ПРИОРИТЕТНЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ПРОЕКТ «ОБРАЗОВАНИЕ»
РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

В.Н. АФАНАСЬЕВ

УПРАВЛЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ СИСТЕМАМИ

Учебное пособие

Москва

2008

Инновационная образовательная программа
Российского университета дружбы народов

«Создание комплекса инновационных образовательных программ и формирование инновационной образовательной среды, позволяющих эффективно реализовывать государственные интересы РФ через систему экспорта образовательных услуг»

Экспертное заключение –

доктор технических наук, профессор,
зав. лабораторией Института проблем управления РАН *И.Б. Ядыкин*

Афанасьев В.Н.

Управление неопределенными системами: Учеб. пособие. – М.: РУДН, 2008. – 325 с.

Применение аналитических методов конструирования для систем управления с неполной информацией не дает реализуемых решений. Возникает необходимость развития таких методов, которые не требовали бы детального знания всего пространства состояния системы и ее взаимодействия со средой, а базировались только на анализе ее входных воздействий и внешнего поведения.

Реализуемые методы построения подобных систем основаны на применении алгоритмического и робастного конструирования неопределенных систем управления.

В практике управления достаточно сложными системами, для которых отсутствуют математические модели, широкое применение получили методы, основанные на использовании нечеткого управления. В основе теории нечеткого управления лежит понятие нечеткого множества.

Данное учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению «Автоматизация и управление», однако изучение изложенного материала будет полезно студентам и аспирантам других факультетов, специализирующихся в области управления разнообразными системами. Материал книги может быть интересен и для специалистов, работающих в области управления разнообразными объектами с неполной информацией.

Подготовлено на кафедре кибернетики и мехатроники.

Учебное пособие выполнено в рамках инновационной образовательной программы Российского университета дружбы народов, направление «Комплекс экспортоориентированных инновационных образовательных программ по приоритетным направлениям науки и технологий», и входит в состав учебно-методического комплекса, включающего описание курса, программу и электронный учебник.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 5

Часть I. Случайные процессы в системах управления

Глава 1. Основные понятия и определения 11

§ 1.1. Математические модели динамических неопределенных объектов 11

§ 1.2. Общая конструкция алгоритмов параметрической оптимизации 19

§1.3. Связь алгоритмического конструирования с методами теории адаптации 29

§ 1.4. Постановка задачи о робастном управлении 35

§ 1.5. Выводы 41

Глава 2. Оптимальное оценивание состояния линейных стохастических систем 43

§ 2.1. Геометрическая структура линейного оценивания 43

§ 2.2. Оценивание в линейных динамических системах 49

§ 2.3. Общее условие минимума средней квадратической ошибки. Уравнение Винера – Хопфа 51

§ 2.4. Фильтр Калмана-Бюси 55

§ 2.5. Обобщенный линейный фильтр 61

§ 2.6. Фильтрация при «небелых» шумах 66

§ 2.7. Оптимальная фильтрация нелинейных динамических систем 70

§ 2.8. Оптимальное сглаживание и интерполяция для непрерывных процессов 73

Глава 3. Управление линейными стохастическими системами с квадратическим функционалом качества 76

§ 3.1. Системы с процессами типа «белого» шума 77

§ 3.2. Принцип стохастической эквивалентности 80

§ 3.3. Поведение оптимальной управляемой системы в среднем 85

Часть II. Координатно-параметрическое управление неопределенными объектами

Глава 4. Конструирование алгоритмов оптимизации с помощью модифицированного уравнения Винера – Хопфа 89

§ 4.1. Постановка задачи 89

§ 4.2. Общие условия минимума функционала качества 92

§ 4.3. Основная конструкция алгоритмов оптимизации в задачах идентификации 95

§ 4.4. Модифицированное уравнение Винера – Хопфа в задачах фильтрации нестационарных процессов 99

§ 4.5. Система с эталонной моделью 108

§ 4.6. Система с комбинированным критерием качества 114

§ 4.7. Управление нестационарными стохастическими объектами в условиях неполной информации 120

Глава 5. Конструирование алгоритмов оптимизации с помощью функций допустимых значений управляющих воздействий 124

§ 5.1. Постановка задачи 124

§ 5.2. Основная конструкция алгоритмов оптимизации, использующая поведение гамильтониана 134
§ 5.3. Задача стабилизации нестационарного линейного детерминированного объекта 139
§ 5.4. Задача стабилизации нестационарного линейного детерминированного объекта с неполной информацией о состоянии 147
§ 5.5. Решение двухточечной краевой задачи общего вида с помощью алгоритмов оптимизации 155
§ 5.6. Параметрическое управление нестационарным объектом методом скоростного спуска по лагранжиану 158
Глава 6. Конструирование алгоритмов оптимизации с помощью функций Беллмана 165
§ 6.1. Постановка задачи 165
§ 6.2. Основная конструкция алгоритмов оптимизации, использующая функции Беллмана 168
§ 6.3. Координатная оптимизация в задаче стабилизации нелинейного объекта 172

Часть III. Робастные системы управления
Глава 7. Робастное управление линейными неопределенными системами 178
§ 7.1. Постановка задачи 178
§ 7.2. Робастное управление линейными нестационарными системами 180
§ 7.3. Дифференциальные игры в задачах конструирования робастного управления линейными системами 186
§ 7.4. Робастная инвариантность неопределенных линейных систем 198
§ 7.5. Множество возможных робастных управлений линейным объектом 202
§ 7.6. Модель пониженного порядка 210
§ 7.7. Линейно - квадратичная задача при неполной информации о состоянии объекта 214
§ 7.8. Робастное управление стохастическим нестационарным объектом с неполной информацией о состоянии 220
§ 7.9. Задача d-робастного сближения с нестационарным объектом 225
§ 7.10. Управление выводом и сопровождением по нестационарной траектории 229
Глава 8. Робастное управление нелинейными неопределенными объектами 233
§ 8.1. Постановка задачи 233
§ 8.2. Необходимые условия существования стабилизирующего управления 238
§ 8.3. Переходный процесс нелинейной системы в задаче стабилизации 249
§ 8.4. Условия существования терминального робастного управления 253
§ 8.5. Робастное управление билинейным объектом 257

Библиографический список 266
Дополнительная литература 270
Описание курса и программа 277

Введение

Непрерывно расширяющаