi(r) = r^\lambda \ln^p r\xi(r)$ принадлежит $H_a^{k-1/2}(\Gamma_0)$ в том и только в том случае, если

$$\operatorname{Re}\lambda + a - k + 1 > 0.$$

Доказательство. 1. Пусть $\operatorname{Re}\lambda + a - k + 1 > 0$. По лемме 1.3.10 функция $v(y) = r^\lambda \ln^p r\xi(r)$ принадлежит $H_a^k(Q)$. Очевидно, $v|_{\varphi=\varphi_0} = \psi$. Поэтому $\psi \in H_a^{k-1/2}(\Gamma_0)$.

2. Пусть $\operatorname{Re}\lambda + a - k + 1 \leqslant 0$. Тогда

$$\int\limits_0^\varepsilon r^{2(a-k)+1}|\psi(r)|^2 dr \geqslant \int\limits_0^{\varepsilon/2} r^{2(\operatorname{Re}\lambda+a-k)+1}|\ln^p r|dr = \infty.$$

Поэтому в силу леммы 1.1.3 $\psi \notin H_a^{k-1/2}(\Gamma_0)$. □

Лемма 1.3.12. *Пусть выполнены условия леммы* 1.3.10. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

(a) *Если* $\operatorname{Re}\lambda > k-1$, *то* $v \in W^k(Q)$.

(b) *Если* $0 \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant k-1$, *то* $v \in W^k(Q)$ *тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Re}\lambda = m$ *— целое число, а* $r^\lambda \ln^p r\Phi(\varphi)$ *— полином степени* m.

(c) *Если* $\operatorname{Re}\lambda < 0$, *то* $v \notin W^k(Q)$.

Доказательство. Утверждение (c) очевидно. Утверждение (a) следует из леммы 1.3.10 для $a = 0$ и вложения $H_0^k(Q) \subset W^k(Q)$.

Остается доказать утверждение (b). Очевидно, если $\operatorname{Re}\lambda = m$ и $r^\lambda \ln^p r\Phi(\varphi)$ — полином степени m, то $v \in W^k(Q)$. Покажем, что если $v \in W^k(Q)$, то $\operatorname{Re}\lambda = m$ и $r^\lambda \ln^p r\Phi(\varphi)$ — полином степени m. Рассмотрим производную $D^\alpha v(y)$ $(|\alpha| = k)$. Очевидно,

$$D^\alpha v(y) = \sum_{q=0}^{p} r^{\lambda-k} \ln^q r\Phi_{\alpha q}(\varphi) \qquad \big(y \in Q \cap B_{\varepsilon/2}(g)\big),$$

где $\Phi_{\alpha q} \in C^\infty[d_1, d_2]$, если $g \in \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$, и $\Phi_{\alpha q} \in C_{2\pi}^\infty[0, 2\pi]$, если $g \in \mathcal{K}_3$.

Поскольку $\operatorname{Re}\lambda - k + 1 \leqslant 0$, мы получим

$$\int\limits_{Q\cap B_{\varepsilon/2}(g)} |D^\alpha v(y)|^2 dy = \int\limits_{d_1}^{d_2} d\varphi \int\limits_0^{\varepsilon/2} r^{2(\operatorname{Re}\lambda - k)+1} \left| \sum_{q=0}^{p} \ln^q r \Phi_{\alpha q}(\varphi) \right|^2 dr \geqslant$$
$$\geqslant \int\limits_{d_1}^{d_2} d\varphi \int\limits_0^{\varepsilon/2} r^{-1} \left| \sum_{q=0}^{p} \ln^q r \Phi_{\alpha q}(\varphi) \right|^2 dr,$$

где $0 < d_2 - d_1 < 2\pi$, если $g \in \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$, и $d_1 = 0$, $d_2 = 2\pi$, если $g \in \mathcal{K}_3$.

Эти интегралы конечны для всех $|\alpha| = k$, только если $\Phi_{\alpha q}(\varphi) \equiv 0$ для всех $|\alpha| = k$ и $q = 0, \dots, p$. Таким образом, если $v \in W^k(Q)$, то все производные $D^\alpha v(y)$ ($|\alpha| = k$, $y \in Q\cap B_{\varepsilon/2}(g)$) равны нулю. Это означает, что $r^\lambda \ln^p r\Phi(\varphi)$ — полином степени не выше $k-1$. Из вида этой функции следует, что она является однородным полиномом порядка $m = \operatorname{Re}\lambda$. $\square$

Библиографические примечания к главе 1

Основы теории весовых пространств Кондратьева в областях с угловыми или коническими точками были заложены в работе [18] в связи с созданием теории эллиптических задач в областях с особенностями. Обобщение этой теории на случай областей с ребрами было получено в работах [22, 25]. Изложение теории весовых пространств в настоящем учебном пособии опирается на книгу [32]. Там же имеется более подробная библиография.

Задачи к главе 1

1. При каком $\lambda \in \mathbb{R}$ функция $u(x) = r^\lambda \ln r \sin 2\varphi$ принадлежит пространству $H_0^2(Q)$, а при каком $\lambda \in \mathbb{R}$ — пространству $W^2(Q)$, где $Q = B_1 \subset \mathbb{R}^2$, $\mathcal{K} = \{0\}$?

2. При каком $\lambda \in \mathbb{R}$ функция $u(x) = r^{\lambda-1} \ln^2 r \cos\varphi$ принадлежит пространству $H_0^1(\theta)$, а при каком $\lambda \in \mathbb{R}$ пространству $H_1^3(\theta)$? Здесь $\theta = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < \varphi < \pi/4,\ 0 < r\}$.

3. При каких $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ функция $u(x) = r^{\lambda+1}\sin\mu\varphi$ принадлежит пространству $W^1(Q)$, но не принадлежит пространству $H_0^1(Q)$? Здесь $Q = B_1 \subset \mathbb{R}^2, \mathcal{K} = \{0\}$.

4. При каких $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ функция $u(x) = r^{\lambda-1}\xi(r)\sin\mu\varphi$ принадлежит пространству $\mathring{W}^1(\theta)$? Здесь $\theta = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < \varphi < \pi/3,\ 0 < r\}$.

5. Доказать, что заключение теоремы B.10 справедливо для ограниченной области с конечным числом угловых точек или ребер.

6. Доказать, что в $H_a^k(\theta)$ можно ввести эквивалентную норму по формуле
$$\|u\|_{H_a^k(\theta)} = \Bigg(\sum_{|\alpha|=0,k}\ \int\limits_{\theta} r^{2(a-k+|\alpha|)}\big|\mathcal{D}^\alpha u(y)\big|^2 dy\Bigg)^{1/2},$$
где $\theta = \{y \in \mathbb{R}^2 : d_1 < \varphi < d_2,\ 0 < r\}$.

7. Доказать, что в $H_a^k(Q) = H_a^k(Q, \mathcal{K})$ можно ввести эквивалентное скалярное произведение по формуле
$$\|u\|_{H_a^k(Q)} = \Bigg(\sum_{|\alpha|=0,k}\ \int\limits_{Q} \rho^{2(a-k+|\alpha|)}\big|\mathcal{D}^\alpha u(x)\big|^2 dx\Bigg)^{1/2},$$
где $Q \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с конечным числом угловых точек или ребер.

8. Доказать, что $\mathring{W}^1(Q) \subset H_0^1(Q)$, где $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с конечным числом угловых точек или ребер.

9. Пусть $\Omega, Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченные области с конечным числом угловых точек или ребер. Пусть, кроме того, $\Omega \subset Q$ и $\overline{\Omega} \cap \mathcal{K} = \varnothing$. Доказать, что для функций $u \in W^k(Q)$ таких, что $\operatorname{supp} u \subset \overline{\Omega}$ для любого $a \in \mathbb{R}$ нормы в $W^k(Q)$ и в $H_a^k(Q)$ эквивалентны.

10. Выяснить, будет ли компактным вложение $H_{a_2}^{k_2}(Q) \subset H_{a_1}^{k_1}(Q)$ при $k_2 > k_1,\quad k_2 - k_1 = a_2 - a_1$? Здесь $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с конечным числом угловых точек или ребер.

11. Будет ли компактным вложение $H_{a_2}^{k_2-1/2}(M) \subset H_{a_1}^{k_1-1/2}(M)$ при $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, $k_2 > k_1$, $k_2 - k_1 = a_2 - a_1$? Здесь $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с конечным числом угловых точек или ребер, $M \subset \overline{Q}$ — $(n-1)$-мерное многообразие класса C^∞.

12. Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с конечным числом угловых точек или ребер, и пусть $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$, $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2 \neq \varnothing$, и $\mathcal{K}' = \mathcal{K}_1$. Построить функцию $u \in H_a^k(Q, \mathcal{K}')$, не принадлежащую $H_a^k(Q, \mathcal{K})$.

13. Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с конечным числом угловых точек или ребер, и пусть $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3$, $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3 \neq \varnothing$ и $\mathcal{K}' = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$. Построить функцию $u \in H_a^k(Q, \mathcal{K}')$ такую, что $u \in H_a^k(Q, \mathcal{K})$.

Темы курсовых работ к главе 1

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с конечным числом угловых точек или ребер. Введем пространство $H_{a,p}^k(Q) = H_{a,p}^k(Q, \mathcal{K})$, как пополнение множества $C_0^\infty(\overline{Q} \backslash \mathcal{K})$ по формуле
$\|u\|_{H_{a,p}^k(Q)} = \left\{ \sum\limits_{|\alpha| \leqslant k} \int\limits_Q \rho^{p(a-k+|\alpha|)} \big|\mathcal{D}_\alpha u(x)\big|^p dx \right\}^{1/p}$, где $1 < p < \infty$.

1. Обобщить лемму 1.3.5, доказанную для пространств $H_a^k(Q)$, на случай пространств $H_{a,p}^k(Q)$.

2. Обобщить лемму 1.3.6, доказанную для пространств $H_a^1(Q)$, на случай пространств $H_{a,p}^1(Q)$.

3. Обобщить лемму 1.3.7 о продолжении функций, доказанную для пространств $H_a^k(Q)$, на случай пространств $H_{a,p}^k(Q)$.

4. Обобщить теорему 1.3.1 о компактности вложения $H_a^k(Q)$ в $H_b^l(Q)$ $(0 \leqslant l < k,\ a - b < k - l)$ на случай вложения $H_{a,p}^k(Q)$ в $H_{b,p}^l(Q)$.

5. Получить достаточные условия на подпространство $\widetilde{W}^1(Q)$ пространства $W^1(Q)$, обеспечивающие справедливость вложения $\widetilde{W}^1(Q)$ в $H_0^1(Q)$.

Глава 2

Модельные задачи в углах

2.1. Нелокальные эллиптические задачи в плоских углах

Постановка задачи

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\mathbf{A}v = f_0(y) \qquad (y \in \theta) \tag{2.1.1}$$

с нелокальными краевыми условиями

$$\mathbf{B}_\rho v = \mathbf{B}_\rho^0 v\big|_{\gamma_\rho} + \mathbf{B}_\rho^1 v\big|_{\gamma_\rho} = f_\rho(y) \qquad (y \in \gamma_\rho,\ \rho = 1, 2) \tag{2.1.2}$$

относительно вектор-функции $v = (v_1, \dots, v_N)$. В этом параграфе и далее для упрощения используются одинаковые обозначения для векторов-столбцов и векторов-строк.

Здесь $\theta = \{y \in \mathbb{R}^2 : d_1 < \varphi < d_2,\ 0 < r\}$ — плоский угол; φ, r — полярные координаты точки y, $\gamma_\rho = \{y \in \mathbb{R}^2 : \varphi = d_\rho,\ 0 < r\}$ $(\rho = 1, 2)$, $f_0 = (f_{01}, ..., f_{0N})$ и $f_\rho = (f_{\rho 1}, \dots, f_{\rho, mN})$, $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}_\rho^0$ — матрицы порядка $N \times N$ и $mN \times N$ с элементами $A_{jk} v_k = A_{jk}(\mathcal{D}_y) v_k(y) \qquad (j, k = 1, \dots, N)$ и $B_{\rho\mu k}^0 v_k = B_\zeta^0(\mathcal{D}_y) v_k(y)$ $(\zeta = (\rho, \mu, k) : \rho = 1, 2,\ \mu = 1, \dots, mN;$ $k = 1, \dots, N)$, $A_{jk}(\mathcal{D}_y)$ и $B_\zeta^0(\mathcal{D}_y)$ — однородные дифференциальные операторы с постоянными комплексными коэффициентами порядков $2m$ и $m_{\rho\mu}$, соответственно, $0 < d_2 - d_1 < 2\pi$.

Наряду с операторами $A_{jk}(\mathcal{D}_y)$ и $B_\zeta^0(\mathcal{D}_y)$ рассмотрим полиномы $A_{jk}(\xi)$ и $B_\zeta^0(\xi)$, где $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$. Обозначим через $\mathbf{A}(\xi)$ и $\mathbf{B}_\rho^0(\xi)$ матрицы порядков $N \times N$ и $mN \times N$ с элементами $A_{jk}(\xi)$ $(j, k = 1, \dots, N)$ и $B_{\rho\mu k}^0(\xi)$ $(\mu = 1, \dots, mN,\ k = 1, \dots, N)$.

Предположим, что операторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}_\rho$ удовлетворяют следующим условиям:

Условие 2.1.1. Оператор $\mathbf{A}$ — правильно эллиптический.

Условие 2.1.2. Оператор $\mathbf{B}_\rho$ удовлетворяет условию Лопатинского по отношению к оператору $\mathbf{A}$.

Условие 2.1.3. $\mathbf{B}^1_\rho = \mathbf{B}^1_\rho(r, r\mathcal{D}_r)$ $(\rho = 1, 2)$ — матрицы порядка $mN \times N$, состоящие из элементов $B^1_\zeta = B^1_\zeta(r, \mathcal{D}_r)$ $(\zeta = (\rho, \mu, k))$, которые в полярных координатах φ, r имеют вид

$$B^1_\zeta(\mathcal{D}_y)v_k = B^1_\zeta(r, r\mathcal{D}_r)v_k = \sum_\eta \left(r^{-m_{\rho\mu}}(r\mathcal{D}_r)^q B^1_{\zeta\eta}v_k\right)(\varphi, \chi_{\zeta\eta}r), \qquad (2.1.3)$$

где $\eta = (q, s)$, в (2.1.3) мы суммируем по η таким, что $q = 0, \ldots, m_{\rho\mu}$ и $s = 1, \ldots, S_\zeta$, $B^1_{\zeta\eta}$ — линейные операторы такие, что для всех $u_k \in W^g(d_1, d_2)$ $(k = 1, \ldots, N,\ g = m_{\rho\mu} - q, l + 2m - q)$

$$\|B^1_{\zeta\eta}u_k\|_{W^{g-m_{\rho\mu}+q}(d_1,d_2)} \leqslant c_1\|u_k\|_{W^g(d_1+\sigma, d_2-\sigma)}, \qquad (2.1.4)$$

$B^1_{\zeta\eta}$ и $\chi_{\zeta\eta} > 0$ не зависят от r, $c_1 > 0$, и $0 < \sigma < (d_2 - d_1)/2$ не зависят от u_k, $l \geqslant \max\limits_{\rho,\mu}\{-2m + m_{\rho\mu} + 1\}$ — неотрицательное целое число, $\mathcal{D}_r = -i\dfrac{\partial}{\partial r}$,

$$\left(r^{-m_{\rho\mu}}(r\mathcal{D}_r)^q B^1_{\zeta\eta}v_k\right)(\varphi, \chi_{\zeta\eta}r) = \left((r')^{-m_{\rho\mu}}(r'\mathcal{D}_{r'})^q B^1_{\zeta\mu}v_k\right)(\varphi, r')\Big|_{r'=\chi_{\zeta\eta}r}.$$

Пусть $B : H^{k_1}_a(\theta) \to H^{k_2}_{a_2}(\theta)$ — линейный ограниченный оператор, $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$. Обозначим $\mathcal{G}(B) = \bigcup\limits_{V\in T}\{V : Bu = 0$ для всех $u \in H^{k_1}_a(\theta)$, $\operatorname{supp} u \subset V\}$, где T — множество всех открытых множеств в $\mathbb{R}^n$.

Определение 2.1.1. Замкнутое множество $\operatorname{supp} B = \overline{\theta \backslash \mathcal{G}(B)}$ называется *носителем оператора* B.

Замечание 2.1.1. Из условия 2.1.3 следует, что операторы B^1_ζ : $H^{l+2m}_a(\theta) \to H^{l+2m-m_{\rho\mu}}_a(\theta)$ — ограниченные и $\operatorname{supp} B^1_\zeta \subset \overline{\theta_\sigma} = \{(\varphi, r) : d_1 + \sigma \leqslant \varphi \leqslant d_2 - \sigma,\ 0 < r\}$, см. рис. 2.1.1.

Для $n \geqslant 3$, аналогичное утверждение будет доказано в § 2.3, см. замечание 2.3.1.

Определение 2.1.2. Будем говорить, что $y = 0$ *точка сопряжения* для нелокальной эллиптической задачи (2.1.1), (2.1.2).

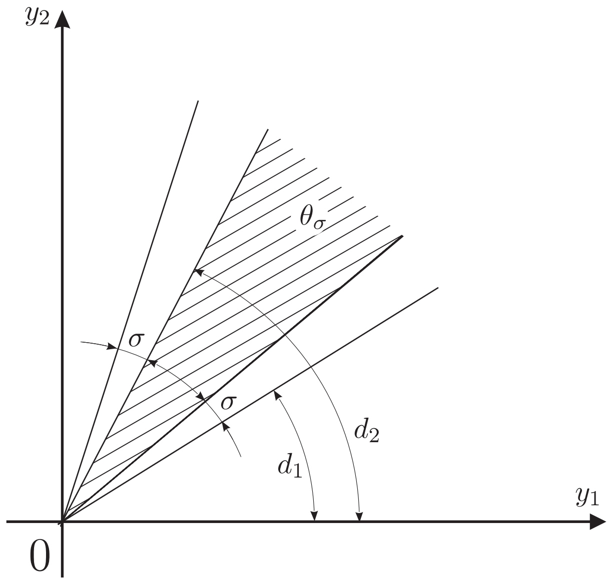

Рис. 2.1.1

Определение 2.1.3. Условие 2.1.3 называется *условием нетангенциального подхода носителя нелокальных членов к точке сопряжения* для задачи (2.1.1), (2.1.2).

Пример 2.1.1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (2.1.1) с нелокальными краевыми условиями

$$\sum_{k,s} \left(B_{\zeta s}(\mathcal{D}_y)v_k\right)(C_{\zeta s}y)\Big|_{\gamma_\rho} = f_{\rho\mu}(y)$$

$$(y \in \gamma_\rho,\ \rho = 1, 2,\ \mu = 1, \dots, mN). \quad (2.1.5)$$

Здесь $B_{\zeta s}(\mathcal{D}_y)$ — однородные дифференциальные операторы с постоянными комплексными коэффициентами порядков $m_{\rho\mu}$, обозначение $\left(B_{\zeta s}(\mathcal{D}_y)v_k\right)(C_{\zeta s}y)\Big|_{\gamma_\rho}$ означает, что выражение $B_{\zeta s}(\mathcal{D}_{y'})v_k(y')$ берется при значении аргумента $y' = C_{\zeta s}y$, а затем мы рассматриваем след этой функции для $y \in \gamma_\rho$; $C_{\zeta s}$ — оператор вращения на угол $\varphi_{\zeta s}$ и растяжения в $\chi_{\zeta s}$ раз в плоскости $\{y\}$, $d_1 < d_\rho + \varphi_{\zeta s} < d_2$, $0 < \chi_{\zeta s}$, если $s > 0$, и $\varphi_{\zeta 0} = 0$, $\chi_{\zeta 0} = 1$, $\zeta = (\rho, \mu, k)$, мы суммируем по $k = 1, \dots, N$ и $s = 0, \dots, S_\zeta$.

Предположим, что операторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}_\rho^0 = \{B_{\zeta 0}\}_{\mu,k}$ удовлетворяют условиям 2.1.1, 2.1.2

Докажем, что условия (2.1.5) можно представить в виде (2.1.2), при этом операторы $\mathbf{B}_\rho^1$ удовлетворяют условию 2.1.3.

Переходя к полярным координатам φ, r, мы можем переписать нелокальную часть условий (2.1.5) в виде

$$\sum_{\eta,k}\left(r^{-m_{\rho\mu}}(r\mathcal{D}_r)^q\sum_p a_{\zeta\eta p}(\varphi)\mathcal{D}_\varphi^p v_k\right)(\varphi+\varphi_{\zeta s},\chi_{\zeta s}r)\Big|_{\varphi=d_\rho},$$

где $a_{\zeta\eta p}\in C^\infty_{2\pi}[0,2\pi]$, мы суммируем по $\eta=(q,s)$, k, и p таким, что $q=0,\dots,m_{\rho\mu}$, $s=1,\dots,S_\zeta$, $k=1,\dots,N$ и $p=0,\dots,m_{\rho\mu}-q$.

Пусть $\delta=\min\limits_{\rho,\mu,k,s}\min\{d_\rho+\varphi_{\zeta s}-d_1, d_2-d_\rho-\varphi_{\zeta s}\}$ ($\rho=1,2$, $\mu=1,\dots,mN$, $k=1,\dots,N$, $s=1,\dots,S_\zeta$). Определим матрицы $\mathbf{B}^1_\rho$ ($\rho=1,2$) порядка $mN\times N$ с элементами $B^1_{\rho\mu k}$ по формуле

$$\sum_\eta\left(r^{-m_{\rho\mu}}(r\mathcal{D}_r)^q B^1_{\zeta\eta}v_k\right)(\varphi,\chi_{\zeta s}r)\ (\mu=1,\dots,mN,\ k=1,\dots,N),\quad (2.1.6)$$

где

$$\left.\begin{aligned}
&(B^1_{\zeta\eta}u_k)(\varphi)=\sum_p a_{\zeta\eta p}(\varphi)\mathcal{D}^p_\varphi v_k(\varphi+\varphi_{\zeta s})\psi(\varphi-d_\rho)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad(\varphi\in(d_\rho-\delta/2,d_\rho+\delta/2)\cap(d_1,d_2)),\\
&(B^1_{\zeta\eta}u_k)(\varphi)=0\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad(\varphi\in(d_1,d_2)\setminus(d_\rho-\delta/2,d_\rho+\delta/2)),\\
&\big(\rho=1,2,\ q=0,\dots,m_{\rho\mu},\ \mu=1,\dots,mN,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad k=1,\dots,N,\ s=1,\dots,S_\zeta\big).
\end{aligned}\right\}\quad (2.1.7)$$

Здесь $\psi\in\dot C^\infty(\mathbb{R})$, $\psi(\varphi)=1$ ($|\varphi|\leqslant\delta/4$) и $\psi(\varphi)=0$ ($|\varphi|\geqslant\delta/2$). Положим $\sigma=\delta/2$. Очевидно, матрицы $\mathbf{B}^1_\rho$ с элементами, заданными по формулам (4.1.6), (4.1.7), удовлетворяют условию 2.1.3. Носитель нелокальных членов задачи (2.1.1), (2.1.5) принадлежит множеству

$$\bigcup_{\zeta,s}\{y\in\mathbb{R}^2:\varphi=d_\rho+\varphi_{\zeta s},0\leqslant r\}$$

($\rho=1,2$, $\mu=1,\dots,mN$, $k=1,\dots,N$, $s=1,\dots,S_\zeta$), см. рис. 2.1.2.

Введем пространства вектор-функций

$$H^{k,N}_a(\theta)=\prod_j H^k_a(\theta)\qquad(j=1,\dots,N),$$

$$\mathcal{H}^{l,N}_a(\theta,\gamma)=H^{l,N}_a(\theta)\times\prod_{\rho,\mu}H^{l+2m-m_{\rho\mu}-1/2}_a(\gamma_\rho)\quad(\rho=1,2,\ \mu=1,\dots,mN),$$

где $k,l\geqslant 0$ — целые числа, см. условие 2.1.3.

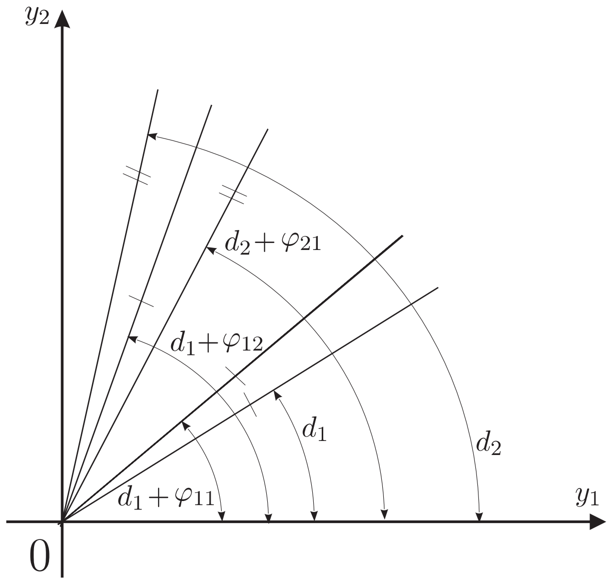

Рис. 2.1.2

Предположим, что $f = \{f_{0j}, f_{\rho\mu}\} \in \mathcal{H}_a^{l,N}(\theta, \gamma)$.

В силу замечания 2.1.1 мы можем ввести линейный ограниченный оператор $\mathbf{L} = \{\mathbf{A}, \mathbf{B}_\rho\} : H_a^{l+2m,N}(\theta) \to \mathcal{H}_a^{l,N}(\theta, \gamma)$, соответствующий задаче (2.1.1), (2.1.2).

Определение 2.1.4. Вектор-функция v называется *сильным решением* задачи (2.1.1), (2.1.2) в пространстве $H_a^{l+2m,N}(\theta)$, если

$$\mathbf{L}v = f.$$

Разрешимость нелокальных эллиптических задач в плоских углах

Запишем операторы $A_{jk}(\mathcal{D}_y)$ и $B_\zeta^0(\mathcal{D}_y)$ в полярных координатах

$$A_{jk}(\mathcal{D}_y) = r^{-2m}\widehat{A}_{jk}(\varphi, \mathcal{D}_\varphi, r\mathcal{D}_r) = r^{-2m} \sum_{\alpha_1+\alpha_2 \leqslant 2m} a_{jk\alpha_1\alpha_2}(\varphi)\mathcal{D}_\varphi^{\alpha_1}(r\mathcal{D}_r)^{\alpha_2},$$

$$B_\zeta^0(\mathcal{D}_y) = r^{-m_{\rho\mu}}\widehat{B}_\zeta(\varphi, \mathcal{D}_\varphi, r\mathcal{D}_r) = r^{-m_{\rho\mu}} \sum_{\alpha_1+\alpha_2 \leqslant m_{\rho\mu}} b_{\zeta\alpha_1\alpha_2}(\varphi)\mathcal{D}_\varphi^{\alpha_1}(r\mathcal{D}_r)^{\alpha_2},$$

где $\mathcal{D}_\varphi = -i\dfrac{\partial}{\partial\varphi}$, $\mathcal{D}_r = -i\dfrac{\partial}{\partial r}$, $a_{jk\alpha_1\alpha_2}, b_{\zeta\alpha_1\alpha_2} \in C_{2\pi}^\infty[0, 2\pi]$, $C_{2\pi}^\infty[0, 2\pi]$ — множество функций, заданных на $[0, 2\pi]$, таких, что их 2π-периодические продолжения — бесконечно дифференцируемые на $\mathbb{R}$.

Введем новую переменную $\tau = \ln r$. Функцию $u_k(y_1, y_2)$ в новой системе координат обозначим через $v_k(\varphi, \tau)$. Используя преобразование Фурье по τ, из (2.1.1)–(2.1.3) мы получаем

$$\sum_k \widehat{A}_{jk}(\varphi, \mathcal{D}_\varphi, \lambda)\widehat{v}_k(\varphi, \lambda) = \widehat{F}_{0j}(\varphi, \lambda)$$

$$(d_1 < \varphi < d_2,\ j = 1, \dots, N), \quad (2.1.8)$$

$$\sum_k \widehat{B}_\zeta(\varphi, \mathcal{D}_\varphi, \lambda)\widehat{v}_k(\varphi, \lambda)\big|_{\varphi=d_\rho} +$$

$$+ \sum_{k,\eta} e^{(i\lambda - m_{\rho\mu})\ln\chi_{\zeta\eta}}\lambda^q(B^1_{\zeta\eta}\widehat{v}_k)(\varphi, \lambda)\big|_{\varphi=d_\rho} = \widehat{F}_{\rho\mu}(\lambda) \quad (2.1.9)$$

$(\rho = 1, 2;\ \mu = 1, \dots, mN)$.

Здесь $F_{0j}(\varphi, \tau) = e^{2m\tau} f_{0j}(\varphi, \tau)$, $F_{\rho\mu}(\tau) = e^{m_{\rho\mu}\tau} f_{\rho\mu}(\tau)$, $\widehat{v}_k(\varphi, \lambda) = (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} v_k(\varphi, \tau)e^{-i\lambda\tau}d\tau$ — преобразование Фурье по τ функции $v_k(\varphi, \tau)$, $\zeta = (\rho, \mu, k)$ и $\eta = (q, s)$. Эта задача является системой обыкновенных дифференциальных уравнений с нелокальными краевыми условиями, связывающими значения функций $\widehat{v}_k$ и их производных в точке $\varphi = d_\rho$ со значениями функций $\widehat{v}_k$ и их производных на некотором компакте $[d_1 + \sigma, d_2 - \sigma]$, ср. § 1.4 в [12].

Определим матричные операторы $\widehat{\mathbf{A}}(\varphi, \mathcal{D}_\varphi, \lambda)$ и $\widehat{\mathbf{B}}_\rho(\varphi, \mathcal{D}_\varphi, \lambda)$ порядков $N \times N$ и $mN \times N$ с элементами $\widehat{A}_{jk}(\varphi, \mathcal{D}_\varphi, \lambda)$ $(j, k = 1, \dots, N)$ и $\widehat{B}_\zeta(\varphi, \mathcal{D}_\varphi, \lambda)$ $(\mu = 1, \dots, mN,\ k = 1, \dots, N)$ соответственно. Введем также матрицы $\widehat{\mathbf{A}}^0(\varphi, \mathcal{D}_\varphi, \lambda)$ и $\widehat{B}^0_\rho(\varphi, \mathcal{D}_\varphi, \lambda)$ порядков $N \times N$ и $mN \times N$, состоящие из дифференциальных операторов $\widehat{A}^0_{jk}(\varphi, \mathcal{D}_\varphi, \lambda)$ $(j, k = 1, \dots, N)$ и $\widehat{B}^0_\zeta(\varphi, \mathcal{D}_\varphi, \lambda)$ $(\mu = 1, \dots, mN,\ k = 1, \dots, N)$. Здесь $\widehat{A}^0_{jk}(\varphi, \mathcal{D}_\varphi, \lambda)$ и $\widehat{B}^0_\zeta(\varphi, \mathcal{D}_\varphi, \lambda)$ — главные однородные части операторов $\widehat{A}_{jk}(\varphi, \mathcal{D}_\varphi, \lambda)$ и $\widehat{B}_\zeta(\varphi, \mathcal{D}_\varphi, \lambda)$ по отношению к оператору $\mathcal{D}_\varphi$ и параметру λ, ср. (1.4.3), (1.4.4) в [12].

Рассмотрим оператор-функцию

$$\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda) \in \mathcal{B}(W^{l+2m,N}(d_1, d_2), \mathcal{W}^{l,N}[d_1, d_2]),$$

заданную по формуле

$$\widehat{\mathbf{L}}(\lambda)u = \Big\{ \sum_k \widehat{A}_{jk}(\varphi, \mathcal{D}_\varphi, \lambda) u_k(\varphi),$$

$$\sum_k \widehat{B}_\zeta(\varphi, \mathcal{D}_\varphi, \lambda) u_k(\varphi)\Big|_{\varphi=d_\rho} +$$

$$+ \sum_{k,\eta} e^{(i\lambda - m_{\rho\mu}) \ln \chi_{\zeta\eta}} \lambda^q (B^1_{\zeta\eta} u_k)(\varphi)\Big|_{\varphi=d_\rho} \Big\}, \quad (2.1.10)$$

где $u = (u_1, \ldots, u_N) \in W^{l+2m,N}(d_1, d_2)$.

Из условий 2.1.1, 2.1.2 следует, что матричные операторы $\widehat{\mathbf{A}}^0(\varphi, \mathcal{D}_\varphi, \lambda)$ и $\widehat{\mathbf{B}}^0_\rho(\varphi, \mathcal{D}_\varphi, \lambda)$ удовлетворяют условиям 1.4.1, 1.4.2 в [12]. Поэтому из теорем 1.4.2, 1.4.3 в [12] следует, что: (a) для всех $\lambda \in \mathbb{C}$, кроме счетного множества собственных значений, оператор $\widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$ имеет ограниченный обратный $\widehat{\mathbf{R}} = \widehat{\mathbf{L}}^{-1}(\lambda) : \mathcal{W}^{l,N}[d_1, d_2] \to W^{l+2m,N}(d_1, d_2)$; (b) оператор-функция $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{R}}(\lambda) \in \mathcal{B}(W^{l+2m,N}(d_1, d_2),\ \mathcal{W}^{l,N}[d_1, d_2])$ — конечно-мероморфная фредгольмова оператор-функция в $\mathbb{C}$.

Теорема 2.1.1. *Пусть выполняются условия* 2.1.1–2.1.3. *Предположим, что прямая* $\operatorname{Im}\lambda = h = a + 1 - l - 2m$ *не содержит собственных значений оператор-функции* $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$. *Тогда задача* (2.1.1), (2.1.2) *имеет единственное сильное решение* $v \in H^{l+2m,N}_a(\theta)$ *для любого* $f \in \mathcal{H}^{l,N}_a(\theta, \gamma)$. *Более того,*

$$\|v\|_{H^{l+2m,N}_a(\theta)} \leqslant c_1 \|f\|_{\mathcal{H}^{l,N}_a(\theta,\gamma)}. \quad (2.1.11)$$

Доказательство. Если прямая $\operatorname{Im}\lambda = h$ не содержит собственных значений полюсов оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$, то в силу теорем 1.4.1, 1.4.2 в [12] для этой линии существует единственное сильное решение $\widehat{v} = \widehat{\mathbf{R}}(\lambda)\widehat{F} \in W^{l+2m,N}(d_1, d_2)$ задачи (2.1.8), (2.1.9) для любого $\widehat{F} \in \mathcal{W}^{l,N}[d_1, d_2]$. Более того,

$$|||\widehat{\mathbf{R}}(\lambda)\widehat{F}|||_{W^{l+2m,N}(d_1,d_2)} \leqslant k_1 |||\widetilde{F}|||_{\mathcal{W}^{l,N}[d_1,d_2]}, \quad (2.1.12)$$

где $k_1 > 0$ не зависит от λ и от $\widehat{F}$, $\widehat{F} = \{\widehat{F}_{0j}, \widehat{F}_{\rho\mu}\}$, нормы $|||\cdot|||_{W^{l+2m,N}(d_1,d_2)}$ и $|||\cdot|||_{\mathcal{W}^{l,N}[d_1,d_2]}$ определены по формулам (C.25)–(C.27).

Поскольку $F_{0j}(\varphi, \tau) = e^{2m\tau} f_{0j}(\varphi, \tau)$, из неравенства (1.1.6) следует, что для любого $f_{0j} \in H^l_a(\theta)$ функция $\widehat{F}_{0j} = \widehat{F}_{0j}(\cdot, \lambda) \in W^l(d_1, d_2)$ для почти всех $\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \lambda = h\}$ и

$$\int\limits_{-\infty+ih}^{+\infty+ih} |||\widehat{F}_{0j}|||^2_{W^l(d_1,d_2)} d\lambda \leqslant k_2 \|f_{0j}\|^2_{H^l_a(\theta)} \qquad (j = 1, \ldots, N). \tag{2.1.13}$$

По определению следовых пространств, см. § 1.1, для любого $f_{\rho\mu} \in H_a^{l+2m-m_{\rho\mu}-1/2}(\gamma_\rho)$ существует $w_{\rho\mu} \in H_a^{l+2m-m_{\rho\mu}}(\theta)$ такое, что $w_{\rho\mu}\big|_{\gamma_\rho} = f_{\rho\mu}$ и

$$\|w_{\rho\mu}\|_{H_a^{l+2m-m_{\rho\mu}}(\theta)} \leqslant 2\|f_{\rho\mu}\|_{H_a^{l+2m-m_{\rho\mu}-1/2}(\gamma_\rho)}. \tag{2.1.14}$$

Из неравенств (1.1.4) и (2.1.14) следует, что

$$\sum_{|\alpha| \leqslant l+2m-m_{\rho\mu}} \int\limits_G e^{2(a-l-2m+m_{\rho\mu}+1)\tau} \left|\mathcal{D}^\alpha_{y'} w_{\rho\mu}(y')\right|^2 dy' \leqslant$$

$$\leqslant k_3 \|f_{\rho\mu}\|^2_{H_a^{l+2m-m_{\rho\mu}-1/2}(\gamma_\rho)}, \tag{2.1.15}$$

где $G = \{y' = (\varphi, \tau) : d_1 < \varphi < d_2,\ -\infty < \tau < +\infty\}$.

Обозначим $e^{m_{\rho\mu}\tau} w_{\rho\mu}$ через $\Psi_{\rho\mu}$. Очевидно, $\Psi_{\rho\mu}\big|_{\gamma_\rho} = F_{\rho\mu}$. В силу (2.1.15), (1.1.4) и (1.1.6) мы получим

$$\int\limits_{-\infty+ih}^{+\infty+ih} |||\widehat{\Psi}_{\rho\mu}|||^2_{W^{l+2m-m_{\rho\mu}}(d_1,d_2)} d\lambda \leqslant k_4 \|f_{\rho\mu}\|_{H_a^{l+2m-m_{\rho\mu}-1/2}(\gamma_\rho)}. \tag{2.1.16}$$

Используя неравенства (B.23), (B.25), (B.26) и (2.1.16), мы имеем

$$\int\limits_{-\infty+ih}^{+\infty+ih} \left(1 + |\lambda|^{2(l+2m-m_{\rho\mu}-1/2)}\right) \left|\widehat{F}_{\rho\mu}(\lambda)\right|^2 d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant k_5 \int\limits_{-\infty+ih}^{+\infty+ih} \big(\|\widehat{\Psi}_{\rho\mu}\|^2_{W^{l+2m-m_{\rho\mu}}(d_1,d_2)} +$$

$$+ |\lambda|^{2(l+2m-m_{\rho\mu}-1)} \big(\|\widehat{\Psi}_{\rho\mu}\|^2_{W^1(d_1,d_2)} + |\lambda|\, \|\widehat{\Psi}_{\rho\mu}\|^2_{L_2(d_1,d_2)}\big)\big) d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant k_6 \int\limits_{-\infty+ih}^{+\infty+ih} |||\widehat{\Psi}_{\rho\mu}|||^2_{W^{l+2m-m_{\rho\mu}}(d_1,d_2)} d\lambda \leqslant k_7 \|f_{\rho\mu}\|^2_{H_a^{l+2m-m_{\rho\mu}-1/2}(\gamma_\rho)}. \tag{2.1.17}$$

Из (2.1.13) и (2.1.17) следует, что

$$\int\limits_{-\infty+ih}^{+\infty+ih} |||\widehat{F}|||^2_{\mathcal{W}^{l,N}[d_1,d_2]} d\lambda \leqslant k_8 \|f\|^2_{\mathcal{H}_a^{l,N}(\theta,\gamma)}. \qquad (2.1.18)$$

В силу (2.1.12) и (2.1.18) мы получим

$$\int\limits_{-\infty+ih}^{+\infty+ih} |||\widehat{\mathbf{R}}(\lambda)\widehat{F}|||^2_{W^{l+2m,N}(d_1,d_2)} d\lambda \leqslant k_1^2 k_8 \|f\|^2_{\mathcal{H}_a^{l,N}(\theta,\gamma)}.$$

Из свойств преобразования Фурье вытекает, что интеграл

$$(2\pi)^{-1/2} \int\limits_{-\infty+ih}^{+\infty+ih} \widehat{\mathbf{R}}(\lambda)\widehat{F} e^{i\lambda\tau} d\lambda$$

сходится в смысле главного значения к вектор-функции $v(\varphi,\tau)$. Переходя к переменным y_1, y_2 и используя (1.1.6), мы убеждаемся, что вектор-функция $v(y)$ — сильное решение задачи (2.1.1), (2.1.2) и удовлетворяет неравенству

$$\|v\|_{H_a^{l+2m,N}(\theta)} \leqslant k_9 \int\limits_{-\infty+ih}^{+\infty+ih} |||\widehat{\mathbf{R}}(\lambda)\widehat{F}|||^2_{W^{l+2m,N}(d_1,d_2)} d\lambda.$$

Таким образом, мы доказали существование сильного решения задачи (2.1.1), (2.1.2) и справедливость неравенства (2.1.11). Единственность очевидна. $\square$

Разрешимость локальных эллиптических задач в плоских углах

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (2.1.1) с локальными краевыми условиями

$$\mathbf{B}^0_\rho v\big|_{\gamma_\rho} = f_\rho(y) \qquad (y \in \gamma_\rho,\ \rho = 1, 2), \qquad (2.1.19)$$

где $\mathbf{B}^0_\rho = \mathbf{B}^0_\rho(\mathcal{D}_y)$ — матрица порядка $mN \times N$ с элементами $B^0_{\rho\mu k}(\mathcal{D}_y)$ ($\mu = 1, \dots, mN$, $k = 1, \dots, N$).

Предположим, что матричные операторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}_\rho^0$ удовлетворяют условиям 2.1.1, 2.1.2. Определим линейный ограниченный оператор $\mathbf{L}_0 : H_a^{l+2m,N}(\theta) \to \mathcal{H}_a^{l,N}(\theta,\gamma)$, соответствующий «локальной» эллиптической задаче (2.1.1), (2.1.19) по формуле

$$\mathbf{L}_0 v = \left\{ \mathbf{A}v, \mathbf{B}_\rho^0 v\big|_{\gamma_\rho} \right\}. \tag{2.1.20}$$

Рассмотрим оператор-функцию

$$\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}_0(\lambda) \in \mathcal{B}\left(W^{l+2m,N}(d_1,d_2), \mathcal{W}^{l,N}[d_1,d_2]\right),$$

заданную по формуле

$$\widehat{\mathbf{L}}_0(\lambda)u = \\ = \left\{ \sum_k \widehat{A}_{jk}(\varphi,\mathcal{D}_\varphi,\lambda)u_k(\varphi), \sum_k \widehat{B}_{\rho\mu k}(\varphi,\mathcal{D}_\varphi,\lambda)u_k(\varphi)\Big|_{\varphi=d_\rho} \right\}, \tag{2.1.21}$$

где $u = (u_1,\ldots,u_N) \in W^{l+2m,N}(d_1,d_2)$.

Из следствия 1.4.2 в [12] вытекает, что: (a) для всех $\lambda \in \mathbb{C}$, за исключением счетного множества чисел, оператор $\widehat{\mathbf{L}}_0(\lambda)$ имеет ограниченный обратный $\widehat{\mathbf{R}}_0(\lambda) = \widehat{\mathbf{L}}_0^{-1}(\lambda) : \mathcal{W}^{l,N}[d_1,d_2] \to W^{l+2m,N}(d_1,d_2)$, (b) оператор-функция $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{R}}_0(\lambda)$ — конечно-мероморфная фредгольмова оператор-функция в $\mathbb{C}$.

Таким образом, из теоремы 2.1.1 мы получаем следующее утверждение.

Теорема 2.1.2. *Пусть выполняются условия* 2.1.1, 2.1.2. *Предположим, что прямая* $\operatorname{Im}\lambda = h = a+1-l-2m$ *не содержит собственных значений оператор-функции* $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}_0(\lambda)$.

Тогда задача (2.1.1), (2.1.19) *имеет единственное сильное решение* $v \in H_a^{l+2m,N}(\theta)$ *для любого* $f \in \mathcal{H}_a^{l,N}(\theta,\gamma)$. *Более того,*

$$\|v\|_{H_a^{l+2m,N}(\theta)} \leqslant c_2 \|f\|_{\mathcal{H}_a^{l,N}(\theta,\gamma)}. \tag{2.1.22}$$

Влияние нелокальных членов на разрешимость эллиптических задач

Обозначим через $\mathcal{A}_{\mathbf{L}_0}$ ($\mathcal{A}_{\mathbf{L}}$) множество чисел $a \in \mathbb{R}$ таких, что оператор $\mathbf{L}_0$ ($\mathbf{L}$) имеет ограниченный обратный $\mathbf{L}_0^{-1}$ ($\mathbf{L}$). Продемонстрируем пример, когда $\mathcal{A}_{\mathbf{L}_0} \neq \mathcal{A}_{\mathbf{L}}$. Более того, для некоторых значений коэффициентов в нелокальных членах можно получить следующую ситуацию: $\mathcal{A}_{\mathbf{L}_0} \subset \mathcal{A}_{\mathbf{L}}$ и множество $\mathcal{A}_{\mathbf{L}} \setminus \mathcal{A}_{\mathbf{L}_0}$ — счетно.

Пример 2.1.2. Рассмотрим нелокальную задачу

$$-\Delta v(y) = f_0(y) \qquad (y \in \theta), \tag{2.1.23}$$

$$\left.\begin{aligned} v(\varphi, r)\big|_{\gamma_1} - \alpha_1 v(\varphi + \beta/2, r)\big|_{\gamma_1} = f_1(y) \quad (y \in \gamma_1), \\ v(\varphi, r)\big|_{\gamma_2} - \alpha_2 v(\varphi - \beta/2, r)\big|_{\gamma_2} = f_2(y) \quad (y \in \gamma_2), \end{aligned}\right\} \tag{2.1.24}$$

где $\theta = \{y : 0 < \varphi < \beta,\ 0 < r\}$, $\gamma_1 = \{y : \varphi = 0,\ 0 < r\}$, $\gamma_2 = \{y : \varphi = \beta,\ 0 < r\}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $0 < \beta < 2\pi$. Нелокальное условие (2.1.24) означает, что значения неизвестной функции v на сторонах γ_1 и γ_2 связаны со значениями v на полупрямой $\{y : \varphi = \beta/2,\ 0 < r\}$. Заметим, что мы рассматриваем здесь вращение на угол $\varphi = \pm\beta/2$ без преобразования аргумента r, ср. пример 2.1.1.

Определим оператор $\mathbf{L} : H_a^2(\theta) \to \mathcal{H}_a^0(\theta, \gamma) = H_a^0(\theta) \times H_a^{3/2}(\gamma_1) \times H_a^{3/2}(\gamma_2)$ по формуле

$$\mathbf{L}v = \left(-\Delta v,\ v(\varphi, r)\big|_{\gamma_1} - \alpha_1 v(\varphi + \beta/2, r)\big|_{\gamma_1},\ v(\varphi, r)\big|_{\gamma_2} - \alpha_2 v(\varphi - \beta/2, r)\big|_{\gamma_2}\right).$$

Переходя к новым переменным φ, τ и делая преобразование Фурье по τ, мы имеем

$$-\widehat{v}_{\varphi\varphi}(\varphi, \lambda) + \lambda^2 \widehat{v}(\varphi, \lambda) = \widehat{F}_0(\varphi, \lambda) \qquad (0 < \varphi < \beta), \tag{2.1.25}$$

$$\widehat{v}\big|_{\varphi=0} - \alpha_1 \widehat{v}\big|_{\varphi=\beta/2} = \widehat{f}_1(\lambda), \qquad \widehat{v}\big|_{\varphi=\beta} - \alpha_2 \widehat{v}\big|_{\varphi=\beta/2} = \widehat{f}_2(\lambda), \tag{2.1.26}$$

где $\widehat{F}_0(\varphi, \lambda)$ — преобразование Фурье функции $F_0(\varphi, \tau) = e^{2\tau} f_0(\varphi, \tau)$.

Оператор $\widehat{\mathbf{L}}(\lambda) : W^2(0, \beta) \to \mathcal{W}[0, \beta] = L_2(0, \beta) \times \mathbb{C}^2$ задается по формуле

$$\widehat{\mathbf{L}}(\lambda) u = \left\{-u_{\varphi\varphi} + \lambda^2 u,\ u\big|_{\varphi=0} - \alpha_1 u\big|_{\varphi=\beta/2},\ u\big|_{\varphi=\beta} - \alpha_2 u\big|_{\varphi=\beta/2}\right\}.$$

Будем изучать задачу на собственные значения для оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$.

Общее решение уравнения

$$-\widehat{v}_{\varphi\varphi} + \lambda^2 \widehat{v} = 0 \tag{2.1.27}$$

имеет вид

$$\widehat{v}(\varphi) = c_1 e^{\lambda\varphi} + c_2 e^{-\lambda\varphi}. \tag{2.1.28}$$

Подставляя (2.1.28) в (2.1.26) для $\widehat{f}_1(\lambda) = \widehat{f}_2(\lambda) = 0$, имеем

$$\left.\begin{aligned} &c_1(1-\alpha_1\exp(\lambda\beta/2)) + c_2(1-\alpha_1\exp(-\lambda\beta/2)) = 0,\\ &c_1(\exp(\lambda\beta) - \alpha_2\exp(\lambda\beta/2)) +\\ &\qquad\qquad + c_2(\exp(-\lambda\beta) - \alpha_2\exp(-\lambda\beta/2)) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.1.29}$$

Поэтому собственные значения оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$ равны корням уравнения

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) = \exp(-\lambda\beta) - \exp(\lambda\beta) + (\alpha_1+\alpha_2)(\exp(\lambda\beta/2) - \exp(-\lambda\beta/2)) =\\ = (\exp(-\lambda\beta/2) - \exp(\lambda\beta/2))(\exp(-\lambda\beta/2) + \exp(\lambda\beta/2) -\\ - (\alpha_1+\alpha_2)) = 0. \end{aligned} \tag{2.1.30}$$

Пусть $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$. Если, в частности, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, то задача (2.1.23), (2.1.24) становится локальной. В этом случае уравнение (2.1.29) принимает вид

$$\exp(2\lambda\beta) = 1.$$

Следовательно,

$$\mathring{\lambda}_k = ik\delta \qquad (k = \pm1, \pm2, \ldots), \tag{2.1.31}$$

где $\delta = \pi/\beta$.

Для произвольных α_1 и α_2 уравнение (2.1.30) выполняется, если

$$\exp(\lambda\beta) - 1 = 0 \tag{2.1.32}$$

или

$$\exp(\lambda\beta) - \alpha\exp(\lambda\beta/2) + 1 = 0, \tag{2.1.33}$$

где $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$.

1. Корни уравнения (2.1.32) имеют вид

$$\lambda_k = i2k\delta \qquad (k = \pm1, \pm2, \ldots).$$

Если $k = 0$, то общее решение уравнения (2.1.27) принимает вид

$$\widehat{v}(\varphi) = c_1\varphi + c_2.$$

Подставляя это решение в (2.1.26) для $\widehat{f}_1(\lambda) = \widehat{f}_2(\lambda) = 0$, получим

$$\left.\begin{aligned} -c_1\alpha_1\beta/2 + c_2(1-\alpha_1) = 0, \\ c_1(\beta - \alpha_2\beta/2) + c_2(1-\alpha_2) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.1.34}$$

Определитель системы (2.1.34) $\Delta(\lambda)$ равен $\alpha\beta/2 - \beta$. Следовательно, $\lambda = 0$ является собственным значением оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$ тогда и только тогда, когда $\alpha = 2$.

Таким образом, мы имеем

$$\begin{aligned} \lambda_k = i2k\delta \quad (k &= \pm 1, \pm 2, \ldots, \ \text{ если } \alpha \neq 2; \\ k &= 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \ \text{ если } \alpha = 2). \end{aligned} \tag{2.1.35}$$

2. Теперь найдем корни уравнения (2.1.33). Положим $z = \exp(\lambda\beta/2)$. Тогда уравнение (2.1.33) примет вид

$$z^2 - \alpha z + 1 = 0.$$

Корни этого уравнения вычисляются по формуле

$$z_{1,2} = \alpha/2 \pm (\sqrt{\alpha^2 - 4})/2.$$

Обозначим $\sigma = \dfrac{2}{\beta} \ln \left| \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\sqrt{\alpha^2 - 4}}{2} \right|$.

2.a. Пусть $\alpha > 2$. Тогда $\exp(\lambda\beta/2) = \alpha/2 \pm (\sqrt{\alpha^2 - 4})/2 > 0$, т.е.

$$\lambda_s^{\pm} = \pm\sigma + i4s\delta \qquad (s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{2.1.36}$$

2.b. Пусть $\alpha < -2$. Тогда $\exp(\lambda\beta/2) = \alpha/2 \pm (\sqrt{\alpha^2 - 4})/2 < 0$, т.е.

$$\lambda_s^{\pm} = \pm\sigma + i2(2s+1)\delta \qquad (s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{2.1.37}$$

2.c. Пусть $\alpha = 2$. Тогда $\exp(\lambda\beta/2) = 1$, т.е.

$$\lambda_s = i4s\delta \qquad (s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{2.1.38}$$

2.d. Пусть $\alpha = -2$. Тогда $\exp(\lambda\beta/2) = -1$, т.е.

$$\lambda_s = i2(2s+1)\delta \qquad (s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{2.1.39}$$

2.e. Пусть $0 < \alpha < 2$. Тогда $\exp(\lambda\beta/2) = \alpha/2 \pm i(\sqrt{4-\alpha^2})/2$ — комплексное число с положительной вещественной частью, т.е.

$$\lambda_s^{\pm} = i(\pm\varkappa + 4s\delta) \qquad (s = 0, \pm1, \pm2, \ldots), \tag{2.1.40}$$

где $\varkappa = \dfrac{2}{\beta}\arctan\sqrt{4\alpha^{-2}-1}$.

2.f. Пусть $-2 < \alpha < 0$. Тогда $\exp(\lambda\beta/2) = \alpha/2 \pm i(\sqrt{4-\alpha^2})/2$ — комплексное число с отрицательной вещественной частью, т.е.

$$\lambda_s^{\pm} = i(\pm\varkappa + 2(2s+1)\delta) \qquad (s = 0, \pm1, \pm2, \ldots). \tag{2.1.41}$$

Окончательно мы имеем:

(a) Если $\alpha > 2$, то существует три ветви собственных значений, заданных по формулам (2.1.35), (2.1.36), см. рис. 2.1.3.

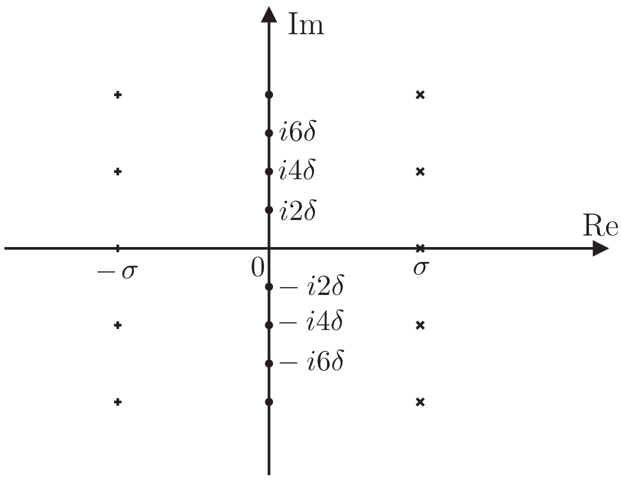

Рис. 2.1.3. $(\alpha > 2)$

(b) Если $\alpha < -2$, то существует три ветви собственных значений, заданных по формулам (2.1.35), (2.1.37), см. рис. 2.1.4.

(c,d) Если $\alpha = \pm2$, то существует одна ветвь собственных значений, заданная по формуле (2.1.35), см. рис. 2.1.5, 2.1.6.

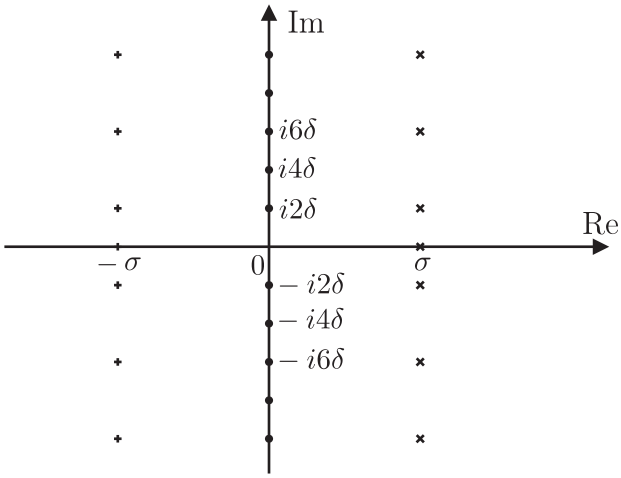

Рис. 2.1.4. ($\alpha < -2$)

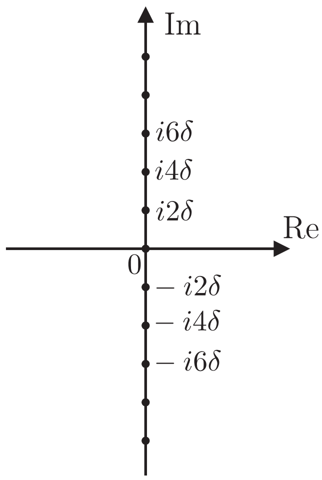

Рис. 2.1.5 ($\alpha = 2$)

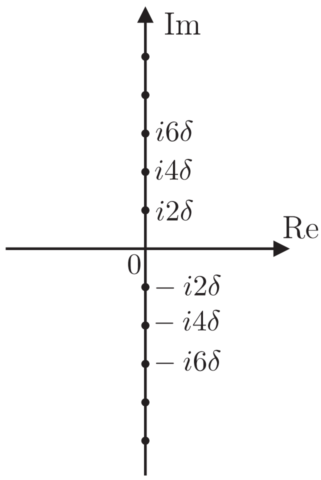

Рис. 2.1.6 ($\alpha = -2$)

(e) Если $0 < \alpha < 2$, то существует три ветви собственных значений, заданных по формулам (2.1.35), (2.1.40), см. рис. 2.1.7.

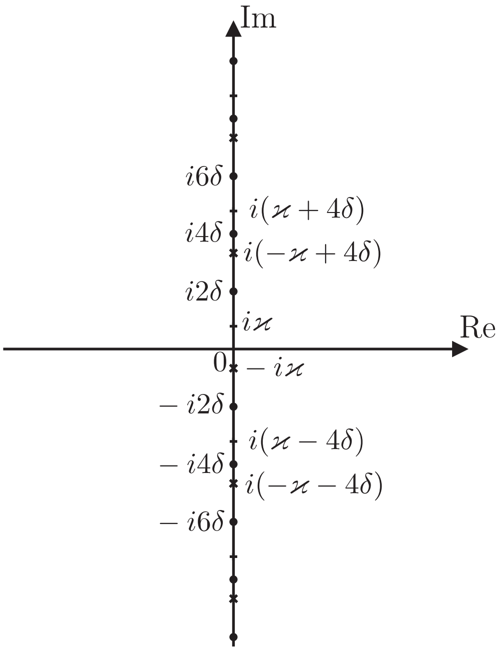

Рис. 2.1.7 ($0 < \alpha < 2$)

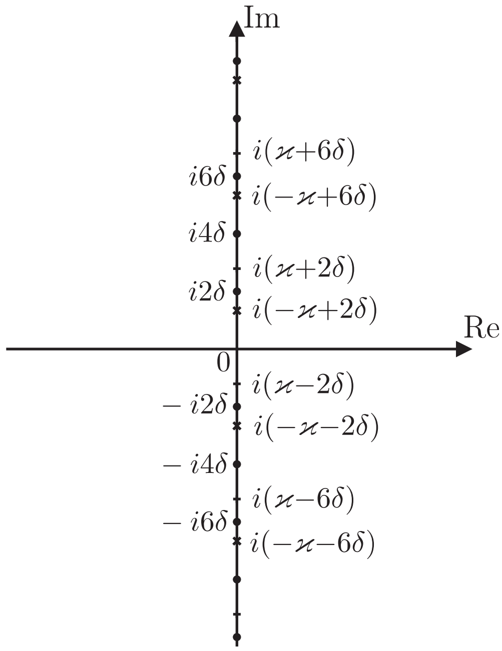

Рис. 2.1.8 ($-2 < \alpha < 0$)

(f) Если $-2 < \alpha < 0$, то существует три ветви собственных значений, заданных по формулам (2.1.35), (2.1.41), см. рис. 2.1.8. Если $\alpha = 0$, то существует одна ветвь собственных значений, заданная по формуле (2.1.31), см. рис. 2.1.9. Если $\alpha = 0$, то $\mathcal{A}_{\mathbf{L}} = \mathbb{R} \setminus \{k\delta + 1 : k = \pm1, \pm2, \ldots\}$.

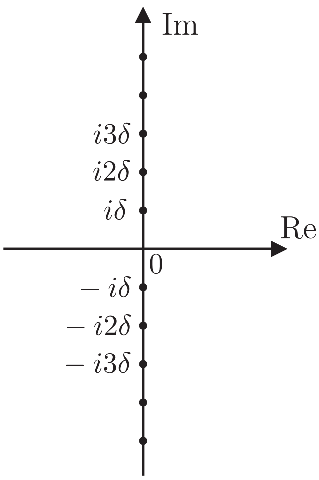

Рис. 2.1.9. ($\alpha = 0$)

В частности, $\mathcal{A}_{\mathbf{L}_0} = \mathbb{R} \setminus \{k\delta + 1 : k = \pm1, \pm2, \ldots\}$. Если $\alpha \geqslant 2$, то $\mathcal{A}_{\mathbf{L}} = \mathbb{R} \setminus \{2k\delta + 1 : k = 0, \pm1, \pm2, \ldots\}$. Если $\alpha \leqslant -2$, то $\mathcal{A}_{\mathbf{L}} = \mathbb{R} \setminus \{2k\delta + 1 : k = \pm1, \pm2, \ldots\}$. Если $0 < \alpha < 2$, то $\mathcal{A}_{\mathbf{L}} = \mathbb{R} \setminus (\{2k\delta + 1 : k = \pm1, \pm2, \ldots\} \cup \{\pm\varkappa + 4s\delta + 1 : s = 0, \pm1, \pm2, \ldots\})$. Если $-2 < \alpha < 0$, то $\mathcal{A}_{\mathbf{L}} = \mathbb{R} \setminus (\{2k\delta + 1 : k = \pm 1, \pm 2, \dots\} \cup \{\pm\varkappa + 2(2s+1)\delta + 1 : s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\})$.

2.2. Асимптотическое поведение решений в плоских углах

Основной результат

Пусть $l_2 \geqslant l_1 \geqslant 0$ — целые числа, и пусть $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ таковы, что $h_2 = a_2 + 1 - l_2 - 2m < a_1 + 1 - l_1 - 2m = h_1$. По теореме 1.4.2 из [12], полоса $h_2 < \operatorname{Im}\lambda < h_1$ содержит конечное число собственных значений λ_j $(j = 1, \dots, J)$ оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$, имеющих геометрические кратности q_j. Обозначим через $\{\psi_j^{0,q}(\varphi), \dots, \psi_j^{p_{jq}-1,q}(\varphi)\}$ $(q = 1, \dots, q_j)$ каноническую систему жордановых цепочек для $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$, соответствующую собственному значению λ_j, где $p_{j1} \geqslant p_{j2} \geqslant \dots \geqslant p_{jq_j}$ — ранги собственных векторов $\psi_j^{0,1}(\varphi), \dots, \psi_j^{0,q_j}(\varphi)$ соответственно, см. приложение A.

Основной результат этого параграфа, касающийся асимптотического поведения решений нелокальной эллиптической задачи (2.1.1), (2.1.2), можно сформулировать следующим образом.

Теорема 2.2.1. *Предположим, что выполняются условия* 2.1.1, 2.1.2, *и что условие* 2.1.3 *выполняется при* $l = l_1, l_2$. *Пусть* $v \in H_{a_1}^{l_1+2m,N}(\theta)$ — *сильное решение задачи* (2.1.1), (2.1.2), *и пусть* $f \in \mathcal{H}_{a_2}^{l_2,N}(\theta, \gamma)$. *Предположим, что прямые* $\operatorname{Im}\lambda = h_2$ *и* $\operatorname{Im}\lambda = h_1$ *не содержат собственных значений оператор-функции* $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$.

Тогда

$$v(y) = \sum_{j=1}^{J} \sum_{q=1}^{q_j} \sum_{k=0}^{p_{jq}-1} \alpha_j^{kq} v_j^{kq}(y) + w(y) \qquad (y \in \theta), \tag{2.2.1}$$

где

$$v_j^{kq}(y) = r^{i\lambda_j} \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!}(i \ln r)^n \psi_j^{k-n,q}, \tag{2.2.2}$$

$\alpha_j^{kq} = \alpha_j^{kq}(f)$ — *линейные ограниченные функционалы на* $\mathcal{H}_{a_1}^{l_1,N}(\theta,\gamma) \cap \mathcal{H}_{a_2}^{l_2,N}(\theta,\gamma)$, *а вектор-функция* $w \in H_{a_2}^{l_2+2m,N}(\theta)$ *такова, что* $\mathbf{L}w = f$ *и*

$$\|w\|_{H_{a_2}^{l_2+2m,N}(\theta)} \leqslant c_1 \|f\|_{\mathcal{H}_{a_2}^{l_2,N}(\theta,\gamma)}. \tag{2.2.3}$$

Замечание 2.2.1. В силу теоремы 1.4.3 в [12], $\psi_j^{s,q} \in C^{\infty,N}[d_1,d_2]$ $(j = 1,\dots,J,\ q = 1,\dots,q_j,\ s = 0,\dots,p_{jq}-1)$.

Из теоремы 2.2.1 мы получаем следующее утверждение.

Следствие 2.2.1. *Пусть выполняются условия теоремы* 2.2.1, *и пусть полоса* $h_2 < \operatorname{Im}\lambda < h_1$ *не содержит собственных значений оператор-функции* $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$.

Тогда $v \in H_{a_2}^{l_2+2m,N}(\theta)$.

Вспомогательные результаты

Для доказательства теоремы 2.2.1, мы используем две леммы, касающиеся решений однородной задачи (2.1.1), (2.1.2).

Пусть $\psi^n \in C_{2\pi}^{\infty,N}[d_1,d_2]$ $(n = 0,\dots,M)$.

Лемма 2.2.1. *Пусть выполняются условия* 2.1.1–2.1.3. *Тогда вектор-функция*

$$v(y) = r^{i\lambda_0} \sum_{n=0}^{M} \frac{1}{n!} (i \ln r)^n \psi^{M-n}(\varphi) \tag{2.2.4}$$

является решением однородной задачи (2.1.1), (2.1.2) *тогда и только тогда, когда* λ_0 — *собственное значение оператор-функции* $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$, *а система функций* $\psi^0,\dots,\psi^M$ — *жорданова подпоследовательность, соответствующая собственному значению* λ_0 *оператор-функции* $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$.

Доказательство. Переходя к полярным координатам и делая элементарные вычисления, получаем

$$\sum_k A_{jk} v_k = r^{-2m} \sum_k \widehat{A}_{jk}(\varphi, \mathcal{D}_\varphi, r\mathcal{D}_r) v_k(\varphi, r) =$$

$$= r^{-2m+i\lambda_0} \sum_k \widehat{A}_{jk}(\varphi, \mathcal{D}_\varphi, \lambda_0 + r\mathcal{D}_r) \sum_{n=0}^{M} \frac{1}{n!}(i\ln r)^n \psi_k^{M-n}(\varphi) =$$

$$= r^{-2m+i\lambda_0} \sum_k \sum_{\nu=0}^{M} \frac{1}{\nu!} \partial_\lambda^\nu \widehat{A}_{jk}(\varphi, \mathcal{D}_\varphi, \lambda_0) \sum_{n=\nu}^{M} \frac{1}{(n-\nu)!}(i\ln r)^{n-\nu} \psi_k^{M-n}(\varphi) =$$

$$= r^{-2m+i\lambda_0} \sum_k \sum_{\sigma=0}^{M} \frac{1}{\sigma!}(i\ln r)^\sigma \sum_{\nu=0}^{M-\sigma} \frac{1}{\nu!} \partial_\lambda^\nu \widehat{A}_{jk}(\varphi, \mathcal{D}_\varphi, \lambda_0) \psi_k^{M-\sigma-\nu}(\varphi), \quad (2.2.5)$$

где $\psi^{M-n} = \left(\psi_1^{M-n}, \ldots, \psi_N^{M-n}\right)$, $\partial_\lambda^\nu = \left(\dfrac{\partial}{\partial\lambda}\right)^\nu$.

Аналогично,

$$\sum_k B_\zeta^0 v_k =$$

$$= r^{-m_{\rho\mu}+i\lambda_0} \sum_k \sum_{\sigma=0}^{M} \frac{(i\ln r)^\sigma}{\sigma!} \sum_{\nu=0}^{M-\sigma} \frac{1}{\nu!} \partial_\lambda^\nu \widehat{B}_\zeta(\varphi, \mathcal{D}_\varphi, \lambda_0) \psi_k^{M-\sigma-\nu}(\varphi). \quad (2.2.6)$$

Из (2.1.3) следует, что

$$\sum_k B_\zeta^1 v_k = \sum_{k,\eta} (r\chi_{\zeta\eta})^{-m_{\rho\mu}+i\lambda_0}$$

$$\sum_{\nu=0}^{M} \frac{q!\lambda_0^{q-\nu}}{\nu!(q-\nu)!} \sum_{n=\nu}^{M} \frac{(i\ln r + i\ln\chi_{\zeta\eta})^{n-\nu}}{(n-\nu)!} B_{\zeta\eta}^1 \psi_k^{M-n}(\varphi). \quad (2.2.7)$$

Здесь мы полагаем $\lambda_0^{q-\nu} = 0$, если $\nu > q$.

Используя биномиальное разложение

$$(ilnr + i\ln\chi_{\zeta\eta})^{n-\nu} = \sum_{\sigma=0}^{n-\nu} \frac{(n-\nu)!}{\sigma!(n-\nu-\sigma)!}(i\ln r)^\sigma (i\ln\chi_{\zeta\eta})^{n-\nu-\sigma}$$

и формулу

$$\chi_{\zeta\eta}^{-m_{\rho\mu}+i\lambda_0} \sum_{\nu=0}^{n-\sigma} \frac{q!\lambda_0^{q-\nu}(i\ln\chi_{\zeta\eta})^{n-\nu-\sigma}}{\nu!(n-\nu-\sigma)!(q-\nu)!} = \frac{1}{(n-\sigma)!} \partial_\lambda^{n-\sigma} \left(\chi_{\zeta\eta}^{-m_{\rho\mu}+i\lambda}\lambda^q\right)\Big|_{\lambda=\lambda_0},$$

из (2.2.7) мы выводим

$$\sum_k B^1_\zeta v_k =$$

$$= r^{-m_{\rho\mu}+i\lambda_0} \sum_{k,\eta} \sum_{n=0}^{M} \sum_{\sigma=0}^{n} \frac{(i\ln r)^\sigma}{\sigma!(n-\sigma)!} \partial_\lambda^{n-\sigma} \left(\chi_{\zeta\eta}^{-m_{\rho\mu}+i\lambda} \lambda^q\right)\Big|_{\lambda=\lambda_0} B^1_{\zeta\eta} \psi_k^{M-n}(\varphi) =$$

$$= r^{-m_{\rho\mu}+i\lambda_0} \sum_{k,\eta} \sum_{n=0}^{M} \frac{(i\ln r)^\sigma}{\sigma!} \sum_{\nu=0}^{M-\sigma} \frac{1}{\nu!} \partial_\lambda^{\nu} \left(\chi_{\zeta\eta}^{-m_{\rho\mu}+i\lambda} \lambda^q\right)\Big|_{\lambda=\lambda_0} B^1_{\zeta\eta} \psi_k^{M-\sigma-\nu}(\varphi). \tag{2.2.8}$$

Из (2.2.5), (2.2.6) и (2.2.8) следует, что v — решение однородной задачи (2.1.1), (2.1.2) тогда и только тогда, когда

$$\sum_{\nu=0}^{M-\sigma} \frac{1}{\nu!} \partial_\lambda^\nu \widehat{\mathbf{L}}(\lambda) \psi^{M-\sigma-\nu} = 0 \qquad (\sigma = 0, \ldots, M). \tag{2.2.9}$$

В силу (A.5) равенства (2.2.9) эквивалентны тому, что система функций $\psi^0, \ldots, \psi^M$ является жордановой подпоследовательностью, соответствующей собственному значению оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$. $\square$

Определение 2.2.1. Решение однородной задачи (2.1.1), (2.1.2) вида (2.2.4) называется *степенным решением* порядка M, соответствующим собственному значению λ_0 оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$.

Лемма 2.2.2. *Предположим, что выполняются условия* 2.1.1–2.1.3. *Пусть* $\{\psi^{0,q}, \ldots, \psi^{p_q-1,q}\}$ $(q = 1, \ldots, q_0)$ *— каноническая система жордановых цепочек оператор-функции* $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$, *соответствующая собственному значению* λ_0.

Тогда функции

$$v^{k,q}(y) = r^{i\lambda_0} \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!} (i\ln r)^n \psi^{k-n,q}(\varphi)$$

$$(k = 0, \ldots, p_q - 1,\ q = 1, \ldots, q_0) \tag{2.2.10}$$

образуют базис в пространстве степенных решений однородной задачи (2.1.1), (2.1.2), *соответствующих собственному значению* λ_0 *оператор-функции* $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$.

Доказательство. Вначале заметим, что поскольку собственные функции $\psi^{0,1}, \ldots, \psi^{0,q_0}$ линейно независимы, функции $v^{k,q}$ ($k = 0, \ldots, p_q - 1$, $q = 1, \ldots, q_0$) также линейно независимы. Докажем теперь, что степенное решение однородной задачи (2.1.1), (2.1.2), соответствующее собственному значению λ_0 оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$, равно линейной комбинации функций $v^{k,q}$. Используем метод индукции.

По лемме 2.2.1 каждое степенное решение нулевого порядка равно $r^{i\lambda_0}\psi^0(\varphi)$, где $\psi^0(\varphi)$ — собственная функция оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$, соответствующая собственному значению λ_0. Поэтому данное решение является линейной комбинацией функций $v^{0,q}$ ($q = 1, \ldots, q_0$).

Предположим, что каждое степенное решение порядка $\leqslant M - 1$ ($M \leqslant p_1 - 1$, $p_1 = \max\limits_q\{p_q\}$), соответствующее собственному значению λ_0, является линейной комбинацией функций $v^{k,q}$ ($k = 0, \ldots, M - 1$, $q = 1, \ldots, q_0$). Покажем, что аналогичное утверждение выполняется для степенных решений порядка M. Из леммы 2.2.1 следует, что любое степенное решение порядка M имеет вид (2.2.4), где $\psi^0, \ldots, \psi^M$ — некоторая жорданова подпоследовательность, соответствующая λ_0. Поэтому $\psi^0 = c_1\psi^{0,1} + \cdots + c_{q_0}\psi^{0,q_0}$, где c_j — константы. Отсюда выведем следующее равенство:

$$\psi^h = \sum_{q=1}^{q_0} c_q\psi^{h,q} + \sum_{j=1}^{h} u^{h-j,j} \qquad (h = 1, \ldots, M), \tag{2.2.11}$$

где $u^{0,j}, \ldots, u^{M-1,j}$ некоторые жордановы подпоследовательности оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$, соответствующие λ_0. Заметим, что $M \leqslant p_{\tilde{q}} - 1$, где $\tilde{q} = \max q$ ($q = 1, \ldots, q_0$: $c_q \neq 0$).

Действительно, пусть (2.2.11) выполняется для всех $0 \leqslant h \leqslant M - 1$. Тогда мы имеем

$$\widehat{\mathbf{L}}(\lambda_0)\left(\psi^M - \sum_q c_q\psi^{M,q} - \sum_{j=1}^{M} u^{M-j,j}\right) =$$
$$= \sum_{h=0}^{M} \frac{1}{h!}\partial_\lambda^h \widehat{\mathbf{L}}(\lambda_0)\left(\psi^{M-h} - \sum_q c_q\psi^{M-h,q} - \sum_{j=1}^{M-h} u^{M-h-j,j}\right). \tag{2.2.12}$$

Поскольку множество функций $\{\psi^0, \dots, \psi^M\}$, $\{\psi^{0,q}, \dots, \psi^{M,q}\}$ и $\{u^{0,j}, \dots, u^{M-1,j}\}$ являются жордановыми подпоследовательностями, в силу (A.5), имеем

$$\sum_{h=0}^{M} \frac{1}{h!} \partial_\lambda^h \widehat{\mathbf{L}}(\lambda_0) \psi^{M-h} = 0,$$

$$\sum_{h=0}^{M} \frac{1}{h!} \partial_\lambda^h \widehat{\mathbf{L}}(\lambda_0) \sum_q c_q \psi^{M-h,q} = 0,$$

$$\sum_{h=0}^{M} \frac{1}{h!} \partial_\lambda^h \widehat{\mathbf{L}}(\lambda_0) \sum_{j=1}^{M-h} u^{M-h-j,j} = \sum_{j=0}^{M} \sum_{h=0}^{M-j} \frac{1}{h!} \partial_\lambda^h \widehat{\mathbf{L}}(\lambda_0) u^{M-j-h,j} = 0.$$

Из (2.2.12) и последних равенств следует, что

$$\widehat{\mathbf{L}}(\lambda_0) \left(\psi^M - \sum_q c_q \psi^{M,q} - \sum_{j=1}^{M} u^{M-j,j} \right) = 0.$$

Поэтому $\psi^M - \sum\limits_q c_q \psi^{M,q} - \sum\limits_{j=1}^{M} u^{M-j,j} \in \mathcal{N}(\widehat{\mathbf{L}}(\lambda_0))$. Заменяя функцию $u^{0,M}$, если это необходимо, получим

$$\psi^M - \sum_q c_q \psi^{M,q} - \sum_{j=1}^{M} u^{M-j,j} = 0.$$

Это означает, что (2.2.11) выполняется для всех $h = 0, \dots, M$. Из (2.2.11) мы имеем

$$r^{i\lambda_0} \sum_{n=0}^{M} \frac{1}{n!} (i \ln r)^n \psi^{M-n} =$$
$$= r^{i\lambda_0} \sum_{n=0}^{M} \frac{1}{n!} (i \ln r)^n \sum_{q=1}^{q_0} c_q \psi^{M-n,q} + r^{i\lambda_0} \sum_{n=0}^{M} \frac{1}{n!} (i \ln r)^n \sum_{j=1}^{M-n} u^{M-n-j,j} =$$
$$= \sum_q c_q v^{M,q} + \sum_{j=1}^{M} r^{i\lambda_0} \sum_{n=0}^{M-j} \frac{(i \ln r)^n}{n!} u^{M-j-n,j} = \sum_q c_q v^{M,q} + \sum\nolimits_{M-1},$$

где $\sum_{M-1}$ — сумма степенных решений порядков $\leqslant M-1$. Остается использовать предположение индукции. $\square$

Доказательство теоремы 2.2.1

1. Поскольку $\mathbf{L}$ — ограниченный оператор из $H_{a_1}^{l_1+2m,N}(\theta)$ в $\mathcal{H}_{a_1}^{l_1,N}(\theta,\gamma)$, мы имеем $f\in\mathcal{H}_{a_1}^{l_1,N}(\theta,\gamma)$. Таким образом $f\in\mathcal{H}_{a_1}^{l_1,N}(\theta,\gamma)\cap\mathcal{H}_{a_2}^{l_2,N}(\theta,\gamma)$.

Обозначим через $\mathcal{C}_0^{\infty,N}(\overline{\theta},\gamma)$ множество вектор-функций $f=\{f_{0j},f_{\rho\mu}\}$ $(j=1,\dots,N,\ \rho=1,2,\ \mu=1,\dots,mN)$ таких, что $f_{0j}\in C_0^{\infty}(\overline{\theta}\setminus\{0\})$, $f_{\rho\mu}\in\dot{C}^{\infty}(\gamma_\rho)$. Очевидно, $\mathcal{C}_0^{\infty,N}(\overline{\theta},\gamma)$ — плотно в $\mathcal{H}_{a_1}^{l_1,N}(\theta,\gamma)\cap\mathcal{H}_{a_2}^{l_2,N}(\theta,\gamma)$. Поэтому, не ограничивая общности, мы можем предполагать, что $f\in\mathcal{C}_0^{\infty,N}(\overline{\theta},\gamma)$.

2. Из доказательства теоремы 2.1.1 следует, что

$$v(\varphi,\tau)=\lim_{N\to\infty}(2\pi)^{-1/2}\int\limits_{-N+ih_1}^{+N+ih_1}e^{i\lambda\tau}\widehat{\mathbf{R}}(\lambda)\widehat{F}d\lambda. \tag{2.2.13}$$

В силу леммы 1.4.1 в [12], резольвента $\widehat{\mathbf{R}}(\lambda):\mathcal{W}^{0,N}[d_1,d_2]\to L_2^N(d_1,d_2)$ оценивается как

$$\|\widehat{\mathbf{R}}(\lambda)\|\leqslant k_1\quad\text{при}\quad h_2\leqslant\operatorname{Im}\lambda\leqslant h_1\quad\text{и}\quad|\operatorname{Re}\lambda|\to\infty. \tag{2.2.14}$$

С другой стороны, поскольку $f\in\mathcal{C}_0^{\infty,N}(\overline{\theta},\gamma)$, то

$$|||\widehat{F}|||_{\mathcal{W}^{0,N}[d_1,d_2]}\leqslant k_2|\lambda|^{-2} \tag{2.2.15}$$

для $h_2\leqslant\operatorname{Im}\lambda\leqslant h_1$ и достаточно больших $|\operatorname{Re}\lambda|$, где $k_2>0$ зависит от f.

Из теоремы 1.4.2 из [12] вытекает, что полоса $h_2\leqslant\operatorname{Im}\lambda\leqslant h_1$ содержит только конечное число собственных значений $\lambda_1,\dots,\lambda_J$ оператор-функции $\lambda\mapsto\widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$. Поэтому, используя теорему Каши, из (2.2.13) получаем

$$\begin{aligned}v(\varphi,\tau)&=\\&=\lim_{N\to\infty}(2\pi)^{-1/2}\int\limits_{-N+ih_2}^{+N+ih_2}e^{i\lambda\tau}\widehat{\mathbf{R}}(\lambda)\widehat{F}d\lambda-i(2\pi)^{1/2}\sum_j\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_j}\left\{e^{i\lambda\tau}\widehat{\mathbf{R}}(\lambda)\widehat{F}\right\}-\\&-\lim_{N\to\infty}(2\pi)^{-1/2}\int\limits_{-N+ih_2}^{-N+ih_1}e^{i\lambda\tau}\widehat{\mathbf{R}}(\lambda)\widehat{F}d\lambda+\lim_{N\to\infty}(2\pi)^{-1/2}\int\limits_{N+ih_2}^{N+ih_1}e^{i\lambda\tau}\widehat{\mathbf{R}}(\lambda)\widehat{F}d\lambda.\end{aligned} \tag{2.2.16}$$

Из оценок (2.2.14), (2.2.15) следует что

$$\lim_{N\to\infty}\left\|\int\limits_{\pm N+ih_2}^{\pm N+ih_1} e^{i\lambda\tau}\widehat{\mathbf{R}}(\lambda)\widehat{F}d\lambda\right\|_{L_2^N(d_1,d_2)}=0.$$

Таким образом, мы имеем

$$v(\varphi,\tau)=-i(2\pi)^{1/2}\sum_j \operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_j}\left\{e^{i\lambda\tau}\widehat{\mathbf{R}}(\lambda)\widehat{F}\right\}+w(\varphi,\tau), \qquad (2.2.17)$$

где

$$w(\varphi,\tau)=(2\pi)^{1/2}\int\limits_{-\infty+ih_2}^{+\infty+ih_2} e^{i\lambda\tau}\widehat{\mathbf{R}}(\lambda)\widehat{F}d\lambda.$$

Из доказательства теоремы 2.1.1 видно, что $w\in H_{a_2}^{l_2+2m,N}(\theta)$ и выполняется неравенство (2.2.3).

3. Вычислим теперь вычеты вектор-функции $\lambda\mapsto e^{i\lambda\tau}\widehat{\mathbf{R}}(\lambda)\widehat{F}$ в полюсах λ_j оператор-функции $\lambda\mapsto\widehat{\mathbf{R}}(\lambda)$.

Из теоремы 1.4.2 в [12] следует, что оператор-функция $\lambda\mapsto\widehat{\mathbf{R}}(\lambda)\in\mathcal{B}(\mathcal{W}^{l,N}[d_1,d_2],W^{l+2m,N}(d_1,d_2))$— конечно-мероморфная, т.е.

$$\widehat{\mathbf{R}}(\lambda)=\sum_{s=-p_{j1}}^{\infty}\mathbf{A}_{js}(\lambda-\lambda_j)^s, \qquad (2.2.18)$$

где линейные операторы $\mathbf{A}_{js}:\mathcal{W}^{l,N}[d_1,d_2]\to W^{l+2m,N}(d_1,d_2)$ — ограниченные при $s\geqslant 0$ и конечномерные при $-p_{j1}\leqslant s<0$. Далее, в силу теоремы A.11 $\mathcal{R}(\mathbf{A}_{j,-p_{j1}})$ состоит из собственных функций оператор-функции $\lambda\mapsto\widehat{\mathbf{R}}(\lambda)$, соответствующих собственному значению λ_j, а $\mathcal{R}(\mathbf{A}_{js})$ $(-p_{j1}<s<0)$ состоит из собственных и присоединенных функций, соответствующих λ_j.

Поскольку $f\in\mathcal{C}_0^\infty(\overline{\theta},\gamma)$, то $\widehat{F}$— аналитическая по λ в полосе $h_2<\operatorname{Im}\lambda<h_1$. Поэтому в некоторой окрестности λ_j имеет место разложение

$$\widehat{F}(\varphi,\lambda)=\sum_{q=0}^{\infty}F_{jq}(\varphi)(\lambda-\lambda_j)^q, \qquad (2.2.19)$$

где

$$F_{jq}(\varphi)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{g_j}\frac{\widehat{F}(\varphi,\lambda)d\lambda}{(\lambda-\lambda_j)^{q+1}}\in\mathcal{W}^{l_1,N}[d_1,d_2], \qquad (2.2.20)$$

g_j — граница квадрата $G_j = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda_j - \varepsilon_j < \operatorname{Re}\lambda < \operatorname{Re}\lambda_j + \varepsilon_j,$ $\operatorname{Im}\lambda_j - \varepsilon_j < \operatorname{Im}\lambda < \operatorname{Im}\lambda_j + \varepsilon_j\}$, $\varepsilon_j \leqslant \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}\min\limits_j\{h_1 - \operatorname{Im}\lambda_j, \operatorname{Im}\lambda_j - h_2\}$.

Из (2.2.18)–(2.2.20) следует, что

$$u_j = -i(2\pi)^{1/2} \operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_j}\left\{e^{i\lambda\tau}\widehat{\mathbf{R}}(\lambda)\widehat{F}\right\} = e^{i\lambda_j\tau}\sum_{s=0}^{p_{j1}-1} c_{js}\tau^s\eta_{js}(\varphi) =$$

$$= r^{i\lambda_j}\sum_{s=0}^{p_{j1}-1} c_{js}(\ln r)^s\eta_{js}(\varphi), \quad (2.2.21)$$

где $\eta_{js}(\varphi)$ — линейные комбинации собственных и присоединенных функций оператор-функций $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$, соответствующих собственному значению λ_j.

Поскольку v и w — решения задачи (2.1.1), (2.1.2), функция $v - w = \sum\limits_j u_j$ — решение однородной задачи (2.1.1), (2.1.2). Следовательно, в силу лемм 2.2.1, 2.2.2 мы получаем

$$v(y) - w(y) = \sum_{j=1}^{J}\sum_{q=1}^{q_j}\sum_{k=0}^{p_{jq}-1} \alpha_j^{kq} v_j^{kq}(y),$$

где v_j^{kq} заданы по формуле (2.2.2), $\alpha_j^{kq} = \alpha_j^{kq}(f)$ — некоторые линейные функционалы.

4. Докажем, что функционалы $\alpha_j^{kq}(f)$ — ограниченные на $\mathcal{H}_{a_1}^{l_1,N}(\theta,\gamma) \cap \mathcal{H}_{a_2}^{l_2,N}(\theta,\gamma)$.

В силу лемм 1.1.8, 1.1.9,

$$\|f\|_{\mathcal{H}_a^{l_1,N}(\theta,\gamma)} \leqslant k_3\left(\|f\|_{\mathcal{H}_{a_1}^{l_1,N}(\theta,\gamma)} + \|f\|_{\mathcal{H}_{a_2}^{l_2,N}(\theta,\gamma)}\right)$$

для всех a таких, что $a_2 - l_2 \leqslant a - l_1 \leqslant a_1 - l_1$, где $k_3 > 0$ не зависит от a и f. Поэтому из (2.1.18) следует, что

$$\int\limits_{-\infty+ih}^{+\infty+ih} |||\widehat{F}|||^2_{\mathcal{W}^{l_1,N}[d_1,d_2]} d\lambda \leqslant k_4\left(\|f\|_{\mathcal{H}_{a_1}^{l_1,N}(\theta,\gamma)} + \|f\|_{\mathcal{H}_{a_2}^{l_2,N}(\theta,\gamma)}\right) \qquad (2.2.22)$$

для всех $h_2 \leqslant h \leqslant h_1$, где $h = a + 1 - l_1 - 2m$, $k_4 > 0$ не зависит от h и f.

Интегрируя (2.2.22) по h от h_2 до h_1, мы имеем

$$\int\limits_{\Omega_0} |||\widehat{F}|||^2_{\mathcal{W}^{l_1,N}[d_1,d_2]} d\eta d\zeta \leqslant$$

$$\leqslant k_4(h_1 - h_2)\left(\|f\|_{\mathcal{H}^{l_1,N}_{a_1}(\theta,\gamma)} + \|f\|_{\mathcal{H}^{l_2,N}_{a_2}(\theta,\gamma)}\right), \quad (2.2.23)$$

где $\lambda = \eta + i\zeta$, $\Omega_0 = \{(\eta,\zeta) : -\infty < \eta < +\infty,\ h_2 < \zeta < h_1\}$.

Из неравенства (2.2.23) вытекает, что для любых j и $f \neq 0$ существует $\varepsilon_j = \varepsilon_j(f) > 0$ такое, что $\varepsilon_j \leqslant \varepsilon_0$ и

$$\sum_{\pm}\left|\int\limits_{g_j^{\pm}} |||\widehat{F}|||^2_{\mathcal{W}^{l_1,N}[d_1,d_2]} d\lambda\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{k_4(h_1 - h_2)}{2\varepsilon_j}\left(\|f\|_{\mathcal{H}^{l_1,N}_{a_1}(\theta,\gamma)} + \|f\|_{\mathcal{H}^{l_2,N}_{a_2}(\theta,\gamma)}\right), \quad (2.2.24)$$

где $g_j^{\pm} = \{\lambda = \eta + i\zeta : \eta = \operatorname{Re}\lambda_j \pm \varepsilon_j,\ \operatorname{Im}\lambda_j - \varepsilon_0 \leqslant \zeta \leqslant \operatorname{Im}\lambda_j + \varepsilon_0\}$. Поскольку v_{jq} не зависит от ε_j, из (2.2.20), (2.2.22), (2.2.24) получаем

$$|||F_{jq}|||_{\mathcal{W}^{l_1,N}[d_1,d_2]} \leqslant k_5\left(\|f\|_{\mathcal{H}^{l_1,N}_{a_1}(\theta,\gamma)} + \|f\|_{\mathcal{H}^{l_2,N}_{a_2}(\theta,\gamma)}\right), \quad (2.2.25)$$

где $k_5 = k_5(q) > 0$ не зависит от f.

Введем линейные операторы U_j по формулам $U_j f = u_j$ $(j = 1,\dots,J)$. В силу (2.2.18), (2.2.19), (2.2.21) и (2.2.25) операторы U_j, действующие из $\mathcal{H}^{l_1,N}_{a_1}(\theta,\gamma) \cap \mathcal{H}^{l_2,N}_{a_2}(\theta,\gamma)$ в конечномерное пространство степенных решений порядка $\leqslant p_{j1} - 1$, соответствующих собственному значению λ_j, ограниченные. Поэтому линейные функционалы $\alpha_j^{kq} : \mathcal{H}^{l_1,N}_{a_1}(\theta,\gamma) \cap \mathcal{H}^{l_2,N}_{a_2}(\theta,\gamma) \to \mathbb{C}$ также ограниченные. $\square$

Замечание 2.2.2. Из доказательства теоремы 2.2.1 следует, что это утверждение справедливо также в случае, когда $h_2 > h_1$.

Критический случай распределения собственных значений

Определение 2.2.2. Случай распределения собственных значений по отношению к прямой $\operatorname{Im}\lambda = a+1-l-2m$ называется *критическим*, если эта прямая содержит собственные значения оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$.

Следствие 2.2.2. *Пусть прямая* $\operatorname{Im}\lambda = h_1 = a_1+1-l_1-2m$ *содержит собственные значения оператор-функции* $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$, *и пусть выполняются остальные предположения теоремы* 2.2.1.

Тогда заключение теоремы 2.2.1 *остается справедливым.*

Доказательство. В силу теоремы 1.4.2 в [12], существует $\delta > 0$ такое, что множество $\{\lambda \in \mathbb{C} : 0 < |h_1 - \operatorname{Im}\lambda| \leqslant \delta\}$ не содержит собственных значений оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$.

Определим функцию ξ так, что

$$\xi \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}), \quad \xi(r) = 1 \ \text{ для } \ r < 1, \quad \xi(r) = 0 \ \text{ для } \ r > 2. \tag{2.2.26}$$

Очевидно, $\xi v \in H_{a_1}^{l_1+2m,N}(\theta)$. Поскольку $f \in \mathcal{H}_{a_2}^{l_2,N}(\theta,\gamma)$ и $v \in \mathcal{H}_a^{l_1+2m,N}(\theta)$, по лемме C.5 о гладкости сильных решений эллиптических задач $v \in W^{l_2+2m,N}(\theta_\chi)$, где $\theta_\chi = \{y \in \theta : \chi_M^{-1} < r < 2\chi_m^{-1}\}$, $\chi_M = \max\limits_{\zeta,\eta}\{1, \chi_{\zeta\eta}\}$ и $\chi_m = \min\limits_{\zeta,\eta}\{1, \chi_{\zeta\eta}\}$. Поэтому в силу формулы Лейбница

$$\mathbf{L}(\xi v) = \xi f + g_1 + g_2, \tag{2.2.27}$$

где $g_1 = \left\{0,\ \sum\limits_k \left(\xi\left(\chi_{\zeta\eta} r\right) - \xi(r)\right) \sum\limits_\eta \left(r^{-m_{\rho\mu}}(r\mathcal{D}_r)^q B_{\zeta\eta}^1 v_k\right)(\varphi, \chi_{\zeta\eta} r)\right\}$, функция $g_2 = \{g_{0j}, g_{\rho\mu}\} \in \mathcal{H}_{a_2}^{l_2+1,N}(\theta,\gamma)$ содержит производные ξ. Очевидно, $\operatorname{supp} g_2 \subset \overline{\theta_\chi}$, т.е., $\operatorname{supp} g_{0j} \subset \overline{\theta_\chi}$ и $\operatorname{supp} g_{\rho\mu} \in \overline{\gamma_\chi}$. Здесь

$$\gamma_\chi = \left\{y \in \gamma : \chi_M^{-1} < r < 2\chi_m^{-1}\right\}.$$

Аналогично, $\operatorname{supp} g_1 \subset \overline{\theta_\chi}$ и $g_1 \in \mathcal{H}_{a_2}^{l_2,N}(\theta,\gamma)$. Используя теорему 2.2.1 для прямых $\operatorname{Im}\lambda = h_2$ и $\operatorname{Im}\lambda = h_1 + \delta$, мы имеем

$$\xi(r)v(y) = \sum_{j=1}^{J_1} \sum_{q=1}^{q_j} \sum_{k=0}^{p_{jq}-1} \alpha_j^{kq} v_j^{kq}(y) + w_1(y) \qquad (y \in \theta), \tag{2.2.28}$$

где $v_j^{kq}(y)$ заданы по формуле (2.2.2), $w_1 \in H_{a_2}^{l_2+2m,N}(\theta)$, $h_2 < \operatorname{Im}\lambda_j < h_1$ для $j = 1,\dots,J$ и $\operatorname{Im}\lambda_j = h_1$ для $j = J+1,\dots,J_1$, $\alpha_j^{kq} = \alpha_j^{kq}(\xi f+g_1+g_2)$.

Поскольку $h_2 < h_1$, мы имеем $a_2-(l_2-l_1) < a_1$. Поэтому по лемме 1.3.1 $w_1 \in H_{a_1}^{l_1+2m,N}(\theta \cap \{y : 0 < r < 1\})$. Следовательно,

$$\sum_{j,q,k} \alpha_j^{kq} v_j^{kq} \in H_{a_1}^{l_1+2m,N}(\theta \cap \{y : 0 < r < 1\}). \tag{2.2.29}$$

Поскольку $h_2 < \operatorname{Im}\lambda_j < h_1$ для $j = 1, \dots, J$ и $\operatorname{Im}\lambda_j = h_1$ для $j = J+1, \dots, J_1$, используя (2.2.29) и лемму 1.3.10, мы получаем $\alpha_j^{kq} = 0$ для $j = J+1, \dots, J_1$.

С другой стороны, $(1-\xi)v \in H_{a_1-\delta}^{l_1+2m,N}(\theta)$. Вновь используя (2.2.27), мы имеем $\mathbf{L}((1-\xi)v) = (1-\xi)f - g_1 - g_2 \in \mathcal{H}_{a_2}^{l_2,N}(\theta,\gamma)$. Следовательно, из теоремы 2.2.1 вытекает, что

$$(1-\xi(r))v(y) = \sum_{j=1}^{J}\sum_{q=1}^{q_j}\sum_{k=0}^{p_{jq}-1} \alpha_j^{kq} v_j^{kq}(y) + w_2(y), \tag{2.2.30}$$

где $w_2 \in H_{a_2}^{l_2+2m,N}(\theta)$, $\alpha_j^{kq} = \alpha_j^{kq}((1-\xi)f - g_1 - g_2)$. Складывая (2.2.28) и (2.2.30), мы получаем (2.2.1). $\square$

Докажем теперь, что в критическом случае ядро $\mathbf{L}$ также тривиально.

Следствие 2.2.3. *Пусть выполняются условия* 2.1.1–2.1.3. *Пусть прямая* $\operatorname{Im}\lambda = h = a + 1 - l - 2m$ *содержит собственные значения оператор-функции* $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$. *Тогда* $\mathcal{N}(\mathbf{L}) = \{0\}$.

Доказательство. Пусть λ_j — собственные значения оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$ такие, что $\operatorname{Im}\lambda = h$ $(j = 1, \dots, J)$. Предположим, что $v \in \mathcal{N}(\mathbf{L}) \subset H_a^{l+2m}(\theta)$. Определим функцию $\xi \in C^\infty(\mathbb{R})$ по формуле (2.2.26). Тогда $\xi v \in H_{a+\delta}^{l+2m,N}(\theta)$, где $\delta > 0$ таково, что множество $\{\lambda \in \mathbb{C} : 0 < |h - \operatorname{Im}\lambda| \leqslant \delta\}$ не содержит собственных значений оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$, см. теорему 1.4.2 в [12]. Очевидно, $\mathbf{L}(\xi v) = f$, где $\operatorname{supp} f \in \overline{\theta_\chi}$. Следовательно, $f \in \mathcal{H}_{a-\delta}^{l,N}(\theta,\gamma)$. Из теоремы 2.2.1 вытекает, что

$$\xi v = \sum_{j=1}^{J}\sum_{q=1}^{q_j}\sum_{k=0}^{p_{jq}-1} \alpha_j^{kq} v_j^{kq}(y) + w(y),$$

где $w \in H_{a-\delta}^{l+2m,N}(\theta)$. Включение $\xi v \in H_a^{l+2m}(\theta)$ и лемма 1.3.10 влекут за собой равенство $\alpha_j^{kq} = 0$. Поэтому $\xi v \in H_{a-\delta}^{l+2m}$. Следовательно, $v \in H_{a-\delta}^{l+2m,N}$. По теореме 2.1.1, оператор $\mathbf{L} : H_{a-\delta}^{l+2m,N}(\theta) \to \mathcal{H}_{a-\delta}^{l,N}(\theta,\gamma)$ — изоморфизм. Таким образом, $v = 0$. $\square$

Покажем, что в критическом случае $\mathcal{R}(\mathbf{L})$ не замкнуто.

Следствие 2.2.4. *Пусть выполняются условия* 2.1.1–2.1.3. *Пусть прямая* $\operatorname{Im}\lambda = h = a+1-l-2m$ *содержит собственные значения оператор-функции* $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$. *Тогда* $\mathcal{R}(\mathbf{L})$ *не замкнуто в* $\mathcal{H}_a^l(\theta,\gamma)$.

Доказательство. Предположим противное: $\mathcal{R}(\mathbf{L})$ — замкнуто в $\mathcal{H}_a^l(\theta,\gamma)$. В силу следствия 2.2.3 это означает, что для всех $v \in H_a^{l+2m}(\theta)$

$$\|v\|_{H_a^{l+2m}(\theta)} \leqslant k_1 \|\mathbf{L}v\|_{\mathcal{H}_a^{l,N}(\theta,\gamma)}. \tag{2.2.31}$$

Докажем, что оценка (2.2.31) не выполняется. Обозначим

$$v_\varepsilon(y) = r^{i\lambda_0+\varepsilon}\psi^0(\varphi)\xi(r),$$

где $\psi^0(\varphi)$ — собственная функция оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$, соответствующая собственному значению λ_0 такому, что $\operatorname{Im}\lambda_0 = h$, функция $\xi(r)$ задана по формуле (2.2.26), $\varepsilon > 0$.

В силу леммы 1.3.10 $v_\varepsilon \in H_a^{l+2m,N}(\theta)$. Однако $\|v_\varepsilon\|_{H_a^{l+2m,N}(\theta)} \to +\infty$ при $\varepsilon \to 0$.

С другой стороны, в силу формулы Лейбница и формулы (2.1.3), мы имеем

$$\begin{aligned}
\sum_k \sum_{p=0,1} B_\zeta^p v_{\varepsilon k} = r^{-m_{\rho\mu}} \sum_k \Bigg\{ \widehat{B}_\zeta(\varphi, \mathcal{D}_\varphi, r\mathcal{D}_r) v_{\varepsilon k}(\varphi, r) + \\
+ \sum_\eta \chi_{\zeta\eta}^{-m_{\rho\mu}} \big((r\mathcal{D}_r)^q B_{\zeta\eta}^1 v_{\varepsilon k}\big)(\varphi, \chi_{\zeta\eta} r)\Bigg\} = \\
= r^{-m_{\rho\mu}+i\lambda_0+\varepsilon} \sum_k \Bigg\{ \xi(r)\widehat{B}_\zeta(\varphi, \mathcal{D}_\varphi, \lambda_0 - i\varepsilon)\psi_k^0(\varphi) + \xi(\chi_{\zeta\eta} r) \\
\Bigg[\sum_\eta \chi_{\zeta\eta}^{i\lambda_0 - m_{\rho\mu}} (\lambda_0 - i\varepsilon)^q B_{\zeta\eta}^1 \psi_k^0(\varphi) + \\
+ \sum_\eta \left(\chi_{\zeta\eta}^{i\lambda_0 - m_{\rho\mu}+\varepsilon} - \chi_{\zeta\eta}^{i\lambda_0 - m_{\rho\mu}} \right) (\lambda_0 - i\varepsilon)^q B_{\zeta\eta}^1 \psi_k^0(\varphi) \Bigg] + \\
+ \sum_{t=1}^{m_{\rho\mu}} \xi_{\zeta t}(r)\psi_{\zeta t}(\varphi) + \sum_\eta \chi_{\zeta\eta}^{i\lambda_0 - m_{\rho\mu}+\varepsilon} \sum_{\beta=1}^q \xi_{\zeta\eta\beta}(\chi_{\zeta\eta} r) B_{\zeta\eta}^1 \psi^0(\varphi) \Bigg\},
\end{aligned} \tag{2.2.32}$$

где $v_\varepsilon(y) = (v_{\varepsilon 1}(y), \ldots, v_{\varepsilon N}(y))$, $\psi^0(\varphi) = (\psi_1^0(\varphi), \ldots, \psi_N^0(\varphi))$, $\xi_{\zeta t}, \xi_{\zeta\eta\beta} \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R})$, $\psi_{\zeta t} \in C^\infty[d_1, d_2]$, $\operatorname{supp}\xi_{\zeta t}, \operatorname{supp}\xi_{\zeta\eta\beta} \subset [1,2]$.

В силу (2.1.4) $B^1_{\zeta\eta}\psi^0_k \in W^{l+2m-m_{\rho\mu}}(d_1,d_2)$. Поэтому, т.к. $\widehat{\mathbf{L}}(\lambda_0)\psi^0=0$, из соотношений $(\lambda_0-i\varepsilon)^t=\lambda_0^t+\varepsilon\Phi(\varepsilon)$ и $\left|\chi^{i\lambda_0-m_{\rho\mu}+\varepsilon}-\chi^{i\lambda_0-m_{\rho\mu}}\right|\leqslant k_2\varepsilon$ мы получаем

$$\Big\|\sum_k\sum_{p=0,1}B^p_{\zeta}v_{\varepsilon k}\big|_{\gamma_\rho}\Big\|_{H_a^{l+2m-m_{\rho\mu}-1/2}(\gamma_\rho)}\leqslant k_4 \quad \text{для} \quad 0<\varepsilon<1,$$

где $|\Phi_1(\varepsilon)|\leqslant k_3$, $k_2,k_3,k_4>0$ не зависят от ε.

Аналогично имеем

$$\Big\|\sum_k A_{jk}v_{\varepsilon k}\Big\|_{H_a^l(\theta)}\leqslant k_2 \quad \text{для} \quad 0<\varepsilon<1.$$

Следовательно,

$$\|\mathbf{L}v_\varepsilon\|_{\mathcal{H}_a^{l,N}(\theta,\gamma)}\leqslant k_2(1+2m)N.$$

Таким образом, мы получаем противоречие неравенству (2.2.31). $\square$

Влияние нелокальных членов на асимптотические формулы

В силу примера 2.1.1 нелокальные члены могут изменить распределение собственных значений оператор-функции $\lambda\mapsto\widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$. Более того, нелокальные члены могут привести к появлению присоединенных функций.

Пример 2.2.1. Рассмотрим нелокальную задачу

$$-\Delta v(y)=f_0(y) \qquad (y\in\theta), \tag{2.2.33}$$

$$\left.\begin{aligned} &v\big|_{\varphi=0}-\alpha v\big|_{\varphi=\beta/2}=f_1(y) && (y\in\gamma_1),\\ &v\big|_{\varphi=\beta}=f_2(y) && (y\in\gamma_2), \end{aligned}\right\} \tag{2.2.34}$$

где $\theta=\{(r,\varphi):0<\varphi<\beta,\ 0<r\}$, $\gamma_1=\{(r,0):0<r\}$, $\gamma_2=\{(r,\beta):0<r\}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, см. пример 2.1.1.

Изучим собственные и присоединенные вектора оператор-функции $\lambda\mapsto\widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$.

1. Для произвольного $\alpha\in\mathbb{R}$ мы рассмотрим собственные значения $\lambda_k=i2k\delta$ $(k=\pm1,\pm2,\ldots)$, заданные по формуле (2.1.35). Очевидно, соответствующие собственные функции имеют вид $\psi^0_k(\varphi)=\sin 2k\delta\varphi$

$(k=\pm1,\pm2,\ldots)$. Геометрические кратности всех λ_k равны 1. Следовательно, в силу (2.2.11) полная кратность p_k собственного значения λ_k не зависит от выбора жордановой цепочки.

В силу соотношения (A.5) присоединенная функция ψ_k^1 $(k=\pm1,\pm2,\ldots)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\widehat{\mathbf{L}}(i2k\delta)\psi_k^1+\partial_\lambda\widehat{\mathbf{L}}(i2k\delta)\psi_k^0=0,$$

которое эквивалентно краевой задаче

$$(\psi_k^1)_{\varphi\varphi}+4k^2\delta^2\psi_k^1=i4k\delta\sin 2k\delta\varphi \qquad (0<\varphi<\beta), \tag{2.2.35}$$

$$\psi_k^1\big|_{\varphi=0}-\alpha\psi_k^1\big|_{\varphi=\beta/2}=0, \qquad \psi_k^1\big|_{\varphi=\beta}=0. \tag{2.2.36}$$

Подставляя общее решение уравнения (2.2.35) $\psi_k^1(\varphi)=a_k\cos 2k\delta\varphi+b_k\sin 2k\delta\varphi-i\varphi\cos 2k\delta\varphi$ в (2.2.36), мы получаем

$$\left.\begin{aligned} &a_k(1-\alpha(-1)^k)=-i\frac{\alpha\beta}{2}(-1)^k,\\ &a_k=i\beta. \end{aligned}\right\} \tag{2.2.37}$$

Система (2.2.37) совместна тогда и только тогда, когда

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 1-\alpha(-1)^k & -i\dfrac{\alpha\beta}{2}(-1)^k \\ 1 & i\beta \end{vmatrix}=i\beta\left(1-\frac{\alpha}{2}(-1)^k\right)=0.$$

Поэтому, если $\alpha\neq\pm2$, то собственные значения λ_k $(k=\pm1,\pm2,\ldots)$ — простые. Если $\alpha=2$, то для $k=2s$ $(s=\pm1,\pm2,\ldots)$ полная кратность $p_k\geqslant2$ и для $k=2s+1$ $(s=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ $p_k=1$. Если $\alpha=-2$, то для $k=2s+1$ $(s=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ $p_k\geqslant2$ и для $k=2s$ $(s=\pm1,\pm2,\ldots)$ $p_k=1$.

Из (2.2.37) следует, что $\psi_k^1(\varphi)=i(\beta-\varphi)\cos 2k\delta\varphi$, если $\alpha=2$, $k=2s$ $(s=\pm1,\pm2,\ldots)$ или $\alpha=-2$, $k=2s+1$ $(s=0,\pm1,\pm2,\ldots)$. Докажем, что $p_k=3$ в обоих случаях.

В силу (A.5) присоединенная функция ψ_k^2 удовлетворяет уравнению

$$\widehat{\mathbf{L}}(i2k\delta)\psi_k^2+\partial_\lambda\widehat{\mathbf{L}}(i2k\delta)\psi_k^1+\frac{1}{2}\partial_\lambda^2\widehat{\mathbf{L}}(i2k\delta)\psi_k^0=0.$$

Это уравнение можно записать в виде

$$(\psi_k^2)_{\varphi\varphi} + 4k^2\delta^2\psi_k^2 = 4k\delta(\varphi-\beta)\cos 2k\delta\varphi + \sin 2k\delta\varphi \qquad (0<\varphi<\beta), \quad (2.2.38)$$

$$\psi_k^2\big|_{\varphi=0} - \alpha\psi_k^2\big|_{\varphi=\beta/2} = 0, \qquad \psi_k^2\big|_{\varphi=\beta} = 0. \quad (2.2.39)$$

Очевидно, функция $\psi_k^2(\varphi) = \varphi\left(\frac{\varphi}{2}-\beta\right)\sin 2k\delta\varphi$ — решение задачи (2.2.38), (2.2.39), где $k = 2s$ $(s=\pm1,\pm2,\ldots)$, если $\alpha = 2$ и $k = 2s+1$ $(s = 0,\pm1,\pm2,\ldots)$, если $\alpha = -2$.

Присоединенная функция $\psi_k^3(\varphi)$ должна удовлетворять уравнению

$$\widehat{\mathbf{L}}(i2k\delta)\psi_k^3 + \partial_\lambda\widehat{\mathbf{L}}(i2k\delta)\psi_k^2 + \frac{1}{2}\partial_\lambda^2\widehat{\mathbf{L}}(i2k\delta)\psi_k^1 + \frac{1}{6}\partial_\lambda^3\widehat{\mathbf{L}}(i2k\delta)\psi_k^0 = 0, \quad (2.2.40)$$

которое эквивалентно краевой задаче

$$(\psi_k^3)_{\varphi\varphi} + 4k^2\delta^2\psi_k^3 = i4k\delta\varphi\left(\frac{\varphi}{2}-\beta\right)\sin 2k\delta\varphi + i(\beta-\varphi)\cos 2k\delta\varphi \qquad (0<\varphi<\beta), \quad (2.2.41)$$

$$\psi_k^3\big|_{\varphi=0} - \alpha\psi_k^3\big|_{\varphi=\beta/2} = 0, \qquad \varphi_k^3\big|_{\varphi=\beta} = 0. \quad (2.2.42)$$

Подставляя общее решение (2.2.41)

$$\psi_k^3(\varphi) = a_k\cos 2k\delta\varphi + b_k\sin 2k\delta\varphi + \frac{i\varphi^2}{2}\left(-\frac{\varphi}{3}+\beta\right)\cos 2k\delta\varphi$$

в (2.2.42), мы имеем

$$\left.\begin{aligned} &a_k(1-\alpha(-1)^k) = i\frac{5\alpha\beta^3}{48}(-1)^k,\\ &a_k = -\frac{i\beta^3}{3}. \end{aligned}\right\} \quad (2.2.43)$$

Для $\alpha = \pm2$ система (2.2.43) — несовместна.

Таким образом, если $\alpha = 2$, $k = 2s$ $(s = \pm1,\pm2,\ldots)$ или $\alpha = -2$, $k = 2s+1$ $(s = 0,\pm1,\pm2,\ldots)$, то $p_k = 3$. В других случаях $p_k = 1$.

2. Пусть $\alpha = 2$. Рассмотрим собственное значение $\lambda_0 = 0$, см. (2.1.35). Геометрическая кратность λ_0 равна 1, а соответствующая собственная функция имеет вид $\psi_0^0(\varphi) = \beta-\varphi$.

Присоединенная функция ψ_0^1 удовлетворяет уравнению

$$\widehat{\mathbf{L}}(0)\psi_0^1 + \partial_\lambda \widehat{\mathbf{L}}(0)\psi_0^0 = 0,$$

которое эквивалентно краевой задаче

$$\left.\begin{aligned}&(\psi_0^1)_{\varphi\varphi} = 0 \qquad (0 < \varphi < \beta),\\ &\psi_0^1\big|_{\varphi=0} - 2\psi_0^1\big|_{\varphi=\beta/2} = 0, \qquad \psi_0^1\big|_{\varphi=\beta} = 0.\end{aligned}\right\}$$

Следовательно, $\psi_0^1(\varphi) = 0$.

Присоединенная функция $\psi_0^2(\varphi)$ должна удовлетворять уравнению

$$\widehat{\mathbf{L}}(0)\psi_0^2 + \partial_\lambda \widehat{\mathbf{L}}(0)\psi_0^1 + \frac{1}{2}\partial_\lambda^2 \widehat{\mathbf{L}}(0)\psi_0^0 = 0.$$

Это уравнение можно переписать в виде

$$(\psi_0^2)_{\varphi\varphi} = (\beta - \varphi) \qquad (0 < \varphi < \beta), \tag{2.2.44}$$

$$\psi_0^2\big|_{\varphi=0} - 2\psi_0^2\big|_{\varphi=\beta/2} = 0, \qquad \psi_0^2\big|_{\varphi=\beta} = 0. \tag{2.2.45}$$

Подставляя общее решение уравнения (2.2.44)
$\psi_0^2(\varphi) = c_0 + c_1\varphi + \beta\dfrac{\varphi^2}{2} - \dfrac{\varphi^3}{6}$ в (2.2.45), мы получаем

$$\left.\begin{aligned}-c_0 - c_1\beta &= \frac{5\beta^3}{24},\\ c_0 + c_1\beta &= -\frac{\beta^3}{3}.\end{aligned}\right\}$$

Эта система — несовместна.

Следовательно, если $\alpha = 2$, то $p_0 = 2$.

Напомним, что для $\alpha = \pm 2$ собственные значения, заданные формулами (2.1.38), (2.1.39), принадлежат множеству собственных значений, заданных формулой (2.1.35).

3. Пусть теперь $|\alpha| \neq 2$. Рассмотрим собственные значения $\lambda_s^\pm$ $(s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, заданные по формуле (2.1.36), если $\alpha > 2$, по формуле (2.1.37), если $\alpha < -2$, по формуле (2.1.40), если $0 < \alpha < 2$, и по формуле (2.1.41), если $-2 < \alpha < 0$. В силу (2.1.29) соответствующие собственные функции имеют вид $\psi_s^{\pm,0}(\varphi) = e^{\lambda_s^\pm(\varphi-\beta)} - e^{-\lambda_s^\pm(\varphi-\beta)}$. Геометрические кратности всех $\lambda_s^\pm$ равны 1.

Присоединенная функция $\psi_s^{\pm,1}$ должна удовлетворять следующей краевой задаче:

$$(\psi_s^{\pm,1})_{\varphi\varphi} - (\lambda_s^\pm)^2\psi_s^{\pm,1} = 2\lambda_s^\pm \left(e^{\lambda_s^\pm(\varphi-\beta)} - e^{-\lambda_s^\pm(\varphi-\beta)}\right) \qquad (0 < \varphi < \beta), \quad (2.2.46)$$

$$\psi_s^{\pm,1}\big|_{\varphi=0} - \alpha\psi_s^{\pm,1}\big|_{\varphi=\beta/2} = 0, \qquad \psi_s^{\pm,1}\big|_{\varphi=\beta} = 0. \quad (2.2.47)$$

Подставляя общее решение уравнения (2.2.46)

$$\psi_s^{\pm,1}(\varphi) = a_s e^{\lambda_s^\pm\varphi} + b_s e^{-\lambda_s^\pm\varphi} + \varphi\left(e^{\lambda_s^\pm(\varphi-\beta)} + e^{-\lambda_s^\pm(\varphi-\beta)}\right)$$

в (2.2.47), мы имеем

$$\left.\begin{aligned} a_s\left(1-\alpha e^{\lambda_s^\pm\beta/2}\right) + b_s\left(1-\alpha e^{-\lambda_s^\pm\beta/2}\right) =& \\ = \frac{\alpha\beta}{2}\left(e^{-\lambda_s^\pm\beta/2} + e^{\lambda_s^\pm\beta/2}\right)&, \\ a_s e^{\lambda_s^\pm\beta} + b_s e^{-\lambda_s^\pm\beta} = -2\beta&. \end{aligned}\right\} \quad (2.2.48)$$

В силу (2.1.30) определитель системы (2.2.48) $\Delta = \Delta(\lambda_s^\pm) = 0$. С другой стороны, подставляя $z = e^{\lambda_s^\pm\beta/2}$, из (2.1.33) мы получаем $z^2 = \alpha z - 1$. Поэтому можно видеть, что

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{\alpha\beta}{2}(z+z^{-1}) & (1-\alpha z^{-1}) \\ -2\beta & z^{-2} \end{vmatrix} = \\ = \beta z^{-3}\left(2z^3 - \frac{3}{2}\alpha z^2 + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\beta z^{-2}}{2}(\alpha^2-4) \neq 0.$$

Таким образом, система (2.2.48) несовместна. Следовательно, собственные значения $\lambda_s^\pm$ $(s = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$ — простые.

4. Наконец, мы рассмотрим случай $\alpha = 0$, т.е. локальную задачу. В силу (2.1.31) $\mathring{\lambda}_k = ik\delta$ $(k = \pm1, \pm2, \ldots)$ — собственные значения оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}_0(\lambda)$. Очевидно, собственные значения $\mathring{\lambda}_k$ — простые, а соответствующие собственные функции имеют вид $\mathring{\psi}_k^0(\varphi) = \sin k\delta\varphi$.

Рассмотрим теперь соответствующие модификации в асимптотических формулах решений. Это явление может привести к новым эффектам для гладкости обобщенных решений [29].

Пример 2.2.2. Рассмотрим снова задачу (2.2.33), (2.2.34).

1. Вначале положим $\alpha = 0$. Из (2.1.31) следует, что оператор-функция $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}_0(\lambda)$ удовлетворяет условию

$$\left.\begin{array}{l}\textit{существует, по крайней мере, одно собствен-}\\ \textit{ное значение этой оператор-функции в полосе}\\ -1 < \operatorname{Im}\lambda < 0 \textit{ и прямая } \operatorname{Im}\lambda = -1 \textit{ не содержит}\\ \textit{собственных значений}\end{array}\right\} \tag{2.2.49}$$

тогда и только тогда, когда $\pi < \beta$. В этом случае собственное значение оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}_0(\lambda)$ в полосе $-1 < \operatorname{Im}\lambda < 0$ равно $\mathring{\lambda}_{-1} = -i\delta = -i\dfrac{\pi}{\beta}$. Соответствующая собственная функция имеет вид $\mathring{\psi}^0_{-1} = \sin\delta\varphi$.

Пусть $v \in H^2_1(\theta)$ — сильное решение задачи (2.2.33), (2.2.34), и пусть $f = (f_0, f_1, f_2) \in \mathcal{H}^0_0(\theta,\gamma)$. В силу теоремы 2.2.1 при $l_1 = l_2 = 0$, $a_1 = 1$ и $a_2 = 0$ мы получим

$$v(y) = c_0 r^\delta \sin\delta\varphi + w(y) \quad (y \in \theta) \quad \text{при} \quad \pi < \beta < 2\pi, \tag{2.2.50}$$

где $c_0 = c_0(f)$ — линейный ограниченный функционал на $\mathcal{H}^0_1(\theta,\gamma) \cap \mathcal{H}^0_0(\theta,\gamma)$, $w \in H^2_0(\theta)$, $\mathbf{L}w = f$ и

$$v \in H^2_0(\theta) \quad \text{при} \quad 0 < \beta < \pi. \tag{2.2.51}$$

2. Пусть теперь $|\alpha| \geqslant 2$. Из (2.1.35)–(2.1.39) следует, что в полосе $-1 \leqslant \operatorname{Im}\lambda < 0$ нет собственных значений оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$ для всех $0 < \beta < 2\pi$.

Пусть $v \in H^2_1(\theta)$ — сильное решение задачи (2.2.33), (2.2.34), и пусть $f = (f_0, f_1, f_2) \in \mathcal{H}^0_0(\theta,\gamma)$. В силу теоремы 2.2.1 мы имеем

$$v \in H^2_0(\theta) \quad \text{при} \quad 0 < \beta < 2\pi. \tag{2.2.52}$$

3. Пусть $0 < \alpha < 2$. Из (2.1.40) следует, что оператор-функция $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$ удовлетворяет условию (2.2.49) тогда и только тогда, когда

$$\varkappa < 1. \tag{2.2.53}$$

В случае, когда $\beta \geqslant \pi$ неравенство (2.2.53) выполняется для всех $0 < \alpha < 2$. В случае $0 < \beta < \pi$ неравенство (2.2.53) можно записать следующим образом:

$$2\cos\frac{\beta}{2} < \alpha. \tag{2.2.54}$$

Предположим, что $2\cos\dfrac{\beta}{2} < \alpha < 2$, $0 < \beta < \pi$ или $0 < \alpha < 2$, $\pi \leqslant \beta < 2\pi$. Пусть $v \in H_1^2(\theta)$ — сильное решение задачи (2.2.33), (2.2.34), и пусть $f = (f_0, f_1, f_2) \in \mathcal{H}_0^0(\theta, \gamma)$. Собственная функция, соответствующая собственному значению $\lambda_0^- = -i\varkappa$, имеет вид $\psi_0^{-,0} = \sin\varkappa(\varphi - \beta)$. Поэтому в силу теоремы 2.2.1 мы получим

$$v(y) = c_\alpha r^{\varkappa}\sin\varkappa(\varphi - \beta) + w(y) \qquad (y \in \theta), \tag{2.2.55}$$

где $c_\alpha = c_\alpha(f)$ — линейный ограниченный функционал на $\mathcal{H}_1^0(\theta, \gamma) \cap \mathcal{H}_0^0(\theta, \gamma)$, $w \in H_0^2(\theta)$, $\mathbf{L}w = f$.

Предположим теперь, что $0 < \alpha < 2\cos\dfrac{\beta}{2}$, $0 < \beta < \pi$. Тогда, если $v \in H_1^2(\theta)$ — сильное решение задачи (2.2.33), (2.2.34) и $f \in \mathcal{H}_0^0(\theta, \gamma)$, то $v \in H_0^2(\theta)$.

4. Пусть $-2 < \alpha < 0$. Из (2.1.41) следует, что оператор-функция $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$ удовлетворяет условию (2.2.49) тогда и только тогда, когда

$$-\varkappa + 2\delta < 1. \tag{2.2.56}$$

Неравенство (2.2.56) можно написать в виде

$$\pi - \beta/2 < \operatorname{arctg}\sqrt{4\alpha^{-2} - 1}.$$

Поэтому, если $0 < \beta \leqslant \pi$, то (2.2.56) не выполняется ни при каких $-2 < \alpha < 0$. Если $\pi < \beta < 2\pi$, неравенство (2.2.56) эквивалентно (2.2.54).

Предположим, что $2\cos\dfrac{\beta}{2} < \alpha < 0$, $\pi < \beta < 2\pi$. Пусть $v \in H_1^2(\theta)$ — сильное решение задачи (2.2.33), (2.2.34), и пусть $f \in \mathcal{H}_0^0(\theta, \gamma)$. В силу теоремы 2.2.1 мы получаем

$$v(y) = c_\alpha r^{2\delta - \varkappa}\sin(2\delta - \varkappa)(\varphi - \beta) + w(y) \qquad (y \in \theta), \tag{2.2.57}$$

где $c_\alpha = c_\alpha(f)$ — линейный ограниченный функционал на $\mathcal{H}_1^0(\theta, \gamma) \cap \mathcal{H}_0^0(\theta, \gamma)$, $w \in H_0^2(\theta)$, $\mathbf{L}w = f$.

Предположим теперь, что $-2 < \alpha < 0$, $0 < \beta \leqslant \pi$ или $-2 < \alpha < 2\cos\dfrac{\beta}{2}$, $\pi < \beta < 2\pi$. Тогда, если $v \in H_1^2(\theta)$ — сильное решение задачи (2.2.33), (2.2.34) и $f \in \mathcal{H}_0^0(\theta,\gamma)$, то $v \in H_0^2(\theta)$.

В отличие от локальной задачи ($\alpha = 0$), существование присоединенных функций может привести к появлению логарифмических членов в асимптотических формулах для сильных решений нелокальных задач.

Пример 2.2.3. Изучим задачу (2.2.33), (2.2.34) при $\alpha = 2$.

1. Пусть $0 < \beta < 2\pi$ таково, что существует целое l, $4\pi/\beta - 1 < l < 6\pi/\beta - 1$. Тогда из (2.1.35) вытекает, что существуют два собственных значения $\lambda_{-1} = -i\dfrac{2\pi}{\beta}$ и $\lambda_{-2} = -i\dfrac{4\pi}{\beta}$ в полосе $-l-1 < \operatorname{Im}\lambda < 0$, а прямая $\operatorname{Im}\lambda = -l-1$ не содержит собственных значений оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$. Собственные значения λ_{-1} и λ_{-2} имеют полные кратности $p_{-1} = 1$ и $p_{-2} = 3$ соответственно. Если $v \in H_1^2(\theta)$ — сильное решение задачи (2.2.33), (2.2.34) и $f \in \mathcal{H}_0^l(\theta,\gamma)$, то по теореме 2.2.1 мы получим

$$v(y) = \sum_{k=-1,-2}\sum_{s=0}^{p_k-1} c_k^s v_k^s(y) + w(y) \qquad (y \in \theta), \tag{2.2.58}$$

где $v_{-1}^0(y) = -r^{2\delta}\sin 2\delta\varphi$,

$v_{-2}^0(y) = -r^{4\delta}\sin 4\delta\varphi$,

$v_{-2}^1(y) = r^{4\delta}[i(\beta-\varphi)\cos 4\delta\varphi - i\ln r\sin 4\delta\varphi]$,

$v_{-2}^2(y) = r^{4\delta}[\varphi(\beta-\varphi/2)\sin 4\delta\varphi - \ln r(\beta-\varphi)\cos 4\delta\varphi + \dfrac{1}{2}\ln^2 r\sin 4\delta\varphi]$,

$c_k^s = c_k^s(f)$ — линейные ограниченные функционалы на $\mathcal{H}_1^0(\theta,\gamma)\cap\mathcal{H}_0^l(\theta,\gamma)$, $w \in H_0^{l+2}(\theta)$, $\mathbf{L}w = f$.

2. Пусть $1 < a_1 < \dfrac{2\pi}{\beta} + 1$, и пусть $1 - \dfrac{2\pi}{\beta} < a_2 < 1$. Тогда в силу (2.1.35) существует единственное собственное значение $\lambda_0 = 0$ в полосе $a_2 - 1 < \operatorname{Im}\lambda < a_1 - 1$, а на прямой $\operatorname{Im}\lambda = a_2 - 1$ нет собственных значений оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$. Из части 2 примера 2.2.1 следует, что $p_0 = 2$. Если $v \in H_{a_1}^2(\theta)$ — сильное решение задачи (2.2.33), (2.2.34) и $f \in \mathcal{H}_{a_2}^0(\theta,\gamma)$, то по теореме 2.2.1 мы имеем

$$v(y) = \sum_{s=0,1} c_0^s v_0^s(y) + w(y) \qquad (y \in \theta), \tag{2.2.59}$$

где $v_0^0(y) = \beta - \varphi$, $v_0^1(y) = i\ln r(\beta-\varphi)$, $c_0^s = c_0^s(f)$ — линейные ограниченные функционалы на $\mathcal{H}^0_{a_1}(\theta,\gamma)\cap\mathcal{H}^0_{a_2}(\theta,\gamma)$, $w\in H^2_{a_2}(\theta)$, $\mathbf{L}w = f$.

2.3. Нелокальные эллиптические задачи в двугранных углах

Постановка задачи

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\mathbf{A}v = f_0(x) \qquad (x\in\Theta) \tag{2.3.1}$$

с нелокальными краевыми условиями

$$\mathbf{B}_\rho v = \mathbf{B}^0_\rho\big|_{\Gamma_\rho} + \mathbf{B}^1_\rho\big|_{\Gamma_\rho} = f_\rho(x) \qquad (x\in\Gamma_\rho,\ \rho=1,2) \tag{2.3.2}$$

относительно вектор-функции $v=(v_1,\dots,v_N)$.

Здесь $\Theta = \{x=(y,z)\in\mathbb{R}^n : d_1<\varphi<d_2,\ 0<r,\ z\in\mathbb{R}^{n-2}\}$ — n-мерный двугранный угол, $n\geqslant 3$, r,φ — полярные координаты y, $\Gamma_\rho = \{x\in\mathbb{R}^n : \varphi = d_\rho,\ 0<r,\ z\in\mathbb{R}^{n-2}\}$ $(\rho=1,2)$ — $(n-1)$-мерная полуплоскость, $f_0=(f_{01},\dots,f_{0N})$, $f_\rho=(f_{\rho 1},\dots,f_{\rho,mN})$, $\mathbf{A}=\mathbf{A}(\mathcal{D}_y,\mathcal{D}_z)$ и $\mathbf{B}^0_\rho=\mathbf{B}^0_\rho(\mathcal{D}_y,\mathcal{D}_z)$ — матрицы порядков $N\times N$ и $mN\times N$ с элементами, которые являются однородными дифференциальными операторами с постоянными комплексными коэффициентами, заданными по формулам

$$A_{jk}(\mathcal{D}) = A_{jk}(\mathcal{D}_y,\mathcal{D}_z) = \sum_{|\alpha|+|\beta|=2m} a_{jk\alpha\beta}\mathcal{D}_y^\alpha\mathcal{D}_z^\beta \qquad (j,k=1,\dots,N),$$

$$B^0_{\rho\mu k}(\mathcal{D}) = B^0_{\rho\mu k}(\mathcal{D}_y,\mathcal{D}_z) = \sum_{|\alpha|+|\beta|=m_{\rho\mu}} b_{\rho\mu k\alpha\beta}\mathcal{D}_y^\alpha\mathcal{D}_z^\beta$$
$$(\rho=1,2;\ \mu=1,\dots,mN,\ k=1,\dots,N).$$

Наряду с операторами $A_{jk}(\mathcal{D})$ и $B_{\rho\mu k}(\mathcal{D})$ мы рассмотрим полиномы $A_{jk}(\xi)$ и $B_{\rho\mu k}(\xi)$, где $\xi\in\mathbb{R}^n$. Обозначим через $\mathbf{A}(\xi)$ и $\mathbf{B}^0_\rho(\xi)$ матрицы порядков $N\times N$ и $mN\times N$ с элементами $A_{jk}(\xi)$ $(j,k=1,\dots,N)$ и $B^0_{\rho\mu k}(\xi)$ $(\mu=1,\dots,mN,\ k=1,\dots,N)$.

Предположим, что операторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}_\rho$ удовлетворяют следующим условиям:

Условие 2.3.1. Оператор $\mathbf{A}$ — правильно эллиптический.

Условие 2.3.2. Оператор $\mathbf{B}_\rho^0$ удовлетворяет условию Лопатинского по отношению к оператору $\mathbf{A}$.

Условие 2.3.3. $\mathbf{B}_\rho^1 = \mathbf{B}_\rho^1(r, r\mathcal{D}_r, \mathcal{D}_z)$ $(\rho = 1, 2)$ — матрицы порядка $mN \times N$, состоящие из элементов

$$B_{\rho\mu k}^1(\mathcal{D}) = B_\zeta^1(r, r\mathcal{D}_r, \mathcal{D}_z) = \sum_{|\beta| \leqslant m_{\rho\mu}} \mathcal{D}_z^\beta B_\zeta^{1\beta}(r, r\mathcal{D}_r), \tag{2.3.3}$$

где

$$B_\zeta^{1\beta}(r, r\mathcal{D}_r)v_k = \sum_\eta \left(r^{-m_{\rho\mu}+|\beta|}(r\mathcal{D}_r)^q B_{\zeta\eta}^{1\beta} v_k \right)(\varphi, \chi_{\zeta\eta} r, z), \tag{2.3.4}$$

$\zeta = (\rho, \mu, k)$, $\eta = (q, s)$, в (2.3.4) мы суммируем по η таким, что $q = 0, \dots, m_{\rho\mu} - |\beta|$ и $s = 1, \dots, S_\zeta$, $B_{\zeta\eta}^{1\beta}$ — линейные операторы такие, что для всех $w_k \in W^g(d_1, d_2)$ ($k = 1, \dots, N$, $g = m_{\rho\mu} - |\beta| - q, l + 2m - |\beta| - q$, $|\beta| \leqslant m_{\rho\mu}$)

$$\|B_{\zeta\eta}^{1\beta} w_k\|_{W^{g-m_{\rho\mu}+|\beta|+q}(d_1,d_2)} \leqslant c_1 \|w_k\|_{W^g(d_1+\sigma, d_2-\sigma)}, \tag{2.3.5}$$

$B_{\zeta\eta}^{1\beta}$ и $\chi_{\zeta\eta} > 0$ не зависят от r, $c_1 > 0$ и $0 < \sigma < (d_2 - d_1)/2$ не зависят от w_k, $l \geqslant \max\limits_{\rho,\mu}\{-2m + m_{\rho\mu} + 1\}$ — неотрицательное целое число, $\mathcal{D}_z^\beta = \left(-i\dfrac{\partial}{\partial z_1}\right)^{\beta_1} \dots \left(-i\dfrac{\partial}{\partial z_{n-2}}\right)^{\beta_{n-2}}$. Мы рассмотрим правую часть равенства (2.3.4) в следующем смысле:

$$\sum_\eta \left((r')^{|\beta|-m_{\rho\mu}}(r'\mathcal{D}_{r'})^q B_{\zeta\eta}^{1\beta} v_k \right)(\varphi, r', z)\Big|_{r'=\chi_{\zeta\eta} r}.$$

Замечание 2.3.1. Операторы $B_\zeta^1 : H_a^{l+2m}(\Theta) \to H_a^{l+2m-m_{\rho\mu}}(\Theta)$ — ограниченные и

$$\|B_\zeta^1 v_k\|_{H_a^{l+2m-m_{\rho\mu}}(\Theta)} \leqslant c_2 \|v_k\|_{H_a^{l+2m}(\Theta_\sigma)} \tag{2.3.6}$$

для всех $v_k \in H_a^{l+2m}(\Theta)$, где

$$\Theta_\sigma = \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^n : d_1 + \sigma < \varphi < d_2 - \sigma,\ 0 < r,\ z \in \mathbb{R}^{n-2}\}.$$

Таким образом, $\operatorname{supp} B_\zeta^1 \subset \overline{\Theta}_\sigma$.

Действительно, пусть $v_k \in C_0^\infty(\overline{\Theta} \setminus \mathcal{P})$, где $\mathcal{P} = \{x = (y,z) \in \mathbb{R}^n : y = 0,\ z \in \mathbb{R}^{n-2}\}$. Введем новые переменные $x' = (\varphi, \tau, z')$, где $\tau = \ln r$ и $z' = r^{-1}z$. Тогда, используя неравенство (1.1.12) и формулы (2.3.3), (2.3.4), мы получим

$$\|B_\zeta^1 v_k\|^2_{H_a^{l+2m-m_{\rho\mu}}(\Theta)} \leqslant k_1 \sum_\alpha \int\limits_G e^{2(a-l-2m+m_{\rho\mu}+n/2)\tau}$$

$$\left| \mathcal{D}_{x'}^\alpha \sum_{\beta,\eta} \mathcal{D}_{z'}^\beta \left(e^{-m_{\rho\mu}\tau} \mathcal{D}_\tau^q B_{\zeta\eta}^{1\beta} v_k \right) (\varphi, \tau + \ln \chi_{\zeta\eta}, z') \right|^2 dx',$$

где $G = \{x' = (\varphi, \tau, z') : d_1 < \varphi < d_2,\ (\tau, z') \in \mathbb{R}^{n-1}\}$, мы суммируем по α, β, η таким, что $|\alpha| \leqslant l + 2m - m_{\rho\mu}$, $|\beta| \leqslant m_{\rho\mu}$, $q = 0, \dots, m_{\rho\mu} - |\beta|$, $s = 1, \dots, S_\zeta$.

В силу условия 2.3.3 операторы $B_{\zeta\eta}^{1\beta}$ — ограниченные в соответствующих пространствах функций переменной φ. Поэтому эти операторы коммутируют с операторами $\mathcal{D}_\tau^{p+q}$ и $\mathcal{D}_{z'}^{\alpha'+\beta}$, где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha')$, $p \leqslant \alpha_2$. Из последней оценки, неравенства (2.3.5) и интерполяционной теоремы B.15, возвращаясь обратно к переменным x и вновь используя неравенство (1.1.12), мы выводим

$$\|B_\zeta^1 v_k\|^2_{H_a^{l+2m-m_{\rho\mu}}(\Theta)} \leqslant$$

$$\leqslant k_2 \sum_\alpha \int\limits_{G_\sigma} e^{2(a-l-2m+n/2)\tau} \sum_{\beta,q,h} \left| \mathcal{D}_\varphi^h \mathcal{D}_\tau^{\alpha_2+q} \mathcal{D}_{z'}^{\alpha'+\beta} v_k \right|^2 dx' \leqslant k_3 \|v_k\|^2_{H_a^{l+2m}(\Theta_\sigma)}.$$

Здесь $G_\sigma = \{x' = (\varphi, \tau, z') : d_1 + \sigma < \varphi < d_2 - \sigma,\ (\tau, z') \in \mathbb{R}^{n-1}\}$, мы суммируем по $|\beta| \leqslant m_{\rho\mu}$, $q = 0, \dots, m_{\rho\mu} - |\beta|$, $h = 0, 1, \dots, \alpha_1 + m_{\rho\mu} - |\beta| - q$. Поскольку $C_0^\infty(\overline{\Theta} \setminus \mathcal{P})$ — всюду плотно в $H_a^{l+2m}(\Theta)$, то неравенство (2.3.6) выполняется для всех $v_k \in H_a^{l+2m}(\Theta)$.

Из (2.3.6) следует, что $\operatorname{supp} B_\zeta^1 \subset \overline{\Theta}_\sigma$.

Определение 2.3.1. Будем говорить, что множество

$$\mathcal{P} = \{x = (y,z) \in \mathbb{R}^n : y = 0, z \in \mathbb{R}^{n-2}\}$$

является *множеством точек сопряжения* для нелокальной эллиптической задачи (2.3.1), (2.3.2).

Определение 2.3.2. Условие 2.3.3 называется *условием нетангенциального подхода носителя нелокальных членов к множеству точек сопряжения* задачи (2.3.1), (2.3.2).

Пример 2.3.1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (2.3.1) с нелокальными краевыми условиями

$$\sum_{k,s} (B_{\zeta s}(\mathcal{D})v_k)(C_{\zeta s}y, z)\big|_{\Gamma_\rho} = f_{\rho\mu}(x)$$

$$(x \in \Gamma_\rho,\ \rho = 1, 2,\ \mu = 1, \dots, mN). \quad (2.3.7)$$

Здесь $B_{\zeta s}(\mathcal{D})$ — однородные дифференциальные операторы с постоянными комплексными коэффициентами порядков $m_{\rho\mu}$, обозначение $(B_{\zeta s}(\mathcal{D})v_k)(C_{\zeta s}y, z)\big|_{\Gamma_\rho}$ означает, что выражение $B_{\zeta s}(\mathcal{D}_{x'})v_k(x')$ берется при значении аргумента $x' = (C_{\zeta s}y, z)$, а затем мы рассматриваем след этой функции для $y \in \Gamma_\rho$; $C_{\zeta s}$ — оператор вращения на угол $\varphi_{\zeta s}$ и растяжения в $\chi_{\zeta s}$ раз на плоскости $\{y\}$, $d_1 < d_\rho + \varphi_{\zeta s} < d_2$, $0 < \chi_{\zeta s}$, если $s > 0$, а $\varphi_{\zeta 0} = 0$, $\chi_{\zeta 0} = 1$, мы суммируем по $k = 1, \dots, N$ и $s = 0, \dots, S_\zeta$.

Аналогично примеру 2.1.1 легко доказать, что условия (2.3.7) могут быть представлены в виде (2.3.2), где операторы $\mathbf{B}^1_\rho$ удовлетворяют условию 2.3.3.

Введем пространства вектор-функций

$$H_a^{k,N}(\Theta) = \prod_j H_a^k(\Theta),$$
$$\mathcal{H}_a^{l,N}(\Theta, \Gamma) = H_a^{l,N}(\Theta) \times \prod_{\rho,\mu} H_a^{l+2m-m_{\rho\mu}-1/2}(\Gamma_\rho),$$

где $k, l \geqslant 0$ — целые числа, см. условие 2.3.3.

Предположим, что $f = \{f_{0j}, f_{\rho\mu}\} \in \mathcal{H}_a^{l,N}(\Theta, \Gamma)$.

В силу замечания 2.3.1 мы можем определить линейные операторы $\mathbf{L} = \mathbf{L}(\mathcal{D}_z)$, $\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_0(\mathcal{D}_z) : H_a^{l+2m,N}(\Theta) \to \mathcal{H}_a^{l,N}(\Theta, \Gamma)$ по формулам

$$\mathbf{L}(\mathcal{D}_z)v = \left\{\mathbf{A}(\mathcal{D}_y, \mathcal{D}_z)v,\ \mathbf{B}^0_\rho(\mathcal{D}_y, \mathcal{D}_z)v\big|_{\Gamma_\rho} + \mathbf{B}^1_\rho(r, r\mathcal{D}_r, \mathcal{D}_z)v\big|_{\Gamma_\rho}\right\}, \quad (2.3.8)$$

$$\mathbf{L}_0(\mathcal{D}_z)v = \left\{\mathbf{A}(\mathcal{D}_y, \mathcal{D}_z)v,\ \mathbf{B}^0_\rho(\mathcal{D}_y, \mathcal{D}_z)v\big|_{\Gamma_\rho}\right\}. \quad (2.3.9)$$

Определение 2.3.3. Вектор-функция v называется *сильным решением задачи* (2.3.1), (2.3.2) в пространстве $H_a^{l+2m,N}(\Theta)$, если

$$\mathbf{L}v = f.$$

Модельные нелокальные задачи в плоских углах с параметром

Используя преобразование Фурье $F_{z\to\varkappa}$ по $z \in \mathbb{R}^{n-2}$, из (2.3.1), (2.3.2) мы получим

$$\mathbf{A}(\mathcal{D}_y, \varkappa)\widehat{v}(y, \varkappa) = \widehat{f}_0(y, \varkappa) \qquad (y \in \theta,\ \varkappa \in \mathbb{R}^{n-2}), \tag{2.3.10}$$

$$\mathbf{B}^0_\rho(\mathcal{D}_y, \varkappa)\widehat{v}(y, \varkappa)\big|_{\gamma_\rho} + \mathbf{B}^1_\rho(r, r\mathcal{D}_r, \varkappa)\widehat{v}(y, \varkappa)\big|_{\gamma_\rho} = \widehat{f}_\rho(y, \varkappa)$$
$$(y \in \gamma_\rho,\ \varkappa \in \mathbb{R}^{n-2},\ \rho = 1, 2). \tag{2.3.11}$$

Здесь $\theta = \{y \in \mathbb{R}^2 : d_1 < \varphi < d_2,\ 0 < r\}$, $\gamma_\rho = \{y \in \mathbb{R}^2 : \varphi = d_\rho,\ 0 < r\}$; $\mathbf{A}(\mathcal{D}_y, \varkappa)$, $\mathbf{B}^0_\rho(\mathcal{D}_y, \varkappa)$ и $\mathbf{B}^1_\rho(r, r\mathcal{D}_r, \varkappa)$ — матрицы с элементами $A_{jk}(\mathcal{D}_y, \varkappa)$ $(j, k = 1, \dots, N)$, $B^0_{\rho\mu k}(\mathcal{D}_y, \varkappa)$ и $B^1_{\rho\mu k}(r, r\mathcal{D}_r, \varkappa) = \sum\limits_\beta \varkappa^\beta B^{1\beta}_{\rho\mu k}(r, r\mathcal{D}_r,)$ $(\rho = 1, 2,\ \mu = 1, \dots, mN,\ k = 1, \dots, N)$ соответственно;

$$\widehat{v}(y, \varkappa) = F_{z\to\varkappa}v = (2\pi)^{-(n-2)/2} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} v(y, z)e^{-i(\varkappa, z)}dz.$$

Обозначим

$$\left.\begin{aligned} &Y = |\varkappa|y, \quad \omega = \varkappa|\varkappa|^{-1}, \quad t = |Y|, \quad V(Y, \varkappa) = \widehat{v}(y, \varkappa), \\ &F_0(Y, \varkappa) = |\varkappa|^{-2m}\widehat{f}_0(y, \varkappa), \quad F_\rho(Y, \varkappa) = \{|\varkappa|^{-m_{\rho\mu}}\widehat{f}_{\rho\mu}(y, \varkappa)\}. \end{aligned}\right\} \tag{2.3.12}$$

Тогда задача (2.3.10), (2.3.11) примет вид

$$\mathbf{A}(\mathcal{D}_Y, \omega)V(Y, \varkappa) = F_0(Y, \varkappa) \qquad (Y \in \theta), \tag{2.3.13}$$

$$\mathbf{B}^0_\rho(\mathcal{D}_Y, \omega)V(Y, \varkappa)\big|_{\gamma_\rho} + \mathbf{B}^1_\rho(t, t\mathcal{D}_t, \omega)V(Y, \varkappa)\big|_{\gamma_\rho} = F_\rho(Y, \varkappa)$$
$$(Y \in \gamma_\rho,\ \rho = 1, 2), \tag{2.3.14}$$

где $\omega \in S^{n-3} = \{\omega \in \mathbb{R}^{n-2} : |\omega| = 1\}$.

Аналогично замечанию 2.3.1 можно доказать следующее утверждение.

Замечание 2.3.2. Операторы $B^1_{\rho\mu k}(t, t\mathcal{D}_t, \omega) : E_a^{l+2m}(\theta) \to E_a^{l+2m-m_{\rho\mu}}(\theta)$ — ограниченные и

$$\|B^1_{\rho\mu k} V_k\|_{E_a^{l+2m-m_{\rho\mu}}(\theta)} \leqslant c_3 \|V_k\|_{E_a^{l+2m}(\theta_\sigma)} \qquad (2.3.15)$$

для всех $V_k \in E_a^{l+2m}(\theta)$ и $\omega \in S^{n-3}$, $c_3 > 0$ не зависит от V_k и ω, $\theta_\sigma = \{y \in \mathbb{R}^2 : d_1 + \sigma < \varphi < d_2 - \sigma,\ 0 < r\}$.

Введем пространства вектор-функций

$$E_a^{k,N}(\theta) = \prod_j E_a^k(\theta) \qquad (k \geqslant 0,\ k \in \mathbb{Z}),$$
$$\mathcal{E}_a^{l,N}(\theta, \gamma) = E_a^{l,N}(\theta) \times \prod_{\rho,\mu} E_a^{l+2m-m_{\rho\mu}-1/2}(\gamma_\rho).$$

Из рассмотренных лемм 1.2.6, 1.2.7 следует, что $V(\cdot, \varkappa) \in E_a^{l+2m,N}(\theta)$ и $F = \{F_0(\cdot, \varkappa), F_\rho(\cdot, \varkappa)\} \in \mathcal{E}_a^{l,N}(\theta, \gamma)$ для почти всех $\varkappa \in \mathbb{R}^{n-2}$.

Более того, в силу замечания 2.3.2, можно определить линейные ограниченные операторы $\mathbf{L}(\omega), \mathbf{L}_0(\omega) : E_a^{l+2m,N}(\theta) \to \mathcal{E}_a^{l,N}(\theta, \gamma)$ по формулам

$$\mathbf{L}(\omega)V = \Big\{\mathbf{A}(\mathcal{D}_Y, \omega)V(Y),\ \mathbf{B}^0_\rho(\mathcal{D}_Y, \omega)V(Y)\big|_{\gamma_\rho} + \mathbf{B}^1_\rho(t, t\mathcal{D}_t, \omega)V(Y)\big|_{\gamma_\rho}\Big\}$$
$$(\omega \in S^{n-3}), \quad (2.3.16)$$

$$\mathbf{L}_0(\omega)V = \Big\{\mathbf{A}(\mathcal{D}_Y, \omega)V(Y),\ \mathbf{B}^0_\rho(\mathcal{D}_Y, \omega)V(Y)\big|_{\gamma_\rho}\Big\} \quad (\omega \in S^{n-3}). \quad (2.3.17)$$

Очевидно, операторы $\mathbf{L}(\omega)$ и $\mathbf{L}_0(\omega)$ можно получить из $\mathbf{L}(\mathcal{D}_z)$ и $\mathbf{L}_0(\mathcal{D}_z)$, если мы формально заменим оператор $\mathcal{D}_z$ параметром $\omega \in S^{n-3}$, двугранный угол Θ на плоский угол θ, а полуплоскость Γ_ρ — на полупрямую γ_ρ.

Теорема 2.3.1. *Пусть выполнены условия* 2.3.1–2.3.3. *Тогда отображение* $\mathbf{L}(\mathcal{D}_z) : H_a^{l+2m,N}(\Theta) \to \mathcal{H}_a^{l,N}(\Theta, \Gamma)$ *является изоморфизмом тогда и только тогда, когда отображение* $\mathbf{L}(\omega) : E_a^{l+2m,N}(\theta) \to \mathcal{E}_a^{l,N}(\theta, \gamma)$ *является изоморфизмом для всех* $\omega \in S^{n-3}$.

Доказательство. 1. Достаточность. Пусть отображение

$$\mathbf{L}(\omega) : E_a^{l+2m,N}(\theta) \to \mathcal{E}_a^{l,N}(\theta, \gamma)$$

изоморфизм для всех $\omega \in S^{n-3}$. Это означает, что существует единственное решение $V(\cdot, \varkappa) \in E_a^{l+2m,N}(\theta)$ задачи (2.3.13), (2.3.14) для всех $\varkappa \in \mathbb{R}^{n-2}$ и $F(\cdot, \varkappa) \in \mathcal{E}_a^{l,N}(\theta, \gamma)$ и выполняется следующая оценка:

$$\|V(\cdot, \varkappa)\|_{E_a^{l,N}(\theta)} \leqslant k_1 \|F(\cdot, \varkappa)\|_{\mathcal{E}_a^{l,N}(\theta,\gamma)},$$

где $k_1 > 0$ не зависит от $\varkappa$ и F.

Используя (2.3.12), мы перейдем от V, F_0, и F_ρ к $\widehat{v}$, $\widehat{f}_0$ и $\widehat{f}_\rho$, соответственно. Таким образом, последнее неравенство примет вид

$$\sum_j \left\|\widehat{v}_j\left(Y|\varkappa|^{-1}, \varkappa\right)\right\|^2_{E_a^{l+2m}(\theta)} \leqslant k_2 \left\{\sum_j |\varkappa|^{-4m} \left\|\widehat{f}_{0j}\left(Y|\varkappa|^{-1}, \varkappa\right)\right\|^2_{E_a^l(\theta)} + \right.$$
$$\left. + \sum_{\rho,\mu} |\varkappa|^{-2m_{\rho\mu}} \left\|\widehat{f}_{\rho\mu}\left(Y|\varkappa|^{-1}, \varkappa\right)\right\|^2_{E_a^{l+2m-m_{\rho\mu}-1/2}(\gamma_\rho)}\right\},$$

где $k_2 > 0$ не зависит от $\varkappa$, $\widehat{f}_{0j}$ и $\widehat{f}_{\rho\mu}$.

Умножая эту оценку на $|\varkappa|^{2(l+2m-a-1)}$ и интегрируя по $\varkappa$ по пространству $\mathbb{R}^{n-2}$, мы получим новое неравенство. В силу леммы 1.2.6 левая часть этого неравенства эквивалентна $\|v\|_{H_a^{l+2m,N}(\theta)}$. С другой стороны, в силу лемм 1.2.6 и 1.2.7 правая часть этого неравенства эквивалентна $\|f\|_{\mathcal{H}_a^{l,N}(\Theta,\Gamma)}$. Поэтому для любого $f \in \mathcal{H}_a^{l,N}(\Theta, \Gamma)$ существует единственное сильное решение $v \in H_a^{l+2m,N}(\Theta)$ задачи (2.3.1), (2.3.2) и выполняется следующая оценка:

$$\|v\|_{H_a^{l+2m,N}(\Theta)} \leqslant k_3 \|f\|_{\mathcal{H}_a^{l,N}(\Theta,\Gamma)}. \tag{2.3.18}$$

2. Необходимость.

2a. Пусть отображение $\mathbf{L} : H_a^{l+2m,N}(\Theta) \to \mathcal{H}_a^{l,N}(\Theta, \Gamma)$ — изоморфизм. Тогда сильное решение задачи (2.3.1), (2.3.2) удовлетворяет неравенству (2.3.18). Положим

$$v = v_M(y, z) = M^{-(n-2)/2} e^{i(\omega,z)} \chi_0(|z|M^{-1}) u(y),$$

где $\chi_0 \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R})$ — вещественнозначная функция, $\chi_0(t) = 1$ ($|t| \leqslant 1$), $\chi_0(t) = 0$ ($|t| \geqslant 2$), $0 \leqslant \chi_0(t) \leqslant 1$, $u \in E_a^{l+2m,N}(\theta)$, $\omega \in S^{n-3}$.

Очевидно,

$$\mathbf{L}(\mathcal{D}_z) v_M(y, z) = g_M(y, z) + h_M(y, z). \tag{2.3.19}$$

Здесь

$$g_M(y,z) = M^{-(n-2)/2} e^{i(\omega,z)} \chi_0(|z|M^{-1}) \mathbf{L}(\omega) u(y),$$
$$h_M(y,z) = M^{-(n-2)/2} e^{i(\omega,z)} [\mathbf{L}(\mathcal{D}_z+\omega), \chi_0(|z|M^{-1})] u(y),$$

$[A,B] = AB - BA$ — коммутатор A и B.

Очевидно, норму g_M можно оценить следующим образом:

$$\|g_M\|_{\mathcal{H}_a^{l,N}(\Theta,\Gamma)} \leqslant k_4 \|\mathbf{L}(\omega)u\|_{\mathcal{E}_a^{l,N}(\Theta,\Gamma)}. \tag{2.3.20}$$

Здесь $k_j > 0$ $(j \geqslant 4)$ — постоянные, которые не зависят от ω и M.

Оценим теперь норму h_M. Для этого заметим, что коммутатор $[\mathbf{L}(\mathcal{D}_z+\omega), \chi_0(|z|M^{-1})]$ состоит из членов, содержащих производные $\mathcal{D}_z^\alpha \chi_0(|z|M^{-1})$, $|\alpha| \geqslant 1$. Очевидно,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} M^{-(n-2)} \left|\mathcal{D}_z^\alpha \chi_0(|z|M^{-1})\right|^2 dz =$$
$$= M^{-2|\alpha|} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} \left|\mathcal{D}_{z'}^\alpha \chi_0(|z'|)\right|^2 dz' = k_5 M^{-2|\alpha|}. \tag{2.3.21}$$

Введем новые переменные φ, $\tau = \ln r$. Тогда в силу равенства (2.3.21) мы получаем

$$I_\zeta = \left\| M^{-(n-2)/2} e^{i(\omega,z)} \left[B_\zeta^1(r, r\mathcal{D}_r, \mathcal{D}_z+\omega), \chi_0(|z|M^{-1})\right] u_k\big|_{\Gamma_\rho} \right\|^2_{H_a^{l+2m-m_{\rho\mu}-1/2}(\Gamma_\rho)}$$
$$\leqslant \left\| M^{-(n-2)/2} e^{i(\omega,z)} \left[B_\zeta^1(r, r\mathcal{D}_r, \mathcal{D}_z+\omega), \chi_0(|z|M^{-1})\right] u_k \right\|^2_{H_a^{l+2m-m_{\rho\mu}}(\Theta)} \leqslant$$
$$\leqslant k_6 \sum_{\alpha,\gamma} \int\limits_\Theta r^{2(a-l-2m+m_{\rho\mu}+|\alpha|)} M^{-(n-2)} \times$$
$$\times \left| \mathcal{D}_x^\gamma \sum_{\beta,\eta} \left(\left[(\mathcal{D}_z+\omega)^\beta, \chi_0(|z|M^{-1})\right] r^{-m_{\rho\mu}+\beta} (r\mathcal{D}_r)^q B_{\zeta\eta}^{1\beta} u_k \right)(\varphi, \chi_{\zeta\eta} r) \right|^2 dx \leqslant$$
$$\leqslant k_7 M^{-2} \sum_\alpha \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int\limits_{d_1}^{d_2} e^{2(a-l-2m+m_{\rho\mu}+|\alpha'|+1)\tau} \times$$
$$\times \left| \sum_{\beta,\eta,\varkappa} \mathcal{D}_\varphi^{\varkappa_1} \mathcal{D}_\tau^{\varkappa_2} e^{(-m_{\rho\mu}+|\beta|)\tau} \left(\mathcal{D}_\tau^q B_{\zeta\eta}^{1\beta} u_k\right)(\varphi, \tau + \ln \chi_{\zeta\eta}) \right|^2 d\varphi$$

для $u_k \in C_0^\infty(\overline{\theta} \setminus \{0\})$. Здесь $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{n-2})$, $\alpha' = (\alpha_3, \dots, \alpha_n)$, $\eta = (q, s)$, $\varkappa = (\varkappa_1, \varkappa_2)$. Мы суммируем по $\alpha, \gamma, \beta, \eta, \varkappa$ таким, что $|\alpha| \leqslant l + 2m - m_{\rho\mu}$, $|\beta| \leqslant m_{\rho\mu}$, $\gamma_1 = \alpha_1$, $\gamma_2 = \alpha_2$, $\gamma_i \leqslant \alpha_i$ $(i = 3, \dots, n)$, $q = 0, \dots, m_{\rho\mu} - |\beta|$, $s = 1, \dots, S_\zeta$, $|\varkappa| \leqslant \alpha_1 + \alpha_2$.

В силу условия 2.3.3, операторы $B_{\zeta\eta}^{1\beta}$ — ограниченные в соответствующих пространствах функций переменной φ. Поэтому эти операторы коммутируют с операторами $\mathcal{D}_\tau^{p+q}$, где $p \leqslant \varkappa_2$. Из последней оценки, неравенства (2.3.5) и интерполяционной теоремы B.14, возвращаясь к переменным y, мы получим

$$I_\zeta \leqslant k_8 M^{-2} \sum_{\alpha,\beta,\eta,\varkappa,h,p} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int\limits_{d_1+\sigma}^{d_2-\sigma} e^{2(a-l-2m+|\alpha'|+|\beta|+1)\tau} |D_\varphi^h \mathcal{D}_\tau^{p+q} u_k|^2 d\varphi \leqslant$$
$$\leqslant k_9 M^{-2} \sum_{\alpha,\beta,\eta,\varkappa,h,\gamma} \int\limits_{\theta_\sigma} r^{2(a-l-2m+|\alpha'|+|\beta|+|\gamma|)} |\mathcal{D}_y^\gamma u_k|^2 dy. \quad (2.3.22)$$

Здесь $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, мы суммируем по h и γ таким, что $h = 0, 1, \dots, \varkappa_1 + m_{\rho\mu} - |\beta| - q$, $|\gamma| \leqslant h + \varkappa_2 + q$. Очевидно,

$$|\gamma| \leqslant \varkappa_1 + m_{\rho\mu} - |\beta| - q + \varkappa_2 + q \leqslant |\alpha| + m_{\rho\mu} - |\beta| \leqslant$$
$$\leqslant l + 2m - m_{\rho\mu} + m_{\rho\mu} - |\beta| \leqslant l + 2m. \quad (2.3.23)$$

Из первой части неравенства (2.3.23) следует, что

$$a - l - 2m + |\alpha'| + |\beta| + |\gamma| \leqslant a - l - 2m + |\alpha| + m_{\rho\mu} \leqslant a.$$

С другой стороны,

$$a - l - 2m + |\alpha'| + |\beta| + |\gamma| \geqslant a - l - 2m + |\gamma|.$$

Поэтому

$$r^{2(a-l-2m+|\alpha'|+|\beta|+|\gamma|)} \leqslant r^{2a} \qquad \text{при} \quad |r| \geqslant 1,$$
$$r^{2(a-l-2m+|\alpha'|+|\beta|+|\gamma|)} \leqslant r^{2(a-l-2m+|\gamma|)} \quad \text{при} \quad |r| \leqslant 1.$$

Таким образом,

$$r^{2(a-l-2m+|\alpha'|+|\beta|+|\gamma|)} \leqslant r^{2a}\left(1 + r^{2(-l-2m+|\gamma|)}\right).$$

Из последнего неравенства и неравенства (2.3.22) мы имеем

$$I_\zeta \leqslant k_{10} M^{-2} \|u_k\|^2_{E_a^{l+2m}(\theta_\sigma)}. \tag{2.3.24}$$

Поскольку $C_0^\infty(\overline{\theta} \setminus \{0\})$ всюду плотно в $E_a^{l+2m}(\theta)$, неравенство (2.3.24) выполняется для всех $u_k \in E_a^{l+2m}(\theta)$.

Аналогично и проще мы получаем следующие оценки:

$$\begin{gathered}\left\| M^{-(n-2)/2} e^{i(\omega,z)} \left[A_{jk}(\mathcal{D}_y, \mathcal{D}_z + \omega), \chi_0(|z|M^{-1}) \right] u_k \right\|_{H_a^l(\Theta)} \leqslant \\ \leqslant k_{11} M^{-1} \|u_k\|_{E_a^{l+2m}(\theta)},\end{gathered} \tag{2.3.25}$$

$$\begin{gathered}\left\| M^{-(n-2)/2} e^{i(\omega,z)} \left[B_\zeta^0(\mathcal{D}_y, \mathcal{D}_z + \omega), \chi_0(|z|M^{-1}) \right] u_k\big|_{\Gamma_\rho} \right\|_{H_a^{l+2m-m_{\rho\mu}-1/2}(\Gamma_\rho)} \\ \leqslant k_{12} M^{-1} \|u_k\|_{E_a^{l+2m}(\theta)}.\end{gathered} \tag{2.3.26}$$

Из неравенств (2.3.24)–(2.3.26) следует

$$\|h_M\|_{\mathcal{H}_a^{l,N}(\Theta,\Gamma)} \leqslant k_{13} M^{-1} \|u\|_{E_a^{l+2m,N}(\theta)}. \tag{2.3.27}$$

Из (2.3.19), (2.3.20) и (2.3.27) мы получим

$$\begin{gathered}k_{14}(1 - M^{-1}) \|u\|_{E_a^{l+2m,N}(\theta)} \leqslant \|v\|_{H_a^{l+2m,N}(\Theta)} \leqslant \\ \leqslant k_{15} \left(\|\mathbf{L}(\omega) u\|_{\mathcal{E}_a^{l,N}(\theta,\gamma)} + M^{-1} \|u\|_{E_a^{l+2m,N}(\theta)} \right).\end{gathered} \tag{2.3.28}$$

Выбирая $M > 0$ так, что $(k_{14} + k_{15}) M^{-1} < k_{14}/2$, из (2.3.28) мы имеем

$$\|u\|_{E_a^{l+2m,N}(\theta)} \leqslant 2 k_{14}^{-1} k_{15} \|\mathbf{L}(\omega) u\|_{\mathcal{E}_a^{l,N}(\theta,\gamma)}. \tag{2.3.29}$$

Это означает, что $\mathcal{N}(\mathbf{L}(\omega)) = \{0\}$ и образ $\mathcal{R}(\mathbf{L}(\omega))$ замкнут в $\mathcal{E}_a^{l,N}(\theta,\gamma)$.

2b. Остается доказать, что $\mathcal{R}(\mathbf{L}(\omega)) = \mathcal{E}_a^{l,N}(\theta,\gamma)$. Для этого достаточно показать, что $\mathcal{N}(\mathbf{L}(\omega)^*) = \{0\}$.

Рассмотрим линейные ограниченные операторы $\mathbf{L}(\mathcal{D}_z)^* \colon \mathcal{H}_a^{l,N}(\Theta,\Gamma)^* \to H_a^{l+2m,N}(\Theta)^*$ и $\mathbf{L}(\omega)^* \colon \mathcal{E}_a^{l,N}(\theta,\gamma)^* \to E_a^{l+2m,N}(\theta)^*$, которые являются сопряженными к $\mathbf{L}(\mathcal{D}_z)$ и $\mathbf{L}(\omega)$ соответственно. По предположению оператор $\mathbf{L}(\mathcal{D}_z)^*$ — изоморфизм. Поэтому мы имеем

$$\|\Phi\|_{\mathcal{H}_a^{l,N}(\Theta,\Gamma)^*} \leqslant k_{16} \|\mathbf{L}(\mathcal{D}_z)^* \Phi\|_{H_a^{l+2m,N}(\Theta)^*} \tag{2.3.30}$$

для всех $\Phi \in \mathcal{H}_a^{l,N}(\Theta,\Gamma)^*$.

Пусть $\psi \in \mathcal{E}_a^{l,N}(\theta,\gamma)^*$. Докажем, что формула

$$\langle f, \Phi_M\rangle = \\ = \left\langle \chi_0(|y|M^{-1}) \int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} f(y,z)M^{-(n-2)/2}e^{-i(\omega,z)}\chi_0(|z|M^{-1})dz, \psi\right\rangle \quad (2.3.31)$$

($f \in \mathcal{H}_a^{l,N}(\Theta,\Gamma)$) определяет линейный ограниченный функционал $\Phi_M \in \mathcal{H}_a^{l,N}(\Theta,\Gamma)^*$.

Очевидно,

$$\langle f, \Phi_M\rangle = \sum_j \left\langle \int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} F_{0j}(y,z)dz, \psi_{0j}\right\rangle + \\ + \sum_{\rho,\mu} \left\langle \int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} F_{\rho\mu}(y,z)dz, \psi_{\rho\mu}\right\rangle, \quad (2.3.32)$$

где

$$F_{0j}(y,z) = M^{-(n-2)/2}\chi_0(|y|M^{-1})\chi_0(|z|M^{-1})f_{0j}(y,z)e^{-i(\omega,z)},$$
$$F_{\rho\mu}(y,z) = M^{-(n-2)/2}\chi_0(|y|M^{-1})\chi_0(|z|M^{-1})f_{\rho\mu}(y,z)e^{-i(\omega,z)},$$

$f = \{f_{0j}, f_{\rho\mu}\}$, $\psi_{0j} \in E_a^l(\theta)^*$ и $\psi_{\rho\mu} \in E_a^{l+2m-m_{\rho\mu}-1/2}(\gamma_\rho)^*$.

По определению пространства $E_a^l(\theta)$ мы имеем

$$\left\| \int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} F_{0j}(y,z)dz \right\|^2_{E_a^l(\theta)} = \\ = \sum_{|\alpha|\leqslant l} \int\limits_\theta r^{2a}\left(r^{2(-l+|\alpha|)}+1\right)\left| \mathcal{D}_y^\alpha \int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} F_{0j}(y,z)dz\right|^2 dy \leqslant \\ \leqslant k_{17}\Bigg\{ \sum_{|\alpha|\leqslant l} \int\limits_\theta r^{2(a-l+|\alpha|)} \left| \mathcal{D}_y^\alpha \int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} F_{0j}(y,z)dz\right|^2 dy + \\ + \sum_{|\alpha|+|\beta|=l} \int\limits_\theta r^{2a} \Bigg| \mathcal{D}_y^\alpha \int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} M^{-(n-2)/2}\chi_0(|y|M^{-1}) \times \\ \times \chi_0(|z|M^{-1})f_{0j}(y,z)\mathcal{D}_z^\beta e^{-i(\omega,z)}dz\Bigg|^2 dy\Bigg\}. \quad (2.3.33)$$

Поскольку $\chi_0(|y|M^{-1}) = 0$ при $|y| \geqslant 2M$, мы интегрируем по переменной y по множеству $\theta \cap \{y \ : \ M^{-1} \leqslant 2r^{-1}\}$. Поэтому интегрируя по частям по z во втором члене правой части неравенства (2.3.33) и используя неравенство Коши—Буняковского, мы имеем

$$\left\| \int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} F_{0j}(y,z)dz \right\|^2_{E^l_a(\theta)} \leqslant k_{18} \sum_{|\alpha|+|\beta|\leqslant l} \int\limits_{\theta} r^{2(a-l+|\alpha|+|\beta|)} \left| \int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} M^{-(n-2)/2} e^{-i(\omega,z)} \times \right.$$

$$\left. \times \mathcal{D}^\beta(\chi_0(|y|M^{-1})\chi_0(|z|M^{-1}))\mathcal{D}^\alpha f_{0j}(y,z)dz \right|^2 dy \leqslant k_{19} \|f_{0j}\|^2_{H^l_a(\Theta)}. \quad (2.3.34)$$

Поэтому формула

$$\left\langle \int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} F_{0j}(y,z)dz, \psi_{0j} \right\rangle$$

задает линейный ограниченный функционал на $H^l_a(\Theta)$. Аналогично можно показать, что формула

$$\left\langle \int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} F_{\rho\mu}(y,z)dz, \psi_{\rho\mu} \right\rangle$$

задает линейный ограниченный функционал на $H_a^{l+2m-m_{\rho\mu}-1/2}(\Gamma_\rho)$. Таким образом, формула (2.3.31) определяет линейный ограниченный функционал $\Phi_M \in \mathcal{H}^{l,N}_a(\Theta,\Gamma)^*$.

Положим

$$\Phi = \Phi_M = M^{-(n-2)/2} e^{-i(\omega,z)} \chi_0(|y|M^{-1})\chi_0(|z|M^{-1})\psi$$

и будем понимать это обозначение в смысле (2.3.31).

Очевидно,

$$\langle f, \Phi \rangle = \sum_j \langle f_{0j}, \Phi_{0j} \rangle + \sum_{\rho,\mu} \langle f_{\rho\mu}, \Phi_{\rho\mu} \rangle$$

для всех $f = \{f_{0j}, f_{\rho\mu}\} \in \mathcal{H}^{l,N}_a(\Theta,\Gamma)$, где Φ_{0j} и $\Phi_{\rho\mu}$ — линейные ограниченные функционалы на $H^l_a(\Theta)$ и $H_a^{l+2m-m_{\rho\mu}-1/2}(\Gamma_\rho)$ соответственно.

Из этого равенства следует, что

$$\|\Phi\|_{\mathcal{H}_a^{l,N}(\Theta,\Gamma)^*} \geqslant k_{20}\Big(\sum_j \|\Phi_{0j}\|_{H_a^l(\Theta)^*} + \sum_{\rho,\mu} \|\Phi_{\rho\mu}\|_{H_a^{l+2m-m_{\rho\mu}-1/2}(\Gamma_\rho)^*}\Big). \quad (2.3.35)$$

Предположим, что

$$f = f_M(y,z) = M^{-(n-2)/2} e^{i(\omega,z)} \chi_0(|z|M^{-1}) g(y),$$

где $g = \{g_{0j}, g_{\rho\mu}\} \in \mathcal{E}_a^{l,N}(\theta,\gamma)$. Очевидно,

$$\langle g, \psi\rangle = \sum_j \langle g_{0j}, \psi_{0j}\rangle + \sum_{\rho,\mu} \langle g_{\rho\mu}, \psi_{\rho\mu}\rangle.$$

Поскольку $\|f_{0j}\|_{H_a^l(\Theta)} \leqslant k_{21}\|g_{0j}\|_{E_a^l(\theta)}$, мы имеем

$$\|\Phi_{0j}\|_{H_a^l(\Theta)^*} \geqslant$$
$$\geqslant k_{21}^{-1} \sup_{g_{0j}\neq 0} \Big(\big|\big\langle g_{0j}, \chi_0(|y|M^{-1})\psi_{0j}\big\rangle\big| \int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} M^{-(n-2)} \chi_0^2(|z|M^{-1}) dz / \|g_{0j}\|_{E_a^l(\theta)}\Big)$$
$$\geqslant k_{22}\|\chi_0(|y|M^{-1})\psi_{0j}\|_{E_a^l(\theta)^*}.$$

Аналогично мы можем оценить снизу члены $\|\Phi_{\rho\mu}\|_{H_a^{l+2m-m_{\rho\mu}-1/2}(\Gamma_\rho)^*}$. Таким образом, из (2.3.35) мы получим

$$\|\Phi\|_{\mathcal{H}_a^{l,N}(\Theta,\Gamma)^*} \geqslant k_{23}\|\chi_0(|y|M^{-1})\psi\|_{\mathcal{E}_a^{l,N}(\theta,\gamma)^*}. \quad (2.3.36)$$

Рассмотрим теперь правую часть неравенства (2.3.30)

$$\|\mathbf{L}(\mathcal{D}_z)^*\Phi\|_{H_a^{l+2m,N}(\Theta)^*} = \sup_{v\neq 0} \Big(|\langle v, \mathbf{L}(\mathcal{D}_z)^*\Phi\rangle| / \|v\|_{H_a^{l+2m,N}(\Theta)}\Big).$$

Очевидно,

$$\langle v, \mathbf{L}(\mathcal{D}_z)^*\Phi\rangle =$$
$$= \Big\langle \int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} M^{-(n-2)/2} e^{-i(\omega,z)} \chi_0(|y|M^{-1})\chi_0(|z|M^{-1}) \mathbf{L}(\mathcal{D}_z) v(y,z) dz, \psi \Big\rangle =$$
$$= \Big\langle \int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} g_{1M}(y,z)dz, \psi\Big\rangle - \Big\langle \int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} h_{1M}(y,z)dz, \psi\Big\rangle, \quad (2.3.37)$$

где

$$g_{1M}(y,z) = M^{-(n-2)/2} e^{-i(\omega,z)} \mathbf{L}(\mathcal{D}_z)(\chi_0(|y|M^{-1})\chi_0(|z|M^{-1}) v(y,z)),$$

$$h_{1M}(y,z) = M^{-(n-2)/2} e^{-i(\omega,z)} [\mathbf{L}(\mathcal{D}_z), \chi_0(|y|M^{-1})\chi_0(|z|M^{-1})] v(y,z).$$

Интегрируя по частям по z, мы получим

$$\left\langle \int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} g_{1M}(y,z)dz, \psi \right\rangle =$$

$$= \left\langle \int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} M^{-(n-2)/2}\mathbf{L}(\omega)(\chi_0(|y|M^{-1})\chi_0(|z|M^{-1})v(y,z))e^{-i(\omega,z)}dz, \psi \right\rangle =$$

$$= \left\langle \int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} g_{2M}(y,z)dz, \mathbf{L}(\omega)^*\psi \right\rangle, \quad (2.3.38)$$

где

$$g_{2M}(y,z) = M^{-(n-2)/2}\chi_0(|y|M^{-1})\chi_0(|z|M^{-1})v(y,z)e^{-i(\omega,z)}.$$

Используя те же рассуждения, что и в доказательстве неравенства (2.3.34), мы имеем

$$\left\| \int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} g_{2M}(y,z)dz \right\|^2_{E_a^{l+2m,N}(\theta)} \leqslant k_{24}^2 \|v\|^2_{H_a^{l+2m,N}(\Theta)}. \qquad (2.3.39)$$

Из формул (2.3.38), (2.3.39) следует, что

$$\sup_{v\neq 0} \left(\left| \left\langle \int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} g_{1M}(y,z)dz, \psi \right\rangle \right| / \|v\|_{H_a^{l+2m,N}(\Theta)} \right) \leqslant$$

$$\leqslant k_{24} \|\mathbf{L}(\omega)^*\psi\|_{E_a^{l+2m,N}(\theta)^*}. \quad (2.3.40)$$

Поскольку коммутатор $\left[\mathbf{L}(\mathcal{D}_z), \chi_0(|y|M^{-1})\chi_0(|z|M^{-1})\right]$ состоит из членов, содержащих производные $\mathcal{D}_z^\alpha \chi_0(|z|M^{-1})$ или $\mathcal{D}_y^\alpha \chi_0(|y|M^{-1})$ $(|\alpha|, |\gamma| \geqslant 1)$, используя рассуждения из доказательств неравенств (2.3.33), (2.3.34) и замечания 2.3.1, мы получим

$$\left\| \int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} h_{1M}(y,z)dz \right\|_{\mathcal{E}_a^{l,N}(\theta,\gamma)} \leqslant k_{25} M^{-1} \|v\|^2_{H_a^{l+2m,N}(\Theta)}. \qquad (2.3.41)$$

Поэтому

$$\sup_v \left(\left| \left\langle \int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} h_{1M}(y,z)dz, \psi \right\rangle \right| / \|v\|_{H_a^{l+2m,N}(\Theta)} \right) \leqslant$$
$$\leqslant k_{25} M^{-1} \|\psi\|_{\mathcal{E}_a^{l,N}(\theta,\gamma)^*}. \quad (2.3.42)$$

Из (2.3.30), (2.3.36), (2.3.37), (2.3.40) и (2.3.42) следует, что

$$\|\chi_0(|y|M^{-1})\psi\|_{\mathcal{E}_a^{l,N}(\theta,\gamma)^*} - k_{26} M^{-1} \|\psi\|_{\mathcal{E}_a^{l,N}(\theta,\gamma)^*} \leqslant$$
$$\leqslant k_{27} \|\mathbf{L}(\omega)^* \psi\|_{E_a^{l+2m,N}(\theta)^*}. \quad (2.3.43)$$

Теперь мы можем доказать, что $\mathcal{N}(\mathbf{L}(\omega)^*) = \{0\}$. Предположим противное: существует $\psi \in \mathcal{N}(\mathbf{L}(\omega)^*)$ такое, что $\|\psi\|_{\mathcal{E}_a^{l,N}(\theta,\gamma)^*} = 1$. Тогда из (2.3.43) следует, что

$$\|\chi_0(|y|M^{-1})\psi\|_{\mathcal{E}_a^{l,N}(\theta,\gamma)^*} \leqslant k_{26} M^{-1}. \quad (2.3.44)$$

Рассмотрим произвольную вектор-функцию $g \in \mathcal{E}_a^{l,N}(\theta,\gamma)$ такую, что $\operatorname{supp} g \subset B_R$, где $R < M$. Тогда мы имеем

$$\langle g, \chi_0(|y|M^{-1})\psi \rangle = \langle g, \psi \rangle.$$

Поэтому из (2.3.44) следует, что

$$|\langle g, \psi \rangle| = |\langle g, \chi_0(|y|M^{-1})\psi \rangle| \leqslant \|g\|_{\mathcal{E}_a^{l,N}(\theta,\gamma)} \|\chi_0(|y|M^{-1})\psi\|_{\mathcal{E}_a^{l,N}(\theta,\gamma)^*}$$
$$\leqslant k_{26} M^{-1} \|g\|_{\mathcal{E}_a^{l,N}(\theta,\gamma)} \to 0 \quad \text{при} \quad M \to \infty.$$

Таким образом, мы заключаем, что $\langle g, \psi \rangle = 0$ для любого $g \in \mathcal{E}_a^{l,N}(\theta,\gamma)$, т.е. $\psi = 0$. Это противоречие доказывает, что $\mathcal{N}(\mathbf{L}(\omega)^*) = \{0\}$. $\square$

Априорные оценки решений нелокальных задач с параметром в плоских углах

В этом пункте мы получим априорные оценки сильных решений задачи (2.3.13), (2.3.14), которые можно определить аналогично задаче (2.3.1), (2.3.2).

Обозначим через $\mathbf{L}(0)$ линейный ограниченный оператор, действующий из $H_a^{l+2m,N}(\theta)$ в $\mathcal{H}_a^{l,N}(\theta,\gamma)$ по формуле $\mathbf{L}(\omega)\big|_{\omega=0}$, см. (2.3.16). Очевидно,

$$\mathbf{L}(0)v = \left\{\mathbf{A}(\mathcal{D}_y,0)v(y),\ \mathbf{B}^0_\rho(\mathcal{D}_y,0)v(y)\big|_{\gamma_\rho} + \mathbf{B}^1_\rho(r,r\mathcal{D}_r,0)v(y)\big|_{\gamma_\rho}\right\}.$$

Из условий 2.3.1–2.3.3 следует, что операторы $\mathbf{A}(\mathcal{D}_y,0)$, $\mathbf{B}^0_\rho(\mathcal{D}_y,0)$ и $\mathbf{B}^1_\rho(r,\mathcal{D}_r,0)$ удовлетворяют условиям 2.1.1–2.1.3. Запишем операторы $A_{jk}(\mathcal{D}_y,0)$ и $B^0_\zeta(\mathcal{D}_y,0)$ $(\zeta=(\rho,\mu,k))$ в полярных координатах

$$A_{jk}(\mathcal{D}_y,0) = r^{-2m}\widehat{A}_{jk}(\varphi,\mathcal{D}_\varphi,r\mathcal{D}_r) = r^{-2m}\sum_{\alpha_1+\alpha_2\leqslant 2m} a_{jk\alpha_1\alpha_2}(\varphi)\mathcal{D}_\varphi^{\alpha_1}(r\mathcal{D}_r)^{\alpha_2},$$

$$B^0_\zeta(\mathcal{D}_y,0) = r^{-m_{\rho\mu}}\widehat{B}_\zeta(\varphi,\mathcal{D}_\varphi,r\mathcal{D}_r) = r^{-m_{\rho\mu}}\sum_{\alpha_1+\alpha_2\leqslant m_{\rho\mu}} b_{\zeta\alpha_1\alpha_2}(\varphi)\mathcal{D}_\varphi^{\alpha_1}(r\mathcal{D}_r)^{\alpha_2},$$

где $a_{jk\alpha_1\alpha_2}, b_{\zeta\alpha_1\alpha_2}\in C^\infty_{2\pi}[0,2\pi]$, $C^\infty_{2\pi}[0,2\pi]$ — множество функций на отрезке $[0,2\pi]$ таких, что их 2π-периодические расширения бесконечно дифференцируемы на $\mathbb{R}$, $\mathcal{D}_\varphi = -i\dfrac{\partial}{\partial\varphi}$ и $\mathcal{D}_r = -i\dfrac{\partial}{\partial r}$.

Подставляя формально $\omega=0$ вместо $\mathcal{D}_z$ и $\beta=0$ в (2.3.3), (2.3.4), мы получим

$$B^1_\zeta(r,r\mathcal{D}_r,0)v_k = \sum_\eta \left(r^{-m_{\rho\mu}}(r\mathcal{D}_r)^q B^{10}_{\zeta\eta}v_k\right)(\varphi,\chi_{\zeta\eta}r),$$

где $\eta=(q,s)$, мы суммируем по η таким, что $q=0,\dots,m_{\rho\mu}$ и $s=1,\dots,S_\zeta$.

Рассмотрим оператор-функцию
$\lambda\mapsto\widehat{\mathbf{L}}(\lambda)\in\mathcal{B}(W^{l+2m,N}(d_1,d_2),\mathcal{W}^{l,N}[d_1,d_2])$, заданную по формуле

$$\widehat{\mathbf{L}}(\lambda)u = \left\{\sum_k \widehat{A}_{jk}(\varphi,\mathcal{D}_\varphi,\lambda)u_k(\varphi),\ \sum_k \widehat{B}_\zeta(\varphi,\mathcal{D}_\varphi,\lambda)u_k(\varphi)\big|_{\varphi=d_\rho} + \sum_{k,\eta} e^{(i\lambda-m_{\rho\mu})\ln\chi_{\zeta\eta}}\lambda^q\left(B^{10}_{\zeta\eta}u_k\right)(\varphi)\big|_{\varphi=d_\rho}\right\},\quad (2.3.45)$$

ср. (2.1.10). В § 2.1 было доказано, что: (a) для всех $\lambda\in\mathbb{C}$, кроме счетного множества собственных значений, оператор $\widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$ имеет ограниченный обратный $\widehat{\mathbf{R}}(\lambda) = \widehat{\mathbf{L}}^{-1}(\lambda) : \mathcal{W}^{l,N}[d_1, d_2] \to W^{l+2m,N}(d_1, d_2)$; (b) оператор-функция $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{R}}(\lambda) \in \mathcal{B}\left(\mathcal{W}^{l,N}[d_1, d_2], W^{l+2m,N}(d_1, d_2)\right)$ — конечно-мероморфная фредгольмова оператор-функция в $\mathbb{C}$.

В этом пункте мы докажем следующее утверждение.

Лемма 2.3.1. *Пусть выполняются условия* 2.3.1–2.3.3 , *и пусть переменная* $\operatorname{Im}\lambda = h = a + 1 - l - 2m$ *не содержит собственных значений оператор-функции* $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$.

Тогда для всех $v \in E_a^{l+2m,N}(\theta)$ *и* $\omega \in S^{n-3}$ *справедлива априорная оценка*

$$\|v\|_{E_a^{l+2m,N}(\theta)} \leqslant c_4 \left(\|\mathbf{L}(\omega)v\|_{\mathcal{E}_a^{l,N}(\theta,\gamma)} + \|v\|_{E_a^{l+2m-1,N}(\theta\cap B_R)} \right), \qquad (2.3.46)$$

где $c_4 > 0$ *и* $R > 0$ *не зависят от* v *и* ω.

В доказательствах лемм 2.3.1 и 2.3.5 мы используем леммы 2.3.2–2.3.4, которые будут сформулированы ниже. Вначале введем некоторые обозначения.

Определим линейный ограниченный оператор $G_\varepsilon : W^s(\theta) \to W^s(\theta)$ по формуле

$$(G_\varepsilon v)(y) = v(\varepsilon^{-1} y) \qquad (y \in \theta) \qquad (2.3.47)$$

для $v \in W^s(\theta)$, где $s \in \mathbb{N}$ — некоторое фиксированное число, а $0 < \varepsilon \leqslant 1$ — параметр.

Введем норму, зависящую от параметра $\varepsilon > 0$

$$|||g|||_{W^s(\Omega)} = \left\{ \|g\|^2_{W^s(\Omega)} + \varepsilon^{-2s} \|g\|_{L_2(\Omega)} \right\}^{1/2} \qquad (2.3.48)$$

для $g \in W^s(\Omega)$, где $\Omega = \theta, \gamma_\rho$, и $s > 0$, ср. (C.19).

Лемма 2.3.2. *Пусть* $0 < b_1 < b_2$, *и пусть* $s \in \mathbb{N}$. *Тогда для всех* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *и* $v \in W^s(\theta)$ *таких, что* $\operatorname{supp} v \subset \{y \in \overline{\theta} : b_1\varepsilon^{-1} \leqslant r \leqslant b_2\varepsilon^{-1}\}$, *мы имеем*

$$c_5\|v\|_{W^s(\theta)} \leqslant \varepsilon^{s-1} |||G_s v|||_{W^s(\theta)} \leqslant c_6 \|v\|_{W^s(\theta)}, \qquad (2.3.49)$$

где $c_5, c_6 > 0$ *не зависят от* ε *и* v.

Доказательство. Введем переменные $y = \varepsilon y'$. Тогда мы получим

$$\|v\|^2_{W^s(\theta)} = \sum_{|\alpha|\leqslant s} \int\limits_\theta \left|\mathcal{D}^\alpha_{y'} v(y')\right|^2 dy' = \varepsilon^{2(s-1)} \sum_\alpha \varepsilon^{-2(s-|\alpha|)} \int\limits_\theta \left|\mathcal{D}^\alpha_y v(\varepsilon^{-1}y)\right|^2 dy.$$

В силу интерполяционного неравенства (B.20) правая часть этой формулы эквивалентна $\varepsilon^{2(s-1)}|||G_\varepsilon v|||^2_{W^s(\theta)}$ для всех $0 < \varepsilon \leqslant 1$ и $v \in W^s(\theta)$ таких, что $\operatorname{supp} v \subset \{y \in \overline{\theta} : b_1\varepsilon^{-1} \leqslant r \leqslant b_2\varepsilon^{-1}\}$. □

Определим линейный ограниченный оператор $G_{\rho\varepsilon} : W^s(\gamma_\rho) \to W^s(\gamma_\rho)$ по формуле

$$(G_{\rho\varepsilon}u)(y) = u(\varepsilon^{-1}y) \qquad (y \in \gamma_\rho) \tag{2.3.50}$$

для $u \in W^s(\gamma_\rho)$, где $s \geqslant 1/2$ — некоторое фиксированное вещественное число, а $0 < \varepsilon \leqslant 1$ — параметр.

Лемма 2.3.3. *Пусть $0 < b_1 < b_2$, и пусть $s = k - 1/2$, $k \in \mathbb{N}$.*

Тогда для всех $0 < \varepsilon \leqslant 1$ и $u \in W^s(\gamma_\rho)$ таких, что $\operatorname{supp} u \subset \{y \in \gamma_\rho : b_1\varepsilon^{-1} \leqslant r \leqslant b_2\varepsilon^{-1}\}$, *мы имеем*

$$c_7\|u\|_{W^s(\gamma_\rho)} \leqslant \varepsilon^{s-1/2}|||G_{\rho\varepsilon}u|||_{W^s(\gamma_\rho)} \leqslant c_8\|u\|_{W^s(\gamma_\rho)}, \tag{2.3.51}$$

где $c_7, c_8 > 0$ не зависят от ε и u.

Доказательство. Поскольку $\operatorname{supp} u \subset \{y \in \gamma_\rho : b_1\varepsilon^{-1} \leqslant r \leqslant b_2\varepsilon^{-1}\}$, мы можем рассматривать u как функцию t', заданную на всей оси $\mathbb{R}$. Введем новую переменную $t = \varepsilon t'$. Делая преобразование Фурье по t', мы имеем

$$\widehat{u}(\xi) = (\sqrt{2\pi})^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-i\xi t'} u(t')dt' =$$
$$= \varepsilon^{-1}(\sqrt{2\pi})^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-i\varepsilon^{-1}\xi t} u(\varepsilon^{-1}t)dt = \varepsilon^{-1}(\widehat{G_{\rho\varepsilon}u})(\varepsilon^{-1}\xi).$$

Мы можем определить эквивалентную норму $\|u\|_{W^s(\gamma_\rho)} = \|u\|_{W^s(\mathbb{R})}$, используя преобразование Фурье, см. (B.12).

Вводя новую переменную, $\xi' = \varepsilon^{-1}\xi$, мы получим

$$\|u\|^2_{W^s(\gamma_\rho)} = \int\limits_{\mathbb{R}} \left(1 + |\xi|^2\right)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi = \varepsilon^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}} \left(1 + \varepsilon^2|\xi'|^2\right)^s |(\widehat{G_{\rho\varepsilon}u})(\xi')|^2 d\xi' =$$
$$= \varepsilon^{2s-1} \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\varepsilon^{-2} + |\xi'|^2\right)^s |(\widehat{G_{\rho\varepsilon}u})(\xi')|^2 d\xi'.$$

Правая часть этого неравенства эквивалентна $\varepsilon^{2s-1}|||G_{\rho\varepsilon}u|||^2_{W^s(\gamma_\rho)}$. $\square$

Лемма 2.3.4. *Пусть* $0 < b_1 < b_2$, *и пусть* $s \in \mathbb{N}$. *Тогда для всех* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *и* $v \in W^s(\theta)$ *таких, что* $\operatorname{supp} v \subset \{y \in \overline{\theta} : b_1\varepsilon^{-1} \leqslant r \leqslant b_2\varepsilon^{-1}\}$, *мы имеем*

$$(G_\varepsilon v)\big|_{\gamma_\rho} = G_{\rho\varepsilon}\big(v\big|_{\gamma_\rho}\big).$$

Доказательство. Очевидно, последнее равенство выполняется для всех $v \in C^\infty(\overline{\theta})$ таких, что $\operatorname{supp} v \subset \{y \in \overline{\theta} : b_1\varepsilon^{-1} \leqslant r \leqslant b_2\varepsilon^{-1}\}$. Обозначим $T_\rho v = v\big|_{\gamma_\rho}$. Поскольку операторы $T_\rho G_\varepsilon : W^s(\theta) \to W^{s-1/2}(\gamma_\rho)$ и $G_{\rho\varepsilon}T_\rho : W^s(\theta) \to W^{s-1/2}(\gamma_\rho)$ — ограниченные, переходя к пределу, мы получим вышеупомянутое равенство для всех $v \in W^s(\theta)$ таких, что $\operatorname{supp} v \subset \{y \in \overline{\theta} : b_1\varepsilon^{-1} \leqslant r \leqslant b_2\varepsilon^{-1}\}$. $\square$

Доказательство леммы 2.3.1. Доказательство состоит из трех шагов. Вначале мы получим априорные оценки для функций $v \in E_a^{l+2m,N}(\theta)$ с носителями в некоторой окрестности нуля. На втором шаге мы выведем оценки для функций $v \in E_a^{l+2m,N}(\theta)$ с носителями в кольцевых сегментах $\theta^k = \{(\varphi, r) \in \theta : 2^{k-1} < r < 2^{k+1}\}$. Наконец, суммируя упомянутые выше неравенства, мы получим (2.3.46).

1. Пусть η_0^1, η_∞ — функции такие, что

$$\left.\begin{aligned} &\eta_0^1, \eta_\infty \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+}),\ \eta_0^1(r) + \eta_\infty(r) = 1 \text{ для } 0 \leqslant r,\\ &0 \leqslant \eta_0^1(r), \eta_\infty(r) \leqslant 1 \text{ для } 0 \leqslant r,\ \eta_0^1(r) = 1 \text{ для } r \leqslant 1,\\ &\operatorname{supp}\eta_0^1 \subset [0, 2). \end{aligned}\right\} \tag{2.3.52}$$

Введем также функции η_0^i $(i = 0, 2)$ такие, что

$$\left.\begin{aligned} &\eta_0^i \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+}),\ 0 \leqslant \eta_0^i(r) \leqslant 1 \text{ для } 0 \leqslant r,\\ &\eta_0^0(r)\eta_0^1(r) \equiv \eta_0^1(r) \text{ для } 0 \leqslant r,\ \operatorname{supp}\eta_0^0 \subset [0, 2),\\ &\eta_0^2(r) = 1 \text{ для } r \leqslant 3R_0,\ \operatorname{supp}\eta_0^2 \subset [0, 4R_0). \end{aligned}\right\} \tag{2.3.53}$$

Здесь $R_0 = \chi_M(\chi_m)^{-1}$, $\chi_m = \min\limits_{\zeta,\eta}\{\chi_{\zeta\eta}, 1\}$ и $\chi_M = \max\limits_{\zeta,\eta}\{\chi_{\zeta\eta}, 1\}$; $\zeta = (\rho, \mu, k) : \rho = 1, 2,\ \mu = 1, \dots, mN,\ k = 1, \dots, N$, и $s = 1, \dots, S_\zeta$. Для функций с носителями на некотором компакте нормы в пространствах $E_a^k(\theta)$ и $H_a^k(\theta)$ — эквивалентны. Поэтому в силу теоремы 2.1.1 для всех $v \in E_a^{l+2m,N}(\theta)$ мы имеем

$$\|\eta_0^1 v\|_{E_a^{l+2m,N}(\theta)} \leqslant k_1 \|\eta_0^1 v\|_{H_a^{l+2m,N}(\theta)} \leqslant \\ \leqslant k_2 \|\mathbf{L}(0)(\eta_0^1 v)\|_{\mathcal{H}_a^{l,N}(\theta,\gamma)} \leqslant k_2 \|\mathbf{L}(0)(\eta_0^1 v)\|_{\mathcal{E}_a^{l,N}(\theta,\gamma)} \leqslant \\ \leqslant k_3 \left(\|\mathbf{L}(\omega)(\eta_0^1 v)\|_{\mathcal{E}_a^{l,N}(\theta,\gamma)} + \|\eta_0^2 v\|_{E_a^{l+2m-1,N}(\theta)} \right). \quad (2.3.54)$$

Используя формулу Лейбница и формулы (2.3.3), (2.3.4), из (2.3.54) мы получим

$$\|\eta_0^1 v\|_{E_a^{l+2m,N}(\theta)} \leqslant k_4 \left(\|\eta_0^1(r)\mathbf{L}(\omega)v(y)\|_{\mathcal{E}_a^{l,N}(\theta,\gamma)} + \|\eta_0^2 v\|_{E_a^{l+2m-1,N}(\theta)} + I(v) \right),$$

где

$$I(v) = \sum_{\zeta,\beta,\eta} \Bigg\| \left(\eta_0^1(\chi_{\zeta\eta} r) - \eta_0^1(r) \right) \times \\ \times \left(\omega^\beta r^{-m_{\rho\mu}+|\beta|} (r\mathcal{D}_r)^q B_{\zeta\eta}^{1\beta} v_k \right)(\varphi, \chi_{\zeta\eta} r)\Big|_{\gamma_\rho} \Bigg\|_{E_a^{l+2m-m_{\rho\mu}-1/2}(\gamma_\rho)}.$$

Пусть ψ_0 — вещественнозначная функция такая, что

$$\left. \begin{aligned} &\psi_0 \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}^2),\ 0 \leqslant \psi_0(y) \leqslant 1\ (y \in \mathbb{R}^2), \\ &\psi_0(y) = 1 \text{ для } (r,\varphi) \in \theta_\sigma^1 = (R_0^{-1}/2, 2R_0) \times \\ &\qquad\qquad \times (d_1 + \sigma, d_2 - \sigma), \\ &\psi_0(y) = 0 \text{ для } (r,\varphi) \notin \theta_\sigma^2 = (R_0^{-1}/3, 3R_0) \times \\ &\qquad\qquad \times (d_1 + \sigma/2, d_2 - \sigma/2). \end{aligned} \right\} \quad (2.3.55)$$

В силу (2.3.52) мы имеем $\operatorname{supp}(\eta_0^1(\chi_{\zeta\eta} r) - \eta_0^1(r)) \subset [\chi_M^{-1}, 2\chi_m^{-1}]$ для всех ζ и η. Если $r \in [\chi_M^{-1}, 2\chi_m^{-1}]$, то аргумент $\chi_{\zeta\eta} r$ функции $(B_{\zeta\eta}^{1\beta} v_k)(\varphi, \chi_{\zeta\eta} r)$ принадлежит интервалу $[\chi_m \chi_M^{-1}, 2\chi_m^{-1}\chi_M]$. Поэтому, используя те же рассуждения, что и в доказательстве неравенства (2.3.6) и определении ψ_0, мы получим

$$I(v) = k_5 \|v\|_{E_a^{l+2m,N}(\theta_\sigma^1)} \leqslant k_5 \|\psi_0 v\|_{E_a^{l+2m,N}(\theta)}. \quad (2.3.56)$$

Из последних двух неравенств следует, что

$$\|\eta_0^1 v\|_{E_a^{l+2m,N}(\theta)} \leqslant k_6 \big(\|\eta_0^1(r)\mathbf{L}(\omega)v(y)\|_{\mathcal{E}_a^{l,N}(\theta,\gamma)} + \\ + \|\eta_0^2 v\|_{E_a^{l+2m-1,N}(\theta)} + \|\psi_0 v\|_{E_a^{l+2m,N}(\theta)} \big). \quad (2.3.57)$$

Поскольку $\psi_0 v \in W^{l+2m,N}(\theta)$ и $\psi_0 v$ удовлетворяет однородным условиям Дирихле, в силу леммы C.3 мы имеем

$$\|\psi_0 v\|_{E_a^{l+2m,N}(\theta)} \leqslant k_7 \|\psi_0 v\|_{W^{l+2m,N}(\theta)} \leqslant \\ \leqslant k_8 \left(\|\mathbf{A}(\mathcal{D}_y, 0)(\psi_0 v)\|_{W^{l,N}(\theta)} + \|\psi_0 v\|_{L_2^N(\theta)} \right). \quad (2.3.58)$$

Из (2.3.58), формулы Лейбница и эквивалентности норм для функций с носителями на $\operatorname{supp}\psi_0$ в пространствах $W^{l,N}(\theta)$ и $E_a^{l,N}(\theta)$, мы имеем

$$\|\psi_0 v\|_{E_a^{l+2m,N}(\theta)} \leqslant k_9 \left(\|\psi_0 \mathbf{A}(\mathcal{D}_y, \omega) v\|_{E_a^{l,N}(\theta)} + \|\eta_0^2 v\|_{E_a^{l+2m-1,N}(\theta)} \right). \quad (2.3.59)$$

Из формул (2.3.57) и (2.3.59) следует, что

$$\|\eta_0^1 v\|_{E_a^{l+2m,N}(\theta)} \leqslant k_{10} \left(\|\eta_0^2 \mathbf{L}(\omega) v\|_{\mathcal{E}_a^{l,N}(\theta,\gamma)} + \|\eta_0^2 v\|_{E_a^{l+2m-1,N}(\theta)} \right). \quad (2.3.60)$$

2. Теперь мы оценим норму $\|\eta_\infty v\|_{E_a^{l+2m,N}(\theta)}$.

2a. Пусть $\xi_0^i = \xi_0^i(r)$ $(i = 1, 2)$ — неотрицательные функции такие, что

$$\left.\begin{aligned} &\xi_0^i \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}_+),\ \xi_0^i(r) \leqslant 1\ (0 \leqslant r),\ \operatorname{supp}\xi_0^1 \subset (1/2, 2), \\ &\operatorname{supp}\xi_0^2 \subset (R_0^{-1}/4, 4R_0),\ \xi_0^2(r) = 1\ (r \in [R_0^{-1}/3, 3R_0]), \\ &\max_i \max_{0 \leqslant j \leqslant l+2m} \max_r |(\xi_0^i)^{(j)}(r)| \leqslant C, \end{aligned}\right\} \quad (2.3.61)$$

где $C > 1$ не зависит от ξ_0^i $(i = 1, 2)$.

Обозначим $\Theta^b = \{x = (y, z) \in \Theta : |z| < b\}$, $\Gamma_\rho^b = \{x = (y, z) \in \Gamma_\rho : |z| < b\}$ и $\Gamma^b = \{\Gamma_1^b, \Gamma_2^b\}$.

Введем пространство вектор-функций

$$\mathcal{W}^{l,N}(\Theta^b, \Gamma^b) = W^l(\Theta^b) \times \prod_{\rho,\mu} W^{l+2m-m_{\rho\mu}-1/2}(\Gamma_\rho^b).$$

Используя срезающие функции и формулу Лейбница, из леммы C.3 и формулы (2.3.61) мы получим следующую оценку:

$$\|\xi_0^1 u\|_{W^{l+2m,N}(\Theta^1)} \leqslant k_{11} \left(\|\xi_0^1 \mathbf{L}_0(\mathcal{D}_z) u\|_{\mathcal{W}^{l,N}(\Theta^2,\Gamma^2)} + C\|\xi_0^2 u\|_{W^{l+2m-1,N}(\Theta^2)} \right) \leqslant \\ \leqslant k_{11} \Bigg(\|\xi_0^1 \mathbf{L}(\mathcal{D}_z) u\|_{\mathcal{W}^{l,N}(\Theta^2,\Gamma^2)} + \sum_{\rho,\mu} \Big\| \sum_k \xi_0^1 B_{\rho\mu k}^1 u_k|_{\Gamma_\rho^2} \Big\|_{W^{l+2m-m_{\rho\mu}-1/2}(\Gamma_\rho^2)} + \\ + C\|\xi_0^2 u\|_{W^{l+2m-1,N}(\Theta^2)} \Bigg)$$

для любого $u \in W^{l+2m,N}(\Theta^2)$ и любых функций ξ_0^2, ξ_0^1, удовлетворяющих (2.3.61), где постоянные $k_{11}, k_{12}, \ldots > 0$ не зависят от u, ξ_0^1, ξ_0^2.

Рассуждая, как в доказательстве неравенства (2.3.6), мы имеем

$$\left\| \xi_0^1 B^1_{\rho\mu k} u_k \big|_{\Gamma^2_\rho} \right\|_{W^{l+2m-m_{\rho\mu}-1/2}(\Gamma^2_\rho)} \leqslant k_{12} C \|\psi_0 u_k\|_{W^{l+2m}(\Theta^2)},$$

ср. оценку (2.3.56).

Из последних двух неравенств, леммы C.3, формулы Лейбница и соотношений (2.3.61) следует, что

$$\begin{aligned}
&\|\xi_0^1 u\|_{W^{l+2m,N}(\Theta^1)} \leqslant \\
&\leqslant k_{13}\big(\|\xi_0^1 \mathbf{L}(\mathcal{D}_z) u\|_{\mathcal{W}^{l,N}(\Theta^2,\Gamma^2)} + C\|\mathbf{A}(\psi_0 u)\|_{W^{l,N}(\Theta^3)} + C\|\xi_0^2 u\|_{W^{l+2m-1,N}(\Theta^3)}\big) \\
&\qquad \leqslant k_{14} C \left(\|\xi_0^2 \mathbf{L}(\mathcal{D}_z) u\|_{\mathcal{W}^{l,N}(\Theta^3,\Gamma^3)} + \|\xi_0^2 u\|_{W^{l+2m-1,N}(\Theta^3)}\right), \quad (2.3.62)
\end{aligned}$$

где $\psi_0 \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ — фиксированная функция, заданная по формуле (2.3.55).

2b. Подставим функцию $u(y,z) = e^{i\varepsilon^{-1}(\omega,z)} v^\varepsilon(y)$ в (2.3.62), где $0 < \varepsilon \leqslant 1$, $v^\varepsilon(y) = v(\varepsilon^{-1} y) \in W^{l+2m,N}(\Omega_{\chi 2})$, $\Omega_{\chi j} = \{y \in \theta : r \in (R_0^{-j}/4, 4R_0^j)\}$, $j = 1, 2$. Введем нормы $|||\cdot|||_{W^{l+2m,N}(\theta)}$ и $|||\cdot|||_{\mathcal{W}^{l,N}(\theta,\gamma)}$ по формулам

$$|||w|||_{W^{t,N}(\Omega)} = \left\{ \sum_j |||w_j|||^2_{W^t(\Omega)} \right\}^{1/2},$$

$$|||f|||_{\mathcal{W}^{l,N}(\theta,\gamma)} = \left\{ \sum_j |||f_{0j}|||^2_{W^l(\theta)} + \sum_{\rho,\mu} |||f_{\rho\mu}|||^2_{W^{l+2m-m_{\rho\mu}-1/2}(\gamma_\rho)} \right\}^{1/2},$$

где $\Omega = \theta, \gamma_1, \gamma_2$, $t > 0$, $w = (w_1, \ldots, w_N)$, $f = (f_{01}, \ldots, f_{0N}, f_{11}, \ldots, f_{1,mN}, f_{21}, \ldots, f_{2,mN})$, ср. (C.20), (C.21) для $\lambda = \varepsilon^{-1}$, норма $|||\cdot|||_{W^t(\Omega)}$ задана по формуле (2.3.48).

Докажем следующую оценку:

$$\begin{aligned}
&|||\xi_0^1 v^\varepsilon|||^2_{W^{l+2m,N}(\theta)} \leqslant \\
&\qquad \leqslant k_{15} C^2 \left(|||\xi_0^2 \mathbf{L}(\varepsilon^{-1}\omega) v^\varepsilon|||^2_{\mathcal{W}^{l,N}(\theta,\gamma)} + |||\xi_0^2 v^\varepsilon|||^2_{W^{l+2m-1,N}(\theta)} \right). \quad (2.3.63)
\end{aligned}$$

Обозначим $V^\varepsilon_\rho = \xi_0^2 \left(\mathbf{B}^0_\rho(\mathcal{D}_y, \varepsilon^{-1}\omega) + \mathbf{B}^1_\rho(r, \mathcal{D}_r, \varepsilon^{-1}\omega)\right) v^\varepsilon\big|_{\gamma_\rho}$. Аналогично теореме B.6 легко показать, что для любых $0 < \varepsilon \leqslant 1$, $\omega \in S^{n-3}$ и

$v^\varepsilon \in W^{l+2m,N}(\Omega_{\chi 2})$ существует $w_\rho^\varepsilon \in \prod\limits_\mu W^{l+2m-m_{\rho\mu}}(\Omega_{\chi 1})$ такое, что

$$w_\rho^\varepsilon\big|_{\gamma_\rho} = V_\rho^\varepsilon \tag{2.3.64}$$

и

$$|||w_\rho^\varepsilon|||_{\prod\limits_\mu W^{l+2m-m_{\rho\mu}}(\Omega_{\chi 1})} \leqslant k_{16}|||V_\rho^\varepsilon|||_{\prod\limits_\mu W^{l+2m-m_{\rho\mu}-1/2}(\gamma_\rho)}, \tag{2.3.65}$$

где $k_{16} > 0$ не зависит от v^ε, ε и ω.

Из интерполяционного неравенства (B.20) и соотношений (2.3.64), (2.3.65) вытекает, что

$$\begin{aligned}
&\|\xi_0^2 \mathbf{L}(\mathcal{D}_z)u\|_{\mathcal{W}^{l,N}(\Theta^3,\Gamma^3)} \leqslant \\
&\qquad \leqslant k_{17}\Bigg\{\sum_{j=0}^{l} \varepsilon^{-(l-j)}\|\xi_0^2 \mathbf{A}(\mathcal{D}_y, \varepsilon^{-1}\omega)v^\varepsilon\|_{W^{j,N}(\Omega_{\chi 1})} + \\
&\qquad\quad + \sum_{\rho,\mu}\sum_{k=0}^{l+2m-m_{\rho\mu}} \varepsilon^{-(l+2m-m_{\rho\mu}-k)}\|w_{\rho\mu}^\varepsilon\|_{W^k(\Omega_{\chi 1})}\Bigg\} \leqslant \\
&\leqslant k_{18}\left\{|||\xi_0^2 \mathbf{A}(\mathcal{D}_y, \varepsilon^{-1}\omega)v^\varepsilon|||_{W^{l,N}(\Omega_{\chi 1})} + \sum_{\rho,\mu}|||w_{\rho\mu}^\varepsilon|||_{W^{l+2m-m_{\rho\mu}}(\Omega_{\chi 1})}\right\} \leqslant \\
&\qquad\qquad \leqslant k_{19}|||\xi_0^2 \mathbf{L}(\varepsilon^{-1}\omega)v^\varepsilon|||_{\mathcal{W}^{l,N}(\theta,\gamma)},
\end{aligned} \tag{2.3.66}$$

где $w_\rho^\varepsilon = (w_{\rho 1}^\varepsilon, \ldots, w_{\rho,mN}^\varepsilon)$.

Аналогично (B.20) мы получим также

$$\|\xi_0^2 u\|_{W^{l+2m-1,N}(\Theta^3)} \leqslant k_{20}|||\xi_0^2 v^\varepsilon|||_{W^{l+2m-1,N}(\theta)}. \tag{2.3.67}$$

Очевидно, также, что

$$|||\xi_0^1 v^\varepsilon|||_{W^{l+2m,N}(\theta)} \leqslant k_{21}\|\xi_0^1 u\|_{W^{l+2m,N}(\Theta^1)}. \tag{2.3.68}$$

Неравенства (2.3.62), (2.3.66)–(2.3.68) дают нам (2.3.63).

2c. Введем новые переменные $y' = \varepsilon^{-1}y$ и $r' = \varepsilon^{-1}r$. Обозначим $\xi^{1\varepsilon}(r') = \xi_0^1(\varepsilon r')$ и $\xi^{2\varepsilon}(r') = \xi_0^2(\varepsilon r')$.

Из леммы 2.3.2 следует, что

$$\|\xi^{1\varepsilon}(r')v(y')\|^2_{W^{l+2m,N}(\theta)} \leqslant k_{22}\varepsilon^{2(l+2m-1)}|||\xi_0^1(r)v^\varepsilon(y)|||^2_{W^{l+2m,N}(\theta)} \tag{2.3.69}$$

$$\varepsilon^{2(l+2m-1)}|||\xi_0^2(r)v^\varepsilon(y)|||^2_{W^{l+2m-1,N}(\theta)} \leqslant \\ \leqslant k_{23}\varepsilon^2\|\xi^{2\varepsilon}(r')v(y')\|^2_{W^{l+2m-1,N}(\theta)}. \quad (2.3.70)$$

Переходя к переменным $y' = \varepsilon^{-1}y$ и вновь используя лемму 2.3.2, мы получим

$$\varepsilon^{2(l+2m-1)}|||\xi_0^2(r)A_{jk}(\mathcal{D}_y, \varepsilon^{-1}\omega)v_k^\varepsilon(y)|||^2_{W^{l,N}(\theta)} \leqslant \\ \leqslant k_{24}\varepsilon^{2m}\|\xi^{2\varepsilon}(r')\varepsilon^{-2m}A_{jk}(\mathcal{D}_{y'}, \omega)v_k(y')\|^2_{W^{l,N}(\theta)}. \quad (2.3.71)$$

Аналогично, переходя к переменным $y' = \varepsilon^{-1}y$, в силу лемм 2.3.4 и 2.3.3, мы выводим

$$\varepsilon^{2(l+2m-1)}\left|\left|\left|\xi_0^2(r)\Big(B^0_{\rho\mu k}(\mathcal{D}_y, \varepsilon^{-1}\omega)+ \\ + B^1_{\rho\mu k}(r, r\mathcal{D}_r, \varepsilon^{-1}\omega)\Big)v_k^\varepsilon(y)\big|_{\gamma_\rho}\right|\right|\right|^2_{W^{l+2m-m_{\rho\mu}-1/2}(\gamma_\rho)} \leqslant \\ \leqslant k_{25}\varepsilon^{2m_{\rho\mu}}\left\|\xi^{2\varepsilon}(r')\varepsilon^{-m_{\rho\mu}}\Big(B^0_{\rho\mu k}(\mathcal{D}_{y'}, \omega)+ \\ + B^1_{\rho\mu k}(r', r'\mathcal{D}_{r'}, \omega)\Big)v_k(y')\big|_{\gamma_\rho}\right\|^2_{W^{l+2m-m_{\rho\mu}-1/2}(\gamma_\rho)}. \quad (2.3.72)$$

Умножая обе части (2.3.63) на $\varepsilon^{2(l+2m-1)}$ и используя (2.3.69)–(2.3.72), мы имеем

$$\|\xi^{1\varepsilon}v\|^2_{W^{l+2m,N}(\theta)} \leqslant \\ \leqslant k_{26}C^2\left(\|\xi^{2\varepsilon}\mathbf{L}(\omega)v\|^2_{\mathcal{W}^{l,N}(\theta,\gamma)} + \varepsilon^2\|\xi^{2\varepsilon}v\|^2_{W^{l+2m-1,N}(\theta)}\right). \quad (2.3.73)$$

Пусть ξ_k^1 и ξ_k^2 $(k = 1, 2, \ldots)$ — неотрицательные функции такие, что

$$\left.\begin{aligned} &\xi_k^1, \xi_k^2 \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}_+),\ \xi_k^1(r), \xi_k^2 \leqslant 1\ (0 \leqslant r), \\ &\qquad\qquad \sum_{k=1}^\infty \xi_k^1(r) \equiv 1\ (r \in [2, +\infty)), \\ &\operatorname{supp}\xi_k^1 \subset (2^{k-1}, 2^{k+1}),\ \operatorname{supp}\xi_k^2 \subset (R_0^{-1}2^{k-2}, R_0 2^{k+2}), \\ &\xi_k^2(r) = 1\ (r \in (R_0^{-1}2^k/3, 3R_0\cdot 2^k)), \\ &\qquad\qquad \max_i \max_r |(\xi_k^i)^{(j)}(r)| \leqslant C_1 2^{-jk} \end{aligned}\right\} \quad (2.3.74)$$

для всех $k = 1, 2, \ldots$ и $j = 0, 1, \ldots, l + 2m$, где $C_1 > 0$ не зависит от k.

Положим $\varepsilon = 2^{-k}$ $(k = 1, 2, \dots)$. В силу (2.3.74) функции $\xi_0^1(r) = \xi_k^1(2^k r)$ и $\xi_0^2(r) = \xi_k^2(2^k r)$ удовлетворяют условиям (2.3.61) с константой $C = C_1$, которая не зависит от k. Поэтому, умножая (2.3.73) на 2^{2ak} и подставляя $\xi^{1\varepsilon}(r') = \xi_k^1(r')$ и $\xi^{2\varepsilon}(r') = \xi_k^2(r')$, мы получим

$$\|\xi_k^1 v\|^2_{E_a^{l+2m,N}(\theta)} \leqslant k_{27} \left(\|\xi_k^2 \mathbf{L}(\omega) v\|^2_{\mathcal{E}_a^{l,N}(\theta,\gamma)} + \|\xi_k^2 v\|^2_{E_{a-1}^{l+2m-1,N}(\theta)} \right).$$

3. Теперь мы можем доказать априорную оценку (2.3.46).

Пусть $\eta_\infty(r) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k^1(r)$, и пусть $\eta_0^1(r) = 1 - \eta_\infty(r)$. Тогда функции $\eta_0^1(r)$ и $\eta_\infty(r)$ удовлетворяют условиям (2.3.52). Суммируя обе части последнего неравенства по $k = 1, 2, \dots,$ в силу лемм 1.2.1 и 1.2.3 получим

$$\|\eta_\infty v\|^2_{E_a^{l+2m,N}(\theta)} \leqslant k_{28} \left(\|\xi_\infty \mathbf{L}(\omega) v\|^2_{\mathcal{E}_a^{l,N}(\theta,\gamma)} + \|\xi_\infty v\|^2_{E_{a-1}^{l+2m-1,N}(\theta)} \right), \quad (2.3.75)$$

где $\xi_\infty \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\xi_\infty(r) = 0$ $(r \in (-\infty, R_0^{-1}/4])$, $\xi_\infty(r) = 1$ $(r \in [R_0^{-1}/2, +\infty))$.

Обозначим $\xi_\infty^0(r) = \xi_\infty(r) - \xi_\infty(r - R_1)$, где $R_1 > 2$ будет выбрано ниже. Поскольку $\operatorname{supp} \xi_\infty(r - R_1) \subset (R_1, +\infty)$, мы имеем

$$\begin{aligned} \|\xi_\infty v\|_{E_{a-1}^{l+2m-1,N}(\theta)} &\leqslant \|\xi_\infty^0(r) v(y)\|_{E_{a-1}^{l+2m-1,N}(\theta)} + \|\xi_\infty(r - R_1) v(y)\|_{E_{a-1}^{l+2m-1,N}(\theta)} \leqslant \\ &\leqslant \|\xi_\infty^0 v\|_{E_{a-1}^{l+2m-1,N}(\theta)} + R_1^{-1} \|\xi_\infty(r - R_1) v\|_{E_a^{l+2m,N}(\theta)} \leqslant \\ &\leqslant k_{29} \left(\|\xi_\infty^0 v\|_{E_a^{l+2m-1,N}(\theta)} + R_1^{-1} \|\eta_\infty v\|_{E_a^{l+2m,N}(\theta)} \right). \end{aligned}$$

Выбирая R_1 достаточно большим, из (2.3.75) и из последнего неравенства мы выводим

$$\|\eta_\infty v\|_{E_a^{l+2m,N}(\theta)} \leqslant k_{30} \left(\|\xi_\infty \mathbf{L}(\omega) v\|_{\mathcal{E}_a^{l,N}(\theta,\gamma)} + \|\xi_\infty^0 v\|_{E_a^{l+2m-1,N}(\theta)} \right). \quad (2.3.76)$$

Пусть $R = \max\{4R_0, R_1 + R_0^{-1}/2\}$. Поскольку $\operatorname{supp} \eta_0^2, \operatorname{supp} \xi_\infty^0 \subset [0, R]$, из неравенств (2.3.60), (2.3.76) следует, что

$$\|v\|_{E_a^{l+2m,N}(\theta)} \leqslant k_{31} \left(\|\mathbf{L}(\omega) v\|_{\mathcal{E}_a^{l,N}(\theta,\gamma)} + \|v\|_{E_a^{l+2m-1,N}(\theta \cap B_R)} \right).$$

Таким образом, априорная оценка (2.3.46) доказана. □

Фредгольмова разрешимость нелокальных задач с параметром в плоских углах

В этом пункте мы докажем, что оператор $\mathbf{L}(\omega)$, соответствующий задаче (2.3.13), (2.3.14) — фредгольмов. Доказательство будет основано на лемме 2.3.1 и следующем утверждении.

Лемма 2.3.5. *Пусть выполнены условия* 2.3.1–2.3.3, *и пусть прямая* $\operatorname{Im}\lambda = h$ *не содержит собственных значений оператор-функции* $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$.

Тогда для каждого $\omega \in S^{n-3}$ *оператор* $\mathbf{L}(\omega)$ *имеет правый регуляризатор* $\mathbf{R}(\omega) : \mathcal{E}_a^{l,N}(\theta,\gamma) \to E_a^{l+2m,N}(\theta)$.

Доказательство этого утверждения будет дано ниже.

Теорема 2.3.2. *Пусть выполнены условия* 2.3.1–2.3.3. *Тогда оператор* $\mathbf{L}(\omega) : E_a^{l+2m,N}(\theta) \to \mathcal{E}_a^{l,N}(\theta,\gamma)$ *– фредгольмов для любого* $\omega \in S^{n-3}$ *тогда и только тогда, когда прямая* $\operatorname{Im}\lambda = h$ *не содержит собственных значений оператор-функции* $\lambda \to \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$.

Доказательство. Необходимость. Для функций с носителями в $\overline{\theta_2^0} = \overline{\theta_k} \cap \overline{B_2}$, нормы в пространствах $H_a^k(\theta)$ и $E_a^k(\theta)$ эквивалентны. Поэтому, рассуждая как в доказательстве следствия 2.2.4, мы выводим, что образ $\mathcal{R}(\mathbf{L}(\omega))$ не замкнут в $\mathcal{E}_a^{l,N}(\theta,\gamma)$, если прямая $\operatorname{Im}\lambda = h$ содержит собственные значения оператор-функции $\lambda \to \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$.

Достаточность. Достаточность следует из теоремы А.5, теоремы 1.3.1 и лемм 2.3.1, 2.3.5. $\square$

Доказательство леммы 2.3.5. Доказательство состоит из трех шагов. Вначале мы покажем, что оператор $\mathbf{L}^{-1}(0)$ является правым регуляризатором для оператора $\mathbf{L}(\omega)$ в окрестности 0 с точностью до некоторого оператора, квадрат которого является компактным оператором. Затем мы построим операторы $\mathbf{R}_k(\omega)$, которые являются правыми регуляризаторами для $\mathbf{L}(\omega)$ в кольцевых сегментах $\theta^k = \{(\varphi, r) \in \theta : 2^{k-1} < r < 2^{k+1}\}$ $(k = 1, 2\dots)$ с точностью до некоторых операторов. Квадраты этих операторов компактны и имеют малые нормы. Наконец, на третьем шаге мы построим регуляризатор для $\mathbf{L}(\omega)$, используя операторы $\mathbf{L}^{-1}(0)$ и $\mathbf{R}_k(\omega)$.

1. В силу теоремы 2.1.1, существует ограниченный обратный оператор $\mathbf{L}^{-1}(0) : \mathcal{H}_a^{l,N}(\theta,\gamma) \to H_a^{l+2m,N}(\theta)$. Поэтому для любого $f \in \mathcal{E}_a^{l,N}(\theta,\gamma)$ мы имеем

$$\mathbf{L}(\omega)\mathbf{R}_0 f = \mathbf{L}(0)\eta_0^0\mathbf{L}^{-1}(0)(\eta_0^1 f) + \mathbf{T}_0^0(\omega)(\eta_0^1 f), \tag{2.3.77}$$

где

$$\mathbf{R}_0 = \eta_0^0 \mathbf{L}^{-1}(0)\eta_0^1, \qquad \mathbf{T}_0^0(\omega) = (\mathbf{L}(\omega) - \mathbf{L}(0))\,\eta_0^0 \mathbf{L}^{-1}(0),$$

функции η_0^1 и η_0^0, η_0^2 заданы по формулам (2.3.52) и (2.3.53) соответственно. Очевидно, $\operatorname{supp} \mathbf{T}_0^0(\omega)(\eta_0^1 f) \subset \overline{\theta} \cap B_{2R_0}$. Следовательно $\eta_0^2 \mathbf{T}_0^0(\omega)(\eta_0^1 f) = \mathbf{T}_0^0(\omega)(\eta_0^1 f)$.

Из эквивалентности норм в пространствах $E_a^k(\theta)$ и $H_a^k(\theta)$ для функций с носителями в $\overline{B_{2R_0}}$, теоремы 1.3.1 и следствия 1.3.1 о компактности операторов вложения в весовых пространствах, следует, что оператор $\mathbf{T}_0^0 \eta_0^1 : \mathcal{E}_a^{l,N}(\theta,\gamma) \to \mathcal{E}_a^{l,N}(\theta,\gamma)$ — компактный.

Используя формулу Лейбница и принимая во внимание различные растяжения и сжатия аргументов функции η_0^0, из (2.3.77) мы выводим

$$\mathbf{L}(\omega)\mathbf{R}_0 f = \eta_0^1 f + \mathbf{T}_0^1(\omega)(\eta_0^1 f) + \mathbf{T}_0^2(\eta_0^1 f), \tag{2.3.78}$$

где $\mathbf{T}_0^1(\omega)\eta_0^1 : \mathcal{E}_a^{l,N}(\theta,\gamma) \to \mathcal{E}_a^{l,N}(\theta,\gamma)$ — компактный оператор,

$$\mathbf{T}_0^2(\eta_0^1 f) =$$
$$= \left\{ 0,\ \sum_{k,\eta} \left(\eta_0^0(\chi_{\zeta\eta} r) - \eta_0^0(r)\right) \left(r^{-m_{\rho\mu}} (r\mathcal{D}_r)^q B_{\zeta\eta}^{10} v_k\right)(\varphi, \chi_{\zeta\eta} r)\big|_{\gamma_\rho} \right\}, \tag{2.3.79}$$

$v_k = (\mathbf{L}^{-1}(0)(\eta_0^1 f))_k$.

Очевидно, $\operatorname{supp} \mathbf{T}_0^1(\omega)(\eta_0^1 f)$, $\operatorname{supp} \mathbf{T}_0^2(\eta_0^1 f) \subset \overline{\theta} \cap B_{2R_0}$. Следовательно, $\eta_0^2 \mathbf{T}_0^1(\omega)(\eta_0^1 f) = \mathbf{T}_0^1(\omega)(\eta_0^1 f)$ и $\eta_0^2 \mathbf{T}_0^2(\omega)(\eta_0^1 f) = \mathbf{T}_0^2(\omega)(\eta_0^1 f)$. Поэтому (2.3.78) принимает вид

$$\mathbf{L}(\omega)\mathbf{R}_0 f = \eta_0^1 f + \eta_0^2 \mathbf{T}_0^1(\omega)(\eta_0^1 f) + \eta_0^2 \mathbf{T}_0^2(\eta_0^1 f). \tag{2.3.80}$$

Ниже мы докажем, что $(\eta_0^2 \mathbf{T}_0^2 \eta_0^1)^2 : \mathcal{E}_a^{l,N}(\theta,\gamma) \to \mathcal{E}_a^{l,N}(\theta,\gamma)$ — компактный оператор.

2. Построим теперь правые регуляризаторы $\mathbf{R}_k(\omega)$ для оператора $\mathbf{L}(\omega)$ в концевых сегментах θ^k.

2a. Введем неотрицательные функции $\xi_0^i = \xi_0^i(r)$ $(i = 0, 1, 2)$ такие, что

$$\left.\begin{aligned}
&\xi_0^i \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}_+),\ \max_i \max_{0\leqslant j\leqslant l+2m} \max_r \left|(\xi_0^i)^{(j)}(r)\right| \leqslant C,\\
&\xi_0^i(r) \leqslant 1\ (0\leqslant r),\ \operatorname{supp}\xi_0^t \subset (1/2,2)\ (t=0,1),\\
&\xi_0^0(r)\xi_0^1(r) \equiv \xi_0^1(r) \text{ для } r\in(1/2,2),\\
&\xi_0^2(r) = 1 \text{ для } r \in [R_0^{-1}/3, 3R_0],\ \operatorname{supp}\xi_0^2 \subset (R_0^{-1}/4, 4R_0),
\end{aligned}\right\} \tag{2.3.81}$$

где $C>1$ не зависит от ξ_0^i $(i=0,1,2)$, ср. (2.3.61).

Поскольку оператор $\mathbf{L}_0(\varepsilon^{-1}\omega)$ непрерывно зависит от $\omega \in S^{n-3}$, мы можем применить теорему C.8 для эллиптических задач с параметром $\lambda = \varepsilon^{-1}$. Поэтому для любых $0<\varepsilon\leqslant 1$ и $\omega\in S^{n-3}$ существует линейный ограниченный оператор (в норме $|||\cdot|||$) $\mathbf{R}_1(\varepsilon,\omega) : \mathcal{W}^{l,N}(\omega^0,\gamma^0) \to W^{l+2m,N}(\theta)$ такой, что

$$\mathbf{L}_0(\varepsilon^{-1}\omega)\xi_0^0\mathbf{R}_1(\varepsilon,\omega)(\xi_0^1 f) = \xi_0^1 f + \xi_0^2\mathbf{T}_1^1(\varepsilon,\omega)(\xi_0^1 f)$$
$$(f\in\mathcal{W}^{l,N}(\theta^0,\gamma^0)), \tag{2.3.82}$$

где $\theta^0 = \{(\varphi,r)\in\theta : 1/2<r<2\}$, $\gamma_\rho^0 = \{(\varphi,r)\in\gamma_\rho : 1/2<r<2\}$ и $\gamma^0 = \{\gamma_1^0,\gamma_2^0\}$, $\xi_0^2\mathbf{T}_1^1(\varepsilon,\omega)\xi_0^1 = \mathbf{T}_1^1(\varepsilon,\omega)\xi_0^1 : \mathcal{W}^{l,N}(\theta^0,\gamma^0)\to\mathcal{W}^{l,N}(\theta,\gamma)$ — компактный оператор и

$$|||\xi_0^2\mathbf{T}_1^1(\varepsilon,\omega)\xi_0^1||| \leqslant k_1C^2\varepsilon, \tag{2.3.83}$$

$k_1,k_2,\ldots>0$ не зависят от $\varepsilon>0$ и $\omega\in S^{n-3}$.

Из (2.3.82) мы получим

$$\mathbf{L}(\varepsilon^{-1}\omega)\xi_0^0\mathbf{R}_1(\varepsilon,\omega)(\varepsilon_0^1 f) =$$
$$= \xi_0^1 f + \xi_0^2\mathbf{T}_1^1(\varepsilon,\omega)(\xi_0^1 f) + \xi_0^2\mathbf{T}_1^2(\varepsilon,\omega)(\xi_0^1 f), \tag{2.3.84}$$

где

$$\xi_0^2\mathbf{T}_1^2(\varepsilon,\omega)(\xi_0^1 f) = \mathbf{T}_1^2(\varepsilon,\omega)(\xi_0^1 f) = \tag{2.3.85}$$
$$= \left\{0,\ r^{|\beta|-m_{\rho\mu}}\sum_{k,\beta,\eta}\left(\chi_{\zeta\eta}^{|\beta|-m_{\rho\mu}}(\varepsilon^{-1}\omega)^\beta(r\mathcal{D}_r)^q B_{\zeta\eta}^{1\beta}u_k\right)(\varphi,\chi_{\zeta\eta}r)\Big|_{\varphi=d_\rho}\right\},$$

$u=\xi_0^0\mathbf{R}_1(\varepsilon,\omega)(\xi_0^1 f)$, $u=(u_1,\ldots,u_N)$.

Очевидно,

$$|||\xi_0^2\mathbf{T}_1^2(\varepsilon,\omega)(\xi_0^1 f)|||_{\mathcal{W}^{l,N}(\theta,\gamma)} \leqslant k_2C^2|||f|||_{\mathcal{W}^{l,N}(\theta^0,\gamma^0)}. \tag{2.3.86}$$

2b. Перейдем к переменным $y' = \varepsilon^{-1}y$ и положим $\varepsilon = 2^{-k}$. Пусть ξ_k^i $(i=0,1,2,\ k=1,2,\dots)$ — неотрицательные функции такие, что

$$\left.\begin{aligned}
&\xi_k^i \in \dot C^\infty(\mathbb{R}_+),\ \xi_k^i(r) \leqslant 1\ (0 \leqslant r),\\
&\max_i \max_r \left|(\xi_k^i)^{(j)}(r)\right| \leqslant C_1 2^{-jk}\\
&\qquad\qquad\qquad \text{для всех } k=1,2,\dots, \text{ и } j=0,1,\dots,l+2m\\
&\sum_{k=1}^\infty \xi_k^1(r) = 1\ (r\in[2,+\infty)),\ \operatorname{supp}\xi_k^t \subset (2^{k-1},2^{k+1})\ (t=0,1),\\
&\xi_k^0(r)\xi_k^1(r) = \xi_k^1(r)\ (r\geqslant 0),\\
&\xi_k^2(r) = 1 \text{ для } r\in[R_0^{-1}2^k/3, 3R_0 2^k],\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \operatorname{supp}\xi_k^2 \subset (R_0^{-1}2^{k-2}, R_0 2^{k+2}),
\end{aligned}\right\} \tag{2.3.87}$$

где $C_1 > 0$ не зависит от k, ср. (2.3.74).

В силу (2.3.87), функции $\xi_0^i(r) = \xi_k^i(2^k r)$ удовлетворяют условиям (2.3.81) с константой $C = C_1$, которая не зависит от k. Обозначим $\theta^k = \{(\varphi,r)\in\theta : 2^{k-1} < r < 2^{k+1}\}$, $\gamma_\rho^k = \{(\varphi,r)\in\gamma_\rho : 2^{k-1} < r < 2^{k+1}\}$, $\gamma^k = \{\gamma_1^k,\gamma_2^k\}$.

Положим

$$(G_k v)(y) = v(2^k y) \qquad (y\in\theta), \tag{2.3.88}$$

$$(G_{\rho k} w)(y) = w(2^k y) \qquad (y\in\gamma_\rho) \tag{2.3.89}$$

для $k = 1,2,\dots$ и $\rho = 1,2$, ср. (2.3.47), (2.3.50). Очевидно, линейные операторы $G_k : W^t(\theta^k) \to W^t(\theta^0)$ и $G_{\rho k} : W^{t-1/2}(\gamma_\rho^k) \to W^{t-1/2}(\gamma_\rho^0)$ — ограниченные для каждого фиксированного числа $t\in\mathbb{N}$. Рассмотрим линейные ограниченные операторы $\mathbf{G}_k : W^{l+2m,N}(\theta^k) \to W^{l+2m,N}(\theta^0)$ и $\boldsymbol{\mathcal{G}}_k : \mathcal{W}^{l,N}(\theta^k,\gamma^k) \to \mathcal{W}^{l,N}(\theta^0,\gamma^0)$, заданные по формулам

$$\mathbf{G}_k v = (G_k v_1,\dots,G_k v_N), \tag{2.3.90}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_k f = \{G_k f_{01},\dots,G_k f_{0N}, G_{\rho k} f_{\rho 1},\dots,G_{\rho k} f_{\rho,mN}\}, \tag{2.3.91}$$

где $v = (v_1,\dots,v_N)$, $f = \{f_{01},\dots,f_{0N},f_{\rho 1},\dots,f_{\rho,mN}\}$.

Обозначим

$$\mathbf{R}_k(\omega) f = \xi_k^0 \mathbf{G}_k^{-1}\mathbf{R}_1(2^{-k},\omega)\boldsymbol{\mathcal{G}}_k(\xi_k^1\mathbf{F}_k f), \tag{2.3.92}$$

где $\mathbf{F}_k f = \{2^{k2m} f_{0j}, 2^{km_{\rho\mu}} f_{\rho\mu}\}$, а оператор $\mathbf{R}_1(\varepsilon, \omega)$ определен по формуле (2.3.82).

Поскольку

$$\mathbf{R}_k(\omega) f = \mathbf{G}_k^{-1} \xi_0^0 \mathbf{R}_1(2^{-k}, \omega) \xi_0^1 \boldsymbol{\mathcal{G}}_k \mathbf{F}_k f, \tag{2.3.93}$$

а оператор $\mathbf{R}_1(2^{-k}, \omega) : \mathcal{W}^{l,N}(\theta^0, \gamma^0) \to W^{l+2m,N}(\theta)$ — ограниченный в норме $|||\cdot|||$, в силу лемм 2.3.2, 2.3.3 мы получим

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{R}_k(\omega) f\|_{W^{l+2m,N}(\theta^k)} &\leqslant k_3 2^{-k(l+2m-1)} |||\mathbf{R}_1(2^{-k}, \omega) \xi_0^1 \boldsymbol{\mathcal{G}}_k \mathbf{F}_k f|||_{W^{l+2m,N}(\theta^0)} \leqslant \\
&\leqslant k_4 2^{-k(l+2m-1)} |||\boldsymbol{\mathcal{G}}_k \mathbf{F}_k f|||_{\mathcal{W}^{l,N}(\theta^0, \gamma^0)} \leqslant \\
&\leqslant k_5 2^{-k(l+2m-1)} \Bigg(2^{k(l-1)} \sum_j \|2^{k2m} f_{0j}\|_{W^l(\theta^k)} + \\
&+ 2^{k(l+2m-m_{\rho\mu}-1)} \sum_{\rho,\mu} \|2^{km_{\rho\mu}} f_{\rho\mu}\|_{W^{l+2m-m_{\rho\mu}-1/2}(\gamma_\rho^k)} \Bigg) \leqslant \\
&\leqslant k_6 \|f\|_{\mathcal{W}^{l,N}(\theta^k, \gamma^k)},
\end{aligned} \tag{2.3.94}$$

где $k_3, k_4, \ldots > 0$ не зависят от k и f.

Поэтому операторы $\mathbf{R}_k : \mathcal{W}^{l,N}(\theta^k, \gamma^k) \to W^{l+2m}(\theta^k)$ — ограниченные.

Переходя к переменным $y = 2^{-k} y'$ в операторе $\mathbf{L}(\omega)$, мы имеем

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}(\omega) v(y') &= \Bigg\{ \sum_t A_{jt}(\mathcal{D}_{y'}, \omega) v_t(y'), \sum_t \Bigg(B^0_{\rho\mu t}(\mathcal{D}_{y'}, \omega) v_t(y') + \\
&+ B^1_{\rho\mu t}(r', r'\mathcal{D}_{r'}, \omega) v_t(y') \Bigg)\Bigg|_{\gamma_\rho} \Bigg\} = \\
&= \Bigg\{ 2^{-k2m} \sum_t A_{jt}(\mathcal{D}_y, 2^k\omega) v_t(2^k y), 2^{-km_{\rho\mu}} \sum_t \big(B^0_{\rho\mu t}(\mathcal{D}_y, 2^k \omega) v_t(2^k y) + \\
&+ B^1_{\rho\mu t}(r, r\mathcal{D}_r, 2^k\omega) v_t(2^k y) \big) \Bigg|_{\gamma_\rho} \Bigg\} = \mathbf{F}_k^{-1} \mathbf{L}(2^k \omega) v(2^k y),
\end{aligned}$$

т.е. $\mathbf{L}(\omega) = \boldsymbol{\mathcal{G}}_k^{-1} \mathbf{F}_k^{-1} \mathbf{L}(2^k\omega) \mathbf{G}_k$. Следовательно,

$$\mathbf{L}(\omega) \mathbf{G}_k^{-1} = \boldsymbol{\mathcal{G}}_k^{-1} \mathbf{F}_k^{-1} \mathbf{L}(2^k \omega). \tag{2.3.95}$$

В силу (2.3.93), (2.3.95), (2.3.84) мы имеем

$$
\begin{gathered}
\mathbf{L}(\omega)\mathbf{R}_k(\omega)f = \boldsymbol{\mathcal{G}}_k^{-1}\mathbf{F}_k^{-1}\mathbf{L}(2^k\omega)\xi_0^0\mathbf{R}_1(2^{-k},\omega)\xi_0^1\boldsymbol{\mathcal{G}}_k\mathbf{F}_k f = \\
= \boldsymbol{\mathcal{G}}_k^{-1}\xi_0^1\boldsymbol{\mathcal{G}}_k f + \sum_{j=1,2}\boldsymbol{\mathcal{G}}_k^{-1}\mathbf{F}_k^{-1}\xi_0^2\mathbf{T}_1^j(2^{-k},\omega)\xi_0^1\boldsymbol{\mathcal{G}}_k\mathbf{F}_k f = \\
= \xi_k^1 f + \sum_{j=1,2}\xi_k^2\mathbf{T}_k^j(\omega)\xi_k^1 f, \quad (2.3.96)
\end{gathered}
$$

где

$$
\mathbf{T}_k^j(\omega) = \boldsymbol{\mathcal{G}}_k^{-1}\mathbf{F}_k^{-1}\mathbf{T}_1^j(2^{-k},\omega)\boldsymbol{\mathcal{G}}_k\mathbf{F}_k \qquad (j=1,2).
$$

Оценим теперь нормы операторов

$$
\boldsymbol{\mathcal{G}}_k\mathbf{F}_k, \boldsymbol{\mathcal{G}}_k^{-1}\mathbf{F}_k^{-1} : \mathcal{W}^{l,N}(\theta,\gamma) \to \mathcal{W}^{l,N}(\theta,\gamma).
$$

Заметим, что оператор $\boldsymbol{\mathcal{G}}_k\mathbf{F}_k$ действует из пространства $\mathcal{W}^{l,N}(\theta,\gamma)$ с обычной нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^{l,N}(\theta,\gamma)}$ в пространство $\mathcal{W}^{l,N}(\theta,\gamma)$ с нормой $|||\cdot|||_{\mathcal{W}^{l,N}(\theta,\gamma)}$, зависящей от параметра $\varepsilon^{-1} = 2^k$, см. часть 2b доказательства леммы 2.3.1. Обратно, оператор $\boldsymbol{\mathcal{G}}_k^{-1}\mathbf{F}_k^{-1}$ действует из пространства $\mathcal{W}^{l,N}(\theta,\gamma)$ с нормой $|||\cdot|||_{\mathcal{W}^{l,N}(\theta,\gamma)}$ в пространство $\mathcal{W}^{l,N}(\theta,\gamma)$ с нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^{l,N}(\theta,\gamma)}$. Из лемм 2.3.2, 2.3.3 следует, что

$$
\|\boldsymbol{\mathcal{G}}_k\mathbf{F}_k\| \leqslant k_7 2^{k(l+2m-1)}, \qquad (2.3.97)
$$

$$
\|\boldsymbol{\mathcal{G}}_k^{-1}\mathbf{F}_k^{-1}\| \leqslant k_7 2^{-k(l+2m-1)}. \qquad (2.3.98)
$$

Из (2.3.97), (2.3.98), (2.3.83) и из равенства

$$
\xi_k^2\mathbf{T}_k^j(\omega)\xi_k^1 = \boldsymbol{\mathcal{G}}_k^{-1}\mathbf{F}_k^{-1}\xi_0^2\mathbf{T}_1^j(2^{-k},\omega)\xi_0^1\boldsymbol{\mathcal{G}}_k\mathbf{F}_k \qquad (j=1,2)
$$

вытекает, что

$$
\|\xi_k^2\mathbf{T}_k^1(\omega)\xi_k^1\| \leqslant k_8 2^{-k}. \qquad (2.3.99)
$$

Аналогично из (2.3.97), (2.3.98), (2.3.86) мы получим

$$
\|\xi_k^2\mathbf{T}_k^2(\omega)\xi_k^1\| \leqslant k_9. \qquad (2.3.100)
$$

Более того, оператор $\xi_k^2\mathbf{T}_k^1(\omega)\xi_k^1 : \mathcal{W}^{l,N}(\theta^k,\gamma^k) \to \mathcal{W}^{l,N}(\theta,\gamma)$ — компактный.

2с. Рассмотрим теперь оператор $\xi_k^2\mathbf{T}_k^2(\omega)\xi_k^1\mathbf{T}_t^2(\omega)\xi_t^1$, где $t,k \in \mathbb{N}$.

Пусть $k_0 \in \mathbb{N}$ удовлетворяет условию $2^{k_0} > R_0$. Тогда для любых $t, k \in \mathbb{N}$ таких, что $|t-k| > k_0+3$, мы имеем

$$(2^{k-1}, 2^{k+1}) \cap (R_0^{-1} 2^{t-2}, R_0 2^{t+2}) = \varnothing. \tag{2.3.101}$$

В силу (2.3.85) $\operatorname{supp} \mathbf{T}_t^2(\omega)\xi_t^1 f \subset (R_0^{-1}2^{t-2}, R_0 2^{t+2})$. Поскольку $\operatorname{supp} \xi_k^1 \subset (2^{k-1}, 2^{k+1})$, из (2.3.101) следует, что

$$\xi_k^2 \mathbf{T}_k^2(\omega)\xi_k^1 \mathbf{T}_t^2(\omega)\xi_t^1 = 0 \qquad \text{для} \qquad |t-k| > k_0+3. \tag{2.3.102}$$

Определим функцию $\psi_0 \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ по формуле (2.3.55). Тогда, используя те же рассуждения, что и в доказательстве неравенства (2.3.6), мы получим

$$|||\xi_0^2 \mathbf{T}_1^2(2^{-k}, \omega)(\xi_0^1 f)|||_{\mathcal{W}^{l,N}(\theta,\gamma)} \leqslant k_{10} |||\psi_0 u|||_{W^{l+2m,N}(\theta_\sigma^2)}, \tag{2.3.103}$$

ср. также (2.3.56), где $u = \xi_0^0 \mathbf{R}_1(2^{-k}, \omega)(\xi_0^1 f)$, $\theta_\sigma^2 = \{(r,\varphi) \in \theta : R_0^{-1}/3 < r < 3R_0,\ d_1 + \sigma/2 < \varphi < d_2 - \sigma/2\}$.

Из неравенства (2.3.103), теоремы С.8, формулы Лейбница и интерполяционного неравенства (В.20) для всех $k = 1, 2, \dots$ мы имеем

$$\begin{aligned} &|||\xi_0^2 \mathbf{T}_1^2(2^{-k}, \omega)(\xi_0^1 f)|||_{\mathcal{W}^{l,N}(\theta,\gamma)} \leqslant \\ &\qquad \leqslant k_{11} |||\mathbf{A}(2^k\omega)(\psi_0 u)|||_{W^{l,N}(\theta_\sigma^2)} + |||\psi_0 u|||_{W^{l+2m-1,N}(\theta_\sigma^2)} \leqslant \\ &\qquad\qquad \leqslant k_{12} \left(|||\mathbf{A}(2^k\omega) u|||_{W^{l,N}(\theta_\sigma^2)} + |||u|||_{W^{l+2m-1,N}(\theta_\sigma^2)} \right). \end{aligned} \tag{2.3.104}$$

Из формул (2.3.82), (2.3.85) следует, что

$$\mathbf{A}(2^k\omega)(\xi_0^0 \mathbf{R}_1(2^{-k}, \omega)(\xi_0^1 g)) = \xi_0^2 \mathbf{T}_1^3(2^{-k}, \omega)(\xi_0^1 g), \tag{2.3.105}$$

где $g = \boldsymbol{\mathcal{G}}_k \mathbf{F}_k \boldsymbol{\mathcal{G}}_t^{-1} \mathbf{F}_t^{-1} \mathbf{T}_1^2(2^{-t}, \omega)(\xi_0^1 f)$, а операторы
$\mathbf{T}_1^3(2^{-k}, \omega) : \mathcal{W}^{l,N}(\theta^0, \gamma^0) \to W^{l,N}(\theta)$ и
$\mathbf{T}_1^4(2^{-k}, \omega) : \mathcal{W}^{l,N}(\theta^0, \gamma^0) \to \prod\limits_{\rho,\mu} W^{l+2m-m_{\rho\mu}-1/2}(\gamma)$ заданы по формуле

$$\mathbf{T}_1^1(2^{-k}, \omega) f = (\mathbf{T}_1^3(2^{-k}, \omega) f, \mathbf{T}_1^4(2^{-k}, \omega) f),$$

$k, t \in \mathbb{N}$. Очевидно, оператор $\xi_0^2 \mathbf{T}_1^3(2^{-k}, \omega)\xi_0^1 : \mathcal{W}^{l,N}(\theta^0, \gamma^0) \to \mathcal{W}^{l,N}(\theta)$ — компактный.

Подставляя g вместо f и $w = \xi_0^0 \mathbf{R}_1(2^{-k}, \omega)(\xi_0^1 g)$ вместо u в (2.3.104), в силу (2.3.105) мы имеем

$$\begin{gathered}
|||\xi_0^2 \mathbf{T}_1^2(2^{-k}, \omega)\xi_0^1 \boldsymbol{\mathcal{G}}_k \mathbf{F}_k \boldsymbol{\mathcal{G}}_t^{-1} \mathbf{F}_t^{-1} \mathbf{T}_1^2(2^{-t}, \omega)(\xi_0^1 f)|||_{\mathcal{W}^{l,N}(\theta,\gamma)} \leqslant \\
\leqslant k_{12} \Bigg(|||\xi_0^2 \mathbf{T}_1^3(2^{-k}, \omega)(\xi_0^1 g)|||_{W^{l,N}(\theta_\sigma^2)} + \\
+ |||\xi_0^0 \mathbf{R}_1(2^{-k}, \omega)(\xi_0^1 g)|||_{W^{l+2m-1,N}(\theta_\sigma^2)} \Bigg) \quad (2.3.106)
\end{gathered}$$

для любого $\omega \in S^{n-3}$ и $k, t \in \mathbb{N}$ таких, что $|t - k| \leqslant k_0 + 3$.

Из неравенства (2.3.106), компактности оператора $\xi_0^2 \mathbf{T}_1^3(2^{-k}, \omega)\xi_0^1 : \mathcal{W}^{l,N}(\theta^0, \gamma^0) \to W^{l,N}(\theta)$ и компактности оператора вложения $W^{l+2m,N}(\theta_\sigma^2)$ в $W^{l+2m-1}(\theta_\sigma^2)$ следует, что оператор

$$\xi_0^2 \mathbf{T}_1^2(2^{-k}, \omega)\xi_0^1 \boldsymbol{\mathcal{G}}_k \mathbf{F}_k \boldsymbol{\mathcal{G}}_t^{-1} \mathbf{F}_t^{-1} \mathbf{T}_1^2(2^{-t}, \omega)\xi_0^1 : \mathcal{W}^{l,N}(\theta^0, \gamma^0) \to \mathcal{W}^{l,N}(\theta, \gamma) \; -$$

компактный. Поэтому операторы

$$\xi_k^2 \mathbf{T}_k^2(\omega)\xi_k^1 \mathbf{T}_t^2(\omega)\xi_t^1 : \mathcal{W}^{l,N}(\theta^t, \gamma^t) \to \mathcal{W}^{l,N}(\theta, \gamma) \; -$$

компактные.

Оценим теперь норму оператора $\xi_k^2 \mathbf{T}_k^2(\omega)\xi_k^1 \mathbf{T}_t^2(\omega)\xi_t^1$ при $|t-k| \leqslant k_0+3$. Из (2.3.106), (2.3.97), (2.3.98), (2.3.83), (2.3.86) и интерполяционного неравенства (B.20) выводим

$$\|\xi_k^2 \mathbf{T}_k^2(\omega)\xi_k^1 \mathbf{T}_t^2(\omega)\xi_t^1\| \leqslant k_{13} 2^{-k} \qquad \text{при} \qquad |t - k| \leqslant k_0 + 3. \quad (2.3.107)$$

Аналогично равенству (2.3.102) мы можем показать, что

$$\xi_k^2 \mathbf{T}_k^i(\omega)\xi_k^1 \mathbf{T}_t^j(\omega)\xi_t^1 = 0 \qquad \text{при} \quad i, j = 1, 2; \quad |t - k| > k_0 + 3, \quad (2.3.108)$$

$$\eta_0^2 \mathbf{T}_0^i(\omega)\eta_0^1 \mathbf{T}_t^j(\omega)\xi_t^1 = 0 \qquad \text{при} \quad i, j = 1, 2; \quad t > k_0 + 3. \quad (2.3.109)$$

Очевидно, справедливо следующее неравенство:

$$k_{14} 2^{ak} \|w\|_{W^s(\theta^k)} \leqslant \|w\|_{E_a^s(\theta^k)} \leqslant k_{15} 2^{ak} \|w\|_{W^s(\theta^k)}.$$

Из этого неравенства, а также из неравенств (2.3.94), (2.3.97), (2.3.98) и леммы 1.2.2 следует, что операторы $\mathbf{R}_k(\omega) : \mathcal{E}_a^{l,N}(\theta^k, \gamma^k) \to E_a^{l+2m,N}(\theta^k)$

и $\xi_k^2\mathbf{T}_k^2(\omega)\xi_k^1 : \mathcal{E}_a^{l,N}(\theta^k,\gamma^k) \to \mathcal{E}_a^{l,N}(\theta,\gamma)$ — равномерно ограничены относительно $\omega \in S^{n-3}$, а операторы $\xi_k^2\mathbf{T}_k^1(\omega)\xi_k^1 : \mathcal{E}_a^{l,N}(\theta^k,\gamma^k) \to \mathcal{E}_a^{l,N}(\theta,\gamma)$, $\xi_k^2\mathbf{T}_k^2(\omega)\xi_k^1\mathbf{T}_t^2(\omega)\xi_t^1 : \mathcal{E}_a^{l,N}(\theta^t,\gamma^t) \to \mathcal{E}_a^{l,N}(\theta,\gamma)$ — компактные. При этом в соответствующих пространствах выполняются неравенства (2.3.99), (2.3.100), (2.3.107).

Аналогично можно доказать, что операторы $\left(\eta_0^2\mathbf{T}_0^2\eta_0^1\right)^2$, $\eta_0^2\mathbf{T}_0^2(\omega)\eta_0^1\mathbf{T}_k^2(\omega)\xi_k^1$, $\xi_k^2\mathbf{T}_k^2(\omega)\xi_k^1\mathbf{T}_0^2(\omega)\eta_0^1 : \mathcal{E}_a^{l,N}(\theta,\gamma) \to \mathcal{E}_a^{l,N}(\theta,\gamma)$ — компактны.

3. Наконец мы построим правый регуляризатор $\mathbf{R}(\omega)$ для оператора $\mathbf{L}(\omega)$.

3a. Положим $\eta_0^1(r) = 1 - \sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k^1(r)$. Очевидно, функция η_0^1 удовлетворяет условиям (2.3.52). Обозначим

$$\mathbf{G}(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{R}_k(\omega). \tag{2.3.110}$$

Докажем, что операторный ряд в правой части (2.3.110) сильно сходится.

Очевидно, для всех $M_1, M_2 \in \mathbb{N}$, $M_1 < M_2$, мы имеем

$$\left\|\sum_{k=M_1}^{M_2}\mathbf{R}_k(\omega)f\right\|^2_{E_a^{l+2m,N}(\theta)} = \left(\sum_k \mathbf{R}_k(\omega)f, \sum_t \mathbf{R}_t(\omega)f\right)_{E_a^{l+2m,N}(\theta)},$$

где $f \in \mathcal{E}_a^{l,N}(\theta,\gamma)$ — произвольная фиксированная функция.

Из формул (2.3.87), (2.3.92) следует, что

$$(\mathbf{R}_k(\omega)f, \mathbf{R}_t(\omega)f)_{E_a^{l+2m,N}(\theta)} = 0 \qquad \text{для} \qquad |t-k| > 1.$$

Поэтому, используя равномерную ограниченность операторов $\mathbf{R}_k(\omega)$ относительно $\omega \in S^{n-3}$, мы имеем

$$\left\|\sum_k \mathbf{R}_k(\omega)f\right\|^2_{E_a^{l+2m,N}(\theta)} \leqslant 3\sum_k \|\mathbf{R}_k(\omega)f\|^2_{E_a^{l+2m,N}(\theta)} \leqslant$$
$$\leqslant k_{16}\sum_k \|f\|^2_{E_a^{l+2m,N}(\theta^k)} \leqslant k_{17}\|f\|^2_{E_a^{l+2m,N}(\bigcup\limits_k \theta^k)},$$

где $k = M_1, \ldots, M_2$. Правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $M_1 \to \infty$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\mathbf{R}_k(\omega)f$ сходится к $\mathbf{G}(\omega)f$, где $\mathbf{G}(\omega) : \mathcal{E}_a^{l,N}(\theta,\gamma) \to E_a^{l+2m,N}(\theta)$ — линейный ограниченный оператор.

3b. Из (2.3.80), (2.3.96) следует, что

$$\mathbf{L}(\omega)\mathbf{G}(\omega) = \mathbf{I} + \mathbf{T}_{p1}(\omega) - \mathbf{T}_{p2}(\omega), \tag{2.3.111}$$

где

$$\mathbf{T}_{p1} = \eta_0^2 \mathbf{T}_0^1(\omega)\eta_0^1 + \eta_0^2 \mathbf{T}_0^2(\omega)\eta_0^1 + \sum_{k=1}^{p} \xi_k^2(\mathbf{T}_k^1(\omega) + \mathbf{T}_k^2(\omega))\xi_k^1, \tag{2.3.112}$$

$$\mathbf{T}_{p2} = -\sum_{k=p+1}^{\infty} \xi_k^2(\mathbf{T}_k^1(\omega) + \mathbf{T}_k^2(\omega))\xi_k^1. \tag{2.3.113}$$

Оператор $\mathbf{T}_{p1}(\omega)$ состоит из суммы конечного числа операторов таких, что или они компактны, или их произведение — компактный оператор. Следовательно оператор $(\mathbf{T}_{p1}(\omega))^2 : \mathcal{E}_a^{l,N}(\theta,\gamma) \to \mathcal{E}_a^{l,N}(\theta,\gamma)$ — компактный для любых $p \geqslant 1$ и $\omega \in S^{n-3}$.

Очевидно, для любых $t, k \in \mathbb{N}$ таких, что $|t-k| > 2k_0 + 4$, мы имеем

$$\left(R_0^{-1}2^{k-2}, R_0 2^{k+2}\right) \cap \left(R_0^{-1}2^{t-2}, R_0 2^{t+2}\right) = \varnothing, \tag{2.3.114}$$

ср. (2.3.101).

В силу (2.3.99), (2.3.100), (2.3.114) ряд в правой части (2.3.113) сходится сильно и равномерно по $\omega \in S^{n-3}$ и определяет ограниченный оператор $\mathbf{T}_{p2}(\omega) : \mathcal{E}_a^{l,N}(\theta,\gamma) \to \mathcal{E}_a^{l,N}(\theta,\gamma)$. Более того, $\|\mathbf{T}_{p2}(\omega)\| \leqslant k_{18}$, где $k_{18} > 0$ не зависит от ω. Из (2.3.99), (2.3.100), (2.3.107) и (2.3.108) следует, что для любого $\delta > 0$ найдется $p > 1$ такое, что

$$\| \left(\mathbf{T}_{p2}(\omega)\right)^2 \| < \delta \qquad \text{для} \qquad \omega \in S^{n-3}.$$

Поэтому мы можем выбрать $p > 1$ так, что ряд Неймана $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\mathbf{T}_{p2}(\omega)\right)^k$ сходится по операторной норме равномерно относительно $\omega \in S^{n-3}$. Следовательно, существует ограниченный обратный оператор

$$\left(\mathbf{I} - \mathbf{T}_{p2}(\omega)\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\mathbf{T}_{p2}(\omega)\right)^k.$$

3с. Умножая (2.3.111) на $(\mathbf{I}-\mathbf{T}_{p2}(\omega))^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{T}_{p1}(\omega))$, мы получим

$$\begin{gathered}
\mathbf{L}(\omega)\mathbf{G}(\omega)(\mathbf{I}-\mathbf{T}_{p2}(\omega))^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{T}_{p1}(\omega)) = \\
= \left[\mathbf{I}+\mathbf{T}_{p1}(\omega)\sum_{k=0}^{\infty}(\mathbf{T}_{p2}(\omega))^k\right](\mathbf{I}-\mathbf{T}_{p1}(\omega)) = \\
= \left[\mathbf{I}+\mathbf{T}_{p1}(\omega)+\mathbf{T}_{p1}(\omega)\mathbf{T}_{p2}(\omega)(\mathbf{I}-\mathbf{T}_{p2}(\omega))^{-1}\right](\mathbf{I}-\mathbf{T}_{p1}(\omega)) = \\
= \mathbf{I}-(\mathbf{T}_{p1}(\omega))^2+\mathbf{T}_{p1}(\omega)\mathbf{T}_{p2}(\omega)(\mathbf{I}-\mathbf{T}_{p2}(\omega))^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{T}_{p1}(\omega)).
\end{gathered}$$

Мы доказали, что оператор $(\mathbf{T}_{p1}(\omega))^2$ — компактный. С другой стороны, в силу (2.3.108), (2.3.109) оператор $\mathbf{T}_{p1}(\omega)\mathbf{T}_{p2}(\omega)$ состоит из конечной суммы компактных операторов. Поэтому оператор $\mathbf{T}_{p1}(\omega)\mathbf{T}_{p2}(\omega)$ $(\mathbf{I}-\mathbf{T}_{p2}(\omega))^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{T}_{p1}(\omega))$ также компактный. Мы доказали, что оператор $\mathbf{R}(\omega)=\mathbf{G}(\omega)(\mathbf{I}-\mathbf{T}_{p2}(\omega))^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{T}_{p1}(\omega))$ является правым регуляризатором оператора $\mathbf{L}(\omega)$. $\square$

Разрешимость локальных эллиптических задач в двугранных углах

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (2.3.1) с краевыми условиями (2.3.2) для $\mathbf{B}_\rho^1 = 0$ $(\rho = 1, 2)$.

Предположим, что выполняются условия 2.3.1, 2.3.2.

Определим линейный ограниченный оператор $\mathbf{L}_0(\mathcal{D}_z) : H_a^{l+2m,N}(\Theta) \to \mathcal{H}_a^{l,N}(\Theta,\Gamma)$, соответствующий «локальной» эллиптической задаче, по формуле (2.3.9).

Наряду с оператором $\mathbf{L}_0(\mathcal{D}_z)$ мы определим линейный ограниченный оператор $\mathbf{L}_0(\omega) : E_a^{l+2m,N}(\theta) \to \mathcal{E}_a^{l,N}(\theta,\gamma)$, заданный по формуле (2.3.17).

Из теоремы 2.3.1 мы получим следующее утверждение.

Теорема 2.3.3. *Пусть выполняются условия* 2.3.1, 2.3.2. *Тогда отображение* $\mathbf{L}_0(\mathcal{D}_z) : H_a^{l+2m,N}(\Theta) \to \mathcal{H}_a^{l,N}(\Theta,\Gamma)$ *является изоморфизмом в том и только в том случае, когда отображение* $\mathbf{L}_0(\omega) : E_a^{l+2m,N}(\theta) \to \mathcal{E}_a^{l,N}(\theta,\gamma)$ *— изоморфизм для всех* $\omega \in S^{n-3}$.

Рассмотрим оператор-функцию

$$\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}_0(\lambda) \in \mathcal{B}(W^{l+2m,N}(d_1,d_2),\ \mathcal{W}^{l,N}[d_1,d_2]),$$

заданную по формуле (2.1.21).

В § 2.1 было доказано, что: (a) для всех $\lambda \in \mathbb{C}$, за исключением счетного множества собственных значений, оператор $\widehat{\mathbf{L}}_0(\lambda)$ имеет ограниченный обратный $\widehat{\mathbf{R}}_0(\lambda) = \widehat{\mathbf{L}}_0^{-1}(\lambda) : \mathcal{W}^{l,N}[d_1, d_2] \to W^{l+2m,N}(d_1, d_2)$; (b) оператор-функция $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{R}}_0(\lambda) \in \mathcal{B}\left((\mathcal{W}^{l,N}[d_1, d_2],\ W^{l+2m,N}(d_1, d_2)\right)$ — конечно-мероморфная фредгольмова оператор-функция в $\mathbb{C}$.

Из лемм 2.3.1, 2.3.5 и теоремы 2.3.2 получим следующие результаты для «локальных» эллиптических задач.

Лемма 2.3.6. *Пусть выполняются условия* 2.3.1, 2.3.2, *и пусть прямая* $\operatorname{Im}\lambda = h = a + 1 - l - 2m$ *не содержит собственных значений оператор-функции* $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}_0(\lambda)$. *Тогда для всех* $v \in E_a^{l+2m,N}(\theta)$ *и* $\omega \in S^{n-3}$ *мы имеем априорную оценку*

$$\|v\|_{E_a^{l+2m,N}(\theta)} \leqslant c_0 \left(\|\mathbf{L}_0(\omega)v\|_{\mathcal{E}_a^{l,N}(\theta,\gamma)} + \|v\|_{E_a^{l+2m-1,N}(\theta\cap B_R)} \right), \qquad (2.3.115)$$

где $c_0 > 0$ *и* $R > 0$ *не зависят от* v *и* ω.

Лемма 2.3.7. *Пусть выполняются условия леммы* 2.3.6. *Тогда для любого* $\omega \in S^{n-3}$ *оператор* $\mathbf{L}_0(\omega)$ *имеет правый регуляризатор* $\mathbf{R}_0(\omega) : \mathcal{E}_a^{l,N}(\theta, \gamma) \to E_a^{l+2m,N}(\theta)$.

Теорема 2.3.4. *Пусть выполняются условия* 2.3.1, 2.3.2. *Тогда оператор* $\mathbf{L}_0(\omega) : E_a^{l+2m,N}(\theta) \to \mathcal{E}_a^{l,N}(\theta, \gamma)$ *— фредгольмов для любого* $\omega \in S^{n-3}$ *в том и только в том случае, когда прямая* $\operatorname{Im}\lambda = h$ *не содержит собственных значений оператор-функции* $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}_0(\lambda)$.

Пример изоморфизма $\mathbf{L}(\omega)$

Пример 2.3.2. Рассмотрим нелокальную задачу

$$-\Delta v(x) = f_0(x) \qquad (x \in \Theta), \qquad (2.3.116)$$

$$\left.\begin{aligned} v(\varphi, r, z)\big|_{\Gamma_1} - \alpha_1 v(\varphi + \beta/2, r, z)\big|_{\Gamma_1} = f_1(x) \quad (x \in \Gamma_1), \\ v(\varphi, r, z)\big|_{\Gamma_2} - \alpha_2 v(\varphi - \beta/2, r, z)\big|_{\Gamma_2} = f_2(x) \quad (x \in \Gamma_2). \end{aligned}\right\} \qquad (2.3.117)$$

Здесь $\Theta = \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < \varphi < \beta, 0 < r, z \in \mathbb{R}\}$ — трехмерный двугранный угол, r, φ — полярные координаты y, $\Gamma_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \varphi = 0,$

$0 < r,\ z \in \mathbb{R}\}$ и $\Gamma_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \varphi = \beta,\ 0 < r,\ z \in \mathbb{R}\}$ — полуплоскости, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Нелокальные условия (2.3.117) означают, что значения неизвестной функции v на сторонах Γ_1 и Γ_2 связаны со значениями v на полуплоскости $\{x \in \mathbb{R}^2 : \varphi = \beta/2, 0 < r, z \in \mathbb{R}\}$, лежащей внутри угла Θ. Нелокальные преобразования являются только вращениями в плоскости y, в то же время преобразования по переменным r и z отсутствуют.

Определим линейный ограниченный оператор

$$\mathbf{L}(\mathcal{D}_z) : H^2_a(\Theta) \to \mathcal{H}^0_a(\Theta, \Gamma) = H^0_a(\Theta) \times H^{3/2}_a(\Gamma_1) \times H^{3/2}_a(\Gamma_2)$$

по формуле

$$\mathbf{L}(\mathcal{D}_z)v = \Big(-\Delta v,\ \ v(\varphi, r, z)\big|_{\Gamma_1} - \alpha_1 v(\varphi + \beta/2, r, z)\big|_{\Gamma_1}, \\ v(\varphi, r, z)\big|_{\Gamma_2} - \alpha_2 v(\varphi - \beta/2, r, z)\big|_{\Gamma_2}\Big),$$

ср. (2.3.8). Наряду с оператором $\mathbf{L}(\mathcal{D}_z)$ мы введем линейный ограниченный оператор

$$\mathbf{L}(\omega) : E^2_a(\theta) \to \mathcal{E}^0_a(\theta, \gamma) = E^0_a(\theta) \times E^{3/2}_a(\gamma_1) \times E^{3/2}_a(\gamma_2),$$

заданный по формуле

$$\mathbf{L}(\omega)V = \Big(-\Delta_y V + V,\ \ V(\varphi, r)\big|_{\gamma_1} - \alpha_1 V(\varphi + \beta/2, r)\big|_{\gamma_1}, \\ V(\varphi, r)\big|_{\gamma_2} - \alpha_2 V(\varphi - \beta/2, r)\big|_{\gamma_2}\Big),$$

ср. (2.3.16), где $\omega = \pm 1$, $\theta = \{y \in \mathbb{R}^2 : 0 < \varphi < \beta,\ 0 < r\}$, $\gamma_1 = \{y \in \mathbb{R}^2 : \varphi = 0,\ 0 < r\}$, $\gamma_2 = \{y \in \mathbb{R}^2 : \varphi = \beta,\ 0 < r\}$. Оператор-функция $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda) \in \mathcal{B}(W^2(0, \beta), \mathcal{W}^0[0, \beta] = L_2(0, \beta) \times \mathbb{C}^2)$, соответствующая оператору $\mathbf{L}(\omega)$, имеет вид

$$\widehat{\mathbf{L}}(\lambda)u = \left(-u_{\varphi\varphi} + \lambda^2 u,\ \ u\big|_{\varphi=0} - \alpha_1 u\big|_{\varphi=\beta/2},\ \ u\big|_{\varphi=\beta} - \alpha_2 u\big|_{\varphi=\beta/2} \right),$$

ср. (2.3.45).

Докажем, что оператор $\mathbf{L}(\omega)$ является изоморфизмом, если $0 \leqslant a \leqslant 2$, $0 < |\alpha_1 + \alpha_2| < 2$, и $0 < \beta < 2 \operatorname{arctg} \sqrt{4(\alpha_1 + \alpha_2)^{-2} - 1}$. Тогда, по теореме 2.3.1, оператор $\mathbf{L}(\mathcal{D}_z)$ — изоморфизм.

Доказательство состоит из трех частей. Во-первых, мы докажем, что операторное уравнение

$$\mathcal{A}_\alpha w = f_0 \tag{2.3.118}$$

имеет единственное решение для любого $f_0 \in L_2(\theta)$, где $\mathcal{A}_\alpha : \mathcal{D}(\mathcal{A}_\alpha) \subset L_2(\theta) \to L_2(\theta)$ — неограниченный линейный оператор, действующий в пространстве обобщенных функций $\mathcal{D}'(\theta)$ по формуле $\mathcal{A}_\alpha w = -\Delta w + w$, $w \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\alpha) = \left\{ w \in W_\alpha^1(\theta) : \mathcal{A}_\alpha w \in L_2(\theta) \right\}$,

$$W_\alpha^1(\theta) = \Big\{ w \in W^1(\theta) : w(\varphi, r)\big|_{\gamma_1} - \alpha_1 w(\varphi + \beta/2, r)\big|_{\gamma_1} = 0, \\ w(\varphi, r)\big|_{\gamma_2} - \alpha_2 w(\varphi - \beta/2, r)\big|_{\gamma_2} = 0 \Big\}.$$

Доказательство однозначной разрешимости уравнения (2.3.118) основано на сведении этого уравнения к эллиптическому функционально-дифференциальному уравнению. Во-вторых, мы покажем, что каждое решение w уравнения (2.3.118) принадлежит пространству $H_1^2(\theta \cap B_d(0))$ для любого $d > 0$. Наконец, мы докажем, что уравнение

$$\mathbf{L}(\omega) V = f \tag{2.3.119}$$

имеет единственное решение $V \in E_a^2(\theta)$ для любого $f = (f_0, f_1, f_2) \in \mathcal{E}_a^0(\theta, \gamma)$.

1. Покажем, что уравнение (2.3.118) имеет единственное решение $w \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\alpha)$ для любого $f_0 \in L_2(\theta)$.

1а. Мы сведем уравнение (2.3.118) к функционально-дифференциальному уравнению. Рассмотрим функциональный оператор $R : L_2(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2)$ заданный по формуле

$$Ru = u(\varphi, r) + \alpha_1 u(\varphi + \beta/2, r) + \alpha_2 u(\varphi - \beta/2, r).$$

Обозначим через $I_\theta : L_2(\theta) \to L_2(\mathbb{R}^2)$ оператор продолжения функций из $Ł_2(\theta)$ нулем в $\mathbb{R}^2 \setminus \theta$ и через $P_\theta : L_2(\mathbb{R}^2) \to L_2(\theta)$ оператор сужения функций из $L_2(\mathbb{R}^2)$ на θ. Пусть

$$R_\theta = P_\theta R I_\theta.$$

Оператор R_θ имеет ограниченный обратный

$$R_\theta^{-1} = P_\theta R' I_\theta,$$

где $R'u(y) = (u(\varphi, r) - \alpha_1 u(\varphi + \beta/2, r) - \alpha_2 u(\varphi - \beta/2, r))/(1 - \alpha_1\alpha_2)$, при условии $\alpha_1\alpha_2 \neq 1$ (что верно, т.к. $|\alpha_1 + \alpha_2| < 2$.)

Действительно,

$$\left.\begin{aligned} &R_\theta u(y) = u(\varphi, r) + \alpha_1 u(\varphi + \beta/2, r) \\ &\qquad\qquad \text{для } y \in \theta_1 = \{(\varphi, r) : 0 < \varphi < \beta/2,\ 0 < r\}, \\ &R_\theta u(y) = u(\varphi, r) + \alpha_2 u(\varphi - \beta/2, r) \\ &\qquad\qquad \text{для } y \in \theta_2 = \{(\varphi, r) : \beta/2 < \varphi < \beta,\ 0 < r\}. \end{aligned}\right\} \tag{2.3.120}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} R_\theta^{-1} R_\theta u(y) = (u(\varphi, r) + \alpha_1 u(\varphi + \beta/2, r) - \alpha_1 u(\varphi + \beta/2, r) - \\ - \alpha_1\alpha_2 u(\varphi, r))/(1 - \alpha_1\alpha_2) = u(\varphi, r) \quad \text{для} \quad y \in \theta_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_\theta^{-1} R_\theta u(y) = (u(\varphi, r) + \alpha_2 u(\varphi - \beta/2, r) - \alpha_2 u(\varphi - \beta/2, r) - \\ - \alpha_1\alpha_2 u(\varphi, r))/(1 - \alpha_1\alpha_2) = u(\varphi, r) \quad \text{для} \quad y \in \theta_2. \end{aligned}$$

Таким образом, $R_\theta^{-1} R_\theta u(y) = u(y)$ для $y \in \theta$. Аналогично $R_\theta R_\vartheta^{-1} u(y) = u(y)$ для $y \in \theta$.

Более того, аналогично теореме 1.2.1 в [12] легко видеть, что операторы $R_\theta : \mathring{W}^1(\theta) \to W_\alpha^1(\theta)$ и $R_\theta : \mathring{W}^1(\theta \cap B_d) \to W_\alpha^1(\theta \cap B_d)$ являются изоморфизмами для всех $d > 0$, где

$$\mathring{W}^1(\theta) = \left\{u \in W^1(\theta) : u\big|_{\gamma_1} = 0,\ u\big|_{\gamma_2} = 0\right\},$$
$$\mathring{W}^1(\theta \cap B_d) = \left\{u \in W^1(\theta \cap B_d) : u\big|_{\gamma_1} = 0,\ u\big|_{\gamma_2} = 0\right\}.$$

1b. Таким образом, уравнение (2.3.118) эквивалентно следующему:

$$\mathcal{A}_R u = f_0, \tag{2.3.121}$$

где $\mathcal{A}_R : \mathcal{D}(\mathcal{A}_R) \subset L_2(\theta) \to L_2(\theta)$ — неограниченный оператор, действующий в пространстве обобщенных функций $\mathcal{D}'(\theta)$ по формуле

$$\mathcal{A}_R u = (-\Delta + I) R_\theta u \qquad \left(u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_R) = \left\{u \in \mathring{W}^1(\theta) : \mathcal{A}_R u \in L_2(\theta)\right\}\right).$$

Аналогично теореме 1.3.3 в [12] можно показать, что уравнение (2.3.121) имеет единственное решение $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_R)$ для любого $f_0 \in L_2(\theta)$. Однако для удобства читателя мы изложим это доказательство.

Введем полуторалинейную форму $b_R[u,v]$ с областью определения $\mathcal{D}(b_R) = \mathring{W}^1(\theta)$ по формуле

$$b_R[u,v] = \int\limits_\theta \left(\sum_{i=1,2} (R_\theta u)_{y_i} \overline{v_{y_i}} + R_\theta u \overline{v} \right) dy.$$

Очевидно,

$$R_\theta u_{y_i} = (R_\theta u)_{y_i} \qquad (u \in \mathring{W}^1(\theta)). \tag{2.3.122}$$

Поэтому из неравенства Коши—Буняковского следует, что

$$|b_R[u,v]| \leqslant k_1 \|u\|_{\mathring{W}^1(\theta)} \|v\|_{\mathring{W}^1(\theta)}. \tag{2.3.123}$$

Введем изоморфизм $U_i : L_2(\theta) \to L_2(\theta_1)$ по формуле

$$(U_1 u)_i(y) = u(\varphi + (i-1)\beta/2, r) \qquad (y \in \theta_1,\ i = 1,2).$$

Пусть $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда симметрическая часть матрицы R_1 имеет вид

$$(R_1 + R_1^*)/2 = \begin{pmatrix} 1 & (\alpha_1+\alpha_2)/2 \\ (\alpha_1+\alpha_2)/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $0 < |\alpha_1 + \alpha_2| < 2$, матрица $(R_1 + R_1^*)/2$ положительно определена.

Поэтому в силу (2.3.122), мы получим

$$\operatorname{Re} b_R[u] =$$
$$= \int\limits_{\theta_1} \left\{ \sum_i \left(\frac{R_1 + R_1^*}{2} (U_1 u_{y_i}),\ U_1 u_{y_i} \right)_{\mathbb{C}^2} + \left(\frac{R_1 + R_1^*}{2} U_1 u,\ U_1 u \right)_{\mathbb{C}^2} \right\} dy \geqslant$$
$$\geqslant k_2 \int\limits_{\theta_1} \left\{ \sum_i (U_1 u_{y_i},\ U_1 u_{y_i})_{\mathbb{C}^2} + (U_1 u,\ U_1 u)_{\mathbb{C}^2} \right\} dy =$$
$$= k_2 \|u\|^2_{\mathring{W}^1(\theta)}. \tag{2.3.124}$$

Из (2.3.123), (2.3.124) следует, что b_R — замкнутая секториальная форма в $L_2(\theta)$ с областью определения $\mathcal{D}(b_R) = \mathring{W}^1(\theta)$ и вершиной $\gamma = k_2 > 0$. Поэтому в силу теоремы A.13 (b) с $\varkappa = \gamma$ m-секториальный оператор $\mathcal{A}_R = B_{b_R}$, ассоциированный с формой b_R, имеет ограниченный обратный $\mathcal{A}_R^{-1} : L_2(\theta) \to \mathring{W}^1(\theta)$.

Следовательно, уравнение (2.3.118) имеет единственное решение $w = R_\theta \mathcal{A}_R^{-1} f_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\alpha)$ для любого $f_0 \in L_2(\theta)$.

2. Докажем теперь, что если $w \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\alpha)$ — решение уравнения (2.3.118), то $w \in H_1^2(\theta \cap B_d)$ для любого $d > 0$.

2a. Обозначим $\theta^{sj} = \left\{y \in \theta : 2^{s-j} < r < 2^{s+j}\right\}$, $\gamma_\rho^{sj} = \{y \in \gamma_\rho : 2^{s-j} < r < 2^{s+j}\}$, $\gamma_3 = \{y : \varphi = \beta/2,\ 0 < r\}$, где $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $j = 1, 2, 3$ и $\rho = 1, 2, 3$. Очевидно, $\theta^{s1} = \theta^s$ и $\gamma_\rho^{s1} = \gamma_\rho^s$, ср. доказательство леммы 2.3.5, часть 2b.

Докажем, что $w \in W^2(\theta^{s3})$ для любого s. Из теоремы C.5 о внутренней гладкости обобщенных решений следует, что $w\big|_{\gamma_3^{s3}} \in W^{3/2}(\gamma_3^{s3})$. Поскольку

$$w(\varphi, r)\big|_{\gamma_1} = \alpha_1 w(\varphi + \beta/2, r)\big|_{\gamma_1},$$

$$w(\varphi, r)\big|_{\gamma_2} = \alpha_2 w(\varphi - \beta/2, r)\big|_{\gamma_2}, \quad (2.3.125)$$

отсюда следует, что

$$w\big|_{\gamma_1^{s3}} \in W^{3/2}(\gamma_1^{s3}), \qquad w\big|_{\gamma_2^{s3}} \in W^{3/2}(\gamma_2^{s3}).$$

Поэтому, используя теорему C.5 и лемму C.1 о гладкости решений локальных краевых задач вблизи границы, мы получим $w \in W^2(\theta^{s2})$. Поскольку $\theta^{s3} = \theta^{s-1,2} \cup \theta^{s+1,2}$, отсюда вытекает, что $w \in W^2(\theta^{s3})$ для любого s.

2b. Докажем, что

$$\|w\|_{W^2(\theta^{01})} \leqslant k_3 \left(\|-\Delta w\|_{L_2(\theta^{03})} + \|w\|_{W^1(\theta^{03})} \right). \quad (2.3.126)$$

Из теорем B.6, C.2 с константой $c_2 = 0$ и C.6, теоремы Банаха об обратном операторе и формулы Лейбница следует неравенство

$$\|w\big|_{\gamma_3^{02}}\|_{W^{3/2}(\gamma_3^{02})} \leqslant k_4\|w\|_{W^2(\theta_3^{02})} \leqslant k_4\|\xi_0 w\|_{W^2(\theta^{03})} \leqslant k_5\|-\Delta(\xi_0 w)\|_{L_2(\theta^{03})} \leqslant \leqslant k_6\left(\|-\Delta w\|_{L_2(\theta^{03})} + \|w\|_{W^1(\theta^{03})}\right), \quad (2.3.127)$$

где $\theta_3^{02} = \{y \in \theta^{02} : \beta/4 < \varphi < 3\beta/4\}$, $\xi_0 \in \dot{C}^\infty(\theta^{03})$ таково, что $0 \leqslant \xi_0(y) \leqslant 1$ для $y \in \theta^{03}$ и $\xi_0(y) = 1$ для $y \in \theta_3^{02}$.

Из леммы С.3, нелокальных условий (2.3.125) и неравенства (2.3.127) мы получим

$$\|w\|_{W^2(\theta^{01})} \leqslant \|\xi_1 w\|_{W^2(\theta^{02})} \leqslant \leqslant k_7\left(\|-\Delta(\xi_1 w)\|_{L_2(\theta^{02})} + \sum_{\rho=1,2}\|(\xi_1 w)\big|_{\varphi=\gamma_\rho^{02}}\|_{W^{3/2}(\gamma_\rho^{02})} + \|w\|_{L_2(\theta^{02})}\right) \leqslant \leqslant k_8\left(\|-\Delta w\|_{L_2(\theta^{03})} + \|w\|_{W^1(\theta^{03})}\right),$$

где $\xi_1 \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}_+)$, $\xi_1(r) = 1$ при $2^{-1} \leqslant r \leqslant 2$, $0 \leqslant \xi_1(r) \leqslant 1$ при $0 \leqslant r$ и $\operatorname{supp}\xi_1 \subset (2^{-2}, 2^2)$.

Таким образом, мы установили априорную оценку (2.3.126).

2с. Докажем теперь, что $w \in H_1^2(\theta \cap B_d)$ для любого $d > 0$.

В силу части 2а, $w \in H_1^2(\theta^{s3})$. Поскольку $2^{s-1} < r < 2^{s+1}$ для $y \in \theta^{s1}$, переходя к новым переменным $y' = 2^{-s}y$ и используя неравенство (2.3.125), мы получим

$$\|w\|^2_{H_1^2(\theta^{s1})} \leqslant k_9 \sum_{|\alpha|\leqslant 2} 2^{2s(1-2+|\alpha|)} \int\limits_{\theta^{s1}} \left|\mathcal{D}_y^\alpha w(y)\right|^2 dy = \quad (2.3.128)$$

$$= k_9 \sum_{|\alpha|\leqslant 2} \int\limits_{\theta^{01}} \left|\mathcal{D}_{y'}^\alpha w^s(y')\right|^2 dy' \leqslant$$

$$\leqslant k_{10}\left(\|-\Delta_{y'} w^s(y')\|^2_{L_2(\theta^{03})} + \sum_{|\alpha|\leqslant 1}\left\|\mathcal{D}_{y'}^\alpha w^s(y')\right\|^2_{L_2(\theta^{03})}\right) =$$

$$= k_{10}\left(2^{2s}\|-\Delta_y w(y)\|^2_{L_2(\theta^{s3})} + \sum_{|\alpha|\leqslant 1} 2^{2s(0-1+|\alpha|)}\left\|\mathcal{D}_y^\alpha w(y)\right\|^2_{L_2(\theta^{s3})}\right),$$

где $w^s(y') = w(2^s y')$, $k_9, k_{10}, \ldots > 0$ не зависят от w и s. Из (2.3.128) следует, что

$$\|w\|_{H_1^2(\theta^{s1})} \leqslant k_{11}\left(\|-\Delta w + w\|_{L_2(\theta^{s3})} + \|w\|_{H_0^1(\theta^{s3})}\right) \tag{2.3.129}$$

для $r \leqslant [\log_2 d]$.

Покажем теперь, что

$$w \in H_0^1(\theta \cap B_{8d}). \tag{2.3.130}$$

По предположению,

$$w \in W_\alpha^1(\theta \cap B_{8d}). \tag{2.3.131}$$

Поэтому $R_\theta^{-1} w \in \mathring{W}^1(\theta \cap B_{8d})$, т.к. оператор $R_\theta : \mathring{W}^1(\theta \cap B_{8d}) \to W_\alpha^1$ $(\theta \cap B_{8d})$ является изоморфизмом. По лемме 1.3.9, $\mathring{W}^1(\theta \cap B_{8d}) \subset H_0^1$ $(\theta \cap B_{8d})$. Отсюда вытекает, что $R_Q^{-1} w \in H_0^1(\theta \cap B_{8d})$. Поэтому, используя (2.3.120), мы имеем

$$w \in H_0^1(\theta_1 \cap B_{8d}), \qquad w \in H_0^1(\theta_2 \cap B_{8d}).$$

Из этих соотношений и из соотношения (2.3.131) мы получим (2.3.130).

Суммируя неравенства (2.3.129) по $s \leqslant [\log_2 d]$ и принимая во внимание соотношение (2.3.130), мы имеем

$$\|w\|_{H_1^2(\theta \cap B_{8d})} \leqslant k_{12}\left(\|-\Delta w + w\|_{L_2(\theta)} + \|w\|_{H_0^1(\theta \cap B_{8d})}\right).$$

Таким образом, мы доказали, что $w \in H_1^2(\theta \cap B_{8d})$.

3. Наконец мы докажем, что уравнение (2.3.119) имеет единственное решение $V \in E_a^2(\theta)$ для любого $f_0 \in \mathcal{E}_a^0(\theta, \gamma)$, если $0 \leqslant a \leqslant 2$, $0 < |\alpha_1 + \alpha_2| < 2$ и $0 < \beta < 2 \operatorname{arctg} \sqrt{4(\alpha_1 + \alpha_2)^{-2} - 1}$.

3*a*. Пусть $w \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\alpha)$ — решение уравнения (2.3.118) с $f_0 \in C_0^\infty(\overline{\theta} \setminus \{0\})$. Докажем, что $w \in H_a^2(\theta \cap B_\alpha)$ для любого $d > 0$.

Введем функцию $\xi_2 \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+)$ так, что $0 \leqslant \xi_2(r) \leqslant 1$ для $0 \leqslant r$, $\xi_2(r) = 1$ для $0 \leqslant r \leqslant d$ и $\xi_2(r) = 0$ для $r \geqslant 2d$. Очевидно, $\xi_2 w \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\alpha)$ и

$$\begin{gathered} -\Delta(\xi_2 w)(y) + (\xi_2 w)(y) = \Phi_0(y) \qquad (y \in \theta), \\ (\xi_2 w)(\varphi, r)\big|_{\gamma_1} - \alpha_1(\xi_2 w)(\varphi + \beta/2, r)\big|_{\gamma_1} = 0, \\ (\xi_2 w)(\varphi, r)\big|_{\gamma_2} - \alpha_2(\xi_2 w)(\varphi - \beta/2, r)\big|_{\gamma_2} = 0, \end{gathered}$$

где $\Phi_0 = \xi_2 f_0 - \Delta \xi_2 w - 2\nabla \xi_2 \nabla w \in L_2(\theta) = H_0^0(\theta)$.

Поскольку $\operatorname{supp}\Phi_0 \subset \overline{B_{2d}}$ и $0 \leqslant a$, то $\Phi_0 \in H_a^0(\theta)$. В силу (2.1.35), (2.1.40), (2.1.41) и условия $0 < \beta < 2\operatorname{arctg}\sqrt{4(\alpha_1+\alpha_2)^{-2}-1}$ полоса $-1 \leqslant \operatorname{Im}\lambda \leqslant 1$ не содержит собственных значений оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$. С другой стороны, $-1 \leqslant a-1 \leqslant 1$. Поэтому, поскольку $w \in H_1^2(\theta \cap B_{2d})$, из теоремы 2.2.1 следует, что $\xi_2 w \in H_\alpha^2(\theta)$, т.е., $w \in H_a^2(\theta \cap B_d)$.

3b. Докажем теперь, что для любого $F_0 \in E_a^0(\theta)$ уравнение

$$\mathbf{L}(\omega)w = (F_0, 0, 0) \qquad (2.3.132)$$

имеет решение $w \in E_a^2(\theta)$.

Пусть $w \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\alpha)$ — решение уравнения (2.3.118) при $f_0 \in C_0^\infty(\overline{\theta}\setminus\{0\})$. Повторяя доказательство неравенства (2.3.75), мы получим

$$\|\eta_\infty w\|_{E_a^2(\theta)} \leqslant k_{13}\left(\|\xi_\infty f_0\|_{E_a^0(\theta)} + \|\xi_\infty w\|_{E_{a-1}^1}(\theta)\right), \qquad (2.3.133)$$

если $\xi_\infty w \in E_{a-1}^1(\theta)$, где функции η_∞ и ξ_∞ определены в доказательстве леммы 2.3.1. Поскольку $W^1(\theta \setminus B_{d/2}) \subset E_{a-1}^1(\theta \setminus B_{d/2})$ для любого $d > 0$ и $a \leqslant 1$, мы имеем $\xi_\infty w \in E_{a-1}^1(\theta)$. Поэтому из (2.3.133) и части 3a доказательства следует, что $w \in E_a^2(\theta)$ при $0 \leqslant a \leqslant 1$. Таким образом, $\xi_\infty w \in E_{a-1}^1(\theta)$ при $0 \leqslant a \leqslant 2$. Вновь применяя неравенство (2.3.133) и часть 3a доказательства, мы имеем $w \in E_a^2(\theta)$ при $0 \leqslant a \leqslant 2$. Следовательно, уравнение (2.3.132) имеет решение $w \in E_a^2(\theta)$ для любой $F_0 \in C_0^\infty(\overline{\theta}\setminus\{0\})$. В силу леммы 2.3.1 подпространство функций $F_0 \in E_a^0(\theta)$ таких, что уравнение (2.3.132) имеет решение, замкнуто в $E_a^0(\theta)$. Поскольку $C_0^\infty(\overline{\theta}\setminus\{0\})$ плотно в $E_a^0(\theta)$, уравнение (2.3.132) разрешимо для любых $F_0 \in E_a^0(\theta)$.

3c. Покажем, что $\mathcal{R}(\mathbf{L}(\omega)) = \mathcal{E}_a^0(\theta, \gamma)$.

В силу леммы 1.2.5 существуют линейные ограниченные операторы $S_\rho : E_a^{3/2}(\gamma_\rho) \to E_a^2(\theta)$ такие, что $(S_\rho f_\rho)\big|_{\gamma_\rho} = f_\rho$ для любых $f_\rho \in E_a^{3/2}(\gamma_\rho)$, где $\rho = 1, 2$. Обозначим через $\eta_\rho \in C^\infty[0,\beta]$, $\rho = 1, 2$, срезающие функции, обладающие следующими свойствами: $0 \leqslant \eta_\rho(\varphi) \leqslant 1$ для $0 \leqslant \varphi \leqslant \beta$, $\eta_1(\varphi) = 1$ для $0 \leqslant \varphi \leqslant \beta/4$, $\eta_1(\varphi) = 0$ для $\beta/3 \leqslant \varphi \leqslant \beta$, $\eta_2(\varphi) = 1$ для $3\beta/4 \leqslant \varphi \leqslant \beta$, $\eta_2(\varphi) = 0$ для $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\beta/3$. Тогда уравнение (2.3.119) эквивалентно (2.3.132) с $F_0 = \Delta V_1 - V_1 + f_0$ и $V_1 = \eta_1 S_1 f_1 + \eta_2 S_2 f_2 \in E_a^2(\theta)$, см. лемму 1.2.1.

Выше мы доказали, что уравнение (2.3.132) имеет решение $w \in E_a^2(\theta)$ для любого $F_0 \in E_a^2(\theta)$. Поэтому уравнение (2.3.119) имеет решение $V = w + V_1 \in E_a^2(\theta)$ для любого $f \in \mathcal{E}_a^0(\theta, \gamma)$.

$3d$. Остается доказать, что $\mathcal{N}(\mathbf{L}(\omega)) = \{0\}$.

Пусть $w \in E_a^2(\theta)$ — решение уравнения (2.3.132) с $F_0 = 0$. Тогда, рассуждая, как и в части 3, мы имеем $w \in H_1^2(\theta \cap B_1) \subset W^1(\theta \cap B_1)$. Поскольку $0 \leqslant a$, мы получим $E_a^2(\theta \backslash B_{1/2}) \subset W^1(\theta \backslash B_{1/2})$. Поэтому $w \in W^1(\theta)$. Тогда в силу части 1 $w = 0$.

2.4. Локальные эллиптические задачи в $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{P}$

Разрешимость эллиптических задач в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

Рассмотрим уравнение

$$Av = f_0(y) \qquad (y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \tag{2.4.1}$$

относительно функции v.

Здесь $f_0 \in H_a^l(\mathbb{R}^2)$, A — однородный дифференциальный оператор с постоянными комплексными коэффициентами, заданный по формуле

$$A = A(\mathcal{D}_y) = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha \mathcal{D}_y^\alpha.$$

Предположим, что уравнение (2.4.1) — правильно эллиптическое.

Оператор $A : H_a^{l+2m}(\mathbb{R}^2) \to H_a^l(\mathbb{R}^2)$ — ограниченный для любого фиксированного целого числа $l \geqslant 0$.

Определение 2.4.1. Функция $v \in H_a^{l+2m}(\mathbb{R}^2)$ называется *сильным решением* задачи (2.4.1), если $Av = f_0$.

Переходя к полярным координатам r, φ, мы можем записать оператор $A(\mathcal{D}_y)$ в виде

$$A(\mathcal{D}_y) = r^{-2m} \widehat{A}(\varphi, \mathcal{D}_\varphi, r\mathcal{D}_r) = r^{-2m} \sum_{\alpha_1+\alpha_2 \leqslant 2m} a_{\alpha_1\alpha_2}(\varphi) \mathcal{D}_\varphi^{\alpha_1} (r\mathcal{D}_r)^{\alpha_2},$$

где $a_{\alpha_1\alpha_2} \in C_{2\pi}^\infty[0, 2\pi]$.

Введем новую переменную $\tau = \ln r$. Тогда уравнение (2.4.1) примет вид

$$\widehat{A}(\varphi, \mathcal{D}_\varphi, \mathcal{D}_\tau)v = F_0(\varphi, \tau) \quad (0 < \varphi < 2\pi, \ \ -\infty < \tau < \infty), \tag{2.4.2}$$

$$\mathcal{D}_\varphi^j v\big|_{\varphi=0} = \mathcal{D}_\varphi^j v\big|_{\varphi=2\pi} \qquad (-\infty < \tau < \infty, \ j = 0, \dots, 2m-1), \tag{2.4.3}$$

где $F_0(\varphi, \tau) = e^{2m\tau} f_0(\varphi, \tau)$, $\mathcal{D}_\varphi^j F_0\big|_{\varphi=0} = \mathcal{D}_\varphi^j F_0\big|_{\varphi=2\pi}$ $(j = 0, \dots, k-1)$.

Используя преобразование Фурье по τ, из (2.4.2) и (2.4.3) мы имеем

$$\widehat{A}(\varphi, \mathcal{D}_\varphi, \lambda)\widehat{v}(\varphi, \lambda) = \widehat{F}_0(\varphi, \lambda) \qquad (0 < \varphi < 2\pi), \tag{2.4.4}$$

$$\mathcal{D}_\varphi^j \widehat{v}\big|_{\varphi=0} = \mathcal{D}_\varphi^j \widehat{v}\big|_{\varphi=2\pi} \qquad (j = 0, \dots, 2m-1). \tag{2.4.5}$$

Обозначим через $W^s_{2\pi}(0, 2\pi)$ замыкание $C^\infty_{2\pi}[0, 2\pi]$ в пространстве $W^s(0, 2\pi)$.

Введем оператор-функцию $\lambda \mapsto A(\lambda) \in \mathcal{B}\left(W^{l+2m}_{2\pi}(0, 2\pi), W^l_{2\pi}(0, 2\pi)\right)$ по формуле $\widehat{A}(\lambda)w = \widehat{A}(\varphi, \mathcal{D}_\varphi, \lambda)w(\varphi)$.

Лемма 2.4.1. *Пусть уравнение* (2.4.1) — *правильно эллиптическое. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(a) $\widehat{A}(\lambda) : W^{l+2m}_{2\pi}(0, 2\pi) \to W^l_{2\pi}(0, 2\pi)$ — *фредгольмов оператор и*, $\operatorname{ind} \widehat{A}(\lambda) = 0$ *для всех* $\lambda \in \mathbb{C}$.

(b) *Существуют* $0 < \varepsilon < \pi/2$ *и* $\lambda_1 > 1$ *такие, что для* $\lambda \in \omega_{\varepsilon,\lambda_1}$ *оператор* $\widehat{A}(\lambda)$ *имеет ограниченный обратный* $\widehat{A}^{-1}(\lambda) = \widehat{R}_0(\lambda) : W^l_{2\pi}(0, 2\pi) \to W^{l+2m}_{2\pi}(0, 2\pi)$ *и для любых* $\lambda \in \omega_{\varepsilon,\lambda_1}$ *и* $\widehat{F}_0 \in W^l_{2\pi}(0, 2\pi)$ *справедлива следующая оценка*:

$$|||\widehat{R}_0(\lambda)\widehat{F}_0|||_{W^{l+2m}_{2\pi}(0,2\pi)} \leqslant c_1 |||\widehat{F}_0|||_{W^l_{2\pi}(0,2\pi)}, \tag{2.4.6}$$

где $c_1 > 0$ *не зависит от* $\widehat{F}_0$ *и* λ, $\omega_{\varepsilon,\lambda_1} = \{\lambda \in \omega_\varepsilon : |\lambda| \geqslant \lambda_1\}$ *и* $\omega_\varepsilon = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| \leqslant \varepsilon$ *или* $|\arg \lambda - \pi| \leqslant \varepsilon\}$.

(c) $\lambda \mapsto \widehat{R}_0(\lambda) \in \mathcal{B}\left(W^l_{2\pi}(0, 2\pi), W^{l+2m}_{2\pi}(0, 2\pi)\right)$ — *конечно-мероморфная фредгольмова оператор-функция в* $\mathbb{C}$.

Доказательство. Утверждения (a) и (c) следуют из утверждения (b) аналогично доказательству теоремы 2.1.1. в [12]. Докажем утверждение (b).

Доказательство состоит из трех частей. Во-первых, мы докажем это утверждение для оператора $\widehat{A}^0_\nu(\lambda)$ с замороженными в точке $\varphi_\nu \in [0, 2\pi]$ коэффициентами. Во-вторых, мы установим аналогичное утверждение для оператора $\widehat{A}_\nu(\lambda)$ с коэффициентами, которые мало отличаются от значений коэффициентов в точке φ_ν. Используя этот результат и разбиение единицы на $[0, 2\pi]$, мы наконец докажем утверждение (b) для оператора $\widehat{A}(\lambda)$.

1. Фиксируем $\varphi_\nu \in [0, 2\pi]$. Наряду с уравнением (2.4.4) рассмотрим следующее уравнение с постоянными коэффициентами:

$$\widehat{A}^0_\nu(\lambda)\widehat{v}(\varphi) = \widehat{A}^0(\varphi_\nu, \mathcal{D}_\varphi, \lambda)\widehat{v}(\varphi) = \widehat{F}_0(\varphi) \qquad (0 < \varphi < 2\pi), \tag{2.4.7}$$

где $\widehat{F}_0 \in W^l_{2\pi}(0, 2\pi)$ и

$$\widehat{A}^0(\varphi, \mathcal{D}_\varphi, \lambda) = \sum_{\alpha_1+\alpha_2=2m} a_{\alpha_1\alpha_2}(\varphi)\lambda^{\alpha_2}\mathcal{D}^{\alpha_1}_\varphi. \tag{2.4.8}$$

Из правильной эллиптичности оператора $A(\mathcal{D}_y)$ следует существование $0 < \varepsilon < \pi/2$ такого, что

$$|\widehat{A}^0(\varphi_\nu, n, \lambda)| \geqslant k_1(n^{2m} + |\lambda|^{2m}) \tag{2.4.9}$$

для $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и $\lambda \in \omega_{\varepsilon,1}$.

Из разложений функций $\widehat{v}(\varphi)$ и $\widehat{F}_0(\varphi)$ в ряды Фурье по функциям $\exp(in\varphi)/\sqrt{2\pi}$ и из неравенства (2.4.9) вытекает, что для любого $\lambda \in \omega_{\varepsilon,1}$ существует ограниченный обратный оператор

$$\widehat{R}^\nu_0(\lambda) = [\widehat{A}^0_\nu(\lambda)]^{-1} : W^l_{2\pi}(0, 2\pi) \to W^{l+2m}_{2\pi}(0, 2\pi),$$

удовлетворяющий оценке (2.4.6) для любого $\widehat{F}_0 \in W^l_{2\pi}(0, 2\pi)$.

2. Обозначим $\varphi_\nu = \nu 2\pi/N$ $(\nu = 0, \dots, N)$ и $\sigma = 4\pi/3N$, где $N \in \mathbb{N}$. Очевидно, для каждого $\delta > 0$ существует номер $N \in \mathbb{N}$ и функции $a^\nu_{\alpha_1\alpha_2} \in C^\infty_{2\pi}[0, 2\pi]$ $(\nu = 1, \dots, N)$ такие, что $a^\nu_{\alpha_1\alpha_2}(\varphi) = a_{\alpha_1\alpha_2}(\varphi)$ для $\varphi \in [-\sigma + \varphi_\nu, \sigma + \varphi_\nu]$, если $1 \leqslant \nu \leqslant N-1$, и для $\varphi \in [0, \sigma] \cup [2\pi - \sigma, 2\pi]$, если $\nu = N$, и $|a^\nu_{\alpha_1\alpha_2}(\varphi) - a_{\alpha_1\alpha_2}(\varphi_\nu)| < \delta$ для $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\nu = 1, \dots, N$, где $\alpha_1 + \alpha_2 = 2m$. Пусть

$$\widehat{A}_\nu(\lambda) = \widehat{A}_\nu(\varphi, \mathcal{D}_\varphi, \lambda) = \sum_{\alpha_1+\alpha_2=2m} a^\nu_{\alpha_1\alpha_2}(\varphi)\lambda^{\alpha_2}\mathcal{D}^{\alpha_1}_\varphi.$$

Тогда из формулы Лейбница и интерполяционного неравенства (B.25) следует, что

$$|||(\widehat{A}^0_\nu(\lambda) - \widehat{A}_\nu(\lambda))\widehat{v}|||_{W^l_{2\pi}(0,2\pi)} \leqslant k_2\Big(\delta|||\widehat{v}|||_{W^{l+2m}_{2\pi}(0,2\pi)} + \\ + \max_{0<\beta\leqslant k}\max_{\varphi}\left|\mathcal{D}^\beta_\varphi a^\nu_{\alpha_1\alpha_2}(\varphi)\right| |||\widehat{v}|||_{W^{l+2m}_{2\pi}(0,2\pi)}/|\lambda|\Big) \quad (2.4.10)$$

для любого $\widehat{v} \in W^{l+2m}_{2\pi}(0,2\pi)$, где $k_2 > 0$ не зависит от $\widehat{v}$ и λ.

Из неравенства (2.4.10) и части 1 доказательства вытекает, что для $\lambda \in \omega_{\varepsilon,q_1}$ оператор $\widehat{A}_\nu(\lambda) : W^{l+2m}_{2\pi}(0,2\pi) \to W^l_{2\pi}(0,2\pi)$ имеет ограниченный обратный $\widehat{R}^\nu(\lambda) : W^l_{2\pi}(0,2\pi) \to W^{l+2m}_{2\pi}(0,2\pi)$ и

$$|||\widehat{R}^\nu(\lambda)\widehat{F}_0|||_{W^{l+2m}_{2\pi}(0,2\pi)} \leqslant k_3|||\widehat{F}_0|||_{W^l_{2\pi}(0,2\pi)} \quad (2.4.11)$$

для любого $\widehat{F}_0 \in W^l_{2\pi}(0,2\pi)$, где N и $q_1 > 0$ достаточно велики, $k_3 > 0$ не зависит от λ и $\widehat{F}_0$.

3. Введем функции $\xi_\nu, \psi_\nu \in C^\infty_{2\pi}[0,2\pi]$ так, что

$$\sum_\nu \xi_\nu(\varphi) = 1 \quad \text{для} \quad \varphi \in [0,2\pi];$$

$$\psi_\nu(\varphi)\xi_\nu(\varphi) = \xi_\nu(\varphi) \quad \text{для} \quad \varphi \in [0,2\pi]; \;\; \nu = 1,\dots,N;$$

$$\operatorname{supp}\xi_\nu, \operatorname{supp}\psi_\nu \subset (-\sigma+\varphi_\nu, \sigma+\varphi_\nu) \quad (v = 1,\dots,N-1),$$

$$\operatorname{supp}\xi_N, \operatorname{supp}\psi_N \subset [0,\sigma) \cup (2\pi-\sigma, 2\pi].$$

Оператор $\widehat{A}(\lambda)$ можно представить в виде

$$\widehat{A}(\lambda) = \sum_\nu \xi_\nu \widehat{A}_\nu(\lambda)\psi_\nu + \widehat{A}^1(\lambda),$$

где

$$\widehat{A}^1(\lambda) = \sum_{\alpha_1+\alpha_2<2m} a_{\alpha_1\alpha_2}(\varphi)\lambda^{\alpha_2}\mathcal{D}^{\alpha_1}_\varphi.$$

Рассмотрим оператор $\widehat{R}(\lambda) = \sum\limits_\mu \psi_\mu \widehat{R}^\mu(\lambda)\xi_\mu : W^l_{2\pi}(0,2\pi) \to W^{l+2m}_{2\pi}(0,2\pi)$. Легко видеть, что

$$\widehat{A}(\lambda)\widehat{R}(\lambda) = I + \widehat{B}(\lambda),$$

где $\widehat{B}(\lambda) : W^l_{2\pi}(0,2\pi) \to W^{l+1}_{2\pi}(0,2\pi)$ — ограниченный оператор в норме $|||\cdot|||$, $\lambda \in \omega_{\varepsilon,q_1}$.

Следовательно, в силу интерполяционного неравенства (B.25) получим

$$|||\widehat{B}(\lambda)\widehat{F}_0|||_{W^l_{2\pi}(0,2\pi)} \leqslant k_4|||\widehat{F}_0|||_{W^l_{2\pi}(0,2\pi)}/|\lambda|. \qquad (2.4.12)$$

Поэтому для $\lambda \in \omega_{\varepsilon,\lambda_1}$ оператор $\widehat{A}(\lambda) : W^{l+2m}_{2\pi}(0,2\pi) \to W^l_{2\pi}(0,2\pi)$ имеет правый обратный $\widehat{R}_0(\lambda) = \widehat{R}(\lambda)(I+\widehat{B}(\lambda))^{-1} : W^l_{2\pi}(0,2\pi) \to W^{l+2m}_{2\pi}(0,2\pi)$, где $\lambda_1 = \max\{q_1, 2k_4\}$. В силу (2.4.11), (2.4.12) оператор $\widehat{R}_0(\lambda)$ удовлетворяет неравенству (2.4.6). Аналогично можно доказать, что оператор $\widehat{A}(\lambda)$ имеет левый обратный. □

Лемма 2.4.2. *Пусть уравнение* (2.4.1) *правильно эллиптическое. Предположим, что прямая* $\operatorname{Im}\lambda = h = a+1-l-2m$ *не содержит собственных значений оператор-функции* $\lambda \mapsto \widehat{A}(\lambda)$. *Тогда задача* (2.4.1) *имеет единственное решение* $v \in H^{l+2m}(\mathbb{R}^2)$ *для любой* $f_0 \in H^l_a(\mathbb{R}^2)$ *и*

$$\|v\|_{H^{l+2m}_a(\mathbb{R}^2)} \leqslant c_2\|f_0\|_{H^l_a(\mathbb{R}^2)}. \qquad (2.4.13)$$

Доказательство следует из леммы 2.4.1, интегрирования по прямой $\operatorname{Im}\lambda = h$ возведенного в квадрат неравенства (2.4.6) и неравенства (1.1.6), ср. доказательство теоремы 2.1.1.

Асимптотика решений эллиптических задач в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

Пусть $l_2 \geqslant l_1 \geqslant 0$ — целые числа, и пусть $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ такие, что $h_2 = a_2 + 1 - l_2 - 2m < a_1 + 1 - l_1 - 2m = h_1$. Полоса $h_2 < \operatorname{Im}\lambda < h_1$, в силу леммы 2.4.1, содержит конечное число собственных значений λ_j $(j = 1, \dots, J)$ оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{A}(\lambda)$, имеющих геометрические кратности q_j. Обозначим через $\{\psi_j^{0,q}(\varphi), \dots, \psi_j^{p_{jq}-1,q}(\varphi)\}$ $(q = 1, \dots, q_j)$ каноническую систему жордановых цепочек оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{A}(\lambda)$, соответствующую собственному значению λ_j, где $p_{j1} \geqslant p_{j2} \geqslant \ldots \geqslant p_{jq_j}$ ранги собственных векторов $\psi_j^{0,1}(\varphi), \dots, \psi_j^{0,q_j}(\varphi)$, соответственно см. приложение A.

Основной результат этого пункта, касающийся асимптотического поведения сильных решений локальной эллиптической задачи (2.4.1), можно сформулировать следующим образом.

Лемма 2.4.3. *Предположим, что уравнение* (2.4.1) — *правильно эллиптическое. Пусть* $v \in H_{a_1}^{l_1+2m}(\mathbb{R}^2)$ — *сильное решение задачи* (2.4.1), *и пусть* $f_0 \in H_{a_2}^{l_2}(\mathbb{R}^2)$. *Предположим, что прямая* $\operatorname{Im}\lambda = h_2$ *не содержит собственных значений оператор-функции* $\lambda \mapsto \widehat{A}(\lambda)$.

Тогда

$$v(y) = \sum_{j=1}^{J} \sum_{q=1}^{q_j} \sum_{k=0}^{p_{jq}-1} \alpha_j^{kq} v_j^{kq}(y) + w(y) \qquad (y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}), \tag{2.4.14}$$

где

$$v_j^{kq}(y) = r^{i\lambda_j} \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!}(i \ln r)^n \psi_j^{k-n,q}(\varphi), \tag{2.4.15}$$

$\alpha_j^{kq} = \alpha_j^{kq}(f_0)$ — *линейно ограниченные функционалы на* $H_{a_1}^{l_1}(\mathbb{R}^2) \cap H_{a_2}^{l_2}(\mathbb{R}^2)$, *функция* $w \in H_{a_2}^{l_2+2m}(\mathbb{R}^2)$ *такова, что* $Aw = f_0$ *и*

$$\|w\|_{H_{a_2}^{l_2+2m}(\mathbb{R}^2)} \leqslant c_3 \|f_0\|_{H_{a_2}^{l_2}(\mathbb{R}^2)}. \tag{2.4.16}$$

Замечание 2.4.1. Аналогично теореме 1.4.6 в [12] легко показать, что $\psi_j^{s,q} \in C_{2\pi}^{\infty}[0, 2\pi] \quad (j = 1, \dots, J,\ q = 1, \dots, q_j,\ s = 0, \dots, p_{jq} - 1)$.

Из леммы 2.4.3 мы получим следующее утверждение.

Следствие 2.4.1. *Пусть выполняются условия леммы* 2.4.3, *и пусть полоса* $h_2 < \operatorname{Im}\lambda < h_1$ *не содержит собственных значений оператор-функции* $\lambda \mapsto \widehat{A}(\lambda)$. *Тогда* $v \in H_{a_2}^{l_2+2m}(\mathbb{R}^2)$.

Доказательство леммы 2.4.3 аналогично доказательству теоремы 2.2.1, см. также следствие 2.2.2. Оно основано на следующих двух утверждениях, ср. леммы 2.2.1, 2.2.2.

Лемма 2.4.4. *Предположим, что уравнение* (2.4.1) *правильно эллиптическое. Пусть* $\psi^n \in C_{2\pi}^{\infty}[0, 2\pi]$ $(n = 0, 1, \dots, M)$. *Тогда функция*

$$v(y) = r^{i\lambda_0} \sum_{n=0}^{M} \frac{1}{n!}(i \ln r)^n \psi^{M-n}(\varphi) \tag{2.4.17}$$

является решением однородного уравнения (2.4.1) *тогда и только тогда, когда* λ_0 *является собственным значением оператор-функции* $\lambda \mapsto \widehat{A}(\lambda)$ *и* $\psi^0, \dots, \psi^M$ *является жордановой цепочкой, соответствующей собственному значению* λ_0 *оператор-функции* $\lambda \mapsto \widehat{A}(\lambda)$.

Определение 2.4.2. Решение однородного уравнения (2.4.1) вида (2.4.17) называется *степенным решением* порядка M, соответствующим собственному значению λ_0 оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{A}(\lambda)$.

Лемма 2.4.5. *Предположим, что уравнение* (2.4.1) *— правильно эллиптическое. Пусть* $\{\psi^{0,q}, \dots, \psi^{p_q-1,q}\}$ $(q = 1, \dots, q_0)$ *— каноническая система жордановых цепочек оператор-функции* $\lambda \mapsto \widehat{A}(\lambda)$, *соответствующая собственному значению* λ_0.

Тогда функции

$$v_{k,q}(y) = r^{i\lambda_0} \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!}(i \ln r)^n \psi^{k-n,q}(\varphi)$$

$$(k = 0, \dots, p_q - 1,\ q = 1, \dots, q_0) \quad (2.4.18)$$

образуют базис в пространстве степенных решений однородного уравнения (2.4.1), *соответствующих собственному значению* λ_0 *оператор-функции* $\lambda \mapsto \widehat{A}(\lambda)$.

Замечание 2.4.2. Лемма 2.4.1 верна также в случае, когда $h_2 > h_1$.

Определение 2.4.3. Случай распределения собственных значений называется *критическим* по отношению к прямой $\operatorname{Im} \lambda = a + 1 - l - 2m$, если эта прямая содержит собственные значения оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{A}(\lambda)$.

Из леммы 2.4.3 мы можем получить следующие утверждения, ср. следствия 2.2.3, 2.2.4.

Следствие 2.4.2. *Пусть уравнение* (2.4.1) *— правильно эллиптическое, и пусть прямая* $\operatorname{Im} \lambda = h = a + 1 - l - 2m$ *содержит собственные значения оператор-функции* $\lambda \mapsto \widehat{A}(\lambda)$.

Тогда $\mathcal{N}(A) = \{0\}$.

Следствие 2.4.3. *Пусть уравнение* (2.4.1) *— правильно эллиптическое, и пусть прямая* $\operatorname{Im} \lambda = h = a + 1 - l - 2m$ *содержит собственные значения оператор-функции* $\lambda \mapsto \widehat{A}(\lambda)$.

Тогда $\mathcal{R}(A)$ *не замкнуто в* $H^l_a(\mathbb{R}^2)$.

Пример 2.4.1. Рассмотрим уравнение

$$-\Delta v(y) = f_0(y) \qquad (y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}). \tag{2.4.19}$$

Определим оператор $A : H_a^2(\mathbb{R}^2) \to H_a^0(\mathbb{R}^2)$ по формуле $Av = -\Delta v$.

Переходя к новым переменным φ, τ и делая преобразование Фурье по τ, мы имеем

$$-\widehat{v}_{\varphi\varphi}(\varphi, \lambda) + \lambda^2 \widehat{v}(\varphi, \lambda) = \widehat{F}_0(\varphi, \lambda) \qquad (0 < \varphi < 2\pi), \tag{2.4.20}$$

$$\widehat{v}\big|_{\varphi=0} = \widehat{v}\big|_{\varphi=2\pi}, \quad \widehat{v}_\varphi\big|_{\varphi=0} = \widehat{v}_\varphi\big|_{\varphi=2\pi}, \tag{2.4.21}$$

где $\widehat{F}_0(\varphi, \lambda) = e^{2\tau} f_0(\varphi, \tau)$.

Оператор $\widehat{A}(\lambda) : W_{2\pi}^2(0, 2\pi) \to L_2(0, 2\pi)$ задается по формуле $\widehat{A}(\lambda)u = -u_{\varphi\varphi} + \lambda^2 u$. Изучим задачу на собственные значения для оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{A}(\lambda)$.

Общее решение уравнения

$$-\widehat{v}_{\varphi\varphi} + \lambda^2 \widehat{v} = 0 \tag{2.4.22}$$

имеет вид

$$\widehat{v}(\varphi) = c_1 e^{\lambda\varphi} + c_2 e^{-\lambda\varphi}. \tag{2.4.23}$$

Подставляя это решение в (2.4.21), мы имеем

$$\left.\begin{aligned} c_1(1 - \exp(\lambda 2\pi)) + c_2(1 - \exp(-\lambda 2\pi)) = 0, \\ c_1\lambda(1 - \exp(\lambda 2\pi)) - c_2\lambda(1 - \exp(-\lambda 2\pi)) = 0. \end{aligned}\right\}$$

Поэтому собственные значения $\lambda \neq 0$ оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{A}(\lambda)$ совпадают с корнями уравнения

$$2\exp(-\lambda 2\pi)(\exp(\lambda 2\pi) - 1)^2 = 0.$$

Корни этого уравнения имеют вид

$$\lambda_k = ik \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{2.4.24}$$

Изучим теперь собственные и присоединенные вектора оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{A}(\lambda)$.

1. $\lambda_0 = 0$ является собственным значением оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{A}(\lambda)$. Соответствующая собственная функция имеет вид $\psi_0^{0,1}(\varphi) = 1$. Геометрическая кратность собственного значения $\lambda_0 = 0$ равна 1.

В силу (A.5) присоединенная функция $\psi_0^{1,1}(\varphi)$ удовлетворяет уравнению

$$\widehat{A}(0)\psi_0^{1,1} + \partial_\lambda \widehat{A}(0)\psi_0^{0,1} = 0,$$

которое эквивалентно краевой задаче

$$\left.\begin{aligned} &(\psi_0^{1,1})_{\varphi\varphi} = 0 \quad (0 < \varphi < 2\pi), \\ &\psi_0^{1,1}\big|_{\varphi=0} = \psi_0^{1,1}\big|_{\varphi=2\pi}, \quad (\psi_0^{1,1})_\varphi\big|_{\varphi=0} = (\psi_0^{1,1})_\varphi\big|_{\varphi=2\pi}. \end{aligned}\right\}$$

Следовательно, $\psi_0^{1,1}(\varphi) = 0$.

Присоединенная функция $\psi_0^{2,1}(\varphi)$ должна удовлетворять уравнению

$$\widehat{A}(0)\psi_0^{2,1} + \partial_\lambda \widehat{A}(0)\psi_0^{1,1} + \frac{1}{2}\partial_\lambda^2 \widehat{A}(0)\psi_0^{0,1} = 0.$$

Это уравнение эквивалентно следующей задаче:

$$(\psi_0^{2,1})_{\varphi\varphi} = 1 \quad (0 < \varphi < 2\pi), \tag{2.4.25}$$

$$\psi_0^{2,1}\big|_{\varphi=0} = \psi_0^{2,1}\big|_{\varphi=2\pi}, \quad (\psi_0^{2,1})_\varphi\big|_{\varphi=0} = (\psi_0^{2,1})_\varphi\big|_{\varphi=2\pi}. \tag{2.4.26}$$

Подставляя общее решение (2.4.25) $\psi_0^{2,1}(\varphi) = c_0 + c_1\varphi + \varphi^2/2$ в (2.4.26), мы получим

$$2\pi c_1 + 4\pi^2/2 = 0, \qquad 2\pi = 0.$$

Эта система уравнений несовместна. Поэтому полная кратность $p_0 = 2$.

2. Существуют две линейно независимые функции $\psi_k^{0,1}(\varphi) = \sin k\varphi$ и $\varphi_k^{0,2}(\varphi) = \cos k\varphi$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$, соответствующие собственному значению $\lambda_k = ik$ оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{A}(\lambda)$. Следовательно, геометрическая кратность λ_k равна 2.

Присоединенная функция $\psi_k^{1,j}(\varphi)$ $(j = 1, 2)$ должна удовлетворять следующему уравнению:

$$\widehat{A}(ik)\psi_k^{1,j} + \partial_\lambda \widehat{A}(ik)\psi_k^{0,j} = 0,$$

которое эквивалентно краевой задаче

$$(\psi_k^{1,j})_{\varphi\varphi} + k^2\psi_k^{1,j} = i2k\psi_k^{0,j} \quad (0 < \varphi < 2\pi), \tag{2.4.27}$$

$$\psi_k^{1,j}\big|_{\varphi=0} = \psi_k^{1,j}\big|_{\varphi=2\pi}, \quad (\psi_k^{1,j})_\varphi\big|_{\varphi=0} = (\psi_k^{1,j})_\varphi\big|_{\varphi=2\pi}. \tag{2.4.28}$$

Подставляя общее решение (2.4.27)

$$\psi_k^{1,1}(\varphi) = a_k^1 \cos k\varphi + b_k^1 \sin k\varphi - i\varphi \cos k\varphi \quad \text{при} \quad j = 1,$$
$$\psi_k^{1,2}(\varphi) = a_k^2 \cos k\varphi + b_k^2 \sin k\varphi + i\varphi \sin k\varphi \quad \text{при} \quad j = 2,$$

в (2.4.28), мы имеем

$$-i2\pi = 0, \qquad 0 = 0 \;\; \text{при} \;\; j = 1,$$
$$0 = 0, \;\; i2\pi k = 0 \;\; \text{при} \;\; j = 2, \; k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Эти системы несовместны. Следовательно, частные кратности собственного значения λ_k определяются равенствами $p_{k1} = p_{k2} = 1$. Полная кратность $p_k = p_{k1} + p_{k2} = 2$.

Пример 2.4.2. Рассмотрим опять уравнение (2.4.19). Пусть $v \in H_1^2(\mathbb{R}^2)$ — сильное решение уравнения (2.4.19), и пусть $f_0 \in H_{-\varepsilon}^0(\mathbb{R}^2)$, где $0 < \varepsilon < 1$.

Используя лемму 2.4.3 для $a_1 = 1$, $l_1 = 0$, $h_1 = 0$ и $a_2 = -\varepsilon$, $l_2 = 0$, $h_2 = -1 - \varepsilon$, из примера 2.4.1 мы получим

$$v(y) = (-\alpha_{-1}^{0,1} \sin\varphi + \alpha_{-1}^{0,2} \cos\varphi) r + w(y) = -\alpha_{-1}^{0,1} x + \alpha_{-1}^{0,2} y + w(y)$$
$$(y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}), \quad (2.4.29)$$

где $w \in H_{-\varepsilon}^2(\mathbb{R}^2)$, $\alpha_{-1}^{0,j} = \alpha_{-1}^{0,j}(f_0)$ — ограниченные линейные функционалы на $H_1^0(\mathbb{R}^2) \cap H_{-\varepsilon}^0(\mathbb{R}^2)$.

Эллиптические задачи в $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{P}$

Рассмотрим уравнение

$$Av = f_0(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{P}), \qquad (2.4.30)$$

где $\mathcal{P} = \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^n : y = 0\}$, $f_0 \in H_a^k(\mathbb{R}^n)$, A — однородный дифференциальный оператор с постоянными комплексными коэффициентами, заданный по формуле

$$A = A(\mathcal{D}_y, \mathcal{D}_z) = \sum_{\substack{|\alpha| \leqslant 2m, \\ |\beta| = 2m - |\alpha|}} a_{\alpha\beta} \mathcal{D}_y^\alpha \mathcal{D}_z^\beta.$$

Предположим, что уравнение (2.4.30) — правильно эллиптическое.

Оператор $A : H_a^{l+2m}(\mathbb{R}^n) \to H_a^l(\mathbb{R}^n)$ — ограниченный.

Определение 2.4.4. Функция $v \in H_a^{l+2m}(\mathbb{R}^n)$ называется *сильным* решением задачи (2.4.30), если

$$Av = f_0.$$

Используя преобразование Фурье $F_{z\to\varkappa}$ по $z \in \mathbb{R}^{n-2}$, из (2.4.30) мы получим

$$A(\mathcal{D}_y, \varkappa)\widehat{v}(y, \varkappa) = \widehat{f}_0(y, \varkappa) \qquad (y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \ \ \varkappa \in \mathbb{R}^{n-2}), \tag{2.4.31}$$

где

$$\widehat{v}(y, \varkappa) = F_{z\to\varkappa} v = (2\pi)^{-(n-2)/2} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} v(y, z) e^{-i(\varkappa, z)} dz.$$

Обозначим

$$Y = |\varkappa| y, \quad \omega = \varkappa |\varkappa|^{-1}, \quad t = |Y|, \quad V(Y, \varkappa) = \widehat{v}(y, \varkappa),$$
$$F_0(Y, \varkappa) = |\varkappa|^{-2m} \widehat{f}_0(y, \varkappa). \tag{2.4.32}$$

Тогда уравнение (2.4.31) примет вид

$$A(\mathcal{D}_y, \omega) V(Y, \varkappa) = F_0(Y, \varkappa) \qquad (Y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}), \tag{2.4.33}$$

Линейный ограниченный оператор $A(\omega) : E_a^{l+2m}(\mathbb{R}^2) \to E_a^l(\mathbb{R}^2)$ определим по формуле

$$A(\omega) V = A(\mathcal{D}_y, \omega) V(Y) \qquad (\omega \in S^{n-3}). \tag{2.4.34}$$

Лемма 2.4.6. *Пусть уравнение* (2.4.30) *— правильно эллиптическое. Тогда отображение* $A : H_a^{l+2m}(\mathbb{R}^n) \to H_a^l(\mathbb{R}^n)$ *— изоморфизм в том и только в том случае, когда отображение* $A(\omega) : E_a^{l+2m}(\mathbb{R}^2) \to E_a^l(\mathbb{R}^2)$ *— изоморфизм для всех* $\omega \in S^{n-3}$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.3.1 с соответствующими упрощениями.

Получим теперь априорные оценки сильных решений задачи (2.4.33), которые можно определить аналогично сильным решениям задачи (2.4.30). Ниже будут установлены необходимые и достаточные условия того, что оператор $A(\omega)$ — фредгольмов.

Обозначим через $A(0)$ линейный ограниченный оператор, действующий из $H_a^{l+2m}(\mathbb{R}^2)$ в $H_a^l(\mathbb{R}^2)$ по формуле $A(\omega)\big|_{\omega=0}$, см. (2.4.34). По определению, $A(0)v = A(\mathcal{D}_y, 0)v(y)$.

Очевидно, оператор $A(0)$ — правильно эллиптический. Запишем оператор $A(0)$ в полярной системе координат $A(0) = r^{-2m}\widehat{A}(\varphi, \mathcal{D}_\varphi, r\mathcal{D}_r)$.

Рассмотрим оператор-функцию $\lambda \mapsto \widehat{A}(\lambda) : \mathcal{B}\left(W_{2\pi}^{l+2m}(0,2\pi), W_{2\pi}^l(0,2\pi)\right)$, заданную по формуле $\widehat{A}(\lambda)w = \widehat{A}(\varphi, \mathcal{D}_\varphi, \lambda)w(\varphi)$.

По лемме 2.4.1 для всех $\lambda \in \mathbb{C}$, кроме счетного множества собственных значений, оператор $\widehat{A}(\lambda)$ имеет ограниченный обратный $\widehat{R}_0(\lambda)$: $W_{2\pi}^l(0,2\pi) \to W_{2\pi}^{l+2m}(0,2\pi)$ и оператор-функция $\lambda \mapsto \widehat{R}_0(\lambda) : \mathcal{B}\big(W_{2\pi}^l(0,2\pi)$, $W_{2\pi}^{l+2m}(0,2\pi)\big)$ — конечно-мероморфная фредгольмова оператор-функция в $\mathbb{C}$.

Лемма 2.4.7. *Пусть уравнение* (2.4.30) *— правильно эллиптическое. Тогда оператор* $A(\omega) : E_a^{l+2m}(\mathbb{R}^2) \to E_a^l(\mathbb{R}^2)$ *— фредгольмов для любого* $\omega \in S^{n-3}$ *в том и только а том случае, когда прямая* $\operatorname{Im}\lambda = h$ *не содержит собственных значений оператор-функции* $\lambda \mapsto \widehat{A}(\lambda)$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.3.2 с соответствующими упрощениями.

Поднятие гладкости

Лемма 2.4.8. *Пусть уравнение* (2.4.30) *— правильно эллиптическое. Предположим, что* $v \in W_{\mathrm{loc}}^{l+2m}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \cap E_{a-l-2m}^0(B_1)$ *и* $A(\omega)v \in E_a^l(\mathbb{R}^2)$ *для некоторого* $\omega \in S^{n-3}$.

Тогда $v \in E_a^{l+2m}(\mathbb{R}^2)$ *и существует число* $R > 0$ *такое, что*

$$\|v\|_{E_a^{l+2m}(\mathbb{R}^2)} \leqslant c_4 \left(\|A(\omega)v\|_{E_a^l(\mathbb{R}^2)} + \|v\|_{E_{a-l-2m}^0(B_R)}\right), \tag{2.4.35}$$

где $c_4 > 0$ *и* R *не зависят от* v *и* ω.

Доказательство. 1. Обозначим $Q_1^s = \{y \in \mathbb{R}^2 : 2^s < r < 2^{s+1}\}$ и $Q_2^s = \{y \in \mathbb{R}^2 : 2^{s-1} < r < 2^{s+2}\}$, $s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Очевидно, $\overline{Q_1^s} \subset Q_2^s$. Из соотношения $v \in W_{\mathrm{loc}}^{l+2m}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ следует, что $v \in H_a^{l+2m}(Q_2^s) \cap E_a^{l+2m}(Q_2^s)$ для любого s. Вначале мы докажем, что

$$\|v\|^2_{E_a^{l+2m}(Q_1^s)} \leqslant k_1 \left(\|A(\omega)v\|^2_{E_a^l(Q_2^s)} + \|v\|^2_{E^0_{a-l-2m}(Q_2^s)} \right), \qquad s \leqslant 0, \quad (2.4.36)$$

где $k_1, k_2, \ldots > 0$ не зависят от v, s и ω.

Положим $y' = 2^{-s}y$. Очевидно, $y' \in Q_j^0$ для $y \in Q_j^s$, $j = 1, 2$, $s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Поэтому, полагая $y^s(y') = v(2^s y')$ и применяя лемму C.4, мы получим

$$\|v\|^2_{H_a^{l+2m}(Q_1^s)} \leqslant k_2 \sum_{|\alpha| \leqslant l+2m} 2^{2s(a-l-2m+|\alpha|)} \|\mathcal{D}_y^\alpha v(y)\|^2_{L_2(Q_1^s)} =$$

$$= k_2 \sum_{|\alpha| \leqslant l+2m} 2^{2s(a-l-2m+1)} \|\mathcal{D}_{y'}^\alpha v^s(y')\|^2_{L_2(Q_1^0)} \leqslant$$

$$\leqslant k_3 2^{2s(a-l-2m+1)} \left(\sum_{|\alpha| \leqslant l} \|\mathcal{D}_{y'}^\alpha A(\mathcal{D}_{y'}, 2^s\omega) v^s(y')\|^2_{L_2(Q_2^0)} + \|v^s(y')\|^2_{L_2(Q_2^0)} \right) =$$

$$= k_3 \left(\sum_{|\alpha| \leqslant 1} 2^{2s(a-l+|\alpha|)} \|\mathcal{D}_y^\alpha A(\mathcal{D}_y, \omega) v(y)\|^2_{L_2(Q_2^s)} + 2^{2s(a-l-2m)} \|v(y)\|^2_{L_2(Q_2^s)} \right) \leqslant$$

$$\leqslant k_4 \left(\|A(\mathcal{D}_y, \omega)v\|^2_{H_a^l(Q_2^s)} + \|v\|^2_{H^0_{a-l-2m}(Q_2^s)} \right)$$

для $s \leqslant 0$.

Последняя оценка эквивалентна неравенству (2.4.36).

2. Для завершения доказательства остается показать, что неравенство (2.4.36) верно также для $s > 0$. Чтобы сделать это, мы применим лемму C.4 для $A = A(\mathcal{D}_{y'}, \mathcal{D}_{z'})$, $u(y', z) = \exp(i2^s(\omega, z))v^s(y')$ и $Q_j = Q_j^0 \times \{z \in \mathbb{R}^{n-2} : |z_k| < j,\ k = 1, \ldots, n-2\}$, $j = 1, 2$.

Тогда мы получим

$$\sum_{\nu=0}^{l+2m} 2^{2s\nu} \|v^s(y')\|^2_{W^{l+2m-\nu}(Q_1^0)} \leqslant$$

$$\leqslant k_5 \left(\sum_{\nu=0}^{l} 2^{2s\nu} \|A(\mathcal{D}_{y'}, 2^s\omega) v^s(y')\|^2_{W^{l-\nu}(Q_2^0)} + \|v^s(y')\|^2_{L_2(Q_2^0)} \right). \quad (2.4.37)$$

Поскольку $s > 0$, отсюда следует, что неравенство (2.4.37) эквивалентно следующему неравенству:

$$2^{2s(l+2m-1)}\|v(y)\|^2_{W^{l+2m}(Q_1^s)} \leqslant \\ \leqslant k_6\left(2^{2s(l+2m-1)}\|A(\mathcal{D}_y,\omega)v(y)\|^2_{W^l(Q_2^s)} + 2^{-2s}\|v(y)\|^2_{L_2(Q_2^s)}\right).$$

Умножая обе части этого неравенства на $2^{2s(a-l-2m+1)}$, мы имеем

$$\|v\|^2_{E_a^{l+2m}(Q_1^s)} \leqslant k_7\left(\|A(\omega)v\|^2_{E_a^l(Q_2^s)} + 2^{2s(a-l-2m)}\|v\|^2_{L_2(Q_2^s)}\right) \\ (s>0). \quad (2.4.38)$$

Суммируя (2.4.36), (2.4.38) по $s = 0, -1, -2, \dots$ и $s = 1, 2, \dots$ соответственно, и выбирая достаточно большое $R > 0$, мы получим (2.4.35). $\square$

Сопряженные операторы

Рассмотрим оператор

$$A'(\omega) = A'(\mathcal{D}_y,\omega) = \sum_{\substack{|\alpha|\leqslant 2m,\\ |\beta|=2m-|\alpha|}} \overline{a}_{\alpha\beta}\omega^\beta\mathcal{D}_y^\alpha \qquad (\omega\in S^{n-3}).$$

Оператор $A'(\mathcal{D}_y,\omega)$ — формально сопряженный к оператору $A(\mathcal{D}_y,\omega)$ относительно формулы Грина, т.е. для всех $u, v \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}^2\setminus\{0\})$ мы имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} A(\mathcal{D}_y,\omega)u\overline{v}\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^2} u\overline{A'(\mathcal{D}_y,\omega)v}\,dy \qquad (\omega\in S^{n-3}). \qquad (2.4.39)$$

Введем неограниченные операторы $\mathcal{A}(\omega)$ и $\mathcal{A}'(\omega)$ ($\omega\in S^{n-3}$), заданные формулами

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}(\omega) : \mathcal{D}(\mathcal{A}(\omega)) \subset E^0_{b-2m}(\mathbb{R}^2) \to E^0_b(\mathbb{R}^2),\\
&\mathcal{A}(\omega)v = A(\mathcal{D}_y,\omega)v, \qquad v\in\mathcal{D}(\mathcal{A}(\omega)) = E^{2m}_b(\mathbb{R}^2);\\
&\mathcal{A}'(\omega) : \mathcal{D}(\mathcal{A}'(\omega)) \subset E^0_{-b}(\mathbb{R}^2) \to E^0_{2m-b}(\mathbb{R}^2),\\
&\mathcal{A}'(\omega)v = A'(\mathcal{D}_y,\omega)v, \qquad v\in\mathcal{D}(\mathcal{A}'(\omega)) = E^{2m}_{2m-b}(\mathbb{R}^2).
\end{aligned}$$

Лемма 2.4.9. *Пусть уравнение* (2.4.30) *— правильно эллиптическое. Тогда оператор* $\mathcal{A}'(\omega)$ *— сопряженный к оператору* $\mathcal{A}(\omega)$ ($\omega\in S^{n-3}$) *по отношению к скалярному произведению в* $L_2(\mathbb{R}^2)$.

Доказательство. Обозначим $\mathcal{A}^*(\omega)$ сопряженный оператор к оператору $\mathcal{A}(\omega)$. Поскольку $\dot{C}^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ всюду плотно в пространствах $E_b^{2m}(\mathbb{R}^2)$ и $E_{2m-b}^{2m}(\mathbb{R}^2)$, то тождество (2.4.39) справедливо для всех $u \in E_b^{2m}(\mathbb{R}^2)$ и $v \in E_{2m-b}^{2m}(\mathbb{R}^2)$. Следовательно, $\mathcal{A}'(\omega) \subset \mathcal{A}^*(\omega)$.

Докажем теперь обратное включение. Пусть $v \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^*(\omega)) \subset E_{-b}^0(\mathbb{R}^2)$. Поскольку $\mathcal{A}^*(\omega)v \in E_{-b+2m}^0(\mathbb{R}^2) \subset L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$, то , по теореме С.5, мы получим $v \in W_{\mathrm{loc}}^{2m}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$.

Отсюда и из леммы 2.4.8 следует, что $v \in E_{-b+2m}^{2m}(\mathbb{R}^2)$. Следовательно, $\mathcal{A}^*(\omega) \subset \mathcal{A}'(\omega)$. $\square$

Рассмотрим тождество (2.4.39) для $\omega = 0$. Положим $u = u_1$, $v = r^{2m-2}v_1$ и $\tau = \ln r$. Тогда мы имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int\limits_0^{2\pi} \Big(\widehat{A}(\varphi, \mathcal{D}_\varphi, \mathcal{D}_\tau) u_1 \overline{v_1} - u_1 \overline{\widehat{A'}(\varphi, \mathcal{D}_\varphi, \mathcal{D}_\tau - 2i(m-1)) v_1} \Big) \, d\varphi = 0 \tag{2.4.40}$$

для всех $u_1, v_1 \in \{u \in \dot{C}^\infty([0, 2\pi] \times \mathbb{R}) : \mathcal{D}_\varphi^j\big|_{\varphi=0} = \mathcal{D}_\varphi^j\big|_{\varphi=2\pi},\ j = 0, 1, \ldots\}$, где $\widehat{A}'(\varphi, \mathcal{D}_\varphi, \mathcal{D}_\tau)$ определяется аналогично $\widehat{A}(\varphi, \mathcal{D}_\varphi, \mathcal{D}_\tau)$.

Введем функции $\psi, \widehat{\psi} \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R})$ так, что

$$\psi(\tau) = 0 \quad \text{для} \quad |\tau| > 1, \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(\tau) d\tau = 1,$$
$$\widehat{\psi}(\tau) = 1 \quad \text{для} \quad |\tau| < 1, \qquad \widehat{\psi}(\tau) = 0 \quad \text{для} \quad |\tau| > 2.$$

Подставляя $u_1 = e^{i\lambda\tau}\psi(\tau)u_2(\varphi)$ и $v_1 = e^{i\bar{\lambda}\tau}\widehat{\psi}(\tau)v_2(\varphi)$ в (2.4.40), получаем

$$\int\limits_0^{2\pi} \Big(\widehat{A}(\varphi, \mathcal{D}_\varphi, \lambda) u_2 \overline{v_2} - u_2 \overline{\widehat{A'}(\varphi, \mathcal{D}_\varphi, \overline{\lambda} - 2i(m-1)) v_2} \Big) \, d\varphi = 0 \tag{2.4.41}$$

для всех $u_2, v_2 \in C_{2\pi}^\infty[0, 2\pi]$ и $\lambda \in \mathbb{C}$.

Наряду с оператор-функцией $\lambda \mapsto \widehat{A}(\lambda)$ рассмотрим оператор-функцию $\lambda \mapsto \widehat{A}'(\lambda) \in \mathcal{B}\big(W_{2\pi}^{l+2m}(0, 2\pi), L_2(0, 2\pi)\big)$, заданную по формуле $\widehat{A}'(\lambda)w = \widehat{A}'(\varphi, \mathcal{D}_\varphi, \lambda)w$. Мы введем также неограниченные операторы

$$\widehat{\mathcal{A}}(\lambda), \widehat{\mathcal{A}}'(\lambda) : \mathcal{D}(\widehat{\mathcal{A}}(\lambda)) = \mathcal{D}(\widehat{\mathcal{A}}'(\lambda)) \subset L_2(0, 2\pi) \to L_2(0, 2\pi)$$

по формулам:

$$\widehat{\mathcal{A}}(\lambda)w = \widehat{A}(\varphi, \mathcal{D}_\varphi, \lambda)w, \qquad w \in \mathcal{D}(\widehat{\mathcal{A}}(\lambda)) = W^{2m}_{2\pi}(0, 2\pi),$$
$$\widehat{\mathcal{A}}'(\lambda)w = \widehat{A}'(\varphi, \mathcal{D}_\varphi, \lambda)w, \qquad w \in \mathcal{D}(\widehat{\mathcal{A}}'(\lambda)).$$

Аналогично лемме 2.4.9 из (2.4.41) заключаем, что $\widehat{\mathcal{A}}'(\overline{\lambda} - 2i(m-1))$ — сопряженный оператор к $\widehat{\mathcal{A}}(\lambda)$ по отношению к скалярному произведению в $L_2(0, 2\pi)$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}$. Отсюда из леммы 2.4.1(а) следует:

Лемма 2.4.10. *Пусть уравнение* (2.4.30) — *правильно эллиптическое. Тогда λ — собственное значение оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{A}(\lambda)$ в том и только в том случае, когда $\overline{\lambda} - 2i(m-1)$ — собственное значение оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{A}'(\lambda)$.*

Разрешимость эллиптических задач в $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{P}$

Основной результат этого пункта можно сформулировать следующим образом.

Теорема 2.4.1. *Пусть уравнение* (2.4.30) — *правильно эллиптическое. Тогда оператор $A : H^{l+2m}_a(\mathbb{R}^n) \to H^l_a(\mathbb{R}^n)$ не является изоморфизмом для всех $l \geqslant 0$ и $a \in \mathbb{R}$.*

Это утверждение вытекает из леммы 2.4.6 и следующего результата.

Лемма 2.4.11. *Пусть уравнение* (2.4.30) *Э— правильно эллиптическое. Тогда оператор $A(\omega) : E^{l+2m}_a(\mathbb{R}^2) \to E^l_a(\mathbb{R}^2)$ не является изоморфизмом для всех $\omega \in S^{n-3}$, $l \geqslant 0$ и $a \in \mathbb{R}$.*

Для доказательства леммы 2.4.11 установим вначале три вспомогательных утверждения.

Лемма 2.4.12. *Пусть уравнение* (2.4.30) — *правильно эллиптическое, и пусть замкнутая полоса, ограниченная прямыми* $\operatorname{Im}\lambda = a_2 + 1 - l_2 - 2m$ *и* $\operatorname{Im}\lambda = a_1 + 1 - l_1 - 2m$ *не содержит собственных значений оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{A}(\lambda)$. Предположим, что $f_0 \in E^{l_1}_{a_1}(\mathbb{R}^2) \cap E^{l_2}_{a_2}(\mathbb{R}^2)$ и что $v \in E^{l_1+2m}_{a_1}(\mathbb{R}^2)$ — решение уравнения*

$$A(\omega)v = f_0 \qquad (\omega \in S^{n-3}). \tag{2.4.42}$$

Тогда $v \in E^{l_2+2m}_{a_2}(\mathbb{R}^2)$.

Доказательство. 1. Обозначим через $[A(\omega), \eta]$ коммутатор оператора $A(\omega)$ и оператора умножения на функцию η, где $\eta \in C^\infty(\bar{R}_+)$ — такова, что $\eta(r) = 0$ для $r \leqslant 1$, $\eta(r) = 1$ для $r \geqslant 2$. Очевидно, $\operatorname{supp}[A(\omega), \eta]$ $v \subset \{y \in \mathbb{R}^2 : 1 \leqslant r \leqslant 2\}$. Поэтому, т.к. $v \in W^{l+2m}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$, из теоремы C.5 мы получим

$$A(\omega)(\eta v) = \eta f_0 + [A(\omega), \eta]v \in E^{l_1}_{a_1}(\mathbb{R}^2) \cap E^{l_2}_{a_2}(\mathbb{R}^2), \tag{2.4.43}$$

где $l = \max\{l_1, l_2\}$. С другой стороны, ηv превращается в нуль вблизи начала координат. Следовательно, $\eta v \in E^0_{a_2-l_2-2m}(B_R)$ для любого $R > 0$. Используя этот факт, соотношение (2.4.43) и лемму 2.4.8, мы заключаем, что $\eta v \in E^{l_2+2m}_{a_2}(\mathbb{R}^2)$.

2. Поскольку $\operatorname{supp} A(\omega)((1-\eta)v) \subset \{y \in \mathbb{R}^2 : r \leqslant 2\}$, аналогично соотношению (2.4.43) мы получим

$$A(\omega)((1-\eta)v) \in H^{l_1}_{a_1}(\mathbb{R}^2) \cap H^{l_2}_{a_2}(\mathbb{R}^2). \tag{2.4.44}$$

Поэтому, используя лемму 2.4.3 и замечание 2.4.2, мы заключаем, что $(1-\eta)v \in H^{l_2+2m}_{a_2}(\mathbb{R}^2)$. Следовательно, $(1-\eta)v \in E^{l_2+2m}_{a_2}(\mathbb{R}^2)$. Заметим, что, поскольку оператор $A(\omega)$ содержит члены низших порядков, мы должны применить лемму 2.4.3 конечное число раз.

Таким образом, $v \in E^{l_2+2m}_{a_2}(\mathbb{R}^2)$. □

Лемма 2.4.13. *Пусть уравнение* (2.4.30) *— правильно эллиптическое, и пусть полоса* $h_2 = a_2 + 1 - l - 2m < \operatorname{Im}\lambda < h_1 = a_1 + 1 - l - 2m$ *не содержит собственных значений оператор-функции* $\lambda \mapsto \widehat{A}(\lambda)$. *Если для некоторого* $a_0 \in (a_2, a_1)$ *оператор* $A(\omega)$ $(\omega \in S^{n-3})$ *— изоморфизм, то для любого* $a \in (a_2, a_1)$ *оператор* $A(\omega)$ $(\omega \in S^{n-3})$ *— изоморфизм.*

Доказательство. Достаточно доказать, что $\mathcal{N}(A(\omega)) = \{0\}$ и $\mathcal{R}(A(\omega)) = E^l_b(\mathbb{R}^2)$ для любого $a = b \in (a_2, a_1)$.

Из леммы 2.4.12 следует, что, если $v \in \mathcal{N}(A(\omega))$ для $a = b$, $a_2 < b < a_1$, то $v \in \mathcal{N}(A(\omega))$ для $a = a_0$. Следовательно, $v = 0$, т.е. $\mathcal{N}(A(\omega)) = \{0\}$.

Рассмотрим уравнение (2.4.42) для $f_0 \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ и $a = a_0$. По предположению, существует единственное решение $v \in E^{l+2m}_{a_0}(\mathbb{R}^2)$ этой задачи. В силу леммы 2.4.12 $v \in E_a^{l+2m}(\mathbb{R}^2)$. Из леммы 2.4.7 следует, что образ $\mathcal{R}(\mathcal{A}(\omega))$ замкнут в $E_b^l(\mathbb{R}^2)$ для $a = b$.Поскольку $\dot{C}^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ всюду плотно в $E_b^l(\mathbb{R}^2)$, мы имеем $\mathcal{R}(A(\omega)) = E_b^l(\mathbb{R}^2)$. $\square$

Лемма 2.4.14. *Пусть уравнение* (2.4.30) — *правильно эллиптическое. Предположим, что каждая прямая* $\operatorname{Im}\lambda = h_2 = a_2 + 1 - l - 2m$ *и* $\operatorname{Im}\lambda = h_1 = a_1 + 1 - l - 2m$ *содержит собственные значения оператор-функции* $\lambda \mapsto \widehat{A}(\lambda)$ *и что полоса* $h_2 < \operatorname{Im}\lambda < h_1$ *не содержит собственных значений оператор-функции* $\lambda \mapsto \widehat{A}(\lambda)$. *Предположим также, что для некоторого* $a_0 \in (a_2, a_1)$ *оператор* $A(\omega)$ $(\omega \in S^{n-3})$ — *изоморфизм.*

Тогда оператор $A(\omega)$ *не является изоморфизмом для всех* $a \notin (a_2, a_1)$.

Доказательство. 1. Вначале мы докажем, что $\dim \mathcal{N}(A(\omega)) > 0$ для $a > a_1$. Положим
$$u = r^{i\lambda_0}\psi^0(\varphi),$$
где λ_0 and $\psi^0(\varphi)$ — собственное значение и соответствующий собственный вектор оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{A}(\lambda)$ такие, что $\operatorname{Im}\lambda_0 = a_1 + 1 - l - 2m$. В этом случае
$$A(0)u = 0. \tag{2.4.45}$$

Поэтому
$$A(\omega)((1-\eta)u) = [A(0), (1-\eta)]u + (A(\omega) - A(0))((1-\eta)u) \equiv F,$$
где η — функция, определенная в доказательстве леммы 2.4.2.

Заметим, что
$$(1-\eta)u \notin E_b^{l+2m}(\mathbb{R}^2) \quad \text{для любого} \quad b \leqslant a_1, \tag{2.4.46}$$
$$(1-\eta)u \in E_a^{l+2m}(\mathbb{R}^2) \quad \text{для любого} \quad a > a_1. \tag{2.4.47}$$

Очевидно,
$$F \in E_b^l(\mathbb{R}^2) \quad \text{для} \quad b \in (a_1 - 1, +\infty). \tag{2.4.48}$$

По лемме 2.4.13 уравнение (2.4.42) с правой частью $f_0 = F$ имеет единственное решение $v \in E_b^{l+2m}(\mathbb{R}^2)$, где $b \in (a_2, a_1) \cap (a_1 - 1, +\infty)$.

Поэтому $w = (1-\eta)u - v$ нетривиальная функция в силу (2.4.46). С другой стороны, в силу (2.4.47),

$$F \in E_a^l(\mathbb{R}^2) \quad \text{для любого} \quad a > a_1.$$

Более того, $v \in E_b^{l+2m}(\mathbb{R}^2) \subset E_b^0(\mathbb{R}^2)$. Используя этот факт и (2.4.48), из леммы 2.4.8 мы выводим, что $v \in E_{b+l+2m}^{l+2m}(\mathbb{R}^2)$. Повторяя эти рассуждения конечное число раз, мы получим, что $v \in E_a^{l+2m}(\mathbb{R}^2)$ для $a > a_1$. Используя это соотношение совместно с (2.4.47), мы видим, что $w \in E_a^{l+2m}(\mathbb{R}^2)$ для $a > a_1$, и, следовательно, $w \in \mathcal{N}(A(\omega))$ для $a > a_1$.

2. Докажем, что $\operatorname{codim} \mathcal{N}(A(\omega)) > 0$ для $a < a_2$.

2a. Предположим на время, что $d = \dim \mathcal{R}(A(\omega))^\perp > 0$ для $A(\omega) : E_{a-l}^{2m}(\mathbb{R}^2) \to E_{a-l}^0(\mathbb{R}^2)$. Докажем тогда, что $\mathcal{R}(A(\omega))^\perp$ для $A(\omega) : E_a^{2m+l}(\mathbb{R}^2) \to E_a^l(\mathbb{R}^2)$ имеет ту же размерность. По предположению уравнение (2.4.42) с $f_0 \in E_{a-l}^0(\mathbb{R}^2)$ имеет решение $v \in E_{a-l}^{2m}(\mathbb{R}^2)$ тогда и только тогда, когда

$$(f_0, \varphi_j)_{E_{a-l}^0(\mathbb{R}^2)} = 0 \qquad (j = 1, \ldots, d), \tag{2.4.49}$$

где $\varphi_1, \ldots, \varphi_d \in E_{a-l}^0(\mathbb{R}^2)$ — линейно независимы. Из леммы 2.4.8 следует, что условия (2.4.49) необходимые и достаточные для разрешимости уравнения (2.4.42) в $E_a^{l+2m}(\mathbb{R}^2)$ с $f_0 \in E_a^l(\mathbb{R}^2)$. Очевидно,

$$|(f_0, \varphi_j)_{E_{a-l}^0(\mathbb{R}^2)}| \leqslant \|f_0\|_{E_{a-l}^0(\mathbb{R}^2)} \|\varphi_j\|_{E_{a-l}^0(\mathbb{R}^2)} \leqslant \|f_0\|_{E_a^l(\mathbb{R}^2)} \|\varphi_j\|_{E_{a-l}^0(\mathbb{R}^2)}.$$

Следовательно, по теореме Рисса существуют функции $\Phi_j \in E_a^l(\mathbb{R}^2)$ $(j = 1, \ldots, d)$ такие, что

$$(f_0, \varphi_j)_{E_{a-l}^0(\mathbb{R}^2)} = (f_0, \Phi_j)_{E_a^l(\mathbb{R}^2)}$$

и функции Φ_j — линейно независимы. Таким образом, размерность $\dim \mathcal{R}(A(\omega))^\perp$ в пространстве $E_a^l(\mathbb{R}^2)$ равна d.

2b. Остается доказать, что $d = \dim \mathcal{R}(A(\omega))^\perp > 0$ для $A(\omega) : E_{a-l}^{2m}(\mathbb{R}^2) \to E_{a-l}^0(\mathbb{R}^2)$. В силу леммы 2.4.10 прямые $h_1' = l + 2m - a_2 + 1 - 2m$ и $h_2' = l + 2m - a_1 + 1 - 2m$ содержат собственные значения оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{A}'(\lambda)$, а полоса $h_2' < \operatorname{Im} \lambda < h_1'$ не содержит собственных значений оператор-функции $\widehat{A}'(\lambda)$. По предположению оператор $A(\omega) : E_{a_0}^{2m+l}(\mathbb{R}^2) \to E_{a_0}^l(\mathbb{R}^2)$, $\omega \in S^{n-3}$, — изоморфизм. Поэтому из лемм 2.4.8 и 2.4.7 следует, что оператор $A(\omega) : E^{2m}_{a_0-l}(\mathbb{R}^2) \to E^0_{a_0-l}(\mathbb{R}^2)$ — также изоморфизм. Следовательно, из леммы 2.4.9 вытекает, что оператор $A'(\omega) : E^{2m}_{l+2m-a_0}(\mathbb{R}^2) \to E^0_{l+2m-a_0}(\mathbb{R}^2)$ — изоморфизм. Теперь мы можем применить первую часть доказательства к оператору $A'(\omega)$. Таким образом, мы заключаем, что $\dim \mathcal{N}(A'(\omega)) > 0$ для $A'(\omega) : E^{2m}_b(\mathbb{R}^2) \to E^0_b(\mathbb{R}^2)$, если $b > l + 2m - a_2$. Поэтому в силу леммы 2.4.9 $d > 0$ для $A(\omega) : E^{2m}_{a-l}(\mathbb{R}^2) \to E^0_{a-l}(\mathbb{R}^2)$, если $2m-(a-l) > l+2m-a_2$, т.е. $a < a_2$. $\square$

Доказательство теоремы 2.4.1. 1. Вначале мы покажем, что оператор $A(\omega) : E^{l+2m}_{l+m}(\mathbb{R}^2) \to E^l_{l+m}(\mathbb{R}^2)$ не является изоморфизмом для любого $l \geqslant 0$. Для этого мы докажем, что $\lambda_0 = i(1-m)$ — собственное значение оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{A}(\lambda)$. Рассмотрим однородный полином $q(y)$ порядка $m-1$. Запишем $q(y)$ в полярных координатах $q(y) = r^{m-1}\tilde{q}(\varphi)$, где $\tilde{q} \in C^\infty_{2\pi}[0, 2\pi]$. Тогда мы имеем

$$0 = A(\mathcal{D}_y, 0)q(y) = r^{-2m}\widehat{A}(\varphi, \mathcal{D}_\varphi, r\mathcal{D}_r)(r^{m-1}\tilde{q}(\varphi)) = \\ = r^{-m-1}\widehat{A}(\varphi, \mathcal{D}_\varphi, i(1-m))\tilde{q}(\varphi).$$

Следовательно, $\lambda_0 = i(1-m)$ — собственное значение, а $\tilde{q}(\varphi)$ — соответствующая собственная функция. Поскольку прямая $\operatorname{Im}\lambda = 1 - m = l + m + 1 - l - 2m$ содержит собственное значение λ_0, из леммы 2.4.7 следует, что оператор $A(\omega) : E^{l+2m}_{l+m}(\mathbb{R}^2) \to E^l_{l+m}(\mathbb{R}^2)$ не является фредгольмовым. Таким образом, оператор $A(\omega)$ не является изоморфизмом.

2. Докажем теперь, что оператор $A(\omega) : E^{2m}_a(\mathbb{R}^2) \to E^0_a(\mathbb{R}^2)$ не является изоморфизмом для любых $a \neq m$. Предположим противное, что оператор $A(\omega)$ — изоморфизм для некоторого $a \neq m$. Тогда в силу леммы 2.4.9, оператор

$$A'(\omega) : E^{2m}_{-a+2m}(\mathbb{R}^2) \to E^0_{-a+2m}(\mathbb{R}^2) \tag{2.4.50}$$

является изоморфизмом.

Заметим, что

$$\overline{A(\mathcal{D}_y, \omega)u(y)} \equiv [A'(\mathcal{D}_{y'}, \omega)w(y')]\big|_{y'=-y},$$

где $w(y') = u(-y')$. Отсюда и из (2.4.50) следует, что оператор $A(\omega) : E^{2m}_{-a+2m}(\mathbb{R}^2) \to E^0_{-a+2m}(\mathbb{R}^2)$ — также изоморфизм. Это противоречит лемме 2.4.14, поскольку в полосе между прямыми $\operatorname{Im}\lambda = a + 1 - 2m$ и $\operatorname{Im}\lambda = (-a + 2m) + 1 - 2m$ имеется собственное значение $\lambda_0 = i(1 - m)$ оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{A}(\lambda)$

3. Наконец, мы докажем, что оператор $A(\omega) : E^{l+2m}_a(\mathbb{R}^2) \to E^l_a(\mathbb{R}^2)$ не является изоморфизмом для всех $\omega \in S^{n-3}$, $l > 0$ и $a \neq l + m$. Предположим противное, что этот оператор — изоморфизм для некоторых $\omega \in S^{n-3}$, $l > 0$ и $a \neq l + m$. Тогда в силу леммы 2.4.7 прямая $\operatorname{Im}\lambda = a+1-l-2m$ не содержит собственных значений λ оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{A}(\lambda)$. Поэтому из второй части доказательства следует, что или $\dim\mathcal{N}(A(\omega)) > 0$, или $\dim\mathcal{R}(A(\omega))^\perp > 0$ для $A(\omega) : E^{2m}_{a-l}(\mathbb{R}^2) \to E^0_{a-l}(\mathbb{R}^2)$.

Вначале мы предположим, что $\dim\mathcal{N}(A(\omega)) > 0$ для указанного оператора. Следовательно, существует $0 \neq v \in E^{2m}_{a-l}(\mathbb{R}^2)$ такое, что $A(\omega)v = 0$. В силу леммы 2.4.8 $v \in E^{l+2m}_a(\mathbb{R}^2)$. Таким образом, $\dim\mathcal{N}(A(\omega)) > 0$ для $A(\omega) : E^{l+2m}_a(\mathbb{R}^2) \to E^l_a(\mathbb{R}^2)$. Это противоречит нашему предположению.

Пусть теперь $\dim\mathcal{R}(A(\omega))^\perp > 0$ для $A(\omega) : E^{2m}_{a-l}(\mathbb{R}^2) \to E^0_{a-l}(\mathbb{R}^2)$. Поскольку $A(\omega) : E^{l+2m}_a(\mathbb{R}^2) \to E^l_a(\mathbb{R}^2)$ — изоморфизм, то уравнение $A(\omega)v = f_0$ имеет решение $v \in E^{l+2m}_a(\mathbb{R}^2) \subset E^{2m}_{a-l}(\mathbb{R}^2)$ для любого $f_0 \in E^l_a(\mathbb{R}^2)$. Далее, по лемме 2.4.7 прямая $\operatorname{Im}\lambda = (a - l) + 1 - 2m$ не содержит собственных значений оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{A}(\lambda)$. Поэтому, т.к. $E^l_a(\mathbb{R}^2)$ всюду плотно в $E^0_{a-l}(\mathbb{R}^2)$, а $\mathcal{R}(A(\omega))$ — замкнуто в $E^0_{a-l}(\mathbb{R}^2)$ для $A(\omega) : E^{2m}_{a-l}(\mathbb{R}^2) \to E^0_{a-l}(\mathbb{R}^2)$, мы имеем $\mathcal{R}(A(\omega)) = E^0_{a-l}(\mathbb{R}^2)$. Таким образом, мы получим противоречие. $\square$

Библиографические примечания к главе 2

Впервые нелокальные эллиптические задачи в плоских и двугранных углах рассматривались в работах [29,30]. Там же рассматривались эллиптические уравнения в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ и в $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{P}$, где $\mathcal{P} = \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^n : y = 0\}$.

Теорема об отсутствии изоморфизма, порожденного эллиптическим дифференциальным оператором в весовых пространствах Кондратьева на $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{P}$, $n \geqslant 3$, доказана в статье [11]. Однозначная разрешимость и асимптотика решений локальных эллиптических задач в плоских углах и бесконечных конусах исследованы в статье [18]. В работах [22, 25] эти результаты обобщены на случай двугранных углов. Изложение главы 2 в данном учебном пособии основано на результатах монографии [32]. Там же имеется подробный обзор литературы.

Задачи к главе 2

1. Рассмотрим нелокальную краевую задачу (2.1.23), (2.1.24) при $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 0$, $\beta = \pi$. При каких $a \in \mathbb{R}$ эта задача имеет единственное сильное решение $u \in H_a^3(\theta)$ для любой правой части $f \in \mathcal{H}_a^1(\theta, \gamma)$, а множество правых частей $f \in \mathcal{H}_a^1(\theta, \gamma)$, при которых соответствующая локальная задача разрешима в $H_a^3(\theta)$, не является замкнутым в $\mathcal{H}_a^1(\theta, \gamma)$?

2. Рассмотрим нелокальную краевую задачу (2.1.23), (2.1.24) при $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -2$, $\beta = \pi/2$. При каких $a \in \mathbb{R}$ эта задача и одновременно соответствующая локальная задача однозначно разрешимы в $H_a^4(\theta)$ для любой правой части $f \in \mathcal{H}_a^2(\theta, \gamma)$?

3. Рассмотрим нелокальную краевую задачу (2.1.23), (2.1.24) при $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -1$, $\beta = \pi/3$. При каких $a \in \mathbb{R}$ множество правых частей $f \in \mathcal{H}_a^1(\theta, \gamma)$, при которых эта задача разрешима в $H_a^3(\theta)$, не является замкнутым в $\mathcal{H}_a^1(\theta, \gamma)$, а множество правых частей f, при которых соответствующая локальная задача разрешима в $H_a^3(\theta)$, совпадает с $\mathcal{H}_a^1(\theta, \gamma)$?

4. Рассмотрим нелокальную краевую задачу (2.1.23), (2.1.24) при $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = -1$, $\beta = \pi/2$. При каких $a \in \mathbb{R}$ эта задача однозначно разрешима в $H_a^4(\theta)$ и соответствующая локальная задача однозначно разрешима в $H_a^4(\theta)$ для любой правой части $f \in \mathcal{H}_a^2(\theta, \gamma)$?

5. Рассмотрим нелокальную краевую задачу (2.1.23), (2.1.24) при $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 0$, $\beta = \pi$. Найти асимптотическое представление решения $v \in H_1^2(\theta)$ для $f \in \mathcal{H}_0^6(\theta, \gamma)$.

6. Рассмотрим нелокальную краевую задачу (2.1.23), (2.1.24) при $\alpha_1 = -2$, $\alpha_2 = 0$, $\beta = \pi/2$. Найти асимптотическое представление решения $v \in H_1^2(\theta)$ для $f \in \mathcal{H}_0^9(\theta, \gamma)$.

7. Рассмотрим нелокальную краевую задачу (2.1.23), (2.1.24) при $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 0$, $\beta = 3\pi/2$. Найти асимптотическое представление решения $v \in H_1^2(\theta)$ для $f \in \mathcal{H}_{-1}^7(\theta, \gamma)$.

8. Рассмотрим нелокальную краевую задачу (2.1.23), (2.1.24) при $\alpha_1 = 1/2$, $\alpha_2 = 0$, $\beta = \pi$. Найти асимптотическое представление решения $v \in H_1^2(\theta)$ для $f \in \mathcal{H}_0^6(\theta, \gamma)$.

9. Доказать справедливость замечания 2.1.1.

10. Доказать, что множество $\mathcal{C}_0^{\infty,N}(\overline{\theta}, \gamma)$ из доказательства теоремы 2.2.1 всюду плотно в $\mathcal{H}_{a_1}^{l_1,N}(\theta, \gamma) \cap \mathcal{H}_{a_2}^{l_2,N}(\theta, \gamma)$.

11. Доказать справедливость замечания 2.2.2.

12. Доказать, что равенства (2.3.7) можно представить в виде (2.3.2), где операторы $\mathbf{B}_\rho^1$ удовлетворяют условию 2.3.3.

13. Доказать неравенство (2.3.25).

14. Доказать неравенство (2.3.26).

15. Доказать, что формула $\langle \int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} F_{\rho\mu}(y,z)dz, \psi_{\rho\mu} \rangle$ задает линейный ограниченный функционал на $H_a^{l+2m-m_{\rho\mu}-1/2}(\Gamma_\rho)$ (см. часть 2 доказательства теоремы 2.3.1.

16. Доказать неравенство (2.3.39).

17. Доказать неравенство (2.3.41).

18. Доказать неравенство (2.3.67).

19. Доказать неравенство (2.3.68).
20. Доказать неравенство (2.3.108).
21. Доказать неравенство (2.3.109).
22. Доказать компактность оператора $(\eta_0^2 \mathbf{T}_0^2 \eta_0^1)^2 : \mathcal{E}_a^{l,N}(\theta, \gamma) \to \mathcal{E}_a^{l,N}(\theta, \gamma)$ из леммы 2.3.5.

Темы курсовых работ к главе 2

1. Исследовать разрешимость уравнения (2.1.23) с нелокальными краевыми условиями
$$v(\varphi, r)\big|_{\gamma j} - \alpha_{j1} v(\varphi + \beta/3,\, r)\big|_{\gamma j} - \alpha_{j2} v(\varphi + 2\beta/3,\, r)\big|_{\gamma j} = f_j(y)$$
$(y \in \gamma_j,\ j = 1, 2)$ в весовых пространствах Кондратьева, где $\alpha_{ji} \in \mathbb{R}$ $(i, j = 1, 2)$.
2. Найти собственные и присоединенные функции оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$, соответствующей нелокальной эллиптической краевой задаче (2.1.23), (2.1.24).
3. Найти собственные значения, а также собственные и присоединенные функции оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$, соответствующей нелокальной краевой задаче из темы 1 курсовых работ к данной главе.
4. Обобщить результаты примера 2.3.2 на случай нелокальной эллиптической краевой задачи из темы 1 курсовых работ к данной главе.
5. Доказать лемму 2.4.3.
6. Доказать леммы 2.4.4, 2.4.5.
7. Доказать следствия 2.4.2, 2.4.3.
8. Доказать лемму 2.4.6.
9. Доказать однозначную разрешимость в весовых пространствах Кондратьева нелокальной эллиптической задачи в бесконечном конусе в случае носителя нелокальных членов во внутреннем конусе.

10. Найти асимптотическое представление решений в весовых пространствах Кондратьева нелокальной эллиптической задачи в бесконечном конусе в случае носителя нелокальных членов во внутреннем конусе.

Нерешенные задачи к главе 2

1. Получить достаточные условия отсутствия собственных значений оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$ вида (2.1.10) в полосе $h_2 \leqslant \mathrm{Im}\lambda \leqslant \mathrm{h}_1$, $h_2 < h_1$.

2. Верна ли гипотеза, что все собственные числа оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$ вида (2.1.10), за исключением конечного их числа, расположены внутри некоторого двойного угла, содержащего мнимую ось?

Глава 3

Разрешимость эллиптических задач в ограниченных областях с нелокальными условиями вблизи границы

3.1. Локальные эллиптические задачи в плоских областях с угловыми точками

Локальные эллиптические задачи в плоских областях с угловыми точками

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с конечным числом угловых точек, см. определение 1.3.1 Для простоты мы будем предполагать, что граница ∂Q имеет вид $\partial Q = \left(\bigcup\limits_i M_i\right) \cup \mathcal{K}_1 \, (i = 1, \dots, N_1)$, где M_i — непересекающиеся открытые кривые класса C^∞, множество $\mathcal{K}_1 \subset \partial Q$ состоит из конечного числа точек $g_\nu \, (\nu = 1, \dots, N_1)$, и в некоторой окрестности каждой точки $g_\nu \in \mathcal{K}_1$ область Q совпадает с углом $\theta_\nu + g_\nu, \theta_\nu = \left\{y \in \mathbb{R}^2 : d_{\nu 1} < \varphi < d_{\nu 2},\ 0 < r\right\}$, где $\varphi,\ r$ — полярные координаты y, а $0 < d_{\nu 2} - d_{\nu 1} < 2\pi$. Обозначим

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3,$$

где множество $\mathcal{K}_2$ состоит из конечного числа N_2 точек $g \in \bigcup\limits_i M_i$ и множество $\mathcal{K}_3$ состоит из конечного числа N_3 точек $g \in Q$. Вообще говоря, $\mathcal{K}_2 \neq \varnothing$ и $\mathcal{K}_3 \neq \varnothing$. Однако может также случиться, что имеет место один из следующих случаев: 1) $\mathcal{K}_2 = \varnothing,\ \mathcal{K}_3 = \varnothing,$ 2) $\mathcal{K}_2 = \varnothing,$ $\mathcal{K}_3 \neq \varnothing$, или 3) $\mathcal{K}_2 \neq \varnothing$, $\mathcal{K}_3 = \varnothing$.

Рассмотрим уравнение

$$Au = f_0(y) \qquad (y \in Q \setminus K) \tag{3.1.1}$$

с локальными краевыми условиями

$$B_{i\mu 0} u\big|_{M_i} = f_{i\mu}(y) \qquad (y \in M_i,\ i = 1, \dots, N_1,\ \mu = 1, \dots, m). \tag{3.1.2}$$

Здесь

$$Au = A(y, \mathcal{D}_y)\, u(y) = \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} a_\alpha(y)\, \mathcal{D}_y^\alpha u(y), \tag{3.1.3}$$

$$B_{i\mu 0} u = B_{i\mu 0}(y, \mathcal{D}_y)\, u(y) = \sum_{|\alpha| \leqslant m_{i\mu}} b_{i\mu 0\alpha}(y)\, \mathcal{D}_y^\alpha u(y), \tag{3.1.4}$$

$a_\alpha,\, b_{i\mu 0\alpha} \subset C^\infty\left(\mathbb{R}^2\right)$, $f_0 \in H_a^l(Q)$, $f_{i\mu} \in H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(M_i)$ — комплекснозначные функции; $H_a^l(Q) = H_a^l(Q, K)$ и $H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(M_i) = H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(M_i, K)$; $l \geqslant \max\{-2m + m_{i\mu} + 1\}$ — неотрицательное целое число. Предположим, что или $K = \mathcal{K}$, или $K = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$, или $K = \mathcal{K}_1$. Если $K \subset \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$ или $\mathcal{K}_3 = \varnothing$, мы будем рассматривать уравнение (3.1.1) во всей области Q. Если $\mathcal{K}_3 \neq \varnothing$ и $K = \mathcal{K}$, мы будем рассматривать уравнение (3.1.1) в $Q \setminus \mathcal{K}_3$.

Обозначим $A^0(y, \mathcal{D}_y)$ и $B_{i\mu 0}^0(y, \mathcal{D}_y)$ главные однородные части операторов $A(y, \mathcal{D}_y)$ и $B_{i\mu 0}(y, \mathcal{D}_y)$ соответственно.

Предположим, что операторы $A^0(y, \mathcal{D}_y)$ и $B_{i\mu 0}^0(y, \mathcal{D}_y)$ удовлетворяют следующим условиям:

Условие 3.1.1. Оператор $A^0(y, \mathcal{D}_y)$ — правильно эллиптический для всех $y \in \overline{Q}$.

Условие 3.1.2. Система операторов $\left\{B_{i\mu 0}^0(y, \mathcal{D}_y)\right\}$ $(\mu = 1, \ldots, m)$ удовлетворяет условию Лопатинского относительно оператора $A^0(y, \mathcal{D}_y)$ для всех $y \in \overline{M}_i$ и $i = 1, \ldots, N_1$.

Введем линейные ограниченные операторы

$$L,\, L_0 : H_a^{l+2m}(Q) \to \mathcal{H}_a^l(Q, M) = H_a^l(Q) \times \prod_{i,\mu} H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(M_i)$$

по формулам

$$Lu = \left\{Au, B_{i\mu 0} u\big|_{M_i}\right\},\ L_0 u = \left\{A^0 u, B_{i\mu 0}^0 u\big|_{M_i}\right\}, \tag{3.1.5}$$

где $A^0 u = A^0(y, \mathcal{D}_y)\, u(y)$ и $B_{i\mu 0}^0 u = B_{i\mu 0}^0(y, \mathcal{D}_y)\, u(y)$.

Обозначим $f = \{f_0, f_{i\mu}\}$.

Определение 3.1.1. Функция $u \in H_a^{l+2m}(Q)$ называется *сильным решением* задачи (3.1.1), (3.1.2) в пространстве $H_a^{l+2m}(Q)$, если

$$Lu = f.$$

Замечание 3.1.1. Из-за множеств $\mathcal{K}_2$ и $\mathcal{K}_3$ задача (3.1.1), (3.1.2) выглядит как искусственное обобщение эллиптических задач в областях с угловыми точками, которые изучались В. А. Кондратьевым в статье [18]. На самом деле задача (3.1.1), (3.1.2) в пространстве $H_a^{l+2m}(Q, K)$ тесно связана с соответствующей нелокальной эллиптической задачей, см. § 3.2. Для нелокальных эллиптических задач множество K играет роль расширенного множества точек сопряжения.

Не ограничивая общности, мы будем предполагать, что в достаточно малой окрестности каждой точки $g \in \mathcal{K}_2$ область Q совпадает с полуплоскостью $\left\{y \in \mathbb{R}^2 :\, 0 < \varphi < \pi\right\}$, где r, φ — полярные координаты с полюсом в точке g. В противном случае, используя невырожденную гладкую замену переменных, мы можем распрямить границу ∂Q в некоторой окрестности точки g.

Для фиксированной точки $g \in \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$, мы рассмотрим краевую задачу с постоянными коэффициентами

$$A^0(g, \mathcal{D}_y)\, u = f_0(y) \qquad (y \in \theta), \tag{3.1.6}$$

$$B^0_{i\mu 0}(g, \mathcal{D}_y)\, u\big|_{\gamma_\rho} = f_{\rho\mu}(y) \quad (y \in \gamma_\rho,\, \rho = 1, 2,\, \mu = 1, \dots, m) \tag{3.1.7}$$

относительно $u \in H_a^{l+2m}(\theta)$. Здесь $\theta = \theta_\nu = \left\{y \in \mathbb{R}^2 :\, d_{\nu 1} < \varphi < d_{\nu 2},\, 0 < r\right\}$ и $\gamma_\rho = \gamma_{\nu\rho} = \left\{y \in \mathbb{R}^2 :\, \varphi = d_{\nu\rho},\, 0 < r\right\}$, если $g = g_\nu \in \mathcal{K}_1$ $(\nu = 1, \dots, N_1$, $\rho = 1, 2)$; $\theta = \left\{y \in \mathbb{R}^2 :\, 0 < \varphi < \pi,\, 0 < r\right\}$, $\gamma_1 = \left\{y \in \mathbb{R}^2 :\, \varphi = 0,\, 0 < r\right\}$ и $\gamma_2 = \left\{y \in \mathbb{R}^2 :\, \varphi = \pi,\, 0 < r\right\}$, если $g \in \mathcal{K}_2$ $(\nu = 1, \dots, N_2)$; $1 \leqslant i(\rho, g_\nu) \leqslant N_1$ таково, что $g_\nu \in \overline{M}_i$ и $M_i \cap (\gamma_\rho + g_\nu) \neq \varnothing$; $f_0 \in H_a^l(\theta)$ и $f_{\rho\mu} \in H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\gamma_\rho)$; φ, r — полярные координаты точки y с полюсом в 0.

Переходя к координатам r и φ, мы запишем операторы $A^0(g, \mathcal{D}_y)$ и $B^0_{i\mu 0}(g, \mathcal{D}_y)$ в виде

$$A^0(g,\mathcal{D}_y)=r^{-2m}\widehat{A}(g,\varphi,\mathcal{D}_\varphi,r\mathcal{D}_r), \tag{3.1.8}$$

$$B^0_{i\mu0}(g,\mathcal{D}_y)=r^{-m_{i\mu}}\widehat{B}_{i\mu}(g,\varphi,\mathcal{D}_\varphi,r\mathcal{D}_r). \tag{3.1.9}$$

Рассмотрим ограниченный оператор $L_{g0}:H_a^{l+2m}(\theta)\to H_a^l(\theta,\gamma)=H_a^l(\theta)\times\prod\limits_{\rho,\mu}H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\gamma_\rho)$ и оператор-функцию $\mathbb{C}\ni\lambda\mapsto\widehat{L}_{g0}(\lambda)\in\mathcal{B}\left(W^{l+2m}(d_1,d_2),\mathcal{W}^l[d_1,d_2]\right)$, $\mathcal{W}^l[d_1,d_2]=W^l(d_1,d_2)\times\mathbb{C}^m\times\mathbb{C}^m$, заданные по формулам

$$L_{g0}v=\left\{A^0(g,\mathcal{D}_y)v,\ B^0_{i\mu0}(g,\,\mathcal{D}_y)\big|_{\gamma_\rho}\right\}, \tag{3.1.10}$$

$$\widehat{L}_{g0}(\lambda)w=\left\{\widehat{A}(g,\varphi,\mathcal{D}_\varphi,\lambda)w,\ \widehat{B}_{i\mu}(g,\varphi,\mathcal{D}_\varphi,\lambda)w\big|_{\varphi=d_\rho}\right\} \tag{3.1.11}$$

соответственно. Здесь $1\leqslant i(\rho,g)\leqslant N_1$ таково, что $g\in\overline{M}_i$ и $M_i\cap(\gamma_\rho+g)\neq\varnothing$; $d_\rho=d_{\nu\rho}$, если $g=g_\nu\in\mathcal{K}_1$ $(\nu=1,\ldots,N_1,\ \rho=1,2)$ и $d_1=0,\ d_2=\pi$, если $g\in\mathcal{K}_2$.

В силу следствия 1.4.2 в [12] с $N=1$ и $\widehat{L}(\lambda)=\widehat{L}_{g0}(\lambda)$ существует конечно-мероморфная фредгольмова оператор-функция $\lambda\mapsto\widehat{R}_{g0}(\lambda)\in\mathcal{B}\left(\mathcal{W}^l[d_1,d_2],W^{l+2m}(d_1,d_2)\right)$ в $\mathbb{C}$ такая, что для λ, не являющегося собственным значением оператор-функции $\lambda\mapsto\widehat{L}_{g0}(\lambda)$ оператор $\widehat{L}_{g0}(\lambda)$ имеет ограниченный обратный $\left(\widehat{L}_{g0}(\lambda)\right)^{-1}=\widehat{R}_{g0}(\lambda)$. Далее, существуют $0<\varepsilon<\pi/2$ и $\lambda_1>0$ такие, что множество $\omega_{\varepsilon,\lambda_1}=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\ |\arg\lambda|\leqslant\varepsilon\right.$ или $\left.\left|\arg\lambda-\pi\right|\leqslant\varepsilon\right\}\cap\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\ \left|\lambda\right|\geqslant\lambda_1\right\}$ не содержит собственных значений оператор-функции $\lambda\mapsto\widehat{L}_{g0}(\lambda)$. Из теоремы 2.1.2 следует, что, если прямая $\operatorname{Im}\lambda=a+1-l-2m$ не содержит собственных значений оператор-функции $\lambda\mapsto\widehat{L}_{g0}(\lambda)$, то оператор L_{g0} имеет ограниченный обратный $L_{g0}^{-1}:\ \mathcal{H}_a^l(\theta,\gamma)\to H_a^{l+2m}(\theta)$.

Если $\mathcal{K}_3\neq\varnothing$, то для фиксированной точки $g\in\mathcal{K}_3$ мы рассмотрим уравнение с постоянными коэффициентами

$$A^0(g,\mathcal{D}_y)u=f_0(y)\qquad\left(y\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}\right) \tag{3.1.12}$$

относительно $u\in H_a^{l+2m}\left(\mathbb{R}^2\right)$, где $f_0\in H_a^l\left(\mathbb{R}^2\right)$.

Переходя к полярным координатам r, φ, запишем оператор $A^0(g,\mathcal{D}_y)$ в виде (3.1.8). Введем оператор-функцию $\lambda\mapsto\widehat{A}_g(\lambda)\in\mathcal{B}\big(W_{2\pi}^{l+2m}(0,2\pi),$

$W^l_{2\pi}\big(0,2\pi\big)\big)$ по формуле

$$\widehat{A}_g(\lambda)\,w = \widehat{A}\left(g,\varphi,\mathcal{D}_\varphi,\lambda\right)w\left(\varphi\right), \tag{3.1.13}$$

где $W^s_{2\pi}(0,2\pi)$ — замыкание множества $C^\infty_{2\pi}[0,2\pi]$ в пространстве $W^s(0,2\pi)$, $C^\infty_{2\pi}[0,2\pi]$ — множество функций на $[0,2\pi]$ таких, что их 2π-периодические продолжения на $\mathbb{R}$ бесконечно дифференцируемы.

В силу леммы 2.4.1 существует конечно-мероморфная фредгольмова оператор-функция $\lambda \mapsto \widehat{R}_{g0}(\lambda) \in \mathcal{B}\left(W^l_{2\pi}(0,2\pi),\, W^{l+2m}_{2\pi}(0,2\pi)\right)$ в $\mathbb{C}$ такая, что для λ, не являющегося собственным значением оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{A}_g(\lambda)$, оператор $\widehat{A}_g(\lambda)$ имеет ограниченный обратный $\left(\widehat{A}_g(\lambda)\right)^{-1} = \widehat{R}_{g0}(\lambda)$. Далее, существуют $0<\varepsilon<\pi/2$ и $\lambda_1>0$ такие, что множество $\omega_{\varepsilon,\lambda_1}$ не содержит собственных значений оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{A}_g(\lambda)$. Из леммы 2.4.2 вытекает, что если прямая $\operatorname{Im}\lambda = a+1-l-2m$ не содержит собственных значений оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{A}_g(\lambda)$, то оператор $A_{g0} = A^0\left(g,\mathcal{D}_y\right) : H^{l+2m}_a\left(\mathbb{R}^2\right) \to H^l_a\left(\mathbb{R}^2\right)$ имеет ограниченный обратный $A^{-1}_{g0} : H^l_a\left(\mathbb{R}^2\right) \to H^{l+2m}_a\left(\mathbb{R}^2\right)$.

Будем предполагать, что выполняется следующее условие.

Условие 3.1.3. Прямая $\operatorname{Im}\lambda = h = a+1-l-2m$ не содержит собственных значений оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{L}_{g0}(\lambda)$ $(g \in K\cap\partial Q)$. Если $K\cap\mathcal{K}_3 \neq \varnothing$, то прямая $\operatorname{Im}\lambda = h$ не содержит собственных значений оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{A}_g(\lambda)$ $(g\in\mathcal{K}_3)$.

Лемма 3.1.1. *Пусть выполняются условия* 3.1.1–3.1.3.

Тогда для всех $u \in H^{l+2m}_a(Q)$ *мы имеем*

$$\|u\|_{H^{l+2m}_a(Q)} \leqslant c_1\left(\|Lu\|_{\mathcal{H}^l_a(Q,M)} + \|u\|_{H^0_{a+1-l-2m}(Q)}\right). \tag{3.1.14}$$

Доказательство. Схема доказательства основана на подходящем разбиении единицы, существовании ограниченных обратных операторов для операторов L_{g0} $(g\in K\cap\partial Q)$ и A_{g0} $(g \in K\cap\mathcal{K}_3)$ с замороженными коэффициентами и априорных оценках решений эллиптических задач в областях с гладкими границами в пространствах Соболева.

1. Не ограничивая общности, предположим, что $K = \mathcal{K}$. Пусть функции $\xi_1 = \xi_{2\delta}$ и $\xi_2 = \xi_{2\delta}$ таковы, что

$$\left.\begin{aligned} \xi_1,\, \xi_2 \in \dot{C}^\infty\left(\mathbb{R}^2\right),\ 0 \leqslant \xi_1(y),\, \xi_2(y) \leqslant 1 \qquad \left(y \in \mathbb{R}^2\right), \\ \operatorname{supp}\xi_1 \subset B_{3\delta/2}, \qquad \operatorname{supp}\xi_2 \subset B_{2\delta}, \\ \xi_1(y) \equiv 1 \quad \left(y \in \overline{B}_\delta\right) \text{ и } \xi_2(y) \equiv 1 \quad \left(y \in \overline{B}_{3\delta/2}\right), \end{aligned}\right\} \tag{3.1.15}$$

где $\delta > 0$ — достаточно мало.

Для каждого $g \in \mathcal{K}$ введем новые переменные $y' = y - g$. Обозначим

$$\begin{aligned} &L'_{g0}v = \left\{A^0\left(g + y', \mathcal{D}_{y'}\right)v,\ B^0_{i\mu 0}\left(g + y', \mathcal{D}_{y'}\right)\Big|_{\gamma_\rho}\right\} \ \left(g \in \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2\right), \\ &A'_{g0}v = A^0\left(g + y', \mathcal{D}_{y'}\right)v \qquad\qquad\qquad\qquad \left(g \in \mathcal{K}_3\right). \end{aligned} \tag{3.1.16}$$

Возвращаясь к старым переменным, положим $y' = y$. Введем линейные ограниченные операторы $L''_{g0}:\ H^{l+2m}_a(\theta) \to \mathcal{H}^l_a(\theta, \gamma)$ и $A''_{g0}:\ H^{l+2m}_a\left(\mathbb{R}^2\right) \to H^l_a\left(\mathbb{R}^2\right)$, заданные по формулам

$$\begin{aligned} L''_{g0}v = L_{g0}v + \xi_2\left(L'_{g0} - L_{g0}\right)v \qquad \left(g \in \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2\right), \\ A''_{g0}v = A_{g0}v + \xi_2\left(A'_{g0} - A_{g0}\right)v \qquad \left(g \in \mathcal{K}_3\right). \end{aligned} \tag{3.1.17}$$

Обозначим через b произвольный коэффициент оператора $L'_{g0} - L_{g0}$ или $A'_{g0} - A_{g0}$. Очевидно, $b \in C^\infty\left(\mathbb{R}^2\right)$ и $b(0) = 0$. Следовательно,

$$\left|r^{|\beta|}\mathcal{D}^\beta\left(\xi_2(y)\, b(y)\right)\right| \leqslant k_1(\delta) \qquad \left(|\beta| \leqslant M_0,\ y \in \mathbb{R}^2\right), \tag{3.1.18}$$

где $k_1(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$; $M_0 = \max\limits_{i,\mu}\{l + 2m - m_{i\mu}\}$.

Из (3.1.18) и лемм 1.1.3, 1.1.7 следует, что

$$\left\|\xi_2\left(L'_{g0} - L_{g0}\right)\right\| \to 0 \quad \text{и} \quad \left\|\xi_2\left(A'_{g0} - A_{g0}\right)\right\| \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0. \tag{3.1.19}$$

Поскольку прямая $\operatorname{Im}\lambda = h$ не содержит собственных значений оператор-функций $\lambda \mapsto \widehat{L}_{g0}(\lambda)$ $\left(g \in \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2\right)$ и $\lambda \mapsto \widehat{A}_{g0}(\lambda)$ $\left(g \in \mathcal{K}_3\right)$, то операторы L_{g0} и A_{g0} имеют ограниченные обратные L^{-1}_{g0} и A^{-1}_{g0} соответственно. В силу (3.1.19) существуют ограниченные обратные операторы $\left(L''_{g0}\right)^{-1}$ и $\left(A''_{g0}\right)^{-1}$, если $\delta > 0$ достаточно мало.

2. Обозначим $\eta_1(y) = 1 - \sum\limits_{g \in \mathcal{K}} \xi_1(y - g)$.

Пусть $v_g\big(y'\big) = \xi_1\big(y'\big)u\big(g+y'\big)$ $\big(y' \in B_{2\delta} \cap \theta$, если $g \in \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$, и $y' \in B_{2\delta}$, если $g \in \mathcal{K}_3\big)$, и пусть $v_g\big(y'\big) = 0$ $\big(y' \in \theta \setminus B_{2\delta}$, если $g \in \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$, и $y' \in \mathbb{R}^2 \setminus B_{2\delta}$, если $g \in \mathcal{K}_3\big)$.

Из эквивалентности норм в пространствах Соболева и в весовых пространствах в $Q \setminus \bigcup\limits_{g\in\mathcal{K}} B_\delta(g)$, существования обратных операторов $\big(L''_{g0}\big)^{-1}$ и $\big(A''_{g0}\big)^{-1}$, равенств $L''_{g0}v_g = L'_{g0}v_g$ и $A''_{g0}v_g = A'_{g0}v_g$ и леммы C.3 мы имеем

$$\|u\|_{H_a^{l+2m}(Q)} \leqslant \sum_{g\in\mathcal{K}} \|\xi_1(y-g)\,u(y)\|_{H_a^{l+2m}(Q)} + \|\eta_1(y)\,u(y)\|_{H_a^{l+2m}(Q)} \leqslant$$
$$\leqslant k_1\Bigg(\sum_{g\in\mathcal{K}_1\cup\mathcal{K}_2} \|v_g\|_{H_a^{l+2m}(\theta)} + \sum_{g\in\mathcal{K}_3} \|v_g\|_{H_a^{l+2m}(\mathbb{R}^2)} + \|\eta_1 u\|_{W^{l+2m}(Q)}\Bigg) \leqslant$$
$$\leqslant k_2\Bigg(\sum_{g\in\mathcal{K}_1\cup\mathcal{K}_2} \big\|L'_{g0}v_g\big\|_{\mathcal{H}_a^l(\theta,\gamma)} +$$
$$+\sum_{g\in\mathcal{K}_3} \|A_{g0}v_g\|_{H_a^l(\mathbb{R}^2)} + \|L_0(\eta_1 u)\|_{\mathcal{W}^l(Q,M)} + \|\eta_1 u\|_{L_2(Q)}\Bigg), \quad (3.1.20)$$

где $\mathcal{W}^l(Q,M) = W^l(Q) \times \prod\limits_{i,\mu} W^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(M_i)$.

Применим теперь формулу Лейбница. Возвращаясь к старым переменным, положим $y = y' + g$. Тогда, используя оценку $\|(L-L_0)\,u\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,M)} \leqslant k_3\,\|u\|_{H_a^{l+2m-1}(Q)}$, лемму 1.3.5 и ограниченность Q, из (3.1.20) мы получим

$$\|u\|_{H_a^{l+2m}(Q)} \leqslant k_4\left(\|Lu\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,M)} + \|u\|_{H_a^{l+2m-1}(Q)}\right) \leqslant$$
$$\leqslant k_5\left(\|Lu\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,M)} + q^{l+2m-1}\,\|u\|_{H^0_{a+1-l-2m}(Q)} + q^{-1}\,\|u\|_{H_a^{l+2m}}(Q)\right)$$

для всех $u \in H_a^{l+2m}(Q)$ и $q > 0$, где $k_5 > 0$ не зависит от u и q.

Пусть $q > 0$ таково, что $k_5 q^{-1} < 1/2$. Тогда из последнего неравенства мы получаем (3.1.14). □

Теперь мы можем сформулировать основной результат этого пункта, касающийся фредгольмова свойства локальных эллиптических задач в весовых пространствах.

Теорема 3.1.1. *Пусть выполнены условия* 3.1.1, 3.1.2.

Тогда оператор $L:\ H_a^{l+2m}(Q) \to \mathcal{H}_a^l(Q,M)$ *— фредгольмов тогда и только тогда, когда выполняется условие* 3.1.3.

Доказательство теоремы 3.1.1 основано на следующем результате.

Лемма 3.1.2. *Пусть выполняются условия леммы* 3.1.1.

Тогда оператор $L:\ H_a^{l+2m}(Q) \to \mathcal{H}_a^l(Q,M)$ *имеет правый регуляризатор* $R:\ \mathcal{H}_a^l(Q,M) \to H_a^{l+2m}(Q)$.

Доказательство теоремы 3.1.1. Предположим на время, что выполняются условия 3.1.1–3.1.3 и что доказано утверждение леммы 3.1.2. В силу теоремы 1.3.1 оператор вложения $H^0_{a+1-l-2m}(Q)$ в $H_a^{l+2m}(Q)$ — компактный. Поэтому из теоремы A.5 следует, что оператор $L:\ H_a^{l+2m}(Q) \to \mathcal{H}_a^l(Q,M)$ — фредгольмов.

Обратно, если оператор L — фредгольмов, то справедливость условия 3.1.3 может быть доказана аналогично следствию 2.2.4, см. также доказательство теоремы 3.2.1. $\square$

Остается доказать лемму 3.1.2.

Доказательство леммы 3.1.2. Не ограничивая общности, предположим, что $K = \mathcal{K}$.

В силу леммы C.2 существует ограниченный оператор R_δ и компактный оператор T_δ, действующие из $\{f \in \mathcal{W}^l(Q,M) :\ \operatorname{supp} f \subset \overline{Q} \setminus \mathcal{K}^\delta\}$ в $\{u \in W^{l+2m}(Q) :\ \operatorname{supp} u \subset \overline{Q} \setminus \mathcal{K}^{\delta/2}\}$ и в $\{f \in \mathcal{W}^l(Q,M) :\ \operatorname{supp} f \subset \overline{Q} \setminus \mathcal{K}^{\delta/2}\}$ соответственно, такие, что

$$L_0 R_\delta f = f + T_\delta f. \tag{3.1.21}$$

Используя те же обозначения, что и в доказательстве леммы 3.1.1, положим $f_g(y') = \xi_1(y') f(g+y')$ и $f_{g0}(y') = \xi_1(y') f_0(g+y')$ $(y' \in B_{2\delta})$, $f_g(y') = 0$ и $f_{g0}(y') = 0$ $(y' \notin B_{2\delta})$, где $f = \{f_0, f_{i\mu}\}$.

Пусть $\xi_3 \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ таково, что $0 \leqslant \xi_3(y) \leqslant 1$ $(y \in \mathbb{R}^2)$, $\xi_3(y) \equiv 1$ $(y \in \operatorname{supp} \xi_1)$, $\operatorname{supp} \xi_3 \subset B_{3\delta/2}$.

Обозначим $w_g(y') = \xi_3(y')\big((L''_{g0})^{-1} f_g\big)(y')$ для $g \in \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$ и $w_g(y') = \xi_3(y')\big((A''_{g0})^{-1} f_{g0}\big)(y')$ для $g \in \mathcal{K}_3$. Пусть $y' = y - g$. Обозначим

$$(R_0 f)(y) = \sum_{g \in \mathcal{K}} w_g(y-g) + R_\delta(\eta_1 f)(y). \tag{3.1.22}$$

Поскольку $\operatorname{supp}\xi_3 \subset B_{3\delta/2}$ и $\xi_2(y) \equiv 1 \quad \left(y \in B_{3\delta/2}\right)$, мы имеем $L''_{g0}w_g = L'_{g0}w_g$ и $A''_{g0}w_g = A'_{g0}w_g$.

Тогда из формул (3.1.21) и (3.1.22), формулы Лейбница и компактности оператора вложения $H_a^{l+2m}(Q)$ в $H_a^{l+2m-1}(Q)$ мы имеем

$$LR_0 f = L_0 R_0 f + (L - L_0) R_0 f = f + T_0 f,$$

где $T_0 : \mathcal{H}_a^l(Q, M) \to \mathcal{H}_a^l(Q, M)$ — компактный оператор. $\square$

Замечание 3.1.2. Из доказательства теоремы 3.1.1 следует, что если условия леммы 3.1.1 выполняются, то заключения лемм 3.1.1, 3.1.2 и теоремы 3.1.1 выполняются также для оператора L_0, при этом $\operatorname{ind} L = \operatorname{ind} L_0$.

Локальные эллиптические задачи в многомерных областях

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, ограниченная область с конечным числом ребер, см. определение 1.3.1. Другими словами, граница ∂Q имеет вид $\partial Q = \left(\bigcup\limits_i M_i\right) \cup \mathcal{K}_1 \ \left(i = 1, \ldots, N_0\right)$, где M_i — непересекающиеся $(n-1)$-мерные многообразия класса C^∞, которые являются обратными и связными в топологии ∂Q, множество $\mathcal{K}_1 \subset \partial Q$ состоит из непересекающихся связных $(n-2)$-мерных многообразий $\mathcal{K}_{1p}$ $(p = 1, \ldots, N_1)$ класса C^∞, и в некоторой области каждой точки $g \in \mathcal{K}_1$ область Q диффеоморфна n-мерному двугранному углу $\Theta = \left\{x = \big(y, z\big) \in \mathbb{R}^n : \ d_1 < \varphi < d_2, 0 < r, \ z \in \mathbb{R}^{n-2}\right\}$, φ, r — полярные координаты y, $0 < d_2 - d_1 < 2\pi$, $d_1 = d_1\big(g\big)$, и $d_2 = d_2(g)$.

Введем замкнутое множество $\mathcal{K}$ следующим образом:

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2,$$

где $\mathcal{K}_1 = \bigcup\limits_p \mathcal{K}_{1p}$ и $\mathcal{K}_2 = \bigcup\limits_p \mathcal{K}_{2p} \subset \bigcup\limits_i M_i$, $\mathcal{K}_{jp}$ $(j = 1, 2,\ p = 1, \ldots, N_j)$ — непересекающиеся замкнутые $(n-2)$-мерные связные многообразия класса C^∞. Вообще говоря, $\mathcal{K}_2 \neq \varnothing$.

Рассмотрим уравнение

$$Au = f_0(x) \qquad (x \in Q) \tag{3.1.23}$$

с локальными краевыми условиями

$$B_{i\mu 0}u\big|_{M_i} = f_{i\mu}(x) \qquad (x \in M_i,\ i = 1, \dots, N_0,\ \mu = 1, \dots, m). \quad (3.1.24)$$

Здесь

$$Au = A(x, \mathcal{D})\, u(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} a_\alpha(x)\, \mathcal{D}^\alpha u(x), \quad (3.1.25)$$

$$B_{i\mu 0}u = B_{i\mu 0}(x, \mathcal{D})\, u(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant m_{i\mu}} b_{i\mu 0\alpha}(x)\, \mathcal{D}^\alpha u(x), \quad (3.1.26)$$

$a_\alpha,\ b_{i\mu 0\alpha} \in C^\infty(\mathbb{R}^n),\ f_0 \in H_a^l(Q),\ f_{i\mu} \in H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(M_i)$ — комплекснозначные функции; $H_a^l(Q) = H_a^l(Q, K)$ и $H^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(M_i) = H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(M_i, K)$; $l \geqslant \max\limits_{i,\mu}\big\{-2m + m_{i\mu} + 1\big\}$ — неотрицательное целое число; $K = \mathcal{K}$ или $K = \mathcal{K}_1$.

Обозначим через $A^0(x, \mathcal{D})$ и $B^0_{i\mu 0}(x, \mathcal{D})$ главные однородные части операторов $A(x, \mathcal{D})$ и $B_{i\mu 0}(x, \mathcal{D})$ соответственно.

Предположим, что операторы $A^0(x, \mathcal{D})$ и $B^0_{i\mu 0}(x, \mathcal{D})$ удовлетворяют следующим условиям.

Условие 3.1.4. Оператор $A^0(x, \mathcal{D})$ — правильно эллиптический для всех $x \in \overline{Q}$.

Условие 3.1.5. Система операторов $\big\{B^0_{i\mu 0}(x, \mathcal{D})\big\}$ $(\mu = 1, \dots, m)$ удовлетворяет условию Лопатинского по отношению к оператору $A^0(x, \mathcal{D})$ для всех $x \in \overline{M_i}$ и $i = 1, \dots, N_1$.

Замечание 3.1.3. В отличие от эллиптических задач в плоских областях, мы всегда рассматриваем уравнение (3.1.23) во всей области Q. В многомерном случае мы не вводим множество $\mathcal{K}_3 \subset Q$, поскольку эллиптический оператор порядка $2m$ в $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{P}$ не является изоморфизмом для всех $a \in \mathbb{R}$, см. теорему 2.4.1, где $\mathcal{P} = \big\{x = (y, z) \in \mathbb{R}^n :\ y = 0,\ z \in \mathbb{R}^{n-2}\big\}$.

Введем линейные ограниченные операторы $L,\ L_0 :\ H_a^{l+2m}(Q) \to \mathcal{H}_a^l(Q, M) = H_a^l(Q) \times \prod\limits_{i,\mu} H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(M_i)$ по формулам

$$Lu = \Big\{Au,\ B_{i\mu 0}u\big|_{M_i}\Big\},\ L_0 u = \Big\{A^0 u,\ B^0_{i\mu 0}u\big|_{M_i}\Big\}, \quad (3.1.27)$$

где $A^0 u = A^0(x, \mathcal{D})u(x)$ и $B^0_{i\mu}u = B^0_{i\mu 0}(x, \mathcal{D})u(x)$.

Предположим, что $f = \{f_0, f_{i\mu}\} \in \mathcal{H}_a^l(Q, M)$.

Определение 3.1.2. Функция $u \in H_a^{l+2m}\big(Q\big)$ называется *сильным решением* задачи (3.1.23), (3.1.24) в пространстве $H_a^{l+2m}\big(Q\big)$, если

$$Lu = f.$$

Для любого $g \in \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$, существует диффеоморфизм $\mathcal{D}_g$ класса C^∞, соответствующий преобразованию переменных $x \to x' = x'(g)$, отображающий некоторую окрестность $V(g)$ точки g на некоторую окрестность нуля $V(0)$ так, что $\mathcal{D}_g\big(g\big) = 0$, $\mathcal{D}_g\big(Q \cap V\big(g\big)\big) = \Theta \cap V\big(0\big)$ и $\mathcal{D}_g\big(M_i \cap V\big(g\big)\big) = \Gamma_\rho \cap V\big(0\big)$ для некоторого $\rho = 1, 2$, где $\Theta = \big\{x' \in \mathbb{R}^n :\ d_1 < \varphi < d_2,\ 0 < r,\ z' \in \mathbb{R}^{n-2}\big\}$ и $\Gamma_\rho = \big\{x' \in \mathbb{R}^n :\ \varphi = d_\rho,\ 0 < r,\ z' \in \mathbb{R}^{n-2}\big\}$, $x' = \big(y', z'\big)$, φ, r — полярные координаты y', $d_1 = 0$ и $d_2 = \pi$, если $g \in \mathcal{K}_2$.

Если $\operatorname{supp} u \subset V\big(g\big)$, в системе координат x' задача (3.1.23), (3.1.24) примет вид

$$A\left(x', \mathcal{D}_{y'}, \mathcal{D}_{z'}\right) v\left(x'\right) = f_0'\left(x'\right) \qquad \left(x' \in \Theta\right), \tag{3.1.28}$$

$$B_{i\mu 0}\left(x', \mathcal{D}_{y'}, \mathcal{D}_{z'}\right) v\left(x'\right)\big|_{\Gamma_\rho} = f_{\rho\mu}'\left(x'\right)$$
$$\left(x' \in \Gamma_\rho,\ \rho = 1, 2,\ \mu = 1, \ldots, m\right). \tag{3.1.29}$$

Здесь операторы $A\big(x', \mathcal{D}_{y'}, \mathcal{D}_{z'}\big)$ и $B_{\rho\mu}\big(x', \mathcal{D}_{y'}, \mathcal{D}_{z'}\big)$ имеют коэффициенты класса C^∞; $1 \leqslant i\big(\rho, g\big) \leqslant N_0$ таково, что $\mathcal{D}_g$ отображает $M_i \cap V\big(g\big)$ на $\Gamma_\rho \cap V\big(0\big)$, $v\big(x'\big) = u\big(x\big(x'\big)\big)$, $f_0'(x') = f_0\big(x(x')\big)$ и $f_{\rho\mu}'(x') = f_{i\mu}\big(x(x')\big)$.

Напомним, что числа d_ρ и операторы $A\left(x', \mathcal{D}_{y;}, \mathcal{D}_{z'}\right)$ и $B_{i\mu 0}\left(x', \mathcal{D}_{y'}, \mathcal{D}_{z'}\right)$ зависят от $g \in \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$. Поэтому естественно определить линейный ограниченный оператор $L_{g0}\left(\mathcal{D}_{z'}\right):\ H_a^{l+2m}\left(\Theta\right) \to \mathcal{H}_a^l\left(\Theta, \Gamma\right)$ по формуле

$$L_{g0}\left(\mathcal{D}_{z'}\right) v = \left\{A\left(\mathcal{D}_{y'}, \mathcal{D}_{z'}\right) v\left(y', z'\right),\ B_{i\mu}\left(\mathcal{D}_{y'}, \mathcal{D}_{z'}\right) v\left(y', z'\right)\big|_{\Gamma_\rho}\right\}, \tag{3.1.30}$$

где $\mathcal{H}_a^l\big(\Theta, \Gamma\big) = H_a^l\big(\Theta\big) \times \prod\limits_{\rho,\mu} H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}\big(\Gamma_\rho\big)$, $A\big(\mathcal{D}_{y'}, \mathcal{D}_{z'}\big)$ и $B_{i\mu}\big(\mathcal{D}_{y'}, \mathcal{D}_{z'}\big)$ — главные однородные части операторов $A\big(0, \mathcal{D}_{y'}, \mathcal{D}_{z'}\big)$ и $B_{i\mu}\big(0, \mathcal{D}_{y'}, \mathcal{D}_{z'}\big)$ соответственно, ср. (3.1.10).

Очевидно, оператор $A\left(\mathcal{D}_{y'}, \mathcal{D}_{z'}\right)$ — правильно эллиптический, а система операторов $\left\{B_{i\mu}\left(\mathcal{D}_{y'}\mathcal{D}_{z'}\right)\right\}$ $\left(\mu = 1, \ldots, m\right)$ удовлетворяет условию Лопатинского.

Наряду с оператором $L_{g0}\left(\mathcal{D}_{z'}\right)$ введем ограниченный оператор $L_{g0}\left(\omega\right): \ E_a^{l+2m}\left(\theta\right) \to \mathcal{E}_a^l\left(\theta,\gamma\right)$, зависящий от параметра $\omega \in S^{n-3}$ по формуле

$$L_{g0}\left(\omega\right)V = \left\{A\left(\mathcal{D}_{y'},\omega\right)V\left(y'\right),\ B_{i\mu}\left(\mathcal{D}_{y'},\omega\right)V\left(y'\right)\Big|_{\gamma_\rho}\right\}, \tag{3.1.31}$$

где $\theta = \left\{y' \in \mathbb{R}^2: \ d_1 < \varphi < d_2,\ 0 < r\right\}$ и $\gamma_\rho = \left\{y' \in \mathbb{R}^2: \ \varphi = d_\rho,\ 0 < r\right\}$.

В силу теоремы 2.3.3 оператор $L_{g0}\big(\mathcal{D}_{z'}\big): \ H_a^{l+2m}\big(\Theta\big) \to \mathcal{H}_a^l\big(\Theta,\Gamma\big)$ — изоморфизм тогда и только тогда, когда оператор $L_{g0}\big(\omega\big): \ E_a^{l+2m}\big(\theta\big) \to \mathcal{E}_a^l\big(\theta,\gamma\big) = E_a^l\big(\theta\big) \times \prod\limits_{\rho,\mu} E^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}\left(\gamma_\rho\right)$ является изоморфизмом.

Запишем операторы $A\left(\mathcal{D}_{y'},0\right)$ и $B_{i\mu}\left(\mathcal{D}_{y'},0\right)$ в полярных координатах

$$A\left(\mathcal{D}_{y'},0\right) = r^{-2m}\widehat{A}\left(\varphi,\mathcal{D}_\varphi,r\mathcal{D}_r\right), \tag{3.1.32}$$

$$B_{i\mu}\left(\mathcal{D}_{y'},0\right) = r^{-m_{i\mu}}\widehat{B}\left(\varphi,\mathcal{D}_\varphi,r\mathcal{D}_r\right), \tag{3.1.33}$$

ср. (3.1.8) и (3.1.9).

Рассмотрим оператор-функцию $\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto \widehat{L}_{g0}\big(\lambda\big) \in \mathcal{B}\big(W^{l+2m}\big(d_1,d_2\big), \mathcal{W}^l\big[d_1,d_2\big]\big)$, заданную по формуле

$$\widehat{L}_{g0}\left(\lambda\right)w = \left\{\widehat{A}\left(\varphi,\mathcal{D}_\varphi,\lambda\right)w,\ \widehat{B}_{i\mu}\left(\varphi,\mathcal{D}_\varphi,\lambda\right)w\Big|_{\varphi=d_\rho}\right\}, \tag{3.1.34}$$

ср. (3.1.11)

В силу следствия 1.4.2 в [12] с $N = 1$ и $\mathbf{L}\left(\lambda\right) = \widehat{L}_{g0}\left(\lambda\right)$ существует конечно-мероморфная фредгольмова оператор-функция $\lambda \mapsto \widehat{R}_{g0}\left(\lambda\right) \in \mathcal{B}\left(\mathcal{W}^l\left[d_1,d_2\right],\ W^{l+2m}\left(d_1,d_2\right)\right)$ в $\mathbb{C}$ такая, что для λ, не являющегося собственным значением оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{L}_{g0}\left(\lambda\right)$, оператор $\widehat{L}_{g0}\left(\lambda\right)$ имеет ограниченный обратный $\left(\widehat{L}_{g0}\left(\lambda\right)\right)^{-1} = \widehat{R}_{g0}\left(\lambda\right)$. Далее, существуют $0 < \varepsilon < \pi/2$ и $\lambda_1 > 0$ такие, что множество $\omega_{\varepsilon,\lambda_1}$ не содержит собственных значений оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{L}_{g0}\left(\lambda\right)$. Из теоремы 2.3.4 следует, что оператор $L_{g0}\left(\omega\right): \ E_a^{l+2m}\left(\theta\right) \to \mathcal{E}_a^l\left(\theta,\gamma\right)$ — фредгольмов для любого $\omega \in S^{n-3}$ тогда и только тогда, когда прямая $\operatorname{Im}\lambda = h = a + 1 - l - 2m$ не содержит собственных значений оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{L}_{g0}\left(\lambda\right)$.

Сформулируем теперь основной результат этого пункта.

Теорема 3.1.2. *Пусть выполняются условия* 3.1.3–3.1.5. *Предположим также, что* $\dim\mathcal{N}\left(L_g\left(\omega\right)\right) = \operatorname{codim}\mathcal{R}\left(L_g\left(\omega\right)\right) = 0$ *для любых* $g \in K$ *и* $\omega \in S^{n-3}$.

Тогда оператор $L:\ H_a^{l+2m}\left(Q\right) \to \mathcal{H}_a^l\left(Q, M\right)$ *— фредгольмов.*

Доказательство следует из лемм 3.1.3, 3.1.4, которые можно доказать аналогично леммам 3.1.1, 3.1.2 соответственно.

Лемма 3.1.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1.2. *Тогда для всех* $u \in H_a^{l+2m}\left(Q\right)$ *мы имеем*

$$\|u\|_{H_a^{l+2m}(Q)} \leqslant c_2\left(\|Lu\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,M)} + \|u\|_{H^0_{a+1-l-2m}(Q)}\right). \qquad (3.1.35)$$

Лемма 3.1.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1.2.

Тогда оператор $L:\ H_a^{l+2m}\left(Q\right) \to \mathcal{H}_a^l\left(Q, M\right)$ *имеет правый регуляризатор* $R:\ \mathcal{H}_a^l\left(Q, M\right) \to H_a^{l+2m}\left(Q\right)$.

Замечание 3.1.4. Если выполнены условия теоремы 3.1.2, то заключения теоремы 3.1.2 и лемм 3.1.3, 3.1.4 выполняются также для оператора L_0 и $\operatorname{ind} L = \operatorname{ind} L_0$.

3.2. Нелокальные эллиптические задачи в плоских областях с носителями нелокальных членов вне множества точек сопряжения

Постановка задачи

Пусть область $Q \subset \mathbb{R}^2$ и множество $\mathcal{K} \subset \overline{Q}$ удовлетворяют условиям первого пункта § 3.1. Рассмотрим уравнение

$$Au = A^0u + A^1u = f_0\left(y\right) \qquad \left(y \in Q \setminus K\right) \qquad (3.2.1)$$

с нелокальными краевыми условиями.

$$B_{i\mu}u = \sum_{p=0,2,3} B^p_{i\mu}u = f_{i\mu}\left(y\right)$$

$$\left(y \in M_i,\ i = 1, \dots, N_1,\ \mu = 1, \dots, m\right). \quad (3.2.2)$$

Здесь

$$A^0 u = A^0\,(y, \mathcal{D}_y)\,u\,(y) = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha\,(y)\,\mathcal{D}_y^\alpha u\,(y), \tag{3.2.3}$$

$$B^0_{i\mu 0} u = B^0_{i\mu 0}\,(y, \mathcal{D}_y)\,u(y) = \sum_{|\alpha|=m_{i\mu}} b_{i\mu 0\alpha}\,(y)\,\mathcal{D}_y^\alpha u\,(y), \tag{3.2.4}$$

$$B^0_{i\mu} u = B^0_{i\mu 0} u\big|_{M_i}, \tag{3.2.5}$$

$a_\alpha,\, b_{i\mu 0\alpha} \in \mathrm{C}^\infty\left(\mathbb{R}^2\right),\ f_0 \in H^l_a\,(Q),\ f_{i\mu} \in H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}\,(M_i)$ — комплекснозначные функции; $l \geqslant \max\limits_{i,\,\mu}\{-2m + m_{i\mu} + 1\}$ — неотрицательное целое число; $H^l_a\,(Q) = H^l_a\,(Q,\, K)$ и $H^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}\,(M_i) = H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}\,(M_i,\, K)$. Предположим, что или $K = \mathcal{K}$, или $K = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$, или $K = \mathcal{K}_1$. Если $K \subset \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$ или $\mathcal{K}_3 = \varnothing$, то мы рассматриваем уравнение (3.2.1) во всей области Q. Если $\mathcal{K}_3 \neq \varnothing$ и $K = \mathcal{K}$, то мы рассматриваем уравнение (3.2.1) в $Q \setminus \mathcal{K}_3$.

Определение 3.2.1. Множество $\mathcal{K}_1$ называется *множеством точек сопряжения*. Множество K называется *расширенным множеством точек сопряжения*.

Предположим, что операторы A^0, $B^0_{i\mu}$ удовлетворяют условиям 3.1.1, 3.1.2, а операторы $A^1_{i\mu}$, $B^2_{i\mu}$, и $B^3_{i\mu}$ удовлетворяют следующим условиям.

Условие 3.2.1. Линейный оператор $A^1 : H_a^{l+2m-1}\,(Q) \to H^l_a\,(Q)$ — ограниченный.

Условие 3.2.2. Операторы $B^2_{i\mu} : H_a^{l+2m}\big(Q\big) \to H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}\big(M_i\big)$ — линейные ограниченные, и существуют числа $\varkappa$, $\sigma > 0$ такие, что для всех $u \in H_a^{l+2m}\big(Q\big)$

$$\left\|B^2_{i\mu} u\right\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(M_i)} \leqslant c_1\,\|u\|_{H_a^{l+2m}\left(Q\setminus\overline{\mathcal{K}_1^{2\varkappa}}\right)}, \tag{3.2.6}$$

$$\left\|B^2_{i\mu} u\right\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}\left(M_i\setminus\overline{\mathcal{K}_1^{\varkappa}}\right)} \leqslant c_2\,\|u\|_{H_a^{l+2m}(Q_\sigma)}, \tag{3.2.7}$$

где $\mathcal{K}_1^\varkappa = \big\{y \in \mathbb{R}^2 :\ \rho\,(y, \mathcal{K}_1) < \varkappa\big\}$ и $Q_\sigma = \{y \in Q :\ \rho\,(y, \partial Q) > \sigma\}$, см. рис. 3.2.1.

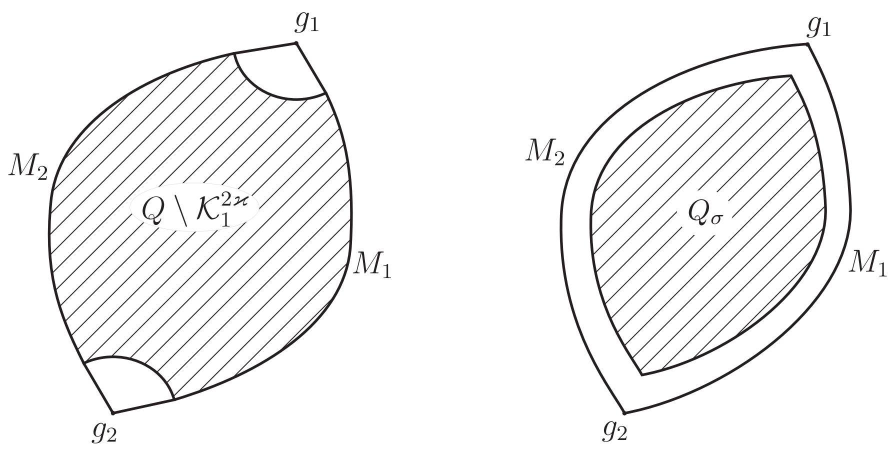

Рис. 3.2.1

Условие 3.2.3. Линейные операторы $B^3_{i\mu} : H_a^{l+2m-1}\big(Q\big) \to H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}$ — ограниченные.

Условия 3.2.1 и 3.2.3 означают, что операторы A^1 и $B^3_{i\mu}$ являются компактными возмущениями операторов A^0 и $B^0_{i\mu}$ соответственно. Условие 3.2.2 означает, что носитель оператора

$$B^2_{i\mu} : H_a^{l+2m}\big(Q\big) \to H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}\big(M_i\big)$$

принадлежит $\overline{Q}\backslash\mathcal{K}_1^{2\sigma}$, а носитель оператора

$$B^2_{i\mu} : H_a^{l+2m}\big(Q\big) \to H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}\big(M_i \setminus \overline{\mathcal{K}_1^{\varkappa}}\big)$$

принадлежит $\overline{Q_\sigma}$.

Введем линейные ограниченные операторы

$$L, L_0 : H_a^{l+2m}\big(Q\big) \to \mathcal{H}_a^l\big(Q,\, M\big) = H_a^l\big(Q\big) \times \prod_{i,\mu} H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}\big(M_i\big)$$

по формулам

$$Lu = \{Au,\ B_{i\mu}u\}\,,\ L_0u = \left\{A^0u,\ B^0_{i\mu0}u\big|_{M_i}\right\}. \tag{3.2.8}$$

Определение 3.2.2. Функция $u \in H_a^{l+2m}\,(Q)$ называется *сильным решением* задачи (3.2.1) и (3.2.2) в $H_a^{l+2m}\,(Q)$, если

$$Lu = f,$$

где $f = \{f_0,\ f_{i\mu}\}$.

Оператор L_0, заданный по формуле (3.2.8), имеет такой же вид, как и оператор, заданный по формуле (3.1.5). С другой стороны, оператор L, заданный по формуле (3.2.8), содержит также нелокальные члены A^1, $B^2_{i\mu}$ и $B^3_{i\mu}$, в то время как оператор L, заданный по формуле (3.1.5), содержит только локальные члены низшего порядка относительно оператора L_0.

Рассмотрим теперь эллиптическое уравнение с нелокальными краевыми условиями, связывающими значения неизвестной функции на кривых $M_i \ (i = 1, \dots, N_1)$ с ее значениями на кривых $\omega_{is}(M_i) \subset Q \ (s = 1, \dots, S_1)$. Предполагая, что все кривые $\omega_{is}\left(\overline{M_i}\right)$ имеют пустое пересечение с множеством точек сопряжения $\mathcal{K}_1$ и что все орбиты точек $g \in \mathcal{K}_1$, порожденные преобразованиями ω_{is} и ω_{is}^{-1}, — конечны, мы докажем, что эта задача может быть представлена в виде (3.2.1), (3.2.2).

Нелокальные эллиптические задачи с носителями нелокальных членов не некоторых кривых

Пусть область $Q \subset \mathbb{R}^2$ и множество $\mathcal{K}_1 \subset \partial Q$ удовлетворяют предположениям первого пункта § 3.1. Обозначим через $\omega_{is} \ (i = 1, \dots, N_1, \ s = 0, \dots, S_i)$ диффеоморфизмы класса C^∞, отображающие некоторые открытые окрестности Ω_i кривых M_i на $\omega_{is}(\Omega_i)$ так, что $\omega_{is}(M_i) \subset Q$ для $s = 1, \dots, S_i$, $i = 1, \dots, N_1$, где $S_i \geqslant 0$ — целые числа; $\omega_{i0}(x) \equiv x$. Обозначим

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \left\{ \bigcup_{i,s} \omega_{is}\left(\overline{M_i} \setminus M_i\right) \right\} \cup \left\{ \bigcup_{i,p} \bigcup_{i,s} \omega_{jp}\left(\omega_{is}\left(\overline{M_i} \setminus M_i\right) \cap M_j\right) \right\}$$
$$(i, j = 1, \dots, N_1, \ s = 1, \dots, S_i, \ p = 1, \dots, S_j). \quad (3.2.9)$$

Положим

$$\mathcal{K}_2 = \mathcal{K} \cap \left(\bigcup_i M_i \right), \qquad \mathcal{K}_3 = \mathcal{K} \cap Q. \qquad (3.2.10)$$

Множество $\mathcal{K}_2$ состоит из конечного числа N_2 точек $g \in \bigcup_i M_i$, а множество $\mathcal{K}_3$ состоит из конечного числа N_3 точек $g \in Q$.

Рассмотрим уравнение

$$Au = \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} a_\alpha(y) \mathcal{D}^\alpha u(y) = f_0(y) \qquad (y \in Q \setminus K) \qquad (3.2.11)$$

с нелокальными краевыми условиями

$$B_{i\mu}u=\sum_{s=0}^{S_i}\sum_{|\alpha|\leqslant m_{i\mu}} b_{i\mu s\alpha}\left(\mathcal{D}^{\alpha}u\right)\left(\omega_{is}\left(y\right)\right)\big|_{M_i}=f_{i\mu}\left(y\right)$$

$$(y\in M_i,\quad i=1,\ldots,N_1,\quad \mu=1,\ldots,m). \quad (3.2.12)$$

Здесь a_α, $b_{i\mu s\alpha}\in C^\infty\left(\mathbb{R}^2\right)$, $f_0\in H^l\left(Q\right)$ и $f_{i\mu}\in H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}\left(M_i\right)$ — комплекснозначные функции; $(\mathcal{D}^\alpha u)(\omega_{is}(y)) = \mathcal{D}_{y'}^{\alpha}u(y')\big|_{y'=\omega_{is}(y)}$; $H_a^l\left(Q\right) = H_a^l\left(Q,K\right)$ и $H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}\left(M_i\right) = H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}\left(M_i,K\right)$; $l\geqslant\max\limits_{i,\mu}\{-2m+m_{i\mu}+1\}$ — неотрицательное целое число. Предположим, что или $K=\mathcal{K}$, или $K=\mathcal{K}_1\cup\mathcal{K}_2$, или $K=\mathcal{K}_1$. Если $K\subset\mathcal{K}_1\cup\mathcal{K}_2$, мы будем рассматривать уравнение (3.2.11) во всей области Q. Если $\mathcal{K}_3\neq\varnothing$ и $K=\mathcal{K}$, будем рассматривать уравнение (3.2.11) в $Q\setminus\mathcal{K}_3$.

Предположим, что операторы A^0 и $B_{i\mu 0}^0$, заданные по формулам (3.2.3) и (3.2.4), соответственно, удовлетворяют условиям 3.1.1 и 3.1.2.

Будем предполагать также, что выполняются следующие условия.

Условие 3.2.4. Если $\mathcal{K}_3\neq\varnothing$ и $K=\mathcal{K}$, то для любого $g\in\mathcal{K}_3\cap\omega_{is}\left(M_i\right)$, мы имеем $\omega_{is}^{-1}\left(g\right)\in\mathcal{K}$.

Из соотношений (3.2.9), (3.2.10), условия 3.2.4 и леммы 1.3.7 следует, что если $K=\mathcal{K}$, то операторы $B_{i\mu}: H_a^{l+2m}\left(Q\right)\to H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}\left(M_i\right)$ — ограниченные для любого $a\in\mathbb{R}$. Если $\mathcal{K}\setminus K\neq\varnothing$ и $a>l+2m-1$, то ограниченность операторов $B_{i\mu}: H_a^{l+2m}\left(Q\right)\to H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}\left(M_i\right)$ следует из леммы 1.3.8.

Замечание 3.2.1. Сильные решения задачи (3.2.11), (3.2.12) могут иметь степенные особенности в точках множества $\mathcal{K}_1$ даже в случае, когда $\partial Q\in C^\infty$, см. § 2.2. Очевидно, преобразования ω_{is} и ω_{is}^{-1} могут переносить эти сингулярности в другие точки. Условие 3.2.4 означает, что орбиты для всех точек $g\in\mathcal{K}_1$, порожденные преобразованиями ω_{is} и ω_{jp}^{-1}, конечны. Если $K=\mathcal{K}$, то множество K в определении пространств $H_a^k\left(Q,K\right)\quad (k=l,\, l+2m)$ и $H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}\left(M_i,K\right)$ обеспечивает выполнение условий согласования для сильных решений задачи (3.2.11), (3.2.12).

В силу соотношения (3.2.9) и определения расширенного множества точек сопряжения, множество K для задачи (3.2.11) и (3.2.12) — конечно. Если условие 3.2.4 нарушается, то преобразования множества $\mathcal{K}_1$ могут сформировать бесконечное множество, которое следовало бы использовать в определении весовых пространств вместо множества K. В этом случае мы используем другой путь, чтобы преодолеть это препятствие. А именно, если условие 3.2.4 нарушается, мы положим $K = \mathcal{K}_1$ и $a > l + 2m - 1$.

Если $N_1 = 2$, $S_1 = 1$ и $S_2 = 0$, то условие 3.2.4 выполняется. Пусть при этом $m = 1$ и $m_{i1} = 0$. В этом случае задача (3.2.11), (3.2.12) имеет вид (1), (2).

В этом пункте мы будем также предполагать, что выполнено следующее условие.

Условие 3.2.5. $\omega_{is}\left(\overline{M_i}\right) \cap \mathcal{K}_1 = \varnothing$ для всех $i = 1, \ldots, N_1$ и $s = 1, \ldots, S_i$.

Замечание 3.2.2. Если выполняется условие 3.2.5 и $\omega_{is}(g_i) \cap \partial Q \neq \varnothing$, мы не накладываем никаких ограничений на подход кривой $\omega_{is}\left(\overline{M_i}\right)$ к границе ∂Q. В частности, мы можем иметь тангенциальный подход этой кривой к границе в точке $\omega_{is}(g_i)$.

Рис. 3.2.2 демонстрирует различные представления множества $\mathcal{K}$, зависящие от структуры множества $\omega_{11}(M_1)$ в случае выполнения условия 3.2.5.

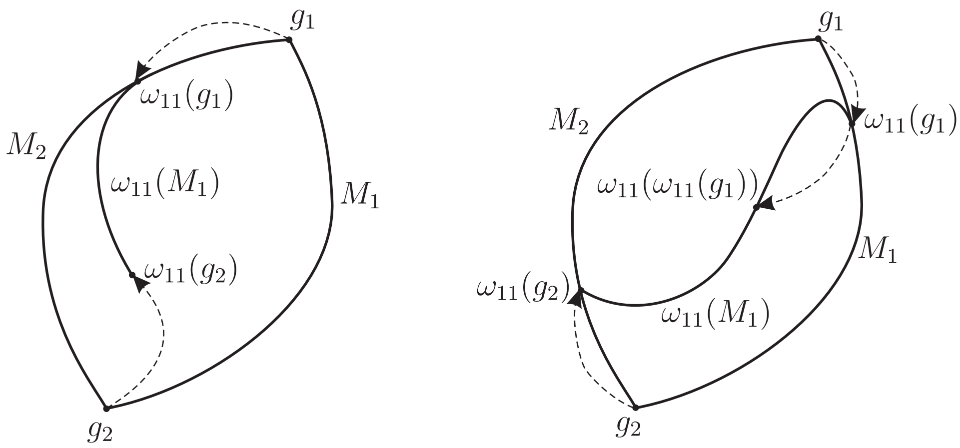

Рис. 3.2.2

Обозначим $B_{i\mu}^2 u = \sum\limits_{s=1}^{S_i} \sum\limits_{|\alpha| \leqslant m_{i\mu}} b_{i\mu s\alpha}(y) (\mathcal{D}^\alpha u)(\omega_{is}(y)) \big|_{M_i}$.

Лемма 3.2.1. *Пусть выполняется условие* 3.2.5. *Если* $K = \mathcal{K}$ *и* $\mathcal{K}_3 \neq \varnothing$, *мы также предполагаем, что выполняется условие* 3.2.4, *если* $\mathcal{K} \setminus K \neq \varnothing$, *мы предполагаем, что* $a > l + 2m - 1$.

Тогда существуют числа $\varkappa, \sigma > 0$ *такие, что неравенства* (3.2.6) *и* (3.2.7) *выполняются для всех* $u \in H_a^{l+2m}(Q)$.

Доказательство. 1. Для доказательства этой леммы достаточно показать, что неравенства (3.2.6), (3.2.7) остаются справедливыми, когда функция $B_{i\mu}^2 u$ заменена функцией $\varphi_{i\mu s} = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant m_{i\mu}} b_{i\mu s\alpha}(y) \big(\mathcal{D}^\alpha u\big) \big(\omega_{is}(y)\big) \big|_{M_i}$ $(0 \leqslant s \leqslant S_i)$.

2. Вначале предположим, что $\mathcal{M}_{is} = \omega_{is}\big(\overline{M}_i\big) \cap \mathcal{K}_2 \neq \varnothing$, см. рис. 3.2.3. Тогда в силу условия 3.2.5 существует окрестность G_{is} множества $\omega_{is}\big(\overline{M}_i\big)$ и число $\varkappa > 0$ такое, что $\mathcal{M}_{is}^\varkappa \subset G_{is}$, $\overline{G}_{is} \subset \omega_{is}\big(\Omega_i\big)$, $G_{is} \cap \mathcal{K}_1^{2\varkappa} \neq \varnothing$, и $G_{is} \cap \mathcal{K} = \omega_{is}\big(\overline{M}_i \cap \mathcal{K}\big)$. Из леммы 1.3.7 следует, что существует функция $U \in H_a^{l+2m}\big(Q \cup \mathcal{M}_{is}^\varkappa\big)$ такая, что $U\big(y\big) = u\big(y\big)$ для $y \in Q \cap \mathcal{M}_{is}^\varkappa$ и

$$\|U\|_{H_a^{l+2m}(\mathcal{M}_{is}^\varkappa)} \leqslant k_1 \|u\|_{H_a^{l+2m}(Q \cap \mathcal{M}_{is}^{2\varkappa})}. \tag{3.2.13}$$

Используем обозначение

$$\Phi_{i\mu s}\big(y\big) = \xi_{is}\big(\omega_{is}\big(y\big)\big) \sum_\alpha b_{i\mu s\alpha}\big(y\big) \big(\mathcal{D}^\alpha U\big) \big(\omega_{is}\big(y\big)\big) \quad \text{для} \quad y \in \Omega_i \cap Q,$$

$$\Phi_{i\mu s}\big(y\big) = 0 \quad \text{для} \quad y \in Q \setminus \Omega_i,$$

где $\xi_{is} \in \dot{C}^\infty\big(\mathbb{R}^n\big)$, $\xi_{is}\big(y\big) = 1$ для $y \in \omega_{is}\big(M_i\big)$, и $\xi_{is}\big(y\big) = 0$, если $y \notin \tilde{G}_{is} = \big(G_{is} \cap Q\big) \cup \mathcal{M}_{is}^\varkappa$. Очевидно, $\Phi_{i\mu s} \in H_a^{l+2m-m_{i\mu}}\big(Q\big)$ и $\varphi_{i\mu s} = \Phi_{i\mu s}\big|_{M_i}$. Следовательно, вводя новые переменные $y' = \omega_{is}\big(y\big)$, используя условие 3.2.4, если $K = \mathcal{K}$ и $\mathcal{K}_3 \neq \varnothing$, и лемму 1.3.8, если $\mathcal{K} \setminus K \neq \varnothing$ и $a > l + 2m - 1$,

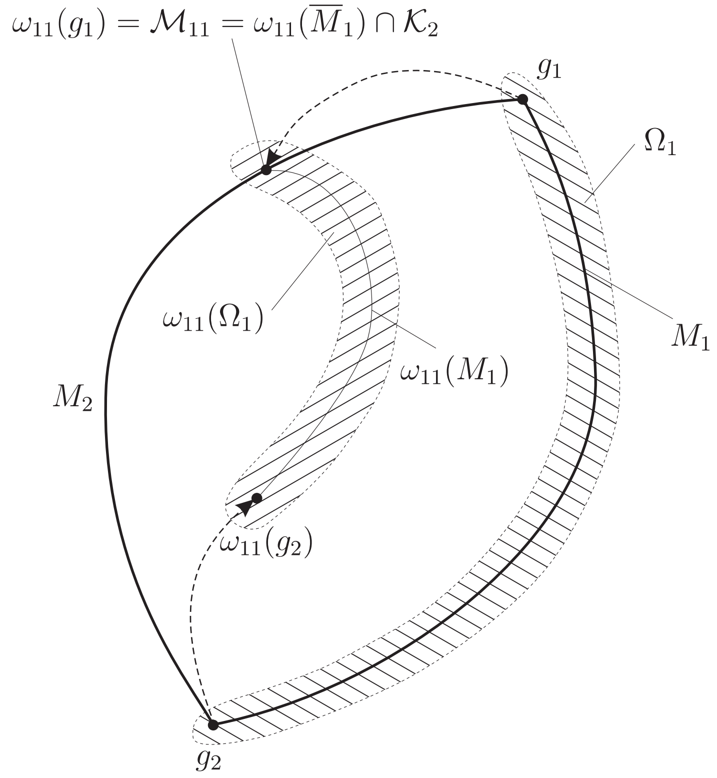

Рис. 3.2.3

из (3.2.13) мы получим

$$\|\varphi_{i\mu s}\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(M_i)} \leqslant \|\Phi_{i\mu s}\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}}(Q)} \leqslant \\ \leqslant k_2 \left\| \xi_{is}(y') \sum_\alpha b_{i\mu s\alpha}\left(\omega_{is}^{-1}(y')\right) \mathcal{D}_{y'}^\alpha U(y') \right\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}}\left(\tilde{G}_{is}\right)} \leqslant \\ \leqslant k_3 \|u\|_{H_a^{l+2m}(Q\setminus\mathcal{K}_1^{2\varkappa})}. \quad (3.2.14)$$

Таким образом, мы доказали неравенство (3.2.6). Очевидно, $\omega_{is}(M_i \setminus \mathcal{K}_1^\varkappa) \subset Q_{2\sigma}$ для некоторого $\sigma > 0$. Пусть

$\Psi_{i\mu s}(y) = \Phi_{i\mu s}(y)\,\eta_{is}(\omega_{is}(y))$ для $y \in \Omega_i \cap Q$, $\Psi_{i\mu s}(y) = 0$ для $y \in Q \setminus \Omega_i$,
где $\eta_{is} \in \dot{C}^\infty\left(\mathbb{R}^2\right)$, $\eta_{is}(y) = 1$ для $y \in Q_{2\sigma}$, $\eta_{is}(y) = 0$ для $y \in Q_\sigma$. Ясно, что $\varphi_{i\mu s}\big|_{M_i\setminus\mathcal{K}_1^\varkappa} = \Psi_{i\mu s}\big|_{M_i\setminus\mathcal{K}_1^\varkappa}$. Используя те же рассуждения, что и в доказательстве неравенства (3.2.14), мы получим

$$\|\varphi_{i\mu s}\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(M_i\setminus\mathcal{K}_1^\varkappa)} \leqslant \|\Psi_{i\mu s}\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}}(Q)} \leqslant k_4 \|u\|_{H_a^{l+2m}(Q_\sigma)}. \quad (3.2.15)$$

Мы доказали неравенство (3.2.7).

3. Пусть теперь $\omega_{is}\left(\overline{M}_i\right) \subset Q$. Тогда аналогично вышеизложенному мы получим

$$\left\|\varphi_{i\mu s}\right\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(M_i)} \leqslant k_5 \left\|u\right\|_{H_a^{l+2m}(Q_\sigma)}. \tag{3.2.16}$$

Это доказывает неравенства (3.2.6) и (3.2.7). $\square$

Замечание 3.2.3. Из доказательства леммы 3.2.1 следует, что существует $\varkappa_0 > 0$ такое, что неравенство (3.2.6) выполняется для $0 < \varkappa \leqslant \varkappa_0$ и $u \in H_a^{l+2m}(Q)$. Если $0 < \varkappa \leqslant \varkappa_0$, существует $\sigma_0 = \sigma_0(\varkappa) > 0$ такое, что неравенство (3.2.7) выполняется для $0 < \sigma \leqslant \sigma_0$ и $u \in H_a^{l+2m}(Q)$.

Лемма 3.2.2. *Пусть выполняются условия леммы* 3.2.1. *Тогда операторы A в* (3.2.11) *и $B_{i\mu}$ в* (3.2.12) *можно представить в виде*

$$A = A^0 + A^1, \tag{3.2.17}$$

$$B_{i\mu} = \sum_{p=0,2,3} B_{i\mu}^p, \tag{3.2.18}$$

где операторы A^1, $B_{i\mu}^2$ и $B_{i\mu}^3$ удовлетворяют условиям 3.2.1, 3.2.2 *и* 3.2.3, *соответственно.*

Доказательство. Обозначим

$$A^1 u = \sum_{|\alpha|<2m} a_\alpha(y)\, \mathcal{D}_y^\alpha u(y),$$

$$B_{i\mu}^3 u = \sum_{|\alpha|<m_{i\mu}} b_{i\mu 0\alpha}(y)\, \mathcal{D}_y^\alpha u(y)\big|_{M_i}.$$

Теперь остается применить лемму 3.2.1. $\square$

Разрешимость и индекс задачи (3.2.1), (3.2.2)

Мы сохраним предположения и обозначения § 3.1. В частности, не ограничивая общности, мы будем предполагать, что в достаточно малой окрестности каждой точки $g \in \mathcal{K}_2$ область Q совпадает с полуплоскостью $\left\{y \in \mathbb{R}^2 :\ 0 < \varphi < \pi\right\}$, где r, φ — полярные координаты с полюсом в точке g. Рассмотрим оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{L}_{g0}(\lambda) \in \mathcal{B}\big(W^{l+2m}(d_1, d_2),$ $\mathcal{W}^l\left[d_1, d_2\right]\big)$, $g \in K \cap \partial Q$, заданные по формуле (3.1.11). Если $K \cap \mathcal{K}_3 \neq \varnothing$, мы рассмотрим также оператор-функцию $\lambda \mapsto \widehat{A}_g(\lambda) \in \mathcal{B}\big(W^{l+2m}_{2\pi}(0,2\pi),$ $W^{l}_{2m}(0,2\pi)\big)$, $g \in \mathcal{K}_3$, заданную по формуле (3.1.13).

Сформулируем основной результат этого параграфа

Теорема 3.2.1. *Пусть выполняются условия* 3.1.1, 3.1.2 *и* 3.2.1–3.2.3. *Если к тому же выполняется условие* 3.1.3, *то оператор* $L : H^{l+2m}_a(Q) \to \mathcal{H}^l_a(Q,M)$, *соответствующий нелокальной задаче* (3.2.1), (3.2.2) *— фредгольмов, и* $\operatorname{ind} L = \operatorname{ind} L_0$. *Обратно, если оператор* $L : H^{l+2m}_a(Q) \to \mathcal{H}^l_a(Q,M)$ *— фредгольмов, то прямая* $\operatorname{Im}\lambda = h = a+1-l-2m$ *не содержит собственных значений оператор-функций* $\lambda \mapsto \widehat{L}_{g0}(\lambda)$ $(g \in \mathcal{K}_1)$.

Замечание 3.2.4. В силу теоремы 3.1.1 мы можем кратко сформулировать теорему 3.2.1 следующим образом. Если оператор L_0, соответствующий локальной задаче (3.1.1), (3.1.2), — фредгольмов, то оператор L, соответствующий нелокальной задаче (3.2.1), (3.2.2), также фредгольмов. Однако, если $K = \mathcal{K}$ и $\mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3 \neq \varnothing$, то в отличие от обычной эллиптической задачи краевая задача (3.1.1), (3.1.2) рассматривается не в Q, а в $Q \setminus K$. Кроме того, в определении пространства $H^{l+2m}_a(Q)$ мы добавляем к множеству $\mathcal{K}_1$ множества $\mathcal{K}_2$ и $\mathcal{K}_3$. Такое определение оператора L_0 и весовых пространств $H^{l+2m}_a(Q)$ и $\mathcal{H}^l_a(Q,M)$ обеспечивает выполнение условий сопряжения для задач (3.2.1), (3.2.2) и (3.2.11), (3.2.12).

Для доказательства теоремы 3.2.1 вначале мы получим некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 3.2.3. *Пусть выполняются условия* 3.1.1–3.1.3 *и* 3.2.1–3.2.3. *Тогда для всех* $u \in H^{l+2m}_a(Q)$ *мы имеем*

$$\|u\|_{H^{l+2m}_a(Q)} \leqslant c_3 \left(\|Lu\|_{\mathcal{H}^l_a(Q,M)} + \|u\|_{H^0_{a+1-l-2m}(Q)} \right), \tag{3.2.19}$$

где оператор $L : H^{l+2m}_a(Q) \to \mathcal{H}^l_a(Q,M)$, *соответствующий нелокальной задаче* (3.2.1), (3.2.2), *задается по формуле* (3.2.8).

Доказательство. 1. В силу леммы 3.1.1 и замечания 3.1.2 мы имеем

$$\|u\|_{H_a^{l+2m}(Q)} \leqslant k_1(\|L_0 u\|_{\mathcal{H}(Q,M)} + \|u\|_{H^0_{a+1-l-2m}(Q)}) \leqslant$$
$$\leqslant k_2\biggl(\|Lu\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,M)} + \|u\|_{H^0_{a+1-l-2m}(Q)} + \|A^1 u\|_{H_a^l(Q)} +$$
$$+ \sum_{i,\mu} \sum_{p=2,3} \|B^p_{i\mu} u\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(M_i)} \biggr). \quad (3.2.20)$$

Из условий 3.2.1, 3.2.3, леммы 1.3.5 и ограниченности области Q следует, что

$$\left\|A^1 u\right\|_{H_a^l(Q)} + \sum_{i,\mu} \left\|B^3_{i\mu} u\right\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(M_i)} \leqslant k_3 q^{-1} |||u|||_{H_a^{l+2m}(Q)}$$
$$\text{для любых} \quad q > 0, \quad (3.2.21)$$

где $k_3 > 0$ не зависит от q и u,

$$|||u|||^2_{H_a^{l+2m}(Q)} = \|u\|^2_{H_a^{l+2m}(Q)} + q^{2(l+2m)} \|u\|^2_{H^0_{a+1-l-2m}(Q)}.$$

2. Мы введем функции $\eta,\ \eta_1 \in \dot{C}^\infty\left(\mathbb{R}^2\right)$ такие, что

$$\eta\,(y) = 1 \quad \left(y \notin \mathcal{K}_1^{2\varkappa}\right), \quad \eta\,(y) = 0 \quad \left(y \in \mathcal{K}_1^{\varkappa}\right), \quad (3.2.22)$$
$$\eta_1\,(y) = 1 \quad \left(y \in Q_\sigma\right), \quad \eta_1\,(y) = 0 \quad \left(y \notin Q_{\sigma/2}\right), \quad (3.2.23)$$

где числа $\varkappa$ и σ — из условия 3.2.2.

Из неравенства (3.2.6), леммы 3.1.1, замечания 3.1.2, формулы Лейбница, леммы 1.3.5 и неравенства (3.2.21) следует, что

$$\|B^2_{i\mu} u\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(M_i)} \leqslant k_4 \|\eta u\|_{H_a^{l+2m}(Q)} \leqslant$$
$$\leqslant k_5 \{ \|L_0(\eta u)\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,M)} + \|\eta u\|_{H^0_{a+1-l-2m}(Q)} \} \leqslant$$
$$\leqslant k_6 \{ \|\eta L_0 u\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,M)} + \|u\|_{H_a^{l+2m-1}(Q)} \} \leqslant k_7 \{ \|\eta L u\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,M)} +$$
$$+ \sum_{i,\mu} \|\eta B^2_{i\mu} u\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(M_i)} + q^{-1} |||u|||_{H_a^{l+2m}(Q)} \}, \quad (3.2.24)$$

где $k_7 > 0$ не зависит от q и u.

Из неравенства (3.2.7), леммы 3.1.1, формулы Лейбница, неравенства

(3.2.21) и леммы 1.3.5 мы получим

$$\begin{aligned}\|\eta B^2_{i\mu}u\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(M_i)} \leqslant k_8\|B^2_{i\mu}u\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(M_i\setminus\mathcal{K}_1^{\varkappa})} \leqslant \\ \leqslant k_9\|\eta_1 u\|_{H_a^{l+2m}(Q)} \leqslant k_{10}(\|A^0(\eta_1 u)\|_{H_a^l(Q)} + \|\eta_1 u\|_{H^0_{a+1-l-2m}(Q)}) \leqslant \\ \leqslant k_{11}(\|Au\|_{H_a^l(Q)} + q^{-1}|||u|||_{H_a^{l+2m}(Q)}). \quad (3.2.25)\end{aligned}$$

В силу (3.2.24), (3.2.25) мы имеем

$$\|B^2_{i\mu}u\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)} \leqslant k_{12}(\|Lu\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,M)} + q^{-1}|||u|||_{H_a^{l+2m}(Q)}). \quad (3.2.26)$$

Выберем $q > 0$ так, что $q^{-1}k_2\left(k_3 + N_1 m k_{12}\right) < 1/2$. Тогда из соотношений (3.2.20), (3.2.21) и (3.2.26) мы получим (3.2.19). $\square$

Лемма 3.2.4. *Пусть выполняются условия леммы* 3.2.3. *Тогда оператор* $L:\ H_a^{l+2m}(Q) \to \mathcal{H}_a^l(Q,M)$, *заданный по формуле* (3.2.8), *имеет правый регуляризатор* $R:\ \mathcal{H}_a^l(Q,M) \to H_a^{l+2m}(Q)$.

Доказательство. В силу леммы 3.1.2 и замечания 3.1.2 оператор L_0 : $H_a^{l+2m}(Q) \to \mathcal{H}_a^l(Q,M)$ имеет правый регуляризатор $R_0:\ \mathcal{H}_a^l(Q,M) \to H_a^{l+2m}(Q)$, т.е. $L_0R_0 = I + T_0$, где T_0 — компактный оператор в $\mathcal{H}_a^l(Q,M)$.

Введем ограниченные операторы R_1 : $H_a^l(Q) \to H_a^{l+2m}(Q)$ и R_2 : $\mathcal{H}_a^l(M) \to H_a^{l+2m}(Q)$ по формулам $R_1 f_0 = R_0(f_0, 0)$ и $R_2 f' = R_0(0, f')$, где $f' = \{f_{i\mu}\}$, $\mathcal{H}_a^l(M) = \prod\limits_{i,\mu} H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(M_i)$. Мы определим также ограниченные операторы B, B^p : $H_a^{l+2m}(Q) \to \mathcal{H}_a^l(M)$ следующим образом: $B^p = \left\{B^p_{i\mu}\right\}_{i,\mu}$, $B = B^0 + B^2 + B^3$, где $p = 0, 2, 3$.

Покажем, что оператор R, определенный по формуле

$$Rf = R_1 f_0 + (1-\eta_1)\left[I - (1-\eta)R_2B^2(1-\eta_1)\right]R_2\Phi, \quad (3.2.27)$$

является правым регуляризатором L. Здесь η и η_1 функции, заданные по формулам (3.2.22), (3.2.23), $\Phi = f' - B^2R_1f_0$. Введем операторы T_1 (T_2) из $H_a^l(Q)$ в себя (в $\mathcal{H}_a^l(M)$) и T_3 (T_4) из $\mathcal{H}_a^l(M)$ в $H_a^l(Q)$ (в $\mathcal{H}_a^l(M)$) по формулам

$$T_0(f_0, 0) = (T_1 f_0, T_2 f_0) \text{ и } T_0(0, f') = (T_3 f', T_4 f').$$

По определению операторы $T_1, \dots, T_4$ — компакты в соответствующих пространствах и

$$A^0 R_1 f_0 = f_0 + T_1 f_0, \quad A^0 R_2 f' = T_3 f', \tag{3.2.28}$$

$$B^0 R_1 f_0 = T_2 f_0, \qquad B^0 R_2 f' = f' + T_4 f'. \tag{3.2.29}$$

Легко видеть, что

$$B^0 \left(1 - \eta_1\right) u = B^0 u. \tag{3.2.30}$$

Из (3.2.6) мы имеем $\operatorname{supp} B^2 \left(1 - \eta_1\right) u \subset \partial Q \cap \overline{\mathcal{K}_1^{\varkappa}}$. В силу (3.2.22), $1 - \eta\left(y\right) = 1$ для $y \in \mathcal{K}_1^{\varkappa}$ и $1 - \eta\left(y\right) = 0$ для $y \notin \mathcal{K}_1^{2\varkappa}$. Отсюда и из (3.2.6) мы имеем

$$\left(1 - \eta\right) B^2 \left(1 - \eta_1\right) u = B^2 \left(1 - \eta_1\right) u, \quad B^2 \left(1 - \eta\right) u = 0. \tag{3.2.31}$$

Из соотношений (3.2.27) и (3.2.29)–(3.2.31) следует, что

$$\begin{aligned} BRf = T_2 f_0 + B^2 R_1 f_0 + \Phi + T_4 \Phi + B^2 \left(1 - \eta_1\right) R_2 \Phi - \\ - \left(1 - \eta\right) B^2 \left(1 - \eta_1\right) R_2 \Phi - \left(1 - \eta\right) T_4 B^2 \left(1 - \eta_1\right) R_2 \Phi + \\ + T_5 R_2 B^2 \left(1 - \eta_1\right) R_2 \Phi + B^3 R f = f' + T'' f, \end{aligned}$$

где

$$T_5 v = \left\{ \left(\sum_{1 \leqslant |\alpha| \leqslant m_{i\mu}} \sum_{|\beta| = m_{i\mu} - |\alpha|} a_{\alpha\beta}^{i\mu}\left(y\right) \mathcal{D}_y^{\alpha} \left(1 - \eta\left(y\right)\right) \mathcal{D}_y^{\beta} v\left(y\right) \right) \bigg|_{M_i} \right\}_{i,\mu},$$

$$a_{\alpha\beta}^{i\mu} \in C^{\infty}\left(\mathbb{R}^2\right), \ i = 1, \dots, N_1, \ \mu = 1, \dots, m,$$

$$T'' f = T_2 f_0 + T_4 \Phi + \left(T_5 R_2 - \left(1 - \eta\right) T_4\right) B^2 \left(1 - \eta_1\right) R_2 \Phi + B^3 R f.$$

В силу компактности операторов вложения $H_a^{l+2m}\left(Q\right)$ в $H_a^{l+2m-1}\left(Q\right)$, см. теорему 3.3.1 и условие 3.2.3, оператор $T'' : \ H_a^l\left(Q, M\right) \to \mathcal{H}_a^l\left(M\right)$ — компактный.

Подставляя (3.2.27), (3.2.28) в выражение ARf и применяя затем формулу Лейбница, в силу теоремы 1.3.1 и условия 3.2.1 мы получим

$$ARf = f_0 + T' f,$$

где $T' : \ \mathcal{H}_a^l\left(Q, M\right) \to H_a^l\left(Q\right)$ — компактный оператор.

Таким образом,
$$LRf = I + T,$$
где оператор $T : \mathcal{H}_a^l(Q, M) \to \mathcal{H}_a^l(Q, M)$, определенный по формуле $Tf = (T'f,\ T''f)$, — компактный. $\square$

Доказательство теоремы 3.2.1

1. Пусть выполняется условие 3.1.3. Тогда из леммы 3.2.3, теоремы 1.3.1 и теоремы А.2 следует, что $\dim \mathcal{N}(L) < \infty$ и образ $\mathcal{R}(L)$ — замкнут в $\mathcal{H}_a^l(Q, M)$. С другой стороны, из леммы 3.2.4 и теоремы А.4 вытекает, что $\operatorname{codim} \mathcal{R}(L) < \infty$. Таким образом, оператор $L : \ H_a^{l+2m}(Q) \to \mathcal{H}_a^l(Q, M)$ — фредгольмов. Покажем, что $\operatorname{ind} L = \operatorname{ind} L_0$. Обозначим $L_t = L_0 + t(L - L_0)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Очевидно, операторы tA^1, $tB_{i\mu}^2$ и $tB_{i\mu}^3$ $(i = 1, \ldots, N_1,\ \mu = 1, \ldots, m)$ удовлетворяют условиям 3.2.1–3.2.3. Поэтому из первой части доказательства мы видим, что оператор L_t — фредгольмов для любого $0 \leqslant t \leqslant 1$. Таким образом, в силу теоремы А.8 об устойчивости индекса $\operatorname{ind} L = \operatorname{ind} L_0$.

2. Пусть теперь оператор L — фредгольмов. Докажем, что прямая $\operatorname{Im} \lambda = h$ не содержит собственных значений оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{L}_{g0}(\lambda)$ $(g \in \mathcal{K}_1)$. Из теоремы 1.3.1 и условий 3.2.1 и 3.2.3 следует, что операторы $A^1 : \ H_a^{l+2m}(Q) \to H_a^l(Q)$ и $B_{i\mu}^3 : \ H_a^{l+2m}(Q) \to H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(M_i)$ — компактны. Поэтому по теореме А.7 о компактных возмущениях фредгольмовых операторов мы можем считать, что $A^1 = 0$ и $B_{i\mu}^3 = 0$. Поскольку оператор $L : \ H_a^{l+2m}(Q) \to \mathcal{H}_a^l(Q, M)$ — фредгольмов, из теоремы А.2 мы получим оценку (3.2.19).

Предположим противное: существует $g \in \mathcal{K}_1$ такое, что прямая $\operatorname{Im} \lambda = h$ содержит собственное значение λ_0 оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{L}_{g0}(\lambda)$.

Выберем δ_1 так, что $0 < \delta_1 < \varkappa$, $B_{2\delta_1}(g) \cap (\mathcal{K} \setminus \{g\})^{4\delta_1} = \varnothing$, и $Q \cap B_{4\delta_1}(g_\nu) = (\theta + g_\nu) \cap B_{4\delta_1}(g_\nu)$ $(\nu = 1, \ldots, N_1)$, где $\theta = \theta_\nu = \{y \in \mathbb{R}^2 : \ d_{\nu 1} < \varphi < d_{\nu 2},\ 0 < r\}$. Сохраняя обозначения для функций ξ_1, ξ_2 и операторов L'_{g0}, L''_{g0} из доказательства леммы 3.1.1, далее возьмем достаточно малое $\delta > 0$, $\delta < \delta_1$.

Пусть $u \in H_a^{l+2m}(Q)$ таково, что $\operatorname{supp} u \subset B_{3\delta/2}(g)$. Из неравенства (3.2.6) следует, что $B_{i\mu}^2 u = 0$. В силу (3.1.15) мы имеем $L''_{g0}v(y') = L'_{g0}v(y')$, где $y' = y - g$ и $v(y') = u(g + y')$. Отсюда мы выводим

$$\|Lu\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,M)} = \|L_0 u\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,M)} = \|L'_{g0}v\|_{\mathcal{H}_a^l(\theta,\gamma)} \leqslant \\ \leqslant \|L_{g0}v\|_{\mathcal{H}_a^l(\theta,\gamma)} + \|\xi_2(L'_{g0} - L_{g0})v\|_{\mathcal{H}_a^l(\theta,\gamma)}. \quad (3.2.32)$$

В силу (3.1.19) существует $\delta > 0$ такое, что $\|\xi_2(L'_{g0} - L_{g0})\| < 1/2c_3$, где $c_3 > 0$ — из неравенства (3.2.19). Поэтому из неравенств (3.2.19) и (3.2.32) следует, что

$$\|u\|_{H_a^{l+2m}(Q)} \leqslant 2c_3 \left(\|L_{g0}v\|_{\mathcal{H}_a^l(\theta,\gamma)} + \|u\|_{H^0_{a+1-l-2m}(Q)} \right). \quad (3.2.33)$$

Пусть

$$v(y') = v_\varepsilon(y') = r^{i\lambda_0+\varepsilon}\psi^0(\varphi)\xi_1(y'),$$
$$u(y) = u_\varepsilon(y) = v_\varepsilon(y'),$$

где $\psi^0(\varphi)$ — собственная функция оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{L}_{g0}(\lambda)$, соответствующая значению λ_0, $\varepsilon > 0$. Очевидно,

$$L_{g0}(r^{i\lambda_0+\varepsilon}\psi^0(\varphi)) = \Big\{ r^{-2m+i\lambda_0+\varepsilon}\widehat{A}(g,\varphi,\mathcal{D}_\varphi,\lambda_0 - i\varepsilon)\psi^0(\varphi), \\ r^{-m_{i\mu}+i\lambda_0+\varepsilon}\widehat{B}_{i\mu}(g,\varphi,\mathcal{D}_\varphi,\lambda_0 - i\varepsilon)\psi^0(\varphi)\big|_{\varphi=d_\rho} \Big\}.$$

Поэтому $\|L_{g0}v_\varepsilon\|_{\mathcal{H}_a^l(\theta,\gamma)} \leqslant k_1$ для $0 < \varepsilon < 1$, ср. доказательство следствия 2.2.4. В силу леммы 1.3.10 $u_\varepsilon \in H_a^{l+2m}(Q)$. Однако $\|u_\varepsilon\|_{H_a^{l+2m}(Q)} \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$ и $\|u_\varepsilon\|_{H^0_{a+1-l-2m}(Q)} \leqslant k_2$ при $0 < \varepsilon < 1$. Это противоречит неравенству (3.2.33). Мы доказали, что прямая $\operatorname{Im}\lambda = h$ не содержит собственных значений оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{L}_{g0}(\lambda)$ $(g \in \mathcal{K}_1)$. □

В следующем пункте мы покажем, что для задач (3.2.11), (3.2.12) оператор $L:\ H_a^{l+2m}(Q) \to \mathcal{H}_a^l(Q,M)$ — фредгольмов тогда и только тогда, когда выполняется условие 3.1.3.

Разрешимость и индекс задачи (3.2.11), (3.2.12)

Теорема 3.2.2. *Пусть выполняются условия* 3.1.1, 3.1.2, *и* 3.2.5. *Если $K = \mathcal{K}$ и $\mathcal{K}_3 \neq \varnothing$, мы предполагаем также, что выполнено условие* 3.2.4, *если $\mathcal{K} \setminus K \neq \varnothing$, мы предполагаем, что $a > l + 2m - 1$.*

Тогда оператор $L:\ H_a^{l+2m}(Q)\to\mathcal{H}_a^l(Q,M)$, *соответствующий нелокальной задаче* (3.2.11), (3.2.12), *— фредгольмов тогда и только тогда, когда выполняется условие* 3.1.3. *Более того, если условие* 3.1.3 *выполняется, то* $\operatorname{ind}L=\operatorname{ind}L_0$.

Доказательство. 1. Пусть выполняется условие 3.1.3. Тогда из теоремы 3.2.1 и леммы 3.2.2 следует, что оператор L, соответствующий задаче (3.2.11), (3.2.12), — фредгольмов и $\operatorname{ind}L=\operatorname{ind}L_0$.

2. Предположим теперь, что оператор L, соответствующий задаче (3.2.11), (3.2.12), — фредгольмов. Тогда в силу теоремы 3.2.1 и леммы 3.2.2 прямая $\operatorname{Im}\lambda=h$ не содержит собственных значений оператор-функции $\lambda\mapsto\widehat{L}_{g0}(\lambda)$ $(g\in\mathcal{K}_1)$. Остается доказать, что прямая $\operatorname{Im}\lambda=h$ не содержит собственных значений оператор-функции $\lambda\mapsto\widehat{L}_{g0}(\lambda)$ $(g\in\mathcal{K}_2)$, если $K\cap\mathcal{K}_2\ne\varnothing$, и собственных значений оператор-функции $\lambda\mapsto\widehat{A}_g(\lambda)$ $(g\in\mathcal{K}_3)$, если $K\cap\mathcal{K}_3\ne\varnothing$. Для того чтобы это сделать, мы установим некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 3.2.5. *Пусть выполняются условия теоремы* 3.2.2. Предположим, что оператор $L:\ H_a^{l+2m}(Q)\to\mathcal{H}_a^l(Q,M)$ — фредгольмов и $A^1=0$, $B^3_{i\mu}=0\quad(i=1,\dots,N_1,\mu=1,\dots,m)$. Предположим также, что $\mathcal{K}_2\subset K$ и $\mathcal{K}_2\ne\varnothing$.

Тогда прямая $\operatorname{Im}\lambda=h$ не содержит собственных значений оператор-функции $\lambda\mapsto\widehat{L}_{g0}(\lambda)$ $(g\in\mathcal{K}_2)$.

Доказательство. 1. В силу замечания 3.2.3 существует $\varkappa_0>0$ такое, что неравенство (3.2.6) выполняется для $0<\varkappa\leqslant\varkappa_0$ и $u\in H_a^{l+2m}(Q)$. Если $0<\varkappa\leqslant\varkappa_0$, то существует $\sigma_0=\sigma_0(\varkappa)>0$ такое, что для $0<\sigma\leqslant\sigma_0$ и $u\in H_a^{l+2m}(Q)$ выполняется неравенство (3.2.7). Пусть $\varkappa,\sigma>0$ достаточно малы. В частности, мы предполагаем, что $B_{2\varkappa}(g)\cap B_{2\varkappa}(p)=\varnothing$ для всех $g\ne p,\ g,p\in\mathcal{K},\ \sigma\leqslant\varkappa,\ \varkappa$ — настолько мало, что $Q\cap B_{2\varkappa}(g)=(\theta+g)\cap B_{2\varkappa}(g)\quad(g\in\mathcal{K}_1\cup\mathcal{K}_2)$, где $\theta=\theta_\nu=\{y\in\mathbb{R}^2:d_{\nu1}<\varphi<d_{\nu2},\ 0<r\}$, $\nu=1\dots,N_1$, если $g=g_\nu\in\mathcal{K}_1$, и $\theta=\{y\in\mathbb{R}^2:0<\varphi<\pi,\ 0<r\}$, если $g\in\mathcal{K}_2$.

Из теоремы 3.2.1 следует, что прямая $\mathrm{Im}\lambda = h$ не содержит собственных значений оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{L}_{g0}(\lambda)$ $(g \in \mathcal{K}_1)$. Докажем, что на прямой $\mathrm{Im}\lambda = h$ нет собственных значений оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{L}_{g0}(\lambda)$ $(g \in \mathcal{K}_2)$. Предположим противное: прямая $\mathrm{Im}\lambda = h$ содержит собственное значение λ_0 оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{L}_{g0}(\lambda)$ для некоторого $g_0 \in \mathcal{K}_2$.

Примем $v_{2\varepsilon}(y') = r^{i\lambda_0+\varepsilon}\psi^0(\varphi)\xi_{1,\sigma/2}(y'),\ u_{2\varepsilon}(y) = v_{2\varepsilon}(y')$, где $y' = y - g_0$, $\varepsilon > 0,\ \psi^0(\varphi)$ — собственная функция оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{L}_{g0}(\lambda)$, соответствующая собственному значению λ_0, и $\xi_{1,\sigma/2}(y') = \xi_1(y')$, $\xi_1(y')$ определена по формуле (3.1.15) с $\delta = \sigma/2, \varphi, r$ — полярные координаты y'.

Аналогично доказательству теоремы 3.2.1 можно легко убедиться, что $u_{2\varepsilon} \in H_a^{l+2m}(Q)$ и

$$\|u_{2\varepsilon}\|_{H_a^{l+2m}(Q)} \to \infty \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0, \tag{3.2.34}$$

$$\|u_{2\varepsilon}\|_{H_b^{l+2m}(Q)} \leqslant k_1 \quad (0 < \varepsilon < 1), \tag{3.2.35}$$

где $k_1 = k_1(b) > 0$ не зависит от $\varepsilon,\ b > a$.

Поскольку $\mathrm{supp}\, u_{2\varepsilon} \subset \overline{Q} \setminus Q_\sigma$, из неравенства (3.2.7) следует, что $\mathrm{supp}\, B_{i\mu}^2 u_{2\varepsilon} \subset \overline{\mathcal{K}_1^\varkappa}$ и $B_{i\mu}^2 u_{2\varepsilon} \in H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(M_i)$.

Определим оператор $L''_{g0} : H_a^{l+2m}(\theta) \to \mathcal{H}_a^l(\theta, \gamma)$ по формуле (3.1.17) с функцией ξ_2, заданной по формуле (3.1.15), где $\xi_2(y) = \xi_{2,\,\varkappa/2}(y)$, если $g \in \mathcal{K}_1$ и $\xi_2(y) = \xi_{2,\,\sigma/2}(y)$, если $g \in \mathcal{K}_2$.

Для каждого $\nu,\ 1 \leqslant \nu \leqslant N_1$, мы рассмотрим уравнение

$$L''_{g_\nu 0} w_{\nu\varepsilon} = F_{\nu\varepsilon}, \tag{3.2.36}$$

где $F_{\nu\varepsilon} = \{0,\ f_{\rho\mu}^\varepsilon\}$,

$$f_{\rho\mu}^\varepsilon(y') = \begin{cases} -(B_{i\mu}^2 u_{2\varepsilon})(g_\nu + y') & \text{для } y' \in \gamma_\rho,\ |y'| < \varkappa, \\ 0 & \text{для } y' \in \gamma_\rho,\ |y'| \geqslant \varkappa, \end{cases}$$

и $i = i(\rho, \nu),\ 1 \leqslant i \leqslant N_1$, таково, что $g_\nu \in \overline{M}_i$ и $M_i \cap (\gamma_\rho + g_\nu) \neq \varnothing$, ср. (3.1.10). Поскольку прямая $\mathrm{Im}\,\lambda = h$ не содержит собственных значений оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{L}_{g_\nu 0}(\lambda)$, из доказательства леммы 3.1.1 следует, что оператор $L''_{g_\nu 0}$ имеет ограниченный обратный $(L''_{g\nu 0})^{-1}$:

$\mathcal{H}_a^l(\theta,\gamma) \to H_a^{l+2m}(\theta)$ для любого $0 < \varkappa < \delta_0$, где $\delta_0 > 0$ — достаточно мало. Следовательно, существует единственное решение $w_{\nu\varepsilon} \in H_a^{l+2m}(\theta)$ уравнения (3.2.36).

Примем $u_{1\varepsilon}(y) = \sum\limits_{\nu=1}^{N_1} w_{\nu\varepsilon}(y-g_\nu)\xi_{1,\varkappa/2}(y-g_\nu)$ и $u_\varepsilon(y) = u_{1\varepsilon}(y)+u_{2\varepsilon}(y)$, где функция $\xi_{1,\varkappa/2}(y) = \xi_1(y)$, функция $\xi_1(y)$ задана по формуле (3.1.15) с $\delta = \varkappa/2, \quad 0 < \varkappa \leqslant \delta_0$. Очевидно, $u_{1\varepsilon} \in H_a^{l+2m}(Q)$. Поскольку $\operatorname{supp} u_{1\varepsilon} \cap \operatorname{supp} u_{2\varepsilon} = \varnothing$, из соотношения (3.2.34) вытекает, что

$$\|u_\varepsilon\|_{H_a^{l+2m}(Q)} \to \infty \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{3.2.37}$$

Далее мы докажем, что множество $\left\{\|u_\varepsilon\|_{H_a^{l+2m}(Q)}\right\}$ ограничено для $0 < \varepsilon < 1$. Это противоречит соотношению (3.2.37).

2. Вначале оценим нормы $\|A^0 u_\varepsilon\|_{H_a^l(Q)}$.

Введем операторы A'_{g0} и A''_{g0} по формулам (3.1.16), (3.1.17) соответственно, с $g \in \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$. Поскольку $\operatorname{supp}\xi_{1\delta} \subset B_{3\delta/2}$, $\xi_{2\delta}(y') = 1$ для $y' \in \overline{B}_{3\delta/2}$, мы имеем

$$\begin{aligned} A'_{g_\nu 0}\left(w_{\nu\varepsilon}(y')\xi_{1,\varkappa/2}(y')\right) &= A''_{g_\nu 0}\left(w_{\nu\varepsilon}(y')\xi_{1,\varkappa/2}(y')\right) \quad (\nu = 1,\ldots,N_1),\\ A'_{g_0 0}v_{2\varepsilon}(y') &= A''_{g_0 0}v_{2\varepsilon}(y'). \end{aligned}$$

Тогда, переходя к координатам y' в окрестности точек $g_\nu \in \mathcal{K}_1$ и $g_0 \in \mathcal{K}_2$, мы получим

$$\begin{aligned} \|A^0 u_\varepsilon\|_{H_a^l(Q)} \leqslant \sum_\nu \|A'_{g_\nu 0}\left(w_{\nu\varepsilon}(y')\xi_{1,\varkappa/2}(y')\right)\|_{H_a^l(\theta_\nu)} + \\ + \|A'_{g_0 0}v_{2\varepsilon}(y')\|_{H_a^l(\theta)} \leqslant \sum_\nu C_{\nu\varepsilon} + \|A'_{g_0 0}v_{2\varepsilon}(y')\|_{H_a^l(\theta)} + \\ + \|\xi_{2,\sigma/2}(y')(A'_{g_0 0} - A_{g_0 0})v_{2\varepsilon}(y')\|_{H_a^l(\theta)}, \end{aligned} \tag{3.2.38}$$

где $C_{\nu\varepsilon} = \|A''_{g_\nu 0}\left(w_{\nu\varepsilon}(y')\xi_{1,\varkappa/2}(y')\right)\|_{H_a^l(\theta_\nu)}$.

Оценим $C_{\nu\varepsilon}$. В силу следствия 1.4.2 в [12] существует число a_0 такое, что $a < a_0 < a+1$ и полоса $a+1-l-2m \leqslant \operatorname{Im}\lambda \leqslant a_0+1-l-2m$ не содержит собственных значений оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{L}_{g_\nu 0}(\lambda)$. Из уравнения (3.2.36) вытекает, что $A''_{g_\nu 0} w_{\nu\varepsilon}(y') = 0$. Следовательно, используя формулу Лейбница, мы выводим неравенство

$$C_{\nu\varepsilon} \leqslant k_2(\varkappa)\|w_{\nu\varepsilon}\|_{H_a^{l+2m-1}(\theta_\nu\cap(B_\varkappa\setminus B_{\varkappa/2}))} \leqslant k_3(\varkappa)\|w_{\nu\varepsilon}\|_{H_{a_0}^{l+2m}(\theta_\nu\cap B_\varkappa)}, \tag{3.2.39}$$

где $k_2(\varkappa), k_3(\varkappa) > 0$ не зависят от ε.

Оценим правую часть неравенства (3.2.39). Введем линейные ограниченные операторы

$$\begin{aligned} L_a, L'_a, L''_a : H_a^{l+2m}(\theta) &\to \mathcal{H}_a^l(\theta, \gamma), \\ L_{a_0}, L'_{a_0}, L''_{a_0} : H_{a_0}^{l+2m}(\theta) &\to \mathcal{H}_{a_0}^l(\theta, \gamma), \end{aligned}$$

заданные по формулам

$$\begin{aligned} L_a u = L_{g_\nu 0} u,\ L'_a u = L'_{g_\nu 0} u,\ L''_a u = L''_{g_\nu 0} u \quad \left(u \in H_a^{l+2m}(\theta_\nu)\right), \\ L_{a_0} u = L_{g_\nu 0} u,\ L'_{a_0} u = L'_{g_\nu 0} u,\ L''_{a_0} u = L''_{g_\nu 0} u \quad \left(u \in H_{a_0}^{l+2m}(\theta_\nu)\right). \end{aligned}$$

Уравнение (3.2.36) относительно функции $w_{\nu\varepsilon} \in H_a^{l+2m}(\theta)$ может быть записано в следующем виде:

$$L_a w_{\nu\varepsilon} = \Phi_{\nu\varepsilon}, \tag{3.2.40}$$

где $\Phi_{\nu\varepsilon} = F_{\nu\varepsilon} - \xi_{2,\varkappa/2}(L'_a - L_a) w_{\nu\varepsilon}$. Поскольку $\operatorname{supp} B_{i\mu}^2 u_{2\varepsilon} \subset \overline{\mathcal{K}_1^\varkappa}$, $\operatorname{supp} \xi_{2,\varkappa/2} \subset B_\varkappa$, и $a_0 > a$, мы имеем $\Phi_{\nu\varepsilon} \in \mathcal{H}_a^l(\theta, \gamma) \cap \mathcal{H}_{a_0}^l(\theta, \gamma)$. Напомним, что полоса $a + 1 - l - 2m \leqslant \operatorname{Im} \lambda \leqslant a_0 + 1 - l - 2m$ не содержит собственных значений оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{L}_{g_\nu 0}(\lambda)$. Поэтому по теореме 2.2.1 об асимптотическом поведении решений эллиптических задач в бесконечных углах существует ограниченный обратный оператор $L_{a_0}^{-1} : \mathcal{H}_{a_0}^l(\theta, \gamma) \to H_{a_0}^{l+2m}(\theta)$ и $w_{\nu\varepsilon} = L_{a_0}^{-1} \Phi_{\nu\varepsilon} \in H_{a_0}^{l+2m}(\theta)$. Более того, из соотношения (3.1.19) следует, что

$$\|L_{a_0}^{-1} \xi_{2,\varkappa/2}(L'_a - L_a)\| < 1/2,$$

если $\varkappa < \delta$ и $\delta_0 > 0$ — достаточно мало. Поэтому в силу (3.2.40) мы имеем

$$\|w_{\nu\varepsilon}\|_{H_{a_0}^{l+2m}(\theta)} \leqslant k_4 \sum_{i,\mu} \|B_{i\mu}^2 u_{2\varepsilon}\|_{H_{a_0}^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(M_i)} - \frac{1}{2} \|w_{\nu\varepsilon}\|_{H_{a_0}^{l+2m}(\theta)}.$$

Из этого неравенства и из оценки (3.2.35) мы выводим

$$\|w_{\nu\varepsilon}\|_{H_{a_0}^{l+2m}(\theta)} \leqslant k_5. \tag{3.2.41}$$

Из неравенств (3.2.39) и (3.2.41) следует, что

$$C_{\nu\varepsilon} \leqslant k_6(\varkappa), \tag{3.2.42}$$

где $k_6(\varkappa) > 0$ не зависит от ε.

Из неравенств (3.2.38), (3.2.42), оценки

$$\|A_{g_0 0}\, v_{2\varepsilon}(y')\|_{H_a^l(\theta)} \leqslant k_7(\varkappa)$$

и соотношения $\|\xi_{2,\sigma/2}(A'_{g_0 0} - A_{g_0 0})\| \to 0$ при $\sigma \to \infty$ (см. (3.1.19)) мы выводим

$$\|A^0 u_\varepsilon\|_{H_a^l(Q)} \leqslant k_8(\varkappa) + k_9(\varkappa)\|u_\varepsilon\|_{H_a^{l+2m}(Q)}, \tag{3.2.43}$$

где $k_7(\varkappa),\ k_8(\varkappa),\ k_9(\varkappa) > 0$ не зависит от ε, а $k_9(\varkappa) \to 0$ при $\varkappa \to 0$.

3. Теперь мы оценим нормы $\|B_{i\mu}u_\varepsilon\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-\frac{1}{2}}(M_i)}$. Поскольку $\operatorname{supp} u_{1\varepsilon} \subset \mathcal{K}_1^\varkappa$, из неравенства (3.2.6) следует, что $B_{i\mu}^2 u_{1\varepsilon} = 0$. Таким образом,

$$B_{i\mu}u_\varepsilon = B_{i\mu}^0 u_{1\varepsilon} + B_{i\mu}^2 u_{2\varepsilon} + B_{i\mu}^0 u_{2\varepsilon}. \tag{3.2.44}$$

Из соотношения $\xi_{1,\varkappa/2}(y') = 1$ при $|y'| \leqslant \varkappa/2$ и равенств (3.2.36), (3.1.17) мы получим

$$\begin{aligned}\xi_{1,\varkappa/2}(y-g_\nu)B_{i\mu}^0 w_{\nu\varepsilon}(y-g_\nu) + (B_{i\mu}^2 u_{2\varepsilon})(y) = \\ = \xi_{1,\varkappa/2}(y')B_{i\mu 0}^0(g_\nu + y',\ \mathcal{D}_{y'})w_{\nu\varepsilon}(y')\big|_{\gamma_\rho} + \\ + (B_{i\mu}^2 u_{2\varepsilon})(g_\nu + y') = 0 \quad \text{при} \quad y' \in \gamma_\rho,\ |y'| \leqslant \varkappa/2.\end{aligned} \tag{3.2.45}$$

Используя соотношения (3.2.44), и (3.2.45), формулу Лейбница, эквивалентность норм в пространствах Соболева и пространствах Кондратьева на $\gamma_\rho \cap (B_{2\varkappa} \setminus \overline{B}_{\varkappa/3})$ с различными индексами a и a_0, лемму C.5 и неравенства (3.2.35), (3.2.41) мы имеем

$$\begin{aligned}&\|B_{i\mu}u_\varepsilon\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(M_i)} \leqslant \\ &\leqslant C_{i\mu\varepsilon} + \sum_{\nu,\rho}\Big\| B_{i\mu 0}^0(g_\nu + y',\ \mathcal{D}_{y'})\left(w_{\nu\varepsilon}(y')\xi_{1,\varkappa/2}(y')\right)\big|_{\gamma_\rho} + \\ &\qquad + (B_{i\mu}^2 u_{2\varepsilon})(g_\nu + y')\Big\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\gamma_\rho)} \leqslant \\ &\leqslant C_{i\mu\varepsilon} + k_{10}(\varkappa)\left(\sum_\nu \|w_{\nu\varepsilon}\|_{W^{l+2m}(\theta\cap(B_\varkappa\setminus B_{\varkappa/2}))} + 1\right) \leqslant \\ &\leqslant C_{i\mu\varepsilon} + k_{11}(\varkappa)\Bigg(\sum_{\rho,\nu,\mu}\|(B_{i\mu}^2 u_{2\varepsilon})(g_\nu + y')\|_{W^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}\left(\gamma_\rho\cap(B_{2\varkappa}\setminus B_{\varkappa/3})\right)} +\end{aligned}$$

$$
+\sum_{\nu}\|w_{\nu\varepsilon}(g_\nu+y')\|_{L_2\bigl(\theta\cap(B_{2\varkappa}\setminus B_{\varkappa/3})\bigr)}+1\Bigr)\leqslant
$$

$$
\leqslant C_{i\mu\varepsilon}+k_{12}(\varkappa)\Bigl(\|u_{2\varepsilon}(g+y')\|_{H_{a_0}^{l+2m}(\theta)}+\sum_{\nu}\|w_{\nu\varepsilon}\|_{H_{a_0}^{l+2m}(\theta)}+1\Bigr)\leqslant
$$

$$
\leqslant C_{i\mu\varepsilon}+k_{13}(\varkappa),
$$

где $C_{i\mu\varepsilon}=\|B_{i\mu}^0u_{2\varepsilon}\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(M_i)}$.

Оценивая $C_{i\mu\varepsilon}$ аналогично неравенству (3.2.43), из последнего неравенства мы выводим

$$
\|B_{i\mu}u_\varepsilon\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(M_i)}\leqslant k_{14}(\varkappa)+k_{15}(\varkappa)\|u_\varepsilon\|_{H_a^{l+2m}(Q)}, \tag{3.2.46}
$$

где константы $k_{10}(\varkappa),\dots,k_{15}(\varkappa)>0$ не зависят от ε и $k_{15}(\varkappa)\to 0$ при $\varkappa\to 0$.

4. Наконец, мы докажем ограниченность множества $\{\|u_\varepsilon\|_{H_a^{l+2m}(Q)}\}$.

По предположению, оператор $L: H_a^{l+2m}(Q)\to\mathcal{H}_a^l(Q,M)$ — фредгольмов. Поэтому из теоремы A.5 и компактности вложения $H_a^{l+2m}(Q)$ в $H_{a_0-l-2m}^0(Q)$ вытекает, что

$$
\|u_\varepsilon\|_{H_a^{l+2m}(Q)}\leqslant k_{16}\left(\|Lu_\varepsilon\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,M)}+\|u_\varepsilon\|_{H_{a_0-l-2m}^0(Q)}\right) \tag{3.2.47}
$$

для $0<\varepsilon<1$.

Мы можем выбрать $\varkappa>0$ настолько малым, что

$$
k_{16}\bigl(k_9(\varkappa)+N_1mk_{15}(\varkappa)\bigr)<1/2.
$$

Тогда из (3.2.47), (3.2.43), и (3.2.46) мы получим

$$
\|u_\varepsilon\|_{H_a^{l+2m}(Q)}\leqslant 2k_{16}\left(k_8(\varkappa)+N_1mk_{14}(\varkappa)+\|u_\varepsilon\|_{H_{a_0-l-2m}^0(Q)}\right) \tag{3.2.48}
$$

для $0<\varepsilon<1$.

Используя определение функции $u_{1\varepsilon}$, ограниченность оператора $L_{a_0}^{-1}$: $\mathcal{H}_{a_0}^l(\theta,\gamma)\to H_{a_0}^{l+2m}(\theta)$ и неравенство (3.2.35), мы имеем

$$
\|u_{1\varepsilon}\|_{H_{a_0-l-2m}^0(Q)}\leqslant k_{17}(\varkappa)\sum_{\nu}\|w_{\nu\varepsilon}(y')\|_{H_{a_0}^{l+2m}(\theta_\nu)}\leqslant
$$

$$
\leqslant k_{18}(\varkappa)\sum_{\rho,\nu,\mu}\|(B_{i\mu}^2u_{2\varepsilon})(g_\nu+y')\|_{H_{a_0}^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\gamma_\rho)}\leqslant
$$

$$
\leqslant k_{19}(\varkappa)\|u_{2\varepsilon}\|_{H_{a_0}^{l+2m}(Q)}\leqslant k_{20}(\varkappa), \tag{3.2.49}
$$

где $k_{17}(\varkappa), \dots, k_{20}(\varkappa) > 0$ не зависят от ε.

Из неравенств (3.2.35), (3.2.48), (3.2.49) следует $\|u_\varepsilon\|_{H_a^{l+2m}(Q)} \leqslant k_{21}(\varkappa)$, где $k_{21}(\varkappa) > 0$ не зависит от ε.

Это противоречит (3.2.37). $\square$

Лемма 3.2.6. *Пусть выполняются условия теоремы* 3.2.2. *Предположим, что оператор* $L : H_a^{l+2m}(Q) \to \mathcal{H}_a^l(Q, M)$ — *фредгольмов и* $A^1 = 0$, $B_{i\mu}^3 = 0$ $(i = 1, \dots, N_1,\ \ \mu = 1, \dots, m)$. *Предположим также, что* $K = \mathcal{K}$ *и* $\mathcal{K}_3 \neq \varnothing$.

Тогда прямая $\operatorname{Im}\lambda = h$ *не содержит собственных значений оператор-функции* $\lambda \mapsto \widehat{A}_g(\lambda)$ $(g \in \mathcal{K}_3)$.

Доказательство. 1. Предположим противное: прямая $Im\lambda = h$ содержит собственное значение λ_0 оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{A}_{g_0}(\lambda)$ для некоторого $g_0 \in \mathcal{K}_3$. Не ограничивая общности, предположим, что $\mathcal{K}_2 \neq \varnothing$. Пусть $\delta > 0$ таково, что $B_{2\delta}(g_0) \subset Q$, $\omega_{is}^{-1}(B_{2\delta}(g)) \subset \mathcal{K}_1^{\varkappa/2}$ для $(i,s) \in \big\{1 \leqslant i \leqslant N_1,\ 1 \leqslant s \leqslant S_i : g_0 \in \omega_{is}(\overline{M}_i \setminus M)\big\}$ и $\omega_{is}^{-1}\big(B_{2\delta}(g)\big) \subset \mathcal{K}_2^{\sigma/2}$ для $(i,s) \in \{1 \leqslant i \leqslant N_1,\ 1 \leqslant s \leqslant S_i : g_0 \in \omega_{is}(M_i \cap K_2)\}$, где $\varkappa, \sigma$ из доказательства леммы 3.2.5. Предположим также, что $0 < \delta < \varkappa$ и $\delta < \rho\,\big(g, \bigcup\limits_{i,s} \omega_{is}(\overline{M}_i)\big)$. Здесь $(i,s) \in \{(i,s) :\ g_0 \notin \omega_{is}(\overline{M}_i)\}$.

Обозначим

$$v_{3\varepsilon}(y') = r^{i\lambda_0 + \varepsilon}\psi^0(\varphi)\xi_{1\delta}(y'), \quad u_{2\varepsilon}(y) = v_{3\varepsilon}(y'),$$

где $y' = y - g_0$, $\varepsilon > 0$, $\psi^0(\varphi)$ — собственная функция оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{A}_{g_0}(\lambda)$, соответствующая собственному значению λ_0, и $\xi_{1\delta}(y) = \xi_1(y)$, функция $\xi_1(y)$ задана по формуле (3.1.15), φ, r — полярные координаты точки y'.

Очевидно, $u_{3\varepsilon} \in H_a^{l+2m}(Q)$ и

$$\|u_{3\varepsilon}\|_{H_a^{l+2m}(Q)} \to \infty \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0, \tag{3.2.50}$$

$$\|u_{3\varepsilon}\|_{H_b^{l+2m}(Q)} \leqslant k_1 \quad (0 < \varepsilon < 1), \tag{3.2.51}$$

где $k_1 = k_1(b) > 0$ не зависит от ε.

Из предположения относительно δ следует, что

$$\operatorname{supp} B^2_{i\mu} u_{3\varepsilon} \subset \mathcal{K}_1^{\varkappa/2} \cup \mathcal{K}_2^{\sigma/2} \quad \text{и} \quad B^2_{i\mu} u_{3\varepsilon} \in H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(M_i).$$

Обозначим через g^2_ν точки множества $\mathcal{K}_2$ ($\nu = 1, \dots, N_2$). Пусть $i = i(\nu)$, $1 \leqslant \nu \leqslant N_2$, таково, что $g^2_\nu \in M_i$. Не ограничивая общности, предположим, что $J_{g_0} = \{1 \leqslant \nu \leqslant N_2 : \quad \omega_{is}(g^2_\nu) = g_0,\ i = i(\nu)\} \neq \varnothing$. Для каждого $\nu \in J_{g_0}$ мы рассмотрим уравнение

$$L''_{g^2_\nu 0} w^2_{\nu\varepsilon} = F^2_{\nu\varepsilon}, \tag{3.2.52}$$

где $F^2_{\nu\varepsilon} = \{0,\ f^{2\varepsilon}_{\nu\rho\mu}\}$,

$$f^{2\varepsilon}_{\nu\rho\mu}(y') = \begin{cases} -(B^2_{i\mu} u_{3\varepsilon})(y' + g^2_\nu) & \text{для } y' \in \gamma_\rho,\ |y'| < \sigma/2, \\ 0 & \text{для } y' \in \gamma_\rho,\ |y'| \geqslant \sigma/2, \end{cases}$$

и $i = i(\nu)$.

Выберем $\sigma > 0$ настолько малым, что для $\delta = \sigma$ оператор $L''_{g^2_\nu 0}$ имеет ограниченный обратный. Следовательно, существует единственное решение $w^2_{\nu\varepsilon} \in H_a^{l+2m}(Q)$ уравнения (3.2.52).

Обозначим $u_{2\varepsilon}(y) = \sum\limits_{\nu \in J_{g_0}} w^2_{\nu\varepsilon}(y - g^2_\nu)\xi_{1,\sigma/2}(y - g^2_\nu)$, где функция $\xi_{1,\sigma/2}(y) = \xi_1(y)$, функция $\xi_1(y)$ задается по формуле (3.1.15) с $\delta = \sigma/2$. Очевидно, $u_{2\varepsilon} \in H_a^{l+2m}(Q)$. Поскольку $\operatorname{supp} u_{2\varepsilon} \subset \mathcal{K}_2^\sigma$, в силу неравенства (3.2.7) мы имеем $B^2_{i\mu} u_{2\varepsilon} \subset \overline{\mathcal{K}_1^\varkappa}$.

Для каждого ν, $1 \leqslant \nu \leqslant N_1$, рассмотрим уравнение

$$L''_{g_\nu 0} = F^1_{\nu\varepsilon}, \tag{3.2.53}$$

где $F^1_{\nu\varepsilon} = \{0,\ f^{1\varepsilon}_{\nu\rho\mu}\}$,

$$f^{1\varepsilon}_{\nu\rho\mu}(y') = \begin{cases} -\left(B^2_{i\mu}(u_{2\varepsilon} + u_{3\varepsilon})\right)(y' + g_\nu) & \text{для } y' \in \gamma_\rho,\ |y'| < \varkappa, \\ 0 & \text{для } y' \in \gamma_\rho,\ |y'| \geqslant \varkappa, \end{cases}$$

$i = i(\rho, \nu)$ таково, что $g_\nu \in \overline{M}_i$ и $M_i \cap (\gamma_\rho + g_\nu) \neq \varnothing$.

Напомним, что $\varkappa > 0$ настолько мало, что для $\delta = \varkappa$ оператор $L''_{g_\nu 0}$ имеет ограниченный обратный. Следовательно, существует единственное решение $w^1_{\nu\varepsilon}$ уравнения (3.2.53).

Обозначим $u_{1\varepsilon}(y) = \sum\limits_{\nu} w_{\nu\varepsilon}^1(y-g_\nu)\xi_{1,\varkappa/2}(y-g_\nu)$ и $u_\varepsilon(y) = \sum\limits_{j=1}^{3} u_{j\varepsilon}(y)$. Очевидно, $u_{1\varepsilon},\ u_\varepsilon \in H_a^{l+2m}(Q)$. Поскольку

$$\operatorname{supp} u_{i\varepsilon} \cap \operatorname{supp} u_{j\varepsilon} = \varnothing \quad \text{для} \quad i \neq j, \tag{3.2.54}$$

из (3.2.50) следует, что

$$\|u_\varepsilon\|_{H_a^{l+2m}(Q)} \to \infty \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{3.2.55}$$

2. Далее мы докажем, что множество $\left\{\|u_\varepsilon\|_{H_a^{l+2m}(Q)}\right\}$ ограничено для $0<\varepsilon<1$.

Переходя к новым координатам y' в окрестности точек $g_\nu \in \mathcal{K}_1$, $g_\nu^2 \in \mathcal{K}_2$ и $g_0 \in \mathcal{K}_3$ и используя (3.1.19), (3.2.52)–(3.2.54) и неравенство $\sigma \leqslant \varkappa$, аналогично (3.2.43) мы получим

$$\|A^0 u_\varepsilon\|_{H_a^l(Q)} \leqslant k_2(\varkappa) + k_3(\varkappa)\|u_\varepsilon\|_{H_a^{l+2m}(Q)}, \tag{3.2.56}$$

где $k_2(\varkappa),\ k_3(\varkappa) > 0$ не зависят от ε и $k_3(\varkappa) \to 0$ при $\varkappa \to 0$.

Поскольку $\operatorname{supp} u_{1\varepsilon} \subset \mathcal{K}_1^{\varkappa}$, из неравенства (3.2.6) следует, что $B_{i\mu}^2 u_{1\varepsilon} = 0$. Поэтому из равенства $B_{i\mu}^0 u_{3\varepsilon} = 0$ мы получим

$$B_{i\mu}u_\varepsilon = B_{i\mu}^0 u_{1\varepsilon} + B_{i\mu}^2(u_{2\varepsilon} + u_{3\varepsilon}) + B_{i\mu}^0 u_{2\varepsilon}. \tag{3.2.57}$$

Из соотношений $\xi_{1,\varkappa/2}(y') \equiv 1$ для $|y'| \leqslant \varkappa/2,\ \xi_{1,\sigma/2}(y') \equiv 1$ для $|y'| \leqslant \sigma/2$ и равенств (3.1.17), (3.2.52) и (3.2.53) мы получим

$$\begin{gathered}\xi_{1,\varkappa/2}(y-g_\nu)B_{i\mu}^0 w_{\nu\varepsilon}^1(y-g_\nu) + \left(B_{i\mu}^2(u_{2\varepsilon}+u_{3\varepsilon})\right)(y) = \\ = \xi_{1,\varkappa/2}(y')B_{i\mu0}^0(g_\nu + y',\ \mathcal{D}_{y'})w_{\nu\varepsilon}^1(y')\big|_{\gamma_\rho} + \\ + \left(B_{i\mu}^2(u_{2\varepsilon}+u_{3\varepsilon})\right)(g_\nu + y') = 0 \quad \text{для} \quad y' \in \gamma_\rho,\ |y'| < \varkappa/2,\end{gathered} \tag{3.2.58}$$

$$\begin{gathered}\xi_{1,\sigma/2}(y-g_\nu^2)B_{i\mu}^0 w_{\nu\varepsilon}^2(y-g_\nu^2) + (B_{i\mu}^2 u_{3\varepsilon})(y) = \\ = \xi_{1,\sigma/2}(y')B_{i\mu0}^0(g_\nu^2 + y',\ \mathcal{D}_{y'})w_{\nu\varepsilon}^2(y')\big|_{\gamma_\rho} + \\ + (B_{i\mu}^2 u_{3\varepsilon})(g_\nu^2 + y') = 0 \quad \text{для} \quad y' \in \gamma_\rho,\ |y'| < \sigma/2.\end{gathered} \tag{3.2.59}$$

Используя формулу Лейбница, включения $\operatorname{supp} B_{i\mu}^2 u_{2\varepsilon} \subset \overline{\mathcal{K}_1^{\varkappa}}$ и $\operatorname{supp} B_{i\mu}^2 u_{3\varepsilon} \subset \overline{\mathcal{K}_1^{\varkappa/2}} \cup \overline{\mathcal{K}_2^{\sigma/2}}$, соотношения (3.2.58), (3.2.59), эквивалентность норм в пространствах Соболева и весовых пространствах на

$\gamma_\rho \cap (B_{2\varkappa} \setminus \overline{B_{\varkappa/3}})$, лемму C.5 и соотношения (3.2.51), (3.2.54), аналогично (3.2.46) мы выводим

$$\|B_{i\mu}u_\varepsilon\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(M_i)} \leqslant k_4(\varkappa), \tag{3.2.60}$$

где $k_4(\varkappa) > 0$ не зависит от ε.

Поскольку оператор $L : H_a^{l+2m}(Q) \to \mathcal{H}_a^l(Q, M)$ — фредгольмов, из теоремы A.5 и компактности оператора вложения $H_a^{l+2m}(Q)$ в $H_{a_0-l-2m}^0(Q)$ следует, что

$$\|u_\varepsilon\|_{H_a^{l+2m}(Q)} \leqslant k_5\Big(\|Lu_\varepsilon\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,M)} + \|u_\varepsilon\|_{H_{a_0-l-2m}^0(Q)}\Big). \tag{3.2.61}$$

Мы можем выбрать $\varkappa > 0$ настолько малым, что $k_5 k_3(\varkappa) < 1/2$. Тогда из (3.2.56), (3.2.60) и (3.2.61) мы получим

$$\|u_\varepsilon\|_{H_a^{l+2m}(Q)} \leqslant 2k_5\Big(k_2(\varkappa) + mN_1k_4(\varkappa) + \|u_\varepsilon\|_{H_{a_0-l-2m}^0(Q)}\Big). \tag{3.2.62}$$

Используя определение функций $u_{1\varepsilon}$ и $u_{2\varepsilon}$, ограниченность операторов $(L''_{g_\nu 0})^{-1}$, $(L''_{g_\nu^2 0})^{-1}$ в соответствующих пространствах и неравенство (3.2.51), мы имеем

$$\begin{aligned}
&\|u_\varepsilon\|_{H_{a_0-l-2m}^0(Q)} \leqslant \\
&\leqslant k_5(\varkappa)\Big(\sum_\nu \|w_{\nu\varepsilon}^1(y')\|_{H_{a_0}^{l+2m}(\theta)} + \sum_\nu \|w_{\nu\varepsilon}^2(y')\|_{H_{a_0}^{l+2m}(\theta)} + \|u_{3\varepsilon}\|_{H_{a_0}^{l+2m}(Q)}\Big) \leqslant \\
&\qquad \leqslant k_6(\varkappa)\Big(\sum_\nu \|w_{\nu\varepsilon}^2(y')\|_{H_{a_0}^{l+2m}(\theta)} + \|u_{3\varepsilon}\|_{H_{a_0}^{l+2m}(Q)}\Big) \leqslant k_7(\varkappa),
\end{aligned} \tag{3.2.63}$$

где $k_7(\varkappa) > 0$ не зависит от ε.

Из неравенств (3.2.62), (3.2.63) вытекает, что $\|u_\varepsilon\|_{H_a^{l+2m}(Q)} \leqslant k_8(\varkappa)$, где $k_8(\varkappa) > 0$ не зависит от ε.

Это противоречит соотношению (3.2.55). □

Теперь мы можем завершить доказательство теоремы 3.2.2. В силу теоремы A.7 и фредгольмова свойства оператора $L : H_a^{l+2m}(Q) \to \mathcal{H}_a^l(Q, M)$ оператор L с $A^1 = 0$ и $B_{i\mu}^3 = 0$ — также фредгольмов. Тогда доказательство теоремы 3.2.2 следует из лемм 3.2.5 и 3.2.6. □

Сведение к задаче с возмущением, квадрат которого компактен

Аналогично примеру 2.2.2 в [12] покажем, что, вообще говоря, операторы $B^2_{i\mu}$ не являются компактными возмущениями L_0.

Пример 3.2.1. Рассмотрим нелокальную задачу

$$-\Delta u = f_0(y) \qquad (y \in Q \setminus K), \tag{3.2.64}$$

$$\left.\begin{aligned} &u(y)\big|_{M_1} - b(y)u\left(\omega(y)\right)\big|_{M_1} = f_1(y) && (y \in M_1),\\ &u(y)\big|_{M_2} = f_2(y) && (y \in M_2).\end{aligned}\right\} \tag{3.2.65}$$

Здесь $Q \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с границей $\partial Q = M_1 \cup M_2 \cup \mathcal{K}_1$, M_i — непересекающиеся открытые кривые класса C^∞, множество $\mathcal{K}_1$ состоит из двух точек g_1 и g_2, в некоторой окрестности точки g_ν ($\nu = 1,2$) область Q совпадает с углом $\theta_\nu = \left\{y \in \mathbb{R}^2 :\ d_{\nu1} < \varphi < d_{\nu2},\ 0 < r\right\}$, $0 < d_{\nu2} - d_{\nu1} < 2\pi$, ω — диффеоморфизм класса C^∞, отображающий некоторую окрестность Ω_1 кривой M_1 на $\omega(\Omega_1)$ так, что $\omega(M_1) \subset Q$, $b \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ и $b(y) > 0$ для всех $y \in \Omega_1$. Пусть $K = \mathcal{K}$. Обозначим через Ω_{11} и Ω_{12} открытые окрестности $\overline{M}_1$ такие, что $\overline{\Omega}_{11} \subset \Omega_{12}$, $\overline{\Omega}_{12} \subset \Omega_1$, $\Omega_{12} \cap K = M_1 \cap K$ и $\omega(\Omega_{12}) \cap K = \omega(\overline{M}_1 \cap K)$. Введем функцию $\eta \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ такую, что $\eta(y) = 1$ для $y \in \omega(\Omega_{11})$ и $\operatorname{supp}\eta \subset \omega(\Omega_{12})$. В силу леммы 1.1.5 существует линейный ограниченный оператор $T :\ H^{3/2}_a(M_1) \to H^2_a(\Omega_{12})$ такой, что $T\psi\big|_{M_1} = \psi$ для любого $\psi \in H^{3/2}_a(M_1)$. Введем линейный ограниченный оператор $V :\ H^{3/2}_a(M_1) \to H^2_a(Q)$, заданный по формуле

$$(V\psi)(y) = \begin{cases} -\eta(y)b^{-1}\left(\omega^{-1}(y)\right)\,(T\psi)\left(\omega^{-1}(y)\right) & (y \in \omega(\Omega_{12}) \cap Q)\,,\\ 0 & (y \in Q \setminus \omega(\Omega_{12}))\,.\end{cases}$$

Определим линейный ограниченный оператор

$$B^2_{11} :\ H^2_a(Q) \to H^{3/2}_a(M_1)$$

по формулам $B^2_{11}u = \tilde{B}^2_{11}u\big|_{M_1}$,

$$\tilde{B}^2_{11}u = \begin{cases} -b(y)\eta\left(\omega(y)\right)u\left(\omega(y)\right) & \text{для} \quad y \in \Omega_{12} \cap Q,\\ 0 & \text{для} \quad y \in Q \setminus \Omega_{12},\end{cases}$$

ср. пример 3.2.1. Очевидно, $B_{11}^2 u = -b(y)u(\omega(y))\big|_{M_1}$. Обозначим $\mathcal{F} = \left\{\psi \in H_a^{3/2}(M_1):\ \|\psi\|_{H_a^{3/2}(M_1)} = 1\right\}$. Очевидно, $V(\mathcal{F})$ — ограниченное множество в $H_a^2(Q)$. С другой стороны, $B_{11}^2 V\psi = \psi$ для любого $\psi \in \mathcal{F}$. Следовательно, $B_{11}^2(V(\mathcal{F})) = \mathcal{F}$, т.е. оператор B_{11}^2 отображает ограниченное множество $V(\mathcal{F})$ на единичную сферу $\mathcal{F}$, которая не является компактным множеством в $H_a^{3/2}(M_1)$.

Введем линейные ограниченные операторы

$$L_0,\ L:\ H_a^2(Q) \to \mathcal{H}_a^0(Q, M) = H_a^0(Q) \times \prod_{i=1,2} H_a^{3/2}(M_i)$$

по формулам

$$L_0 u = \left(-\Delta u,\ u\big|_{M_1},\ u\big|_{M_2}\right), \quad Lu = \left(-\Delta u,\ u\big|_{M_1} + B_{11}^2 u,\ u\big|_{M_2}\right).$$

Мы показали, что оператор L получается из оператора L_0 добавлением оператора B_{11}^2, который не является компактным.

Заметим, что в этом примере мы не предполагали, что $\omega(\overline{M}_1) \cap \mathcal{K}_1 = \varnothing$, ср. условие 3.2.5.

Покажем теперь, что нелокальные эллиптические задачи (3.2.1), (3.2.2) можно свести к фредгольмову операторному уравнению на границе с возмущением, квадрат которого компактен. Вначале введем некоторые дополнительные обозначения.

Пусть $L,\ L_0,\ L_1:\ H_a^{l+2m}(Q) \to \mathcal{H}_a^l(Q, M)$ — ограниченные операторы, определенные по формулам $L = \{A, B\}$, $L_0 = \{A^0, B^0\}$, $L_1 = \{A^0, B\}$, где A — оператор из (3.2.1), $B = B^0 + B^2 + B^3$, $B^p = \{B_{i\mu}^p\}$ $(p = 0, 2, 3)$, а операторы $B_{i\mu}^p$ — из (3.2.2). Предположим, что выполняются условия 3.1.1–3.1.3 и 3.2.1–3.2.3. Обозначим через $G_0,\ G_1$ и G сужения операторов $B^0,\ B^2 + B^3$ и B соответственно на $\mathcal{N}(A^0)$. Пусть $G_0^1,\ G_1^1$ и G^1 — сужения операторов $G_0,\ G_1$ и G соответственно на $\mathcal{N}(G_0)^\perp$.

По теореме 3.1.1 оператор L_0 — фредгольмов. Следовательно, в силу леммы 2.2.4 в [12] оператор $G_0:\ \mathcal{N}(A^0) \to \mathcal{H}_a^l(M)$ — также фредгольмов. Очевидно, $\mathcal{N}(G_0)^\perp \subset \mathcal{N}(A^0)$ и $G^1 = GI_0$, $G_0^1 = G_0 I_0$, где I_0 :

$\mathcal{N}(G_0)^\perp \to \mathcal{N}(A^0)$ — оператор вложения $\mathcal{N}(G_0)^\perp$ в $\mathcal{N}(A^0)$. По определению, I_0 — фредгольмов оператор и $\dim \mathcal{N}(I_0) = 0$, $\operatorname{codim} \mathcal{R}(I_0) = \dim \mathcal{N}(G_0) = m_0 < \infty$. Поэтому оператор $G_0^1 : \mathcal{N}(G_0)^\perp \to \mathcal{H}_a^l(M)$ — фредгольмов, и $\operatorname{ind} G_0^1 = \operatorname{ind} G_0 - m_0$. Обозначим через P оператор ортогонального проектирования из $\mathcal{H}_a^l(M)$ на $\mathcal{R}(G_0^1)^\perp$. Поскольку $\dim \mathcal{R}(G_0^1)^\perp < \infty$, оператор P — компактный. Рассмотрим операторы G_0^1 и $G_0^1 + (I-P)G_1^1$ как операторы отображающие $\mathcal{N}(G_0)^\perp$ в $\mathcal{R}(G_0^1)$. Оператор $G_0^1 : \mathcal{N}(G_0)^\perp \to \mathcal{R}(G_0^1)$ имеет ограниченный обратный $R_0^1 = (G_0^1)^{-1} : \mathcal{R}(G_0^1) \to \mathcal{N}(G_0)^\perp$.

Предположим, что оператор $I + R_0^1(I-P)G_1^1 : \mathcal{N}(G_0)^\perp \to \mathcal{N}(G_0)^\perp$ — фредгольмов, и $\operatorname{ind}\big(I + R_0^1(I-P)G_1^1\big) = 0$. Тогда из теоремы A.1 вытекает, что оператор $G_0^1 + (I-P)G_1^1 : \mathcal{N}(G_0)^\perp \to \mathcal{R}(G_0^1)$ — фредгольмов, и $\operatorname{ind}\big(G_0^1 + (I-P)G_1^1\big) = 0$. Поскольку оператор $P : \mathcal{H}_a^l(M) \to \mathcal{R}(G_0^1)^\perp$ — компактный, то операторы $G_0^1 + G_1^1$, $G_0^1 + (I-P)G_1^1 : \mathcal{N}(G_0)^\perp \to \mathcal{H}_a^l(M)$ — фредгольмовы, и $\operatorname{ind}(G_0^1 + G_1^1) = \operatorname{ind}(G_0^1 + (I-P)G_1^1) = -m_1$, где $m_1 = \dim \mathcal{R}(G_0^1)^\perp < \infty$. Аналогично оператор $G_0^1 : \mathcal{N}(G_0)^\perp \to \mathcal{H}_a^l(M)$ — фредгольмов, и $\operatorname{ind} G_0^1 = -m_1$. Напомним, что оператор $G_0 : \mathcal{N}(A^0) \to \mathcal{H}_a^l(M)$ — фредгольмов, и $\operatorname{ind} G_0 = \operatorname{ind} G_0^1 + m_0 = m_0 - m_1$. С другой стороны, поскольку оператор $G_0^1 + G_1^1$ — фредгольмов, то оператор $G_0 + G_1 : \mathcal{N}(A^0) \to \mathcal{H}_a^l(M)$ — также фредгольмов и $\operatorname{ind}(G_0 + G_1) = m_0 - m_1$. Поэтому из леммы 2.2.2 в [12] следует, что оператор $L_1 : H_a^{l+2m}(Q) \to \mathcal{H}_a^l(Q, M)$ — фредгольмов, и $\operatorname{ind} L_1 = \operatorname{ind} L_0$. Следовательно, в силу теоремы A.7 оператор $L : H_a^{l+2m} \to \mathcal{H}_a^l(Q, M)$ — фредгольмов, и $\operatorname{ind} L = \operatorname{ind} L_0$. Для того чтобы доказать, что оператор $I + R_0^1 (I-P)G_1^1 : \mathcal{N}(G_0)^\perp \to \mathcal{N}(G_0)^\perp$ фредгольмов и имеет тривиальный индекс, мы рассмотрим операторы T_1, $T_2 : \mathcal{N}(G_0)^\perp \to \mathcal{N}(G_0)^\perp$, заданные по формулам $T_1 u = R_0^1(I-P)B^2(\eta_1 u) + B^3 u$ и $T_2 u = R_0^1(I-P)B^2(1-\eta_1)u$, где функция $\eta_1 \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ определена по формуле (3.2.23).

Теорема 3.2.3. *Пусть выполняются условия* 3.1.1–3.1.3 *и* 3.2.1–3.2.3.

Тогда операторы T_1, $T_2^2 : \mathcal{N}(G_0)^\perp \to \mathcal{N}(G_0)^\perp$ *— компактные. Следовательно, оператор* $I + R_0^1(I-P)G_1^1 : \mathcal{N}(G_0)^\perp \to \mathcal{N}(G_0)^\perp$ *— фредгольмов, и* $\operatorname{ind}\big(I + R_0^1(I-P)G_1^1\big) = 0$. *Далее, оператор* $L : H_a^{l+2m}(Q) \to$

$\mathcal{H}_a^l(Q,M)$ — *фредгольмов, и* $\operatorname{ind} L = \operatorname{ind} L_0$.

Доказательство. 1. Вначале мы покажем, что оператор $T_1 : \mathcal{N}(G_0)^\perp \to \mathcal{N}(G_0)^\perp$ — компактный.

Их определения оператора R_0^1 и вложения $\mathcal{N}(G_0)^\perp \subset \mathcal{N}(A^0)$ мы получим

$$A^0 T_1 u = A^0 R_0^1 (I-P) B^2(\eta_1 u) = 0, \tag{3.2.66}$$

$$B^0 T_1 u = B^0 R_0^1 (I-P) B^2(\eta_1 u) = (I-P) B^2(\eta_1 u). \tag{3.2.67}$$

В силу леммы 3.1.1 для всех $v \in H_a^{l+2m}(Q)$ мы имеем

$$\|v\|_{H_a^{l+2m}(Q)} \leqslant k_1 \Big(\|A^0 v\|_{H_a^l(Q)} + \|B^0 v\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,M)} + \|v\|_{H^0_{a+1-l-2m}(Q)} \Big). \tag{3.2.68}$$

Из соотношений (3.2.66)-–(3.2.68) и условия 3.2.3 для любого $u \in \mathcal{N}(G_0)^\perp$ мы получаем

$$\|T_1 u\|_{H_a^{l+2m}(Q)} \leqslant k_2 \Big(\big\|(I-P) B^2(\eta_1 u)\big\|_{\mathcal{H}_a^l(M)} + \\ + \|R_0^1 (I-P) B^2(\eta_1 u)\|_{H^0_{a+1-l-2m}(Q)} + \|u\|_{H_a^{l+2m-1}(Q)} \Big). \tag{3.2.69}$$

Используя ограниченность оператора $B^2 : \ H_a^{l+2m}(Q) \to \mathcal{H}_a^l(M)$, лемму 3.1.1 и включение $\mathcal{N}(G_0)^\perp \subset \mathcal{N}(A^0)$, для всех $u \in \mathcal{N}(G_0)^\perp$ мы имеем

$$\|(I-P) B^2(\eta_1 u)\|_{\mathcal{H}_a^l(M)} \leqslant k_3 \|\eta_1 u\|_{H_a^{l+2m}(Q)} \leqslant \\ \leqslant k_4 \left(\|A^0(\eta_1 u)\|_{H_a^l(Q)} + \|\eta_1 u\|_{H^0_{a+1-l-2m}(Q)} \right) \leqslant k_5 \|u\|_{H_a^{l+2m-1}(Q)}.$$

Это неравенство вместе с оценкой (3.2.69) дает нам

$$\|T_1 u\|_{H_a^{l+2m}(Q)} \leqslant \Big(\|u\|_{H_a^{l+2m-1}(Q)} + \|R_0^1 (I-P) B^2(\eta_1 u)\|_{H^0_{a+1-l-2m}(Q)} \Big).$$

Из последнего неравенства, компактности оператора вложения $H_a^{l+2m}(Q)$ в $H_a^{l+2m-1}(Q)$ и ограниченности оператора $R_0^1(I-P)B^2 : \ H_a^{l+2m}(Q) \to H_a^{l+2m}(Q)$ следует, что оператор $T_1 : \mathcal{N}(G_0)^\perp \to \mathcal{N}(G_0)^\perp$ — компактный.

2. Покажем теперь, что оператор $T_2^2 : \mathcal{N}(G_0)^\perp \to \mathcal{N}(G_0)^\perp$ — компактный. В силу соотношений (3.2.7), (3.2.23) $\operatorname{supp} B^2(1-\eta_1)u \subset \overline{\mathcal{K}_1^{\varkappa}}$ для всех $u \in \mathcal{N}(G_0)^\perp$. Поэтому мы имеем

$$B^2(1-\eta_1)u = (1-\eta) B^2 (1-\eta_1) u, \tag{3.2.70}$$

где функция $\eta \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ задана по формуле (3.2.22). Из ограниченности оператора $R_0^1(I-P):\ \mathcal{H}_a^l(M) \to H_a^{l+2m}(Q)$ имеем

$$\|T_2^2 u\|_{H_a^{l+2m}(Q)} \leqslant k_4 \|B^2(1-\eta_1)R_0^1(I-P)B^2(1-\eta_1)u\|_{\mathcal{H}_a^l(M)}. \qquad (3.2.71)$$

Рассмотрим выражение $R_0^1(I-P)B^2(1-\eta_1)u$. Равенство

$$R_0^1(I-P)B^2(1-\eta_1)u = R_0^1(I-P)(1-\eta)B^2(1-\eta_1)u \qquad (3.2.72)$$

следует из (3.2.70). Пусть P_1 оператор ортогонального проектирования $H_a^{l+2m}(Q)$ на $\mathcal{N}(G_0)$. Тогда $(I-P_1)v \in \mathcal{N}(G_0)^\perp$ для $v \in H_a^{l+2m}(Q)$ и

$$R_0^1 G_0(I-P_1)v = (I-P_1)v. \qquad (3.2.73)$$

Обозначим

$$\gamma = R_0^1(I-P)(1-\eta)B^2(1-\eta_1)u - (1-\eta)R_0^1(I-P)B^2(1-\eta_1)u. \quad (3.2.74)$$

Из (3.2.73) следует, что

$$R_0^1 G_0(I-P_1)\gamma = \gamma - P_1\gamma. \qquad (3.2.75)$$

В силу (3.2.72), (3.2.74) и (3.2.75) мы имеем

$$\begin{aligned} R_0^1(I-P)B^2(1-\eta_1)u &= \\ &= (1-\eta)R_0^1(I-P)B^2(1-\eta_1)u + R_0^1 G_0(I-P_1)\gamma + P_1\gamma. \quad (3.2.76) \end{aligned}$$

С другой стороны, используя неравенства $G_0 P_1 \gamma = 0$ и $G_0 R_0^1 w = w$ для $w \in \mathcal{R}(G_0^1)$ и формулу Лейбница, мы получим

$$\begin{aligned} &R_0^1 G_0(I-P_1)\gamma = R_0^1 B^0 \gamma = \\ &= R_0^1\Big[G_0 R_0^1(I-P)(1-\eta)B^2(1-\eta_1)u - B^0(1-\eta)R_0^1(I-P)B^2(1-\eta_1)u\Big] = \\ &= R_0^1\Big[(I-P)(1-\eta)B^2(1-\eta_1)u - (1-\eta)(I-P)B^2(1-\eta_1)u + \\ &\qquad + \mathcal{D}R_0^1(I-P)B^2(1-\eta_1)u\Big] = Tu, \quad (3.2.77) \end{aligned}$$

где

$$Tu = R_0^1\left[\left((1-\eta)P - P(1-\eta)\right)B^2(1-\eta_1)u + \mathcal{D}R_0^1(I-P)B^2(1-\eta_1)u\right],$$

$$\mathcal{D}g = \left\{\sum_\alpha d_{i\mu\alpha}(x)\mathcal{D}^\alpha g(x)\big|_{M_i}\right\}_{i,\mu} \ (|\alpha| \leqslant m_{i\mu}-1),\ d_{i\mu\alpha} \in C^\infty(\mathbb{R}^2).$$

Из неравенств (3.2.76), (3.2.77) и формулы $B^2(1-\eta)w = 0$ $\big(w \in H_a^{l+2m}(Q)\big)$ мы имеем

$$\|T_2^2 u\|_{H_a^{l+2m}(Q)} \leqslant k_7 \|B^2(1-\eta_1)P_1\gamma + B^2(1-\eta_1)Tu\|_{\mathcal{H}_a^l(M)}.$$

Используя это неравенство, ограниченность операторов $B^2 : H_a^{l+2m}(Q) \to \mathcal{H}_a^l(M)$ и $R_0^1 : \ \mathcal{H}_a^l(M) \to H_a^{l+2m}(Q)$, компактность операторов $P,\ P_1$, и оператор вложения $H_a^{l+2m}(Q)$ в $H_a^{l+2m-1}(Q)$ мы убеждаемся, что оператор $T_2^2 : \ \mathcal{N}(G_0)^\perp \to \mathcal{N}(G_0)^\perp$ — компактный.

3. Наконец заметим, что из компактности операторов T_1 и T_2^2 и равенства $I + R_0^1(I-P)G_1^1 = I + T_1 + T_2$ вытекает, что оператор $I + R_0^1$ $(I-P)G_1^1 : \ \mathcal{N}(G_0)^\perp \to \mathcal{N}(G_0)^\perp$ — фредгольмов, $\operatorname{ind}\big(I + R_0^1(I-P)G_1^1\big) = 0$. Таким образом, как было доказано перед теоремой 3.2.3, оператор $L : \ H_a^{l+2m}(Q) \to \mathcal{H}_a^l(Q, M)$ — фредгольмов и $\operatorname{ind} L = \operatorname{ind} L_0$. $\square$

Заметим, что первая часть теоремы 3.2.1 следует из теоремы 3.2.3.

Примеры

Пример 3.2.2. Рассмотрим нелокальную краевую задачу

$$-\Delta u(y) = f_0(y) \quad (y \in Q), \tag{3.2.78}$$

$$\left.\begin{aligned} u(y)\big|_{M_1} - bu\,(\omega(y))\,\big|_{M_1} = f_1(y) \quad (y \in M_1),\\ u(y)\big|_{M_2} = f_2(y) \quad (y \in M_2). \end{aligned}\right\} \tag{3.2.79}$$

Здесь Q — ограниченная область с границей $\partial Q \in C^\infty$, которая вне кругов $B_{1/8}\,((i4/3,\ j4/3)) \quad (i, j = 0, 1)$ совпадает с границей квадрата $(0, 4/3) \times (0, 4/3)$; $M_1 = \{y \in \partial Q : \ y_1 < 1/3\ ,\ y_2 < 1/3\}\ ,\ \ M_2 = \partial Q \backslash \overline{M}_1$; $\omega(y) = y + (1,\ 1)$; $b \in \mathbb{C}$; $f = (f_0,\ f_1,\ f_2) \in \mathcal{H}_a^0(Q, M)$.

Множество $\mathcal{K}_1$ состоит из двух точек: $g_1 = (1/3,\ 0)$ и $g_2 = (0,\ 1/3)$, множество $\mathcal{K}_2$ состоит из двух точек: $\omega(g_1) = (4/3,\ 1)$ и $\omega(g_2) = (1,\ 4/3)$, и $\mathcal{K}_3 = \varnothing$, см. рис. 3.2.4. Пусть $K = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$.

Очевидно, $\omega(\overline{M}_1) \cap \mathcal{K}_1 = \varnothing$. Операторы

$$L,\ L_0 : \ H_0^2(Q) \to \mathcal{H}_a^0(Q, M) = H_a^0(Q) \times \prod_{i=1,2} H_a^{3/2}(M_i)$$

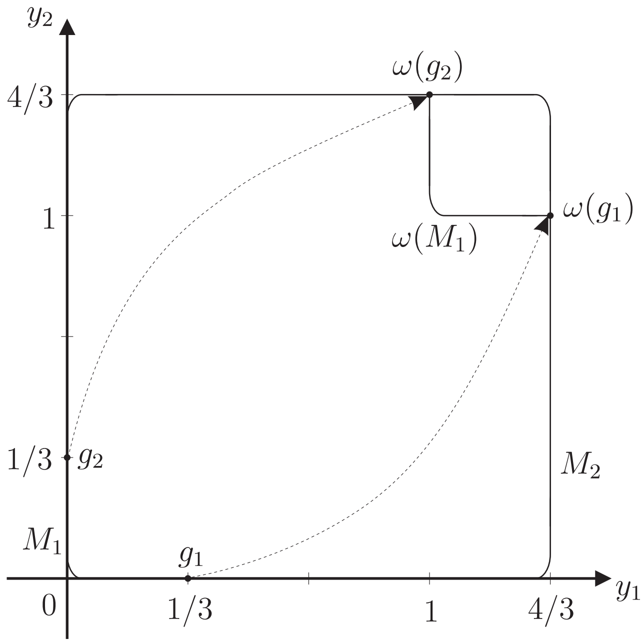

Рис. 3.2.4

заданы по формулам

$$Lu = \Big(-\Delta u,\ u(y)\big|_{M_1} - bu\,(\omega(y))\,\big|_{M_1},\ u(y)\big|_{M_2}\Big),$$
$$L_0 u = \Big(-\Delta u,\ u(y)\big|_{M_1},\ u(y)\big|_{M_2}\Big).$$

Оператор $\widehat{L}_{g0}(\lambda) : W^2(0,\ \pi) \to \mathcal{W}^0\,[0,\ \pi] = L_2(0,\ \pi) \times \mathbb{C}^2$ имеет вид

$$\widehat{L}_{g0}(\lambda)w = \Big(-w_{\varphi\varphi} + \lambda^2 w,\ w\big|_{\varphi=0},\ w\big|_{\varphi=\pi}\Big)$$

для любого $g \in K$, см. (3.1.11). Нетривиальные собственные значения оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{L}_{g0}(\lambda)$ являются корнями уравнения $\Delta(\lambda) = 0$, где $\Delta(\lambda)$ — определитель следующей системы линейных алгебраических уравнений.

$$\left.\begin{aligned} c_1 + c_2 = 0,\\ c_1 \exp(\lambda\pi) + c_2 \exp(-\lambda\pi) = 0. \end{aligned}\right\}$$

Следовательно, собственные значения оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{L}_{g0}$ имеют вид $\overset{\circ}{\lambda}_k = ik$ $(k = \pm1, \pm2, \ldots)$, см. пример 2.1.1.

Таким образом, в силу теоремы 3.2.2, оператор $L:\ H_a^2(Q) \to \mathcal{H}_a^0(Q, M)$, соответствующий задаче (3.2.78), (3.2.79), — фредгольмов тогда и только тогда, когда $a \neq k + 1$ $(k = \pm1, \pm2, \ldots)$.

Пример 3.2.3. Рассмотрим нелокальную краевую задачу

$$-\Delta u = f_0(y) \quad (y \in Q \setminus K), \tag{3.2.80}$$

$$\left.\begin{aligned} &u(y)\big|_{M_1} - bu\,(\omega(y))_{M_1} = f_1(y) && (y \in M_1),\\ &u(y)\big|_{M_2} = f_2(y) && (y \in M_2). \end{aligned}\right\} \tag{3.2.81}$$

Здесь Q — ограниченная область с границей $\partial Q \in C^\infty$, которая вне кругов $B_{1/8}((j,j))$ $(j = 0,1)$ совпадает с границей квадрата $(0,1) \times (0,1)$; $M_j \in C^\infty$, $M_1 = \left\{y \in \partial Q : y_1^2 + y_2^2 < 1\right\}$, $M_2 = \partial Q \setminus \overline{M}_1$; $\omega(y) = -y/2 + (1/2,\ 1/2)$, $b \in \mathbb{C}$; $f \in \mathcal{H}_a^0(Q, M)$.

Множество $\mathcal{K}_1$ состоит из двух точек: $g_1 = (1,\ 0)$ и $g_2 = (0,\ 1)$, множество $\mathcal{K}_2$ состоит из двух точек $\omega(g_1) = (0,\ 1/2)$ и $\omega(g_2) = (1/2,\ 0)$, а множество $\mathcal{K}_3$ состоит из двух точек: $\omega(\omega(g_1)) = (1/2,\ 1/4)$ и $\omega(\omega(g_2)) = (1/4,\ 1/2)$, см. рис. 3.2.5. Пусть $K = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3 = \mathcal{K}$. Очевидно,

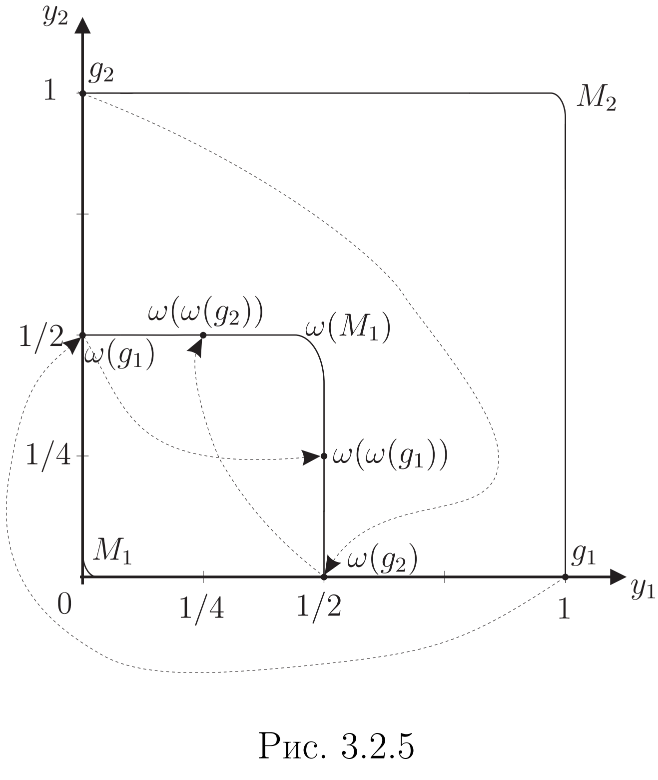

Рис. 3.2.5

$\omega(\overline{M}_1) \cap \mathcal{K}_1 = \varnothing$. Операторы

$$L,\ L_0:\ H_0^2(Q) \to \mathcal{H}_a^0(Q, M) = H_a^0(Q) \times \prod_{i=1,2} H_a^{3/2}(M_i)$$

заданы по формулам

$$
\begin{aligned}
Lu &= \Big(-\Delta u,\ u(y)\big|_{M_1} - bu(\omega(y))\big|_{M_1},\ u(y)\big|_{M_2}\Big),\\
L_0 u &= \Big(-\Delta u,\ u(y)\big|_{M_1},\ u(y)\big|_{M_2}\Big).
\end{aligned}
$$

Оператор $\widehat{L}_{g0}(\lambda):\ W^2(0,\ \beta) \to \mathcal{W}^0\,[0,\ \beta] = L_2(0,\ \beta) \times \mathbb{C}^2$ имеет вид

$$
\widehat{L}_{g0}(\lambda) w = \Big(-w_{\varphi\varphi} + \lambda^2 w,\ w\big|_{\varphi=0},\ w\big|_{\varphi=\beta}\Big)
$$

для любого $g \in \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$, где $\beta = \pi/2$, если $g \in \mathcal{K}_1$, и $\beta = \pi$, если $g \in \mathcal{K}_2$, см. (3.1.11). Оператор $\widehat{A}_g(\lambda):\ W^2_{2\pi}(0,\ 2\pi) \to L_2(0,\ 2\pi)$ задается по формуле

$$
\widehat{A}_g(\lambda) w = -w_{\varphi\varphi} + \lambda^2 w
$$

для $g \in \mathcal{K}_3$, см. (3.1.13)

Собственные значения оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{L}_{g0}(\lambda)$ имеют вид $\mathring{\lambda}^g_k = i2k$ $(k = \pm 1,\ \pm 2, \ldots)$, если $g \in \mathcal{K}_1$, и $\mathring{\lambda}^g_k = ik$ $(k = \pm 1,\ \pm 2, \ldots)$, если $g \in \mathcal{K}_2$, см. пример 2.1.1. Собственные значения оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{A}_g(\lambda)$ имеют вид $\mathring{\lambda}^g_k = ik$ $(k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots)$, если $g \in \mathcal{K}_3$, см. пример 2.4.1.

Таким образом, в силу теоремы 3.2.2 в случае $K = \mathcal{K}$ оператор $L :$ $H^2_a(Q) \to \mathcal{H}^0_a(Q, M)$, соответствующий задаче (3.2.80), (3.2.81), — фредгольмов тогда и только тогда, когда $a \neq k+1$ $(k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots)$.

При $K = \mathcal{K}_1$ мы предположим также, что $a > 1$. В этом случае в силу теоремы 3.2.2 оператор L — фредгольмов тогда и только тогда, когда $a \neq 2k+1$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Аналогично примеру 2.1.3 мы можем построить примеры интегральных или псевдодифференциальных операторов $B^2_{i\mu}$ и $B^3_{i\mu}$, удовлетворяющих условиям 3.2.2 и 3.2.3 соответственно.

Замечание 3.2.5. Теоремы 3.2.1—3.2.3 можно обобщить на случай, когда $Q \subset \mathbb{R}^2$ — область с границей ∂Q, которая гладкая вне $\mathcal{K}_1$, а в некоторой окрестности каждой точки $g \in \mathcal{K}_1$ область Q — диффеоморфна некоторому плоскому углу.

3.3. Нелокальные эллиптические задачи в плоских областях с носителями нелокальных членов вблизи множества точек сопряжения

В отличие от § 3.2 в этом параграфе мы будем изучать нелокальные эллиптические задачи с носителями нелокальных членов вблизи точек сопряжения. Вначале мы рассмотрим нелокальные эллиптические задачи с носителями нелокальных членов на некоторых кривых, предполагая, что эти кривые имеют нетангенциальный подход к границе в точках сопряжения. Затем мы обобщим эту задачу на случай абстрактных нелокальных членов с носителями в некоторых внутренних углах.

Нелокальные эллиптические задачи с носителями нелокальных членов на некоторых кривых

Пусть область $Q \subset \mathbb{R}^2$ и множество $\mathcal{K}_1 \subset \partial Q$ удовлетворяют предположениям первого пункта в § 3.1. Обозначим через ω_{is} $(i = 1, \dots, N_1,$ $s = 0, \dots, S_i)$ диффеоморфизмы класса C^∞, отображающие некоторые открытые окрестности Ω_i кривых M_i на $\omega_{is}(\Omega_i)$ так, что $\omega_{is}(M_i) \subset Q$ для $s = 1, \dots, S_i,$ $i = 1, \dots, N_1$, где $S_i \geqslant 0$ — целые числа; $\omega_{i0}(x) \equiv x$.

Введем множества $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}_2$ и $\mathcal{K}_3$ по формулам (3.2.9), (3.2.10). Множество $\mathcal{K}_2$ состоит из конечного числа N_2 точек $g \in \bigcup\limits_i M_i$, а множество $\mathcal{K}_3$ состоит из конечного числа N_3 точек $g \in Q$.

Рассмотрим уравнение

$$Au = \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} a_\alpha(y)\, \mathcal{D}^\alpha u(y) = f_0(y) \quad (y \in Q \setminus K) \tag{3.3.1}$$

с нелокальными краевыми условиями

$$B_{i\mu}u = \sum_{s=0}^{S_i} \sum_{|\alpha| \leqslant m_{i\mu}} b_{i\mu s\alpha}(y)\, (\mathcal{D}^\alpha u)(\omega_{is}(y))\big|_{M_i} = f_{i\mu}(y)$$

$$(y \in M_i,\ i = 1, \dots, N_1,\ \mu = 1, \dots, m). \tag{3.3.2}$$

Здесь $a_\alpha,\ b_{i\mu s\alpha} \in C^\infty(\mathbb{R}^2),\ f_0 \in H_a^l(Q)$ и $f_{i\mu} \in H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(M_i)$ — комплекснозначные функции; $H_a^l(Q) = H_a^l(Q, K)$ и $H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(M_i) =$

$H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(M_i, K)$; $l \geqslant \max\limits_{i,\mu}\{-2m + m_{i\mu} + 1\}$ — неотрицательное целое число.

Введем операторы A^0, $B^0_{i\mu 0}$ и $B^0_{i\mu}$ по формулам

$$A^0 u = A^0(y, \mathcal{D}_y)\, u(y) = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(y)\, \mathcal{D}_y^\alpha u(y), \tag{3.3.3}$$

$$B^0_{i\mu 0} u = B^0_{i\mu 0}(y, \mathcal{D}_y)\, u(y) = \sum_{|\alpha|=m_{i\mu}} b_{i\mu 0\alpha}(y)\, \mathcal{D}_y^\alpha u(y), \tag{3.3.4}$$

$$B^0_{i\mu} u = B^0_{i\mu 0} u\big|_{M_i}. \tag{3.3.5}$$

Предположим, что операторы A^0 и $B^0_{i\mu 0}$ удовлетворяют условиям 3.1.1 и 3.1.2 соответственно.

Будем предполагать, что или $K = \mathcal{K}$, или $K = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$, или $K = \mathcal{K}_1$. Если $K \subset \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$, мы рассмотрим уравнение (3.3.1) во всей области Q. Если $\mathcal{K}_3 \neq \varnothing$ и $K = \mathcal{K}$, мы рассмотрим уравнение (3.3.1) в $Q \setminus \mathcal{K}_3$.

Предположим также, что выполняется условие 3.2.4. Тогда, если $K = \mathcal{K}$, то операторы $B_{i\mu}: H_a^{l+2m}(Q) \to H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(M_i)$ — ограниченные для любого $a \in \mathbb{R}$, если $\mathcal{K} \setminus K \neq \varnothing$, то операторы $B_{i\mu}$ — ограниченные для $a > l + 2m - 1$, см. § 3.2.

Для того чтобы сформулировать условие для нелокальных членов вблизи границы, введем некоторые вспомогательные обозначения. Граница ∂Q состоит из конечного числа связных компонент ∂Q_J $(J = 1, \ldots, J_0)$, где $\partial Q_J = \bigcup\limits_i \overline{M}_i$ $(i = n_{J-1} + 1, \ldots, n_J)$, $n_0 = 0 < n_1 < \ldots < n_{J_0} = N_1$. Перенумеруем кривые M_i $(i = 1, \ldots, N_1)$ и их концы g_ν $(\nu = 1, \ldots, N_1)$ так, что если при обходе границы ∂Q область Q остается слева, то индекс i возрастает от $n_{J-1} + 1$ до n_J для каждого J $(J = 1, \ldots, J_0)$ и мы движемся вдоль $\overline{M}_i$ от g_i до g_{i+1} $(i = n_{J-1} + 1, \ldots, n_J)$, где $g_{i+1} = g_{n_{J-1}+1}$, если $i = n_J$. Обозначим концы g_i и g_{i+1} кривой $\overline{M}_i$ через g_{i1} и g_{i2} соответственно.

Пусть $d > 0$ настолько мало, что $Q \cap B_{2d}(g_i) = (\theta_i + g_i) \cap B_{2d}(g_i)$ и $B_{2d}(g) \cap B_2(h) = \varnothing$ для $g \neq h$, $g, h \in \mathcal{K}$, где $\theta_i = \left\{y \in \mathbb{R}^2 :\ d_{i1} < \varphi < d_{i2}\right\}$.

В отличие от § 3.2 мы предполагаем, что кривые $\omega_{is}(\overline{M}_i)$ имеют непустое пересечение с множеством точек сопряжения $\mathcal{K}_1$. Предположим, что выполняется следующее условие.

Условие 3.3.1. (нетангенциальный подход к границе). Если $\omega_{is}(g_{i\rho}) \cap \mathcal{K}_1 \neq \varnothing$, то $\omega_{is}(y) = \mathcal{G}_{i\rho s} y + h_{i\rho s}$ для $y \in B_{2d}(g_{i\rho})$ $(i = 1, \dots, N_1,$ $s = 1, \dots, S_i,$ $\rho = 1, 2)$, где $\mathcal{G}_{i\rho s}$ — оператор вращения на угол $\varphi_{i\rho s}$ и гомотетии с коэффициентом $\chi_{i\rho s} > 0$; $h_{i\rho s} \in \mathbb{R}^2$ не зависит от y.

Замечание 3.3.1. Если $\omega_{is}\left(g_{i\rho}\right) \cap \mathcal{K}_1 = \varnothing$, то мы не накладываем никаких ограничений на поведение кривой $\omega_{is}(\overline{M}_i)$ вблизи точки $\omega_{is}(g_{i\rho})$. В частности, если $\omega_{is}(g_{i\rho}) \subset \partial Q \setminus \mathcal{K}_1$, то кривые $\omega_{is}(\overline{M}_i)$ и ∂Q могут иметь одинаковую касательную в точке $\omega_{is}(g_{i\rho})$, ср. замечание 3.2.2.

Рис. 3.3.1 демонстрирует случай, когда выполняется условие 3.3.1.

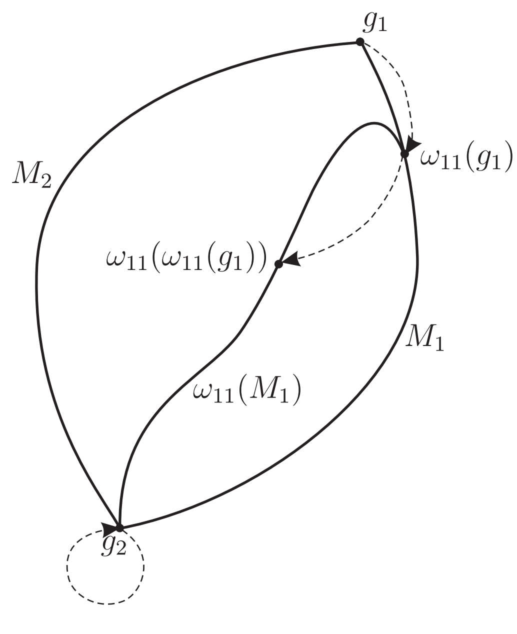

Рис. 3.3.1

Обозначим $S_{i\rho k} = \{s : 1 \leqslant s \leqslant S_i,\ \omega(g_{i\rho}) = g_k\}$, где $i, k = 1, \dots,\ N_1$, $\rho = 1, 2$. В дальнейшем мы будем предполагать, что $d > 0$ настолько мало, что $B_{2d}(g_k) \cap (\bigcup\limits_{i,\rho} \bigcup\limits_{0 \neq s \in S_{i\rho k}} \omega_{is}(\overline{M}_i) = \varnothing)$ для всех $k = 1, \dots,\ N_1$.

Введем функцию ξ_0 так, что

$$\xi_0 \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}),\ \xi_0(t) = 1\ (|t| \leqslant \chi_m d/2),\ \operatorname{supp} \xi_0 \subset (-\chi_m d,\ \chi_m d), \qquad (3.3.6)$$

где $\chi_m = \min\limits_{i,\rho,s} \{\chi_{i\rho s}\}$ $(i = 1, \dots,\ N_1,\ \rho = 1, 2, s = 0, 1, \dots,\ S_i)$.

Пусть
$$\xi_1(y)=\xi_0(|y|),\quad \xi(y)=\sum_i \xi_1(y-g_i). \tag{3.3.7}$$
Очевидно,
$$\xi(y)=1\quad (y\in\mathcal{K}_1^{\chi_m d/2}),\ \xi(y)=0\quad (y\notin\mathcal{K}_1^{\chi_m d}). \tag{3.3.8}$$
Определим операторы $B_{i\mu}^p:\ H_a^{l+2m}(Q)\to H^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(M_i)$ по формулам
$$B_{i\mu}^1u=\sum_{k=1}^{N_1}\sum_{\rho=1,2}\sum_{s\in S_{i\rho k}}\sum_{|\alpha|=m_{i\mu}} b_{i\mu s\alpha}(y)(\mathcal{D}^\alpha(\xi u))(\omega_{is}(y))\big|_{M_i}, \tag{3.3.9}$$
$$B_{i\mu}^2u=\sum_k\sum_\rho\sum_{s\in S_{i\rho k}}\sum_{|\alpha|=m_{i\mu}} b_{i\mu s\alpha}(y)(\mathcal{D}^\alpha((1-\xi)u))(\omega_{is}(y))\big|_{M_i}+$$
$$+\sum_k\sum_\rho\sum_{0\ne s\notin S_{i\rho k}}\sum_{|\alpha|=m_{i\mu}} b_{i\mu s\alpha}(y)(\mathcal{D}^\alpha u)(\omega_{is}(y))\big|_{M_i}, \tag{3.3.10}$$
$$B_{i\mu}^3u=\sum_{s=0}^{S_i}\sum_{|\alpha|=m_{i\mu}} b_{i\mu s\alpha}(y)(\mathcal{D}^\alpha u)(\omega_{is}(y))\big|_{M_i} \tag{3.3.11}$$
$$(i=1,\dots,\ N_1,\ \mu=1,\dots,\ m).$$

Тогда оператор $B_{i\mu}$ можно представить в виде
$$B_{i\mu}=B_{i\mu}^0+B_{i\mu}^1+B_{i\mu}^2+B_{i\mu}^3. \tag{3.3.12}$$

Свойства нелокальных членов

Вначале мы сведем вспомогательную эллиптическую задачу с носителями нелокальных членов вблизи множества точек сопряжения $\mathcal{K}_1$ к системе эллиптических уравнений в плоских углах с нелокальными краевыми условиями.

Рассмотрим эллиптическое уравнение
$$A^0u=f_0(y)\qquad (y\in Q\setminus K) \tag{3.3.13}$$
с нелокальными краевыми условиями
$$B_{i\mu}^0u+B_{i\mu}^1u=f_{i\mu}(y)\qquad (y\in M_i,\ i=1,\dots,N_1,\ \mu=1,\dots,m). \tag{3.3.14}$$

Введем изоморфизм $U:\ M_H \to \mathcal{M}_H$ по формуле

$$\left.\begin{array}{ll}(Uv)_i(y) = v(y+g_i) & (y \in \theta_i \cap B_d,\ i=1,\dots,\ N_1),\\ (Uv)_i(y) = 0 & (y \in \theta_i \setminus B_d,\ i=1,\dots,\ N_1),\end{array}\right\} \qquad (3.3.15)$$

$$M_H = \{v \in H_a^{l+2m}(Q):\ \operatorname{supp} v \subset \overline{\mathcal{K}_1^d}\},$$

$$\mathcal{M}_H = \prod_{i=1}^{N_1} \{v_i \in H_a^{l+2m}(\theta_i):\ \operatorname{supp} v_i \subset \overline{B_d}\}.$$

По условию, $\omega_{is}(M_i) \subset Q$. Поэтому $d_{k1} < d_{ik} + \varphi_{t\rho s} < d_{2k}$ для $\rho = 1, 2,\ \nu, k = 1, \dots,\ N_1,\quad s = 1, \dots,\ S_{t\rho k}$. Здесь $t = t(\nu, \rho)$ таково, что

$$M_t \cap B_d(g_\nu) = (\gamma_{\nu\rho} \cap B_d) + g_\nu. \qquad (3.3.16)$$

Другими словами, $t = t(\nu, \rho)$ задается по формуле

$$\left.\begin{array}{llll}t = \nu, & \text{если} & \rho = 1, & n_{J-1}+1 \leqslant \nu \leqslant n_J,\\ t = \nu - 1, & \text{если} & \rho = 2, & n_{J-1}+2 \leqslant \nu \leqslant n_J,\\ t = n_J, & \text{если} & \rho = 2, & \nu = n_{J-1}+1,\\ J = 1, \dots,\ J_0. & & & \end{array}\right\} \qquad (3.3.17)$$

Следовательно $\delta_0 = \min\limits_{\nu,h,\rho,k,s} |d_{kh} - (d_{\nu\rho} + \varphi_{t\rho s})|/4 > 0$ $(\rho,\ h = 1, 2,$ $\nu, k = 1, \dots,\ N_1,\ s = 1, \dots,\ S_t)$.

Определим функции $\psi_k \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R})$ такие, что $\psi_k(\varphi) = 1$ для $d_{k1} + 2\delta_0 < \varphi < d_{k2} - 2\delta_0$ и $\psi_k(\varphi) = 0$ для $\varphi \notin (d_{k1} + \delta_0,\ d_{k2} - \delta_0)$.

Пусть $u \in H_a^{l+2m}(Q)$ и $\operatorname{supp} u \subset \mathcal{K}_1^{\chi_m d/2}$. Тогда задача (3.3.13), (3.3.14) примет вид

$$A^0(y+g_\nu, \mathcal{D}_y)(Uu)_\nu(y) = f_0(y+g_\nu) \qquad (y \in \theta_\nu \cap B_d), \qquad (3.3.18)$$

$$\sum_{k=1}^{N_1} B_{\rho,(\nu-1)m+\mu,k}(Uu)_k = B^0_{t\mu 0}(y+g_\nu,\ \mathcal{D}_y)(Uu)_\nu(y)\big|_{\gamma_{\nu\rho}\cap B_d} +$$

$$+ \sum_{s \in S_{t\rho k}} \sum_{|\alpha| = m_{t\mu}} b_{t\mu s\alpha}(y+g_\nu)(\mathcal{D}_y^\alpha(\psi_k(U(\xi u))_k))(\mathcal{G}_{t\rho s} y)\big|_{\gamma_{\nu\rho}\cap B_d} =$$

$$= f_{t\mu}(y+g_\nu) \qquad (y \in \gamma_{\nu\rho} \cap B_d), \qquad (3.3.19)$$

$$(i = 1, \dots,\ N_1,\ \rho = 1, 2,\ \mu = 1, \dots,\ m),$$

где $\gamma_{\nu\rho} = \{y \in \mathbb{R}^2:\ \varphi = d_{\nu\rho},\ r > 0\}$.

Таким образом, для функций с носителями вблизи множества $\mathcal{K}_1$ мы свели эллиптическое дифференциальное уравнение (3.3.13) в ограниченной области $Q \setminus K$ с нелокальными краевыми условиями (3.3.14) к системе N_1 эллиптических дифференциальных уравнений (3.3.18) в углах θ_ν с нелокальными краевыми условиями (3.3.19). Заметим, что локальная часть задачи (3.3.18), (3.3.19) распадается на N_1 эллиптических краевых задач в углах θ_ν ($\nu = 1, \dots, N_1$). Мы продемонстрируем, что нелокальные члены этой системы удовлетворяют условиям вида 2.1.3.

Лемма 3.3.1. *Пусть выполняется условие* 3.3.1.

Тогда операторы $B^1_{i\mu}$, заданные по формуле (3.3.9), *могут быть представлены в виде*

$$\left.\begin{aligned} (B^1_{t\mu})(y) = \sum_k B^1_\zeta(y,\ \mathcal{D}_y)(U(\xi u))_k(y-g_\nu)\big|_{(\gamma_{\nu\rho}\cap B_d)+g_\nu}& \\ (y\in M_t\cap B_d(g_\nu)),& \\ (B^1_{t\mu})(y) = 0 \qquad (y\in M_t\setminus B_d(g_\nu))& \\ (\nu=1,\dots,\ N_1,\ \mu=1,\dots,\ m,\ \rho=1,2).& \end{aligned}\right\} \tag{3.3.20}$$

Здесь $\zeta = (\rho,\ (\nu-1)m+\mu,\ k)$, *в* (3.3.20) *мы суммируем по* $k = 1, \dots, N_1$; *операторы* $B^1_\zeta(y,\ \mathcal{D}_y)$ *имеют вид*

$$B^1_\zeta(y,\ \mathcal{D}_y)v_k(y) = \sum_\eta b_{\zeta\eta}(y)\left(r^{-m_{t\mu}}(r\mathcal{D}_t)^q B^1_{\zeta\eta}v_k\right)(\varphi, \chi_{\zeta\eta}r), \tag{3.3.21}$$

$\eta = (q, s)$, *в* (3.3.21) *мы суммируем по* η *таким, что* $q = 0, \dots, m_{t\mu}$ *и* $s = 1, \dots, S_\zeta$, $B^1_{\zeta\eta}$ — *линейные операторы такие, что для всех* $w_k \in W^g(d_{k1}, d_{k2})$ ($k = 1, \dots, N_1,\ g = m_{t\mu} - q,\ l = 2m - q$)

$$\|B^1_{\zeta\eta}w_k\|_{W^{g-m_{t\mu}-q}(d_{\nu1},d_{\nu2})} \leqslant c_1\|w_k\|_{W^g(d_{k1}+\delta,\ d_{k2}-\delta)}, \tag{3.3.22}$$

$B^1_{\zeta\eta}$ *и* $\chi_{\zeta\eta}$ *не зависят от* r, $c_1 > 0$ *и* δ, $0 < \delta < \min\limits_k (d_{k2} - d_{k1})/2$, *не зависят от* w_k, $b_{\zeta\eta} \in C^\infty(\mathbb{R}^2), l \geqslant \max\limits_{\nu,\rho,\mu}\{-2m + m_{t\mu} + 1\}$ — *неотрицательное целое число,*

$$(r^{-m_{t\mu}}(r\mathcal{D}^q_r)B^1_{\zeta\eta}w_k)(\varphi,\ \chi_{\zeta\eta}r) = \left((r')^{-m_{t\mu}}(r'\mathcal{D}_{r'})^q B^1_{\zeta\eta}w_k\right)(\varphi,\ r')\big|_{r'=\chi_{\zeta\eta}r},$$

функция ξ *задана по формуле* (3.3.8) *с* $\chi_m = \min\limits_{\zeta,\,\eta}\min\{\chi_{\zeta\eta},\ 1\}$.

Доказательство. Достаточно продолжить коэффициенты $b_{t\mu s\alpha}(y+g_\nu)$ нелокальных членов (3.3.20) на все $\mathbb{R}^2$ как бесконечно дифференцируемые функции и перейти к полярным координатам. Тогда мы получим утверждение леммы 3.3.1 для $\delta = \delta_0$. $\square$

Из леммы 3.2.1 и замечания 3.2.3 мы получим следующее утверждение.

Лемма 3.3.2. *Если $K = \mathcal{K}$ и $\mathcal{K}_3 \neq \varnothing$, мы предполагаем, что выполнено условие* 3.2.4, *если $\mathcal{K} \setminus K \neq \varnothing$, мы предполагаем, что $a > l + 2m - 1$.*

Тогда операторы $B^2_{i\mu}$, заданные по формуле (3.3.10), *удовлетворяют следующему условию: существует $\varkappa_0 > 0$ такое, что для $0 < \varkappa \leqslant \varkappa_0$ и $u \in H^{l+2m}_a(Q)$ выполняется неравенство* (3.2.6). *Если $0 < \varkappa \leqslant \varkappa_0$, существует $\sigma_0 = \sigma_0(\varkappa) > 0$ такое, что для $0 < \sigma \leqslant \sigma_0$ и $u \in H^{l+2m}_a(Q)$ выполняется неравенство* (3.2.7).

Обозначим

$$A^1 u = \sum_{|\alpha|<2m} a_\alpha(y)\mathcal{D}^\alpha_y u(y). \qquad (3.3.23)$$

Лемма 3.3.3. *Пусть выполняются условия леммы* 3.3.2.

Тогда операторы $A^1 : H^{l+2m-1}_a(Q) \to H^l_a(Q)$ и $B^3_{i\mu} : H^{l+2m-1}_a(Q) \to H^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}_a(M_i)$, заданные по формулам (3.3.23) *и* (3.3.11) *соответственно, — ограниченные.*

Доказательство следует из леммы 1.3.8.

Эллиптические задачи с распределенными носителями нелокальных членов

Рассмотрим нелокальную задачу

$$Au = A^0 u + A^1 u = f_0(y) \qquad (y \in Q \setminus K), \qquad (3.3.24)$$

$$B_{i\mu} u = \sum_{j=0}^{3} B^j_{i\mu} u = f_{i\mu}(y)$$

$$(y \in M_i,\ i = 1, \dots, N_1,\ \mu = 1, \dots, m) \quad (3.3.25)$$

Здесь $f_0 \in H_a^l(Q)$ и $f_{i\mu} \in H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(M_i)$ — комплекснозначные функции; $H_a^l(Q) = H_a^l(Q, K)$ и $H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(M_i) = H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(M_i, K)$ $l \geqslant \max\limits_{i,\mu}\{-2m + m_{i\mu} + 1\}$ — неотрицательное целое число.

Положим, что операторы A^0, $B^0_{i\mu 0}$, A^1 и $B^s_{i\mu}$ ($i = 1, \ldots, N_1$, $\mu = 1, \ldots, m$) удовлетворяют условиям 3.1.1, 3.1.2, 3.2.1 и 3.2.3, соответственно. Мы предполагаем также, что для операторов $B^1_{i\mu}$ и $B^2_{i\mu}$ ($i = 1, \ldots, N_1$, $\mu = 1, \ldots, m$) выполняются следующие условия.

Условие 3.3.2. (нетангенциальный подход к границе). Операторы $B^1_{i\mu}$ могут быть представлены в виде (3.3.20), (3.3.21), где отображения $B^1_{\zeta\eta}$ удовлетворяют неравенствам (3.3.22).

Условие 3.3.3. (отделимость от множества точек сопряжения). Существует $\varkappa_0 > 0$ такое, что для $0 < \varkappa \leqslant \varkappa_0$ и $u \in H_a^{l+2m}(Q)$ выполняется неравенство

$$\|B^2_{i\mu}u\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(M_i)} \leqslant c_2 \|u\|_{H_a^{l+2m}(Q \setminus \overline{\mathcal{K}_1^{2\varkappa}})}. \tag{3.3.26}$$

Если $0 < \varkappa \leqslant \varkappa_0$, то существует $\sigma_0 = \sigma_0(\varkappa) > 0$ такое, что для $0 < \sigma \leqslant \sigma_0$ и $u \in H_a^{l+2m}(Q)$ выполняется неравенство

$$\|B^2_{i\mu}u\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(M_i \setminus \overline{\mathcal{K}_1^{\varkappa}})} \leqslant c_3 \|u\|_{H_a^{l+2m}(Q_\sigma)}. \tag{3.3.27}$$

Замечание 3.3.2. Из условия 3.3.1 вытекает, что операторы $B^1_\zeta : H_a^{l+2m}(\theta_k) \to H_a^{l+2m-m_{t\mu}}(\theta_\nu)$ — ограниченные и $\operatorname{supp} B^1_\zeta \subset \overline{\theta_{k\delta}}$, где $\theta_{k\delta} = \{y \in \mathbb{R}^2 : \ d_{k1} + \delta < \varphi < d_{k2} - \delta, \ 0 < r\}$. Следовательно, операторы $B^1_{i\mu} : H_a^{l+2m}(Q) \to H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(M_i)$ — ограниченные и $\operatorname{supp} B^1_{i\mu} \subset \overline{\mathcal{K}_1^d \bigcap \left(\bigcup\limits_k (\theta_{k\delta} + g_k) \right)}$, см. рис. 3.3.2.

В дальнейшем результаты этого параграфа не будут зависеть от явного вида нелокальных операторов. Они будут основаны лишь на условиях 3.2.1, 3.2.3, 3.3.1 и 3.3.2. В силу лемм 3.3.2-3.3.3 эти результаты будут справедливы также для краевой задачи (3.3.1), (3.3.2).

Введем линейные ограниченные операторы

$$L, \ L_0, \ L_1 : H_a^{l+2m}(Q) \to \mathcal{H}_a^l(Q, M)$$

по формулам

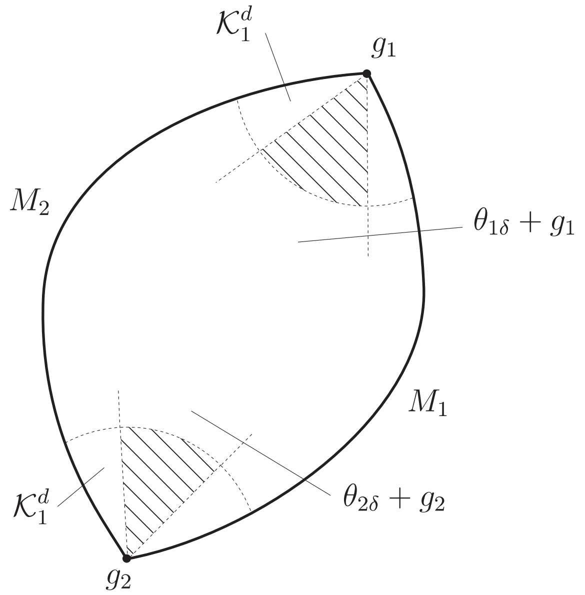

Рис. 3.3.2

$$Lu=\{Au,\ B_{i\mu}u\},\ L_0u=\{A^0u,\ B^0_{i\mu}u\},$$
$$L_1u=\{A^0u,\ (B^0_{i\mu}+B^1_{i\mu}u)\}. \quad (3.3.28)$$

Рассмотрим ограниченный оператор $\mathbf{L}:\ H_a^{l+2m,\,N_1}(\theta)\ \to\ \mathcal{H}_a^{l,\,N_1}(\theta,\gamma)$, заданный по формуле

$$\mathbf{L}v=\{A^0(g_\nu,\ \mathcal{D}_y)v_\nu(y),\ B^0_{t\mu 0}(g_\nu,\ \mathcal{D}_y)v_\nu(y)\big|_{\gamma_{\nu\rho}}+$$
$$+\sum_{k,\eta} b_{\zeta\eta}(0)(r^{-m_{t\mu}}(r\mathcal{D}_r)^q B^1_{\zeta\eta}v_k)(\varphi,\ \chi_{\zeta\eta}r)\big|_{\gamma_{\nu\rho}}\} \quad (3.3.29)$$

$(\rho=1,2,\ i=1,\ldots,\ N_1,\ \mu=1,\ldots,\ m)$,
где $t=t(\nu,\rho)$ задано соотношениями (3.3.16),

$$H_a^{l+2m,\,N_1}(\theta)=\prod_\nu H_a^{l+2m}(\theta_\nu),$$
$$\mathcal{H}_a^{l,\,N_1}(\theta,\gamma)\ =H_a^{l,\,N_1}(\theta)\times\prod_{\rho,\nu,\mu} H_a^{l+2m-m_{t\mu}-1/2}(\gamma_{\nu\rho}).$$

Переходя к полярным координатам r, φ, мы можем записать операторы $A^0(g_\nu,\ \mathcal{D}_y)$ и $B^0_{t\mu 0}(g_\nu,\ \mathcal{D}_y)$ в виде (3.1.8) и (3.1.9) соответственно. Наряду с оператором $\mathbf{L}$ мы будем изучать оператор-функцию

$\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda) \in \mathcal{B}(W^{l+2m,\,N_1}(d_1,\ d_2),\ w^{l,N_1}[d_1, d_2])$, определенную по формуле

$$\widehat{\mathbf{L}}(\lambda)w = \{\widehat{A}(g_\nu,\ \varphi,\ \mathcal{D}_\varphi,\ \lambda)w_\nu,\ \widehat{B}_{t\mu}(g_\nu,\ \varphi,\ \mathcal{D}_\varphi,\ \lambda)w_\nu\big|_{\varphi=d_{\nu\rho}} + \\ + \sum_{k,\eta} b_{\zeta\eta}(0)e^{(i\lambda - m_{t\mu})\ln\chi_{\zeta\eta}}\lambda^q(B^1_{\zeta\eta}v_k)(\varphi)\big|_{\varphi=d_{\nu\rho}}\} \quad (3.3.30)$$

$(\rho = 1, 2,\ i = 1, \ldots,\ N_1,\ \mu = 1, \ldots,\ m)$,
где

$$W^{l+2m,\,N_1}(d_1,\ d_2) = \prod_i W^{l+2m}(d_{\nu 1},\ d_{\nu 2}),$$
$$\mathcal{W}^{l,\,N_1}[d_1,\ d_2] = W^{l,\,N_1}(d_1,\ d_2) \times \mathbb{C}^{mN_1} \times \mathbb{C}^{mN_1}.$$

Замечание 3.3.3. Оператор $\widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$, заданный по формуле (3.3.30), имеет тот же вид, как и оператор $\widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$ в § 1.4 из [12], кроме следующего. В отличие от § 1.4 в [12] мы рассматриваем операторы $\widehat{A}(g_\nu,\ \varphi,\ \mathcal{D}_\varphi,\ \lambda)$ и соответствующие граничные операторы и нелокальные операторы на различных интервалах $(d_{\nu 1},\ d_{\nu 2})$. Переходя к новой переменной $t = a_\nu\varphi + b_\nu$, $a_\nu \neq 0$, мы можем свести оператор $\widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$ к оператору, заданному на одном и том же интервале $(d_1,\ d_2)$. Действительно, для заданных $d_{\nu 1},\ d_{\nu 2}$ и $d_1,\ d_2$ мы рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$a_\nu d_{\nu 1} + b_\nu = d_1,$$
$$a_\nu d_{\nu 2} + b_\nu = d_2$$

относительно $a_\nu,\ b_\nu$. Поскольку $d_{\nu 1} < d_{\nu 2}$ и $d_1 < d_2$ эта система имеет единственное решение $(a_\nu,\ b_\nu)$, $a_\nu \neq 0$. После такого преобразования переменных все свойства операторов, изученные в § 1.4 из [12], сохраняются. Поэтому в силу следствия 1.4.2 из [12] существует конечно-мероморфная оператор-функция $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{R}}(\lambda) \in \mathcal{B}(\mathcal{W}^{l,\,N_1}[d_1,\ d_2],\ W^{l+2m,\,N_1}(d_1,\ d_2))$ в $\mathbb{C}$ такая, что $\widehat{\mathbf{L}}^{-1}(\lambda) = \widehat{\mathbf{R}}(\lambda)$ для любого λ, не являющегося полюсом оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{R}}(\lambda)$. Более того, если $\lambda_0 = \mu_0 + i\nu_0$ — полюс оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{R}}(\lambda)$, то λ_0 — собственное значение оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$, и существует число $\delta_1 > 0$ такое, что множество $\{\lambda \in \mathbb{C} :\ \ 0 < |\operatorname{Im}\lambda - \nu_0| < \delta_1\}$ не содержит собственных значений оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$.

Если $\mathcal{K}_2 \cap K \neq \varnothing$, возьмем произвольную фиксированную точку $g \in \mathcal{K}_2 \cap M_i$. Рассмотрим оператор-функцию $\lambda \mapsto \widehat{L}_{g0}(\lambda) \in \mathcal{B}(W^{l+2m}(0,\pi),$ $\mathcal{W}^l[0,\ \pi])$, заданную по формуле (3.1.11). В силу следствия 1.4.2 из [12] с $N = 1$, $d_1 = 0$, $d_2 = \pi$, и $\widehat{\mathbf{L}}(\lambda) = \widehat{L}_{g0}(\lambda)$, существует конечно-мероморфная оператор-функция $\lambda \mapsto \widehat{R}_{g0}(\lambda) \in \mathcal{B}(\mathcal{W}^l[0,\ \pi],\ W^{l+2m}(0,\ \pi))$ в $\mathbb{C}$ такая, что $\left(\widehat{L}_{g0}(\lambda)\right)^{-1} = \widehat{R}_{g0}(\lambda)$ для любого λ, не являющегося полюсом оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{R}_{g0}(\lambda)$. Более того, если $\lambda_0 = \mu_0 + i\nu_0$ — полюс оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{R}_{g0}$, то λ_0 — собственное значение оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{L}_{g0}(\lambda)$, и существует число $\delta_1 > 0$ такое, что множество $\{\lambda \in \mathbb{C}:\ 0 < |\operatorname{Im}\lambda - \nu_0| < \delta_1\}$ не содержит собственных значений оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{L}_{g0}(\lambda)$.

Если $\mathcal{K}_3 \cap K \neq \varnothing$, возьмем произвольную фиксированную точку $g \in \mathcal{K}_3$. Рассмотрим оператор-функцию $\lambda \mapsto \widehat{A}_g(\lambda) \in \mathcal{B}(W_{2\pi}^{l+2m}(0,\ 2\pi),$ $W_{2\pi}^l(0,\ 2\pi))$, заданную по формуле (3.1.13). В силу леммы 2.4.1 существует конечно-мероморфная оператор-функция $\lambda \mapsto \widehat{R}_{g0}(\lambda) \in \mathcal{B}(W_{2\pi}^l(0,\ 2\pi),$ $W_{2\pi}^{l+2m}(0,\ 2\pi))$ в $\mathbb{C}$ такая, что для λ, не являющегося собственным значением оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{A}_g(\lambda)$, оператор $\widehat{A}_g(\lambda)$ имеет ограниченный обратный $(\widehat{A}_g(\lambda))^{-1} = \widehat{R}_{g0}(\lambda)$. Далее, если $\lambda_0 = \mu_0 + i\nu_0$ — полюс оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{R}_{g0}(\lambda)$, то λ_0 — собственное значение оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{A}_g(\lambda)$, и существует число $\delta > 0$ такое, что множество $\{\lambda \in \mathbb{C}:\ 0 < |\operatorname{Im}\lambda - \nu_0| < \delta_1\}$ не содержит собственных значений оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{A}_g(\lambda)$.

Сформулируем основные результаты этого параграфа.

Теорема 3.3.1. *Пусть выполняются условия* 3.1.1, 3.1.2, 3.2.1, 3.2.3, 3.3.2 *и* 3.3.3.

Если к тому же прямая $\operatorname{Im}\lambda = h = a + 1 - l - 2m$ *не содержит собственных значений оператор-функций* $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$, $\lambda \mapsto \widehat{L}_{g0}(\lambda)$ $(g \in \mathcal{K}_2 \cap K)$ *и* $\lambda \mapsto \widehat{A}_g(\lambda)$ $(g \in \mathcal{K}_3 \cap K)$, *то оператор* $L:\ H_a^{l+2m}(Q) \to \mathcal{H}_a^l(Q, M)$, *соответствующий нелокальной задаче* (3.3.24), (3.3.25) *— фредгольмов. Обратно, если оператор* $L:\ H_a^{l+2m}(Q) \to \mathcal{H}_a^l(Q, M)$, *— фредгольмов, то прямая* $\operatorname{Im}\lambda = h$ *не содержит собственных значений оператор-функции* $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$.

Следствие 3.3.1. *Пусть выполняются условия* 3.1.1, 3.1.2, 3.2.1, 3.2.3, 3.3.2 *и* 3.3.3. *Предположим также, что прямая* $\operatorname{Im}\lambda = h$ *не содержит собственных значений оператор-функций* $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$, $\lambda \mapsto \widehat{L}_{g0}(\lambda)$ $(g \in \mathcal{K}_2 \cap K)$ *и* $\lambda \mapsto \widehat{A}_g(\lambda)$ $(g \in \mathcal{K}_3 \cap K)$. *Тогда оператор* $L_1 : H_a^{l+2m}(Q) \to \mathcal{H}_a^l(Q, M)$ *— фредгольмов и* $\operatorname{ind} L = \operatorname{ind} L_1$.

Доказательство. Достаточно показать, что $\operatorname{ind} L = \operatorname{ind} L_1$. Обозначим $L_t = L + t(L_1 - L)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Очевидно, операторы tA^1, $tB^2_{i\mu}$ и $tB^3_{i\mu}$ $(i = 1, \ldots, N_1,\ \mu = 1, \ldots, m)$ удовлетворяют условиям 3.2.1, 3.3.3 и 3.2.3 соответственно. Поэтому из теоремы 3.3.1 мы выводим, что L_t — фредгольмов оператор для любых $0 \leqslant t \leqslant 1$. Следовательно, в силу теоремы A.8 об устойчивости индекса $\operatorname{ind} L = \operatorname{ind} L_1$. □

Замечание 3.3.4. В отличие от § 3.2, вообще говоря, оператор L_0, соответствующий локальной задаче, может быть фредгольмовым, в то время, как оператор L может не быть фредгольмовым, см. пример 3.3.1. Обратно, оператор L может быть фредгольмовым, в то время, как оператор L_0 может не быть фредгольмовым. Однако в силу теорем 3.1.1 и 3.3.1 оба оператора L и L_0 фредгольмовы для всех действительных чисел a кроме счетного множества. Для того, чтобы доказать теорему 3.3.1, нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения.

Априорные оценки решений

Рассмотрим ограниченный оператор $\mathbf{L}' : H_a^{l+2m,\,N_1}(\theta) \to \mathcal{H}_a^{l,\,N_1}(\theta, \gamma)$, определенный по формуле

$$\mathbf{L}'v = \Big\{ \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(g_\nu + y)\mathcal{D}_y^\alpha v_\nu(y),\ \sum_{|\alpha|=m_{t\mu}} b_{t\mu 0\alpha}(g_\nu + y)\mathcal{D}_y^\alpha v_\nu(y)\big|_{\gamma_{\nu\rho}} \Big\} + \\ + \sum_{k,\eta} b_{\zeta\eta}(y)(r^{-m_{t\mu}}(r\mathcal{D}_r)^q B^1_{\zeta\eta} v_k)(\varphi,\ \chi_{\zeta\eta} r)\big|_{\gamma_{\nu\rho}} \Big\}, \quad (3.3.31)$$

Для каждого τ, $0 < \tau < d/2$ мы определим функцию $\psi_{0\tau} \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R})$ такую, что $\psi_0(t) = 1$ для $|t| \leqslant \tau$, $\operatorname{supp}\psi_0 \subset (-2\tau, 2\tau)$

$$|D_j \psi_0(t)| \leqslant k_0\, \tau^{-j} \quad (t \in \mathbb{R},\ j \in \mathbb{N}),$$

где $k_0 = k_0(j) > 0$ не зависит от τ.

Пусть
$$\psi(y)=\psi_0(|y|). \tag{3.3.32}$$

Очевидно,
$$\psi(y)=1 \qquad (y\in\overline{B}_\tau), \qquad \psi(y)=0 \qquad (y\notin B_{2\tau}), \tag{3.3.33}$$
$$|\mathcal{D}^\beta\psi(y)|\leqslant k_1\tau^{-|\beta|} \qquad (y\in\mathbb{R}^2), \tag{3.3.34}$$
где $k_1=k_1(|\beta|)>0$ не зависит от τ.

Число $\tau>0$ будет определено в леммах 3.3.5, 3.3.7, где мы получим априорные оценки и построим правый регуляризатор нелокальной задачи $L_1u=f$.

Введем линейный ограниченный оператор
$$\mathbf{L}''v=\mathbf{L}v+\psi(\mathbf{L}'-\mathbf{L})v.$$

Лемма 3.3.4. *Пусть выполняются условия* 3.1.1, 3.1.2 *и* 3.3.2, *и пусть прямая* $\operatorname{Im}\lambda=a+1-l-2m$ *не содержит собственных значений оператор-функции* $\lambda\mapsto\widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$.

Тогда оператор $\mathbf{L}'':\ H_a^{l+2m,\,N_1}(\theta)\to\mathcal{H}_a^{l,N_1}(\theta,\gamma)$ *является изоморфизмом для достаточно малых* $0<\tau<d/2$ *и* $\|(L'')^{-1}\|\leqslant c_0$, *где* $c_0>0$ *не зависит от* τ.

Доказательство. Оператор $\mathbf{L}$, заданный по формуле (3.3.29), имеет тот же вид, что и оператор $\mathbf{L}$ в § 2.1, кроме следующего. В отличие от § 2.1 мы рассматриваем операторы $A^0(g_\nu,\ \mathcal{D}_y)$ и соответствующие граничные операторы и нелокальные операторы в различных углах θ_ν. Переходя к новым переменным $(\varphi,\ r)\to(a_\nu\varphi+b_\nu,\ r),\ a_\nu\neq0$, в полярных координатах, мы можем свести оператор $\mathbf{L}$ к оператору, заданному в одном и том же угле $\theta=\{y\in\mathbb{R}^2:\ d_1<\varphi<d_2,\ 0<r\}$, ср. замечание 3.3.3. Очевидно, вышеупомянутые преобразования переменных сохраняют вид оператора и эквивалентность норм в весовых пространствах. Поэтому, в силу теоремы 2.1.1, оператор $\mathbf{L}:\ H_a^{l+2m,\,N_1}(\theta)\to\mathcal{H}_a^{l,\,N_1}(\theta,\gamma)$ имеет ограниченный обратный $\mathbf{L}^{-1}:\ \mathcal{H}_a^{l,\,N_1}(\theta,\gamma)\to H_a^{l+2m,\,N_1}(\theta)$. Следовательно, достаточно показать, что
$$\|\psi(\mathbf{L}'-\mathbf{L})\|\to0 \quad \text{при} \quad \tau\to0. \tag{3.3.35}$$

Чтобы это сделать, докажем, что

$$\Big\|\sum_{k,\eta}\psi(y)c_{\zeta\eta}(y)(r^{-m_{t\mu}}(r\mathcal{D}_r)^q B^1_{\zeta\eta}v_k)(\varphi,\ \chi_{\zeta\eta}r)\Big\|_{H^{l+2m-m_{t\mu}}(\theta_\nu)}\leqslant$$

$$\leqslant k_5\tau\|v\|_{H_a^{l+2m,\,N_1}(\theta)} \quad (3.3.36)$$

для всех $v\in H_a^{l+2m,\,N_1}(\theta)$, где $c_{\zeta\eta}=b_{\zeta\eta}(y)-b_{\zeta\eta}(0)$, $k_5>0$ не зависит от v и τ. Аналогично замечанию 3.3.2 выражение

$$(r^{-m_{t\mu}}(r\mathcal{D}_r)^q B^1_{\zeta\eta}v_k)(\varphi,\ \chi_{\zeta\eta}r)$$

определяет ограниченный оператор из $H_a^{l+2m}(\theta_k)$ в $H_a^{l+2m-m_{t\mu}}(\theta_\nu)$. С другой стороны, поскольку $c_{\zeta\eta}(0)=0$, из неравенства (3.3.34) вытекает, что

$$|r^{|\alpha|}\mathcal{D}^\alpha(\psi c_{\zeta\eta})|\leqslant k_6\tau,$$

где $k_6>0$ не зависит от τ. Таким образом, используя лемму 1.1.1, мы получим неравенство (3.3.36). Аналогичные соотношения для операторов

$$\psi(y)\sum_{|\alpha|=2m}(a_\alpha(g_\nu+y)-a_\alpha(g_\nu))\mathcal{D}^\alpha$$

и

$$\psi(y)\sum_{|\alpha|=m_{t\mu}}(b_{t\mu0\alpha}(g_\nu+y)-b_{t\mu0\alpha}(g_\nu))\mathcal{D}^\alpha$$

можно доказать тем же путем. Таким образом, мы доказали соотношение (3.3.35). □

Лемма 3.3.5. *Пусть выполняются условия* 3.1.1, 3.1.2 *и* 3.3.2. *Положим, что прямая* $\operatorname{Im}\lambda=a+1-l-2m$ *не содержит собственных значений оператор-функций* $\lambda\mapsto\widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$, $\lambda\mapsto\widehat{L}_{g0}(\lambda)$ $(g\in\mathcal{K}_2\cap K)$ *и* $\lambda\mapsto\widehat{A}_g(\lambda)$ $(g\in\mathcal{K}_3\cap K)$.

Тогда для всех $u\in H_a^{l+2m}(Q)$ *мы имеем*

$$\|u\|_{H_a^{l+2m}(Q)}\leqslant c_1\left(\|L_1u\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,M)}+\|u\|_{H^0_{a+1-l-2m}(Q)}\right), \qquad (3.3.37)$$

где оператор L_1 *задан по формуле* (3.3.28).

Доказательство. 1. Введем функцию $\xi_{0\tau}$ так, что

$$\xi_{0\tau} \in \dot{C}^{\infty}(\mathbb{R}),\ \xi_{0\tau}(t) = 1\ (|t| \leqslant \chi_m \tau/2),$$
$$\operatorname{supp} \xi_{0\tau} \subset (-\chi'_m \tau,\ \chi'_m \tau), \quad (3.3.38)$$

где $\tau,\ 0 < \tau < \chi_\mu^{-1} d/2$, из леммы 3.3.4, $\chi_m/2 < \chi'_m < \chi_m$.

Пусть

$$\xi_{1\tau}(y) = \xi_{0\tau}(|y|), \qquad \xi_\tau(y) = \sum_\nu \xi_{1\tau}(y - g_\nu). \quad (3.3.39)$$

Из леммы 3.3.4 следует, что для любых $u \in H^{l+2m}(Q)$

$$\|\xi_\tau u\|_{H_a^{l+2m}(Q)} = \|V\|_{H_a^{l+2m,\,N_1}(\theta)} \leqslant k_1 \|\mathbf{L}'' V\|_{\mathcal{H}_a^{l,\,N_1}(\theta,\gamma)}, \quad (3.3.40)$$

где $V = U(\xi_\tau u)$.

В силу (3.3.38) мы имеем

$$\xi_{0\tau}(\chi_{\zeta\eta}|y|) = 0 \qquad \text{для} \qquad |y| > \tau. \quad (3.3.41)$$

Используя (3.3.41), (3.3.33), мы получим $\mathbf{L}''V = \mathbf{L}'V$. Поэтому, т.к. $\xi_0(r)\xi_{0\tau}(r) = \xi_{0\tau}(r)$ для $r \geqslant 0$, используя формулу Лейбница и неравенство (3.3.40), мы выводим

$$\|\xi_\tau u\|_{H_a^{l+2m}(Q)} \leqslant k_1 \|\mathbf{L}' V\|_{\mathcal{H}_a^{l,\,N_1}(\theta,\gamma)} \leqslant (\|L_1 u\|_{\mathcal{H}_a^{l}(Q,M)} +$$
$$+ \|u\|_{H_a^{l+2m-1}(Q)} + \sum_{\zeta,\eta} \|\Psi_{\zeta\eta}\|_{H^{l+2m-m_{t\mu}-1/2}(\gamma_{\nu\rho})}), \quad (3.3.42)$$

где функции $\xi_0 \in \dot{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ и $\xi \in \dot{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ были определены по формулам (3.3.6), (3.3.7),

$$\Psi_{\zeta\eta} = (\xi_{0\tau}(\chi_{\zeta\eta} r) - \xi_{0\tau}(r)) b_{\zeta\eta}(y) (r^{-m_{t\mu}} (r\mathcal{D}_r)^q B_{\zeta\eta}(U(\xi u))_k)(\varphi,\ \chi_{\zeta\eta} r)\big|_{\gamma_{\nu\rho}}.$$

Оценим теперь норму $\Psi_{\zeta\eta}$. Очевидно,
$\operatorname{supp}(\xi_{0\tau}(\chi_{\zeta\eta} r) - \xi_{0\tau}(r)) \subset [\chi_m\ \chi_M^{-1}\,\tau/2, \tau]$, где $\chi_M = \max\limits_{\zeta,\eta} \max(\chi_{\zeta\eta},\ 1)$. Поэтому из (3.3.22) следует, что

$$\|\Psi_{\zeta\eta}\|_{H^{l+2m-m_{t\mu}-1/2}(\gamma_{\nu\rho})} \leqslant k_3 \|u\|_{W^{l+2m}(\Omega)}, \quad (3.3.43)$$

где $\Omega = \bigcup\limits_{\nu}(\Omega_\nu + g_\nu)$, $\Omega_\nu = \{y \in \theta_\nu : \varphi \in (d_{\nu1} + \delta,\ d_{\nu2} - \delta)$, $r \in (\chi_m^2\ \chi_M^{-1}\ \tau/2,\ \chi_m\ \tau)\}$. Очевидно, $\overline{\Omega} \cap K = \varnothing$ и $\overline{\Omega} \cap \partial Q = \varnothing$.

Поэтому, используя (3.3.43), лемму C.4 и эквивалентность норм в пространствах Соболева и весовых пространствах в Ω^a, мы получим

$$\|\Psi_{\zeta\eta}\|_{H_a^{l+2m-m_{t\mu}-1/2}(\gamma_{\nu\rho})} \leqslant k_4(\|A^0u\|_{W^l(\Omega^a)}+ \\ + \|u\|_{L_2(\Omega^a)}) \leqslant k_5(\|A^0u\|_{H_a^l(Q)} + \|u\|_{H^0_{a+1-l-2m}(Q)}), \quad (3.3.44)$$

где $\Omega^a = \{y \in Q :\ \rho(y,\ \Omega) < a\}$, $a > 0$ настолько мало, что $\overline{\Omega^a} \cap K = \varnothing$ и $\overline{\Omega^a} \cap \partial Q = \varnothing$.

Из неравенств (3.3.42), (3.3.44) и интерполяционного неравенства (1.3.8) вытекает, что

$$\|\xi_\tau u\|_{H_a^{l+2m}(Q)} \leqslant \\ \leqslant k_6\left(\|L_1u\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,M)} + q^{-1}\|u\|_{H_a^{l+2m}(Q)} + q^{l+2m-1}\|u\|_{H^0_{a+1-l-2m}(Q)}\right) \quad (3.3.45)$$

для всех $u \in H_a^{l+2m}(Q)$ и $q > 0$.

2. Оценим теперь норму функции $(1-\xi_\tau)u$. Поскольку $\operatorname{supp}(1-\xi_\tau)u \cap \mathcal{K}_1 = \varnothing$, используя лемму 3.1.1 и формулу Лейбница, мы получим

$$\|(1-\xi_\tau)u\|_{H_a^{l+2m}(Q)} \leqslant k_7(\|(1-\xi_\tau)L_0u\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,M)} + \|u\|_{H_a^{l+2m-1}(Q)}) \leqslant \\ \leqslant k_8(\|(1-\xi_\tau)L_1u\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,M)}+ \\ + \sum_{i,\mu}\|(1-\xi_\tau)B^1_{i\mu}u\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(M_i)} + \|u\|_{H_a^{l+2m-1}(Q)}). \quad (3.3.46)$$

Из (3.3.6), (3.3.7), (3.3.38), (3.3.21) и (3.3.22) следует, что
$\operatorname{supp}(1-\xi_\tau)B^1_{i\mu}u \subset \Omega'$ и

$$\|(1-\xi_\tau)B^1_{i\mu}u\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(M_i)} \leqslant k_9\|u\|_{H_a^{l+2m}(\Omega^1)}, \quad (3.3.47)$$

где $\Omega^1 = \bigcup\limits_{\nu}(\Omega_\nu + g_\nu)$, $\Omega^1_\nu = \{y \in \theta_\nu : \varphi \in (d_{\nu1} + \delta,\ d_{\nu2} - \delta)$, $r \in (\chi_m^2\tau/2,\ \chi_{\scriptscriptstyle M}d)\}$. Очевидно, $\overline{\Omega^1} \cap K = \varnothing$ и $\overline{\Omega'} \cap \partial Q = \varnothing$. Поэтому, повторяя рассуждения из доказательства неравенства (3.3.44), мы выводим

$$\|(1-\xi_\tau)u\|_{H_a^{l+2m}(Q)} \leqslant k_{10}(\|L_1u\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,M)} + \|u\|_{H_a^{l+2m-1}(Q)}). \quad (3.3.48)$$

Используя интерполяционное неравенство (1.3.8) вновь, из (3.3.48) мы получим

$$
\|(1-\xi_\tau)u\|_{H_a^{l+2m}(Q)} \leqslant k_{11}(\|L_1 u\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,M)} + q^{-1}\|u\|_{H_a^{l+2m}(Q)} + \\
+ q^{l+2m-1}\|u\|_{H^0_{a+1-l-2m}(Q)}) \quad (3.3.49)
$$

для всех $u \in H_a^{l+2m}(Q)$ и $q > 0$, где $k_{11} > 0$ не зависит от u и q.

Пусть $q > 0$ таково, что $(k_6 + k_{11})q^{-1} < 1/2$. Тогда из (3.3.45) и (3.3.49) мы получим (3.3.37). $\square$

Лемма 3.3.6. *Пусть выполняются условия* 3.1.1, 3.1.2, 3.2.1, 3.2.3, 3.3.2, *и* 3.3.3. *Предположим, что прямая* $\operatorname{Im}\lambda = a + 1 - l - 2m$ *не содержит собственных значений оператор-функций* $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$, $\lambda \mapsto \widehat{L}_{g0}(\lambda)$ $(g \in \mathcal{K}_2 \cap K)$ *и* $\lambda \mapsto \widehat{A}_g(\lambda)$ $(g \in \mathcal{K}_3 \cap K)$.

Тогда для всех $u \in H_a^{l+2m}(Q)$ *мы имеем*

$$
\|u\|_{H_a^{l+2m}(Q)} \leqslant c_2(\|Lu\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,M)} + \|u\|_{H^0_{a+1-l-2m}(Q)}), \qquad (3.3.50)
$$

где оператор L *задан по формуле* (3.3.28).

Доказательство. 1. Из леммы 3.3.5 следует, что

$$
\|u\|_{H_a^{l+2m}(Q)} \leqslant k_1\Bigg(\|Lu\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,M)} + \|A^1 u\|_{H_a^l(Q)} + \\
+ \sum_{j=2,3}\sum_{i,\mu}\|B^j_{i\mu}u\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(M_i)}\Bigg) \quad (3.3.51)
$$

для всех $u \in H_a^{l+2m}(Q)$.

Из условий 3.2.1, 3.2.3 вытекает, что

$$
\|A^1 u\|_{H_a^l(Q)} + \sum_{i,\mu}\|B^3_{i\mu}u\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(M_i)} \leqslant k_2\|u\|_{H_a^{l+2m-1}(Q)}. \qquad (3.3.52)
$$

2. Введем функцию $\xi_\tau \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ по формуле (3.3.39), где число τ, $\tau \leqslant \varkappa_0$, — из леммы 3.3.4, а число $\varkappa_0$ — из условия 3.3.3. Используя неравенство (3.3.26) с $\varkappa = \chi_m\tau/2$, соотношение $\operatorname{supp}(1-\xi_\tau)u \cap \mathcal{K}_1 = \varnothing$ совместно с леммой 3.1.1, и неравенство (3.3.47), мы получим

$$
\begin{aligned}
\|B^2_{i\mu}u\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(M_i)} &\leqslant k_3\|(1-\xi_\tau)u\|_{H_a^{l+2m}(Q)} \leqslant \\
&\leqslant k_4\Bigl(\|(1-\xi_\tau)L_0u\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,M)} + \|u\|_{H_a^{l+2m-1}(Q)}\Bigr) \leqslant \\
&\leqslant k_4\Bigl(\|(1-\xi_\tau)L_1u\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,M)} + \\
&+\sum_{i,\mu}\|(1-\xi_\tau)B^1_{i\mu}u\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(M_i)} + \|u\|_{H_a^{l+2m-1}(Q)}\Bigr) \leqslant \\
&\leqslant k_5\Bigl(\|(1-\xi_\tau)L_1u\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,M)} + \|u\|_{H_a^{l+2m}(\Omega^1)} + \|u\|_{H_a^{l+2m-1}(Q)}\Bigr), \quad (3.3.53)
\end{aligned}
$$

где $\Omega_1 = \bigcup\limits_\nu(\Omega^1_\nu + g_\nu)$, $\Omega^1_\nu = \{y \in \theta_\nu : \varphi \in (d_{\nu1}+\delta,\ d_{\nu2}-\delta)$, $r \in (\chi^2_m\ \tau/2,\ \chi_M\, d)\}$. Очевидно, $\overline{\Omega^1}\cap K = \varnothing$ и $\overline{\Omega^1}\cap\partial Q = \varnothing$.

Теперь мы можем применить неравенство (3.3.27) с $\varkappa = \chi_m\,\tau/2$. Тогда из (3.3.53) мы выводим

$$
\begin{aligned}
\|B^2_{i\mu}u\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(M_i)} &\leqslant k_5(\|(1-\xi_\tau)Lu\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,M)} + \\
&+\sum_{i,\mu}\|(1-\xi_\tau)B^2_{i\mu}u\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(M_i)} + \|u\|_{H_a^{l+2m}(\Omega^1)} + \\
&+\|u\|_{H_a^{l+2m-1}(Q)}) \leqslant k_6(\|Lu\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,M)} + \|u\|_{H_a^{l+2m-1}(Q)}), \quad (3.3.54)
\end{aligned}
$$

где $0<\sigma\leqslant\sigma_0$ таково, что $\Omega^1\subset Q_\sigma$.

Мы введем функцию $\xi^0_\sigma \in \dot{C}^\infty(Q)$ такую, что $0\leqslant \xi^0_\sigma(y)\leqslant 1$, $\xi^0_\sigma(y)=1$ $(y\in Q_\sigma)$. Используя теорему 3.1.1 и формулу Лейбница, мы получим

$$
\begin{aligned}
\|B^2_{i\mu}u\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(M_i)} &\leqslant k_6(\|Lu\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,M)} + \|\xi^0_\sigma u\|_{H_a^{l+2m}(Q)} + \|u\|_{H_a^{l+2m-1}(Q)}) \leqslant \\
&\leqslant k_7(\|Lu\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,M)} + \|A^0(\xi^0_\sigma u)\|_{H_a^l(Q)} + \|u\|_{H_a^{l+2m-1}(Q)}) \leqslant \\
&\leqslant k_8(\|Lu\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,M)} + \|u\|_{H_a^{l+2m-1}(Q)}). \quad (3.3.55)
\end{aligned}
$$

Из (3.3.51), (3.3.52), (3.3.55) и интерполяционного неравенства (1.3.8) следует, что

$$
\begin{aligned}
\|u\|_{H_a^{l+2m}(Q)} &\leqslant k_9(\|Lu\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,M)} + \|u\|_{H_a^{l+2m-1}(Q)}) \leqslant \\
&\leqslant k_{10}(\|Lu\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,M)} + q^{-1}\|u\|_{H_a^{l+2m}(Q)} + q^{l+2m-1}\|u\|_{H^0_{a+1-l-2m}(Q)}), \quad (3.3.56)
\end{aligned}
$$

для всех $u \in H_a^{l+2m}(Q)$ и $q > 0$, где $k_{10} > 0$ не зависит от u и q. Пусть $q > 0$ таково, что $k_{10}q^{-1} < 1/2$. Тогда неравенство (3.3.56) дает нам оценку (3.3.51). $\square$

Доказательство теоремы 3.3.1. Доказательство теоремы 3.3.1 основано на следующем утверждении, которое будет доказано ниже.

Лемма 3.3.7. *Пусть выполняются условия леммы* 3.3.6. *Тогда существует линейный ограниченный оператор* $R : \mathcal{H}_a^l(Q, M) \to H_a^{l+2m}(Q)$ *такой, что* $LR = I + T$, *где* I *и* T — *тождественный и компактный оператор в* $\mathcal{H}_a^l(Q, M)$ *соответственно.*

Предположим, что прямая $\operatorname{Im}\lambda = h = a + 1 - l - 2m$ не содержит собственных значений оператор-функций $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$, $\lambda \mapsto \widehat{L}_{g0}(\lambda)$ $(\lambda \in \mathcal{K}_2 \cap K)$, и $\lambda \mapsto \widehat{A}_g(\lambda)$ $(g \in \mathcal{K}_3 \cap K)$. Тогда из лемм 3.3.6 и 3.3.7, компактности оператора вложения $H_a^{l+2m}(Q)$ в $H^0_{a+1-l-2m}(Q)$ и теоремы А.5 следует, что оператор $L : H_a^{l+2m}(Q) \to \mathcal{H}_a^l(Q, M)$ — фредгольмов.

Обратно, пусть L — фредгольмов оператор. Тогда, повторяя рассуждения из части 2 доказательства теоремы 3.2.1, мы заключаем, что прямая $\operatorname{Im}\lambda = a + 1 - l - 2m$ не содержит собственных значений оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$.

Для доказательства леммы 3.3.7 мы получим некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 3.3.8. *Пусть выполняются условия леммы* 3.3.5.

Тогда существует линейный ограниченный оператор $R_1 : \mathcal{H}_a^l(Q, M) \to H_a^{l+2m}(Q)$ *и компактный оператор* $T_1 : \mathcal{H}_a^l(Q, M) \to \mathcal{H}_a^l(Q, M)$ *такие, что* $L_1R_1 = I + T_1$.

Доказательство. 1. Введем функцию $\widehat{\xi}_{0\tau}$ такую, что

$$\widehat{\xi}_{0\tau} \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}),\ \widehat{\xi}_{0\tau}(t) = 1\ (|t| \leqslant \chi'_m\tau),\ \operatorname{supp}\widehat{\xi}_{0\tau} \subset (-\chi_m\tau,\ \chi_m\tau), \quad (3.3.57)$$

где τ, $0 < \tau < d/2$, — из леммы 3.3.4, χ'_m, $\chi_m/2 < \chi'_m < \chi_m$, — из соотношений (3.3.38).

Пусть
$$\widehat{\xi}_{1\tau}(y)=\widehat{\xi}_{0\tau}(|y|),\ \widehat{\xi}_{\tau}(y)=\sum_{\nu}\widehat{\xi}_{1\tau}(y-g_\nu). \tag{3.3.58}$$
Обозначим $G_H=\{f\in\mathcal{H}_a^l(Q,M):\ \operatorname{supp}f\subset\overline{\mathcal{K}_1^d}\}$, $\mathcal{G}_H=\{\Phi\in\mathcal{H}_a^{l,N_1}(\theta,\gamma):$ $\operatorname{supp}\Phi\subset\overline{B_d}\}$. Определим изоморфизм $F:\ G_H\to\mathcal{G}_H$ по формуле
$$(Ff)(y)=\{(Ff)_\nu(y),\ (Ff)_{\rho,(\nu-1)m+\mu}(y)\}. \tag{3.3.59}$$
Здесь
$$\begin{aligned}
&(Ff)_\nu(y)=f_0(y+g_\nu) && (y\in\theta_\nu\cap B_d),\\
&(Ff)_\nu(y)=0 && (y\in\theta_\nu\setminus B_d),\\
&(Ff)_{\rho,(\nu-1)m+\mu}(y)=f_{t\mu}(y+g_\nu) && (y\in\gamma_{\nu\rho}\cap B_d),\\
&(Ff)_{\rho,(\nu-1)m+\mu}(y)=0 && (y\in\gamma_{\nu\rho}\setminus B_d)\\
&(\nu=1,\dots,\ N_1,\ \rho=1,2,\ \mu=1,\dots,m),
\end{aligned}$$
$t=t(\nu,\rho)$ таково, что $M_t\cap B_d(g_\nu)=(\gamma_{\nu\rho}\cap B_d)+g_\nu$.

2. Положим
$$R_{\mathcal{K}_1}f=U^{-1}(\widehat{\xi}_{1\tau}(\mathbf{L}'')^{-1}F(\xi_\tau f)), \tag{3.3.60}$$
где $U:\ M_H\to\mathcal{M}_H$ — изоморфизм, определенный по формуле (3.3.15).

В силу (3.3.57) и (3.3.58) мы имеем
$$\operatorname{supp}\widehat{\xi}_{1\tau}\subset B_{\chi_m\tau}.$$
Поэтому
$$\widehat{\xi}_{1\tau}\mathbf{L}'v=\widehat{\xi}_{1\tau}\mathbf{L}''v \qquad (v\in\mathcal{H}_a^{l+2m,\,N_1}(\theta)). \tag{3.3.61}$$
Из формулы Лейбница следует, что
$$\mathbf{L}'(\widehat{\xi}_{1\tau}v)=\widehat{\xi}_{1\tau}\mathbf{L}'v+\tilde{\mathbf{L}}v+\{0,\ \sum_k\mathcal{T}_{\mathcal{G}}v\}, \tag{3.3.62}$$
где $\tilde{\mathbf{L}}:\ H_a^{l+2m-1,\,N_1}(\theta)\to\mathcal{H}_a^{l,\,N_1}(\theta,\gamma)$ — ограниченный оператор такой, что $\operatorname{supp}\tilde{\mathbf{L}}v\subset B_\tau$, в то время как
$$\mathcal{T}_\zeta v=$$
$$=\sum_\eta(\widehat{\xi}_{0\tau}(\chi_{\zeta\eta}r)-\widehat{\xi}_{0\tau}(r))b_{\zeta\eta}(y)(r^{-m_{t\mu}}(r\mathcal{D}_r)^qB_{\zeta\eta}v_k)(\varphi,\ \chi_{\zeta\eta}r)\big|_{\gamma_{\nu\rho}} \tag{3.3.63}$$

$$\zeta=(\rho,\ (\nu-1)m+\mu,\ k),\ \eta=(q,\ s),\ \rho=1,2,\ \nu,\ k=1,\dots,\ N_1,$$
$$\mu=1,\dots,\ m,\ q=0,\dots,\ m_{t\mu},\ s=1,\dots,\ S_\zeta,\ t=t(\nu,\ \rho).$$

Очевидно, $\mathcal{T}_\zeta:\ \mathcal{H}_a^{l+2m,\,N_1}(\theta)\to H_a^{l+2m-m_{t\mu}-1/2}(\gamma_{\nu\rho})$ — ограниченный оператор $\operatorname{supp}\mathcal{T}_\zeta v\subset B_\tau$. Для $v\in H_a^{l+2m,\,N_1}(\theta)$, $\operatorname{supp}v\subset B_{\chi_m\tau}$, мы имеем

$$\mathbf{L}'v=FL_1U^{-1}v. \tag{3.3.64}$$

Поэтому, используя (3.3.62), (3.3.61), и соотношение

$$\widehat{\xi}_\tau(y)\xi_\tau(y)=\xi_\tau(y)\qquad(y\in\mathbb{R}^2),$$

мы получим

$$\begin{aligned}L_1R_{\mathcal{K}_1}f=F^{-1}\mathbf{L}'(\widehat{\xi}_{1\tau}(\mathbf{L}'')^{-1}F(\xi_\tau f))=\\ =F^{-1}\widehat{\xi}_{1\tau}F(\xi_\tau f)+T_1'f+T_2'f=F^{-1}F(\widehat{\xi}_\tau\xi_\tau f)+\\ +T_1'f+T_2'f=\xi_\tau f+T_1'f+T_2'f,\end{aligned} \tag{3.3.65}$$

где

$$T_1'f=F^{-1}\tilde{\mathbf{L}}(\mathbf{L}'')^{-1}F(\xi_\tau f),$$
$$T_2'f=F^{-1}\{0,\ \sum_k\mathcal{T}_{\mathcal{G}}(\mathbf{L}'')^{-1}F(\xi_\tau f)\}.$$

Поскольку оператор $\tilde{\mathbf{L}}:\ H_a^{l+2m-1,\,N_1}(\theta)\to\mathcal{H}_a^{l,\,N_1}(\theta,\gamma)$ — ограниченный, $\operatorname{supp}\tilde{\mathbf{L}}v\subset B_\tau$ и $H_a^{l+2m,\,N_1}(\theta\cap B_\tau)$ компактно вложено в $H_a^{l+2m-1,\,N_1}$ $(\theta\cap B_\tau)$, отсюда следует, что оператор $T_1':\ \mathcal{H}_a^l(Q,M)\to\mathcal{H}_a^l(Q,M)$ — компактный.

Докажем теперь, что квадрат оператора T_2' — компактный. Действительно,

$$\|(T_2')^2f\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,M)}\leqslant k_1\sum_\zeta\|\mathcal{T}_{\mathcal{G}}(\mathbf{L}'')^{-1}F(\xi_\tau T_2'f)\|_{H_a^{l+2m-m_{t\mu}-1/2}(\gamma_{\nu\rho})}. \tag{3.3.66}$$

Из (3.3.57) следует, что $\operatorname{supp}(\widehat{\xi}_{0\tau}(\chi_{\zeta\eta}r)-\widehat{\xi}_{0\tau}(r))\subset B_\tau$ и $(\widehat{\xi}_{0\tau}(\chi_{\zeta\eta}r)-\widehat{\xi}_{0\tau}(r))=0$ для $r\leqslant{\chi'}_m\tau/\chi_M$, где $\chi_M=\max\limits_{\zeta,\eta}\{\chi_{\zeta\eta},\ 1\}$. Поэтому из неравенства (3.3.22) вытекает, что

$$\|\mathcal{T}_\zeta v\|_{H_a^{l+2m-m_{t\mu}-1/2}(\gamma_{\nu\rho})}\leqslant k_2\sum_k\|v_k\|_{H_a^{l+2m}(\Omega_k)}, \tag{3.3.67}$$

где $\Omega_k=\{y\in\theta_k:\ \varphi\in(d_{k1}+\delta,\ d_{k2}-\delta),\ r\in(\chi_m^2\tau/2\chi_M,\ \chi_M\tau)\}$.

Используя неравенство (3.3.67), лемму C.4 и эквивалентность норм в подпространствах пространств $H_a^l(\theta_k)$ и $W^l(\theta_k)$, состоящих из функций с компактными носителями, обращающимися в нуль в окрестности начала координат, мы получим

$$\|\mathcal{T}_{\mathcal{G}}(\mathbf{L}'')^{-1}F(\xi_\tau T_2' f)\|_{H_a^{l+2m-m_{t\mu}-1/2}(\gamma_{\nu\rho})} \leqslant \\ \leqslant k_3 \sum_k (\|A_k''[(\mathbf{L}'')^{-1}F(\xi_\tau T_2' f)]_k\|_{H_a^l(\theta_k)} + \\ + \|[(\mathbf{L}'')^{-1}F(\xi_\tau T_2' f)]_k\|_{H^0_{a+1-l-2m}(\theta_k \cap B_d)}), \quad (3.3.68)$$

где $A_k'' = A^0(g_k,\ \mathcal{D}_y) + \psi(\tilde{A}^0(y,\ \mathcal{D}_y) - A^0(g_k,\ \mathcal{D}_y))$, см. (3.3.31)–(3.3.34).

Первые N_1 координат вектор-функции $F(\xi_\tau T_2' f)$ равны нулю. Поэтому

$$A_k''[(\mathbf{L}'')^{-1}F(\xi_\tau T_\tau f)]_k = 0 \qquad (k = 1, \ldots,\ N_1). \quad (3.3.69)$$

Следовательно,

$$\|\mathcal{T}_{\zeta}(\mathbf{L}'')^{-1}F(\xi_\tau T_2' f)\|_{H_a^{l+2m-m_{t\mu}-1/2}(\gamma_{\nu\rho})} \leqslant \\ \leqslant k_3 \|[(\mathbf{L}'')^{-1}F(\xi_\tau T_2' f)]_k\|_{H^0_{a+1-l-2m}(\theta_k \cap B_d)}. \quad (3.3.70)$$

Из неравенств (3.3.66), (3.3.70) и компактности вложения $H_a^{l+2m}(\theta_k)$ в $H^0_{a+1-l-2m}(\theta_k \cap B_d)$ вытекает, что квадрат оператора T_2' является компактным. Таким образом, из (3.3.65) следует, что

$$L_1 R_{\mathcal{K}_1} f = \xi_\tau f + T_{\mathcal{K}_1} f, \quad (3.3.71)$$

где $T_{\mathcal{K}_1}:\ \mathcal{H}_a^l(Q, M) \to \mathcal{H}_a^l(Q, M)$ — ограниченный оператор с компактным квадратом.

3. В силу леммы 3.1.2 существует ограниченный оператор

$$R_{\tau 0}:\ \{f \in \mathcal{H}_a^l(Q, M):\ \operatorname{supp} f \subset \overline{Q} \setminus \mathcal{K}_1^{\chi_m \tau/2}\} \to \\ \to \{u \in H_a^{l+2m}(Q):\ \operatorname{supp} u \subset \overline{Q} \setminus \mathcal{K}_1^{\chi_m \tau/4}\}$$

и компактный оператор

$$T_{\tau 0}:\ \{f \in \mathcal{H}_a^l(Q, M):\ \operatorname{supp} f \subset \overline{Q} \setminus \mathcal{K}_1^{\chi_m \tau/2}\} \to \\ \to \{f \in \mathcal{H}_a^l(Q, M):\ \operatorname{supp} f \subset \overline{Q} \setminus \mathcal{K}_1^{\chi_m \tau/4}\}$$

такие, что

$$L_0 R_{\tau 0} f = f + T_{\tau 0} f. \qquad (3.3.72)$$

Для любых $f \in \mathcal{H}_a^l(Q, M)$ мы положим

$$R' f = R_{\mathcal{K}_1} f + R_{\tau 0}((1 - \xi_\tau) f). \qquad (3.3.73)$$

Из (3.3.71) и (3.3.72) следует, что

$$L_1 R' f = f + T_{\mathcal{K}_1} f + T_{\tau 0} f + T_{\tau 1} f, \qquad (3.3.74)$$

где $T_{\tau 1} f = \{0,\ B_{i\mu}^1 R_{\tau 0}((1 - \xi_\tau) f)\}$.

Докажем, что оператор $(T_{\tau 1})^2 :\ \mathcal{H}_a^l(Q, M) \to \mathcal{H}_a^l(Q, M)$ — компактный. Поскольку $\operatorname{supp} R_{\tau 0}((1 - \xi_\tau) f) \subset \overline{Q} \setminus \mathcal{K}_1^{\chi_m \tau/4}$, используя (3.3.8), (3.3.20)–(3.3.22), мы получим

$$\|(T_{\tau 1})^2 f\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,M)} \leqslant k_4 \|R_{\tau 0}((1 - \xi_\tau) T_{\tau 1} f)\|_{H_a^{l+2m}(\Omega^3)}, \qquad (3.3.75)$$

где $\Omega^2 = \bigcup\limits_\nu (\Omega_\nu^2 + g_\nu)$, $\quad \Omega_\nu^2 = \{y \in \theta_\nu :\quad \varphi \in (d_{\nu 1} + \delta,\ d_{\nu 2} - \delta),$ $r \in (\chi_m \chi_M^{-1} \tau/4,\ d)\}$.

Пусть область $\Omega^3 \subset \mathbb{R}^2$ такова, что $\overline{\Omega^2} \subset \Omega^3 \subset Q$ и $\overline{\Omega^3} \cap K = \varnothing$. В силу (3.3.72) мы имеем $A_0 R_{\tau 0} f = f_0 + T'_{\tau 1} f$, где $T'_{\tau 0} :\ \mathcal{H}_a^l(Q, M) \to H_a^l(Q)$ — компактный оператор. Поэтому, используя лемму C.4 и эквивалентность норм в пространствах Соболева и в весовых пространствах в Ω^3, мы получим

$$\begin{gathered}\|(T_{\tau 1} f)^2\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,M)} \leqslant k_5 (\|A^0 R_{\tau 0}((1 - \xi_\tau) T_{\tau 1} f)\|_{W^l(\Omega^3)} + \\ + \|R_{\tau 0}((1 - \xi_\tau) T_{\tau 1} f)\|_{L_2(\Omega^3)}) \leqslant k_6 (\|T'_{\tau 0}((1 - \xi_\tau) T_{\tau 1} f)\|_{H_a^l(Q)} + \\ + \|R_{\tau 0}((1 - \xi_\tau) T_{\tau 1} f)\|_{H^0_{a+1-l-2m}(Q)}). \qquad (3.3.76)\end{gathered}$$

Из (3.3.76), компактности оператора $T'_{\tau 0} :\ \mathcal{H}_a^l(Q, M) \to H_a^l(Q)$ и компактности оператора вложения $H_a^{l+2m}(Q)$ в $H^0_{a+1-l-2m}(Q)$ следует, что оператор $(T_{\tau 1})^2 :\ \mathcal{H}_a^l(Q, M) \to \mathcal{H}_a^l(Q, M)$ — компактный. Таким образом, (3.3.74) можно переписать в виде

$$L_1 R' f = f + T' f,$$

где $(T')^2 :\ \mathcal{H}_a^l(Q, M) \to \mathcal{H}_a^l(Q, M)$ — компактный оператор. В силу теорем A.6, A.2 существует ограниченный оператор $R'' :\ \mathcal{H}_a^l(Q, M) \to \mathcal{H}_a^l(Q, M)$

такой, что $L_1R'R''=I+T_1$, где $T_1:\ \mathcal{H}_a^l(Q,M)\to\mathcal{H}_a^l(Q,M)$ — компактный оператор. Полагая $R=R'R''$, мы завершим доказательство. $\square$

Положим $\mathcal{H}_a^l(M)=\prod\limits_{i,\mu}H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(M_i)$.

Чтобы построить правый регуляризатор для оператора L, нам нужно также доказать существование «правого регуляризатора» R_1' для оператора L_1, определенного на функциях $f'\in\mathcal{H}_a^l(M)$ и обладающего следующими свойствами: $R_1'f'$ имеет носитель вблизи границы ∂Q для всех f' и $R_1'f'$ имеет носитель вблизи множества $\mathcal{K}_1$ для f' с носителем вблизи $\mathcal{K}_1$.

Лемма 3.3.9. *Пусть выполняются условия леммы* 3.3.5. *Тогда для всех* $\varkappa$, $\sigma>0$ *существует линейный ограниченный оператор* $R_1':\ \mathcal{H}_a^l(M)\to H_a^{l+2m}(Q)$ *и компактный оператор* $T_1':\ \mathcal{H}_a^l(M)\to\mathcal{H}_a^l(Q,M)$ *такие, что*

$$L_1R_1'f'=\{0,\ f'\}+T_1'f', \tag{3.3.77}$$

$$\operatorname{supp}R_1'f'\subset\overline{Q}\setminus Q_\sigma \tag{3.3.78}$$

для всех $f'\in\mathcal{H}_a^l(\partial Q)$ *и*

$$\operatorname{supp}R_1'f'\subset\mathcal{K}_1^{2\varkappa} \tag{3.3.79}$$

для всех $f'\in\mathcal{H}_a^l(\partial Q)$ *таких, что* $\operatorname{supp}f'\subset\overline{\mathcal{K}_1^{\varkappa}}$.

Доказательство. 1. Для любого фиксированного τ, $\quad 0<\tau<\chi_M^{-1}\,d/2$, мы можем найти χ_m', $\chi_m/2<\chi_m'<\chi_m$, функцию $\widehat{\xi}_\tau$, заданную по формулам (3.3.57), (3.3.58), и функции $\widehat{\xi}_\tau^j\in\dot{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$, $j=1,\ldots,J$, $J=J(\tau)$, образующие разбиение единицы $\overline{Q}$, подчиненное покрытию множествами $\mathcal{K}_1^{2\varkappa}$ и $B_{\varepsilon/2}(h^j)$, $j=1,\ldots,J$, где $h^j\in\overline{Q}\setminus\mathcal{K}_1^{2\varepsilon}$, $\varepsilon=\chi_m\tau/2$. В частности,

$$\widehat{\xi}_\tau(y)=1\qquad(y\in\mathcal{K}_1^{\varepsilon}). \tag{3.3.80}$$

В силу теоремы 3.1.2, существуют ограниченные операторы

$$R_{j0}':\ \{f'\in\mathcal{H}_a^l(M):\ \operatorname{supp}f'\subset B_{\varepsilon/2}(h^j)\}\to$$
$$\to\{u\in H_a^{l+2m}(Q):\ \operatorname{supp}u\subset B_\varepsilon(h^j)\}$$

и компактные операторы

$$T_{j0}':\ \{f'\in\mathcal{H}_a^l(M):\ \operatorname{supp}f'\subset B_{\varepsilon/2}(h^j)\}\to$$
$$\to\{f\in\mathcal{H}_a^l(Q,M):\ \operatorname{supp}f\subset B_\varepsilon(h^j)\}$$

такие, что

$$L_0R'_{j0}f' = \{0,\ f'\} + T'_{j0}f' \qquad (j=1,\ldots,\ J). \tag{3.3.81}$$

Для любого $f' \in \mathcal{H}_a^l(M)$, мы положим

$$R'_1f' = \widehat{\xi}_\tau u + \sum_j u^j, \tag{3.3.82}$$

где $u = R_1\{0,\ f'\}$, $u^j = R'_{j0}(\widehat{\xi}_\tau^j f')$.

Очевидно, свойство (3.3.78) выполняется при $2\varepsilon < \sigma$, в то время как свойство (3.3.79) выполняется при $2\varepsilon < 2\varkappa$ и $\varkappa + \varepsilon < 2\varkappa$, т. е. $\varepsilon = \chi_m\tau/2 < \min\{\sigma/2,\ \varkappa\}$.

2. Докажем соотношение (3.3.77).

Используя (3.3.20), (3.3.21) и формулу Лейбница, мы имеем

$$L_1R'_1f' = \widehat{\xi}_\tau L_1u + \{0,\ T_{t\mu}f'\} + Tu + \sum_j(L_0u^j + \{0,\ B^1_{t\mu}u^j\}), \tag{3.3.83}$$

где $t = t(\nu,\rho)$ таково, что $M_t \cap B_d(g_\nu) = (\gamma_{\nu\rho} \cap B_d) + g_\nu$, операторы $T_{t\mu}:\ \mathcal{H}_a^l(M) \to H_a^{l+2m-m_{t\mu}-1/2}(M_t)$ определены по формуле

$$(T_{t\mu}f')(y) = \sum_k \mathcal{T}_\zeta(U(\widehat{\xi}_\tau u))_k(y-g_\nu) \quad (y \in M_t \cap B_d(g_\nu)),$$

$$(T_{t\mu}f')(y) = 0 \qquad (y \in M_t \setminus B_d(g_\nu))$$

$$(\nu = 1,\ldots,\ N_1,\ \mu = 1,\ldots,\ m,\ \rho = 1,2);$$

$\zeta = (\rho,\ (\nu-1)m+\mu,\ k)$, операторы U и $\mathcal{T}_\zeta$ заданы по формулам (3.3.15) и (3.3.63) соответственно, $T:\ H_a^{l+2m-1}(Q) \to \mathcal{H}_a^l(Q,M)$ — ограниченный оператор.

В силу компактности вложения $H_a^{l+2m}(Q) \subset H_a^{l+2m-1}(Q)$ оператор $T:$ $H_a^{l+2m}(Q) \to \mathcal{H}_a^l(Q,M)$ — компактный.

Из леммы 3.3.8 и формул (3.3.81), (3.3.83) следует, что

$$L_1R'_1f' = \{0,\ f'\} + T'f' + \{0,\ T_{t\mu}f'\} + \sum_j\{0,\ B^1_{t\mu}u^j\}, \tag{3.3.84}$$

где $T':\ \mathcal{H}_a^l(M) \to \mathcal{H}_a^l(Q,M)$ — компактный оператор. Остается доказать, что операторы $T_{t\mu}:\ \mathcal{H}_a^l(M) \to H^{l+2m-m_{t\mu}-1/2}(M_t)$ и $B^1_{t\mu}R'_{j0}\widehat{\xi}_\tau^j:$ $H_a^{l+2m}(Q) \to H_a^{l+2m-m_{t\mu}-1/2}(M_t)$ — компактны.

3. Докажем, что оператор $T_{t\mu}$ — компактный.

В силу неравенства (3.3.67), леммы C.4, эквивалентности норм в подпространствах пространств $H_a^l(\theta_k)$ и $W^l(\theta_k)$, состоящих из функций с компактными носителями, обращающихся в нуль вблизи начала координат, и леммы 3.3.8, мы получим

$$\|T_{t\mu}f'\|_{H_a^{l+2m-m_{t\mu}-1/2}(M_t)} \leqslant k_1\|u\|_{H_a^{l+2m}(\Omega)} \leqslant k_2\big(\|A^0u\|_{W^l(\Omega^a)} + \|u\|_{L_2(\Omega^a)}\big) \leqslant \\ \leqslant k_3\big(\|T_1'\{0,\ f'\}\|_{H_a^l(Q)} + \|R_1\{0,\ f'\}\|_{H^0_{a+1-l-2m}(Q)}\big), \quad (3.3.85)$$

где $\Omega = \bigcup\limits_{\nu}(\Omega_\nu + g_\nu)$, $\Omega_\nu = \{y \in \theta_\nu :\ \varphi \in (d_{\nu 1}+\delta,\ d_{\nu 2}-\delta),\ r \in (\chi_m^2\tau/2\chi_M,\ \chi_M\tau)\}$, $\Omega^a = \big\{y \in Q:\ \rho(y,\Omega) < a\big\}$, $a > 0$ настолько мало, что $\overline{\Omega^a} \cap K = \varnothing$ и $\overline{\Omega^a} \cap \partial Q = \varnothing$, $T_1' :\ \mathcal{H}_a^l(Q,M) \to H_a^l(Q)$ — компактный оператор, заданный соотношением $A^0R_1f = f_0 + T_1'f$. Из компактности оператора T_1' и компактности оператора вложения $H_a^{l+2m}(Q)$ в $H^0_{a+1-l-2m}(Q)$, используя неравенство (3.3.85), мы получим компактность оператора $T_{t\mu} :\ \mathcal{H}_a^l(M) \to H_a^{l+2m-m_{t\mu}-1/2}(M_t)$.

4. Наконец, мы докажем, что оператор $B^1_{t\mu}R'_{j0}\widehat{\xi^j_\tau} :\ \mathcal{H}_a^l(M) \to H_a^{l+2m-m_{t\mu}-1/2}(M_t)$ — компактный.

Из определений оператора R'_{j0} и функций $\widehat{\xi^j_\tau}$ и из формул (3.3.6)–(3.3.8), (3.3.22) следует, что

$$\big\|B^1_{t\mu}R'_{j0}\,\widehat{\xi^j_\tau}\,f'\big\|_{H_a^{l+2m-m_{t\mu}-1/2}(M_t)} \leqslant k_3\big\|R^i_{j0}\,\widehat{\xi^j_\tau}\,f'\big\|_{H_a^{l+2m}(\Omega^2)},$$

ср. (3.3.75).

Тогда, используя (3.3.81), аналогично (3.3.85) мы выводим следующее неравенство:

$$\|B^1_{t\mu}\,R'_{j0}\,\widehat{\xi^j_\tau}\,f'\|_{H_a^{l+2m-m_{t\mu}-1/2}(M_t)} \leqslant k_4\big(\|T''_{j0}\,f'\|_{H_a^l(Q)} + \|R'_{j0}\,\widehat{\xi^j_\tau}\,f'\|_{H^0_{a+1-l-2m}(Q)}\big),$$

где $T''_{j0} :\ \mathcal{H}_a^l(M) \to H_a^l(Q)$ — компактный оператор, заданный соотношением $A^0R'_{j0}f' = T''_{j0}f'$. Поэтому, в силу компактности оператора вложения $H_a^{l+2m}(Q)$ в $H^0_{a+1-l-2m}(Q)$, оператор $B^1_{t\mu}R'_{j0}\widehat{\xi^j_\tau} :\ \mathcal{H}_a^l(M) \to H_a^{l+2m-m_{t\mu}-1/2}(M_t)$ — компактный. $\square$

Теперь мы можем доказать лемму 3.3.7.

Доказательство леммы 3.3.7. 1. Не ограничивая общности, предположим, что $A^1 = 0$ и $B^3 = 0$. Положим

$$\Phi = B^2 R_1 f, \qquad f = \{f_0,\ f'\} \in \mathcal{H}_a^l(Q, M). \tag{3.3.86}$$

Введем линейный ограниченный оператор $R: \ \mathcal{H}_a^l(Q, M) \to H_a^{l+2m}(Q)$ по формуле

$$Rf = R_1 f - R_1'\Phi + R_1' B^2 R_1' \Phi,$$

где R_1 и R_1' — операторы, возникающие в леммах 3.3.8 и 3.3.9 соответственно. Покажем, что R — искомый оператор.

Для простоты обозначим различные компактные операторы одной и той же буквой T.

Из лемм 3.3.8, 3.3.9 следует, что

$$ARf = A^0 Rf = A^0 R_1 f - A^0 R_1'(\Phi - B^2 R_1' \Phi) = f_0 + Tf \tag{3.3.87}$$

и

$$\begin{aligned}(B^0 + B^1)Rf = (f' + Tf) - (\Phi + T\Phi) + (B^2 R_1'\Phi + TB^2 R_1'\Phi) = \\ = f' - \Phi + b^2 R_1'\Phi + Tf.\end{aligned} \tag{3.3.88}$$

Напомним, что $A^1 = 0$. Применяя оператор B^2 к функции Rf и используя (3.3.86), мы получим

$$B^2 Rf = \Phi - B^2 R_1'\Phi + B^2 R_1' B^2 R_1'\Phi. \tag{3.3.89}$$

Суммируя соотношения (3.3.88), (3.3.89) и вспоминая, что $B^3 = 0$, мы получим

$$BRf = f' + Tf + B^2 R_1' B^2 R_1' \Phi. \tag{3.3.90}$$

2. Покажем, что

$$B^2 R_1' B^2 R_1' \Phi = 0. \tag{3.3.91}$$

Из соотношения (3.3.78) и леммы 3.3.9 следует, что

$$\operatorname{supp} R_1'\Phi \subset \overline{Q} \subset Q_\sigma.$$

Поэтому из неравенства (3.3.27) вытекает, что

$$\operatorname{supp} B^2 R_1'\Phi \subset \overline{\mathcal{K}_1^\varkappa}.$$

Далее, из соотношения (3.3.79) в лемме 3.3.9 следует, что

$$\operatorname{supp} R_1' B^2 R_1' \Phi \subset \mathcal{K}_1^{2\varkappa}.$$

Сочетание этого включения с неравенством (3.3.26) дает нам (3.3.91).

Соотношения (3.3.87), (3.3.90) и (3.3.91) доказывают теорему. $\square$

Разрешимость и индекс задачи (3.3.1), (3.3.2)

Рассмотрим линейные ограниченные операторы $L,\ L_1:\ H_a^{l+2m}(Q) \to \mathcal{H}_a^l(Q, M)$, соответствующие нелокальной задаче (3.3.1), (3.3.2). Другими словами, операторы L и L_1 заданы по формулам (3.3.28), где операторы $B_{i\mu}^1,\ B_{i\mu}^2,\ B_{i\mu}^3,\ B_{i\mu}$ и A^1 определены по формулам (3.3.9)–(3.3.12), и (3.3.23) соответственно.

Теорема 3.3.2. *Пусть выполняются условия* 3.1.1, 3.1.2 *и* 3.3.1. *Если* $K = \mathcal{K}$ *и* $\mathcal{K}_3 \neq \varnothing$, *мы также предполагаем, что выполняется условие* 3.2.4, *если* $\mathcal{K} \setminus K \neq \varnothing$, *мы предполагаем, что* $a > l + 2m - 1$.

Тогда оператор $L:\ H_a^{l+2m}(Q) \to \mathcal{H}_a^l(Q, M)$, *соответствующий нелокальной задаче* (3.3.1), (3.3.2), *— фредгольмов тогда и только тогда, когда прямая* $\operatorname{Im}\lambda = h = a + 1 - l - 2m$ *не содержит собственных значений оператор-функций* $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda),\ \lambda \mapsto \widehat{L}_{g0}(\lambda)$ $(g \in \mathcal{K}_2 \cap K)$ *и* $\lambda \mapsto \widehat{A}_g(\lambda),\ (g \in \mathcal{K}_3 \cap K)$. *Более того, если прямая* $\operatorname{Im}\lambda = h$ *не содержит собственных значений вышеупомянутых оператор-функций, то оператор* $L_1:\ H_a^{l+2m}(Q) \to \mathcal{H}_a^l(Q, M)$ *— фредгольмов и* $\operatorname{ind} L = \operatorname{ind} L_1$.

Доказательство. 1. Если прямая $\operatorname{Im}\lambda = h$ не содержит собственных значений оператор-функций $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda),\ \lambda \mapsto \widehat{L}_{g0}(\lambda)$ $(g \in \mathcal{K}_2 \cap K)$ и $\lambda \mapsto \widehat{A}_g(\lambda)$ $(g \in \mathcal{K}_3 \cap K)$. Тогда в силу теоремы 3.3.1 и лемм 3.3.1-–3.3.3 оператор $L:\ H_a^{l+2m}(Q) \to \mathcal{H}_a^l(Q, M)$, соответствующий задаче (3.3.1), (3.3.2), — фредгольмов. Более того, из следствия 3.3.1 следует, что оператор $L_1:\ H_a^{l+2m}(Q) \to \mathcal{H}_a^l(Q, M)$ — фредгольмов и $\operatorname{ind} L = \operatorname{ind} L_1$.

2. Пусть теперь оператор $L:\ H_a^{l+2m}(Q) \to \mathcal{H}_a^l(Q, M)$ — фредгольмов. Тогда из теоремы 3.3.1 и леммы 3.3.1 вытекает, что прямая $\operatorname{Im}\lambda = h$ не содержит собственных значений оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$. Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 3.2.2, мы заключаем, что

прямая $\operatorname{Im}\lambda = h$ не содержит собственных значений оператор-функций $\lambda \mapsto \widehat{L}_{g0}(\lambda)$ $(g \in \mathcal{K}_2 \cap K)$ и $\lambda \mapsto \widehat{A}_g(\lambda)$ $(g \in \mathcal{K}_3 \cap K)$. $\square$

Пример 3.3.1. Ср. пример 3.2.2. Рассмотрим нелокальную эллиптическую краевую задачу

$$-\Delta u(y) = f_0(y) \qquad (y \in Q), \tag{3.3.92}$$

$$\left.\begin{aligned} u(y)\big|_{M_i} - b_i u(y+h_i)\big|_{M_i} &= f_i(y) \quad (y \in M_i,\ i=1,2),\\ u(y)\big|_{M_j} &= f_j(y) \quad (y \in M_j,\ j=3,4). \end{aligned}\right\} \tag{3.3.93}$$

Здесь $Q \subset \mathbb{R}^2$ — область с границей $\partial Q \in C^\infty$, которая совпадает с границей квадрата $(0,\ 4/3)\times(0,\ 4/3)$ вне кругов $B_{1/8}((i4/3,\ j4/3))$ $(i, j = 0, 1)$, см. рис. 3.3.3; $b_1,\ b_2 \in \mathbb{R}$, $M_1 = \{y \in \partial Q:\ y_1 < 1/3,\ y_2 < 1/3\}$, $M_2 = \{y \in \partial Q:\ 1 < y_1,\ 1 < y_2\}$, $M_3 = (\partial Q \setminus (\overline{M_1} \cup \overline{M_2})) \cap \{y:\ y_2 < y_1\}$, $M_4 = (\partial Q \setminus (\overline{M_1} \cup \overline{M_2})) \cap \{y:\ y_1 < y_2\}$, $h_1 = (1,\ 1)$, $h_2 = (-1,\ -1)$. Множество $\mathcal{K}_1$ состоит из четырех точек $g_1 = (1/3,\ 0)$, $g_2 = (4/3,\ 1)$, $g_3 = (0,\ 1/3)$, $g_4 = (1,\ 4/3)$. Очевидно, $K = \mathcal{K} = \mathcal{K}_1$.

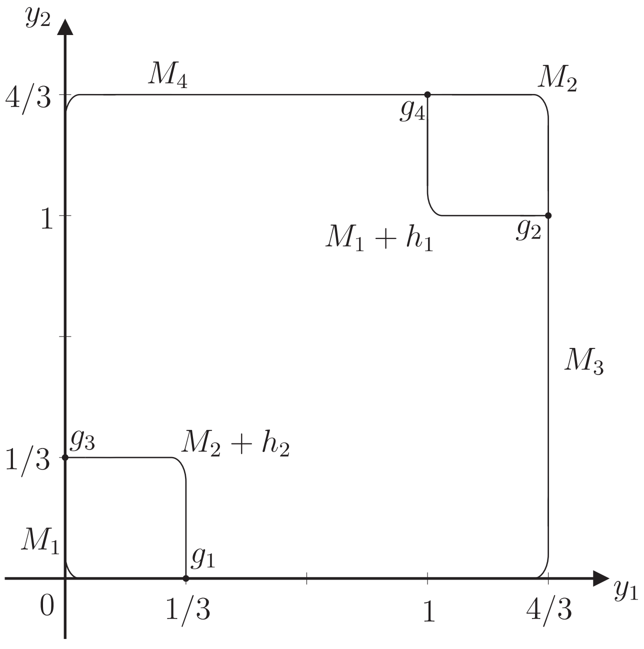

Рис. 3.3.3

Предположим, что $b_1 b_2 \neq 0$. Если $b_1 b_2 = 0$, мы приходим к примеру 3.2.2.

Оператор $L:\ H_a^2(Q)\to\mathcal{H}_a^0(Q,M)=H_a^0(Q)\times\prod\limits_{i=1}^{4}H_a^{3/2}(M_i)$, заданный по формуле (3.3.28) и соответствующий задаче (3.3.92), (3.3.93), имеет вид $Lu=\{-\Delta u,\, u(y)\big|_{M_i}-b_iu(y+h_i)\big|_{M_i},\, u(y)\big|_{M_j}\}$, $i=1,2$, $j=3,4$.

Введем изоморфизм $U:\ M_H\to\mathcal{M}_H$, заданный по формуле (3.3.15), где $N_1=4$, $d=1/8$, $\theta_1=\{y\in\mathbb{R}^2:\ 0<\varphi<\pi,\ 0<r\}$, $\theta_2=\{y\in\mathbb{R}^2:\ \pi/2<\varphi<3\pi/2,\ 0<r\}$, $\theta_3=\{y\in\mathbb{R}^2:\ -\pi/2<\varphi<\pi/2,\ 0<r\}$, и $\theta_4=\{y\in\mathbb{R}^2:\ \pi<\varphi<2\pi,\ 0<r\}$. Положим $V=Uu$ для $u\in M_H$, $V=(V_1,\dots,\, V_4)$. Записывая $V_i(y)$ в полярных координатах с началом в точке 0 и выбирая для каждого i, определенным образом, полярную ось и положительное направление для угла φ, мы видим, что для $u\in M_H$ задача (3.3.92), (3.3.93) принимает вид

$$-\Delta V_i(y)=f_{i0}(\varphi,\ r)\qquad (y\in\theta=\{(\varphi,\ r):\ 0<\varphi<\pi,\ 0<r,\ i=1,\dots,\ 4\}),\tag{3.3.94}$$

$$\left.\begin{aligned}
V_i(\varphi,\ r)\big|_{\varphi=0}&=f_{i1}(r)\quad (0<r,\ i=1,\dots,\ 4)\ ,\\
V_j(\varphi,\ r)\big|_{\varphi=\pi}-b_1V_{j+1}(\varphi-\pi/2,\ r)\big|_{\varphi=\pi}&=f_{j2}(r)\quad (0<r,\ j=3,4)\ ,\\
V_{j+1}(\varphi,\ r)\big|_{\varphi=\pi}-b_2V_j(\varphi-\pi/2,\ r)\big|_{\varphi=\pi}&=f_{j+1,2}(r)\quad (0<r,\ j=1,3)\ .
\end{aligned}\right\}\tag{3.3.95}$$

Определим оператор $\mathbf{L}:\ H_a^{2,4}(\theta)\to\mathcal{H}_a^{0,4}(\theta,\ \gamma)$, соответствующий задаче (3.3.94), (3.3.95), по формуле (3.3.29). Очевидно, оператор $\mathbf{L}$ имеет вид

$$\begin{aligned}\mathbf{L}v=\{-\Delta v_i,\ v_i(\varphi,\ r)\big|_{\varphi=0},\quad v_j(\varphi,\ r)\big|_{\varphi=\pi}-b_1v_{j+1}(\varphi-\pi/2,\ r)\big|_{\varphi=\pi},\\
v_{j+1}(\varphi,\ r)\big|_{\varphi=\pi}-b_2v_j(\varphi-\pi/2,\ r)\big|_{\varphi=\pi}\},\quad i=1,\dots,\ 4,\ j=1,3.\end{aligned}$$

Здесь $H_a^{k,4}(\theta)=\prod\limits_{i=1}^{4}H_a^k(\theta)$, $\mathcal{H}_a^{0,4}(\theta,\gamma)=H_a^{0,4}(\theta)\times\prod\limits_{i=1}^{4}\prod\limits_{\rho=1,2}H_a^{3/2}(\gamma_\rho)$, $\gamma_1=\{(\varphi,\ r):\ \varphi=0,\ 0<r\}$, $\gamma_2=\{(\varphi,\ r):\ \varphi=\pi,\ 0<r\}$, $v=(v_1,\dots,\ v_4)$.

Переходя в (3.3.94), (3.3.95), к координатам $\tau = \ln r$ и φ и делая преобразование Фурье по τ, мы получим

$$-\frac{d^2\widehat{V}_i}{d\varphi^2} + \lambda^2\widehat{V}_i = \widehat{F}_{i0}(\varphi,\ \lambda) \qquad (0 < \varphi < \pi,\ i = 1, \ldots,\ 4), \tag{3.3.96}$$

$$\left.\begin{aligned} \widehat{V}_i\big|_{\varphi=0} &= \widehat{f}_{i1}(\lambda) \qquad && (i = 1, \ldots,\ 4), \\ \widehat{V}_j\big|_{\varphi=\pi} - b_1\widehat{V}_{j+1}\big|_{\varphi=\pi/2} &= \widehat{f}_{j2}(\lambda) && (j = 1, 3), \\ \widehat{V}_{j+1}\big|_{\varphi=\pi} - b_2\widehat{V}_j\big|_{\varphi=\pi/2} &= \widehat{f}_{j+1,2}(\lambda) && (j = 1, 3), \end{aligned}\right\} \tag{3.3.97}$$

где $F_{i0}(\varphi,\ \tau) = e^{2\tau} f_{i0}(\varphi,\ \tau)$, $\widehat{F}_{i0}(\varphi,\ \lambda)$ — преобразование Фурье функции $F_{i0}(\varphi,\ \tau)$ по τ.

Определим оператор-функцию $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda) \subset \mathcal{B}(W^{2,4}(0,\ \pi), \mathcal{W}^{0,4}[0, \pi])$, соответствующую задаче (3.3.96), (3.3.97) по формуле (3.3.30). Эта оператор-функция имеет вид

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)w = \{-w_i'' + \lambda^2 w_i,\ w_i\big|_{\varphi=0},\ w_j\big|_{\varphi=\pi} - b_1 w_{j+1}\big|_{\varphi=\pi/2}, \\ w_{j+1}\big|_{\varphi=\pi} - b_2 w_j\big|_{\varphi=\pi/2}\}, \qquad i = 1, \ldots,\ 4,\ j = 1, 3. \end{aligned}$$

Здесь $W^{2,4}(0,\pi) = \prod\limits_{i=1}^{4} W^2(0,\ \pi)$, $\mathcal{W}^{0,4}[0,\ \pi] = \prod\limits_{i=1}^{4} L_2(0,\ \pi) \times \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4$, $w = (w_1, \ldots,\ w_4)$.

Собственные значения оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$ являются собственными значениями однородной краевой задачи (3.3.96), (3.3.97). В силу симметрии задачи (3.3.96), (3.3.97) число $\lambda = \lambda_0$ является собственным значением оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$ тогда и только тогда, когда оно является собственным значением следующей задачи:

$$-w_i''(\varphi) + \lambda^2 w_i(\varphi) = 0 \qquad (0 < \varphi < \pi,\ i = 1, 2), \tag{3.3.98}$$

$$\left.\begin{aligned} w_i\big|_{\varphi=0} = 0 \qquad (i = 1, 2), \\ w_1\big|_{\varphi=\pi} - b_1 w_2\big|_{\varphi=\pi/2} = 0,\ w_2\big|_{\varphi=\pi} - b_2 w_1\big|_{\varphi=\pi/2} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.3.99}$$

Если $\lambda \neq 0$, то общее решение системы (3.3.98) имеет вид

$$w_1(\varphi) = c_1 e^{\lambda\varphi} + c_2 e^{-\lambda\varphi},\ w_2(\varphi) = c_3 e^{\lambda\varphi} + c_4 e^{-\lambda\varphi}. \tag{3.3.100}$$

Подставляя (3.3.100) в нелокальные краевые условия (3.3.99), мы получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{aligned} c_1 + c_2 = 0, \qquad c_3 + c_4 = 0,\\ c_1 z^2 + c_2 z^{-2} - c_3 b_1 z - c_4 b_1 z^{-1} = 0,\\ -c_1 b_2 z - c_2 b_2 z^{-1} + c_3 z^2 + c_4 z^{-2} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{3.3.101}$$

где $z = e^{\lambda\pi/2}$. Определитель матрицы системы (3.3.101) равен $\Delta(\lambda) = -(z - z^{-1})^2((z + z^{-1})^2 - b_1 b_2)$. Собственные значения задачи (3.3.98), (3.3.99) являются нулями $\Delta(\lambda)$, $\lambda \neq 0$.

1. Если $z - z^{-1} = 0$, то $e^{\pi\lambda} = 1$. Следовательно, мы получаем последовательность собственных значений вида $\lambda_m = i2m$ $(m = \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Если $\lambda = 0$, то общее решение системы уравнений (3.3.98) можно представить в виде $w_1(\varphi) = c_1 + c_2\varphi$, $w_2(\varphi) = c_3 + c_4\varphi$. Подставляя это решение в (3.3.99), мы имеем

$$\left.\begin{aligned} c_1 = 0, \qquad c_3 = 0,\\ c_1 + c_2\pi - c_3 b_1 - c_4 b_1 \pi/2 = 0,\\ -c_1 b_1 - c_2 b_2 \pi/2 + c_3 + c_4\pi = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.3.102}$$

Определитель системы уравнений (3.3.102) равен $\Delta(0) = \pi^2(b_1 b_2/4 - 1)$. Очевидно, $\Delta(0) = 0$ тогда и только тогда, когда $b_1 b_2 = 4$. Поэтому окончательно мы получим следующие последовательности собственных значений:

$$\lambda_m = i2m \; (m = \pm 1, \; \pm 2, \ldots) \quad \text{для} \quad b_1 b_2 \neq 4, \tag{3.3.103}$$

$$\lambda_m = i2m \; (m = 0, \; \pm 1, \; \pm 2, \ldots) \quad \text{для} \quad b_1 b_2 = 4. \tag{3.3.104}$$

2. Пусть $(z + z^{-1})^2 - b_1 b_2 = 0$. В этом случае $z + z^{-1} = \pm\sqrt{b_1 b_2}$, что означает либо

$$z^2 - \sqrt{b_1 b_2}\, z + 1 = 0, \tag{3.3.105}$$

либо

$$z^2 + \sqrt{b_1 b_2}\, z + 1 = 0. \tag{3.3.106}$$

Уравнения (3.3.105), (3.3.106) имеют корни $z_1^{\pm} = \frac{\sqrt{b_1 b_2}}{2} \pm \frac{\sqrt{b_1 b_2 - 4}}{2}$, $z_2^{\pm} = -\frac{\sqrt{b_1 b_2}}{2} \pm \frac{b_1 b_2 - 4}{2}$ соответственно. Очевидно, $z_1^{+} = -z_2^{-}$, $z_1^{-} = -z_2^{+}$.

2a. Если $b_1 b_2 \geqslant 4$, то $z_1^{\pm}$ и $z_2^{\pm}$ — вещественные и $z_1^{\pm} > 0$, $\quad z_2^{\pm} < 0$. Поэтому уравнения

$$e^{\lambda\pi/2} = z_1^{\pm}, \tag{3.3.107}$$

$$e^{\lambda\pi/2} = z_2^{\pm} \tag{3.3.108}$$

дают две последовательности собственных значений:

$$\lambda_p^{\pm} = \frac{2}{\pi} \ln z_1^{\pm} + i4p \qquad (p = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots),$$
$$\lambda_q^{\pm} = \frac{2}{\pi} \ln z_1^{\mp} + i(4q + 2) \qquad (q = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots).$$

Эти собственные значения можно представить в виде одной последовательности

$$\lambda_p^{\pm} = \frac{2}{\pi} \ln z_1^{\pm} + i2p \qquad (p = 0,\ \pm 1,\ \pm, \ldots). \tag{3.3.109}$$

2b. Если $0 < b_1 b_2 < 4$, то $z_1^{\pm}$ и $z_2^{\pm}$ не являются вещественными и

$$z_1^{\pm} = \frac{\sqrt{b_1 b_2}}{2} \pm i \frac{\sqrt{4 - b_1 b_2}}{2}, \quad z_2^{\pm} = -\frac{\sqrt{b_1 b_2}}{2} \pm i \frac{\sqrt{4 - b_1 b_2}}{2}.$$

Очевидно, $|z_1^{\pm}| = |z_2^{\pm}| = 1$. Следовательно, уравнения (3.3.107) и (3.3.108) дают нам

$$\lambda_p^{\pm} = i(\pm \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{4(b_1 b_2)^{-1}} + 4p) \qquad (p = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots),$$
$$\lambda_q^{\pm} = i(\pm \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{4(b_1 b_2)^{-1} - 1} + 4p + 2) \qquad (q = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots)$$

соответственно. Можно представить эти собственные значения в виде одной последовательности:

$$\lambda_p^{\pm} = i(\pm \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{4(b_1 b_2)^{-1} - 1} + 2p) \quad (p = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots). \tag{3.3.110}$$

2c. Если $b_1 b_2 < 0$, то $z_1^{\pm}$, $z_2^{\pm}$ — чисто мнимые и

$$z_1^{\pm} = i(\frac{\sqrt{-b_1 b_2}}{2} \pm \frac{\sqrt{4 - b_1 b_2}}{2}),$$
$$z_2^{\pm} = i(-\frac{\sqrt{-b_1 b_2}}{2} \pm \frac{\sqrt{4 - b_1 b_2}}{2}).$$

Уравнения (3.3.107), (3.3.108) дают нам

$$\lambda_p^{\pm} = \frac{2}{\pi}\ln\left|\frac{\sqrt{-b_1b_2}}{2} \pm \frac{\sqrt{4-b_1b_2}}{2}\right| + i(4p+1) \quad (p = 0,\ \pm1,\ \pm2,\dots), \tag{3.3.111}$$

$$\lambda_q^{\pm} = \frac{2}{\pi}\ln\left|\frac{\sqrt{-b_1b_2}}{2} \pm \frac{\sqrt{4-b_1b_2}}{2}\right| + i(4p\mp1) \quad (q = 0,\ \pm1,\ \pm2,\dots). \tag{3.3.112}$$

Легко видеть, что $|\frac{\sqrt{-b_1b_2}}{2} \pm \frac{\sqrt{4-b_1b_2}}{2}| \neq 1$. Поэтому все собственные значения $\lambda_p^{\pm}$, $\lambda_q^{\pm}$ имеют нетривиальные вещественные части. Представим собственные значения в виде

$$\lambda_p^{\pm} = \frac{2}{\pi}\ln\left|\frac{\sqrt{-b_1b_2}}{2} \pm \frac{\sqrt{4-b_1b_2}}{2}\right| + i(2p+1) \quad (p = 0,\ \pm1,\ \pm2,\dots). \tag{3.3.113}$$

В силу теоремы 3.3.2 оператор $L:\ H_a^2(Q) \to \mathcal{H}_a^0(Q, M)$ — фредгольмов тогда и только тогда, когда прямая $\operatorname{Im}\lambda = a-1$ не содержит собственных значений оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$. Таким образом, необходимые и достаточные условия того, что оператор L — фредгольмов, следующие: a) если $b_1b_2 \geqslant 4$, то $a \neq 2p+1$ $(p = 0,\ \pm1,\ \pm2,\dots)$, b) если $0 < b_1b_2 < 4$, то $a \neq \pm\frac{2}{\pi}\sqrt{4(b_1b_2)^{-1}-1} + 2q + 1$ $(q = 0,\ \pm1,\ \pm2,\dots)$, и $a \neq 1+2p$ $(p = \pm1, \pm2, \dots)$, c) если $b_1b_2 < 0$, то $a \neq m+1$ $(m = \pm1,\ \pm2,\dots)$.

Библиографические примечания к главе 3

Фредгольмова разрешимость локальных эллиптических задач в ограниченных областях с угловыми или коническими точками в весовых пространствах рассматривалась в статье [18]. Разрешимость локальных эллиптических задач в ограниченных областях с ребрами в весовых пространствах исследовалась в работах [22,25]. Нелокальные эллиптические задачи в ограниченных областях в весовых пространствах Кондратьева в случае подхода носителей нелокальных членов к границе рассматривались в статьях [11,29,30]. Подробное изложение этой теории, включая случай подхода носителей нелокальных членов к точкам сопряжения при $n \geqslant 3$, содержится в монографии [32]. Там же можно найти обзор литературы. Вопросы разрешимости в пространствах Соболева и гладкости обобщенных решений нелокальных эллиптических краевых задач изучались в работах [29, 31, 46–48, 51, 52].

Задачи к главе 3

1. Рассмотрим уравнение Пуассона в ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^2$ с конечным числом угловых точек и условием Дирихле на границе ∂Q. Положим $K^1 = \mathcal{K}_1$ и $K^2 = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$, где $\mathcal{K}_2 \neq \varnothing$. Пусть $L_0^j : \ H_a^2(Q) \to \mathcal{H}_a^0(Q, M)$ — оператор вида (3.1.5), соответствующий рассматриваемой локальной задаче для $H_a^2(Q) = H_a^2(Q, K^j)$, $H_a^{3/2}(M_i) = H_a^{3/2}(M_i, K^j) \quad (j = 1, 2)$. Построить пример области Q и чисел $a \in \mathbb{R}$ таких, что оператор L_0^1 — фредгольмов, а оператор L_0^2 не является фредгольмовым.

2. Сохраняя обозначения задачи 1, построить пример области Q с негладкой границей такой, что операторы L_0^1 и L_0^2 фредгольмовы или нет одновременно для всех $a \in \mathbb{R}$.

3. Рассмотрим уравнение Пуассона в ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^2$ и в $Q \backslash \mathcal{K}_3$ с конечным числом угловых точек и условием Дирихле на границе ∂Q. Положим $K^1 = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$ и $K^2 = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3$, где $\mathcal{K}_3 \neq \varnothing$. Пусть $L_0^j : \ H_a^3(Q) \to \mathcal{H}_a^1(Q, M)$ — оператор вида (3.1.5), соответствующий рассматриваемой локальной задаче, для $H_a^k(Q) = H_a^k(Q, K^j)$, $H_a^{5/2}(M_i) = H_a^{5/2}(M_i, K^j) \quad (j = 1, 2)$. Построить пример области Q и чисел $a \in \mathbb{R}$ таких, что оператор L_0^1 — фредгольмов, а оператор L_0^2 не является фредгольмовым.

4. Рассмотрим уравнение Пуассона в ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^2$ с конечным числом угловых точек и условием Неймана на границе ∂Q. Положим $K^1 = \mathcal{K}_1$ и $K^2 = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$, где $\mathcal{K}_2 \neq \varnothing$. Пусть $L_0^j : \ H_a^2(Q) \to \mathcal{H}_a^0(Q, M)$ — оператор вида (3.1.5), соответствую-

щий рассматриваемой локальной задаче, для $H_a^2(Q) \to H_a^2(Q, K^j)$, $H_a^{3/2}(M_i) = H_a^{3/2}(M_i, K^j) \quad (j = 1, 2)$. Построить пример области Q и чисел $a \in \mathbb{R}$ таких, что оператор L_0^1 — фредгольмов, а оператор L_0^2 не является фредгольмовым.

5. Рассмотрим уравнение Пуассона в ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^2$ с конечным числом угловых точек и условием Неймана на границе ∂Q. Положим $K^1 = \mathcal{K}_1$ и $K^2 = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$, где $\mathcal{K}_2 \neq \varnothing$. Пусть $L_0^j : \ H_a^4(Q) \to \mathcal{H}_a^2(Q, M)$ — оператор вида (3.1.5), соответствующий рассматриваемой локальной задаче, для $H_a^k(Q) = H_a^k(Q, K^j)$, $H_a^{7/2}(M_i) = H_a^{7/2}(M_i, K^j) \quad (j = 1, 2)$. Построить пример области Q с негладкой границей такой, что операторы L_0^1 и L_0^2 одновременно фредгольмовы или нет для всех $a \in \mathbb{R}$.

6. Доказать, что правый регуляризатор $R_0 : \ \mathcal{H}_a^l(Q, M) \to H_a^{l+2m}(Q)$ оператора $L : \ H_a^{l+2m}(Q) \to \mathcal{H}_a^l(Q, M)$, построенный в лемме 3.1.2, будет также и левым регуляризатором оператора L.

7. Доказать лемму 3.1.3.

8. Доказать лемму 3.1.4.

9. Доказать, что при $n \geqslant 3$ правый регуляризатор $R_0 : \ \mathcal{H}_a^l(Q, M) \to H_a^{l+2m}(Q)$ оператора $L : \ H_a^{l+2m}(Q) \to \mathcal{H}_a^l(Q, M)$, построенный в лемме 3.1.4, будет также и левым регуляризатором оператора L.

10. Рассмотрим уравнение Пуассона в ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^2$ с двумя угловыми точками и нелокальными условиями вида (3.2.12), являющимися нелокальными возмущениями условий Дирихле. Положим $K' = \mathcal{K}_1$, $K = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$, где $\mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3 \neq \varnothing$. Пусть L, L_0 : $H_a^2(Q) \to \mathcal{H}_a^0(Q, M)$ — операторы вида (3.2.8), соответствующие нелокальной задаче и локализованной задаче, для $H_a^2(Q) = H_a^2(Q, K)$, $H_a^{3/2}(M_i) = H_a^{3/2}(M_i, K)$ а $L_0' : \ H_a^2(Q) \to \mathcal{H}_a^0(Q, M)$ — оператор, соответствующий локализованной задаче, для $H_a^2(Q) = H_a^2(Q, K')$, $H_a^{3/2}(M_i) = H_a^{3/2}(M_i, K')$. Построить примеры области Q нелокаль-

ных условий (3.2.12), удовлетворяющих условиям 3.2.4, 3.2.5, и чисел $a \in \mathbb{R}$ таких, что оператор L_0' — фредгольмов, и таких, что операторы L_0', L_0, L — фредгольмовы одновременно.

11. Рассмотрим уравнение Пуассона в ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^2$ с двумя угловыми точками и нелокальными условиями вида (3.2.12), являющимися нелокальными возмущениями условий Неймана. Сохраняя обозначения задачи 10, построить примеры области Q, нелокальных условий (3.2.12), удовлетворяющих условиям 3.2.4, 3.2.5 и множества $A \subset \mathbb{R}$ таких, что операторы L_0', L_0, L — фредгольмовы одновременно для всех $a \in A$.

12. Рассмотрим уравнение Пуассона в ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^2$ с двумя угловыми точками и нелокальными условиями вида (3.3.2), являющимися нелокальными возмущениями условий Дирихле. Пусть $S_i = 1 \quad (i = 1, 2)$, и пусть $\omega_{i1}(g_{ij}) = g_{ij} \quad (i, j = 1, 2)$. Тогда $K = \mathcal{K} = \mathcal{K}_1$. Определим операторы $L, L_0 : H_a^2(Q) \to \mathcal{H}_a^0(Q, M)$ по формулам (3.3.28). Построить пример области Q нелокальных условий (3.3.2), удовлетворяющих условию 3.3.1, и чисел $a \in \mathbb{R}$ таких, что оператор L_0 — фредгольмов, а оператор L не является фредгольмовым, а также пример, когда оператор L — фредгольмов, а оператор L_0 не является фредгольмовым.

13. Сохраняя обозначения и постановку задачи 12, исследовать случай нелокальных возмущений задачи Неймана.

14. Построить пример оператора $B_{i\mu}^2$ с распределенным носителем, удовлетворяющим условию 3.2.2.

15. Построить пример оператора $B_{i\mu}^1$ с распределенным носителем, удовлетворяющим условию 3.3.2.

16. Сохраняя обозначения и условия задачи 12, построить пример, когда для любой правой части $f_0 \in L_2(Q)$ уравнения Пуассона и однородных нелокальных условий вида (3.3.2) обобщенное решение нело-

кальной задачи $u \in W^1(Q)$ принадлежит пространству $W^2(Q)$ независимо от раствора углов θ_i с вершинами в точках g_{i1} $(i = 1, 2)$.

17. Сохраняя обозначения и условия задачи 12, построить пример, когда для углов θ_i раствора π и сколь угодно малых коэффициентов в нелокальных членах существуют правая часть уравнения Пуассона $f_0 \in L_2(Q)$ и соответствующее обобщенное решение нелокальной задачи $u \in W^1(Q)$ такие, что $u \notin W^2(Q)$.

Темы курсовых работ к главе 3

1. Получить необходимые и достаточные условия на коэффициенты $b_i \in \mathbb{R}$, при выполнении которых для любой функции $f_0 \in L_2(Q)$ обобщенное решение $u \in W^1(Q)$ задачи (3.3.92), (3.3.93) принадлежит пространству $W^2(Q)$.

2. Вычислить индекс оператора $L : H_a^2(Q) \to \mathcal{H}_a^0(Q, M)$, соответствующего нелокальной эллиптической задаче (3.3.92), (3.3.93) для различных коэффициентов $b_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$.

3. Получить априорную оценку решений нелокальной эллиптической задачи в ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$ с конечным числом конических точек в случае, когда носители нелокальных членов в окрестности множества конических точек принадлежат внутренним конусам.

4. Построить левый регуляризатор оператора $L : H_a^{l+2m}(Q) \to \mathcal{H}_a^l(Q, M)$, соответствующего нелокальной эллиптической краевой задаче (3.2.1), (3.2.2).

5. Обобщить теорему 3.2.1 на случай ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, с конечным числом ребер.

6. Построить левый регуляризатор оператора $L : H_a^{l+2m}(Q) \to \mathcal{H}_a^l(Q, M)$, соответствующего нелокальной эллиптической краевой задаче (3.3.24), (3.3.25).

7. Построить правый (левый) регуляризатор оператора, соответствующего нелокальной эллиптической задаче в ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^n, \quad n \geqslant 3$, с конечным числом конических точек в случае выполнения условий темы 3.

8. Найти асимптотическое представление решений в весовых пространствах Кондратьева нелокальной эллиптической задачи (3.3.1), (3.3.2).

9. Решить численно (без обоснования) нелокальную эллиптическую задачу типа (3.3.1), (3.3.2).

Нерешенные задачи к главе 3

1. Исследовать разрешимость и поведение решений нелокальных эллиптических краевых задач вблизи точек сопряжения в случае касательного подхода к границе носителей нелокальных членов.

2. Исследовать вопрос о существенности условий тривиальности ядра и коядра модельного оператора с параметром на единичной сфере, соответствующего нелокальной эллиптической задаче в многомерной ограниченной области, для фредгольмовой разрешимости этой задачи.

3. Исследовать влияние больших коэффициентов в нелокальных членах на повышение гладкости обобщенных решений нелокальных эллиптических краевых задач.

4. Исследовать разрешимость и поведение решений вблизи точек сопряжения нелокальных эллиптических краевых задач в ограниченной многомерной области в случае, когда нарушается условие Карлемана.

5. Исследовать разрешимость и поведение решений вблизи точек сопряжения нелокальных эллиптических краевых задач в ограниченной многомерной области в случае, когда граница многообразия, на которой задаются граничные краевые условия, пересекается, но не

совпадает с границей многообразия, на котором задаются нелокальные члены.

6. Исследовать разрешимость и асимптотическое поведение решений вблизи точек сопряжения нелокальных эллиптических краевых задач в весовых пространствах Гёльдера.

Глава 4

Приложения к теории многомерных диффузионных процессов

4.1. Определения и вспомогательные результаты

Полугруппы Феллера

Пусть X — замкнутое линейное подпространство в $C(\overline{Q})$, содержащее хотя бы одну нетривиальную неотрицательную функцию, где $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial Q \in C^\infty$, $n \geqslant 2$.

Следуя терминологии, принятой в аналитической теории многомерных диффузионных процессов, мы дадим следующие определения.

Определение 4.1.1. Линейный ограниченный оператор $T : X \to X$ называется *неотрицательным*, если $Tf \geqslant 0$ для любой $f \in X$ такой, что $f \geqslant 0$.

Определение 4.1.2. Семейство $\{T_t\}_{t \geqslant 0}$ ограниченных линейных операторов, действующих из X в X, называется *полугруппой Феллера* (или сжимающей неотрицательной полугруппой) на X, если оно удовлетворяет следующим условиям:

Условие 4.1.1. $T_{t+s} = T_t T_s \quad (t, s \geqslant 0); \quad T_0 = I.$

Условие 4.1.2. $\{T_t\}$ сильно непрерывна в 0: $\lim_{t\to 0+0} \|T_t f - f\|_{C(\overline{Q})} = 0$ $(f \in X)$.

Условие 4.1.3. $\|T_t\| \leqslant 1 \quad (t \geqslant 0)$, и операторы $T_t : X \to X$ — неотрицательны $(t \geqslant 0)$.

Определение 4.1.3. Линейный оператор $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset X \to X$ называется *инфинитезимальным производящим оператором* полугруппы $\{T_t\}_{t \geqslant 0}$, если

$$\mathcal{A}u = \lim_{t\to 0+0} \frac{T_t u - u}{t} \quad (u \in \mathcal{D}(\mathcal{A})), \tag{4.1.1}$$

$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{u \in X : \text{ предел (4.1.1) существует в } X\}$.

Сформулируем теперь один из вариантов теоремы Хилле—Иосиды, который наиболее удобен нам для дальнейшего использования (см. [53], гл. 9, § 9.3).

Теорема 4.1.1 (Хилле—Иосида.)**.** 1. *Пусть* $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ — *полугруппа Феллера из* X *в* X, *и пусть* $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset X \to X$ — *ее инфинитезимальный производящий оператор. Тогда:*

(a) *Область определения* $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ *всюду плотна в* X.

(b) *Для любого* $\lambda > 0$ *оператор* $\lambda I - \mathcal{A}$ *имеет ограниченный обратный* $(\lambda I - \mathcal{A})^{-1} : X \to X$ *с нормой* $\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| \leqslant 1/\lambda$.

(c) *Для любого* $\lambda > 0$ *оператор* $(\lambda I - \mathcal{A})^{-1} : X \to X$ *неотрицателен.*

2. *Обратно, если* $\mathcal{A}$ — *линейный оператор, отображающий* X *в себя и удовлетворяющий условию (a), причём существует константа* $\lambda_0 \geqslant 0$ *такая, что для всех* $\lambda > \lambda_0$ *выполнены условия (b), (c), то* $\mathcal{A}$ — *инфинитезимальный производящий оператор полугруппы Феллера* $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ *из* X *в* X, *которая однозначно определяется оператором* $\mathcal{A}$.

Эллиптические операторы

Рассмотрим неограниченный интегро-дифференциальный оператор $A : \mathcal{D}(A) \subset C(\overline{Q}) \to C(\overline{Q})$ вида

$$Au = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i x_j}(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)u_{x_i}(x) + a(x)u(x) - \\ - \int_{\overline{Q}} [u(x) - u(y)]m(x, dy) \quad (x \in Q) \quad (4.1.2)$$

с областью определения $\mathcal{D}(A) = \{u \in C^2(Q) \cap C(\overline{Q}) : Au \in C(\overline{Q})\}$. Здесь a_{ij}, a_i, a — вещественнозначные функции, $a_{ij} = a_{ji}$, $m(x, \cdot)$ — неотрицательная борелевская мера на $\overline{Q}$.

Обозначим

$$A_0 u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i x_j}(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)u_{x_i}(x) + a(x)u(x),$$

$$A_1 u = -\int_{\overline{Q}} [u(x) - u(y)]m(x, dy), \; A_2 u = \int_{\overline{Q}} u(y)m(x, dy).$$

Обозначим через $C^{k+\sigma}(Q)$ множество функций, принадлежащих пространству Гёльдера $C^{k+\sigma}(\overline{G})$ для любой области $G \subset \mathbb{R}^n$ такой, что $\overline{G} \subset Q$, где $k \geqslant 0$ — целое, $0 < \sigma < 1$.

Пространство Гёльдера $C^{k+\sigma}(\partial Q)$ определяется с помощью разбиения единицы и локального распрямления границы.

Хорошо известно, что $C^{k+\sigma}(\overline{Q})$ и $C^{k+\sigma}(\partial Q)$ — банаховы пространства. Операторы вложения $C^{k+\sigma}(\overline{Q})$ в $C^{k}(\overline{Q})$ и $C^{k+\sigma}(\partial Q)$ в $C^{k}(\partial Q)$ — вполне непрерывны.

Мы будем предполагать, что $a_{ij} \in C^{1+\sigma}(\overline{Q})$ и $a_i, a \in C^{\sigma}(\overline{Q})$.

Предположим также, что выполнены следующие условия:

Условие 4.1.4. $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j > 0$, $a(x) \leqslant 0$ для всех $x \in \overline{Q}$ и $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$.

Условие 4.1.5. Линейный оператор $A_2 : C^{s+\sigma}(\overline{Q}) \to C^{s+\sigma}(\overline{Q})$ — ограниченный, где $s = \max\{0, k-2\}$, $k \geqslant 0$ — некоторое фиксированное целое число.

Замечание 4.1.1. Из условия 4.1.5 следует, что $c_m = \sup\limits_{x \in \overline{Q}} m(x, \overline{Q}) < \infty$. Более того, $m(x, \overline{Q}) \in C^{s+\sigma}(\overline{Q})$.

Замечание 4.1.2. В силу замечания 4.1.1

$$\|A_2 u\|_{C(\overline{Q})} \leqslant c_m \|u\|_{C(\overline{Q})} \quad (u \in C^{s+\sigma}(\overline{Q})).$$

Таким образом, оператор A_2 может быть расширен до ограниченного оператора, действующего из $C(\overline{Q})$ в себя. Это расширение оператора A_2 будем также обозначать A_2. Через $\|A_2\|$ мы будем обозначать норму оператора $A_2 : C(\overline{Q}) \to C(\overline{Q})$. Очевидно, $\|A_2\| = c_m$.

Лемма 4.1.1. *Пусть выполнены условия* 4.1.4, 4.1.5.

Тогда оператор $A : \mathcal{D}(A) \subset C(\overline{Q}) \to C(\overline{Q})$ имеет замыкание $\overline{A}$. Если $u \in \mathcal{D}(\overline{A})$ и функция $u(x)$ достигает положительного максимума в точке $x^0 \in Q$, то $\overline{A}u(x^0) \leqslant 0$.

Доказательство. Из условия 4.1.4 и леммы 1, [5] следует, что оператор A_0 имеет замыкание $\overline{A_0}$ и, если $u \in \mathcal{D}(\overline{A_0})$ достигает положительного максимума в точке $x^0 \in Q$, то $\overline{A_0}u(x^0) \leqslant 0$. В силу замечаний 4.1.1 и 4.1.2 оператор $A = A_0 + A_1$ имеет замыкание $\overline{A} = \overline{A_0} + A_1$ и $\mathcal{D}(\overline{A}) = \mathcal{D}(\overline{A_0})$.

С другой стороны, если $u \in \mathcal{D}(\overline{A})$ достигает положительного максимума в точке $x^0 \in Q$, то

$$\overline{A}u(x^0) = \overline{A_0}u(x^0) - \int\limits_{\overline{Q}} (u(x^0) - u(y))m(x^0, dy) \leqslant 0. \qquad \square$$

Замечание 4.1.3. Очевидно, что любое сужение $\overline{A}$ также имеет замыкание в $C(\overline{Q})$.

Нелокальные условия для диффузионных процессов

Предположим, что в некоторой окрестности U каждой точки $x^0 \in \partial Q$ определено бесконечно дифференцируемое, невырожденное преобразование координат $x \to t = t(x)$ такое, что:

(a) $U \cap Q = \{x \in U: \ t_n(x) > 0\}$;

(b) $U \cap \partial Q = \{x \in U: \ t_n(x) = 0\}$;

(c) $t_i(x^0) = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$;

(d) функции $t_1, \dots, t_n$ могут быть продолжены как функции из C^∞ на $\mathbb{R}^n$ так, что $t_n(x) + \sum\limits_{i=1}^{n-1} t_i^2(x) > 0$ для $x \in \overline{Q} \setminus \{x_0\}$.

Следующая теорема описывает нелокальные условия, которым должны удовлетворять функции класса $C^2(\overline{Q})$, принадлежащие области определения инфинитезимального производящего оператора полугруппы Феллера. Для эллиптического дифференциального оператора эта теорема была впервые доказана [5]. Обобщение на случай эллиптического интегро-дифференциального оператора, которое приводится ниже, можно найти, например, в [53, гл. 9, § 9.5].

Теорема 4.1.2. *Предположим, что выполнены условия* 4.1.4, 4.1.5. *Пусть* $\{T_t\}_{t \geqslant 0}$ *— полугруппа Феллера на* X, *а* $\mathcal{A}$ *— ее инфинитезимальный производящий оператор, являющийся сужением* $\overline{A}$.

Тогда любая функция $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \cap C^2(\overline{Q})$ *в каждой точке* $x^0 \in \partial Q$ *удовлетворяет нелокальному условию вида*

$$Bu(x^0) = \gamma(x^0)u(x^0) + \int\limits_{\overline{Q}} \big[u(x^0) - u(y) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial u(x^0)}{\partial t_i} t_i(y)\big]\mu(x^0, dy) -$$

$$- \eta(x^0)\frac{\partial u(x^0)}{\partial t_n} + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i(x^0)\frac{\partial u(x^0)}{\partial t_i} + \varkappa(x^0)Au(x^0) -$$

$$- \sum_{i,j=1}^{n-1} \alpha_{ij}(x^0)\frac{\partial^2 u(x^0)}{\partial t_i \partial t_j} = 0 \quad (x^0 \in \partial Q), \quad (4.1.3)$$

где:

1) $\gamma(x^0) \geqslant 0$;

2) $\eta(x^0) \geqslant 0$;

3) $\varkappa(x^0) \geqslant 0$;

4) *матрица* $\|\alpha_{ij}(x^0)\|$ *симметрична и неотрицательна*;

5) $\mu(x^0, \cdot)$ *— неотрицательная борелевская мера на* $\overline{Q}$, *такая, что*

$$\mu(x^0, \overline{Q} \setminus U) < \infty,$$

$$\int\limits_{\overline{Q} \cap U} [t_n(y) + \sum_{j=1}^{n-1} t_j^2(y)]\mu(x^0, dy) < \infty;$$

6) *если* $\gamma(x^0) = \eta(x^0) = \varkappa(x^0) = \beta_i(x^0) = \alpha_{ij}(x^0) = 0$, *то* $\mu(x^0, \overline{Q} \setminus \{x^0\}) > 0$.

Определение 4.1.4. Нелокальное условие (4.1.3) называют трансверсальным на ∂Q, если

$$\eta(x) + \varkappa(x) > 0 \quad (x \in \partial Q). \quad (4.1.4)$$

Интегральный член в нелокальном краевом условии (4.1.3) соответствует диффузии в клетке, когда частица, попадающая на мембрану, может затем перепрыгнуть в точку $y \in \overline{Q}$. Локальные члены

$$- \sum_{i,j=1}^{n-1} \alpha_{ij}(x^0)\frac{\partial^2 u(x^0)}{\partial t_i \partial t_j} + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i(x^0)\frac{\partial u(x^0)}{\partial t_i},$$

$$\gamma(x^0)u(x^0), \ -\eta(x^0)\frac{\partial u(x^0)}{\partial t_n} \ \text{ и } \ \varkappa(x^0)Au(x^0)$$

соответствуют диффузии вдоль границы, поглощению, отражению и явлению вязкости, см.рис. 6.

Задачи со спектральным параметром и полугруппы Феллера

Приведем еще несколько вспомогательных результатов.

Лемма 4.1.2. *Пусть линейный оператор $\mathcal{G} : \mathcal{D}(\mathcal{G}) \subset X \to C(\overline{Q})$ имеет замыкание, где X — замкнутое подпространство в $C(\overline{Q})$, содержащее хотя бы одну неотрицательную функцию. Пусть $G : \mathcal{D}(G) \subset X \to X$ — линейный оператор такой, что $G \subset \mathcal{G}$. Предположим, что G, $\mathcal{G}$ удовлетворяют следующим условиям*:

(a) *Область определения $\mathcal{D}(G)$ плотна в X.*

(b) *Если $u \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$ достигает положительного максимума в точке $x^0 \in \overline{Q}$, то существует такая точка $x^1 \in \overline{Q}$, что $u(x^1) = u(x^0)$ и $\mathcal{G}u(x^1) \leqslant 0$.*

(c) *Существует такая константа $\lambda_0 \geqslant 0$, что образ $\mathcal{R}(\lambda I - \mathcal{G})$ плотен в $C(\overline{Q})$, а образ $\mathcal{R}(\lambda I - G)$ плотен в X при $\lambda > \lambda_0$.*

Тогда $\overline{G}$ — инфинитезимальный производящий оператор полугруппы Феллера на X, которая однозначно определяется оператором G.

Доказательство. 1. Докажем вначале, что для каждого $\lambda > \lambda_0$ оператор $\lambda I - \mathcal{G}$ имеет ограниченный обратный $(\lambda I - \mathcal{G})^{-1}$, и

$$\|(\lambda I - \mathcal{G})^{-1}\| \leqslant 1/\lambda. \tag{4.1.5}$$

Рассмотрим решение u уравнения

$$(\lambda I - \mathcal{G})u = f. \tag{4.1.6}$$

Можно предположить без потери общности, что $\max\limits_{x\in\overline{Q}} |u(x)| = u(x^0) > 0$. Тогда в силу условия (b) существует точка $x^1 \in \overline{Q}$ такая, что $u(x^1) = u(x^0)$ и $\mathcal{G}u(x^1) \leqslant 0$. Поэтому из (4.1.6) следует, что

$$\|u\|_{C(\overline{Q})} = u(x^0) = u(x^1) = (\mathcal{G}u(x^1) + f(x^1))/\lambda \leqslant \|f\|_{C(\overline{Q})}/\lambda.$$

Таким образом, оператор $\lambda I - \mathcal{G}$ имеет ограниченный обратный, и, более того, $\|(\lambda I - \mathcal{G})^{-1}\| \leqslant 1/\lambda$.

2. Докажем теперь, что для каждого $\lambda > \lambda_0$ оператор $(\lambda I - \mathcal{G})^{-1}$ неотрицателен. Предположим противное: пусть для некоторого $f \geqslant 0$

решение u уравнения (4.1.6) принимает отрицательные значения, т.е. $\min\limits_{x\in\overline{Q}} u(x) = u(x^0) < 0$. Обозначим $v(x) = -u(x)$. В силу условия (b) существует точка $x^1 \in \overline{Q}$ такая, что $v(x^1) = v(x^0)$ и $\mathcal{G}v(x^1) \leqslant 0$. Таким образом, из равенства $(\lambda I - \mathcal{G})v = -f$ получаем

$$0 < v(x^0) = v(x^1) = (\mathcal{G}v(x^1) - f(x^1))/\lambda \leqslant 0.$$

Полученное противоречие доказывает, что оператор $(\lambda I - \mathcal{G})^{-1}$ неотрицателен.

3. Операторы $\lambda I - \overline{G}$ и $\lambda I - \overline{\mathcal{G}}$ имеют ограниченные обратные $(\lambda I - \overline{G})^{-1} : X \to X$ и $(\lambda I - \overline{\mathcal{G}})^{-1} : C(\overline{Q}) \to X$ для $\lambda > \lambda_0$, причем

$$\|(\lambda I - \overline{G})^{-1}\| \leqslant \|(\lambda I - \overline{\mathcal{G}})^{-1}\| \leqslant 1/\lambda.$$

Это следует из существования обратных операторов $(\lambda I - \mathcal{G})^{-1}$, $(\lambda I - G)^{-1}$, условия (c) и неравенства (4.1.5).

4. Докажем теперь, что оператор $(\lambda I - \overline{\mathcal{G}})^{-1}$ неотрицателен. Пусть сначала $f \in C(\overline{Q})$ и $f(x) > 0 \quad (x \in \overline{Q})$. Тогда можно найти последовательность $\{f_m\} \subset \mathcal{D}((\lambda I - \mathcal{G})^{-1})$ такую, что $\lim\limits_{m\to\infty} \|f_m - f\|_{C(\overline{Q})} = 0$. Поэтому существует $M > 0$ такое, что $f_m(x) > 0$ $(x \in \overline{Q})$ для $m \geqslant M$. Следовательно,

$$(\lambda I - \overline{\mathcal{G}})^{-1} f = \lim_{m\to\infty} (\lambda I - \mathcal{G})^{-1} f_m \geqslant 0.$$

Если $f \in C(\overline{Q})$, $f(x) \geqslant 0 \quad (x \in \overline{Q})$, то существует последовательность $\{F_k\} \subset C(\overline{Q})$ такая, что $F_k(x) > 0 \quad (x \in \overline{Q})$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \|F_k - f\|_{C(\overline{Q})} = 0$. Отсюда следует, что $(\lambda I - \overline{\mathcal{G}})^{-1} f \geqslant 0$ для любой функции $f \in C(\overline{Q})$ такой, что $f(x) \geqslant 0$ $(x \in \overline{Q})$.

5. Итак, мы доказали, что для каждого $\lambda > \lambda_0$ оператор $\lambda I - \overline{G}$ имеет ограниченный неотрицательный обратный $(\lambda I - \overline{G})^{-1} : X \to X$ с нормой $\|(\lambda I - \overline{G})^{-1}\| \leqslant 1/\lambda$. Следовательно, в силу теоремы 4.1.1 $\overline{G}$ является инфинитезимальным производящим оператором полугруппы Феллера на X, которая однозначно определяется оператором G. $\square$

Рассмотрим задачу Дирихле

$$\left.\begin{aligned} &A_0 g(x) - \lambda g(x) = 0 \qquad && (x \in Q),\\ &g(x) = \psi(x) && (x \in \partial Q). \end{aligned}\right\} \tag{4.1.7}$$

Как известно, для любых $\psi \in C(\partial Q)$ и $\lambda \geqslant 0$ существует единственное решение $g \in C^2(Q) \cap C(\overline{Q})$ задачи (4.1.7).

Лемма 4.1.3. *Пусть выполнено условие* 4.1.4, *и пусть* Ω_1, Ω_2 *— замкнутые множества такие, что* $\Omega_1 \subset \partial Q$, $\Omega_2 \subset \overline{Q}$ *и* $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$. *Тогда существует такая константа* $\lambda_1 = \lambda_1(\Omega_1, \Omega_2) > 1$, *что для всех* $q_1 \geqslant \lambda_1$, $\lambda \geqslant q_1$ *и* $\psi \in \{\psi \in C(\partial Q) : \mathrm{supp}\psi \subset \Omega_1\}$

$$\|g\|_{C(\Omega_2)} \leqslant \frac{c_1}{\lambda} \|\psi\|_{C(\Omega_1)}, \tag{4.1.8}$$

где $c_1 = c_1(q_1) > 0$ *не зависит от* λ, ψ, *и* $c_1(q_1) \to 1$ *при* $q_1 \to +\infty$.

Доказательство. Докажем неравенство (4.1.8), используя метод барьеров.

Пусть $\varepsilon > 0$ достаточно мало и $2\varepsilon < \delta = \rho(\Omega_1, \Omega_2)$. Так как Ω_2 — компакт, существует конечное множество точек $\{x^j\}_{j=1}^J \subset \Omega_2$ такое, что $\Omega_2 \subset \cup_{j=1}^J B_\varepsilon(x^j)$. Обозначим $M = \max\limits_{x \in \Omega_1} |\psi(x)| > 0$. Здесь $\psi \in C(\partial Q)$ и $\mathrm{supp}\,\psi \subset \Omega_1$. Рассмотрим функцию

$$w_j(x) = M \left(\frac{|x - x^j|}{2\varepsilon} \right)^{\lambda^{1/4}} + \frac{M}{\lambda}.$$

Если $x \in \Omega_1$, то $|x - x^j| \geqslant \delta > 2\varepsilon$. Отсюда

$$M < w_j(x) \qquad (x \in \Omega_1). \tag{4.1.9}$$

Очевидно, существует $q_j > 1$ такое, что для $\lambda > q_j$

$$|A_0 w_j(x)| \leqslant k_{1j} M/\lambda \quad (x \in B_\varepsilon(x^j) \cap \overline{Q}),$$

$$|A_0 w_j(x)| \leqslant k_{2j} M \left(\lambda^{1/2} \left(\frac{|x - x^j|}{2\varepsilon} \right)^{\lambda^{1/4}} + \frac{1}{\lambda} \right) \quad (x \in \overline{Q} \setminus B_\varepsilon(x^j)),$$

где $k_{1j}, k_{2j} > 0$ не зависят от M, λ. Таким образом, существует $\lambda_1 > \max\limits_j q_j$ такое, что

$$A_0 w_j(x) - \lambda w_j(x) < 0 \qquad (x \in Q) \tag{4.1.10}$$

при $\lambda \geqslant \lambda_1$.

Из (4.1.9), (4.1.10) вытекает, что

$$\left.\begin{aligned} &A_0(g(x) - w_j(x)) - \lambda(g(x) - w_j(x)) > 0 \quad (x \in Q), \\ &g(x) - w_j(x) < 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\; (x \in \partial Q) \end{aligned}\right\} \tag{4.1.11}$$

при $\lambda \geqslant \lambda_1$.

Из леммы 4.1.1 и неравенств (4.1.11) следует, что $g(x) \leqslant w_j(x)$ при $x \in \overline{Q}$. Аналогично получаем $-g(x) \leqslant w_j(x)$ при $x \in \overline{Q}$. Таким образом,

$$\max_{x \in \overline{B_\varepsilon}(x^j) \cap \overline{Q}} |g(x)| \leqslant \max_{x \in \overline{B_\varepsilon}(x^j) \cap \overline{Q}} w_j(x) = M(2^{-\lambda^{1/4}} + \lambda^{-1}).$$

Так как $J < \infty$, из последнего неравенства следует (4.1.6). $\square$

4.2. Полугруппа Феллера, порожденная эллиптическим дифференциальным оператором

Рассмотрим нелокальное условие (4.1.3) в нетрансверсальном случае

$$Bu(x) = \gamma(x)u(x) + \int\limits_{\overline{Q}} [u(x) - u(y)]\mu(x, dy) = 0 \qquad (x \in \partial Q), \tag{4.2.1}$$

где $\gamma(x) \geqslant 0$, $\mu(x, \cdot)$ — неотрицательная борелевская мера на $\overline{Q}$.

Определение 4.2.1. *Носителем меры* $\mu(x, \cdot)$ называется замкнутое множество $\mathrm{spt}\mu(x, \cdot,)$, определенное по формуле

$$\mathrm{spt}\mu(x, \cdot) = \overline{Q} \setminus \cup_{V \in T}\{V : \mu(x, V \cap \overline{Q}) = 0\},$$

где T — класс всех открытых множеств из $\mathbb{R}^n$.

Обозначим

$$C_B(\overline{Q}) = \{u \in C(\overline{Q}) : Bu = 0\},\ N_\mu = \{x \in \partial Q : \mu(x, \overline{Q}) = 0\},$$

$$\Gamma_\mu = \partial Q \setminus N_\mu,\ \Gamma_\mu^\delta = \{x \in \overline{Q} : \rho(x, \Gamma_\mu) < \delta\}.$$

Далее будут рассматриваться такие меры, что функции $\mu(x, \overline{Q})$, вообще говоря, могут иметь разрывы на некотором множестве $K_1 \subset N_\mu$ и $\mu(x, \overline{Q}) \in C(\partial Q \setminus K_1)$. Чтобы преодолеть это затруднение, мы будем рассматривать функции $u(x)$, обращающиеся в 0 на множестве N_μ.

Обозначим $C_\mu(\Omega) = \{u \in C(\Omega) : u(x) = 0 \ (x \in N_\mu)\}$, где $\Omega = \overline{Q}$ или $\Omega = \partial Q$.

Рассмотрим неограниченные операторы $\mathcal{A}_{0B} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset C_B(\overline{Q}) \to C(\overline{Q})$ и $\mathcal{A}_B : \mathcal{D}(\mathcal{A}_B) \subset C_B(\overline{Q}) \to C(\overline{Q})$, заданные формулами

$$\mathcal{A}_{0B}u = A_0 u \ (u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{0B})),\ \mathcal{D}(\mathcal{A}_{0B}) = \{u \in C^2(Q) \cap C_B(\overline{Q}) : A_0 u \in C(\overline{Q})\},$$

$$\mathcal{A}_B = \mathcal{A}_{0B} + A_1,\ \mathcal{D}(\mathcal{A}_B) = \mathcal{D}(\mathcal{A}_{0B}).$$

Введем также операторы $A_{0B} : \mathcal{D}(A_{0B}) \subset C_B(\overline{Q}) \to C_B(\overline{Q})$ и $A_B : \mathcal{D}(A_B) \subset C_B(\overline{Q}) \to C_B(\overline{Q})$ следующим образом:

$$A_{0B}u = A_0 u \ (u \in \mathcal{D}(A_{0B})), \mathcal{D}(A_{0B}) = \{u \in C^2(Q) \cap C_B(\overline{Q}) : A_0 u \in C_B(\overline{Q})\},$$
$$A_B u = Au \quad (u \in \mathcal{D}(A_B)), \quad \mathcal{D}(A_B) = \{u \in C^2(Q) \cap C_B(\overline{Q}) : Au \in C_B(\overline{Q})\}.$$

Заметим, что, вообще говоря, $\mathcal{D}(A_{0B}) \neq \mathcal{D}(A_B)$.

Обозначим $\gamma_0(x) = \gamma(x) + \mu(x, \overline{Q})$.

Будем предполагать, что выполнены следующие условия:

Условие 4.2.1. $\gamma_0 \in C(\partial Q)$.

Условие 4.2.2. $\gamma(x) + \mu(x, \overline{Q} \setminus \Gamma_\mu) > 0 \quad (x \in \partial Q)$.

Замечание 4.2.1. Из условия 4.2.2 следует, что $\gamma_0(x) > 0$ $(x \in \partial Q)$.

Замечание 4.2.2. В силу замечания 4.2.1 $C_B(\overline{Q}) \subset C_\mu(\overline{Q})$.

Замечание 4.2.3. Из условия 4.2.1 следует, что $c_\mu = \sup\limits_{x \in \partial Q} \mu(x, \overline{Q}) < \infty$.

Геометрические условия однозначной разрешимости нелокальных эллиптических задач с параметром

Сформулируем теперь некоторые дополнительные условия на меру μ. Ниже будет доказано, что эти условия вместе с условиями 4.2.1, 4.2.2 являются достаточными для разрешимости задачи $(\mathcal{A}_{0B} - \lambda I)u = f$ при достаточно больших значениях параметра λ.

Введем операторы B_i $(i = 1, 2)$ и $B_{2\delta}^j$ $(j = 1, 2)$ по формулам

$$B_i v(x) = \int\limits_{\overline{Q}} v(y)\mu_i(x, dy) \qquad (x \in \partial Q,\ i = 1, 2), \tag{4.2.2}$$

$$B^1_{2\delta} v(x) = \int\limits_{\Gamma^\delta_\mu} v(y)\mu_2(x, dy) \qquad (x \in \partial Q), \tag{4.2.3}$$

$$B^2_{2\delta} v(x) = \int\limits_{\overline{Q}\setminus\Gamma^\delta_\mu} v(y)\mu_2(x, dy) \qquad (x \in \partial Q), \tag{4.2.4}$$

где $\mu_i(x,\cdot)$ $(i = 1, 2)$ — неотрицательные борелевские меры на $\overline{Q}$, $\delta > 0$.

Предположим, что существуют неотрицательные борелевские меры $\mu_i(x,\cdot)$ на $\overline{Q}$ $(x \in \partial Q,\ i = 1, 2)$, составляющие разложение $\mu(x,\cdot) = \mu_1(x,\cdot) + \mu_2(x,\cdot)$ и удовлетворяющие условиям:

Условие 4.2.3. Операторы B_1 и B_2 отображают $C_\mu(\overline{Q})$ и соответственно $C(\overline{Q})$ в $C_\mu(\partial Q)$.

Условие 4.2.4. Существует замкнутое множество $K_1 \subset N_\mu$ такое, что $\operatorname{spt}\mu_1(x,\cdot) \subset \overline{Q} \setminus K_1^{\varkappa_0}$ $(x \in \partial Q)$ для некоторого $\varkappa_0 > 0$, где $K_1^{\varkappa_0} = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x, K_1) < \varkappa_0\}$.

Условие 4.2.5. Для любого $0 < \varkappa < \varkappa_0$ существует $\varepsilon = \varepsilon(\varkappa) > 0$ такое, что $\operatorname{spt}\mu_1(x,\cdot) \subset \overline{Q}_\varepsilon$ $(x \in \partial Q \setminus K_1^{\varkappa/2})$, где $Q_\varepsilon = \{x \in Q : \rho(x, \partial Q) > \varepsilon\}$.

Замечание 4.2.4. Мера $\mu(x,\cdot)$ удовлетворяет соотношениям 5, 6 теоремы 4.1.2, при этом $\mu_1(x,\overline{Q}) \in C(\partial Q \setminus K_1)$ и $\mu_2(x,\overline{Q}) \in C(\partial Q)$. Действительно, соотношения 5, 6 теоремы 4.1.2 следуют из замечания 4.2.3 и условия 4.2.2. Докажем два последних утверждения. Для этого введём функцию $\xi \in \dot{C}^\infty(Q)$ так, что $\xi(x) = 1$ $(x \in \overline{Q}_\varepsilon)$ и $0 \leqslant \xi(x) \leqslant 1$, где $\varepsilon = \varepsilon(\varkappa)$ выбирается в соответствии с условием 4.2.5, $0 < \varkappa < \varkappa_0$ — произвольное фиксированное число. По определению, $\xi \in C_\mu(\overline{Q})$. Отсюда в силу условия 4.2.3 следует, что $B_1\xi \in C_\mu(\overline{Q})$. С другой стороны, из условия 4.2.5 вытекает, что $B_1\xi(x) = \mu_1(x,\overline{Q}_\varepsilon) = \mu_1(x,\overline{Q})$ $(x \in \partial Q \setminus K_1^{\varkappa/2})$. Следовательно, $\mu_1(x,\overline{Q}) \in C(\partial Q \setminus K_1^{\varkappa/2})$. Так как $\varkappa > 0$ произвольно, имеем $\mu_1(x,\overline{Q}) \in C(\partial Q \setminus K_1)$. Теперь положим $u(x) \equiv 1$ $(x \in \overline{Q})$. Тогда из условия 4.2.3 получим, что $B_2 u = \mu_2(x,\overline{Q}) \in C(\partial Q)$.

Замечание 4.2.5. Из условия 4.2.3 и замечания 4.2.3 следует, что операторы $B_1 : C_\mu(\overline{Q}) \to C_\mu(\partial Q)$ и $B_2 : C(\overline{Q}) \to C_\mu(\partial Q)$ — ограниченные.

Замечание 4.2.6. Вообще говоря, из условия $u \in C(\overline{Q})$ не следует, что $B^j_{2\delta}u \in C(\partial Q)$ (см. пример 4.4.2). Однако из замечания 4.2.3 вытекает, что $B^1_{2\delta},\ B^2_{2\delta} : C(\overline{Q}) \to B(\partial Q)$ — ограниченные операторы, где $B(\partial Q)$ — пространство функций, ограниченных на множестве ∂Q, с нормой

$$\|f\|_{B(\partial Q)} = \sup_{x\in\partial Q} |f(x)|.$$

Мы будем предполагать, что помимо условий 4.2.1–4.2.5 выполнено также следующее условие.

Условие 4.2.6. Существуют числа $\delta_0 > 0$ и $0 < r < 1/2$ такие, что оператор $L^1_{2\delta_0} : C(\overline{Q}) \to B(\partial Q)$ удовлетворяет условию $\|L^1_{2\delta_0}\| < r$, где $L^1_{2\delta_0}u(x) = \frac{1}{\gamma_0(x)} B^1_{2\delta_0}u(x)$.

Примеры операторов, для которых выполняются условия 4.2.1–4.2.6, будут приведены в § 4.4.

Отметим, что разложение $\mu(x,\cdot) = \mu_1(x,\cdot)+\mu_2(x,\cdot)$, удовлетворяющее условиям 4.2.1–4.2.6, вообще говоря, не единственно.

Лемма 4.2.1. *Предположим, что выполнены условия* 4.1.4, 4.1.5 *и* 4.2.1–4.2.3. *Пусть $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_B)$ и $u(x)$ достигает положительного максимума в точке $x^0 \in \overline{Q}$. Тогда существует такая точка $x^1 \in \overline{Q}$, что $u(x^1) = u(x^0)$ и $\mathcal{A}_B u(x^1) \leqslant 0$.*

Доказательство. В случае $x^0 \in Q$ утверждение леммы 4.2.1 следует из леммы 4.1.1. Предположим теперь, что $x^0 \in \partial Q$, и при этом $u(x^0) > u(y)$ для $y \in Q$. Если $\mu(x^0, Q) > 0$, то из данного предположения следует, что нелокальное условие (4.2.1) для функции $u(x)$ нарушается в точке $x^0 \in \partial Q$. Поэтому будем считать, что $\operatorname{spt}\mu(x^0,\cdot) \subset \partial Q$. Тогда в силу замечания 4.2.2 нелокальное условие (4.2.1) примет вид

$$\gamma(x^0)u(x^0) + \int\limits_{N_\mu} u(x^0)\mu(x^0, dy) = -\int\limits_{\Gamma_\mu} [u(x^0) - u(y)]\mu(x^0, dy).$$

С другой стороны, это равенство невозможно, поскольку его левая часть положительна в силу условия 4.2.2, а правая — нет. Полученное противоречие показывает, что, если $x^0 \in \partial Q$, то существует точка $x^1 \in Q$ такая, что $u(x^0) = u(x^1)$. Для завершения доказательства остаётся вновь применить лемму 4.1.1. $\square$

В силу замечания 4.2.1 нелокальное условие (4.2.1) можно переписать в виде

$$u(x) - Lu(x) = 0 \qquad (x \in \partial Q), \tag{4.2.5}$$

где

$$Lu(x) = \frac{1}{\gamma_0(x)} \int\limits_{\overline{Q}} u(y)\mu(x, dy). \tag{4.2.6}$$

Из условия 4.2.3 и замечания 4.2.3 следует, что оператор $L : C_\mu(\overline{Q}) \to C_\mu(\partial Q)$ — ограниченный, причем $\|L\| \leqslant 1$.

Для любого $\psi \in C(\partial Q)$ существует $g \in C^2(Q) \cap C(\overline{Q})$ — единственное решение задачи (4.2.5), где $\lambda > 0$. Обозначим $P_\lambda \psi(x) = g(x)$. В силу принципа максимума оператор $P_\lambda : C_\mu(\partial Q) \to C_\mu(\overline{Q})$ — ограниченный, причем $\|P_\lambda\| = 1$.

Рассмотрим теперь ограниченный оператор $I - LP_\lambda : C_\mu(\partial Q) \to C_\mu(\partial Q)$.

Лемма 4.2.2. *Пусть выполнены условия* 4.1.4 и 4.2.1–4.2.6.

Тогда существует $\lambda_0 > 1$ такое, что для каждого $\lambda > \lambda_0$ оператор $I - LP_\lambda$ имеет ограниченный обратный $(I - LP_\lambda)^{-1} : C_\mu(\partial Q) \to C_\mu(\partial Q)$ и $\|(I - LP_\lambda)^{-1}\| \leqslant q$, где $q > 0$ не зависит от λ.

Доказательство. 1. Обозначим

$$L_i v(x) = \frac{1}{\gamma_0(x)} B_i v(x) \qquad (x \in \partial Q,\ i = 1, 2), \tag{4.2.7}$$

$$L_{2\delta}^j u(x) = \frac{1}{\gamma_0(x)} B_{2\delta}^j v(x) \qquad (x \in \partial Q,\ j = 1, 2), \tag{4.2.8}$$

где операторы $B_i,\ B_{2\delta}^j$ определены по формулам (4.2.2)–(4.2.4), $\delta > 0$.

В силу условия 4.2.5 для любого $0 < \varkappa < \varkappa_0$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\mathrm{spt}\mu_1(x, .) \subset \overline{Q}_\varepsilon \qquad (x \in \partial Q \setminus K_1^{\varkappa/2}). \tag{4.2.9}$$

Введем срезающую функцию $\xi_\varepsilon \in \dot{C}^\infty(Q)$ такую, что $0 \leqslant \xi_\varepsilon(x) \leqslant 1$, $\xi_\varepsilon(x) = 1 \quad (x \in \overline{Q}_\varepsilon)$, $\xi_\varepsilon(x) = 0 \quad (x \notin \overline{Q}_{\varepsilon/2})$. Тогда для данного $\varepsilon > 0$ и любого $\delta > 0$ оператор $I - LP_\lambda$ можно записать в виде

$$I - LP_\lambda = I - L_1(1-\xi_\varepsilon)P_\lambda - L_1\xi_\varepsilon P_\lambda - L^1_{2\delta}P_\lambda - L^2_{2\delta}P_\lambda. \qquad (4.2.10)$$

2. Оценим нормы операторов $L_1\xi_\varepsilon P_\lambda : C_\mu(\partial Q) \to C_\mu(\partial Q)$ и $L^1_{2\delta}P_\lambda, Ł^2_{2\delta}P_\lambda : C_\mu(\partial Q) \to B(\partial Q)$ (см. замечание 4.2.6). Напомним, что в силу условия 4.2.3 оператор $L_2P_\lambda = L^1_{2\delta}P_\lambda + L^2_{2\delta}P_\lambda$ отображает $C_\mu(\partial Q)$ в себя.

Вследствие условия 4.2.6 существует число $q > 8$ такое, что при любом достаточно малом $\delta > 0$

$$\|L^1_{2\delta}\| < \frac{1}{2} - \frac{4}{q}.$$

Таким образом,

$$\|L^1_{2\delta}P_\lambda\| < \frac{1}{2} - \frac{4}{q}. \qquad (4.2.11)$$

Зафиксируем такое $\delta > 0$. Согласно лемме 4.1.3 для любого $\delta > 0$ существует $\lambda_1 = \lambda_1(\delta) > 1$ такое, что при всех $\lambda > \lambda_1$ и $\psi \in C_\mu(\partial Q)$

$$\|L^2_{2\delta}P_\lambda\psi\|_{B(\partial Q)} \leqslant \|P_\lambda\psi\|_{C(\overline{Q}\setminus\Gamma^\delta_\mu)} \leqslant \frac{c_1}{\lambda}\|\psi\|_{C(\partial Q)}, \qquad (4.2.12)$$

а для любого $\varepsilon > 0$ существует $\lambda_2 = \lambda_2(\varepsilon) > 1$ такое, что при всех $\lambda > \lambda_2$ и $\psi \in C_\mu(\partial Q)$

$$\|L_1\xi_\varepsilon P_\lambda\psi\|_{C(\partial Q)} \leqslant \|P_\lambda\psi\|_{C(\overline{Q}_{\varepsilon/2})} \leqslant \frac{c_2}{\lambda}\|\psi\|_{C(\partial Q)}. \qquad (4.2.13)$$

Здесь $c_1 = c_1(\lambda_1) > 0$ и $c_2 = c_2(\lambda_2) > 0$ не зависят от $\lambda,\ \psi$. Выбирая $\lambda > d = \max\{\lambda_1,\ \lambda_2,\ c_1q,\ c_2q\}$, из (4.2.12), (4.2.13) получим

$$\|L^2_{2\delta}P_\lambda\| \leqslant \frac{1}{q}, \quad \|L_1\xi_\varepsilon P_\lambda\| \leqslant \frac{1}{q}. \qquad (4.2.14)$$

3. Рассмотрим теперь оператор $I - L_1(1-\xi_\varepsilon)P_\lambda : C_\mu(\partial Q) \to C_\mu(\partial Q)$. Выпишем для него формальный ряд Неймана

$$\sum_{s=0}^{\infty}(L_1(1-\xi_\varepsilon)P_\lambda)^s. \qquad (4.2.15)$$

Оценим норму оператора $(L_1(1-\xi_\varepsilon)P_\lambda)^s : C_\mu(\partial Q) \to C_\mu(\partial Q)$. Из определения L_1 и принципа максимума следует, что

$$\|L_1(1-\xi_\varepsilon)P_\lambda\psi\|_{C(\partial Q)} \leqslant \|\psi\|_{C(\partial Q)} \qquad (\psi \in C_\mu(\partial Q)).$$

Очевидно, $((1-\xi_\varepsilon)P_\lambda\psi)(x)=0 \quad (x\in\overline{Q}_\varepsilon)$. Поэтому в силу (4.2.9)

$$\operatorname{supp} L_1(1-\xi_\varepsilon)P_\lambda\psi \subset \partial Q\cap\overline{K_1^{\varkappa/2}}.$$

Пусть $s>1$. Обозначим $\psi_{s\varepsilon}=(L_1(1-\xi_\varepsilon)P_\lambda)^{s-1}\psi$. По доказанному выше $\operatorname{supp}\psi_{s\varepsilon}\subset\partial Q\cap\overline{K_1^{\varkappa/2}}$. Тогда из условия 4.2.4 и леммы 4.1.3 следует, что существует $\lambda_3=\lambda_3(\varkappa)>1$ такое, что при всех $\lambda>\lambda_3$ и $\psi\in C_\mu(\partial Q)$

$$\|(L_1(1-\xi_\varepsilon)P_\lambda)^s\psi\|_{C(\partial Q)}=\|L_1(1-\xi_\varepsilon)P_\lambda\psi_{s\varepsilon}\|_{C(\partial Q)}\leqslant\|P_\lambda\psi_{s\varepsilon}\|_{C(\overline{Q}\setminus K_1^{\varkappa})}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{c_3}{\lambda}\|\psi_{s\varepsilon}\|_{C(\partial Q\cap\overline{K_1^{\varkappa/2}})}=\frac{c_3}{\lambda}\|\psi_{s\varepsilon}\|_{C(\partial Q)}=\frac{c_3}{\lambda}\|(L_1(1-\xi_\varepsilon)P_\lambda)^{s-1}\psi\|_{C(\partial Q)},$$

где $c_3=c_3(\lambda_3)>0$ не зависит от λ,ψ и s. Таким образом, получим

$$\|(L_1(1-\xi_\varepsilon)P_\lambda)^s\|\leqslant(\frac{c_3}{\lambda})^{s-1}\qquad(s>1).$$

При $\lambda>\lambda_0=\max\{\lambda_3,d,c_3\frac{q+2}{4}\}$ эта оценка гарантирует сходимость ряда Неймана (4.2.15). Поэтому существует ограниченный обратный оператор

$$(I-L_1(1-\xi_\varepsilon)P_\lambda)^{-1}=\sum_{s=0}^{\infty}(L_1(1-\xi_\varepsilon)P_\lambda)^s,$$

при этом

$$\|(I-L_1(1-\xi_\varepsilon)P_\lambda)^{-1}\|\leqslant 1+1+\sum_{s=2}^{\infty}(\frac{c_3}{\lambda})^{s-1}=2+\frac{c_3}{\lambda-c_3}\leqslant$$
$$\leqslant 2+c_3/(c_3\frac{q+2}{4}-c_3)=2+(\frac{q+2}{4}-1)^{-1}=\frac{2q}{q-2}.\quad(4.2.16)$$

4. Докажем теперь, что для $\lambda>\lambda_0$ оператор $I-LP_\lambda$ имеет ограниченный обратный $(I-LP_\lambda)^{-1}:C_\mu(\partial Q)\to C_\mu(\partial Q)$ и $\|(I-LP_\lambda)^{-1}\|\leqslant q$.

Очевидно,

$$I-LP_\lambda=[I-L_1(1-\xi_\varepsilon)P_\lambda]\cdot[I-(I-L_1(1-\xi_\varepsilon)P_\lambda)^{-1}$$
$$(L_1\xi_\varepsilon P_\lambda+L^1_{2\delta}P_\lambda+L^2_{2\delta}P_\lambda)].\quad(4.2.17)$$

Из (4.2.11), (4.2.14) и (4.2.16) вытекает, что

$$\|(I-L_1(1-\xi_\varepsilon)P_\lambda)^{-1}(L_1\xi_\varepsilon P_\lambda+L^1_{2\delta}P_\lambda+L^2_{2\delta}P_\lambda)\|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{2q}{q-2}(\frac{2}{q}+\frac{1}{2}-\frac{4}{q})=\frac{q-4}{q-2}<1.\quad(4.2.18)$$

Следовательно, существует ограниченный обратный оператор $(I - LP_\lambda)^{-1} : C_\mu(\partial Q) \to C_\mu(\partial Q)$, причем в силу (4.2.16)–(4.2.18)

$$\|(I - LP_\lambda)^{-1}\| \leqslant \frac{2q}{q-2} \cdot (1 - \frac{q-4}{q-2})^{-1} = q,$$

где $q > 8$ не зависит от λ. $\square$

Лемма 4.2.3. *Пусть выполнены условия* 4.1.4 и 4.2.1–4.2.6.

Тогда существует $\lambda_0 > 1$ такое, что для каждого $\lambda > \lambda_0$ уравнение

$$(\mathcal{A}_{0B} - \lambda I)u = f \tag{4.2.19}$$

имеет единственное решение $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{0B})$ для любой функции $f \in C^\sigma(Q) \cap C(\overline{Q})$, и

$$\|u\|_{C(\overline{Q})} \leqslant \frac{1}{\lambda}\|f\|_{C(\overline{Q})}. \tag{4.2.20}$$

Доказательство. Очевидно, операторное уравнение (4.2.19) эквивалентно нелокальной задаче для эллиптического уравнения, которая имеет вид

$$\left.\begin{aligned} A_0u(x) - \lambda u(x) = f(x) \qquad & (x \in Q), \\ u(x) - Lu(x) = 0 \qquad & (x \in \partial Q), \end{aligned}\right\} \tag{4.2.21}$$

где $\lambda > 0$.

Рассмотрим вспомогательную краевую задачу

$$\left.\begin{aligned} A_0v(x) - \lambda v(x) = f(x) \qquad & (x \in Q), \\ v(x) = 0 \qquad & (x \in \partial Q). \end{aligned}\right\} \tag{4.2.22}$$

Вследствие теоремы 21.I, [23] для любого $f \in C^\sigma(Q) \cap C(\overline{Q})$ существует единственное решение $v \in C^2(Q) \cap C(\overline{Q})$ этой задачи. Обозначим $G_\lambda f(x) = v(x)$. Пусть $w = u - v$. Тогда из (4.2.21), (4.2.22) получим

$$\left.\begin{aligned} A_0w(x) - \lambda w(x) = 0 \qquad & (x \in Q), \\ w(x) - Lw(x) = Lv(x) \qquad & (x \in \partial Q). \end{aligned}\right\} \tag{4.2.23}$$

Очевидно, задача (4.2.23) эквивалентна операторному уравнению

$$\psi - LP_\lambda\psi = Lv \tag{4.2.24}$$

относительно функции $\psi \in C_\mu(\partial Q)$, где $w = P_\lambda\psi$.

В силу леммы 4.2.2 уравнение (4.2.24) имеет единственное решение $\psi = (I - LP_\lambda)^{-1} Lv$ для любого $\lambda > \lambda_0$. Таким образом, уравнение (4.2.19) имеет единственное решение

$$u = v + P_\lambda \psi = v + P_\lambda (I - LP_\lambda)^{-1} Lv = \\ = G_\lambda f + P_\lambda (I - LP_\lambda)^{-1} L G_\lambda f \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{0B}) \quad (4.2.25)$$

для любого $f \in C^\sigma(Q) \cap C(\overline{Q})$.

Для завершения доказательства остаётся получить оценку (4.2.20). Не ограничивая общности, предположим, что $\max\limits_{x \in \overline{Q}} |u(x)| = u(x^0) > 0$. Тогда в силу леммы 4.2.1 существует точка $x^1 \in \overline{Q}$ такая, что $u(x^1) = u(x^0)$ и $\mathcal{A}_{0B} u(x^1) \leqslant 0$. Поэтому
$\|u\|_{C(\overline{Q})} = u(x^0) = u(x^1) = (\mathcal{A}_{0B} u(x^1) - f(x^1))/\lambda \leqslant \|f\|_{C(\overline{Q})}/\lambda.$ □

Отметим, что условие 4.2.6 наряду с условиями 4.2.4, 4.2.5 гарантирует сходимость ряда Неймана (4.2.15) в доказательстве леммы 4.2.2. Это условие может быть несколько ослаблено, если мера не содержит слагаемого μ_1 (см. условие 2.8). Однако наиболее глубокой причиной использования подобных условий является то, что они обеспечивают равенство нулю индекса соответствующего эллиптического оператора.

Аналитические условия однозначной разрешимости нелокальных эллиптических задач с параметром

Рассмотрим случай, когда геометрические условия 4.2.4, 4.2.5, а также условие 4.2.6, вообще говоря, не выполняются.

Обозначим $\gamma_\delta(x) = \gamma(x) + \mu(x, \overline{Q} \setminus \Gamma_\mu^\delta)$.

Предположим, что наряду с условиями 4.2.1 и 4.2.2 выполнены следующие условия:

Условие 4.2.7. Оператор B отображает пространство $C_\mu(\overline{Q})$ в $C_\mu(\partial Q)$.

Условие 4.2.8. Существует $\delta > 0$ такое, что $\sup\limits_{x \in \partial Q} \varphi_\delta(x) < \infty$, где $\varphi_\delta(x) = \mu(x, \Gamma_\mu^\delta)/\gamma_\delta(x)$.

Введем операторы $B_\delta^1,\ B_\delta^2$ по формулам

$$B_\delta^1 u(x) = \int\limits_{\Gamma_\mu^\delta} u(y)\mu(x,dy) \qquad (x \in \partial Q), \tag{4.2.26}$$

$$B_\delta^2 u(x) = \int\limits_{\overline{Q}\setminus\Gamma_\mu^\delta} u(y)\mu(x,dy) \qquad (x \in \partial Q), \tag{4.2.27}$$

где $\delta > 0$.

Замечание 4.2.7. Из условия 4.2.7 и замечания 4.2.3 следует, что операторы $B : C_\mu(\overline{Q}) \to C_\mu(\partial Q)$ и $B_\delta^1, B_\delta^2 : C_\mu(\partial Q) \to B(\partial Q)$ — ограниченные (ср. замечания 4.2.5, 4.2.6).

Замечание 4.2.8. В силу замечания 4.2.3 условие 4.2.8 выполняется, если $\inf\limits_{x\in\partial Q} \gamma_\delta(x) > 0$ при некотором $\delta > 0$.

Лемма 4.2.4. *Пусть выполнены условия* 4.1.4, 4.2.1, 4.2.2, 4.2.7, 4.2.8.

Тогда справедливо заключение леммы 4.2.3.

Доказательство. Как и в доказательстве леммы 4.2.3, уравнение (4.2.19) сводится к уравнению (4.2.24) в пространстве $C_\mu(\partial Q)$. Таким образом, остаётся показать, что для $\lambda > \lambda_0$ оператор $I - LP_\lambda$, где $\lambda_0 > 1$ достаточно велико, имеет ограниченный обратный $(I - LP_\lambda)^{-1} : C_\mu(\partial Q) \to C_\mu(\partial Q)$.

Представим оператор L в виде

$$L = L_\delta^1 + L_\delta^2,$$

где

$$L_\delta^j v(x) = \frac{1}{\gamma_0(x)} B_\delta^j v(x) \qquad (x \in \partial Q,\ j = 1,2).$$

Очевидно, для $\psi \in C_\mu(\partial Q)$ имеем

$$\|L_\delta^1 P_\lambda \psi\|_{B(\partial Q)} \leqslant \sup_{x\in\partial Q} \frac{\mu(x,\Gamma_\mu^\delta)}{\gamma_0(x)} \|P_\lambda\psi\|_{C(\overline{\Gamma_\mu^\delta})} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x\in\partial Q} \frac{\mu(x,\Gamma_\mu^\delta)}{\gamma_\delta(x) + \mu(x,\Gamma_\mu^\delta)} \|\psi\|_{C(\partial Q)} = c\|\psi\|_{C(\partial Q)},$$

где $c = \sup\limits_{x\in\partial Q} \frac{\varphi_\delta(x)}{1+\varphi_\delta(x)}$. Вследствие условия 4.2.8 $c < 1$. Поэтому существует $q > 2$ такое, что

$$\|L_\delta^1 P_\lambda\| < 1 - \frac{2}{q} \tag{4.2.28}$$

для всех $\lambda > 0$, где q не зависит от λ.

С другой стороны, в силу леммы 4.1.3 для любого $\delta > 0$ существует $\lambda_1 = \lambda_1(\delta) > 1$ такое, что для всех $\lambda > \lambda_1$ и $\psi \in C_\mu(\partial Q)$

$$\|L_\delta^2 P_\lambda \psi\|_{B(\partial Q)} \leqslant \|P_\lambda \psi\|_{C(\overline{Q}\setminus\Gamma_\mu^\delta)} \leqslant \frac{c_1}{\lambda}\|\psi\|_{C(\partial Q)},$$

где $c_1 = c_1(\lambda_1) > 0$. Таким образом, при $\lambda > \lambda_0 = \max\{\lambda_1, c_1 q\}$

$$\|L_\delta^2 P_\lambda\| < \frac{1}{q}. \tag{4.2.29}$$

Вследствие (4.2.28), (4.2.29) и известной теоремы об обратном операторе оператор $I - LP_\lambda$ при $\lambda > \lambda_0$ имеет ограниченный обратный $(I - LP_\lambda)^{-1} : C_\mu(\partial Q) \to C_\mu(\partial Q)$, норма которого не превосходит q.

Справедливость неравенства (4.2.20) устанавливается точно так же, как и в доказательстве леммы 4.2.3. $\square$

Плотность области определения

Докажем теперь плотность $\mathcal{D}(A_{0B})$ в $C_B(\overline{Q})$. Вначале получим некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 4.2.5. *Предположим, что выполнены условия* 4.1.4, 4.2.1, 4.2.2, 4.2.7.

Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и $u \in C_B(\overline{Q})$ существует $\delta_1 > 0$ такое, что для всякого $0 < \delta < \delta_1$ найдется функция $u_\delta \in C^2(Q) \cap C_\mu(\overline{Q})$, обладающая следующими свойствами:

$$\|u_\delta - Lu_\delta\|_{C(\partial Q)} < 2\varepsilon, \tag{4.2.30}$$

$$\|u_\delta - u\|_{C(\overline{Q})} < \varepsilon, \tag{4.2.31}$$

$$A_0 u_\delta \in C^\sigma(\overline{Q}), \qquad A_0 u_\delta(x) = 0 \quad (x \in Q \cap \Gamma_\mu^{\delta/2}). \tag{4.2.32}$$

Доказательство. Пусть $u \in C_B(\overline{Q})$. Тогда в силу замечания 4.2.1 $u|_{\partial Q} = Lu$. Из замечания 4.2.2 следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такая функция $u_1 \in C^\infty(\overline{Q}) \cap C_\mu(\overline{Q})$, что $\|u - u_1\|_{C(\overline{Q})} < \varepsilon/4$. Введем функцию

$$\varphi(x) = Lu_1(x) \qquad (x \in \partial Q). \tag{4.2.33}$$

Из условия 4.2.1, замечания 4.2.1 и определения оператора L следует, что $\varphi \in C_\mu(\partial Q)$, причем $\|\varphi\|_{C(\partial Q)} \leqslant \|u_1\|_{C(\overline{Q})}$.

Рассмотрим задачу Дирихле

$$A_0 u_2(x) = 0 \qquad (x \in Q), \tag{4.2.34}$$

$$u_2(x) = \varphi(x) \qquad (x \in \partial Q). \tag{4.2.35}$$

В силу теоремы 21.I см. [23] существует единственное решение задачи (4.2.34), (4.2.35) $u_2 \in C^2(Q) \cap C_\mu(\overline{Q})$, и в силу принципа максимума $\|u_2\|_{C(\overline{Q})} = \|\varphi\|_{C(\partial Q)}$.

Так как $u|_{\partial Q} = Lu$, из (4.2.33), (4.2.35) получим

$$|u(y) - u_2(y)| = |L(u - u_1)(y)| \leqslant \|u - u_1\|_{C(\overline{Q})} < \varepsilon/4 \qquad (y \in \partial Q). \tag{4.2.36}$$

Функции $u(x)$ и $u_2(x)$ равномерно непрерывны в $\overline{Q}$. Поэтому существует такое $\delta_1 > 0$, что

$$|u(y) - u(x)| < \varepsilon/4 \quad \text{при } x, y \in \{x, y \in \overline{Q} : |x - y| < \delta_1\}, \tag{4.2.37}$$

$$|u_2(y) - u_2(x)| < \varepsilon/4 \text{ при } x, y \in \{x, y \in \overline{Q} : |x - y| < \delta_1\}. \tag{4.2.38}$$

Для любого $x \in \overline{\Gamma_\mu^\delta}$ $(0 < \delta < \delta_1)$ существует $y \in \Gamma_\mu$ такое, что $|x - y| < \delta_1$. Поэтому в силу (4.2.36)–(4.2.38) для любого $x \in \overline{\Gamma_\mu^\delta}$

$$|u(x) - u_2(x)| \leqslant |u(x) - u(y)| + |u(y) - u_2(y)| + \\ + |u_2(y) - u_2(x)| < \varepsilon/4 + \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = 3\varepsilon/4.$$

Следовательно,

$$\|u - u_2\|_{C(\overline{\Gamma_\mu^\delta})} \leqslant 3\varepsilon/4.$$

Введем функцию

$$u_\delta(x) = \xi_\delta(x) u_1(x) + (1 - \xi_\delta(x)) u_2(x),$$

где $\xi_\delta \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\xi_\delta(x) = 1$ $(x \in \overline{Q} \setminus \Gamma_\mu^\delta)$, $\xi_\delta(x) = 0$ $(x \in \Gamma_\mu^{\delta/2})$, $0 \leqslant \xi_\delta(x) \leqslant 1$. По определению $u_\delta \in C^2(Q) \cap C(\overline{Q})$, $A_0 u_\delta(x) = 0$ $(x \in Q \cap \Gamma_\mu^{\delta/2})$. Поскольку $\varphi(x) = 0$ $(x \in \partial Q \setminus \Gamma_\mu)$, то в силу теоремы 36.IV, [23] о гладкости решений эллиптических задач вблизи границы $u_2 \in C^{2+\sigma}(\overline{Q} \setminus \Gamma_\mu^{\delta/3})$. Следовательно, $A_0 u_\delta \in C^\sigma(\overline{Q} \setminus \Gamma_\mu^{\delta/3})$. Выше было доказано, что $A_0 u_\delta(x) = 0$ $(x \in Q \cap \Gamma_\mu^{\delta/2})$. Поэтому $A_0 u_\delta \in C^\sigma(\overline{Q})$. Очевидно,

$$\|u_\delta - u\|_{C(\overline{Q})} \leqslant \|u_1 - u\|_{C(\overline{Q})} + \|u_2 - u\|_{C(\overline{\Gamma_\mu^\delta})} < \varepsilon/4 + 3\varepsilon/4 = \varepsilon.$$

Таким образом, неравенство (4.2.31) доказано.

По построению $u_1(x) = 0$ $(x \in \partial Q \setminus \Gamma_\mu)$. Кроме того, $\mu(x, \overline{Q}) = 0$ $(x \in \partial Q \setminus \Gamma_\mu)$. Поэтому $Lu_1(x) = 0$ $(x \in \partial Q \setminus \Gamma_\mu)$. Из этих равенств, а также из (4.2.33), (4.2.35) следует

$$u_\delta(x) = u_1(x) = 0 = Lu_1(x) \ (x \in \partial Q \setminus \Gamma_\mu^\delta),$$
$$u_\delta(x) = u_2(x) = Lu_1(x) \ (x \in \partial Q \cap \Gamma_\mu^{\delta/2}),$$
$$u_\delta(x) = \xi_\delta(x) u_1(x) + (1 - \xi_\delta(x)) Lu_1(x) = 0 = Lu_1(x) \ (x \in \partial Q \cap (\Gamma_\mu^\delta \setminus \Gamma_\mu^{\delta/2})).$$

Таким образом, $u_\delta(x) = Lu_1(x)$ $(x \in \partial Q)$. Отсюда и из (4.2.31) мы получаем оценку

$$\begin{aligned}\|u_\delta - Lu_\delta\|_{C(\partial Q)} = \|Lu_1 - Lu_\delta\|_{C(\partial Q)} \leqslant \|u_1 - u_\delta\|_{C(\overline{Q})} \leqslant \\ \leqslant \|u_1 - u\|_{C(\overline{Q})} + \|u - u_\delta\|_{C(\overline{Q})} < \varepsilon/4 + \varepsilon < 2\varepsilon,\end{aligned}$$

т. е. выполняется неравенство (4.2.30). □

Лемма 4.2.6. *Предположим, что выполнены условия* 4.1.4, 4.2.1, 4.2.2. *Пусть также выполнены или условия* 4.2.3–4.2.6, *или* 4.2.7, 4.2.8.

Тогда область определения $\mathcal{D}(A_{0B})$ плотна в $C_B(\overline{Q})$.

Доказательство. 1. Пусть $u \in C_B(\overline{Q})$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда в силу леммы 4.2.5 существует $\delta_1 > 0$ такое, что для любого $0 < \delta < \delta_1$ найдется функция $u_\delta \in C^2(Q) \cap C_\mu(\overline{Q})$, удовлетворяющая соотношениям (4.2.30)–(4.2.32). Обозначим $f_\delta = A_0 u_\delta - \lambda u_\delta$, $\psi_\delta = u_\delta - Lu_\delta$.

Тогда функция u_δ является решением задачи

$$\left.\begin{aligned} &A_0 u_\delta(x) - \lambda u_\delta(x) = f_\delta(x) \qquad (x \in Q),\\ &u_\delta(x) - L u_\delta(x) = \psi_\delta(x) \qquad (x \in \partial Q).\end{aligned}\right\} \tag{4.2.39}$$

Рассмотрим также нелокальную задачу

$$\left.\begin{aligned} &A_0 v_\delta(x) - \lambda v_\delta(x) = f_\delta(x) \qquad (x \in Q),\\ &v_\delta(x) - L v_\delta(x) = 0 \qquad (x \in \partial Q).\end{aligned}\right\} \tag{4.2.40}$$

Из леммы 4.2.5 следует, что $f_\delta \in C^\sigma(Q) \cap C(\overline{Q})$. Поэтому в силу лемм 4.2.3, 4.2.4 задача (4.2.40) имеет единственное решение $v_\delta \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{0B})$ при $\lambda > \lambda_0 > 1$.

Кроме того, из леммы 4.2.5 вытекает оценка

$$\|A_0 u_\delta\|_{C(\overline{Q})} \leqslant c(\delta). \tag{4.2.41}$$

Обозначим $w_\delta = u_\delta - v_\delta$. Тогда из (4.2.39), (4.2.40) имеем

$$\left.\begin{aligned} &A_0 w_\delta(x) - \lambda w_\delta(x) = 0 \qquad (x \in Q),\\ &w_\delta(x) - L w_\delta(x) = \psi_\delta(x) \qquad (x \in \partial Q).\end{aligned}\right\} \tag{4.2.42}$$

Эта задача эквивалентна следующему операторному уравнению в $C_\mu(\partial Q)$:

$$\varphi_\delta - L P_\lambda \varphi_\delta = \psi_\delta$$

(см. доказательство леммы 4.2.3), где $w_\delta = P_\lambda \varphi_\delta$. Из леммы 4.2.2 и доказательства леммы 4.2.4 следует, что оператор $I - LP_\lambda : C_\mu(\partial Q) \to C_\mu(\partial Q)$ имеет ограниченный обратный $(I - LP_\lambda)^{-1}$ с нормой $\|(I - LP_\lambda)^{-1}\| \leqslant q$ при $\lambda > \lambda_0$. Отсюда $w_\delta = P_\lambda (I - LP_\lambda)^{-1} \psi_\delta$. В силу леммы 4.2.5 можно выбрать $\delta > 0$ так, что $\|\psi_\delta\|_{C(\partial Q)} < \varepsilon / q$. Поэтому из оценки $\|(I - LP_\lambda)^{-1}\| \leqslant q$ следует, что

$$\|w_\delta\|_{C(\overline{Q})} < q \frac{\varepsilon}{q} = \varepsilon. \tag{4.2.43}$$

2. Рассмотрим теперь задачу

$$\left.\begin{aligned} &A_0 \tilde{v}_\delta(x) - \lambda \tilde{v}_\delta(x) = -\lambda v_\delta(x) \qquad (x \in Q),\\ &\tilde{v}_\delta(x) - L \tilde{v}_\delta(x) = 0 \qquad (x \in \partial Q).\end{aligned}\right\} \tag{4.2.44}$$

Так как $v_\delta \in C^2(Q) \cap C_B(\overline{Q})$, вследствие лемм 4.2.3 и 4.2.4 задача (4.2.44) имеет единственное решение $\tilde{v}_\delta \in \mathcal{D}(A_{0B})$ при $\lambda > \lambda_0$. Обозначим $\tilde{w}_\delta = v_\delta - \tilde{v}_\delta$. Тогда из (4.2.40), 4.2.44 следует, что

$$\left.\begin{aligned} &A_0\tilde{w}_\delta(x) - \lambda\tilde{w}_\delta(x) = A_0 v_\delta(x) && (x \in Q),\\ &\tilde{w}_\delta(x) - L\tilde{w}_\delta(x) = 0 && (x \in \partial Q). \end{aligned}\right\} \tag{4.2.45}$$

В силу (4.2.39), (4.2.40) имеем

$$A_0 v_\delta(x) = A_0 u_\delta(x) - \lambda w_\delta(x).$$

Отсюда, а также из неравенств (4.2.20), (4.2.41) и (4.2.43) следует, что

$$\|\tilde{w}_\delta\|_{C(\overline{Q})} \leqslant \frac{1}{\lambda}\|A_0 u_\delta - \lambda w_\delta\|_{C(\overline{Q})} \leqslant \frac{1}{\lambda}(c(\delta) + \lambda\varepsilon). \tag{4.2.46}$$

Для $\lambda > \max\{\lambda_0, c(\delta)/\varepsilon\}$ имеем

$$\|\tilde{w}_\delta\|_{C(\overline{Q})} \leqslant 2\varepsilon.$$

Таким образом, для произвольного $\varepsilon > 0$
$\|u - \tilde{v}_\delta\|_{C(\overline{Q})} \leqslant \|u - u_\delta\|_{C(\overline{Q})} + \|u_\delta - v_\delta\|_{C(\overline{Q})} + \|v_\delta - \tilde{v}_\delta\|_{C(\overline{Q})} < 4\varepsilon.$ □

Существование полугрупп Феллера для многомерных диффузионных процессов

Из предыдущих результатов мы получаем достаточные условия существования полугруппы Феллера.

Теорема 4.2.1. *Предположим, что выполнены условия* 4.1.4, 4.2.1, 4.2.2. *Пусть также выполнены условия* 4.2.3–4.2.6, *или* 4.2.7, 4.2.8.

Тогда оператор $\overline{A_{0B}} : \mathcal{D}(\overline{A_{0B}}) \subset C_B(\overline{Q}) \to C_B(\overline{Q})$ *является инфинитезимальным производящим оператором полугруппы Феллера на* $C_B(\overline{Q})$*, которая однозначно определяется оператором* A_{0B}*.*

Доказательство. В силу леммы 4.2.6 область определения $\mathcal{D}(A_{0B})$ плотна в $C_B(\overline{Q})$. Из лемм 4.2.3, 4.2.4 следует, что образ $\mathcal{R}(\lambda I - \mathcal{A}_{0B})$ плотен в $C(\overline{Q})$ при $\lambda > \lambda_0$. Из лемм 4.2.6, 4.2.3 и 4.2.4, в свою очередь, вытекает, что образ $\mathcal{R}(\lambda I - A_{0B})$ плотен в $C_B(\overline{Q})$ при $\lambda > \lambda_0$. Таким образом, в силу лемм 4.1.2, 4.2.1 оператор $\overline{A_{0B}} : C_B(\overline{Q}) \to C_B(\overline{Q})$ является инфинитезимальным производящим оператором полугруппы Феллера на $C_B(\overline{Q})$, которая однозначно определяется оператором A_{0B}. □

4.3. Полугруппа Феллера, порожденная эллиптическим интегро-дифференциальным оператором

В этом параграфе мы будем рассматривать возмущение эллиптического дифференциального оператора интегральным оператором. Для этого нам потребуется наложить некоторые дополнительные ограничения типа гладкости на нелокальные члены. Вначале мы рассмотрим вопрос о разрешимости нелокальных задач для эллиптических дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в пространствах Гёльдера. Затем мы докажем плотность области определения соответствующего эллиптического интегро-дифференциального оператора в $C_B(\overline{Q})$. Как следствие результатов, упомянутых выше, мы получим достаточные условия существования полугруппы Феллера. Интегральный член в интегро-дифференциальном операторе вида (4.1.2) соответствует диффузионному процессу в живой клетке, когда частица может перепрыгнуть из одной точки клетки в другую.

Разрешимость нелокальной задачи для эллиптического дифференциального уравнения в пространстве Гёльдера

Мы будем предполагать в этом параграфе, что коэффициенты эллиптического дифференциального оператора A_0 удовлетворяют следующим условиям: $a_{ij},\ a_i,\ a \in C^{s+\sigma}(\overline{Q})$ $(i, j = 1, \dots, n)$, где $s = \max\{0, k-2\}$, $k \geqslant 0$ — целое число, $0 < \sigma < 1$.

Обозначим $C_\mu^{k+\sigma}(\Omega) = C_\mu(\Omega) \cap C^{k+\sigma}(\Omega)$, где $\Omega = \overline{Q}$ или $\Omega = \partial Q$.

Предположим, что существуют неотрицательные борелевские меры $\mu_i(x, \cdot)$ на $\overline{Q}$ $(x \in \partial Q,\ i = 1, 2, 3)$ такие, что $\mu(x, \cdot) = \sum\limits_{i=1}^{3} \mu_i(x, \cdot)$, а соответствующие операторы B_i $(i = 1, 2, 3)$ и $B_{2\delta}^j$ $(j = 1, 2)$, определенные по формулам (4.2.2)–(4.2.4), удовлетворяют следующим условиям.

Условие 4.3.1. $\gamma_0 \in C^{k+\sigma}(\partial Q)$.

Условие 4.3.2. Оператор $B_1 : C_\mu^{k+\sigma}(\overline{Q}) \to C_\mu^{k+\sigma}(\partial Q)$ — ограничен, причем носитель меры $\mu_1(x, \cdot)$ удовлетворяет условиям 4.2.4, 4.2.5.

Условие 4.3.3. Существует $\delta_0 > 0$ такое, что для $0 < \delta < \delta_0$ операторы $B^1_{2\delta} : C^{k+\sigma}(\overline{\Gamma^\delta_\mu}) \to C^{k+\sigma}_\mu(\partial Q)$ и $B^2_{2\delta} : C^{k+\sigma}(\overline{Q} \setminus \Gamma^\delta_\mu) \to C^{k+\sigma}_\mu(\partial Q)$ — ограничены и $\|B^1_{2\delta}\|_{k+\sigma} \leqslant c_1(\delta)$, $\|B^2_{2\delta}\|_{k+\sigma} \leqslant c_2$, где $c_1(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$, $c_2 > 0$ не зависит от δ, $\|\cdot\|_{k+\sigma}$ — норма оператора, действующего в соответствующих пространствах Гёльдера.

Условие 4.3.4. Оператор $B_3 : C(\overline{Q}) \to C^{k+\sigma}_\mu(\partial Q)$ — ограниченный.

Замечание 4.3.1. Из условий 4.3.2–4.3.4 следует, что $\mu_1(x, \overline{Q}) \in C^{k+\sigma}(\partial Q \setminus K_1)$, $\mu_i(x, \overline{Q}) \in C^{k+\sigma}(\partial Q)$ $(i = 2, 3)$ и $\mu_2(x, \Gamma_\mu) = 0$ $(x \in \partial Q)$. Последнее утверждение вытекает из условия 4.3.3, а два других доказываются аналогично соответствующим утверждениям из замечания 4.2.4.

Лемма 4.3.1. *Пусть выполнены условия* 4.1.4, 4.2.2, 4.3.1–4.3.4.

Тогда для каждого $\lambda > 0$ уравнение

$$(\mathcal{A}_{0B} - \lambda I)u = f \tag{4.3.1}$$

имеет единственное решение $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{0B}) \cap C^{k+\sigma}\overline{Q})$ для любой функции $f \in C^{s+\sigma}(\overline{Q})$ и

$$\|u\|_{C(\overline{Q})} \leqslant \frac{1}{\lambda}\|f\|_{C(\overline{Q})}, \tag{4.3.2}$$

где $0 < \sigma < 1$, $s = \max\{0, k-2\}$. Кроме того, оператор $(\mathcal{A}_{0B} - \lambda I)^{-1} : C^{s+\sigma}(\overline{Q}) \to C^{s+\sigma}(\overline{Q})$ — компактный для $\lambda > 0$.

Доказательство. 1. В силу замечания 4.2.1 нелокальное условие (4.2.1) можно переписать в виде

$$u(x) - Lu(x) = 0 \qquad (x \in \partial Q) \tag{4.3.3}$$

(ср. (4.2.5), (4.2.6)).

Таким образом, операторное уравнение (4.3.1) эквивалентно нелокальной задаче для эллиптического уравнения

$$\left.\begin{aligned} &A_0u(x) - \lambda u(x) = f(x) \qquad &(x \in Q),\\ &u(x) - Lu(x) = 0 &(x \in \partial Q),\end{aligned}\right\} \tag{4.3.4}$$

где $\lambda > 0$.

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\left.\begin{aligned} &A_0v(x)-\lambda v(x)=f(x) \qquad && (x\in Q),\\ &v(x)=0 && (x\in\partial Q).\end{aligned}\right\} \tag{4.3.5}$$

В силу теоремы 36.IV в [23] для любого $f\in C^{s+\sigma}(\overline{Q})$ существует единственное решение задачи (4.3.5) $v\in C^{s+2+\sigma}(\overline{Q})$. Очевидно, $s+2+\sigma=k+\sigma$, если $k\geqslant 2$, и $s+2+\sigma=2+\sigma$, если $k=0,1$. Пусть $w=u-v$. Тогда из (4.3.4), (4.3.5) получим

$$\left.\begin{aligned} &A_0w(x)-\lambda w(x)=0 \qquad && (x\in Q),\\ &w(x)-Lw(x)=Lv(x) && (x\in\partial Q).\end{aligned}\right\} \tag{4.3.6}$$

Итак, уравнение (4.3.1) относительно функции $u\in\mathcal{D}(\mathcal{A}_{0B})\cap C^{k+\sigma}(\overline{Q})$ эквивалентно задаче (4.3.6) относительно функции $w\in C^2(Q)\cap C^{k+\sigma}_{\mu}(\overline{Q})$. Для сведения задачи (4.3.6) на границу мы будем использовать оператор P_λ, введенный в § 4.2. Оператор $P_\lambda: C^{k+\sigma}(\partial Q)\to C^{k+\sigma}(\overline{Q})$ — ограниченный. При $k\geqslant 2$ данное утверждение вытекает из теорем 35.II и 35.VI в [23]. При $k=0,\ 1$ ограниченность оператора $P_\lambda: C^{k+\sigma}(\partial Q)\to C^{k+\sigma}(\overline{Q})$ следует из ограниченности операторов $P_\lambda: C(\partial Q)\to C(\overline{Q})$ и $P_\lambda: C^{2+\sigma}(\partial Q)\to C^{2+\sigma}(\overline{Q})$, а также из интерполяционной теоремы 1, гл. 4, § 4.5 в [37]. Поэтому задача (4.3.6) для функции $w\in C^2(Q)\cap C^{k+\sigma}_{\mu}(\overline{Q})$ эквивалентна операторному уравнению

$$\psi-LP_\lambda\psi=Lv \tag{4.3.7}$$

относительно функции $\psi\in C^{k+\sigma}_{\mu}(\partial Q)$, где $P_\lambda\psi=w$, $\lambda>0$.

2. Докажем, что для любого $\lambda>0$ оператор $I-LP_\lambda: C^{k+\sigma}_{\mu}(\partial Q)\to C^{k+\sigma}_{\mu}(\partial Q)$ — фредгольмов, и $\operatorname{ind}(I-LP_\lambda)=0$.

В силу условия 4.2.5 для любого $0<\varkappa<\varkappa_0$ существует $\varepsilon>0$ такое, что

$$\operatorname{spt}\mu_1(x,\cdot)\subset\overline{Q}_\varepsilon \qquad (x\in\partial Q\setminus K_1^{\varkappa/2}). \tag{4.3.8}$$

Введем срезающую функцию $\xi_\varepsilon\in\dot{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ так, что $0\leqslant\xi_\varepsilon(x)\leqslant 1$, $\xi_\varepsilon(x)=1$ $(x\in\overline{Q}_\varepsilon)$, $\xi_\varepsilon(x)=0$ $(x\notin\overline{Q}_{\varepsilon/2})$. Тогда для данного $\varepsilon>0$ и любого $\delta>0$ уравнение (4.3.7) можно записать в виде

$$\psi-L_1(1-\xi_\varepsilon)P_\lambda\psi-L_1\xi_\varepsilon P_\lambda\psi-L^1_{2\delta}P_\lambda\psi-L^2_{2\delta}P_\lambda\psi-L_3P_\lambda\psi=Lv. \tag{4.3.9}$$

Здесь операторы L_i $(i=1,2,3)$, $L^j_{2\delta}$ $(j=1,2)$ определены по формулам (4.2.7), (4.2.8).

Из теорем 35.IV, 35.VI и 36.IV в [23] следует, что оператор $P_\lambda : C_\mu(\partial Q) \to C^{k+\sigma}(\overline{Q}\setminus\Gamma^{\varepsilon_1}_\mu)$ — ограниченный, где $\varepsilon_1 = \min\{\varepsilon/2, \delta\}$. Очевидно, оператор вложения $C^{k+\sigma}(\partial Q)$ в $C(\partial Q)$ — компактный, а поэтому и оператор $P_\lambda : C^{k+\sigma}_\mu(\partial Q) \to C^{k+\sigma}(\overline{Q}\setminus\Gamma^{\varepsilon_1}_\mu)$ — компактен. Отсюда, а также из замечания 4.2.1 и условий 4.3.1–4.3.4 следует, что операторы $L_1\xi_\varepsilon P_\lambda$, $L^2_{2\delta}P_\lambda$, $L_3P_\lambda : C^{k+\sigma}_\mu(\partial Q) \to C^{k+\sigma}_\mu(\partial Q)$ — компактны.

Рассмотрим теперь оператор $L_1(1-\xi_\varepsilon)P_\lambda : C^{k+\sigma}_\mu(\partial Q) \to C^{k+\sigma}_\mu(\partial Q)$. Из определения функции $\xi_\varepsilon(x)$ следует, что $(1-\xi_\varepsilon)P_\lambda\varphi(x) = 0 \quad (x \in \overline{Q}_\varepsilon)$. Поэтому в силу (4.3.8)

$$\operatorname{supp} L_1(1-\xi_\varepsilon)P_\lambda\varphi \subset \partial Q \cap \overline{K^{\varkappa/2}_1}. \qquad (4.3.10)$$

Из (4.2.7) и принципа максимума следует, что

$$\|L_1(1-\xi_\varepsilon)P_\lambda\varphi\|_{C(\partial Q)} \leqslant \|\varphi\|_{C(\partial Q)} \qquad (\varphi \in C^{k+\sigma}_\mu(\partial Q)). \qquad (4.3.11)$$

Из (4.3.10), (4.3.11) и теорем 35.IV, 35.VI и 36.IV в [23] вытекает неравенство

$$\|P_\lambda L_1(1-\xi_\varepsilon)P_\lambda\varphi\|_{C^{k+\sigma}(\overline{Q}\setminus K^{\varkappa}_1)} \leqslant c_0\|L_1(1-\xi_\varepsilon)P_\lambda\varphi\|_{C(\partial Q)} \leqslant$$
$$\leqslant c_0\|\varphi\|_{C(\partial Q)} \quad (\varphi \in C^{k+\sigma}_\mu(\partial Q)), \quad (4.3.12)$$

где $c_0 > 0$ не зависит от φ. В силу условия 4.2.4 $\operatorname{spt}\mu_1(x,\cdot) \subset \overline{Q}\setminus K^{\varkappa}_1$. Отсюда и из (4.3.12) следует, что оператор $(L_1(1-\xi_\varepsilon)P_\lambda)^2 : C^{k+\sigma}_\mu(\partial Q) \to C^{k+\sigma}_\mu(\partial Q)$ — компактен.

Оператор $I - LP_\lambda$ можно записать в виде

$$I - LP_\lambda = I - L_1(1-\xi_\varepsilon)P_\lambda - L_1\xi_\varepsilon P_\lambda - L^1_{2\delta}P_\lambda - L^2_{2\delta}P_\lambda - L_3P_\lambda.$$

В силу теорем А.6, А.7 и условий 4.3.3, 4.3.1 для достаточно малых $\delta > 0$ оператор $I - L_1(1-\xi_\varepsilon)P_\lambda - L^1_{2\delta}P_\lambda : C^{k+\sigma}_\mu(\partial Q) \to C^{k+\sigma}_\mu(\partial Q)$ — фредгольмов и $\operatorname{ind}(I - L_1(1-\xi_\varepsilon)P_\lambda - L^1_{2\delta}P_\lambda) = 0$. Так как операторы $L_1\xi_\varepsilon P_\lambda$, $L^2_{2\delta}P_\lambda$, $L_3P_\lambda : C^{k+\sigma}_\mu(\partial Q) \to C^{k+\sigma}_\mu(\partial Q)$ — компактны, из теоремы А.7 следует, что для любого $\lambda > 0$ оператор $I - LP_\lambda : C^{k+\sigma}_\mu(\partial Q) \to C^{k+\sigma}_\mu(\partial Q)$ фредгольмов и $\operatorname{ind}(I - LP_\lambda) = 0$.

3. Пусть теперь $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{0B})$ — решение уравнения (4.3.1) для $f \in C^{s+\sigma}(\overline{Q})$. Тогда, пользуясь леммой 4.2.1, аналогично доказательству леммы 4.2.3 мы получаем неравенство (4.3.2). Отсюда следует, что уравнение (4.3.7) имеет единственное тривиальное решение при $v = 0$. А поскольку оператор $I - LP_\lambda : C_\mu^{k+\sigma}(\partial Q) \to C_\mu^{k+\sigma}(\partial Q)$ — фредгольмов и $\operatorname{ind}(I - LP_\lambda) = 0$, то уравнение (4.3.7) имеет единственное решение $\psi \in C_\mu^{k+\sigma}(\partial Q)$ для любого $Lv \in C_\mu^{k+\sigma}(\partial Q)$. Таким образом, при $\lambda > 0$ уравнение (4.3.1) имеет единственное решение $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{0B}) \cap C_\mu^{k+\sigma}(\overline{Q})$ для любого $f \in C^{s+\sigma}(\overline{Q})$.

4. Для того чтобы завершить доказательство, нам остается показать, что для любого $\lambda > 0$ оператор $(\mathcal{A}_{0B} - \lambda I)^{-1} : C^{s+\sigma}(\overline{Q}) \to C^{s+\sigma}(\overline{Q})$ — компактный. Мы доказали, что оператор $I - LP_\lambda : C_\mu^{k+\sigma}(\partial Q) \to C_\mu^{k+\sigma}(\partial Q)$ имеет ограниченный обратный $(I - LP_\lambda)^{-1} : C_\mu^{k+\sigma}(\partial Q) \to C_\mu^{k+\sigma}(\partial Q)$. Очевидно,

$$
\begin{aligned}
u = (\mathcal{A}_{0B} - \lambda I)^{-1} f = v + P_\lambda \psi = v + P_\lambda (I - LP_\lambda)^{-1} Lv = \\
= G_\lambda f + P_\lambda (I - LP_\lambda)^{-1} L G_\lambda f,
\end{aligned}
$$

где G_λ — оператор, введенный в доказательстве леммы 4.2.3. Таким образом,

$$
(\mathcal{A}_{0B} - \lambda I)^{-1} = G_\lambda + P_\lambda (I - LP_\lambda)^{-1} L G_\lambda .
$$

В силу замечания 4.2.1 и условий 4.3.1–4.3.4 оператор $L : C_\mu^{k+\sigma}(\overline{Q}) \to C_\mu^{k+\sigma}(\partial Q)$ — ограниченный. А поскольку операторы $P_\lambda : C_\mu^{k+\sigma}(\partial Q) \to C_\mu^{k+\sigma}(\overline{Q})$ и $G_\lambda : C_\mu^{s+\sigma}(\partial Q) \to C_\mu^{s+2+\sigma}(\overline{Q})$ — также ограниченные, из компактности вложения $C^{s+2+\sigma}(\overline{Q})$ в $C^{s+\sigma}(\overline{Q})$ и в $C^{s+1+\sigma}(\overline{Q})$ следует, что оператор $(\mathcal{A}_{0B} - \lambda I)^{-1} : C^{s+\sigma}(\overline{Q}) \to C^{s+\sigma}(\overline{Q})$ — компактный. $\square$

Замечание 4.3.2. Отметим, что для справедливости леммы 4.3.1 не требуется выполнения условия 4.2.6 для оператора $B_2' = B - B_1 = B_2 + B_3$ или условия 4.2.8 для оператора B (ср. леммы 4.2.3, 4.2.4).

Разрешимость нелокальной задачи для эллиптического интегро-дифференциального уравнения в пространстве Гёльдера

Основная идея доказательства теоремы об однозначной разрешимости заключается в том, что оператор A_1 является вполне непрерывным возмущением относительно оператора $\mathcal{A}_{0B}$.

Теорема 4.3.1. *Пусть выполнены условия* 4.1.4, 4.2.2, 4.3.1–4.3.4*, а также условие* 4.1.5 *с показателем* $s = \max\{0, k-2\}$.

Тогда при всех $\lambda > 0$ *уравнение*

$$(\mathcal{A}_B - \lambda I)u = f \tag{4.3.13}$$

имеет единственное решение $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_B) \cap C^{k+\sigma}(\overline{Q})$ *для любой* $f \in C^{s+\sigma}(\overline{Q})$ *и*

$$\|u\|_{C(\overline{Q})} \leqslant \frac{1}{\lambda}\|f\|_{C(\overline{Q})}, \tag{4.3.14}$$

где $0 < \sigma < 1$*. Более того, оператор* $(\mathcal{A}_B-\lambda I)^{-1} : C^{s+\sigma}(\overline{Q}) \to C^{s+\sigma}(\overline{Q})$ *— компактный.*

Доказательство. В силу леммы 4.3.1 оператор $\mathcal{A}_B - \lambda I$ можно записать в виде

$$\mathcal{A}_B - \lambda I = (I + A_1(\mathcal{A}_{0B} - \lambda I)^{-1})(\mathcal{A}_{0B} - \lambda I).$$

Из условия 4.1.5, замечания 4.1.1 и леммы 4.3.1 следует, что оператор $A_1(\mathcal{A}_{0B} - \lambda I)^{-1} : C^{s+\sigma}(\overline{Q}) \to C^{s+\sigma}(\overline{Q})$ — компактный. Используя лемму 4.2.1 и рассуждая так же, как в доказательстве леммы 4.2.3, мы получаем оценку (4.3.14) для всех $f \in \mathcal{R}(\mathcal{A}_B - \lambda I)$ и $\lambda > 0$. Таким образом, однородное уравнение $(\mathcal{A}_B - \lambda I)v = 0$ имеет единственное решение $v = 0$. Следовательно, $\mathcal{N}(I+A_1(\mathcal{A}_{0B}-\lambda I)^{-1}) = \{0\}$. Поэтому существует ограниченный обратный оператор $(I + A_1(\mathcal{A}_{0B} - \lambda I)^{-1})^{-1} : C^{s+\sigma}(\overline{Q}) \to C^{s+\sigma}(\overline{Q})$. Таким образом, уравнение (4.3.13) имеет единственное решение $u = (\mathcal{A}_{0B} - \lambda I)^{-1}(I + A_1(\mathcal{A}_{0B} - \lambda I)^{-1})^{-1}f \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_B) \cap C^{k+\sigma}(\overline{Q})$ для любой $f \in C^{s+\sigma}(\overline{Q})$. Более того, оператор $(\mathcal{A}_B - \lambda I)^{-1} = (\mathcal{A}_{0B} - \lambda I)^{-1}(I + A_1(\mathcal{A}_{0B} - \lambda I)^{-1})^{-1} : C^{s+\sigma}(\overline{Q}) \to C^{s+\sigma}(\overline{Q})$ компактен. $\square$

Плотность области определения

В этом пункте мы докажем плотность $\mathcal{D}(A_B)$ в $C_B(\overline{Q})$.

Аналогично доказательству леммы 4.2.5 мы можем получить следующий результат.

Лемма 4.3.2. *Пусть выполнены условия* 4.1.4, 4.2.2, 4.3.1–4.3.4.

Тогда для любых $\varepsilon > 0$ *и* $u \in C_B(\overline{Q})$ *существует* $\delta_1 > 0$ *такое, что для всякого* $0 < \delta < \delta_1$ *найдётся функция* $u_\delta \in C^{s+2+\sigma}(Q) \cap C_\mu^{s+\sigma}(\overline{Q})$, *обладающая свойствами:*

$$\|u_\delta - Lu_\delta\|_{C(\partial Q)} < 2\varepsilon, \tag{4.3.15}$$

$$\|u - u_\delta\|_{C(\overline{Q})} < \varepsilon, \tag{4.3.16}$$

$$A_0 u_\delta \in C^{s+\sigma}(\overline{Q}), \qquad A_0 u_\delta(x) = 0 \quad (x \in Q \cap \Gamma_\mu^{\delta/2}). \tag{4.3.17}$$

В дальнейшем мы также будем предполагать, что выполнено следующее условие.

Условие 4.3.5. $\sup\limits_{x \in \partial Q} \mu_3(x, \overline{\Gamma_\mu^\delta}) \to 0$ при $\delta \to 0$.

Замечание 4.3.3. Пусть выполнены условия 4.1.4, 4.2.2, 4.3.1–4.3.5. Тогда справедливо утверждение леммы 4.2.2. Действительно, множества $C_\mu^{k+\sigma}(\overline{Q})$, $C^{k+\sigma}(\overline{Q})$ всюду плотны в пространствах $C_\mu(\overline{Q})$, $C(\overline{Q})$ соответственно. Поэтому в силу условий 4.3.2, 4.3.3 и замечания 4.2.3 операторы $B_1 : C_\mu^{k+\sigma}(\overline{Q}) \to C_\mu^{k+\sigma}(\partial Q)$ и $B_2 : C^{k+\sigma}(\overline{Q}) \to C_\mu^{k+\sigma}(\partial Q)$ могут быть расширены до ограниченных операторов, действующих из $C_\mu(\overline{Q})$ в $C_\mu(\partial Q)$ и из $C(\overline{Q})$ в $C_\mu(\partial Q)$ соответственно. Обозначим эти расширения также через B_1 и B_2. Из определения данных расширений и условия 4.3.4 следует, что операторы B_1 и $B_2' = B_2 + B_3$ удовлетворяют условию 4.2.3. Кроме того, из условий 4.3.3 и 4.3.5 следует, что оператор $L_{2\delta}' = \frac{1}{\gamma_0(x)}(B_{2\delta}^1 + B_{3\delta}^1)$ удовлетворяет условию 4.2.6, где

$$B_{i\delta}^1 v(x) = \int\limits_{\Gamma_\mu^\delta} v(y)\mu_i(x, dy) \qquad (i = 2, 3).$$

Таким образом, выполняются все условия леммы 4.2.2.

Для области определения $\mathcal{D}(A_B)$ мы установим ниже лемму 4.3.3, аналогичную лемме 4.2.6. Доказательство леммы 4.3.3 во многом близко к доказательству леммы 4.2.6. Однако наличие интегрального оператора A_1 заметно усложняет рассуждения. Поэтому мы приведем полностью формулировку и доказательство леммы 4.3.3.

Лемма 4.3.3. *Пусть выполнены условия* 4.1.4, 4.2.2, 4.3.1–4.3.5, *а также условие* 4.1.5 *с показателем* $s = \max\{0, k-2\}$.

Тогда множество $\mathcal{D}(A_B) \cap C^{k+\sigma}(\overline{Q})$ *плотно в* $C_B(\overline{Q})$.

Доказательство. 1. Пусть $u \in C_B(\overline{Q})$. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Тогда в силу леммы 4.3.2 существует $\delta_1 > 0$ такое, что для любого $0 < \delta < \delta_1$ найдется функция $u_\delta \in C^{s+2+\sigma}(Q) \cap C^{s+\sigma}(\overline{Q})$, обладающая свойствами (4.3.15)–(4.3.17). Обозначим $f_\delta = Au_\delta - \lambda u_\delta$, $\psi_\delta = u_\delta - Lu_\delta$. Тогда функция u_δ является решением задачи

$$\left.\begin{aligned} Au_\delta(x) - \lambda u_\delta(x) &= f_\delta(x) \qquad (x \in Q),\\ u_\delta(x) - Lu_\delta(x) &= \psi_\delta(x) \qquad (x \in \partial Q). \end{aligned}\right\} \tag{4.3.18}$$

Рассмотрим также нелокальную задачу

$$\left.\begin{aligned} Av_\delta(x) - \lambda v_\delta(x) &= f_\delta(x) \qquad (x \in Q),\\ v_\delta(x) - Lv_\delta(x) &= 0 \qquad\qquad (x \in \partial Q). \end{aligned}\right\} \tag{4.3.19}$$

В силу (4.3.17), условия 4.1.5 и замечания 4.1.1 $f_\delta \in C^{s+\sigma}(\overline{Q})$. С другой стороны, из леммы 4.3.2 следует, что

$$\|A_0 u_\delta\|_{C(\overline{Q})} \leqslant c(\delta). \tag{4.3.20}$$

Поэтому в силу теоремы 4.3.1 и замечания 4.1.2 задача (4.3.19) имеет единственное решение $v_\delta \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_B) \cap C^{k+\sigma}(\overline{Q})$ при $\lambda > 1$, и

$$\|v_\delta\|_{C(\overline{Q})} \leqslant \frac{1}{\lambda}\|f_\delta\|_{C(\overline{Q})} \leqslant c(\delta)\lambda^{-1} + k_1, \tag{4.3.21}$$

где $k_1 > 1$ не зависит от δ и λ.

Обозначим $w_\delta = u_\delta - v_\delta$. Тогда из (4.3.18), (4.3.19) следует

$$\left.\begin{aligned} Aw_\delta(x) - \lambda w_\delta(x) &= 0 \qquad\qquad (x \in Q),\\ w_\delta(x) - Lw_\delta(x) &= \psi_\delta(x) \qquad (x \in \partial Q). \end{aligned}\right\} \tag{4.3.22}$$

Так как $w_\delta \in C^{s+\sigma}(\overline{Q})$, пользуясь условием 4.1.5 и замечанием 4.1.1, мы получим $A_1 w_\delta \in C^{s+\sigma}(\overline{Q})$. Поэтому в силу теоремы 36.IV см. [23] и неравенства (4.3.2) задача Дирихле

$$\left.\begin{aligned} A_0 w_\delta^1(x) - \lambda w_\delta^1(x) = -A_1 w_\delta(x) \qquad & (x \in Q), \\ w_\delta^1(x) = 0 \qquad & (x \in \partial Q) \end{aligned}\right\} \tag{4.3.23}$$

имеет единственное решение $w_\delta^1 \in C^{s+2+\sigma}(\overline{Q})$ и

$$\|w_\delta^1\|_{C(\overline{Q})} \leqslant \frac{1}{\lambda} \|A_1 w_\delta\|_{C(\overline{Q})}$$

при $\lambda > 1$.

Отсюда, из замечания 4.1.2 и неравенства (4.3.21) следует, что

$$\|w_\delta^1\|_{C(\overline{Q})} \leqslant \frac{k_2}{\lambda} \tag{4.3.24}$$

при $\lambda > \max\{\lambda_1, c(\delta)\}$, где $k_2 > 0$ не зависит от λ и δ.

Обозначим $w_\delta^2 = w_\delta - w_\delta^1$. Тогда из (4.3.22), (4.3.23) следует

$$\left.\begin{aligned} A_0 w_\delta^2(x) - \lambda w_\delta^2(x) = 0 \quad & (x \in Q), \\ w_\delta^2(x) - L w_\delta^2(x) = L w_\delta^1(x) + \psi_\delta(x) \quad & (x \in \partial Q). \end{aligned}\right\}$$

Очевидно, функция $\varphi_\delta = w_\delta^2|_{\partial Q}$ удовлетворяет следующему операторному уравнению в $C_\mu(\partial Q)$:

$$\varphi_\delta - L P_\lambda \varphi_\delta = L w_\delta^1 + \psi_\delta$$

(ср. доказательства лемм 4.2.3, 4.2.6). В силу леммы 4.2.2 и замечания 4.3.3 существует $\lambda_0 > 1$ такое, что оператор $I - LP_\lambda$ имеет ограниченный обратный $(I - LP_\lambda)^{-1} : C_\mu(\partial Q) \to C_\mu(\partial Q)$ с нормой $\|(I - LP_\lambda)^{-1}\| \leqslant q$ при $\lambda > \max\{\lambda_0, c(\delta)\}$, где $q > 0$ не зависит от λ. Отсюда

$$w_\delta^2 = P_\lambda (I - LP_\lambda)^{-1} (L w_\delta^1 + \psi_\delta).$$

Вследствие леммы 4.3.2 можно выбрать $\delta > 0$ так, что

$$\|\psi_\delta\|_{C(\partial Q)} < \min\{2\varepsilon,\ \varepsilon/2q\}.$$

Отсюда следует, что

$$\|w_\delta^2\|_{C(\overline{Q})} \leqslant q(\|w_\delta^1\|_{C(\overline{Q})} + \frac{\varepsilon}{2q}).$$

Таким образом, в силу (4.3.24) мы имеем

$$\|w_\delta\|_{C(\overline{Q})} \leqslant \|w_\delta^1\|_{C(\overline{Q})} + \|w_\delta^2\|_{C(\overline{Q})} \leqslant \frac{(q+1)k_2}{\lambda} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \tag{4.3.25}$$

при $\lambda > \max\{\lambda_0, c(\delta), 2(q+1)k_2/\varepsilon\} = \lambda_1$.

2. Рассмотрим теперь задачу

$$\left.\begin{aligned} A\tilde{v}_\delta(x) - \lambda\tilde{v}_\delta(x) = -\lambda v_\delta(x) \qquad & (x \in Q), \\ \tilde{v}_\delta(x) - L\tilde{v}_\delta(x) = 0 \qquad & (x \in \partial Q). \end{aligned}\right\} \tag{4.3.26}$$

Так как $v_\delta \in C^{k+\sigma}(\overline{Q}) \cap C_B(\overline{Q})$, по теореме 4.3.1 задача (4.3.26) имеет единственное решение $\tilde{v}_\delta \in \mathcal{D}(A_B) \cap C^{k+\sigma}(\overline{Q})$ при $\lambda > \lambda_1$. Обозначим $\tilde{w}_\delta = v_\delta - \tilde{v}_\delta$. Тогда из (4.3.19), (4.3.26) следует, что

$$\left.\begin{aligned} A\tilde{w}_\delta(x) - \lambda\tilde{w}_\delta(x) = Av_\delta(x) \qquad & (x \in Q), \\ \tilde{w}_\delta(x) - L\tilde{w}_\delta(x) = 0 \qquad & (x \in \partial Q). \end{aligned}\right\} \tag{4.3.27}$$

В силу (4.3.18), (4.3.19) имеем

$$Av_\delta(x) = Au_\delta(x) - \lambda w_\delta(x).$$

Отсюда, а также из неравенств (4.3.14), (4.3.25), (4.3.20), замечаний 4.1.1, 4.1.2 и леммы 4.3.2 следует

$$\|\tilde{w}_\delta\|_{C(\overline{Q})} \leqslant \frac{1}{\lambda}\|Au_\delta - \lambda w_\delta\|_{C(\overline{Q})} \leqslant \frac{1}{\lambda}(c(\delta) + k_3 + \lambda\varepsilon),$$

где $k_3 > 0$ не зависит от λ и δ.

Выбирая λ так, что $\lambda > \max\{\lambda_1, (c(\delta)+k_3)/\varepsilon\}$, мы получаем неравенство

$$\|\tilde{w}_\delta\|_{C(\overline{Q})} \leqslant 2\varepsilon. \tag{4.3.28}$$

Таким образом, для произвольного $\varepsilon > 0$ существует функция $\tilde{v}_\delta \in \mathcal{D}(A_B) \cap C^{k+\sigma}(\overline{Q})$ такая, что
$\|u - \tilde{v}_\delta\|_{C(\overline{Q})} \leqslant \|u - u_\delta\|_{C(\overline{Q})} + \|u_\delta - v_\delta\|_{C(\overline{Q})} + \|v_\delta - \tilde{v}_\delta\|_{C(\overline{Q})} \leqslant 4\varepsilon.$ $\square$

Полугруппы Феллера для многомерных диффузионных процессов со скачками внутри области

Теперь мы можем доказать теорему о существовании полугруппы Феллера, порожденной эллиптическим интегро-дифференциальным оператором.

Теорема 4.3.2. *Пусть выполнены условия* 4.1.4, 4.1.5, 4.2.2, 4.3.1–4.3.5.

Тогда оператор $\overline{A}_B : C_B(\overline{Q}) \to C_B(\overline{Q})$ *является инфинитезимальным производящим оператором полугруппы Феллера на* $C_B(\overline{Q})$, *которая однозначно определяется оператором* A_B.

Доказательство. В силу леммы 4.3.3 множество $\mathcal{D}(A_B)$ всюду плотно в $C_B(\overline{Q})$. Из теоремы 4.3.1 следует, что образ $\mathcal{R}(\lambda I - \mathcal{A}_B)$ плотен в $C(\overline{Q})$ при $\lambda > \lambda_1$. Из леммы 4.3.3 и теоремы 4.3.1, в свою очередь, вытекает, что образ $\mathcal{R}(\lambda I - A_B)$ плотен в $C_B(\overline{Q})$ при $\lambda > \lambda_1$. Таким образом, в силу лемм 4.1.2, 4.2.1 оператор $\overline{A}_B : C_B(\overline{Q}) \to C_B(\overline{Q})$ является инфинитезимальным производящим оператором полугруппы Феллера из $C_B(\overline{Q})$ в $C_B(\overline{Q})$, которая однозначно определяется оператором A_B. □

4.4. Некоторые примеры

Приведем теперь несколько примеров, в которых выполняются условия теорем 4.2.1 и 4.3.2.

Пример 4.4.1. Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial Q \in C^\infty$. Пусть $\partial Q = M_1 \cup M_2 \cup \mathcal{K}_1$, где M_i $(i = 1, 2)$ — $(n-1)$-мерные многообразия класса C^∞, открытые и связные в топологии ∂Q, $\mathcal{K}_1$ — $(n-2)$-мерное многообразие класса C^∞ при $n \geqslant 3$, $\mathcal{K}_1$ состоит из двух точек x^1 и x^2, если $n = 2$. Введем невырожденное преобразование $\omega(x)$ класса C^∞, отображающее некоторую окрестность Ω_1 многообразия M_1 на $\omega(\Omega_1)$ так, что $\omega(M_1) \subset Q$. Однако, вообще говоря, $\omega(\mathcal{K}_1) \cap \partial Q \neq \varnothing$. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество и $\Omega \subset Q$. Введем функцию $c(x, y)$ $(x \in \partial Q, y \in \overline{\Omega})$ так, что $c \in C(\partial Q \times \overline{\Omega})$, $c(x, y) \geqslant 0$ $(x \in \partial Q,\ y \in \overline{\Omega})$, $c(x, y) = 0$ $(x \in \overline{M}_2,\ y \in \overline{\Omega})$. Введем также функцию $b(x)$ $(x \in \partial Q)$ следующим образом: $b \in C(\overline{M}_1)$, $b(x) \geqslant 0$ $(x \in \overline{M}_1)$, $b(x) = 0$ $(x \in M_2)$. Заметим, что функция $b(x)$ может быть разрывной на множестве $\mathcal{K}_1$.

Рассмотрим следующие нелокальные условия:

$$\left.\begin{aligned} u(x) - b(x)u(\omega(x)) - \int\limits_{\Omega} c(x, y)u(y)dy = {}& 0 \qquad (x \in M_1), \\ u(x) = {}& 0 \qquad (x \in \overline{M}_2). \end{aligned}\right\} \tag{4.4.1}$$

Пусть преобразование $\omega(x)$ удовлетворяет следующему условию:

Условие 4.4.1. $\omega(\mathcal{K}_1) \cap \mathcal{K}_1 = \varnothing$.

Для каждого борелевского множества $G \subset \overline{Q}$ положим

$$\mu_1(x, G) = b(x), \text{ если } x \in M_1,\ \omega(x) \in G;$$

$$\mu_1(x, G) = 0, \text{ если } x \in \overline{M}_2 \text{ или } x \in M_1,\ \omega(x) \notin G;$$

$$\mu_2(x, G) = \int\limits_{G\cap\Omega} c(x, y)dy \qquad (x \in \partial Q);$$

$$\mu(x, G) = \mu_1(x, G) + \mu_2(x, G) \qquad (x \in \partial Q).$$

Очевидно, $\mu(x, \overline{Q}) = b(x) + \int\limits_{\Omega} c(x, y)dy$ $(x \in \partial Q)$.

Пусть выполнено следующее условие.

Условие 4.4.2. $\mu(x, \overline{Q}) \leqslant 1 \qquad (x \in \partial Q)$.

Предположим также, что выполняется одно из следующих трех условий:

Условие 4.4.3. $b(x) = 0$ $(x \in \mathcal{K}_1)$, $b(x) > 0$ $(x \in M_1)$.

Условие 4.4.4. $\omega(\mathcal{K}_1) \subset M_2$, $b(x) > 0$ $(x \in \overline{M}_1)$.

Условие 4.4.5. $\omega(\mathcal{K}_1) \subset M_1$, $b(x) > 0$ $(x \in \overline{M}_1 \setminus \omega(\mathcal{K}_1)), \mu(x, \overline{Q}) = 0$ $(x \in \omega(\mathcal{K}_1))$.

Обозначим $\gamma(x) = 1 - \mu(x, \overline{Q})$. Тогда условия (4.4.1) примут вид

$$\gamma(x)u(x) + \int\limits_{\overline{Q}} [u(x) - u(y)]\mu(x, dy) = 0 \qquad (x \in \partial Q). \tag{4.4.2}$$

Заметим, что в силу условия 4.4.2 $\gamma(x) \geqslant 0 \quad (x \in \partial Q)$.

Покажем, что для меры $\mu(x, \cdot)$ выполняются условия 4.2.1–4.2.6. Если справедливо одно из условий 4.4.3, 4.4.4 или 4.4.5, то $N_\mu = \overline{M}_2$ и $\Gamma_\mu = M_1$, $N_\mu = \overline{M}_2$ и $\Gamma_\mu = M_1$ или $N_\mu = \overline{M}_2 \cup \omega(\mathcal{K}_1)$ и $\Gamma_\mu = M_1 \setminus \omega(\mathcal{K}_1)$ соответственно.

Условие 4.2.1 следует из того, что $\gamma_0(x) = \gamma(x) + \mu(x, \overline{Q}) \equiv 1$ $(x \in \partial Q)$. Поскольку по условию $\omega(M_1) \subset Q$, то $\omega(M_1) \cap \Gamma_\mu = \varnothing$. Поэтому по определению меры $\mu_1(x,\cdot)$ мы имеем $\mu_1(x,\Gamma_\mu)=0$. С другой стороны, согласно определению меры $\mu_2(x,\cdot)$, мы получим $\mu_2(x,\Gamma_\mu)=0$. Таким образом, $\mu(x,\Gamma_\mu)=0$. Следовательно,

$$\gamma(x)+\mu(x,\overline{Q}\setminus\Gamma_\mu)=1-\mu(x,\Gamma_\mu)=1>0\ (x\in\partial Q).$$

Таким образом, условие 4.2.2 выполнено.

Очевидно, если выполнено одно из условий 4.4.3, 4.4.4 или 4.4.5, то справедливо условие 4.2.3. Из условия 4.4.1 следует, что условие 4.2.4 выполняется при $K_1=\mathcal{K}_1$ и $\varkappa_0=\rho(\overline{\omega(\overline{\Gamma}_1),\mathcal{K}}_1)/2$. Так как $\omega(\Gamma_1)\subset Q$, для любого $\varkappa$, $0<\varkappa<\varkappa_0$, имеем $\overline{\omega(\Gamma_1\setminus\mathcal{K}_1^{\varkappa/2})}\subset Q$. Поэтому условие 4.2.5 выполнено при $\varepsilon=\rho(\omega(\Gamma_1\setminus\mathcal{K}_1^{\varkappa/2}),\partial Q)>0$. Наконец, из свойств интеграла Римана следует справедливость условия 4.2.6. Более того, в этом случае $\|L^1_{2\delta}\|=\sup_{x\in\partial Q}\int\limits_{\Gamma_1^\delta\cap\Omega}c(x,y)dy\to 0$ при $\delta\to 0$.

Обозначим через $C_B(\overline{Q})$ подпространство функций в $C(\overline{Q})$, удовлетворяющих нелокальным условиям (4.4.1). Тогда при выполнении условий 4.1.4, 4.4.1, 4.4.2 и одного из условий 4.4.3–4.4.5 для оператора $\mathcal{A}_{0B}$ справедливо заключение леммы 4.2.3. Более того, в силу теоремы 4.2.1 оператор $\overline{A_{0B}}$ является инфинитезимальным производящим оператором полугруппы Феллера на $C_B(\overline{Q})$, которая однозначно определяется оператором A_{0B}.

Пример 4.4.2. Рассмотрим условия (4.4.1) в случае $n=2$ и $c(x,y)\equiv 0$ $(x\in\partial Q,\ y\in\Omega)$.

Будем предполагать, что выполнены следующие условия:

Условие 4.4.6. $\omega(\mathcal{K}_1)=\mathcal{K}_1$.

Условие 4.4.7. $0<b(x)\leqslant 1\qquad(x\in\overline{M}_1)$.

Условие 4.4.8. $b(x)<1\qquad(x\in\mathcal{K}_1)$.

В силу условия 4.4.7 $N_\mu=\overline{M}_2$ и $\Gamma_\mu=M_1$. Аналогично примеру 4.4.1 легко показать, что условия 4.2.1, 4.2.2 выполняются. Однако, если $b(x)\geqslant 1/2$ $(x\in\mathcal{K}_1)$, меру $\mu(x,\cdot)$ нельзя представить в виде суммы мер $\mu_1(x,\cdot)$ и $\mu_2(x,\cdot)$, удовлетворяющих условиям 4.2.4 и 4.2.6. Из условия 4.4.6 вытекает условие 4.2.7. Нам остается проверить условие 4.2.8. Поскольку $\gamma_0(x) \equiv 1$ $(x \in \partial Q)$, то $\gamma_\delta(x) = \gamma(x) + \mu(x, \overline{Q} \setminus \Gamma_\mu^\delta) = \gamma_0(x) - \mu(x, \Gamma_\mu^\delta) = 1 - \mu(x, \Gamma_\mu^\delta)$. Следовательно,

$$\gamma_\delta(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \overline{M}_2 \text{ или } \omega(x) \notin \Gamma_\mu^\delta, x \in M_1, \\ 1 - b(x), & \text{если } \omega(x) \in \Gamma_\mu^\delta,\ x \in M_1. \end{cases}$$

В силу условия 4.4.8 и непрерывности $b(x)$ на $\overline{M}_1$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что $b(x) < k_1 < 1$ $(x \in \mathcal{K}_1^\varepsilon)$. Поскольку $\omega(M_1) \subset Q$, для данного $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\omega(x) \notin \Gamma_\mu^\delta$ $(x \in \Gamma_1 \setminus \mathcal{K}_1^\varepsilon)$, т.е. $\gamma_\delta(x) = 1$ $(x \in \Gamma_1 \setminus \mathcal{K}_1^\varepsilon)$. Таким образом, $\inf\limits_{x \in \partial Q} \gamma_\delta(x) \geqslant 1 - k_1 > 0$. Следовательно, в силу замечания 4.2.7 условие 4.2.8 выполняется.

Итак, мы доказали, что при выполнении условий 4.1.4, 4.4.6–4.4.8 для оператора $\mathcal{A}_{0B}$ справедливо заключение леммы 4.2.4. Более того, в силу теоремы 4.2.1 оператор $\overline{A_{0B}}$ является инфинитезимальным производящим оператором полугруппы Феллера на $C_B(\overline{Q})$, которая однозначно определяется оператором A_{0B}.

Пример 4.4.3. Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial Q \in C^\infty$. Пусть $\partial Q = M_1 \cup M_2 \cup \mathcal{K}_1$, где $M_1 = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : |x'| < 1,\ x_n = 0\}$, M_2 — $(n-1)$-мерное многообразие класса C^∞, открытое и связное в топологии ∂Q, $\mathcal{K}_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : |x'| = 1,\ x_n = 0\}$.

Введем невырожденное преобразование $\omega(x)$ класса C^∞, отображающее некоторую окрестность Ω_1 многообразия M_1 на $\omega(\Omega_1)$ так, что $\omega(M_1) \subset Q$. В общем случае $\omega(\mathcal{K}_1) \cap \partial Q \neq \varnothing$. В окрестности Ω_1 мы определим также преобразования сдвига, которые записываются следующим образом $\omega_s(x) = (x', x_n + 1/s)(x = (x',\ x_n) \in \Omega_1,\ s = 1, 2, ...)$. Будем предполагать, что область Q удовлетворяет условию $\omega_s(\overline{M}_1) \subset Q$ $(s = 1, 2, \dots)$. Введем также функции $b(x)$, $b_s(x)$, $c(x)$ $(x \in \partial Q)$ так, что $b \in C^\sigma(\overline{M}_1)$, b_s, $c \in C^\sigma(\partial Q)$, $b(x)$, $b_s(x)$, $c(x) \geqslant 0$ $(x \in \overline{M}_1)$, $b(x) = b_s(x) = c(x) = 0$ $(x \in M_2)$. Заметим, что в отличие от функций $b_s(x)$, $c(x)$ функция $b(x)$ может быть разрывной на множестве $\mathcal{K}_1$.

Пусть выполнено следующее условие.

Условие 4.4.9. Ряд $\sum\limits_{s=1}^{\infty} \|b_s\|_{C^\sigma(\overline{M}_1)}$ сходится.

Рассмотрим нелокальные условия вида

$$\left.\begin{aligned} &u(x) - b(x)u(\omega(x)) - \\ &- \sum_{s=1}^{\infty} b_s(x)u(\omega_s(x)) - c(x)\int\limits_Q \tfrac{u(y)dy}{|x-y|^{n-\alpha}} = 0 \qquad (x \in M_1), \\ &u(x) = 0 \qquad (x \in \overline{M}_2), \end{aligned}\right\} \tag{4.4.3}$$

где $\sigma < \alpha$.

Для каждого борелевского множества $G \subset \overline{Q}$ положим

$$\mu_1(x, G) = b(x), \text{ если } x \in M_1, \ \omega(x) \in G;$$

$$\mu_1(x, G) = 0, \text{ если } x \in \overline{M}_2 \text{ или } x \in M_1, \ \omega(x) \notin G;$$

$$\mu_2(x, G) = \sum_{s \in M(x,G)} b_s(x), \text{ если } x \in M_1, \text{ где } M(x, G) = \{s : \omega_s(x) \in G\};$$

$$\mu_2(x, G) = 0, \text{ если } x \in \overline{M}_2 \text{ или } x \in M_1, \ M(x, G) = \varnothing;$$

$$\mu_3(x, G) = c(x)\int\limits_G \frac{dy}{|x-y|^{n-\alpha}};$$

$$\mu(x, G) = \sum_{i=1}^{3} \mu_i(x, G).$$

Очевидно, $\mu(x, \overline{Q}) = b(x) + \sum\limits_{s=1}^{\infty} b_s(x) + c(x)\int\limits_Q \frac{dy}{|x-y|^{n-\alpha}}$ $(x \in \partial Q)$.

Пусть выполнены условия 4.4.1, 4.4.2, а также одно из условий 4.4.3, 4.4.4 или 4.4.5. Обозначим $\gamma(x) = 1 - \mu(x, \overline{Q})$. Тогда нелокальные условия (4.4.3) примут вид (4.4.2), при этом в силу условия 4.4.2 $\gamma(x) \geqslant 0$ $(x \in \partial Q)$.

Покажем, что для меры $\mu(x, \cdot)$ выполняются условия 4.3.1–4.3.4 при $k = 0$ и условие 4.2.2. Если справедливо одно из условий 4.4.3, 4.4.4 или 4.4.5, то $N_\mu = \overline{M}_2$ и $\Gamma_\mu = M_1$, $N_\mu = \overline{M}_2$ и $\Gamma_\mu = M_1$ или $N_\mu = \overline{M}_2 \cup \omega(\mathcal{K}_1)$ и $\Gamma_\mu = M_1 \setminus \omega(\mathcal{K}_1)$ соответственно.

Условие 4.3.1 следует из того, что $\gamma_0(x) = \gamma(x) + \mu(x, \overline{Q}) \equiv 1$ $(x \in \partial Q)$. Справедливость условий 4.2.2, 4.2.4, 4.2.5 устанавливается аналогично примеру 4.4.1. Справедливость одного из условий 4.4.3, 4.4.4 или 4.4.5

влечет за собой ограниченность оператора $B_1 : C^\sigma_\mu(\overline{Q}) \to C^\sigma_\mu(\partial Q)$, определённого по формуле (4.2.2). Таким образом, условие 4.3.2 выполняется при $k = 0$.

Введем операторы $B^1_{2\delta},\ B^2_{2\delta}$ по формулам

$$B^1_{2\delta}u(x) = \begin{cases} \sum\limits_{s>1/\delta} b_s(x)u(\omega_s(x)) & (x \in M_1), \\ 0 & (x \in \overline{M}_2), \end{cases}$$

$$B^2_{2\delta}u(x) = \begin{cases} \sum\limits_{s\leqslant 1/\delta} b_s(x)u(\omega_s(x)) & (x \in M_1), \\ 0 & (x \in \overline{M}_2). \end{cases}$$

Очевидно, операторы $B^1_{2\delta},\ B^2_{2\delta}$ можно записать в виде (4.2.3), (4.2.4). Поскольку $b_s \in C^\sigma(\partial Q)$ и $b_s(x) = 0$ $(x \in M_2)$, из условия 4.4.9 следует, что операторы $B^1_{2\delta} : C^\sigma(\overline{\Gamma^\delta_\mu}) \to C^\sigma_\mu(\partial Q)$ и $B^2_{2\delta} : C^\sigma(\overline{Q} \setminus \Gamma^\delta_\mu) \to C^\sigma_\mu(\partial Q)$ — ограничены и $\|B^1_{2\delta}\|_\sigma \leqslant c_1(\delta)$, $\|B^2_{2\delta}\|_\sigma \leqslant c_2$, где $c_1(\delta) = \sum\limits_{s>1/\delta} \|b_s\|_{C^\sigma(\overline{M}_1)} \to 0$ при $\delta \to 0$, $c_2 = \sum\limits_{s=1}^{\infty} \|b_s\|_{C^\sigma(\overline{\Gamma}_1)}$. Таким образом, условие 4.3.3 выполняется при $k = 0$.

Обозначим $B_3u(x) = c(x)\int\limits_Q \frac{u(y)dy}{|x-y|^{n-\alpha}}$. Поскольку $c \in C^\sigma(\partial Q)$ и $c(x) = 0$ $(x \in M_2)$, по теореме 12.II в [23], если $0 < \sigma < \alpha$, оператор $B_3 : C(\overline{Q}) \to C^\sigma_\mu(\partial Q)$ — ограниченный. Следовательно, условие 4.3.4 выполняется при $k = 0$ и $0 < \sigma < \alpha$.

Таким образом, если оператор A удовлетворяет условиям 4.1.4 и 4.1.5 при $k = 0$, а нелокальные условия (4.4.3) удовлетворяют условиям 4.4.1, 4.4.2, 4.4.9 и одному из условий 4.4.3–4.4.5, то для интегро-дифференциального оператора $\mathcal{A}_B$ справедливо заключение теоремы 4.3.1. Более того, в силу теоремы 4.3.2 оператор $\overline{A}_B$ является инфинитезимальным производящим оператором полугруппы Феллера на $C_B(\overline{Q})$, которая однозначно определяется оператором A_B.

Примеры нелокальных условий вида (4.2.1), для которых нарушаются некоторые из рассмотренных выше предположений о мере $\mu(x, \cdot)$, содержатся в работе [50]. В частности, там построен пример меры $\mu(x, \cdot)$ такой, что $\mathrm{spt}\mu(x, \cdot) \subset \partial Q$ и оператор $\overline{A}_B$ не является генератором полугруппы Феллера.

Библиографические примечания к главе 4

Необходимые и достаточные условия существования полугрупп Феллера для одномерных диффузионных процессов были получены в статьях [43, 44]. Необходимые условия существования полугрупп Феллера для многомерных диффузионных процессов были выведены в работе [5]. Достаточные условия существования полугрупп Феллера для многомерных диффузионных процессов изучались лишь в трансверсальном случае [5, 49, 53]. Единый метод исследования проблемы о существовании полугрупп Феллера как в трансверсальном, так и в нетрансверсальном случаях был разработан в работах [9, 31, 50, 51]. Изложение главы 4 в данном учебном пособии основано на результатах статьи [9]. Подробный обзор литературы имеется в работах [9, 32].

Задачи к главе 4

1. Обозначим через $C_B(\overline{Q})$ подпространство функций в $C(\overline{Q})$, удовлетворяющих нелокальным условиям (4.4.1) при $n = 2$. Пусть $\omega(x_1) = x_1, \;\; \omega(x^2) \in M_1$. Найти достаточные условия того, чтобы оператор $\overline{\mathcal{A}}_{0B}$ был инфинитезимальным производящим оператором полугруппы Феллера.

2. Сохраняя обозначения задачи 1, предположим, что $\omega(x^1) = x^2$, $\omega(x^2) \in M_2$. Найти достаточные условия того, чтобы оператор $\overline{\mathcal{A}}_{0B}$ был инфинитезимальным производящим оператором полугруппы Феллера.

3. Сохраняя обозначения задачи 1, предположим, что $\omega(x^1) = x^1$, $\omega(x^2) \in Q$. Найти достаточные условия того, чтобы оператор $\overline{\mathcal{A}}_{0B}$ был инфинитезимальным производящим оператором полугруппы Феллера.

4. Сохраняя обозначения задачи 1, предположим, что $\omega(x^1) \in M_2$, $\omega(x^2) \in M_1$. Найти достаточные условия того, чтобы оператор $\overline{\mathcal{A}}_{0B}$ был инфинитезимальным производящим оператором полугруппы Феллера.

5. Сохраняя обозначения задачи 1, предположим, что $\omega(x^2) \in M_1$, $\omega(x^2) \in Q$. Найти достаточные условия того, чтобы оператор $\overline{\mathcal{A}}_{0B}$ был инфинитезимальным производящим оператором полугруппы Феллера.

6. Сохраняя обозначения задачи 1, предположим, что $\omega(x^1) \in Q$, $\omega(x^2) \in M_2$. Найти достаточные условия того, чтобы оператор $\overline{\mathcal{A}}_{0B}$ был инфинитезимальным производящим оператором полугруппы Феллера.

7. Сохраняя обозначения задачи 1, предположим, что $\omega(x^j) \in Q$, $j = 1, 2$. Найти достаточные условия того, чтобы оператор $\overline{\mathcal{A}}_{0B}$ был инфинитезимальным производящим оператором полугруппы Феллера.

8. Обозначим через $C_B(\overline{Q})$ подпространство функций в $C(\overline{Q})$, удовлетворяющих нелокальным условиям (4.2.1). Пусть $\mathrm{spt}\mu(x, .) \subset$ Q для всех $x \in \partial Q$. Найти достаточные условия того, чтобы оператор $\overline{\mathcal{A}}_{0B}$ был инфинитезимальным производящим оператором полугруппы Феллера.

9. Сохраняя обозначения задачи 8, предположим, что $\mathrm{spt}\mu(x, .) \subset \partial Q$ для всех $x \in \partial Q$. Найти достаточные условия того, чтобы оператор $\overline{\mathcal{A}}_{0B}$ не был инфинитезимальным производящим оператором полугруппы Феллера.

10. Привести пример меры $\mu(x, .)$ с распределенным носителем такой, что интегральный оператор в нелокальном условии (4.2.1) можно представить в виде псевдодифференциального оператора нулевого порядка.

11. Доказать теорему 4.1.1.

Темы курсовых работ к главе 4

1. Исследовать вопрос о существовании полугрупп Феллера для сильного эллиптического дифференциального оператора $\overline{\mathcal{A}}_{0B}$ с нелокальными краевыми условиями в трансверсальном случае, полагая, что $\eta(x) > 0$, $\beta_i(x) = 0$, $\varkappa(x) = 0$, $\alpha_{i,j}(x) = 0$ $(x \in \partial Q$, $i,j = 1,\dots,n-1)$ и носитель меры $\mu(x,\cdot)$ принадлежит объединению конечного числа гладких многообразий без края.

2. Исследовать вопрос о существовании полугрупп Феллера для сильного эллиптического дифференциального оператора $\overline{\mathcal{A}}_{0B}$ с нелокальными краевыми условиями в трансверсальном случае, полагая, что оператор $\sum\limits_{ij=1}^{n-1} \alpha_{i,j}(x)\frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j}$ — сильно эллиптический, а носитель меры $\mu(x,\cdot)$ принадлежит конечному числу гладких многообразий без края.

3. Исследовать вопрос о существовании полугрупп Феллера для сильно эллиптического интегро-дифференциального оператора $\overline{\mathcal{A}}_B$ с сингулярной мерой $m(x,\cdot)$ и нелокальными краевыми условиями в трансверсальном случае, полагая, что $\eta(x)$, $\beta_i(x) = 0$, $\varkappa(x) = 0$, $\alpha_{i,j}(x) = 0$ $(x \in \partial Q,\quad i,j = 1,\dots,n-1)$ и носитель меры $\mu(x,\cdot)$ принадлежит объединению конечного числа гладких многообразий без края.

4. Исследовать вопрос о существовании полугрупп Феллера для сильно эллиптического интегро-дифференциального оператора $\overline{\mathcal{A}}_B$ с сингулярной мерой $m(x,\cdot)$ и нелокальными краевыми условиями в трансверсальном случае, полагая, что оператор $\sum\limits_{ij=1}^{n-1} \alpha_{i,j}(x)\frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j}$ — сильно эллиптический, а носитель меры $\mu(x,\cdot)$ принадлежит конечному числу гладких многообразий без края.

5. Исследовать вопрос о существовании полугрупп Феллера для сильно эллиптического интегро-дифференциального оператора $\overline{\mathcal{A}}_B$ с сингулярной мерой $m(x,\cdot)$ и нелокальными краевыми условиями в транс-

версальном случае, полагая, что мера $\mu(x, \cdot)$ имеет распределенный носитель.

6. Показать, что условие 4.4.8 в примере 4.4.2 является существенным для существования полугруппы Феллера.

Нерешенные задачи к главе 4

1. Исследовать вопрос о существовании полугрупп Феллера в нетрансверсальном случае с нелокальными краевыми условиями (4.2.1) для распределенных носителей нелокальных членов. Показать существенность накладываемых условий.

2. Исследовать аналитичность полугрупп Феллера в нетрансверсальном случае.

3. Исследовать вопрос о существовании полугрупп Феллера в трансверсальном случае для сингулярных распределенных мер $m(x, \cdot)$ и $\mu(x, \cdot)$. Показать существенность накладываемых условий.

Приложения

Эти приложения являются кратким изложением основных определений и результатов для линейных операторов, функциональных пространств и эллиптических дифференциальных уравнений.

Материал в приложениях дается для того, чтобы минимизировать необходимость обращения ко многим дополнительным ссылкам.

Приложение А. Линейные операторы

Фредгольмовы операторы

Пусть B_1 и B_2 — банаховы пространства. Замкнутый линейный оператор $A : \mathcal{D}(A) \subset B_1 \to B_2$ называется *фредгольмовым*, если $\mathcal{R}(A)$ замкнут в B_2 и $\dim \mathcal{N}(A) < \infty$, $\operatorname{codim} \mathcal{R}(A) < \infty$, где $\mathcal{N}(A)$ и $\mathcal{R}(A)$ соответственно ядро и образ оператора A. *Индекс фредгольмова оператора* A определяется по формуле $\operatorname{ind} A = \dim \mathcal{N}(A) - \operatorname{codim} \mathcal{R}(A)$.

Теорема А.1. *Пусть $A : \mathcal{D}(A) \subset B_1 \to B_2$ и $B : \mathcal{D}(B) \subset B_2 \to B_3$ — фредгольмовы операторы, где B_3 — банахово пространство и $\mathcal{D}(B)$ плотно в B_2. Тогда $BA : \mathcal{D}(BA) \subset B_1 \to B_3$ является фредгольмовым оператором и* $\operatorname{ind}(BA) = \operatorname{ind} A + \operatorname{ind} B$.

Доказательство см. в [19], теорема 12.2.

Теорема А.2. *Пусть B_1, B_2 и B — банаховы пространства, и пусть B_1 компактно вложено в B. Предположим, что $A : B_1 \to B_2$ — линейный ограниченный оператор. Тогда следующие условия эквивалентны.*

(a) *Образ $\mathcal{R}(A)$ замкнут в B_2 и $\dim \mathcal{N}(A) < \infty$.*

(b) *Существует константа $c > 0$ такая, что*

$$\|u\|_{B_1} \leqslant c(\|Au\|_{B_2} + \|u\|_B) \qquad (u \in B_1). \tag{A.1}$$

Теорема А.2 следует из теоремы 7.1 в [19].

Пусть $A : B_1 \to B_2$ — линейный ограниченный оператор. Линейный ограниченный оператор $\mathcal{R}_1 : B_2 \to B_1$ называется *левым регуляризатором* оператора A, если $\mathcal{R}_1 A = I_1 + T_1$, где $T_1 : B_1 \to B_1$ — компактный оператор, $I_1 : B_1 \to B_1$ — единичный оператор. Линейный ограниченный оператор $\mathcal{R}_2 : B_2 \to B_1$ называется *правым регуляризатором* оператора A, если $A\mathcal{R}_2 = I_2 + T_2$, где $T_2 : B_2 \to B_2$ — компактный оператор, $I_2 : B_2 \to B_2$ — единичный оператор.

Теорема A.3. *Пусть $A : B_1 \to B_2$ — линейный ограниченный оператор, где B_1 и B_2 — банаховы пространства. Если оператор A имеет левый регуляризатор, то образ $\mathcal{R}(A)$ замкнут в B_2 и* $\dim \mathcal{N}(A) < \infty$. *Обратно, если образ $\mathcal{R}(A)$ замкнут в B_2,* $\dim \mathcal{N}(A) < \infty$ *и $\mathcal{R}(A)$ имеет замкнутое прямое дополнение в B_2, то оператор A имеет левый регуляризатор.*

Доказательство см. в [19], теорема 14.3.

Теорема A.4. *Пусть $A : B_1 \to B_2$ — линейный ограниченный оператор. Если оператор A имеет правый регуляризатор, то образ $\mathcal{R}(A)$ замкнут в B_2 и* $\operatorname{codim} \mathcal{R}(A) < \infty$. *Обратно, если $\mathcal{R}(A)$ замкнут в B_2,* $\operatorname{codim} \mathcal{R}(A) < \infty$ *и $\mathcal{N}(A)$ имеет замкнутое прямое дополнение в B_1, то оператор A имеет правый регуляризатор.*

Доказательство см. в [19], теорема 15.2.

Из теорем A.2, A.3 и A.4 мы получаем следующий результат.

Теорема A.5. *Пусть B_1, B_2 и B — банаховы пространства, и пусть B_1 компактно вложено в B. Предположим, что $A : B_1 \to B_2$ — линейный ограниченный оператор.*

Тогда следующие условия эквивалентны.

(a) *Оператор $A : B_1 \to B_2$ — фредгольмов.*

(b) *Оператор A имеет как правый, так и левый регуляризаторы.*

(c) *Выполняется априорная оценка* (A.1), *и оператор A имеет правый регуляризатор.*

Устойчивость свойств операторов

Теорема А.6. *Пусть* $T : B \to B$ *— линейный ограниченный оператор в банаховом пространстве* B. *Предположим, что оператор* $T^m : B \to B$ *компактный при некотором* $m \in \mathbb{N}$. *Тогда оператор* $I + T$ *фредгольмов и* $\operatorname{ind}(I+T) = 0$, *где* I *— единичный оператор в* B.

Доказательство см. в [19], теорема 15.4.

Теорема А.7. *Пусть* $A : B_1 \to B_2$ *— ограниченный фредгольмов оператор. Предположим, что* $T : B_1 \to B_2$ *— компактный оператор или ограниченный оператор с достаточно малой нормой. Тогда оператор* $A + T : B_1 \to B_2$ *фредгольмов и* $\operatorname{ind}(A+T) = \operatorname{ind} A$.

Теорема А.7 вытекает из теорем 15.2 и 16.4 в [19].

Пусть $L, L_0 : B_1 \to B_2$ — линейные ограниченные операторы. Обозначим

$$L_\tau = L_0 + \tau(L - L_0) \qquad (0 \leqslant \tau \leqslant 1).$$

Сформулируем теперь теорему о гомотопической устойчивости индекса.

Теорема А.8. *Предположим, что операторы* $L_\tau : B_1 \to B_2$ *фредгольмовы при* $0 \leqslant \tau \leqslant 1$. *Тогда* $\operatorname{ind} L = \operatorname{ind} L_0$.

Доказательство. В силу теоремы А.7 для доказательства достаточно покрыть отрезок $[0,1]$ множеством интервалов (a_i, b_i) $(i \in I_0)$ так, что на каждом интервале $(a_i, b_i) \cap [0,1]$ индекс оператора L_τ сохраняется, где I_0 — множество индексов. Затем мы можем выбрать конечное подпокрытие отрезка $[0,1]$. $\square$

Теорема А.9. *Пусть* $L, L_0 : B_1 \to B_2$ *— линейные ограниченные операторы. Предположим, что оператор* L_0 *имеет ограниченный обратный* $L_0^{-1} : B_2 \to B_1$ *и для любого* $0 \leqslant \tau \leqslant 1$

$$c_1 \|L_\tau u\|_{B_2} \leqslant \|u\|_{B_1} \leqslant c_2 \|L_\tau u\|_{B_2} \qquad (u \in B_1), \tag{А.2}$$

где $c_1, c_2 > 0$ *не зависят от* τ, u. *Тогда оператор* L *имеет ограниченный обратный* $L^{-1} : B_2 \to B_1$.

Эта теорема представляет собой хорошо известный метод продолжения по параметру (см., например, лемму 1.1 в [20, гл. 3, § 1]).

Операторы, мероморфно зависящие от параметра

Пусть B_1 и B_2 — комплексные банаховы пространства. Обозначим через $\mathcal{B}(B_1, B_2)$ пространство линейных ограниченных операторов, отображающих B_1 в B_2. Рассмотрим оператор-функцию $\lambda \mapsto A(\lambda) \in \mathcal{B}(B_1, B_2)$ для $\lambda \in \Lambda$, где $\Lambda \in \mathbb{C}$ — связное открытое множество.

Оператор-функция $\lambda \mapsto A(\lambda) \in \mathcal{B}(B_1, B_2)$ называется *аналитической в точке* $\lambda_0 \in \Lambda$, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что оператор-функцию $\lambda \mapsto A(\lambda)$ можно разложить в ряд Тейлора

$$A(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j(\lambda - \lambda_0)^j \qquad (\lambda \in B_\varepsilon(\lambda_0)), \tag{A.3}$$

сходящийся по операторной норме, где $A_j \in \mathcal{B}(B_1, B_2)$ и

$$B_\varepsilon(\lambda_0) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon\} \subset \Lambda.$$

Мы будем говорить, что оператор-функция *аналитическая* в Λ, если она аналитическая в любой точке Λ.

Аналогично, оператор-функция $\lambda \mapsto A(\lambda) \in \mathcal{B}(B_1, B_2)$ называется *мероморфной в точке* $\lambda_0 \in \Lambda$, если для некоторого $\varepsilon > 0$ ее можно разложить в ряд Лорана

$$A(\lambda) = \sum_{j=-r}^{\infty} A_j(\lambda - \lambda_0)^j \qquad (\lambda \in B_\varepsilon(\lambda_0) \setminus \{\lambda_0\}), \tag{A.4}$$

сходящийся по операторной норме, где $A_j \in \mathcal{B}(B_1, B_2)$ и $B_\varepsilon(\lambda_0) \subset \Lambda$. Точка λ_0 называется *полюсом* оператор-функции $\lambda \mapsto A(\lambda)$, если найдется $r_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $r_0 \leqslant r$ и $A_{-r_0} \neq 0$. Наибольшее число r_0 такое, что $A_{-r_0} \neq 0$, называется *порядком полюса.*

Оператор-функция $\lambda \mapsto A(\lambda) \in \mathcal{B}(B_1, B_2)$, мероморфная в точке $\lambda_0 \in \Lambda$, называется *конечно-мероморфной* в точке λ_0, если операторы A_j $(-r \leqslant j < 0)$ конечномерны. Будем говорить, что мероморфная в точке $\lambda_0 \in \Lambda$ оператор-функция $\lambda \mapsto A(\lambda) \in \mathcal{B}(B_1, B_2)$ *фредгольмова в точке* λ_0, если оператор A_0 в разложении (A.4) является фредгольмовым.

По определению оператор-функция $\lambda \mapsto A(\lambda) \in \mathcal{B}(B_1, B_2)$ мероморфна в Λ, если она мероморфна в каждой точке Λ. Аналогично мы можем определить конечно-мероморфную и фредгольмову оператор-функции в Λ.

Теорема A.10. *Предположим, что* $\lambda \mapsto A(\lambda) \in \mathcal{B}(B_1, B_2)$ — *аналитическая фредгольмова оператор-функция в* Λ *и в некоторой точке* $\lambda_0 \in \Lambda$ *оператор* $A(\lambda_0)$ *имеет ограниченный обратный* $A^{-1}(\lambda_0) : B_2 \to B_1$*. Тогда оператор-функция* $\lambda \mapsto A^{-1}(\lambda) \in \mathcal{B}(B_2, B_1)$ — *конечно-мероморфная фредгольмова оператор-функция в* Λ*.*

Теорема A.10 следует из леммы 2.1 и следствия 3.3 в [10].

Пусть оператор-функция $\lambda \mapsto A(\lambda) \in \mathcal{B}(B_1, B_2)$ аналитична в точке $\lambda_0 \in \Lambda$. Точка λ_0 называется *собственным значением оператор-функции* $\lambda \mapsto A(\lambda)$, если существует аналитическая в точке λ_0 функция $\lambda \mapsto \psi(\lambda) \in B_1$ такая, что $A(\lambda_0)\psi(\lambda_0) = 0$ и $\psi(\lambda_0) \neq 0$. Функция ψ называется *корневой функцией* для оператор-функции $\lambda \mapsto A(\lambda)$ в точке $\lambda = \lambda_0$. Порядок нуля $\lambda = \lambda_0$ функции $\lambda \mapsto A(\lambda)\psi(\lambda)$ называется *кратностью корневой функции* ψ, а вектор $\psi^0 = \psi(\lambda_0)$ называется *собственным вектором* (*собственной функцией*) *оператор-функции* $\lambda \mapsto A(\lambda)$, соответствующим собственному значению λ_0. Пусть $\lambda \mapsto \psi(\lambda)$ — корневая функция для оператор-функции $\lambda \mapsto A(\lambda)$ в точке λ_0, имеющая кратность p_0, и пусть

$$\psi(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi^j (\lambda - \lambda_0)^j,$$

где $\psi^j \in B_1$. Тогда вектора $\psi^1, \dots, \psi^{p_0-1}$ называются *присоединенными векторами* (*присоединенными функциями*) к собственному вектору ψ^0. Упорядоченная система $\psi^0, \psi^1, \dots, \psi^{p_0-1}$ называется *жордановой цепочкой*, соответствующей λ_0. Назовем подсистему $\psi^0, \psi^1, \dots, \psi^M$ $(M \leqslant p_0 - 1)$ *жордановой подпоследовательностью*, соответствующей λ_0.

Легко доказать, что система $\psi^0, \psi^1, \dots, \psi^{p_0-1}$ образует жорданову цепочку, соответствующую λ_0, тогда и только тогда, когда

$$\sum_{q=0}^{p} \frac{1}{q!} \partial_\lambda^q A(\lambda_0) \psi^{p-q} = 0 \qquad (p = 0, \dots, p_0 - 1). \tag{A.5}$$

Собственные векторы, соответствующие собственному значению λ_0 оператор-функции $\lambda \mapsto A(\lambda)$, образуют линейное подпространство в

B_1. Это подпространство называется *ядром* оператора $A(\lambda_0)$ и обозначается через $\mathcal{N}(A(\lambda_0))$. Наибольшая кратность всех корневых функций $\psi(\lambda)$ таких, что $\psi(\lambda_0) = \psi_0$, называется *рангом собственного вектора* ψ^0 $\big(\operatorname{rank}\psi^0\big)$, если множество таких кратностей ограничено.

Пусть λ_0 — собственное значение оператор-функции $\lambda \mapsto A(\lambda)$ и $q_0 = \dim \mathcal{N}(A(\lambda_0)) < \infty$. Число q_0 называется *геометрической кратностью* λ_0. Обозначим через $\psi^{0,1}, \ldots, \psi^{0,q_0}$ линейно независимую систему собственных векторов таких, что $\operatorname{rank}\psi^{0,1}$ является наибольшим рангом из всех собственных векторов, соответствующих λ_0, а $\operatorname{rank}\psi^{0,q}$ $(q = 2, \ldots, q_0)$ является наибольшим рангом собственных векторов из некоторого прямого дополнения к линейной оболочке $\mathcal{L}\big(\psi^{0,1}, \ldots, \psi^{0,q-1}\big)$ в $\mathcal{N}(A(\lambda_0))$. Числа $p_q = \operatorname{rank}\psi^{0,q}$ $(q = 1, \ldots, q_0)$ называются *частными кратностями* собственного значения λ_0. Частные кратности p_q собственного значения λ_0 однозначно определены оператор-функцией $\lambda \mapsto A(\lambda)$. Сумма $M = M(A(\lambda_0)) = p_1 + \cdots + p_{q_0}$ называется *полной кратностью* λ_0. Собственное значение λ_0 называется *простым*, если его полная кратность равна 1. Пусть $\psi^{0,q}, \ldots, \psi^{p_q-1,q}$ $(q = 1, \ldots, q_0)$ образуют жордановы цепочки. Тогда совокупность векторов $\{\psi^{0,q}, \ldots, \psi^{p_q-1,q},\ q = 1, \ldots, q_0\}$ называется *канонической системой жордановых цепочек*, соответствующей λ_0.

Точка $\lambda_0 \in \Lambda$ называется *нормальной точкой аналитической оператор-функции* $\lambda \mapsto A(\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$, если $\lambda \mapsto A(\lambda)$ фредгольмова в точке λ_0 и для всех точек λ из некоторого проколотого круга $B_\varepsilon(\lambda_0) \setminus \{\lambda_0\} \subset \Lambda$ существует обратный оператор $A^{-1}(\lambda) \in \mathcal{B}(B_2, B_1)$. В силу леммы 2.1 и следствия 3.2 из [10] нормальная точка $\lambda_0 \in \Lambda$ является собственным значением оператор-функции $\lambda \mapsto A(\lambda)$ тогда и только тогда, когда она полюс оператор-функции $\lambda \mapsto A^{-1}(\lambda)$. Более того, наибольший ранг всех собственных векторов, соответствующих собственному значению λ_0 оператор-функции $\lambda \mapsto A(\lambda)$, равен порядку полюса λ_0 оператор-функции $\lambda \mapsto A^{-1}(\lambda)$.

Пусть $\lambda \mapsto A(\lambda)$ аналитическая оператор-функция в Λ. Обозначим через $\lambda \mapsto A^*(\lambda)$ оператор-функцию $\lambda \mapsto [A(\bar{\lambda})]^* \in \mathcal{B}(B_2^*, B_1^*)$, которая является аналитической в Λ^*. Здесь область Λ^* симметрична с Λ относительно действительной оси. Если λ_0 — нормальная точка оператор-функции $\lambda \mapsto A(\lambda)$, то $\overline{\lambda}_0$ — нормальная точка оператор-функции $\lambda \mapsto A^*(\lambda)$ и частные кратности $p_1, \ldots, p_{q_0}$ собственного значения λ_0 оператор-функции $\lambda \mapsto A(\lambda)$ равны частным кратностям собственного значения $\overline{\lambda}_0$ оператор-функции $\lambda \mapsto A^*(\lambda)$ (см. теорему 5.3 в [10]).

Теорема A.11. *Пусть $\lambda_0 \in \Lambda$ — собственное значение и нормальная точка оператор-функции $\lambda \mapsto A(\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$. Тогда существует каноническая система жордановых цепочек $\{\psi^{0,q}, \psi^{1,q}, \ldots, \psi^{p_q-1,q},\ q = 1, \ldots, q_0\}$ для оператор-функции $\lambda \mapsto A(\lambda)$, соответствующая λ_0, и каноническая система жордановых цепочек $\{\xi^{0,q}, \xi^{1,q}, \ldots, \xi^{p_q-1,q},\ q = 1, \ldots, q_0\}$ для оператор-функции $\lambda \mapsto A^*(\lambda)$, соответствующая $\overline{\lambda}_0$, такие, что*

$$\Xi[A^{-1}(\lambda)] = \sum_{q=1}^{q_0} \sum_{k=1}^{p_q} (\lambda - \lambda_0)^{-k} \sum_{p=0}^{p_q-k} \xi^{p,q}(\cdot)\psi^{p_q-k-p,q}, \tag{A.6}$$

где $\Xi[A^{-1}(\lambda)]$ — главная часть разложения в ряд Лорана для $A^{-1}(\lambda)$.

Доказательство см. в [10], теорема 7.1.

Заметим, что, вообще говоря, векторы в жордановой цепочке не являются линейно независимыми (см. примеры 4.2.1 и 4.4.1).

Спектральные свойства линейных операторов

Пусть $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset B \to B$ — есть замкнутый линейный оператор в комплексном банаховом пространстве B. *Резольвентное множество* оператора $\mathcal{A}$ — множество чисел $\eta \in \mathbb{C}$ таких, что оператор $\eta I - \mathcal{A}$ имеет ограниченный обратный $(\eta I - \mathcal{A})^{-1} : B \to B$. Обозначим через $\rho(\mathcal{A})$ резольвентное множество оператора $\mathcal{A}$. Оператор

$$(\eta I - \mathcal{A})^{-1} = R(\eta, \mathcal{A}) \qquad (\eta \in \rho(\mathcal{A}))$$

называется *резольвентой* $\mathcal{A}$. Дополнение к $\rho(\mathcal{A})$ обозначается через $\sigma(\mathcal{A})$ и называется *спектром оператора* $\mathcal{A}$. Число $\eta \in \mathbb{C}$ называется *собственным значением оператора* $\mathcal{A}$, а $x \neq 0$ — *собственным вектором* (*собственной функцией*) оператора $\mathcal{A}$, соответствующим η, если $(\eta I - \mathcal{A})x = 0$. Число $q_0 = \dim \mathcal{N}(\eta I - \mathcal{A})$ называется *геометрической кратностью* η.

Пусть оператор-функция $\eta \mapsto R(\eta, \mathcal{A})$ конечно-мероморфна в точке $\eta = \eta_0$, которая является собственным значением $\mathcal{A}$. Тогда разложение (A.4) примет вид

$$R(\eta, \mathcal{A}) = \sum_{j=-r}^{\infty} A_j(\eta - \eta_0)^j \qquad (\eta \in B_\varepsilon(\eta_0) \setminus \{\eta_0\}),$$

где $A_j \in \mathcal{B}(B, B)$ и $\dim \mathcal{R}(A_j) < \infty$ для $-r \leqslant j < 0$. Оператор $-A_{-1}$ — проектор, т. е. $A_{-1}^2 = -A_{-1}$. Число $m_0 = \dim \mathcal{R}(A_{-1})$ называется *алгебраической кратностью* η_0.

Спектр замкнутого линейного оператора $\mathcal{A}$ можно разделить на три непересекающихся подмножества.

Точечный спектр $\sigma_p(\mathcal{A})$ состоит из собственных значений $\mathcal{A}$.

Непрерывный спектр $\sigma_c(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{A}) \setminus \sigma_p(\mathcal{A})$ состоит из всех $\eta \in \mathbb{C}$ таких, что образ $\mathcal{R}(\eta I - \mathcal{A})$ плотный в B и $\mathcal{R}(\eta I - \mathcal{A}) \neq B$.

Остаточный спектр $\sigma_r(\mathcal{A})$ задается формулой

$$\sigma_r(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A}) \setminus \big(\sigma_p(\mathcal{A}) \cup \sigma_c(\mathcal{A})\big).$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что оператор $\mathcal{A}: \ \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset B \to B$ — замкнутый.

Через B_1 обозначим линейное пространство $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ с нормой графика

$$\|u\|_{B_1} = \|u\|_B + \|\mathcal{A}u\|_B.$$

Поскольку $\mathcal{A}$ — замкнутый оператор, то B_1 является банаховым пространством. Положим $B_2 = B$. Рассмотрим аналитическую оператор-функцию $\eta \mapsto A(\eta) = \eta I - \mathcal{A} \in \mathcal{B}(B_1, B_2)$.

Спектр $\sigma(\mathcal{A})$ называется *дискретным*, если он состоит из изолированных собственных значений конечной алгебраической кратности.

Следующее утверждение приведено в [16, гл. 3, § 6].

Теорема A.12. *Пусть $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset B \to B$ — замкнутый линейный оператор. Предположим, что для некоторого $\eta = \eta_0$ существует компактная резольвента $R(\eta_0, \mathcal{A}) : B \to B$. Тогда спектр $\sigma(\mathcal{A})$ дискретный и резольвента $R(\eta, \mathcal{A}) : B \to B$ компактна для каждого $\eta \in \rho(\mathcal{A})$.*

Доказательство. Очевидно,

$$\eta I - \mathcal{A} = ((\eta - \eta_0)R(\eta_0, \mathcal{A}) + I)(\eta_0 I - \mathcal{A})$$

для каждого $\eta \in \mathbb{C}$. Поэтому из компактности резольвенты $R(\eta_0, \mathcal{A}) : B \to B$ и теоремы A.1 следует, что оператор $\eta I - \mathcal{A}$ фредгольмов. Тогда в силу теоремы A.10 все точки комплексной плоскости $\mathbb{C}$ нормальные для оператор-функции $\eta \mapsto A(\eta) = \eta I - \mathcal{A}$, а спектр $\sigma(\mathcal{A})$ состоит из изолированных собственных значений. Следовательно, из теоремы A.11 мы выводим, что каждое собственное значение оператора $\mathcal{A}$ имеет конечную алгебраическую кратность.

Компактность резольвенты $R(\eta, \mathcal{A}) : B \to B$ $(\eta \in \rho(\mathcal{A}))$ следует из резольвентного тождества и компактности $R(\eta_0, \mathcal{A})$. □

Секториальные операторы

Свойства секториальных операторов, изложенные в этом пункте, взяты из [16, гл. 5, § 3 и гл. 6, § 2].

Пусть H — гильбертово пространство. Линейный оператор $B : \mathcal{D}(B) \subset H \to H$ называется *m-аккретивным*, если для любого $\operatorname{Re}\lambda > 0$ существует ограниченный обратный оператор $(B + \lambda I)^{-1} : H \to H$ и

$$\|(B + \lambda I)^{-1}\| \leqslant (\operatorname{Re}\lambda)^{-1}. \tag{A.7}$$

Обозначим

$$\Theta(B) = \{(Bu, u) : u \in \mathcal{D}(B),\ \|u\| = 1\}.$$

Если $B : \mathcal{D}(B) \subset H \to H$ — m-аккретивный оператор, то B замкнут, $\mathcal{D}(B)$ всюду плотно в H, и $\Theta(B) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0\}$.

Мы будем говорить, что линейный оператор $B : \mathcal{D}(B) \subset H \to H$ *квази-m-аккретивный*, если оператор $B + \alpha I$ m-аккретивный для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$. Оператор B называется *секториальным*, если существуют $\theta < \pi/2$ и $\gamma \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\Theta(B) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - \gamma)| \leqslant \theta\}.$$

Число γ называется *вершиной секториального оператора* B. Оператор $B : \mathcal{D}(B) \subset H \to H$ называется *m-секториальным*, если он секториальный и квази-m-аккретивный.

Рассмотрим теперь полуторалинейную форму $b[u, v]$ с областью определения $\mathcal{D}(b) \subset H$. Форма b называется *симметрической*, если $b[u, v] = \overline{b[v, u]}$ для $u, v \in \mathcal{D}(b)$. Определим *сопряженную форму* b^* формулой

$$b^*[u, v] = \overline{b[v, u]}, \qquad \mathcal{D}(b^*) = \mathcal{D}(b). \tag{A.8}$$

Очевидно, формы

$$p = \frac{1}{2}\,(b + b^*), \qquad q = \frac{1}{2i}\,(b - b^*) \tag{A.9}$$

симметрические и

$$a = p + iq. \tag{A.10}$$

Обозначим $\Theta(b) = \{b[u] : u \in \mathcal{D}(b),\ \|u\| = 1\}$, где $b[u] = b[u, u]$. Форма b называется *секториальной*, если существуют $\theta < \pi/2$ и $\gamma \in \mathbb{R}$ такие, что $\Theta(b) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg{(\lambda - \gamma)}| \leqslant \theta\}$. Число γ называется *вершиной секториальной формы* b. Секториальная форма b называется *замкнутой*, если из условий $u_n \in \mathcal{D}(b)$, $\|u_n - u\| \to 0$ и $b[u_n - u_m] \to 0$ при $n, m \to \infty$ следует, что $u \in \mathcal{D}(b)$ и $b[u_n - u] \to 0$ при $n \to \infty$.

Пусть b — секториальная форма. Введем скалярное произведение в $H_p = \mathcal{D}(b)$ по формуле

$$(u, v)_p = p[u, v] + (\varkappa - \gamma)(u, v) \qquad ((u, v) \in \mathcal{D}(b)), \tag{A.11}$$

где γ — вершина формы b, $\varkappa > 0$ — некоторая константа. Секториальная форма b замкнута в H тогда и только тогда, когда предгильбертово пространство H_p полно (см. теорему 1.11 в [16, гл. 4, § 1]).

Линейное подпространство $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}(b)$ называется *ядром формы* b, если сужение b на $\mathcal{D}'$ имеет замыкание, равное b.

Теорема A.13. *Пусть $b[u, v]$ $(u, v \in \mathcal{D}(b))$ — плотно определенная замкнутая секториальная полуторалинейная форма в H, и пусть γ — вершина b. Тогда существует m-секториальный оператор $B : D(B) \subset H \to H$ такой, что*

(a) $\mathcal{D}(B) \subset \mathcal{D}(b)$ *и*

$$b[u,v] = (Bu,v) \qquad (u \in \mathcal{D}(B),\ v \in \mathcal{D}(b)); \tag{A.12}$$

(b) *оператор* $B + (\varkappa - \gamma)I : \mathcal{D}(B) \subset H \to H$ *имеет ограниченный обратный* $(B + (\varkappa - \gamma)I)^{-1} : H \to H_p$;

(c) $\mathcal{D}(B)$ — *ядро* b;

(d) *если* $u \in \mathcal{D}(b)$, $f \in H$ *и равенство*

$$b[u,v] = (f,v) \tag{A.13}$$

выполняется для каждого v, *принадлежащего ядру* b, *то* $u \in \mathcal{D}(B)$ *и* $Bu = f$. *Оператор* B *однозначно определен условием* (a).

Доказательство см. в [16, гл. 6, § 2], теорема 2.1.

Мы будем говорить, что B является m-секториальным оператором, ассоциированным с формой b. Обозначим $B = B_b$.

Следующие два утверждения следуют из теоремы A.13 (см. теоремы 2.5 и 2.6 в [16, гл. 6, § 2]).

Теорема A.14. *Пусть выполнены условия теоремы* A.13, *и пусть* $B = B_b$. *Тогда* $B_b^* = B_{b^*}$.

Теорема A.15. *Пусть* b — *плотно определенная симметрическая замкнутая форма, ограниченная снизу. Тогда оператор* $B = B_b$, *ассоциированный с формой* b, *является самосопряженным и ограниченным снизу. Кроме того, оператор* B *и форма* b *имеют одну и ту же нижнюю грань.*

Обозначим через G плотно определенный секториальный оператор. Рассмотрим форму

$$g[u,v] = (Gu,v)$$

с областью определения $\mathcal{D}(g) = \mathcal{D}(G)$. В силу теоремы 1.27 в [16, гл. 6, § 5] форма g — замыкаема. Пусть b — замыкание формы g, и пусть

$B = B_b$ — m-секториальный оператор, ассоциированный с b. Поскольку $\mathcal{D}(G)$ — ядро b, то $G \subset B$ по теореме А.13. Оператор B называется *фридрихсовым расширением* G.

Используя теорему А.15, мы получим следующий результат.

Теорема А.16. *Пусть G — плотно определенный симметрический оператор, ограниченный снизу. Тогда фридрихсово расширение $B : H \to H$ оператора G — самосопряженный оператор. Кроме того, операторы B и G имеют одинаковую нижнюю грань.*

Доказательство теоремы А.16 можно найти также в [14, гл. 12, § 5].

Установим теперь некоторые вспомогательные результаты, касающиеся m-секториальных операторов.

Теорема А.17. *Пусть гильбертово пространство H_1 всюду плотно в H, и пусть оператор вложения H_1 в H компактный. Предположим, что b — полуторалинейная форма в H с областью определения $\mathcal{D}(b) = H_1$ и*

$$|b[u,v]| \leqslant c_0 \|u\|_{H_1} \|v\|_{H_1} \qquad (u, v \in H_1), \tag{A.14}$$

$$\operatorname{Re} b[u] \geqslant c_1 \|u\|_{H_1}^2 - c_2 \|u\|^2 \qquad (u \in H_1), \tag{A.15}$$

где $c_0, c_1 > 0$, $c_2 \geqslant 0$ — константы. Тогда b — замкнутая секториальная форма в H с вершиной $\gamma = -c_2$. При этом m-секториальный оператор $B = B_b : \mathcal{D}(B_b) \subset H \to H$, ассоциированный с b, имеет дискретный спектр $\sigma(B_b)$ и $\sigma(B_b) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > -c_2\}$. Если $\lambda \notin \sigma(B_b)$, то резольвента $R(\lambda, B_b) : H \to H$ — компактный оператор. Кроме того,

$$B_b^* = B_{b^*}.$$

Для доказательства заметим, что из неравенств (А.14) и (А.15) следует, что форма b замкнута и секториальна с вершиной $\gamma = -c_2$. Остальные утверждения теоремы А.17 следуют из теорем А.13, А.12 и А.14.

Теорема А.18. *Пусть выполняются условия теоремы* А.17. *Тогда оператор $B_b : H \to H$ фредгольмов и* $\operatorname{ind} B_b = 0$.

Доказательство следует из компактности резольвенты $R(\lambda, B_b) : H \to H$ $(\lambda \notin \sigma(B_b))$, равенства $B_b = (I - \lambda R(\lambda, B_b))(B_b - \lambda I)$ и теоремы A.1.

Теорема A.19. *Пусть выполнены условия теоремы* A.17, *и пусть* $b = b^*$. *Тогда оператор* $B_b : \mathcal{D}(B_b) \subset H \to H$ *самосопряженный. Спектр* $\sigma(B_b)$ *состоит из вещественных изолированных собственных значений* $\lambda_s > -c_2$ *конечной кратности. Последовательность собственных функций* $\{v_s\}$ *оператора* B_b *образует ортонормированный базис в* H. *Более того, последовательность функций* $\left\{\dfrac{v_s}{\sqrt{\lambda_s + c_2}}\right\}$ *образует ортонормированный базис в* H_1 *со скалярным произведением*

$$(u, v)'_{H_1} = b[u, v] + c_2(u, v). \tag{A.16}$$

Доказательство. В силу теоремы A.17 оператор $B_b : H \to H$ самосопряженный, а спектр $\sigma(B_b)$ состоит из изолированных собственных значений $\lambda_s > -c_2$ конечной кратности.

Задача на собственные функции

$$B_b v = \lambda v$$

эквивалентна задаче

$$v = (\lambda + c_2)(B_b + c_2 I)^{-1} v.$$

Из теоремы A.13 (b) и резольвентного тождества следует, что сужение оператора $(B_b + c_2 I)^{-1}$ на H_1 — компактный оператор. Далее, по теореме A.13 (a) мы имеем

$$\begin{aligned}
\Big((B_b + c_2 I)^{-1} u, w\Big)'_{H_1} &= b[(B_b + c_2 I)^{-1} u, w] + c_2\Big((B_b + c_2 I)^{-1} u, w\Big) = \\
&= (u, w) = \overline{(w, u)} = \\
&= \overline{b[(B_b + c_2 I)^{-1} w, u]} + c_2\overline{\Big((B_b + c_2 I)^{-1} w, u\Big)} = \\
&= \Big(u, (B_b + c_2 I)^{-1} w\Big)'_{H_1}
\end{aligned}$$

для всех $u, w \in H_1$. Следовательно, оператор $(B_b + c_2 I)^{-1} : H_1 \to H_1$ самосопряженный. По теореме Гильберта—Шмидта в H_1 существует ортонормированный базис, состоящий из собственных функций v_s оператора $(B_b + c_2 I)^{-1}$, соответствующих собственным значениям $(\lambda_s + c_2)^{-1}$.

Предположим, что $\|v_s\| = 1$. В силу (A.12) и (A.16) мы имеем

$$(v_s, v_r) = \frac{(v_s, v_r)'_{H_1}}{\lambda_s + c_2} = 0 \qquad\qquad (s \neq r),$$
$$\left(\frac{v_s}{\sqrt{\lambda_s + c_2}}, \frac{v_s}{\sqrt{\lambda_s + c_2}}\right)'_{H_1} = (v_s, v_s) = 1 \quad (s = 1, 2, \dots).$$

Следовательно, последовательность функций $\left\{\dfrac{v_s}{\sqrt{\lambda_s + c_2}}\right\}$ образует ортонормированный базис в H_1. Поскольку H_1 всюду плотно в H, последовательность функций $\{v_s\}$ образует ортонормированный базис в H. $\square$

Приложение B. Функциональные пространства

Пространства L_p

Открытое связное подмножество Ω в $\mathbb{R}^n$ называется *областью*. Рассмотрим пространства функций f, измеримых по Лебегу в области Ω, и таких, что $|f|^p$ интегрируема по Ω ($1 \leqslant p < \infty$). Это пространство обозначается через $L_p(\Omega)$. Пространство $L_p(\Omega)$ — банахово пространство с нормой

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}.$$

Если $p = 2$, то мы получим гильбертово пространство $L_2(\Omega)$ со скалярным произведением

$$(f, g)_{L_2(\Omega)} = \int\limits_\Omega f(x)\overline{g(x)} \, dx.$$

Пусть $L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$ — пространство измеримых по Лебегу в Ω функций f таких, что $f \in L_p(K)$ для любого компакта $K \subset \Omega$.

Пространства Гёльдера

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область. Обозначим через $C(\Omega)$ (или $C(\overline{\Omega})$) пространство непрерывных в Ω (или в $\overline{\Omega}$) функций.

Пусть $C^k(\Omega)$ — пространство функций в $C(\Omega)$, имеющих непрерывные производные порядка не выше k в Ω, где $k \in \mathbb{N}$. Пусть $C^k(\overline{\Omega})$ — пространство функций в $C^k(\Omega)$, все производные которых порядка не выше k имеют непрерывные продолжения на $\overline{\Omega}$.

Обозначим

$$C^0(\Omega) = C(\Omega), \qquad C^0(\overline{\Omega}) = C(\overline{\Omega}),$$

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\Omega), \qquad C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\overline{\Omega}).$$

Для ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ мы введем пространства Гёльдера $C^k(\overline{\Omega})$ и $C^{k+\sigma}(\overline{\Omega})$, где $k \geqslant 0$ — целое и $0 < \sigma < 1$.

Пространство $C^k(\overline{\Omega})$ с нормой

$$\|\varphi\|_{C^k(\overline{\Omega})} = \max_{|\alpha| \leqslant k} \sup_{x \in \overline{\Omega}} |\mathcal{D}^\alpha \varphi(x)|$$

называется *пространством Гёльдера.* Здесь $\mathcal{D}^\alpha = \mathcal{D}_1^{\alpha_1} \cdots \mathcal{D}_n^{\alpha_n}$, $\mathcal{D}_j = -i(\partial/\partial x_j)$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $\alpha_j \geqslant 0$ — целые числа.

Вектор α с неотрицательными целыми координатами называется *мультииндексом.*

Очевидно, $C^k(\overline{\Omega})$ — сепарабельное банахово пространство.

Пространство Гёльдера $C^{k+\sigma}(\overline{\Omega})$ — пространство функций из $C^k(\overline{\Omega})$, имеющих конечную норму

$$\|u\|_{C^{k+\sigma}(\overline{\Omega})} = \max_{|\alpha| \leqslant k} \sup_{x \in \overline{\Omega}} |D^\alpha u(x)| + \max_{|\beta| = k} \sup_{x, y \in \overline{\Omega},\, x \neq y} \frac{|D^\beta u(x) - D^\beta u(y)|}{|x - y|^\sigma}.$$

Известно, что пространство Гёльдера $C^{k+\sigma}(\overline{\Omega})$ — банахово пространство. Однако оно не сепарабельно (см. [37, гл. 4, § 4.5.1]).

Пусть φ — непрерывная функция в Ω. Замыкание множества $\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}$ в Ω называется *носителем* φ. Обозначим через $\operatorname{supp} \varphi$ носитель φ.

Пусть $\dot{C}^\infty(\Omega)$ — множество функций из $C^\infty(\Omega)$ с компактными носителями в Ω.

Лемма B.1. *Пусть K — компакт в $\mathbb{R}^n$ и $\{S_\alpha\}$ — покрытие K открытыми множествами. Тогда существует конечное подпокрытие $\{S_{\alpha_j}\}$ и неотрицательные функции $\varphi_j \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ $(j = 1, \ldots, q)$ такие, что*

(a) $\sum\limits_{j=1}^{q} \varphi_j(x) \leqslant 1 \ (x \in \mathbb{R}^n)$,

(b) $\sum\limits_{j=1}^{q} \varphi_j(x) = 1 \ (x \in K)$,

(c) $\operatorname{supp} \varphi_j \subset S_{\alpha_j} \ (j = 1, \ldots, q)$.

Доказательство см. в [14, гл. 14, § 2], лемма 4.

Семейство функций $\{\varphi_j\}$ называется *разбиением единицы.*

Обобщенные функции

Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$. Определим сходимость в пространстве $\dot{C}^\infty(\Omega)$ следующим образом: последовательность $\{\varphi_s\} \subset \dot{C}^\infty(\Omega)$ сходится к элементу $\varphi \in \dot{C}^\infty(\Omega)$, если существует компакт $K \subset \Omega$ такой, что $\operatorname{supp} \varphi_s \subset K$ и

$$\lim_{s \to \infty} \|\varphi - \varphi_s\|_{C^k(\overline{\Omega})} = 0$$

для любого $k = 0, 1, 2, \ldots$. Обозначим через $\mathcal{D}(\Omega)$ линейное пространство $\dot{C}^\infty(\Omega)$ с такой сходимостью. Можно дать эквивалентное определение сходимости в $\mathcal{D}(\Omega)$, рассматривая $\mathcal{D}(\Omega)$ как локально выпуклое линейное топологическое пространство (см. [15, гл. 1, § 1]).

Линейный функционал f на $\mathcal{D}(\Omega)$ называется *обобщенной функцией* или *распределением* в Ω, если из сходимости $\varphi_s \to \varphi$ в $\mathcal{D}(\Omega)$ вытекает сходимость $\langle f, \varphi_s \rangle \to \langle f, \varphi \rangle$. Обозначим через $\mathcal{D}'(\Omega)$ пространство обобщенных функций (распределений) со слабой сходимостью.

В силу неравенства Шварца каждая функция $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ определяет обобщенную функцию F в Ω по формуле

$$\langle F, \varphi \rangle = \int\limits_{\Omega} f(x) \varphi(x)\, dx \qquad (\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)). \tag{B.1}$$

Будем говорить, что обобщенная функция, определенная формулой (B.1), является функцией. В этом случае мы отождествляем обобщенную функцию F с функцией f.

Определим некоторые операции над обобщенными функциями.

(a) Производная $\mathcal{D}^\alpha f$ обобщенной функции $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ является обобщенной функцией в Ω, заданной формулой

$$\langle \mathcal{D}^\alpha f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \mathcal{D}^\alpha \varphi \rangle \qquad (\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)).$$

(b) Произведение af функции $a \in C^\infty(\Omega)$ на обобщенную функцию $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ есть обобщенная функция в Ω, заданная формулой

$$\langle af, \varphi \rangle = \langle f, a\varphi \rangle \qquad (\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)).$$

(c) Пусть $Q \subset \Omega$ — открытое множество. Сужение $f|_Q$ обобщенной функции f на Q есть обобщенная функция в Ω, заданная формулой

$$\langle f|_Q, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle \qquad (\varphi \in \mathcal{D}(Q)).$$

Линейное отображение A из $\mathcal{D}(\Omega)$ (или $\mathcal{D}'(\Omega)$) в себя называется непрерывным, если из сходимости $\varphi_s \to 0$ в $\mathcal{D}(\Omega)$ (или $\mathcal{D}'(\Omega)$) следует, что $A\varphi_s \to 0$ в $\mathcal{D}(\Omega)$ (или $\mathcal{D}'(\Omega)$).

Очевидно, обобщенные функции бесконечно дифференцируемы. Операторы дифференцирования $\mathcal{D}^\alpha$ и умножения на функцию $a \in C^\infty(\Omega)$ непрерывны в пространстве $\mathcal{D}(\Omega)$ (или $\mathcal{D}'(\Omega)$).

Будем говорить, что обобщенная функция f равна нулю на открытом множестве $Q \subset \Omega$, если $\langle f, \varphi \rangle = 0$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Две обобщенные функции f_1 и f_2 на Ω равны в Q, если $f_1 - f_2 = 0$ в Q.

По определению *носитель обобщенной функции* — наименьшее замкнутое подмножество Ω, вне которого f равна нулю.

Медленно растущие обобщенные функции

Обозначим через $S(\mathbb{R}^n)$ линейное пространство функций $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ таких, что

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta \mathcal{D}^\alpha \varphi(x)| = C_{\alpha\beta} < \infty$$

для всех мультииндексов α и β, где $x^\beta = x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n}$.

Определим сходимость в пространстве $S(\mathbb{R}^n)$ следующим образом: последовательность $\{\varphi_s\} \subset S(\mathbb{R}^n)$ сходится к элементу $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, если $\lim\limits_{s\to\infty} \|x^\beta \mathcal{D}^\alpha \varphi - x^\beta \mathcal{D}^\alpha \varphi_s\|_{C(\mathbb{R}^n)} = 0$ для всех α, β.

Линейный функционал f на $S(\mathbb{R}^n)$ называется *медленно растущей обобщенной функцией* в $\mathbb{R}^n$, если из сходимости $\varphi_s \to \varphi$ в $S(\mathbb{R}^n)$ следует, что $\langle f, \varphi_s \rangle \to \langle f, \varphi \rangle$. Обозначим через $S'(\mathbb{R}^n)$ пространство медленно растущих обобщенных функций со слабой сходимостью. Аналогично пространству $\mathcal{D}'(\Omega)$ мы можем определить операции дифференцирования и сужения.

Предположим, что $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и для каждого α существуют целое m_α и положительное число c_α такие, что

$$|\mathcal{D}^\alpha a(x)| \leqslant c_\alpha (1 + |x|)^{m_\alpha}.$$

Определим произведение функции a и медленно растущей обобщенной функции $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ по формуле

$$\langle af, \varphi \rangle = \langle f, a\varphi \rangle \qquad (\varphi \in S(\mathbb{R}^n)).$$

Очевидно, $S'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Определим δ-функцию Дирака следующим образом:

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) \qquad (\varphi \in S(\mathbb{R}^n)).$$

Преобразование Фурье

Определим *преобразование Фурье* $\widehat{f}$ функции $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ по формуле

$$\widehat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) \exp\left(-i(x,\xi)\right) dx \qquad (\xi \in \mathbb{R}^n), \tag{B.2}$$

где $(x,\xi) = x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n$.

Если $g \in L_1(\mathbb{R}^n)$, мы определим *обратное преобразование Фурье* функции g по формуле

$$\check{g}(x) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(\xi) \exp\left(i(x,\xi)\right) d\xi \qquad (x \in \mathbb{R}^n). \tag{B.3}$$

Обозначим $\widehat{f}$ через Ff и $\check{g}$ через $F^{-1}g$.

Теорема B.1. (a) *Преобразования F и F^{-1} отображают $S(\mathbb{R}^n)$ непрерывно и взаимно однозначно на себя, и $FF^{-1} = F^{-1}F = I$ на $S(\mathbb{R}^n)$.*

(b) *Если* $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, *то*

$$\big(\widehat{\mathcal{D}^\alpha \varphi}\big)(\xi) = \xi^\alpha \widehat{\varphi}(\xi), \qquad \mathcal{D}^\beta \widehat{\varphi}(\xi) = \Big(\widehat{(-x)^\beta \varphi}\Big)(\xi)$$

для всех мультииндексов α *и* β.

(c) *Если* $\varphi, \psi \in S(\mathbb{R}^n)$, *то*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\overline{\psi}(x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(\xi)\overline{\widehat{\psi}}(\xi)\, d\xi, \tag{B.4}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\widehat{\psi}(x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(\xi)\psi(\xi)\, d\xi. \tag{B.5}$$

Определим преобразование Фурье Fu для $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ по формуле

$$\langle Fu, \varphi\rangle = \langle u, F\varphi\rangle \qquad (\varphi \in S(\mathbb{R}^n)). \tag{B.6}$$

В силу (B.5) сформулированное выше определение (B.6) согласуется с определением (B.2), если $u \in S(\mathbb{R}^n)$. Мы обозначим также Fu через $\widehat{u}$.

Аналогично мы определим обратное преобразование Фурье $F^{-1}v$ для $v \in S'(\mathbb{R}^n)$ по формуле

$$\langle F^{-1}v, \psi\rangle = \langle v, F^{-1}\psi\rangle \qquad (\psi \in S(\mathbb{R}^n)). \tag{B.7}$$

Обозначим $F^{-1}v$ через $\check{v}$.

Теорема B.2. (a) *Преобразования F и F^{-1} отображают $S'(\mathbb{R}^n)$ непрерывно и взаимно однозначно на себя, и $FF^{-1} = F^{-1}F = I$ на $S'(\mathbb{R}^n)$.*

(b) *Если* $u \in S'(\mathbb{R}^n)$, *то*

$$\widehat{\mathcal{D}^\alpha u} = \xi^\alpha \widehat{u}, \qquad \mathcal{D}^\beta \widehat{u} = \widehat{(-x)^\beta u}.$$

Теорема B.3 (теорема Планшереля). *Пусть $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$. Тогда преобразование Фурье Ff в смысле обобщенных функций определяет функцию $\widehat{f} \in L_2(\mathbb{R}^n)$. Эта функция имеет вид*

$$\widehat{f}(\xi) = \lim_{R\to\infty} (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{|x|\leqslant R} f(x)\exp\left(-i(x,\xi)\right) dx \qquad (\text{в } L_2(\mathbb{R}^n)). \tag{B.8}$$

При этом

$$\|\widehat{f}\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}, \tag{B.9}$$

$$f(x) = \lim_{R\to\infty} (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{|\xi|\leqslant R} \widehat{f}(\xi) \exp\left(i(x,\xi)\right) d\xi \qquad (\textit{в } L_2(\mathbb{R}^n)). \tag{B.10}$$

Из этой теоремы вытекает следующий результат.

Теорема B.4. *Преобразование Фурье отображает $L_2(\mathbb{R}^n)$ на себя взаимно однозначно, и*

$$(f,g)_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \left(\widehat{f},\widehat{g}\right)_{L_2(\mathbb{R}^n)} \tag{B.11}$$

для всех $f,g \in L_2(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство теорем B.1–B.3 читатель может найти в [15, гл. 6, §§ 1 и 2].

Пространства Соболева

Пространство Соболева $W^s(\mathbb{R}^n)$ $(s \in \mathbb{R})$ — пространство обобщенных функций $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ таких, что $\left(1+|\xi|^2\right)^{s/2}\widehat{u} \in L_2(\mathbb{R}^n)$, с нормой

$$\|u\|_{W^s(\mathbb{R}^n)} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi\right)^{1/2}, \tag{B.12}$$

см. [21, 34, 37].

Предположим, что $\Omega = \mathbb{R}^n$ или $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область, удовлетворяющая одному из следующих условий.

Условие B.1. $\Omega = R^n_+$.

Условие B.2. Ω — ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^\infty$.

Условие B.3. $\Omega = (0,d) \times G$, где $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ — ограниченная область (с границей $\partial G \in C^\infty$, если $n \geqslant 3$),
где $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ и $\mathbb{R}^n_- = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n < 0\}$.

Пусть m — неотрицательное целое число. *Пространство Соболева* $W^m(\Omega)$ — пространство обобщенных функций $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ таких, что $\mathcal{D}^\alpha u \in L_2(\Omega)$ $(|\alpha| \leqslant m)$, с нормой

$$\|u\|_{W^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Omega |\mathcal{D}^\alpha u(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}. \qquad \text{(B.13)}$$

Здесь мы полагаем $W^0(\Omega) = L_2(\Omega)$.

Пусть $s = m + \sigma$, где m — неотрицательное целое и $0 < \sigma < 1$. *Пространство Соболева* $W^s(\Omega)$ — пространство функций $u \in W^m(\Omega)$ с конечной нормой

$$\|u\|_{W^s(\Omega)} = \\ = \left(\|u\|^2_{W^m(\Omega)} + \sum_{|\alpha| = m} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|\mathcal{D}^\alpha u(x) - \mathcal{D}^\alpha u(y)|^2}{|x-y|^{n+2\sigma}} \, dx \, dy \right)^{1/2}. \qquad \text{(B.14)}$$

Пространства Соболева $W^s(\Omega)$ $(s \geqslant 0)$ — гильбертовы пространства. Формулы (B.12) и (B.13), (B.14) с $\Omega = \mathbb{R}^n$ задают эквивалентные нормы в $W^s(\mathbb{R}^n)$ для $s \geqslant 0$ (см. лемму 3 в [33, гл. 2, § 2] и [37, гл. 4, § 4.4.1]).

Обозначим через $W^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ $(s \geqslant 0)$ пространство распределений $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ таких, что $u \in W^s(K)$ для каждой ограниченной области K, $\overline{K} \subset \Omega$.

Рассмотрим теорему о продолжении функций.

Теорема B.5. *Пусть $s \geqslant 0$. Предположим, что $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область, удовлетворяющая одному из условий* B.1, B.2 *или* B.3. *Тогда для любой $u \in W^s(\Omega)$ существует $U \in W^s(\mathbb{R}^n)$ такая, что $u(x) = U(x)$ $(x \in \Omega)$ и*

$$\|U\|_{W^s(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|u\|_{W^s(\Omega)}. \qquad \text{(B.15)}$$

Доказательство см. в [21, гл. 1, § 8], теорема 8.1, а также [33, гл. 2].

Таким образом, если Ω удовлетворяет условиям теоремы B.5, то $W^s(\Omega)$ $(s \geqslant 0)$ — пространство сужений $U|_\Omega$ $(U \in W^s(\mathbb{R}^n))$ с эквивалентной нормой

$$\|u\|_{W^s(\Omega)} = \inf \|U\|_{W^s(\mathbb{R}^n)} \qquad (U \in W^s(\mathbb{R}^n) : U|_\Omega = u). \qquad \text{(B.16)}$$

Замечание B.1. Теорему B.5 можно обобщить на случай ограниченных областей, удовлетворяющих сильному условию конуса (см. теорему 9.6 в [3, гл. 3, § 9] и теорему в [37, гл. 4, § 4.2.3]). Поэтому результаты для пространств Соболева, основанные на теореме продолжения, можно обобщить на случай вышеуказанных областей.

Пусть $m \in \mathbb{N}$. Обозначим через $W^{-m}(\Omega)$ пространство обобщенных функций $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ таких, что

$$\|u\|_{W^{-m}(\Omega)} = \sup_{\varphi \in \dot{C}^\infty(\Omega)} \frac{|\langle u, \varphi \rangle|}{\|\varphi\|_{W^m(\Omega)}} < \infty. \tag{B.17}$$

Пространство $W^{-m}(\Omega)$ — гильбертово пространство, сопряженное к $\mathring{W}^m(\Omega)$, где $\mathring{W}^m(\Omega)$ — замыкание множества $\dot{C}^\infty(\Omega)$ в $W^m(\Omega)$ (см. [15, гл. 3, § 10]).

Теорема о следах

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область Q с границей $\partial Q \in C^\infty$ или $\Omega = (0, d) \times G$, где $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ — ограниченная область (с границей $\partial G \in C^\infty$, если $n \geqslant 3$). Пусть M — граница $\partial Q \in C^\infty$ ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^n$ или $(n-1)$-мерное многообразие $\Gamma \subset \overline{\Omega}$ класса C^∞ с границей $\partial\Gamma \in C^\infty$. Для каждого конечного покрытия $\{U_j\}$ многообразия $\overline{M}$ открытыми множествами существует разбиение единицы $\{\varphi_j\}$ такое, что

$$\sum_{j=1}^{N} \varphi_j(x) = 1 \quad \big(x \in \overline{M}\big), \qquad \varphi_j \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}^n), \qquad \operatorname{supp} \varphi_j \subset U_j.$$

Пусть $x \to \omega_j(x) = y$ — диффеоморфизм класса C^∞, отображающий U_j на V_j так, что

1) $\omega_j(U_j \cap M) \subset \{y : y_n = 0\}$, если $M = \partial Q$ или если $M = \Gamma$, $U_j \cap \partial\Gamma = \varnothing$,

2) $\omega_j(U_j \cap M) \subset \{y : y_{n-1} > 0,\ y_n = 0\}$, $\omega_j(U_j \cap \partial M) \subset \{y : y_{n-1} = 0,\ y_n = 0\}$, если $M = \Gamma$, $U_j \cap \partial\Gamma \neq \varnothing$.

Пусть $W^s(M)$ — *пространство Соболева* функций u таких, что в локальных координатах $y = y^j$ мы имеем $\varphi_j u \in W^s(\omega_s(U_j \cap M))$. Норма в

$W^s(M)$ вводится следующим образом:

$$\|u\|_{W^s(M)} = \left(\sum_{j=1}^{M} \|\varphi_j u\|^2_{W^s(\omega_j(U_j \cap M))} \right)^{1/2}, \tag{B.18}$$

где нормы $\|\varphi_j u\|_{W^s(\omega_j(U_j \cap M))}$ вычисляются в координатах $y = y^j$, $s \geqslant 0$.

Очевидно, что определение пространства $W^s(M)$ не зависит от покрытия $\{U_j\}$ и выбора преобразований ω_j, а различные нормы (B.18) эквивалентны.

Пространство $W^s(M)$ — гильбертово пространство.

Обозначим через $C^\infty\big(\overline{M}\big)$ пространство функций $u \in C\big(\overline{M}\big)$ таких, что в локальных координатах $y = y^j$ мы имеем $u \in C^\infty\big(\omega_j\big(U_j \cap \overline{M}\big)\big)$.

Определим отображение

$$\gamma_\mu : C^\infty(\overline{\Omega}) \to C^\infty(\overline{M})$$

по формуле

$$\gamma_\mu u = \mathcal{D}^\mu_\nu u|_{\overline{M}},$$

где μ — неотрицательное целое число, ν — единичный вектор нормали к $\overline{M}$ в точке $x \in \overline{M}$.

Теорема B.6. *Пусть $s > 0$, и пусть $m < s + 1/2$, — неотрицательное целое число. Тогда отображение*

$$\gamma = \{\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{m-1}\} : C^\infty(\overline{\Omega}) \to \prod_{\mu=0}^{m-1} C^\infty(\overline{M})$$

однозначно продолжается до непрерывного линейного отображения

$$\gamma : W^s(\Omega) \to \prod_{\mu=0}^{m-1} W^{s-\mu-1/2}(M).$$

Более того, это отображение сюръективно и существует линейный непрерывный оператор

$$S : \prod_{\mu=0}^{m-1} W^{s-\mu-1/2}(M) \to W^s(\Omega)$$

такой, что $\gamma S g = g$ для всех $g = (g_0, g_1, \ldots, g_{m-1}) \in \prod_{\mu=0}^{m-1} W^{s-\mu-1/2}(M)$.

Доказательство основано на аналогичном результате для $\Omega = \mathbb{R}^n_+$, $M = \mathbb{R}^{n-1}$ и разбиении единицы (см. теорему 7 в [33, гл. 2, § 4], теорему 10 в [33, гл. 2, § 5], теорему 8.3 в [21, гл. 1, § 8] и теорему в [37, гл. 4, § 4.7.2]).

Обозначим $\gamma_0 u = u|_M$ для $u \in W^s(\Omega)$, где $s > 1/2$. Функция $u|_M$ называется *следом функции* u.

Замечание B.2. Из теоремы B.6 следует, что мы можем ввести эквивалентную норму в пространстве $W^{s-1/2}(M)$ по формуле

$$\|\psi\|'_{W^{s-1/2}(M)} = \inf_u \|u\|_{W^s(\Omega)} \qquad (u \in W^s(\Omega) : u|_M = \psi).$$

Теоремы вложения

Следующая теорема вложения устанавливает, что элементы пространства Соболева $W^s(Q)$ дифференцируемы в классическом смысле для достаточно больших $s > 0$.

Теорема B.7 (теорема Соболева). *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область Q с границей $\partial Q \in C^\infty$ или $\Omega = (0, d) \times G$, где $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ — ограниченная область (с границей $\partial G \in C^\infty$, если $n \geqslant 3$). Пусть $k > n/2 + s$, где $s \geqslant 0$ — целое. Тогда имеет место вложение $W^k(\Omega) \subset C^s(\overline{\Omega})$, причем оператор вложения непрерывный.*

Доказательство см. в теореме из [37, гл. 4, § 4.6.2] и теореме 9.8 из [21, гл. 1, § 9].

Следующие две теоремы о компактности вложения позволяют сводить краевые задачи для эллиптических уравнений к фредгольмовым уравнениям.

Теорема B.8. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, удовлетворяющая условиям теоремы* B.7, *и пусть $k > s \geqslant 0$. Тогда оператор вложения $W^k(\Omega)$ в $W^s(\Omega)$ компактный.*

Доказательство следует из теоремы 16.1 в [21, гл. 1, § 16] и теоремы B.5.

Используя теорему B.8, мы получаем следующий результат.

Теорема B.9. *Пусть M — граница $\partial Q \in C^\infty$ ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^n$ или $(n-1)$-мерное ограниченное многообразие Γ класса C^∞ с границей $\partial\Gamma \in C^\infty$. Пусть $k > s \geqslant 0$. Тогда оператор вложения $W^k(M)$ в $W^s(M)$ компактный.*

Пространства $\mathring{W}^s(Q)$

Следующая теорема дает явное описание пространства $\mathring{W}^m(Q)$.

Теорема B.10. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, удовлетворяющая условиям теоремы* B.7, *и пусть $m \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$\mathring{W}^m(\Omega) = \{u \in W^m(\Omega) : \mathcal{D}_\nu^{\mu-1} u|_{\partial\Omega\setminus K} = 0,\ \mu = 1, \dots, m\},$$

где $K = \varnothing$, если $\Omega = Q$, и $K = (\{0\} \times \partial G) \cup (\{d\} \times \partial G)$, если $\Omega = (0, d) \times G$.

Доказательство см. в [21, гл. 1, § 11], теорема 11.5.

Следующая теорема об эквивалентных нормах в пространстве $\mathring{W}^m(\Omega)$ полезна для изучения задачи Дирихле для эллиптических уравнений.

Теорема B.11. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, удовлетворяющая условиям теоремы* B.7, *и пусть $m \in \mathbb{N}$. Тогда норма* (B.13) *в пространстве $\mathring{W}^m(\Omega)$ эквивалентна норме*

$$\left(\sum_{j=0}^{n} \int\limits_{\Omega} |\mathcal{D}_j^m u(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}. \tag{B.19}$$

Доказательство следует из теорем B.2, B.3, B.8 и B.10.

Интерполяция

Следующие две теоремы применяются для получения априорных оценок решений эллиптических задач.

Теорема B.12. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, удовлетворяющая условиям теоремы* B.7, *или $\Omega = R^n_+$. Тогда для любых $u \in W^k(\Omega)$ и $q \in \mathbb{C}$*

$$|q|^{k-s} \|u\|_{W^s(\Omega)} \leqslant c\big(\|u\|_{W^k(\Omega)} + |q|^k \|u\|_{L_2(\Omega)}\big), \tag{B.20}$$

где $0 < s < k$ и $c > 0$ не зависит от u и q.

Теорема B.13. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, удовлетворяющая условиям теоремы* B.7. *Если $\Omega = Q$ и $\partial Q \in C^\infty$, мы положим $M = \partial Q$. Если $\Omega = (0, d) \times G$, мы положим $M = \{b\} \times G$, где $0 \leqslant b \leqslant d$. Тогда для любых $u \in W^1(\Omega)$ и $q \in \mathbb{C}$*

$$|q|^{1/2} \|u|_M\|_{L_2(M)} \leqslant c_1 \big(\|u\|_{W^1(\Omega)} + |q| \|u\|_{L_2(\Omega)}\big), \tag{B.21}$$

где $c_1 > 0$ не зависит от u и q.

Теоремы B.12 и B.13 взяты из [1, гл. 1, § 1].

Имея некоторые свойства линейных операторов в пространствах Соболева, мы можем распространить их на промежуточные пространства.

Теорема B.14. *Пусть $\Omega_j = \mathbb{R}^{n_j}$ или $\Omega_j \subset \mathbb{R}^{n_j}$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega_j \in C^\infty$, $n_j \in \mathbb{N}$ $(j = 1, 2)$. Пусть*

$$A \in \bigcap_{i=1,2} \mathcal{B}\big(W^{p_i}(\Omega_1), W^{q_i}(\Omega_2)\big),$$

где $0 \leqslant p_1 < p_2$, $0 \leqslant q_1 < q_2$. Тогда

$$A \in \mathcal{B}\big(W^{(1-\theta)p_1 + \theta p_2}(\Omega_1), W^{(1-\theta)q_1 + \theta q_2}(\Omega_2)\big)$$

для любого $0 < \theta < 1$.

Теорема B.15. *Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial Q \in C^\infty$. Пусть*

$$A \in \bigcap_{i=1,2} \mathcal{B}\big(W^{s_i}(Q), W^{s_i}(\partial Q)\big),$$

где $0 \leqslant s_1 < s_2$. Тогда

$$A \in \mathcal{B}\big(W^{(1-\theta)s_1 + \theta s_2}(Q), W^{(1-\theta)s_1 + \theta s_2}(\partial Q)\big)$$

для любого $0 < \theta < 1$.

Теоремы B.14 и B.15 следуют из теорем 5.1, 7.7 и 9.6 и замечания 7.4 в [21, гл. 1].

Одномерный случай

Сделаем теперь несколько замечаний о функциональных пространствах в одномерном случае.

Обозначим через $L_p(a,b)$ пространство Лебега измеримых на (a,b) функций f $(1 \leqslant p < \infty)$. Это пространство имеет норму

$$\|f\|_{L_p(a,b)} = \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Обозначим через $C(a,b)$ (или $C[a,b]$) пространство непрерывных функций на (a,b) (или $[a,b]$). Пусть $C^k(a,b)$ (или $C^k[a,b]$) — подпространство функций из $C(a,b)$ (или $C[a,b]$), имеющих непрерывные производные порядка не выше k на (a,b) (или $[a,b]$). Норма в пространстве $C^k[a,b]$ определяется формулой

$$\|\varphi\|_{C^k[a,b]} = \max_{i\leqslant k}\sup_{x\in[a,b]}|\varphi^{(i)}(x)|.$$

Аналогично многомерному случаю мы можем также ввести пространства $C^\infty(a,b)$, $C^\infty[a,b]$ и $\dot{C}^\infty(a,b)$.

Обозначим через $\mathcal{D}(a,b)$ пространство $\dot{C}^\infty(a,b)$, а через $\mathcal{D}'(a,b)$ пространство обобщенных функций на $\mathcal{D}(a,b)$.

Для $k \in \mathbb{N}$ пространство $W^k(a,b)$ есть пространство абсолютно непрерывных на $[a,b]$ функций $u(x)$, имеющих абсолютно непрерывные на $[a,b]$ производные $u^{(i)}(x)$ для $i \leqslant k-1$ таких, что $u^{(k)}(x) \in L_2(a,b)$. Норма в $W^k(a,b)$ будет иметь вид

$$\|u\|_{W^k(a,b)} = \left(\sum_{i\leqslant k}\int_a^b |u^{(i)}(x)|^2\,dx\right)^{1/2}. \tag{B.22}$$

Таким образом, теорема B.6 о следах становится тривиальной для $n = 1$.

Пусть k, s — целые, и пусть $0 \leqslant s < k$. Тогда в силу теоремы B.7 для любого $u \in W^k(a,b)$

$$\|u\|_{C^s[a,b]} \leqslant c\|u\|_{W^k(a,b)}. \tag{B.23}$$

Из теоремы B.8 следует, что оператор вложения $W^k(a,b)$ в $W^s(a,b)$ компактный.

Заметим, что

$$\mathring{W}^k(a,b) = \{u \in W^k(a,b) : u^{(i)}(a) = u^{(i)}(b) = 0,\ 0 \leqslant i \leqslant k-1\},$$

где $k \in \mathbb{N}$.

В силу теоремы B.11 мы можем ввести в пространстве $\mathring{W}^k(a,b)$ эквивалентную норму по формуле

$$\|u\|'_{\mathring{W}^k(a,b)} = \left(\int\limits_a^b |u^{(k)}(x)|^2\, dx \right)^{1/2}. \tag{B.24}$$

Из теорем B.12 и B.13 следует, что для любых $u \in W^k(a,b)$ и $q \in \mathbb{C}$

$$|q|^{k-s}\|u\|_{W^s(a,b)} \leqslant c\big(\|u\|_{W^k(a,b)} + |q|^k\|u\|_{L_2(a,b)}\big), \tag{B.25}$$

где $k, s \in \mathbb{N}$, $0 < s < k$ и $c > 0$ не зависит от u и q; для любых $u \in W^1(a,b)$ и $q \in \mathbb{C}$

$$|q|^{1/2}|u(d)| \leqslant c_1\big(\|u\|_{W^1(a,b)} + |q| \cdot \|u\|_{L_2(a,b)}\big), \tag{B.26}$$

где $a \leqslant d \leqslant b$ и $c_1 > 0$ не зависит от u и q.

Приложение C. Обобщенные решения эллиптических задач

Задача Дирихле

Рассмотрим уравнение

$$A(x,D)u = \sum_{|\alpha|,|\beta| \leqslant m} \mathcal{D}^\alpha a_{\alpha\beta}(x)\mathcal{D}^\beta u(x) = f_0(x) \qquad (x \in Q) \tag{C.1}$$

с краевыми условиями Дирихле

$$\mathcal{D}_\nu^{\mu-1} u|_{\partial Q} = 0 \qquad (x \in \partial Q,\ \mu = 1, \ldots, m), \tag{C.2}$$

где $a_{\alpha\beta} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $f_0 \in L_2(Q)$ — комплекснозначные функции, $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial Q \in C^\infty$, ν — единичный вектор внутренней нормали к ∂Q в точке $x \in \partial Q$, $n \geqslant 2$.

Уравнение (С.1) называется *сильно эллиптическим* в $\overline{Q}$, если

$$\operatorname{Re}\sum_{|\alpha|,|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x)\xi^{\alpha+\beta} > 0 \quad \text{для всех } x\in\overline{Q},\ 0\neq\xi\in\mathbb{R}^n. \tag{С.3}$$

В этом пункте мы предполагаем, что уравнение (С.1) сильно эллиптическое в $\overline{Q}$. Тогда мы говорим, что дифференциальный оператор $A(x,D)$ *сильно эллиптический* в $\overline{Q}$.

Определим неограниченный оператор $\mathcal{A}:\mathcal{D}(\mathcal{A})\subset L_2(Q)\to L_2(Q)$ с областью определения $\mathcal{D}(\mathcal{A})=\{u\in\mathring{W}^m(Q):\mathcal{A}u\in L_2(Q)\}$, действующий в пространстве обобщенных функций $\mathcal{D}'(Q)$ по формуле

$$\mathcal{A}u = A(x,D)u(x). \tag{С.4}$$

Функция u называется *обобщенным решением краевой задачи* (С.1), (С.2), если $u\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$ и

$$\mathcal{A}u = f_0. \tag{С.5}$$

Можно дать также следующее эквивалентное определение обобщенного решения.

Функция u называется *обобщенным решением краевой задачи* (С.1), (С.2), если $u\in\mathring{W}^m(Q)$ и для всех $v\in\mathring{W}^m(Q)$ мы имеем

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m}\big(a_{\alpha\beta}\mathcal{D}^\beta u,\mathcal{D}^\alpha v\big)_{L_2(Q)} = (f_0,v)_{L_2(Q)}. \tag{С.6}$$

Введем неограниченный оператор $\mathcal{A}^+:\mathcal{D}(\mathcal{A}^+)\subset L_2(Q)\to L_2(Q)$ с областью определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}^+)=\{u\in\mathring{W}^m(Q):\mathcal{A}^+u\in L_2(Q)\}$, действующий в пространстве обобщенных функций $\mathcal{D}'(Q)$ по формуле

$$\mathcal{A}^+u = \sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m}\mathcal{D}^\alpha\overline{a_{\beta\alpha}(x)}\mathcal{D}^\beta u.$$

Операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^+$ формально сопряженные, т. е.

$$(\mathcal{A}u,v)_{L_2(Q)} = \big(u,\mathcal{A}^+v\big)_{L_2(Q)}$$

для всех $u,v\in\dot{C}^\infty(Q)$.

Теорема C.1. *Уравнение* (C.1) *сильно эллиптическое в* $\overline{Q}$ *тогда и только тогда, когда существуют постоянные* $c_1 > 0$, $c_2 \geqslant 0$ *такие, что*

$$\operatorname{Re}\,(\mathcal{A}u, u)_{L_2(Q)} \geqslant c_1\|u\|^2_{W^m(Q)} - c_2\|u\|^2_{L_2(Q)} \tag{C.7}$$

для всех $u \in \dot{C}^\infty(Q)$.

Теорема C.1 принадлежит М. И. Вишику [6] и Л. Гордингу [45].

Неравенство (C.7) называется *неравенством Гординга.* Задача (C.1), (C.2) называется *коэрцитивной*, если она удовлетворяет неравенству Гординга. В силу теоремы C.1 задача (C.1), (C.2) коэрцитивна тогда и только тогда, когда уравнение (C.1) сильно эллиптическое в $\overline{Q}$. Таким образом, можно определить сильную эллиптичность с помощью неравенства Гординга (C.7).

Теорема C.2. *Пусть оператор* $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$ *сильно эллиптический. Тогда спектр* $\sigma(\mathcal{A})$ *дискретный и* $\sigma(\mathcal{A}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > -c_2\}$, *где* $c_2 \geqslant 0$ *— константа из неравенства* (C.7). *Если* $\lambda \notin \sigma(\mathcal{A})$, *то резольвента* $R(\lambda, \mathcal{A}) : L_2(Q) \to L_2(Q)$ *— компактный оператор. Кроме того,* $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^+$ *и* $(\mathcal{A}^+)^* = \mathcal{A}$.

Теорема C.3. *Сильно эллиптический оператор* $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$ *фредгольмов, и* $\operatorname{ind}\mathcal{A} = 0$.

Теорема C.4. *Пусть сильно эллиптический оператор* $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$ *симметрический, т. е.*

$$(\mathcal{A}u, v)_{L_2(Q)} = (u, \mathcal{A}v)_{L_2(Q)} \tag{C.8}$$

для всех $u, v \in \dot{C}^\infty(Q)$. *Тогда оператор* $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$ *самосопряженный, спектр* $\sigma(\mathcal{A})$ *состоит из вещественных изолированных собственных значений* $\lambda_s > -c_2$ *конечной кратности. Множество собственных функций* $\{v_s\}$ *оператора* $\mathcal{A}$ *образует ортонормированный базис в пространстве* $L_2(Q)$, *в то время как множество функций* $\left\{\dfrac{v_s}{\sqrt{\lambda_s + c_2}}\right\}$ *является ортонормированным базисом в простран-*

стве $\mathring{W}^m(Q)$ *со скалярным произведением*

$$(u,v)'_{\mathring{W}^m(Q)} = \\ = \frac{1}{2}\sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m}\Big(\Big(a_{\alpha\beta(x)} + \overline{a_{\beta\alpha}(x)}\Big)D^\beta u, D^\alpha v\Big)_{L_2(Q)} + c_2(u,v)_{L_2(Q)}. \quad \text{(C.9)}$$

Теоремы C.2–C.4 вытекают из следствий 11 и 14 и теоремы 25 в [14, гл. 14, § 6]. Заметим, что теоремы C.2–C.4 следуют из теорем A.17–A.19 о секториальных операторах и теорем B.8 и C.1.

Рассмотрим теперь уравнение

$$\mathcal{A}u = -\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\,a_{ij}(x)\,\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\,\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + a_0(x)u(x) = f_0(x) \\ (x\in Q) \quad \text{(C.10)}$$

с краевым условием

$$u|_{\partial Q} = 0, \quad \text{(C.11)}$$

где $Q=(0,d)\times G$ — цилиндр, $G\subset\mathbb{R}^{n-1}$ — ограниченная область, $\partial G\in C^\infty$, если $n\geqslant 3$; $a_{ij}, a_i, a_0\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — вещественнозначные функции и $a_{ij}=a_{ji}$; $f_0\in L_2(Q)$ — комплекснозначная функция.

Замечание C.1. Пусть уравнение (C.10) сильно эллиптическое в $\overline{Q}$, и пусть $m=1$. Тогда теоремы C.1–C.3 справедливы для оператора $\mathcal{A}$, соответствующего краевой задаче (C.10), (C.11). Более того, если $a_i=0$ $(i=1,\dots,n)$, то заключение теоремы C.4 также верно.

Гладкость решений

Рассмотрим сильно эллиптическое уравнение (C.1) с коэффициентами $a_{\alpha\beta}\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Предположим, что $Q\subset\mathbb{R}^n$ — произвольная ограниченная область.

Одним из наиболее важных свойств эллиптических дифференциальных уравнений является гладкость решений на компактных подмножествах области Q. Это свойство не зависит от гладкости границы ∂Q.

Теорема С.5. *Пусть уравнение* (С.1) *сильно эллиптическое в* $\overline{Q}$. *Предположим, что* $f_0 \in W^k_{\mathrm{loc}}(Q)$ *и* u — *решение уравнения* (С.1) *в смысле теории обобщенных функций, где* $k \in \mathbb{Z}$. *Тогда* $u \in W^{k+2m}_{\mathrm{loc}}(Q)$.

Доказательство см. в теореме 3.2 из [21, гл. 2, § 3].

Лемма С.1. *Пусть уравнение* (С.1) *сильно эллиптическое в* $\overline{Q}$, *и пусть* $\partial Q \cap B_{2\delta}\big(x^0\big) \in C^\infty$ — *открытое связное множество* (*в индуцированной топологии*). *Предположим, что* $f_0 \in W^k(Q)$ *и* $u \in W^m(Q)$ — *решение уравнения* (С.1) *в смысле теории обобщенных функций, удовлетворяющее краевым условиям*

$$\mathcal{D}^{\mu-1}_\nu u|_{\partial Q \cap B_{2\delta}(x^0)} = 0 \qquad (\mu = 1, \dots, m),$$

где $x^0 \in \partial Q$, $k \geqslant 0$ — *целое. Тогда* $u \in W^{k+2m}\big(Q \cap B_\delta\big(x^0\big)\big)$.

Используя разбиение единицы и лемму С.1, мы получим следующее утверждение.

Теорема С.6. *Пусть уравнение* (С.1) *сильно эллиптическое в* $\overline{Q}$, *и пусть* $\partial Q \in C^\infty$. *Предположим, что* $f_0 \in W^k(Q)$ *и* u — *обобщенное решение краевой задачи* (С.1), (С.2), *где* $k \geqslant 0$ — *целое. Тогда* $u \in W^{k+2m}(Q)$.

Лемма С.1 и теорема С.6 вытекают из леммы 19 и теоремы 23 в [14, гл. 14, § 6].

Замечание С.2. Заключение теоремы С.6 верно также для краевой задачи (С.10), (С.11) с $k = 0$ и $m = 1$ (см. [20, гл. 3, § 10], теорема 10.1).

Эллиптические задачи с общими краевыми условиями

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\mathbf{A}(x, D)u(x) = f_0(x) \qquad (x \in Q) \tag{С.12}$$

с краевыми условиями

$$\mathbf{B}(x, D)u(x)|_{\partial Q} = f_1(x) \qquad (x \in \partial Q) \tag{С.13}$$

относительно вектор-функции $u = (u_1, \dots, u_N)$. Здесь $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial Q \in C^\infty$, $n \geqslant 2$; $\mathbf{A}(x, D)$ и $\mathbf{B}(x, D)$ — матрицы порядков $N \times N$ и $mN \times N$ соответственно с элементами

$$A_{jk}(x, D)u_k(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} a_{jk\alpha}(x) D^\alpha u_k(x) \quad (j, k = 1, \dots, N),$$

$$B_{\mu k}(x, D)u_k(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant m_\mu} b_{\mu k\alpha}(x) D^\alpha u_k(x) \quad (\mu = 1, \dots, mN,\ k = 1, \dots, N),$$

$a_{jk\alpha}, b_{\mu k\alpha} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — комплекснозначные функции; $f_0 = (f_{01}, \dots, f_{0N})$, $f_1 = (f_{11}, \dots, f_{1,mN})$; m и m_μ — целые, $m \geqslant 1$, $m_\mu \geqslant 0$; $f_{0j} \in W^l(Q)$ $(j = 1, \dots, N)$ и $f_{1\mu} \in W^{l+2m-m_\mu-1/2}(\partial Q)$ $(\mu = 1, \dots, mN)$ — комплекснозначные функции; $l \geqslant \max\{0, m_\mu - 2m + 1\}$ — целое.

Обозначим через $A^0_{jk}(x, D)$ и $B^0_{\mu k}(x, D)$ главные однородные части операторов $A_{jk}(x, D)$ и $B_{\mu k}(x, D)$ соответственно, т. е.

$$A^0_{jk}(x, D) = \sum_{|\alpha| = 2m} a_{jk\alpha}(x) D^\alpha, \qquad B^0_{\mu k}(x, D) = \sum_{|\alpha| = m_\mu} b_{\mu k\alpha}(x) D^\alpha.$$

Наряду с операторами $A^0_{jk}(x, D)$ и $B^0_{\mu k}(x, D)$ мы рассмотрим соответствующие полиномы

$$A^0_{jk}(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = 2m} a_{jk\alpha}(x) \xi^\alpha, \qquad B^0_{\mu k}(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = m_\mu} b_{\mu k\alpha}(x) \xi^\alpha,$$

где $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \times \dots \times \xi_n^{\alpha_n}$.

Обозначим через $\mathbf{A}^0(x, \xi)$ и $\mathbf{B}^0\big(x, \xi\big)$ матрицы порядка $N \times N$ и $mN \times N$ с элементами $A^0_{jk}\big(x, \xi\big)$ $\big(j, k = 1, \dots, N\big)$ и $B^0_{\mu k}\big(x, \xi\big)$ $\big(\mu = 1, \dots, mN,$ $k = 1, \dots, N\big)$.

Предположим, что операторы $\mathbf{A}(x, D)$ и $\mathbf{B}(x, D)$ удовлетворяют следующим условиям.

Условие С.1. Оператор $\mathbf{A}(x, D)$ *правильно эллиптический* в $\overline{Q}$, т. е. полином $\det \mathbf{A}^0(x, \xi + \tau\nu)$ переменной τ имеет ровно mN корней $\tau_1^+(x, \xi, \nu), \dots, \tau_{mN}^+(x, \xi, \nu)$ с положительными мнимыми частями и mN корней с отрицательными мнимыми частями для всех $x \in \overline{Q}$, $\nu \neq 0$ и $\xi \neq 0$, ортогональных к ν в $\mathbb{R}^n$.

Условие C.2. Оператор $\mathbf{B}(x, D)$ удовлетворяет *условию Лопатинского* по отношению к оператору $\mathbf{A}(x, D)$ на ∂Q, т. е. строки матрицы

$$\mathbf{B}^0(x, \xi + \tau\nu)\mathbf{A}^0(x, \xi + \tau\nu)^{-1} \det \mathbf{A}^0(x, \xi + \tau\nu)$$

линейно независимы по модулю полинома $\prod\limits_{\mu=1}^{mN} \big(\tau - \tau_\mu^+(x, \xi, \nu)\big)$ для всех $x \in \partial Q$ и $\xi \neq 0$, ортогональных к ν, где ν — единичный вектор внутренней нормали к ∂Q в точке x.

Будем говорить, что задача (C.12), (C.13) *эллиптическая*, если выполнены условия C.1 и C.2.

Если оператор $\mathbf{A}(x, D)$ правильно эллиптический в $\overline{Q}$, то существует постоянная $a > 0$ такая, что для всех $x \in \overline{Q}$ и $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$

$$a^{-1}|\xi|^{2mN} \leqslant |\det \mathbf{A}^0(x, \xi)| \leqslant a|\xi|^{2mN}.$$

Константа a называется *константой эллиптичности.*

Замечание C.3. Если $N = 1$, то матрица $\mathbf{A}(x, D)$ состоит из одного элемента $A(x, D)$, а матрица $\mathbf{B}(x, D)$ — из одного столбца $(B_1(x, D), \ldots, B_m(x, D))$. Пусть $A^0(x, D)$ и $B_\mu^0(x, D)$ — главные однородные части $A(x, D)$ и $B_\mu(x, D)$ соответственно. Тогда условие C.1 принимает вид: полином $A^0(x, \xi + \tau\nu)$ переменной τ имеет ровно m корней $\tau_1^+(x, \xi, \nu), \ldots, \tau_m^+(x, \xi, \nu)$ с положительными мнимыми частями и m корней с отрицательными мнимыми частями для всех $x \in \overline{Q}$, $\nu \neq 0$ и $\xi \neq 0$, ортогональных к ν в $\mathbb{R}^n$. Условие C.2 имеет следующий вид: многочлены $B_1^0(x, \xi + \tau\nu), \ldots, B_m^0(x, \xi + \tau\nu)$ линейно независимы по модулю полинома $\prod\limits_{\mu=1}^{m} \big(\tau - \tau_\mu^+(x, \xi, \nu)\big)$ для всех $x \in \partial Q$ и $\xi \neq 0$, ортогональных к ν, где ν единичный вектор внутренней нормали к ∂Q в точке x. Если оператор $A(x, D)$ сильно эллиптический в $\overline{Q}$ и либо $n \geqslant 3$, либо коэффициенты $A(x, D)$ вещественные, то этот оператор правильно эллиптический в $\overline{Q}$.

Введем гильбертовы пространства вектор-функций

$$L_2^N(Q)=\prod_{i=1}^{N} L_2(Q), \qquad W^{l,N}(Q)=\prod_{i=1}^{N} W^l(Q),$$

$$\mathcal{W}^{l,N}(Q,\partial Q)=W^{l,N}(Q)\times\prod_{\mu=1}^{mN} W^{l+2m-m_\mu-1/2}(\partial Q)$$

с нормами

$$\|v\|_{L_2^N(Q)}=\left(\sum_{i=1}^{N}\|v_i\|^2_{L_2(Q)}\right)^{1/2}, \quad \|u\|_{W^{l,N}(Q)}=\left(\sum_{i=1}^{N}\|u_i\|^2_{W^l(Q)}\right)^{1/2},$$

$$\|f\|_{\mathcal{W}^{l,N}(Q)}=\left(\|f_0\|^2_{W^{l,N}(Q)}+\sum_{\mu=1}^{mN}\|f_{1\mu}\|^2_{W^{l+2m-m_\mu-1/2}(\partial Q)}\right)^{1/2}, \quad \text{(C.14)}$$

где $u=(u_1,\dots,u_N)$, $v=(v_1,\dots,v_N)$, $f=(f_0,f_1)$, $f_0=(f_{01},\dots,f_{0N})$ и $f_1=(f_{11},\dots,f_{1,mN})$, $l\geqslant\max\{0,m_\mu-2m+1\}$ — целое.

Определим линейный ограниченный оператор $\mathbf{L}: W^{l+2m,N}(Q)\to\mathcal{W}^{l,N}(Q,\partial Q)$ по формуле

$$\mathbf{L}u=(\mathbf{A}(x,D)u,\ \mathbf{B}(x,D)u|_{\partial Q}).$$

Функция $u\in W^{l+2m,N}(Q)$ называется *сильным решением* задачи (C.12), (C.13) в $W^{l+2m,N}(Q)$, если $\mathbf{L}u=f$.

Лемма C.2. *Пусть выполняются условия* C.1 *и* C.2. *Тогда существует линейный ограниченный оператор* $\mathbf{R}:\mathcal{W}^{l,N}(Q,\partial Q)\to W^{l+2m,N}(Q)$, *который является правым и левым регуляризатором оператора* $\mathbf{L}: W^{l+2m,N}(Q)\to\mathcal{W}^{l,N}(Q,\partial Q)$.

Доказательство см. в [36], теоремы 2.5 и 2.6, и [8, §§ 2 и 4].

Из теорем A.5, B.8 и леммы C.2 мы получим следующие утверждения.

Лемма C.3. *Пусть выполнены условия* C.1 *и* C.2. *Тогда для всех* $u\in W^{l+2m,N}(Q)$

$$\|u\|_{W^{l+2m,N}(Q)}\leqslant c_1\big(\|\mathbf{L}u\|_{\mathcal{W}^{l,N}(Q,\partial Q)}+\|u\|_{L_2^N(Q)}\big). \quad \text{(C.15)}$$

Теорема C.7. *Пусть выполнены условия* C.1 *и* C.2. *Тогда оператор* $\mathbf{L}: W^{l+2m,N}(Q)\to\mathcal{W}^{l,N}(Q,\partial Q)$ *фредгольмов.*

Лемма C.4. *Пусть $Q_1, Q_2 \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченные области такие, что $\overline{Q}_1 \subset Q_2$. Предположим, что оператор $\mathbf{A}(x, D)$ правильно эллиптический в $\overline{Q}_2$. Тогда для всех $u \in W^{l+2m}(Q_2)$ имеет место оценка.*

$$\|u\|_{W^{l+2m,N}(Q_1)} \leqslant c_2\big(\|\mathbf{A}(x, D)u\|_{W^{l,N}(Q_2)} + \|u\|_{L_2^N(Q_2)}\big), \tag{C.16}$$

где $c_2 > 0$ зависит от константы эллиптичности, Q_1, Q_2 и M,

$$M = \max_{|\beta|\leqslant l_0} \max_{j,k} \max_{|\alpha|\leqslant 2m} \max_{x\in\overline{Q}_2} |D^\beta a_{jk\alpha}(x)|, \qquad l_0 = \max(l, 1),$$

и не зависит от u.

Это утверждение сформулировано в теореме 15.3 из [39] и последующих комментариях. Лемма C.3 и формула Лейбница обеспечивают справедливость неравенства (C.16) с членом $\|u\|_{W^{l+2m-1,N}(Q_2)}$ вместо $\|u\|_{L_2^N(Q_2)}$ в правой части. Для получения оценки (C.16) нужно дополнительно применить методы, близкие к [23, гл. 5].

Обобщение леммы C.4 на случай эллиптических краевых задач можно сформулировать следующим образом.

Лемма C.5. *Предположим, что $Q_1, Q_2 \subset \mathbb{R}^n$ — такие области, что $Q_1 \subset Q_2 \subset Q$. Пусть $S_1 \subset \partial Q_1$ и $S_2 \subset \partial Q_2$ — $(n-1)$-мерные многообразия класса C^∞, открытые и связные в индуцированной топологии, и пусть $\overline{S}_1 \subset S_2 \subset \partial Q$ и $\partial Q_1 \setminus \overline{S}_1 \subset Q_2$. Пусть условия* C.1 *и* C.2 *выполняются на $\overline{Q}_2$ и на многообразии $\overline{S}_2$ соответственно. Предположим, что $u \in W^{l_1+2m,N}(Q_2)$ удовлетворяет уравнению* (C.12) *в Q_2 и краевым условиям* (C.13) *на S_2 и $f \in \mathcal{W}^{l_2,N}(Q_2, S_2)$, где $l \leqslant l_1 \leqslant l_2$. Тогда $u \in W^{l_2+2m,N}(Q_1)$ и $\|u\|_{W^{l_2+2m,N}(Q_1)} \leqslant c_3\big(\|f\|_{\mathcal{W}^{l_2,N}(Q_2,S_2)} + \|u\|_{L_2^N(Q_2)}\big)$.*

Лемма C.5 следует из теоремы 2.11 в [36] и замечаний к этому утверждению.

Эллиптические задачи с параметром

Мы будем изучать систему дифференциальных уравнений

$$\mathbf{A}(x, D, \lambda)u(x) = f_0(x) \qquad (x \in Q) \tag{C.17}$$

с краевыми условиями

$$\mathbf{B}(x,D,\lambda)u(x)|_{\partial Q}=f_1(x)\qquad (x\in\partial Q) \tag{C.18}$$

относительно вектор-функции $u=(u_1,\dots,u_N)$. Здесь $Q\subset\mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial Q\in C^\infty$, $n\geqslant 2$; $\mathbf{A}(x,D,\lambda)$ и $\mathbf{B}(x,D,\lambda)$ — матрицы порядков $N\times N$ и $mN\times N$ соответственно с элементами вида

$$A_{jk}(x,D,\lambda)u_k(x)=\sum_{\beta+|\alpha|\leqslant 2m}a_{jk\alpha\beta}(x)\lambda^\beta D^\alpha u_k(x)\qquad (j,k=1,\dots,N),$$

$$B_{\mu k}(x,D,\lambda)u_k(x)=\sum_{\beta+|\alpha|\leqslant m_\mu}b_{\mu k\alpha\beta}(x)\lambda^\beta D^\alpha u_k(x)$$

$$(\mu=1,\dots,mN,\ k=1,\dots,N),$$

$a_{jk\alpha\beta},b_{\mu k\alpha\beta}\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — комплекснозначные функции; $f_0=(f_{01},\dots,f_{0N})$ и $f_1=(f_{11},\dots,f_{1,mN})$; m,m_μ — целые числа, $m\geqslant 1$, $m_\mu\geqslant 0$.

Обозначим через $A^0_{jk}(x,D,\lambda)$ и $B^0_{\mu k}(x,D,\lambda)$ главные однородные части операторов $A_{jk}(x,D,\lambda)$ и $B_{\mu k}(x,D,\lambda)$ соответственно, т. е.

$$A^0_{jk}(x,D,\lambda)=\sum_{\beta+|\alpha|=2m}a_{jk\alpha\beta}(x)\lambda^\beta D^\alpha,$$

$$B^0_{\mu k}(x,D,\lambda)=\sum_{\beta+|\alpha|=m_\mu}b_{\mu k\alpha\beta}(x)\lambda^\beta D^\alpha.$$

Рассмотрим соответствующие полиномы

$$A^0_{jk}(x,\xi,\lambda)=\sum_{\beta+|\alpha|=2m}a_{jk\alpha\beta}(x)\lambda^\beta \xi^\alpha,$$

$$B^0_{\mu k}(x,\xi,\lambda)=\sum_{\beta+|\alpha|=m_\mu}b_{\mu k\alpha\beta}(x)\lambda^\beta \xi^\alpha.$$

Пусть $\mathbf{A}^0(x,\xi,\lambda)$ и $\mathbf{B}^0(x,\xi,\lambda)$ — матрицы порядков $N\times N$ и $mN\times N$ с элементами

$$A^0_{jk}(x,\xi,\lambda)\quad (j,k=1,\dots,N),$$

$$B^0_{\mu k}(x,\xi,\lambda)\quad (\mu=1,\dots,mN,\ k=1,\dots,N).$$

Обозначим через θ замкнутый угол в $\mathbb{C}$ вида $\theta=\{\lambda\in\mathbb{C}:\varphi_1\leqslant\arg\lambda\leqslant\varphi_2\}$.

Предположим, что операторы $\mathbf{A}(x,D,\lambda)$ и $\mathbf{B}(x,D,\lambda)$ удовлетворяют следующим условиям.

Условие C.3. Полином $\det \mathbf{A}^0(x, \xi + \tau\nu, \lambda)$ переменной τ имеет ровно mN корней

$$\tau_1^+(x, \xi, \nu, \lambda), \dots, \tau_{mN}^+(x, \xi, \nu, \lambda)$$

с положительными мнимыми частями и mN с отрицательными мнимыми частями для любых $x \in \overline{Q}$, $\lambda \in \theta$ и ξ, ортогональных к ν в $\mathbb{R}^n$ таких, что $|\xi| + |\lambda| \neq 0$, $\nu \neq 0$.

Условие C.4. Строки матрицы

$$\mathbf{B}^0(x, \xi + \tau\nu, \lambda)\mathbf{A}^0(x, \xi + \tau\nu, \lambda)^{-1} \det \mathbf{A}^0(x, \xi + \tau\nu, \lambda)$$

линейно независимы по модулю полинома $\prod\limits_{\mu=1}^{mN} \big(\tau - \tau_\mu^+(x, \xi, \nu, \lambda)\big)$ для всех $x \in \partial Q$, $\lambda \in \theta$ и ξ, ортогональных к ν, таких, что $|\xi| + |\lambda| \neq 0$, где ν — единичный вектор внутренней нормали к ∂Q в точке x.

Будем говорить, что задача (C.17), (C.18) *эллиптическая задача с параметром в смысле Аграновича и Вишика*, если выполняются условия C.3 и C.4 (см. [1]).

Замечание C.4. Если $N = 1$, то матрица $\mathbf{A}(x, D, \lambda)$ состоит из одного элемента $A(x, D, \lambda)$, а матрица $\mathbf{B}(x, D, \lambda)$ является столбцом $(B_1(x, D, \lambda), \dots, B_m(x, D, \lambda))$, где

$$A(x, D, \lambda) = \sum_{\beta + |\alpha| \leqslant 2m} a_{\alpha\beta}(x)\lambda^\beta D^\alpha,$$
$$B_\mu(x, D, \lambda) = \sum_{\beta + |\alpha| \leqslant 2m} b_{\mu\alpha\beta}(x)\lambda^\beta D^\alpha \qquad (\mu = 1, \dots, m),$$

$a_{\alpha\beta}, b_{\mu\alpha\beta} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Пусть $A^0(x, D, \lambda)$ и $B_\mu^0(x, D, \lambda)$ — главные однородные части $A(x, D, \lambda)$ и $B_\mu(x, D, \lambda)$ соответственно. Тогда условие C.3 принимает вид: полином $A^0(x, \xi + \tau\nu, \lambda)$ переменной τ имеет ровно m корней $\tau_1^+(x, \xi, \nu, \lambda), \dots, \tau_m^+(x, \xi, \nu, \lambda)$ с положительными мнимыми частями и m корней с отрицательными мнимыми частями для всех $x \in \overline{Q}$, $\lambda \in \theta$ и ξ, ортогональных к ν в $\mathbb{R}^n$, таких, что $|\xi| + |\lambda| \neq 0$, $\nu \neq 0$. Условие C.4 имеет следующий вид: полиномы $B_1^0(x, \xi + \tau\nu, \lambda), \dots, B_m^0(x, \xi + \tau\nu, \lambda)$ линейно независимы по модулю полинома $\prod\limits_{\mu=1}^{m} \big(\tau - \tau_\mu^+(x, \xi, \nu, \lambda)\big)$ для всех $x \in \partial Q$,

$\lambda \in \theta$ и ξ, ортогональных к ν, таких, что $|\xi| + |\nu| \neq 0$, где ν — единичный вектор внутренней нормали к ∂Q в точке x.

В гильбертовых пространствах $W^s(\Omega)$ ($s \geqslant 0$; $\Omega = Q, \partial Q$), $W^{s,N}(Q)$ и

$$\mathcal{W}^{l,N}(Q, \partial Q) = W^{l,N}(Q) \times \prod_{\mu=1}^{mN} W^{l+2m-m_\mu-1/2}(\partial Q)$$

мы введем эквивалентные нормы, зависящие от λ, следующим образом:

$$|||v|||_{W^s(\Omega)} = \Big(\|v\|^2_{W^s(\Omega)} + |\lambda|^{2s}\|v\|^2_{L_2(\Omega)}\Big)^{1/2}, \qquad (C.19)$$

$$|||u|||_{W^{s,N}(Q)} = \Big(\|u\|^2_{W^{s,N}(Q)} + |\lambda|^{2s}\|u\|^2_{L_2^N(Q)}\Big)^{1/2}, \qquad (C.20)$$

$$|||f|||_{\mathcal{W}^{l,N}(Q,\partial Q)} = \left(|||f_0|||^2_{W^{l,N}(Q)} + \sum_{\mu=1}^{mN} |||f_{1\mu}|||^2_{W^{l+2m-m_\mu-1/2}(\partial Q)}\right)^{1/2}, \qquad (C.21)$$

где $u = (u_1, \dots, u_N)$, $f = (f_0, f_1)$, $f_0 = (f_{01}, \dots, f_{0N})$ и $f_1 = (f_{11}, \dots, f_{1,mN})$, $l \geqslant \max\{0, m_\mu - 2m + 1\}$ — целое.

Введем линейный ограниченный оператор $\mathbf{L}\big(\lambda\big) : W^{l+2m,N}\big(Q\big) \to \mathcal{W}^{l,N}\big(Q, \partial Q\big)$ по формуле $\mathbf{L}\big(\lambda\big)u = \big(\mathbf{A}\big(x, D, \lambda\big)u, \mathbf{B}\big(x, D, \lambda\big)u|_{\partial Q}\big)$.

Теорема C.8. *Пусть выполняются условия* C.3 *и* C.4. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

(a) *Оператор* $\mathbf{L}(\lambda) : W^{l+2m,N}(Q) \to \mathcal{W}^{l,N}(Q, \partial Q)$ *фредгольмов и* $\operatorname{ind} \mathbf{L}(\lambda) = 0$ *для всех* $\lambda \in \mathbb{C}$.

(b) *Существует* $\lambda_0 > 0$ *такое, что для* $\lambda \in \{\lambda \in \theta : |\lambda| \geqslant \lambda_0\}$ *оператор* $\mathbf{L}(\lambda)$ *имеет ограниченный обратный* $\mathbf{L}^{-1}(\lambda) : \mathcal{W}^{l,N}(Q, \partial Q) \to W^{l+2m,N}(Q)$.

(c) *Для любых* $u \in W^{l+2m,N}(Q)$ *и* $\lambda \in \{\lambda \in \theta : |\lambda| \geqslant \lambda_0\}$

$$c_1|||\mathbf{L}(\lambda)u|||_{\mathcal{W}^{l,N}(Q,\partial Q)} \leqslant |||u|||_{W^{l+2m,N}(Q)} \leqslant \leqslant c_2|||\mathbf{L}(\lambda)u|||_{\mathcal{W}^{l,N}(Q,\partial Q)}, \qquad (C.22)$$

где $c_1, c_2 > 0$ *не зависят от* λ *и* u.

Изучим задачу Дирихле, предполагая, что $N = 1$. На операторы $A^0(x, D, \lambda)$ и $B^0_\mu(x, D, \lambda)$ накладываются следующие условия.

Условие C.5. Оператор $A^0(x, D, \lambda)u(x) = \sum\limits_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) + \lambda^{2m} u(x)$ — дифференциальный оператор с вещественнозначными коэффициентами $a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ такими, что $\sum\limits_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x)\xi^\alpha > 0$ для $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$ и $x \in \overline{Q}$.

Условие C.6. Операторы

$$B^0_\mu(x, D, \lambda)u(x) = (-i\partial/\partial\nu)^{\mu-1} u(x)$$

$(\mu = 1, \dots, m)$ — граничные операторы задачи Дирихле.

Очевидно, при выполнении условий C.5 и C.6 для любых
$0 < \varepsilon < \pi/2m$ и

$$\lambda \in \omega_\varepsilon = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg\lambda| \leqslant \varepsilon\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg\lambda - \pi| \leqslant \varepsilon\}$$

операторы $A^0(x, D, \lambda)$ и $B^0_\mu(x, D, \lambda)$ удовлетворяют условиям C.3 и C.4. Поэтому имеет место следствие.

Следствие C.1. *Пусть выполнены условия* C.5 *и* C.6. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

(a) *Оператор* $\mathbf{L}(\lambda) : W^{l+2m}(Q) \to \mathcal{W}^l(Q, \partial Q)$ *фредгольмов и* $\operatorname{ind}\mathbf{L}(\lambda) = 0$ *для всех* $\lambda \in \mathbb{C}$.

(b) *Для любого* $0 < \varepsilon < \pi/2m$ *существует* $q = q(\varepsilon) > 0$ *такое, что для всех*

$$\lambda \in \omega_{\varepsilon,q} = \{\lambda \in \omega_\varepsilon : |\lambda| > q_\varepsilon\}$$

оператор $\mathbf{L}(\lambda)$ *имеет ограниченный обратный* $\mathbf{L}^{-1}(\lambda) : \mathcal{W}^l(Q, \partial Q) \to W^{l+2m}(Q)$.

(c) *Для всех* $u \in W^{l+2m}(Q)$ *и* $\lambda \in \omega_{\varepsilon,q}$ *справедлива априорная оценка* (C.22).

Теорема C.8 и следствие C.1 вытекают из теорем 4.1, 5.1 и 5.2 в [1, гл. 1].

Введем неограниченный оператор $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset W^l(Q) \to W^l(Q)$ по формуле

$$\mathcal{A}u = \sum_{|\alpha|\leqslant 2m} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) \qquad (u \in \mathcal{D}(\mathcal{A})),$$

$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{u \in W^{l+2m}(Q) : B_\mu^0 u|_{\partial Q} = 0,\ \mu = 1, \dots, m\}$, где $a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — вещественнозначные функции, а операторы A^0 и B_μ^0 удовлетворяют условиям C.5 и C.6.

Из следствия C.1 и теорем A.12 и A.1 мы получаем следствие.

Следствие C.2. *Пусть выполняются условия* C.5 *и* C.6. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

(a) *Оператор* $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset W^l(Q) \to W^l(Q)$ *фредгольмов, и* $\operatorname{ind} \mathcal{A} = 0$.

(b) *Спектр* $\sigma(\mathcal{A})$ *дискретный, и для* $\eta \notin \sigma(\mathcal{A})$ *резольвента* $R(\eta, \mathcal{A}) : W^l(Q) \to W^l(Q)$ *— компактный оператор.*

(c) *Для любого* $0 < \delta < \pi$ *все точки спектра* $\sigma(\mathcal{A})$, *за исключением, быть может, конечного их числа, принадлежат углу комплексной плоскости* $|\arg \eta| < \delta$.

Следствие C.2 вытекает из теоремы 23 и следствия 27 в [14, гл. 14, § 6].

Одномерный случай

Изучим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром

$$\mathbf{A}(t, D_t, \lambda) u(t) = f_0(t) \qquad (t \in (d_1, d_2)) \tag{C.23}$$

с краевыми условиями

$$\mathbf{B}_\rho(t, D_t, \lambda) u(t)|_{t=d_\rho} = f_\rho \qquad (\rho = 1, 2) \tag{C.24}$$

относительно вектор-функции $u = (u_1, \dots, u_N)$.

Здесь $\mathbf{A}(t, D_t, \lambda)$ и $\mathbf{B}_\rho(t, D_t, \lambda)$ — матрицы порядков $N \times N$ и $mN \times N$

соответственно с элементами

$$A_{jk}(t, D_t, \lambda)u_k(t) = \sum_{\alpha+\beta\leqslant 2m} a_{jk\alpha\beta}(t)\lambda^\beta D_t^\alpha u_k(t) \qquad (j, k = 1, \dots, N),$$

$$B_{\rho\mu k}(t, D_t, \lambda)u_k(t) = \sum_{\alpha+\beta\leqslant m_{\rho\mu}} b_{\rho\mu k\alpha\beta}(t)\lambda^\beta D_t^\alpha u_k(t)$$
$$(\rho = 1, 2,\ \mu = 1, \dots, mN,\ k = 1, \dots, N),$$

$a_{jk\alpha\beta},\ b_{\rho\mu k\alpha\beta} \in C^\infty(\mathbb{R})$ — комплекснозначные функции; $D_t = -i\dfrac{d}{dt}$; $f_0 = (f_{01}, \dots, f_{0N})$, $f_\rho = (f_{\rho 1}, \dots, f_{\rho,mN})$; $m, m_{\rho\mu}$ — целые, $m \geqslant 1$, $m_\mu \geqslant 0$.

Пусть $A^0_{jk}(t, D_t, \lambda)$ и $B^0_{\rho\mu k}(t, D_t, \lambda)$ — главные однородные части операторов $A_{jk}(t, D_t, \lambda)$ и $B_{\rho\mu k}(t, D_t, \lambda)$ соответственно. Обозначим через $\mathbf{A}^0(t, \tau, \lambda)$ и $\mathbf{B}^0_\rho(t, \tau, \lambda)$ матрицы порядков $N \times N$ и $mN \times N$ с элементами

$$A^0_{jk}(t, \tau, \lambda) \qquad (j, k = 1, \dots, N),$$
$$B^0_{\rho\mu k}(t, \tau, \lambda) \quad (\rho = 1, 2,\ \mu = 1, \dots, mN,\ k = 1, \dots, N).$$

Предположим, что операторы $\mathbf{A}(t, D_t, \lambda)$ и $\mathbf{B}_\rho(t, D_t, \lambda)$ удовлетворяют следующим условиям.

Условие С.7. Существует ε, $0 < \varepsilon < \pi/2$, такое, что полином $\det \mathbf{A}^0(t, \tau, \lambda)$ переменной τ имеет ровно mN корней $\tau^+_1(t, \lambda), \dots, \tau^+_{mN}(t, \lambda)$ с положительными мнимыми частями и mN корней с отрицательными мнимыми частями для всех $t \in [d_1, d_2]$ и $0 \neq \lambda \in \omega_\varepsilon$.

Условие С.8. Строки матрицы

$$\mathbf{B}^0_\rho(t, \tau, \lambda)\mathbf{A}^0(t, \tau, \lambda)^{-1} \det \mathbf{A}^0(t, \tau, \lambda)$$

линейно независимы по модулю полинома $\prod\limits_{\mu=1}^{mN} \bigl(\tau - \tau^+_\mu(d_\rho, \lambda)\bigr)$ для всех $\rho = 1, 2$ и $0 \neq \lambda \in \omega_\varepsilon$.

Определим пространство вектор-функций

$$W^{k,N}(d_1, d_2) = \prod_{j=1}^{N} W^k(d_1, d_2)$$

с нормой

$$\|u\|_{W^{k,N}(d_1,d_2)} = \left(\sum_{j=1}^{N} \|u_j\|^2_{W^k(d_1,d_2)} \right)^{1/2},$$

где $k \geqslant 0$ — целое.

Положим $\mathcal{W}^{l,N}[d_1, d_2] = W^{l,N}(d_1, d_2) \times \mathbb{C}^{mN} \times \mathbb{C}^{mN}$, где $l \geqslant \max\{0, -2m + m_{\rho\mu} + 1\}$.

Для каждого $\lambda \in \mathbb{C}$ определим линейный ограниченный оператор

$$\mathbf{L}(\lambda) : W^{l+2m,N}(d_1, d_2) \to \mathcal{W}^{l,N}[d_1, d_2]$$

по формуле

$$\mathbf{L}(\lambda)u = \{\mathbf{A}(t, D_t, \lambda)u, \mathbf{B}_\rho(t, D_t, \lambda)u|_{t=d_\rho}\}.$$

Мы будем использовать нормы, зависящие от параметра $\lambda \neq 0$,

$$|||u|||_{W^{l,N}(d_1,d_2)} = \left(\sum_j |||u_j|||^2_{W^l(d_1,d_2)} \right)^{1/2}, \tag{C.25}$$

$$|||u_j|||_{W^l(d_1,d_2)} = \left(\|u_j\|^2_{W^l(d_1,d_2)} + |\lambda|^{2l} \|u_j\|^2_{L_2(d_1,d_2)} \right)^{1/2}, \tag{C.26}$$

$$|||f|||_{\mathcal{W}^{l,N}[d_1,d_2]} = \left(|||f_0|||^2_{W^{l,N}(d_1,d_2)} + \sum_{\rho,\mu} |\lambda|^{2(l+2m-m_{\rho\mu}-1/2)} |f_{\rho\mu}|^2 \right)^{1/2}, \tag{C.27}$$

где $u = (u_1, \dots, u_N)$, $f = \{f_{0j}, f_{\rho\mu}\}$. Для фиксированного $\lambda \neq 0$ эти нормы эквивалентны нормам $\|u\|_{W^{l,N}(d_1,d_2)}$, $\|u_j\|_{W^l(d_1,d_2)}$ и $\|f\|_{\mathcal{W}^{l,N}[d_1,d_2]}$ соответственно.

Замечание C.5. Пусть выполняются условия C.7 и C.8. Тогда аналогично теореме C.8 оператор $\mathbf{L}(\lambda)$ обладает следующими свойствами.

(a) Оператор $\mathbf{L}(\lambda) : W^{l+2m,N}(d_1, d_2) \to \mathcal{W}^{l,N}[d_1, d_2]$ фредгольмов и $\operatorname{ind} \mathbf{L}(\lambda) = 0$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$.

(b) Существует $\lambda_0 > 0$ такое, что для $\lambda \in \omega_{\varepsilon,\lambda_0}$ оператор $\mathbf{L}(\lambda)$ имеет ограниченный обратный $\mathbf{L}^{-1}(\lambda) : \mathcal{W}^{l,N}[d_1, d_2] \to W^{l+2m,N}(d_1, d_2)$.

(c) Для любых $u \in W^{l+2m,N}(d_1,d_2)$ и $\lambda \in \omega_{\varepsilon,\lambda_0}$

$$c_1 |||\mathbf{L}(\lambda)u|||_{\mathcal{W}^{l,N}[d_1,d_2]} \leqslant \\ \leqslant \nu |||_{W^{l+2m,N}(d_1,d_2)} \leqslant c_2 |||\mathbf{L}(\lambda)u|||_{\mathcal{W}^{l,N}[d_1,d_2]}, \quad (C.28)$$

где c_1, $c_2 > 0$ не зависят от λ и u.

Сделаем теперь некоторые замечания, касающиеся обыкновенного дифференциального уравнения с граничными условиями Дирихле.

Введем линейный ограниченный оператор $L(\lambda) : W^2(0,d) \to \mathcal{W}[0,d] = L_2(0,d) \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ по формуле $L(\lambda)u = \big(Au + \lambda^2 u, u(0), u(d)\big)$, где

$$Au = -a_0(t)u''(t) + a_1(t)u'(t) + a_2(t)u(t),$$

$a_i \in C[0,d]$ — вещественнозначные функции $(i = 0,1,2)$, $a_0(t) \geqslant k > 0$ $(t \in [0,d])$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Мы будем использовать нормы, зависящие от параметра λ,

$$|||u|||_{W^2(0,d)} = \Big(\|u\|^2_{W^2(0,d)} + |\lambda|^4 \|u\|^2_{L_2(0,d)}\Big)^{1/2},$$
$$|||f|||_{\mathcal{W}[0,d]} = \Big(\|f_0\|^2_{L_2(0,d)} + |\lambda|^3 \big(|f_1|^2 + |f_2|^2\big)\Big)^{1/2},$$

где $f = (f_0, f_1, f_2)$, $\lambda \neq 0$.

Замечание C.6. Замечание C.5 остается в силе для оператора $L(\lambda) : W^2(0,d) \to \mathcal{W}[0,d]$ с пространствами $W^2(0,d)$ и $\mathcal{W}[0,d]$ вместо $W^{l+2m,N}(d_1,d_2)$ и $\mathcal{W}^{l,N}[d_1,d_2]$ соответственно.

Введем теперь неограниченный линейный оператор $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset L_2(0,d) \to L_2(0,d)$ по формуле

$$\mathcal{A}u = Au \qquad (u \in \mathcal{D}(\mathcal{A})),$$
$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{u \in W^2(0,d) : u(0) = u(d) = 0\}.$$

Замечание C.7. Следствие C.2 остается справедливым для оператора

$$\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset L_2(0,d) \to L_2(0,d)$$

с пространством $L_2(0,d)$ вместо $W^l(Q)$.

Литература

1. * *Агранович М. С.*, *Вишик М. И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // УМН. — 1964. — *19*, № 3. — С. 53–161. [1]

2. *Безяев В.И.* Общие краевые задачи для эллиптических и параболических уравнений. — М.: РУДН, 2008.

3. *Бесов О. В.*, *Ильин В. П.*, *Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. — М.: Наука, 1975.

4. *Бицадзе А. В.*, *Самарский А. А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических задач // ДАН СССР. — 1969. — *185*, № 4. — С. 739–740.

5. *Вентцель А. Д.* О граничных условиях для многомерных диффузионных процессов // Теор. вероятн. и ее применения. — 1959. — *4*, № 2. — С. 172–185.

6. *Вишик М. И.* О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений // Матем. сб. — 1951. — *29*(*71*), № 3. — С. 615–676.

7. *Вишик М. И.* Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений // Труды ММО. — 1952. — *1*. — С. 187–264.

8. * *Волевич Л. Р.* Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем // Матем. сб. — 1965. — *68*, № 3. — С. 373–416.

9. *Галахов Е. И.*, *Скубачевский А. Л.* О сжимающих неотрицательных полугруппах с нелокальными условиями // Матем. сб.. — 1998. — *189*, № 1. — С. 45–78.

10. * *Гохберг И. Ц.*, *Сигал Е. И.* Операторное обобщение теоремы о логарифмическом вычете и теоремы Руше // Матем. сб. — 1971. — *84*(*126*), № 4. — С. 607–629.

[1]Звездочками отмечена обязательная литература.

11. *Гуревич П. Л.*, *Скубачевский А. Л.* О фредгольмовой и однозначной разрешимости нелокальных эллиптических задач в многомерных областях // Труды ММО. — 2007. — *68*, № 3. — С. 288–373.

12. * *Гуревич П. Л.*, *Скубачевский А. Л.* Применение методов нелинейного функционального анализа к нелокальным проблемам процессов распределения тепла. — М.: РУДН, 2008.

13. *Гущин А. К.*, *Михайлов В. П.* О разрешимости нелокальных задач для эллиптического уравнения второго порядка // Матем. сб. — 1994. — *185*, № 4. — С. 121–160.

14. * *Данфорд Н.*, *Шварц Дж.* Линейные операторы. — Т. 2. — М.: Мир, 1966.

15. * *Иосида К.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967.

16. * *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.

17. *Кишкис К. Ю.* Об индексе задачи Бицадзе–Самарского для гармонических функций // Дифференц. уравнения. — 1988. — *24*, № 1. — С. 105–110.

18. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Труды ММО. — 1967. — *16*. — С. 209–292.

19. * *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1971.

20. * *Ладыженская О. А.*, *Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. — М.: Наука, 1973.

21. * *Лионс Ж. Л.*, *Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.

22. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* L_p-оценки решений эллиптических краевых задач в областях с ребрами // Труды ММО. — 1978. — *37*. — С. 49–93.

23. * *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа. — М.: ИЛ, 1957.

24. *Моисеев Е. И.* Спектральные свойства нелокальных краевых задач // Дифференц. уравнения. — 1994. — *30*, № 4. — С. 797–805.

25. *Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. — М.: Наука, 1991.

26. *Подъяпольский В. В., Скубачевский А. Л.* Спектральная асимптотика сильно эллиптических дифференциально-разностных операторов // Дифференц. уравнения. — 1999. — *35*, № 6. — С. 793–800.

27. *Самарский А. А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. — 1980. — *16*, № 11. — С. 1925–1935.

28. *Скубачевский А. Л.* Нелокальные эллиптические задачи с параметром // Матем. сб. — 1983. — *121*(*163*), № 6. — С. 201–210.

29. *Скубачевский А. Л.* Эллиптические задачи с нелокальными условиями вблизи границы // Матем. сб. — 1986. — *129*(*171*), № 2. — С. 279–302.

30. *Скубачевский А. Л.* Разрешимость элиптических задач с нелокальными условиями // ДАН СССР. — 1986. — *291*, № 3. — С. 551–555.

31. *Скубачевский А. Л.* О некоторых задачах для многомерных диффузионных процессов // ДАН СССР. — 1989. — *307*, № 2. — С. 287–291.

32. *Скубачевский А. Л.* Неклассические краевые задачи // Современная математика. Фундаментальные направления. — М.: РУДН, 2007. — *26*, ч. I. — 2008. — *31*, ч. II.

33. *Слободецкий Л. Н.* Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их приложение к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных // Уч. зап. Ленинград. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена. — 1958. — *197.* — С. 54–112.

34. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1950.

35. *Солдатов А. П.* Задача Бицадзе–Самарского для функций аналитических по Дуглису // Дифференц. уравнения. — 2005. — *41*, № 3. — С. 396–407.

36. * *Солонников В. А.* Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле А. Даглиса–Л. Ниренберга // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. — 1966. — *92.* — С. 233–297.

37. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. — М.: Мир, 1980.

38. *Шамин Р.В.* Полугруппы операторов. — М.: РУДН, 2008.

39. *Agmon S.*, *Douglis A.*, *Nirenberg L.* Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, I // Comm. Pure and Appl. Math. — 1959. — *12.* — P. 623–727.

40. *Bensoussan A.*, *Lions J. L.* Impulse control and quasi-variational inequalities. — Bordas, Paris: Gauthier–Villars, 1984.

41. *Browder F.* Non-local elliptic boundary value problems // Amer. J. Math. — 1964. — *86*, № 4. — P. 735–750.

42. *Carleman T.* Sur la theorie des equations integrales et ses applications // Verhandlungen des Internat. Math. Kongr., Zürich. — 1932. — *1.* — S. 138–151.

43. *Feller W.* The parabolic differential equations and associated semi-grops of transformations // Ann. Math. — 1952. — *55*, № 3. — P. 468–518.

44. *Feller W.* Diffusion processes in one dimension // Trans. Amer. Math. Soc. — 1954. — *77*, № 1. — P. 1–31.

45. *Gårding L.* Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations // Math. Scand. — 1953. — *1*. — P. 55–72.

46. *Gurevich P. L.* Solvability of nonlocal elliptic problems in Sobolev spaces, I // Russ. J. of Math. Phys. — 2003. — *10*, № 4. — P. 436–466.

47. *Gurevich P. L.* Solvability of nonlocal elliptic problems in Sobolev spaces, II // Russ. J. of Math. Phys. — 2004. — *11*, № 1. — P. 1–44.

48. *Gurevich P. L.* The consistency conditions and the smoothness of generalized solutions of nonlocal elliptic problems // Advances in Differential Equations — 2006. — *11*, № 3. — P. 305–360.

49. *Sato K.*, *Ueno T.* Multidimensional diffusion and the Markov process on the boundary // J. Math. Kyoto Univ. — 1965. — *4*, № 3. — P. 529–605.

50. *Skubachevskii A. L.* Nonlocal elliptic problems and multidimensional diffusion processes // Russ. J. of Math. Phys. — 1995. — *3*, № 3. — P. 327–360.

51. *Skubachevskii A. L.* Elliptic functional differential equations and applications. — Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser, 1997.

52. *Skubachevskii A. L.* Regularity of solutions for some nonlocal elliptic problem // Russ. J. of Math. Phys. — 2001. — *8*, № 3. — P. 365–374.

53. *Taira K.* Diffusion processes and partial differential equations. — London: Academic Press, 1988.

ОПИСАНИЕ КУРСА И ПРОГРАММА

Название курса

Нелокальные краевые задачи и их приложения к исследованию многомерных диффузионных процессов и процессов терморегуляции живых клеток.

Цели и задачи курса

– представленный в курсе материал относится к дифференциальным уравнениям (математика),

– целью курса является знакомство и освоение основных методов новой области дифференциальных уравнений – теорией нелокальных краевых задач, а также приложениями к теории многомерных диффузионных процессов,

– курс предназначен для магистерской программы обучения,

– рекомендуется в качестве спецкурса по выбору для студентов физико-математических факультетов университетов и вузов, обучающихся по направлению "Математика",

– курс рассчитан на 144 часа нагрузки (один семестр, 4 кредита), из которых 36 часов отводится на лекции, 36 часов на практические занятия и 72 часа – на самостоятельную работу студентов.

Инновационность курса

1. По содержанию

Представленный в курсе материал содержит основы новой теории нелокальных краевых задач, развитие которой было ранее сформулировано в виде нерешенной проблемы в области дифференциальных уравнений. Большинство результатов, представленных в курсе принадлежат автору и его ученикам.

2. По методике преподавания

Лекции и практические занятия по данному курсу будут проводиться в мультимедийном классе, что позволяет сочетать изложение новых математических результатов и современных вычислительных средств и средств визуализации для лучшего усвоения знаний студентами.

3. По литературе

В учебном пособии и соответствующем курсе впервые излагается материал, который раньше можно было найти лишь в научных статьях. Поэтому список обязательной литературы содержит 8 статей и лишь одну монографию. Таким образом, знакомство с современной теорией нелокальных краевых задач до публикации данного учебного пособия было весьма затруднительным.

4. По сочетанию теории и приложений

В курсе излагаются актуальные вопросы, возникающие в приложениях (аналитическая теория многомерных диффузионных процессов и процессы терморегуляции живых клеток).

5. По организации учебного процесса

Реализация курса будет проходить в рамках кредитно-модульной системы.

Структура курса

Введение (лекции – 2 часа)

Раздел 1. Весовые пространства (лекции – 6 часов, практические занятия – 8 часов; самостоятельная работа – 16 часов; трудоемкость 1 раздела и введения – 1 кредит).

Рассматриваются весовые пространства Кондратьева в бесконечных углах и в пространстве $\mathbb{R}^n$, а затем и в ограниченных областях с конечным числом угловых точек или ребер. Изучаются основные свойства весовых пространств: эквивалентные нормы, существование операторов следа и поднятия, теоремы о компактности вложения, продолжение функций в бóльшую область, интерполяционные неравенства. Эти результаты используются для исследования разрешимости нелокальных эллиптических задач в бесконечных углах и в ограниченной области в разделах 2 и 3. Исследуются также весовые пространства с неоднородным весом в плоских углах. Результаты, полученные для этих пространств используются при изучении нелокальных эллиптических задач с параметром на единичной сфере в плоских углах, которые возникают в разделе 2 при исследовании нелокальных эллиптических задач в двугранных углах.

Раздел 2. Модельные задачи в углах (лекции – 10 часов, практические занятия – 10 часов, самостоятельная работа – 20 часов, трудоемкость – 1 кредит).

Рассматриваются нелокальные эллиптические задачи в бесконечных углах и локальные задачи в пространстве $\mathbb{R}^n$. Исследуются вопросы однозначной разрешимости и асимптотическое поведение решений в плоских углах в зависимости от величины угла, коэффициентов при нелокальных членах, показателя веса и показателя гладкости решения. Для пространственных нелокальных задач излагается метод сведения к нелокальным задачам в плоских углах с параметром на единичной сфере. Для локальных эллиптических задач в $\mathbb{R}^n$ доказано, что соответствующий оператор не может быть изоморфизмом ни при каких значениях весового параметра. Результаты раздела 2 применяются в разделе 3 для исследования фредгольмовой разрешимости нелокальных эллиптических задач в ограниченных областях.

Раздел 3. Разрешимость эллиптических задач в ограниченных областях с нелокальными условиями вблизи границы (лекции – 10 часов, практические занятия – 10 часов, самостоятельна работа – 20 часов, трудоемкость – 1 кредит).

Рассматривая локальные и нелокальные эллиптические задачи в ограниченных областях имеющих конечное число угловых точек или ребер. Для плоских областей получены необходимые и достаточные условия фредгольмовой разрешимости. Доказано, что в случае, когда носители нелокальных членов не подходят к точкам сопряжения нелокальная и соответствующая локальная задачи в весовых пространствах фредгольмовы или нет одновременно. В случае подхода нелокальных членов к точкам спряжения дополнительно предлагается, что это подход – некасательный. В этом случае локальная задача может быть фредгольмовой, а нелокальная – нет.

Раздел 4. Применение к теории многомерных диффузионных процессов (лекции – 8 часов, практические занятия – 8 часов, самостоятельная работа – 16 часов)

Рассматриваются математические модели многомерных диффузионных процессов, возникающие при описании случайных блужданий частиц в биологических клетках, включая эффекты прыжков. Получены достаточные условия существования полугрупп Феллера как в трансверсальном случае, так и в наиболее трудном нетрансверсальном случае. Для доказательства используется сведение к нелокальным эллиптическим краевым задачам в ограниченных областях. Таким образом, результаты раздела 4 опираются на методы раздела 3.

Система контроля знаний

включает

– промежуточный контроль в форме письменной контрольной работы,

– выполнение курсовой работы,

– итоговый контроль в форме письменной контрольной работы.

На письменную контрольную работу отводится одно практическое занятие на 9-ой неделе семестра. Целью работы является проверка усвоения материала первой части курса, охватывающего весовые пространства (раздел 1) и модельные задачи в углах (раздел 2). Работа выполняется каждым студентом в аудитории без обращения к конспектам по литературе и предмету. Контрольная работа состоит из трех задач по разделам 1 и 2. Оценивается как ход решения (достаточная аргументация, строгость рассуждений), так и правильность полученного ответа. Точное содержание контрольной работы студентам заранее не известно. Примерные варианты приведены ниже.

<u>Вариант 1</u>

1. При каком λ функция $r^{\lambda}\ln r\sin\varphi$ принадлежит весовому пространству Кондратьева $H^1_{-1}(Q)$? Здесь $Q=\{x\in\mathrm{R}^2:\ \ |x|<1\}$, где $r,\ \varphi-$ полярные координаты точки x, множество K в определении пространства $H^1_{-1}(Q)=H^1_{-1}(Q,K)$ состоит из одной точки $x=0$.

Рассмотрим нелокальную эллиптическую задачу

$$\Delta u(x)=f_0(x)\qquad (x\in\theta), \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} &u(r,\varphi)\big|_{\varphi=0}-\alpha u(r,\varphi)\big|_{\varphi=\pi/4}=f_1(r) &&(r>0),\\ &u(r,\varphi)\big|_{\varphi=\pi/2}=f_2(r) &&(r>0).\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Здесь $\alpha\in\mathbb{R},\quad f=(f_0,f_1,f_2)\in\mathcal{H}^0_a(\theta,\gamma)=H^0_a(\theta)\times H^{3/2}_a(\gamma_1)\times H^{3/2}_a(\gamma_2),\quad \theta=\{x\in\mathbb{R}^2:\ 0<\varphi<\pi/2\},\ \gamma_1=\{x\in\mathbb{R}^2:\ \varphi=0\},\ \gamma_2=\{x\in\mathbb{R}^2:\ \varphi=\pi/2\}$.

2. Пусть $\alpha=-1$. При каких значениях a задача (1), (2) имеет единственное сильное решение и $u=H^2_a(\theta)$?

3. Пусть $\alpha=0$, т.е. задача (1), (2) является задачей Дирихле для уравнения Пуассона (локальной). При каких значениях a задача (1), (2) имеет единственное сильное решение $u=H^2_a(\theta)$? Сравнить с ответом в задаче 2.

<u>Вариант 2</u>

1. При каком λ функция $r^{\lambda+1}\cos 2\varphi$ принадлежит пространству Соболева $W^2(Q)$? Здесь $Q=\{x\in\mathbb{R}^2:|x|<1\},\ r,\varphi\ -$ полярные координаты точки x.

Рассмотрим нелокальную эллиптическую задачу

$$\Delta u(x)=f_0(x)\qquad (x\in\theta), \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} &u(r,\varphi)\big|_{\varphi=0}=f_1(r) &&(r>0),\\ &u(r,\varphi)\big|_{\varphi=\pi}-\alpha u(r,\varphi)\big|_{\varphi=\pi/2}=f_2(r) &&(r>0).\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Здесь $\alpha \in \mathrm{R}$, $f = (f_0, f_1, f_2) \in \mathcal{H}_a^0(\theta,\gamma) = H_a^0(\theta) \times H_a^{3/2}(\gamma_1) \times H_a^{3/2}(\gamma_2)$, $\theta = \{x \in \mathbb{R}^2 :$ $0 < \varphi < \pi\}$, $\gamma_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \varphi = 0\}$, $\gamma_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \varphi = \pi\}$.

2. Пусть $\alpha = 3$. При каких значениях a множество правых частей *f*, при которых задача (1), (2) разрешима в $H_a^2(\theta)$, не является замкнутым в $\mathcal{H}_a^0(\theta,\gamma)$?

3. Пусть $\alpha = 0$, т.е. задача (1), (2) является задачей Дирихле для уравнения Пуассона (локальной). При каких значениях a множество правых частей *f*, при которых задача (1), (2) разрешима в $H_a^2(\theta)$, не является замкнутым в $\mathcal{H}_a^0(\theta,\gamma)$? Сравнить с ответом в задаче 2.

Написание курсовой работы является самостоятельной внеаудиторной формой работы студентов. Распределение тем курсовых работ происходит в течение первой недели, а представление и защита курсовых работ – не позднее, чем за неделю до проведения итогового контроля. Целью написания курсовой работы является более глубокое самостоятельное освоение студентом изучаемого предмета, включая элементы научно-исследовательской работы. Причем студент может сам выбирать либо более техническую тему, либо более творческую и более сложную. При оценке курсовой работы учитывается уровень самостоятельности студента, сложность темы, а также строгость изложения полученных им результатов.

При написании курсовой работы недопустимо включать в свою работу выдержки из других авторов без указания на это, пересказывать чужую работу близко к тексту без ссылок на нее, использовать чужие идеи без указания первоисточников (это касается и источников, найденных в Интернете). Все случаи плагиата должны быть исключены. В конце работы дается исчерпывающий список всех используемых источников. Те же правила академической этики и соблюдения авторских прав относятся также к учебному пособию по данному курсу.

В конце обучения проводится итоговая письменная работа, охватывающая весь материал курса.

Задание к итоговой работе включают в себя три задачи. Первые две задачи отражают тему 3, а последняя задача – тему 4. Однако, в первых двух задачах используются также материалы тем 1, 2.

Время на выполнение итоговой работы – 2 академических часа. Ниже приведены возможные варианты заданий к итоговой работе.

<u>Вариант 1</u>

1. Рассматривается нелокальная эллиптическая задача

$$\Delta u(x) = f_0(x) \qquad (x \in Q/\mathcal{K}_3), \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} &u(x)\big|_{\Gamma_1} - b(x)u(\omega(x))\big|_{\Gamma_1} = f_1(x) && (x \in \Gamma_1), \\ &u(x)\big|_{\Gamma_2} = f_2(x) && (x \in \Gamma_2). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Здесь $Q \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная область с угловыми точками $g_1, g_2 \in \partial Q$, $\partial Q = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{g_1\} \cup \{g_2\}$, Γ_i – кривые класса $C^\infty (i = 1, 2)$, в некоторой окрестности точки g_i область Q совпадает с углом раствора β_i ($i = 1, 2;\ \beta_1 = \pi/2,\ \beta_2 = \pi/3$), ω – C^∞-диффеоморфизм, $\omega(\Gamma_1) \subset Q$, $\omega(g_1) = g_1$, в некоторой окрестности точки g_1 преобразование $\omega(.)$ является поворотом на угол $\pi/4$, $\omega(g_2) \in \Gamma_1$ и в некоторой окрестности точки $\omega(g_2)$ кривая Γ_1 совпадает с прямой, $b \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Пусть $K = \mathcal{K}$, $b(g_1) = 1$, а $f = (f_0, f_1, f_2) \in \mathcal{H}_a^0(Q, \Gamma)$. Найти необходимые и достаточные условия для параметра a, при которых задача (1), (2) – фредгольмова в весовом пространстве Кондратьева $H_a^2(\theta)$.

2. Привести пример нелокальной эллиптической задачи в ограниченной области с ребром, которая в некоторой окрестности каждой точки ребра сводится к эллиптическому уравнению с нелокальными условиями в двугранном угле. Записать указанную нелокальную эллиптическую задачу в

двугранном угле и соответствующее невырожденное гладкое преобразование переменных.

3. Рассматривается неограниченный оператор $\mathcal{A}_B : \mathcal{D}(\mathcal{A}_B) \subset C_B(\overline{Q}) \to C_B(\overline{Q})$, где $\mathcal{D}(\mathcal{A}_B) = \{u \in C^2(Q) \cap C_B(\overline{Q}) : \Delta u \in C_B(\overline{Q})\}$, $\mathcal{A}_B u = \Delta u$ для $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_B)$, $C_B(\overline{Q})$ – подпространство функций в $C(\overline{Q})$, удовлетворяющих нелокальным условиям (2), $b \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $0 \le b(x) \le 1$, преобразование ω удовлетворяет условиям задачи 1, $\partial Q \in C^\infty$, на поведение преобразования $\omega(.)$ в окрестности точки g_1, кривой Γ_1 в окрестности точки $\omega(g_2)$ и коэффициента $b(x)$ в точке g_1 не накладываются дополнительные ограничения из задачи 1. Найти достаточные условия на коэффициент $b(x)$, при которых замыкание оператора $\mathcal{A}_B$ в $C_B(\overline{Q})$ будет полугруппой Феллера в $C_B(\overline{Q})$.

Вариант 2

1. Рассматриваются нелокальная эллиптическая задача

$$\Delta u(x) = f_0(x) \qquad (x \in Q), \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} &u(x)\big|_{\Gamma_1} - b(x)u(\omega(x))\big|_{\Gamma_1} = f_1(x) && (x \in \Gamma_1),\\ &u(x)\big|_{\Gamma_2} = f_2(x) && (x \in \Gamma_2). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Здесь $Q \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная область с угловыми точками $g_1, g_2 \in \partial Q$, $\partial Q = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{g_1\} \cup \{g_2\}$, Γ_i – кривые класса $C^\infty (i = 1, 2)$, в некоторой окрестности точки g_i область Q совпадает с углом раствора β_i $(i = 1, 2;\ \beta_1 = \pi/3,\ \beta_2 = 3\pi/2)$, ω – C^∞-диффеоморфизм, $\omega(\Gamma_1) \subset Q$, $\omega(g_1) = g_1$, в некоторой окрестности точки g_1 преобразование $\omega(.)$ является поворотом на угол $\pi/6$, $\omega(g_2) \in \Gamma_2$ и в некоторой окрестности точки $\omega(g_2)$ кривая Γ_2 совпадает с прямой, $b \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Пусть $K = \mathcal{K}_1$, $b(g_1) = 2$, а $f = (f_0, f_1, f_2) \in \mathcal{H}_a^0(Q, \Gamma)$. Найти достаточные условия для параметра a, при которых задача (1), (2) – фредгольмова в весовом пространстве Кондратьева $H_a^2(\theta)$.

2. Привести пример нелокальной эллиптической задачи в ограниченной области с ребром, которая в некоторой окрестности каждой точки ребра сводится к системе трех эллиптических уравнений с нелокальными условиями в двугранном угле.

3. Рассматривается неограниченный оператор $\mathcal{A}_B : \mathcal{D}(\mathcal{A}_B) \subset C_B(\overline{Q}) \to C_B(\overline{Q})$, где $\mathcal{D}(\mathcal{A}_B) = \{u \in C^2(Q) \bigcap C_B(\overline{Q}) : \Delta u \in C_B(\overline{Q})\}$, $\mathcal{A}_B u = \Delta u$ для $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_B)$, $C_B(\overline{Q})$ – подпространство функций в $C(\overline{Q})$, удовлетворяющих нелокальным условиям (2), $b \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $0 \le b(x) \le 1$, преобразование ω удовлетворяет условиям задачи 1, $\partial Q \in C^\infty$, на поведение преобразования $\omega(.)$ в окрестности точки g_1, кривой Γ_2 в окрестности точки $\omega(g_2)$ и коэффициента $b(x)$ в точке g_1 не накладываются дополнительные ограничения из задачи 1. Найти достаточные условия на коэффициент $b(x)$, при которых замыкание оператора $\mathcal{A}_B$ в $C_B(\overline{Q})$ будет полугруппой Феллера в $C_B(\overline{Q})$.

Для оценки работы студента применяется бальная система. Наилучшему результату соответствуют 100 баллов, которые распределяются по видам контроля следующим образом:

– промежуточная контрольная работа – от 0 до 15 баллов,

– курсовая работа – от 0 до 20 баллов,

– итоговая письменная контрольная работа – от 0 до 25 баллов,

– устный экзамен – от 0 до 40 баллов.

На экзамене билет состоит из двух теоретических вопросов и одной задачи. Первый теоретический вопрос посвящен одной из лекций первой или второй темы, второй теоретический вопрос посвящен одной из лекций третьей или четвертой темы. Задача имеет уровень сложности одной из контрольных работ.

Соответствие суммарного количества набранных баллов итоговой оценке (по пятибалльной шкале и европейскому стандарту) показано в таблицах.

Баллы	0-50	51-68	69-85	86-100
Оценка	неуд.	удовл.	хорошо	отлично

Баллы	0-30	31-50	51-62	63-73	74-83	84-92	93-100
Оценка	F	FX	E	D	B	C	A

Методика выставления и шкала итоговых оценок отвечают принятым в РУДН для теоретических дисциплин.

Программа курса

Аннотированное содержание курса

Введение

(лекция 1; 2 часа – лекции; 2 часа – самостоятельная работа)

1. Рассматриваются постановки нелокальных эллиптических и параболических задач. Описываются математические модели многомерных диффузионных процессов и процессов терморегуляции в живых клетках, приводящие к нелокальным эллиптическим и параболическим задачам. Излагаются без доказательств новые свойства рассматриваемых нелокальных задач. Одним из таких свойств является нарушение гладкости обобщенных решений вблизи так называемого "множества точек сопряжения", принадлежащего границе области. Это связано с проявлением степенных особенностей у решений. Поэтому решение таких задач естественно рассматривать в весовых пространствах. Исследованию свойств весовых пространств посвящен первый раздел курса.

Раздел 1

Весовые пространства

(лекции 2-4, практические занятия 1-4; 6 часов лекций; 8 часов – практических занятий; 16 часов – самостоятельная работа; трудоемкость раздела 1 и введения – 1 кредит)

Лекции

2. Весовые пространства Кондратьева в углах в $\mathbb{R}^n$.

Определяются весовые пространства Кондратьева в бесконечных углах и в $\mathbb{R}^n$. Вводится преобразование переменных, отображающее бесконечный угол в полосу. Доказываются теоремы об эквивалентных нормах в весовых пространствах Кондратьева. Изучаются свойства этих пространств в бесконечных углах и в $\mathbb{R}^n$: существование операторов следа и поднятия, вложение весовых пространств с различными показателями дифференцируемости и веса, интерполяционные неравенства. Полученные результаты для модельных областей применяются с помощью разбиения единицы к исследованию свойств весовых пространств в ограниченной области в лекции 3.

3. Функциональные пространства с неоднородным весом.

Исследуются свойства функциональных пространств с неоднородным весом в плоских углах и в $\mathbb{R}^n$. Доказывается существование операторов следа и поднятия, доказываются теоремы об эквивалентных нормах в пространствах следов, устанавливается связь с весовыми пространствами в двугранных углах. Полученные результаты применяются в лекции 7 при сведении нелокальных эллиптических краевых задач в двугранных углах к нелокальным эллиптическим задачам с параметром на единичной сфере в плоских углах.

4. Весовые пространства Кондратьева в ограниченных областях.

Доказываются теоремы о продолжении функций в весовых пространствах и о существовании операторов следа и поднятия, устанавливаются интерполяционные неравенства, доказываются существование операторов следа и поднятия и теорема о компактности вложения весовых пространств, устанавливается связь с пространствами Соболева. Результаты применяются в лекциях 10-14, посвященных априорным оценкам решений и построению правого регуляризатора локальных и нелокальных эллиптических задач в ограниченной области.

Практические занятия

1. Преобразование переменных, отображающее бесконечный угол в полосу. Эквивалентные нормы в весовых пространствах Кондратьева в бесконечных углах.

Примеры посвящены указанному преобразованию переменных, позволяющему перейти от угла к области с гладкой границей (полосе), а также различным способам введения эквивалентных норм в весовых пространствах.

2. Свойства весовых пространств Кондратьева в бесконечных углах. Операторы следа и поднятия. Интерполяционные неравенства.

Примеры посвящены различным свойствам весовых пространств, в том числе свойствам оператора следа и поднятия и оценке норм с помощью интерполяционных неравенств.

3. Функциональные пространства с неоднородным весом в плоских углах, их связь с весовыми пространствами в двугранных углах.

Решаются примеры, связанные со свойствами функциональных пространств с неоднородным весом: эквивалентные нормы в следовых пространствах, связь с весовыми пространствами Кондратьева в двугранных углах.

4. Весовые пространства Кондратьева в ограниченных областях. Теорема о продолжении функций. Интерполяционные неравенства. Компактность оператора вложения. След функции. Связь с пространствами Соболева.

Решаются примеры из перечисленных выше подразделов. При этом используются навыки практических занятий 1-3.

Раздел 2

Модельные задачи в углах

(лекции 5-9, практические занятия 5-9; 10 часов – лекций; 10 часов – практических занятий, 20 часов – самостоятельная работа; трудоемкость – 1 кредит)

Лекции

5. Нелокальные эллиптические задачи в плоских углах.

Доказывается теорема о необходимых и достаточных условиях однозначной разрешимости нелокальной эллиптической краевой задачи в плоском угле. Условия формулируются в терминах расположения собственных значений соответствующей оператор-функции относительно некоторой прямой на комплексной плоскости, параллельной вещественной оси. Полученный результат сравнивается с теоремой об однозначной разрешимости соответствующей локальной эллиптической задачи в плоском угле. Результаты применяются в лекциях 10, 13 для доказательства фредгольмовой разрешимости локальных и нелокальных эллиптических задач в плоских ограниченных областях.

6. Асимптотическое поведение решений нелокальных эллиптических задач в плоских углах.

Доказывается асимптотическая формула решений в весовых пространствах Кондратьева нелокальных эллиптических задач в плоских углах. Ввод формулы основан на спектральных свойствах соответствующей оператор-функции. Проводится сравнение полученной формулы с асимптотической формулой для решений локальных эллиптических задач.

7. Нелокальные эллиптические задачи в двугранных углах. Сведение к нелокальным эллиптическим задачам с параметром в плоских углах.

С помощью преобразования Фурье и замены переменных нелокальные эллиптические задачи в двугранных углах сводятся к нелокальным эллиптическим задачам с параметром на единичной сфере в плоских углах. Доказано, что оператор, соответствующий первой задаче является изоморфизмом в весовых пространствах Кондратьева тогда и только тогда, когда оператор, соответствующей второй задаче является изоморфизмом в функциональных пространствах с неоднородным весом для всех значений параметра на единичной сфере. Результаты применяются в лекции 14 для доказательства фредгольмовой разрешимости нелокальных эллиптических задач в пространственных ограниченных областях.

8. Фредгольмова разрешимость нелокальных эллиптических задач с параметром в плоских углах.

Получена априорная оценка решений и построен правый регуляризатор нелокальной эллиптической краевой задачи с параметром в плоском угле. Тем самым доказана фредгольмова разрешимость рассматриваемой задачи. Результаты применяются в лекции 14 для доказательства фредгольмовой разрешимости нелокальных эллиптических задач в пространственных ограниченных областях.

9. Локальные эллиптические задачи в $\mathbb{R}^n$.

Доказываются результаты, аналогичные лекциям 8 в случае, когда вместо двугранного угла рассматривается все пространство $\mathbb{R}^n$, а вместо плоского угла – пространство $\mathbb{R}^2$. Результаты, полученные для разрешимости эллиптического уравнения в $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ в весовых пространствах Кондратьева, применяются в лекциях 10-13 для доказательства теорем о фредгольмовой разрешимости локальных и нелокальных эллиптических краевых задач в плоских ограниченных областях. А именно, с помощью этих результатов вводятся условия согласования для нелокальных эллиптических задач во внутренних точках области. В многомерном случае доказано, что оператор, соответствующий эллиптической задаче с параметром на единичной сфере, не является изоморфизмом в функциональных пространствах с неоднородным весом ни для каких значений весового параметра. Это означает, что условия согласования в многомерном случае нельзя ввести за счет введения особенностей на (n–2)-мерных многообразиях, лежащих внутри области.

Практические занятия

5. Нелокальные эллиптические задачи в плоских углах. Необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости в весовых пространствах Кондратьева. Сравнение с условиями разрешимости локальных эллиптических задач.

Решаются примеры на нахождение собственных значений оператор-функций, соответствующих локальным и нелокальным эллиптическим задачам в плоском угле. Исследуются однозначная разрешимость рассматриваемых задач в зависимости от расположения комплексной плоскости.

6. Асимптотическое поведение решений локальных и нелокальных эллиптических задач в плоских углах. Сравнение расположения собственных значений соответствующих оператор-функций.

Решаются примеры на нахождение собственных значений, а также собственных и присоединенных функций, соответствующих локальным и нелокальным эллиптическим задачам в плоском угле. Строятся асимптотические формулы решений в весовых пространствах.

7. Связь нелокальных эллиптических задач с эллиптическими функционально-дифференциальными уравнениями.

Решаются примеры на нахождение параметров нелокальной эллиптической задачи в плоском угле, при которых рассматриваемая задача эквивалентна краевой задаче для сильного эллиптического функционально-дифференциального оператора. Тем самым доказывается однозначная разрешимость нелокальной эллиптической задачи с параметром в плоском угле.

8. Нелокальные эллиптические задачи в двугранных углах. Сведение к нелокальным эллиптическим задачам с параметром в плоских углах.

Решаются примеры, использующие метод сведения, основанный на преобразовании Фурье и замене переменных.

Фредгольмова и однозначная разрешимость эллиптических задач с параметром в плоских углах.

Решаются примеры на нахождение параметров задачи, при которых рассматриваемая нелокальная эллиптическая задача в плоском угле с параметром на единичной сфере будет однозначно разрешимой.

9. Контрольная работа.

Раздел 3

Разрешимость эллиптических задач в ограниченных областях с нелокальными условиями вблизи границы

(лекции 10-14, практические занятия 10-14; 10 часов – лекций, 10 часов – практических занятий, 20 часов – самостоятельная работа; трудоемкость – 1 кредит)

Лекции

10. Локальные эллиптические задачи в ограниченной области с конечным числом угловых точек или ребер.

Вводится априорная оценка решений и строится правый регуляризатор для локальных эллиптических задач в ограниченной области в весовых пространствах. Тем самым доказывается фредгольмовость соответствующего оператора. В отличие от традиционной постановки эллиптической задачи в ограниченной области с угловыми точками или ребрами, допускаются особенности решения на некотором множестве. Введение этого множества соответствует условиям согласования для нелокальных эллиптических задач. Результаты лекции применяются в лекциях 11, 12 для доказательства фредгольмовой разрешимости нелокальных эллиптических задач с носителями нелокальных членов вне точек сопряжения.

11. Нелокальные эллиптические задачи в плоской ограниченной области с носителями нелокальных членов вне точек сопряжения. Априорные оценки решений в весовых пространствах Кондратьева.

Выводится априорная оценка решений нелокальных эллиптических задач в ограниченной области в весовых пространствах, что позволяет в лекции 12 доказать фредгольмовость соответствующего оператора. при этом подход к границе носителей нелокальных членов может быть произвольным, в частности, касательным.

12. Нелокальные эллиптические задачи в плоской ограниченной области с носителями нелокальных членов вне точек сопряжения. Построение правого регуляризатора в весовых пространствах Кондратьева. Фредгольмова разрешимость.

Строится правый регуляризатор оператора, соответствующего рассматриваемой задаче. Отсюда и из лекции 11 следует фредгольмовость оператора в случае отсутствия на некоторой прямой параллельной вещественной оси собственных значений оператор-функции для локальной задачи. Доказывается, что это достаточное условие фредгольмовой разрешимости является необходимым. Другими словами, в случае подхода носителей нелокальных членов к границе вне точек сопряжения нелокальная задача фредгольмова тогда и только тогда, когда соответствующая локальная задача – фредгольмова.

13. Нелокальные эллиптические задачи в плоской ограниченной области с носителями нелокальных членов вблизи точек сопряжения. Необходимые и достаточные условия фредгольмовой разрешимости.

Для рассматриваемых нелокальных эллиптических задач получены необходимые и достаточные условия фредгольмовой разрешимости на носитель нелокальных членов накладывается ограничение некасательного подхода к границе. Показано, что локальная задача может быть фредгольмовой, а нелокальная – нет и, наоборот, нелокальная задача может быть фредгольмовой, а локальная – нет. Применяются два способа построения расширенного множества точек сопряжения, которое используется для учета нелокальных членов. В первом способе к множеству точек сопряжения добавляются полученные при применении к ним преобразований переменных в нелокальных членов. Во втором способе показатель веса выбирается достаточно большим.

14. Нелокальные эллиптические задачи в многомерных ограниченных областях. Условие Карлемана.

Рассматриваются нелокальные эллиптические задачи в n-мерных ограниченных областях. Предполагается, что на (n–2)-мерных многообразиях, составляющих множество точек сопряжения, невырожденные гладкие преобразования переменных в нелокальных членах удовлетворяют условию Карлемана, а подход нелокальных членов к границе в точках сопряжения – некасательный. Эти предположения позволяют свести в окрестности множества точек сопряжения рассматриваемую нелокальную задачу к системе эллиптических уравнений с нелокальными краевыми условиями в двугранных углах, а затем применить результаты лекций 7, 8.

Практические занятия

10. Локальные эллиптические задачи в ограниченной области с конечным числом угловых точек или ребер.

Решаются примеры на нахождение весового параметра, при котором рассматриваемая локальная задача будет фредгольмовой.

11. Нелокальные эллиптические задачи в плоской ограниченной области с носителями нелокальных членов вне точек сопряжения. Необходимые и достаточные условия фредгольмовой разрешимости. Сравнение с локальными эллиптическими задачами.

Решаются примеры на нахождение весового параметра, при котором рассматриваемая нелокальная задача и соответствующая локальная задача будут фредгольмовыми. Проводится анализ влияния на фредгольмову разрешимость расширенного множества точек сопряжения по сравнению с исходным множеством точек сопряжения.

12. Нелокальные эллиптические задачи в плоской ограниченной области с носителями нелокальных членов вблизи точек сопряжения. Необходимые и достаточные условия фредгольмовой разрешимости. Сравнение с локальными эллиптическими задачами

Решаются примеры на нахождение весового параметра, при котором рассматриваемая нелокальная задача будет фредгольмовой. Проводится сравнительный анализ с соответствующей локальной задачей.

13. Нелокальные эллиптические задачи в многомерных ограниченных областях в различных случаях подхода носителей нелокальных членов к границе.

Решаются примеры сведения рассматриваемых задач к системам эллиптических дифференциальных уравнений в двугранных углах. Для получения достаточных условий фредгольмовой разрешимости примеров нелокальных эллиптических задач в ограниченной области применяются эти решенные примеры и примеры занятий 7-9.

14. Гладкость обобщенных решений нелокальных эллиптических задач. Сравнение с локальными эллиптическими задачами.

Решаются примеры на нахождение соотношений между значениями весового параметра и угла, при которых гладкость обобщенных решений сохраняется. Проводится сравнение полученных результатов с соответствующими результатами для локальных эллиптических задач. Методы решения основаны на результатах лекций 4 и 6.

Раздел 4

Применение к теории многомерных диффузионных процессов

(лекции 15-18, практические занятия 15-18; 8 часов – лекций; 8 часов – практических занятий; 16 часов – самостоятельная работа; трудоемкость – 1 кредит)

Лекции

15. Многомерные диффузионные процессы и полугруппы Феллера.

Рассматриваются математические модели случайных блужданий частиц в живых клетках с учетом эффекта скачков. Устанавливается связь с полугруппами Феллера. Формулируются необходимые условия на граничные операторы, описывающие область определения эллиптического оператора, который является генератором полугруппы Феллера. Как следствие из теоремы Хилле-Иосиды оказываются достаточные условия существования полугрупп Феллера для абстрактных операторов. Результаты применяются для доказательства конструктивных достаточных условий существования полугрупп Феллера, генератором которых является эллиптический оператор второго порядка с нелокальными краевыми условиями в лекции 17.

16. Достаточные условия существования полугрупп Феллера в нетрансверсальном случае. Разрешимость нелокальных эллиптических задач с параметром в пространствах Гёльдера.

В силу результатов, полученных в лекции 15, для доказательства того, что эллиптический оператор второго порядка с нелокальными краевыми условиями является генератором полугруппы Феллера, достаточно показать, что соответствующая нелокальная эллиптическая задача с параметром однозначно разрешима в пространствах Гёльдера для положительных значений параметра, а область определения оператора всюду плотна в подпространстве пространства непрерывных функций с нелокальными краевыми условиями. Таким образом, мы должны использовать методы, развитые в предыдущих лекциях. Доказательство однозначной разрешимости указанной нелокальной задачи проводится для наиболее трудного нетрансверсального случая, т.е. когда порядок нелокальных членов совпадает с порядком граничных операторов.

17. Плотность области определения эллиптического оператора с нелокальными условиями в подпространстве непрерывных функций.

В нетрансверсальном случае доказывается плотность области определения указанного оператора. Наряду с результатами лекций 17, 18 это позволяет доказать, что оператор является генератором полугруппы Феллера. Рассматриваются контрпримеры нелокальных краевых условий, когда соответствующий оператор не является генератором полугруппы Феллера.

18. Достаточные условия существования полугрупп Феллера в трансверсальном случае.

Для доказательства существования полугрупп Феллера применяются результаты работы [29] и методы лекций 16, 17.

Практические занятия

15. Полугруппы Феллера и нелокальные эллиптические задачи с параметром.

Решаются примеры сведения нелокальных краевых условий (в том числе с атомарной мерой) к условиям Вентцеля.

16. Достаточные условия существования полугрупп Феллера для атомарной меры в нелокальных членах (нетрансверсальный случай).

Решаются примеры на определение коэффициентов в нелокальных членах, которые удовлетворяют достаточным условиям существования полугруппы Феллера.

17. Достаточные условия существования полугруппы Феллера в трансверсальном случае для примеров атомарно меры в нелокальных членах.

Решаются примеры на определение коэффициентов в нелокальных членах, которые удовлетворяют достаточным условиям существования полугруппы Феллера.

Итоговая контрольная работа.

Список обязательной литературы

1. Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач. – ДАН СССР, 1969, т. 185, № 4, с. 734-740 (с. 739-740 – лекция 1).

2. Галахов Е.И., Скубачевский А.Л. О сжимающих неотрицательных полугруппах с нелокальными условиями. – Матем. сб., 1998, т. 189, № 1, с. 45-78, (с. 45-78 – лекции 15-18; практические занятия 15-18).

3. Гуревич П.Л., Скубачевский А.Л. О фредгольмовой и однозначной разрешимости нелокальных эллиптических задач в многомерных областях – Труды ММО, 2007, т. 68, с. 288-373. (с. 288-373 – лекции 7, 8, 14; практические занятия – 8, 13).

4. Кондратьев В.А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками. – Труды ММО, 1967, т. 16, с. 209-292. (с. 213-226 – лекции 2, 5, 6; практические занятия 1, 2, 5, 6; с. 227-241 – лекции 4, 10-12; практические занятия 4, 10-12.

5. Назаров С.А., Пламеневский Б.А. Эллиптические задачи в областях с кусочно1 гладкой границей. – М., "Наука", 1991. (с. 193-206 – лекции 3, 9, 10; практические занятия 3, 8, 10).

6. Скубачевский А.Л. Эллиптические задачи с нелокальными условиями вблизи границы. – Матем. сб., 1986, т. 129 (171), № 2, с. 279-302. (с. 279-302 – лекции 2, 4-6, 11-13; практические занятия 2, 4-6, 11, 12, 14).

7. Скубачевский А.Л. Модельные нелокальные задачи для эллиптических уравнений в двугранных углах. – Дифференц. уравнения, 1990, т. 26, № 1, с. 120-131. (с. 120-131 – лекции 7-9; практические занятия 7,8).

8. Скубачевский А.Л. О методе срезающих функций в теории нелокальных задач. – Дифференц. уравнения, 1991, т. 27, № 1, с. 128-139. (с. 128-139 – лекция 14, практическое занятие 13).

Feller W. The parabolic differential equations and associated semi-groups of transformation. – Ann. of Math., 1952, v. 55, № 3, p. 468-519. (p. 468-519 – лекция 1).

Список дополнительной литературы

1. Бицадзе А.В. Об одном классе условно разрешимых нелокальных краевых задач для гармонических функций. – ДАН СССР, 1985, т. 280, № 3, с. 521-5240. (с. 521-524 – лекция 13).

2. Вентцель А.Д. О граничных условиях для многомерных диффузионных процессов. – Теор. вероятн. и ее применения, 1959, т. 4, вып. 2, с 172-185) (с. 172-185 – лекции 1, 18).

3. Гуревич П.Л. Асимптотика решений нелокальных эллиптических задач в плоских углах. – Труды семинара им. Н.Г. Петровского, 2003, т. 23, с. 93-126. (с. 93-126 – лекция 6; практические занятия 6).

4. Гуревич П.Л. Нелокальные эллиптические задачи с нелинейными преобразованиями переменных вблизи точек сопряжения. – Изв. РАН. Сер. мат., 2003, т 67, №6, с. 71-110. (с. 71-110 – лекция 14; практическое занятие 13).

5. Гущин А.К., Михайлов В.П. О разрешимости нелокальных задач для эллиптического уравнения второго порядка. – Матем. сб., 1994, т. 185, №1, с. 121-160. (с. 121-160 – лекция 16).

6. Кишкис К.Ю. Об индексе задачи А.В. Бицадзе, А.А. Самарского для гармонических функций. – Дифференц. уравнения, 1988, т. 24, №1, с. 105-110. (с. 105-110 – лекция 13).

7. Кишкис К.Ю. К теореме нелокальных задач для уравнения Лапласа. – Дифференц. уравнения, 1989, т. 25, №1, с 59-64. (с. 59-64 – лекция 13).

8. Кондратьев В.А., Олейник О.А. Краевые задачи для уравнений с частными производными в негладких областях. – УМН, 1983, т. 38, вып. 2, с 3-74. (с. 8-14 – лекции 2,4,5,10; практические занятия 1,2,4,5,10; с. 14-27 – лекция 6, практическое занятие – 6).

9. Мазье В.Г., Пламеневский Б.А. L_p-оценки решений эллиптических краевых задач в областях с ребрами. – Труды ММО, 1978, т. 37, с. 49-93. (с. 54-56 – лекция 3; практическое занятие 3; с. 57-77 – лекции 7,8; практические занятия 7,8; с. 84-92 – лекция 10; практическое занятие 10).

10. Самарский А.А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений. – Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, №11, с. 1925-1935. (с. 1925-1935 – лекция 1).

11. Скубачевский А.Л. О некоторых задачах для многомерных дифференциальных процессов. – ДАН СССР, 1989, т. 307, №2, с. 287-291. (с. 287-291 – лекции 16-18; практические занятия 16-18).

12. Скубачевский А.Л. Нелокальные краевые задачи для эллиптических систем в углах. – Труды семинара им. Н.Г. Петровского, 2002, вып. 22, с. 283-298. (с.283-298 – лекция 5, практическое занятие – 5).

13. Скубачевский А.Л. О разрешимости нелокальных задач для эллиптических систем в бесконечных углах. – Доклады Академии наук, 2007, т.412, №3, с.317-320.

14. Солдатов А.П. Задачи Блицадзе-Самарского для функций, аналитических по Дуглису. – Дифференц. уравнения, 2005, т. 41, №3, с. 396-407. (с. 396-407 – лекции 6,13).

15. Browder F. Non-local elliptic boundary value problems. – Amer. Y. Math., 1964, v. 86, №4, p. 735-750. (p. 735-750 – лекция 1).

16. Carleman T. Sur la theoric des equations integrals et ses applications. – Verhandlungen des Internationalen Math. Kongr. Zurich, 1932, Bd. 1, p. 138-151. (p. 138-151 – лекции 1,14).

17. Feller W. Diffusion processes in one-dimension. – Trans. Amer. Math., Soc., 1954, v. 77, №1, p. 1-31. (p. 1-31 – лекция 1).

18. Gurevich P.L. Solvability of nonlocal elliptic problems in Sobolev spaces. – I. Russ. Y. Math. Phys., 2003, v. 10, №4, p. 436-466; II Russ. Y. Math. Phys., 2004, v/ 11, №1, p. 1-44. (p. 436-466, p. 1-44 – лекции, 11-14).

19. Gurevich P.L. The consistency conditions and the smoothness of generalized solutions of nonlocal Miptic problems. – Advanced in Differential Equations, 2006, v. 11, №3, p. 305-360. (p. 305-360 – лекция 1; практическое занятие – 14).

20. Sato K., Ueno T. Multi-dimensional diffusion and the Markov process on the boundary. – Y. Math Kyoto Univ., 1965, v.4, №3, p. 529-605 (p. 529-605 – лекция 18б практическое занятие – 17).

21. Skubachevskii A.L. Elliptic functional differential equations and applications. – Birkhäuser. Basel – Boston – Berlin, 1997. (p. 96-108, 147-159 – практическое занятие 8; p. 230-247 – лекции 15-18; практические занятия 15-18).

22. Skubachevskii A.L. Regularity of solutions for some nonlocal elliptic problem. – Russ. J. of Math. Phys., 2001, v.8, №3, p. 365-374. (p. 365-374 – практическое занятие 14).

Темы курсовых работ

I. Типовые темы:

1. Получить интерполяционные неравенства для весовых пространств Кондратьева, состоящих из функций, интегрируемых со степенью, не равной 2, т.е. негильбертовых.

2. Исследовать задачу на собственные функции и собственные значения оператор-функции, соответствующей нелокальной краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения на конечном интервале.

3. Доказать однозначную разрешимость в весовых пространствах Кондратьева нелокальной эллиптической задачи в бесконечном конусе в случае носителя нелокальных членов во внутреннем конусе.

4. Получить асимптотическую формулу для решений нелокальной эллиптической задачи в бесконечном конусе в случае носителя нелокальных членов во внутреннем конусе.

5. Построить левый регуляризатор оператора соответствующий нелокальной эллиптической краевой задаче в ограниченной области в случае некасательного носителя нелокальных членов к точкам сопряжения.

6. Получить априорную оценку решений в весовых пространствах Кондратьева нелокальной эллиптической краевой задачи в многомерной

ограниченной области в случае конической структуры носителя нелокальных членов.

7. Построить правый (левый) регуляризаторы оператора, соответствующего нелокальной эллиптической краевой задаче в многомерной ограниченной области в случае конической структуры носителя нелокальных членов.

8. Исследовать гладкость обобщенных решений нелокальных эллиптических краевых задач в зависимости от коэффициентов в нелокальных членах и величине угла в точке сопряжения.

9. Исследовать вопрос о существовании полугруппы Феллера для оператора Лапласа с атомарной мерой в нелокальных членах при заданных коэффициентах и носителе меры.

10. Решить численно (без обоснования) нелокальную эллиптическую краевую задачу в случае подхода носителя нелокальных членов к границе для двумерной ограниченной области.

11. Решить численно (без обоснования) задачу о терморегуляции живой клетки (термоконтроля химического реактора) в случае, когда нагревательные элементы занимают лишь часть мембраны (границы реактора).

12. Найти численно (без обоснования) периодические по времени температурные режимы в живой клетке (химическом реакторе) в случае, когда нагревательные элементы занимают лишь часть мембраны (границы реактора).

II. Темы повышенной сложности, дальнейшее развитие которых может привести к написанию кандидатских и докторских диссертаций

1. Исследовать разрешимость и поведение решений нелокальных эллиптических краевых задач вблизи точек сопряжения в случае касательного подхода к границе носителей нелокальных членов.

2. Исследовать вопрос о существенности условий тривиальности ядра и коядра модельного оператора с параметром на единичной сфере, соот-

ветствующего нелокальной эллиптической задаче в многомерной ограниченной области, для фредгольмовой разрешимости этой задачи.

3. Исследовать влияние больших коэффициентов в нелокальных членах на повышение гладкости обобщенных решений нелокальных эллиптических краевых задач.

4. Исследовать разрешимость и поведение решений в близи точек сопряжения нелокальных эллиптических краевых задач в ограниченной многомерной области в случае, когда нарушается условие Карлемана.

5. Исследовать разрешимость и поведение решений вблизи точек сопряжения нелокальных эллиптических краевых задач в ограниченной многомерной области в случае, когда граница многообразия, на котором задаются граничные краевые условия пересекается, но не совпадает с границей многообразия, на котором задаются нелокальные члены.

6. Исследовать разрешимость и асимптотическое поведение решений вблизи точек сопряжения нелокальных эллиптических краевых задач в весовых пространствах Гёльдера.

7. Исследовать существование полугрупп Феллера для диффузионного процесса в живой клетке в нетрансверсальном случае для распределенных нелокальных членов вблизи точек сопряжения.

8. Создать численные методы (с обоснованием сходимости, устойчивости и т.д.) исследования диффузионных процессов в живой клетке с учетом эффекта скачков.

9. Доказать однозначную разрешимость смешанных задач для модели автоматической терморегуляции в живой клетке (химическом реакторе) в случае, когда нагревательные элементы занимают лишь часть мембраны (границы ректора).

10. Получить конструктивные достаточные условия существования периодических решений и аттракторов для математической модели автоматической терморегуляции в живой клетке (химическом реакторе) в слу-

чае, когда нагревательные элементы занимают лишь часть мембраны (границы реактора).

11. Создать численные методы (с обоснованием сходимости, устойчивости и т.д.) исследования математической модели автоматической терморегуляции в живой клетке (химическом реакторе) в случае, когда нагревательные элементы занимают лишь часть мембраны (границы реактора).

III. Комментарии к темам курсовых работ

Типовые темы курсовых работ составлены так, что каждая тема допускает формулировку нескольких курсовых работ. Содержание этих работ требует знания материала курса, но не допускает механического копирования других даже однотипных заданий. Например, первое задание допускает следующие варианты: а) интерполяционное неравенство для весовых пространств в двугранном или плоском угле; б) интерполяционное неравенство для весовых пространств в конусе; в) интерполяционное пространство в ограниченной области с конечным числом угловых точек или ребер; г) интерполяционное неравенство для следов функций и т.д. В ряде заданий выдача различных параметров может привести к принципиально разным результатам. Причем студент должен обосновать это различие теоретически. Например, "типичным" свойством нелокальных эллиптических краевых задач является то, что собственные значения соответствующие оператор функции являются комплексными. Однако, при некоторых значениях коэффициентов при нелокальных членах во втором типовом задании оператор-функция может иметь вещественный спектр. Это связано с тем, что рассматриваемая задача может быть сведена к самосопряженному положительно определенному дифференциально-разностному оператору (см. [30], с. 96-108, с. 147-159, с. 230-247).

Для студентов с глубокой подготовкой, желающих продолжить занятия научной работой (в том числе в прикладной области) предусмотрены темы повышенной сложности, которые могут перерасти в кандидатские, а затем в докторские диссертации. В качестве курсовых работ предлагаются решения некоторых частных случаев сформулированных проблем. Среди этих работ предусмотрены как теоретические, так и прикладные задачи. Укажем на некоторые трудности в решении сформулированных задач.

1. В случае некасательного подхода к границе носителей нелокальных членов преобразование переменных, переводящее бесконечный угол в полосу, одновременно отделяет нелокальные члены от границы. В случае касательного подхода к границе этот метод непригоден.

2. Данная задача не является до конца исследованной даже в случае локальных эллиптических задач в областях с ребрами. Трудности в ее исследовании связаны с некомпактностью резольвенты для эллиптических операторов в неограниченных областях.

3. Решение данной задачи связано с расположением собственных значений оператор-функции, соответствующей нелокальной эллиптической краевой задаче, в некоторой полосе комплексной плоскости. Однако, даже для классических оператор-функций обычно изучаются лишь методы исследования асимптотики собственных значений на бесконечности.

4. В этом случае формальное перенесение известных методов сводит рассматриваемую нелокальную задачу в ограниченной области к бесконечной системе эллиптических уравнений с нелокальными условиями в двугранных углах.

5. В этом случае при некоторых дополнительных условиях задача сводится к нелокальной эллиптической задаче в полиэдре. Однако, даже для локальных эллиптических задач в полиэдре общая пока не создана, а результаты часто являются неконструктивными, хотя в этом направлении имеется целый ряд глубоких работ (обзор см. в [17], с.56-58).

6. По-видимому, трудности будут в основном технического характера. Однако, возможны принципиальные затруднения связанные с тем, что пространства Гёльдера не являются гильбертовыми и несепарабельны.

7. Эту задачу естественно решать с помощью методов, разработанных в [2, 20, 30], а также [22] о разрешимости нелокальных эллиптических задач с распределенными носителями нелокальных членов. Однако, этот подход может привести к неконструктивным результатам. Возможно, прогресс в этом направлении связан с применением весовых пространств Гёльдера, см. п.6.

8. Трудности создания численных методов исследования аналитических моделей диффузионных процессов связаны с возникновением особенностей решений соответствующих эллиптических и параболических задач вблизи точек сопряжения. Поэтому, например, в случае применения конечноразностных методов сетка должна быть неравномерной.

9-11. Трудности в исследовании указанных задач связаны с тем, что в реальных задачах (процессы терморегуляции в живых клетках, термоконтроль химических реакторов и жилых помещений, термоконтроль сталелитейного конвертора) нагревательные устройства занимают не всю границу области, а лишь некоторые ее части. В связи с этим решение рассматриваемых задач могут обладать степенными особенностями в точках сопряжения. Поэтому при исследовании указанных задач применимы методы данного УМК. Однако, при этом возникают дополнительные трудности, связанные с тем, что рассматриваемые прикладные задачи имеют нелинейность гистерезисного типа, т.е. являются существенно нелинейными.

Учебный тематический план курса

(календарный план)

Объем аудиторной работы: – 72 часа:

лекций – 36 часов

практических занятий – 36 часов

№ недели	Темы лекций
1.	Введение. Нелокальные эллиптические и параболические задачи. Математические модели многомерных диффузионных процессов и процессов терморегуляции в живых клетках.
2.	Весовые пространства Кондратьева в углах и в $\mathbb{R}^n$.
3.	Функциональные пространства с неоднородным весом.
4.	Весовые пространства Кондратьева в ограниченных областях.
5.	Нелокальные эллиптические задачи в плоских углах
6.	Асимптотическое поведение решений нелокальных эллиптических задач в плоских углах.
7.	Нелокальные эллиптические задачи в двугранных углах. Сведение к нелокальным эллиптическим задачам с параметром в плоских углах.
8.	Фредгольмова разрешимость нелокальных эллиптических задач с параметром в плоских углах.
9.	Локальные эллиптические задачи в $\mathbb{R}^n$.
10.	Локальные эллиптические задачи в ограниченной области с конечным числом угловых точек или ребер.
11.	Нелокальные эллиптические задачи в плоской ограниченной области

№ недели	Темы лекций
	с носителями нелокальных членов вне точек сопряжения. Априорные оценки решений в весовых пространствах Кондратьева.
12.	Нелокальные эллиптические задачи в плоской ограниченной области с носителями нелокальных членов вне точек сопряжения. Построение правого регуляризатора в весовых пространствах Кондратьева. Фредгольмова разрешимость.
13.	Нелокальные эллиптические задачи в плоской ограниченной области с носителями нелокальных членов вблизи точек сопряжения. Необходимые и достаточные условия фредгольмовой разрешимости.
14.	Нелокальные эллиптические задачи в многомерных ограниченных областях. Условие Карлемана.
15.	Многомерные диффузионные процессы и полугруппы Феллера.
16.	Достаточные условия существования полугрупп Феллера в нетрансверсальном случае. Разрешимость нелокальных эллиптических задач с параметром в пространстве Гёльдера.
17.	Плоскость области определения эллиптического оператора с нелокальными условиями в подпространстве непрерывных функций.
18.	Достаточные условия существования полугрупп Феллера в трансверсальном случае.

№ недели	**Темы практических занятий**
1.	Преобразование переменных, отображающее бесконечный угол в полоску. Эквивалентные нормы в весовых пространствах Кондратьева в бесконечных углах.
2.	Свойства весовых пространств Кондратьева в бесконечных углах. Операторы следа и поднятия. Интерполяционные неравенства.
3.	Функциональные пространства с неоднородным весом в плоских углах, их связь с весовыми пространствами в двугранных углах.
4.	Весовые пространства Кондратьева в ограниченных областях. Теорема о продолжении функций. Интерполяционные неравенства. Компактность оператора вложения. След функции. Связь с пространствами Соболева.
5.	Нелокальные эллиптические задачи в плоских углах. Необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости в весовых пространствах Кондратьева. Сравнение с условиями разрешимости для локальных эллиптических задач.
6.	Асимптотическое поведение решений локальных и нелокальных эллиптических задач в плоских углах. Сравнение расположения собственных значений соответствующих оператор-функций.
7.	Связь нелокальных эллиптических задач с эллиптическими функционально-дифференциальными уравнениями.
8.	Нелокальные эллиптические задачи в двугранных углах. Сведение к нелокальным эллиптическим задачам с параметром в плоских углах. Фредгольмова и однозначная разрешимость эллиптических задач с параметром в плоских углах.
9.	Контрольная работа.

№ недели	**Темы практических занятий**
10.	Локальные и эллиптические задачи в ограниченной области с конечным числом угловых точек или ребер.
11.	Нелокальные эллиптические задачи в плоской ограниченной области с носителями нелокальных членов вне точек сопряжения. Необходимые и достаточные условия фредгольмовой разрешимости. Сравнение с локальными эллиптическими задачами.
12.	Нелокальные эллиптические задачи в плоской ограниченной области с носителями нелокальных членов вблизи точек сопряжения. Необходимые и достаточные условия фредгольмовой разрешимости. Сравнение с локальными эллиптическими задачами.
13.	Нелокальные эллиптические задачи в многомерных ограниченных областях в различных случаях подхода носителей нелокальных членов к границе.
14.	Гладкость обобщенных решений нелокальных эллиптических задач. Сравнение с локальными эллиптическими задачами.
15.	Полугруппы Феллера и нелокальные эллиптические задачи с параметром.
16.	Достаточные условия существования полугрупп Феллера для атомарной меры в нелокальных членах (нетрансверсальный случай).
17.	Достаточные условия существования полугрупп Феллера в трансверсальном случае для примеров атомарной меры в нелокальных членах.
18.	Итоговая контрольная работа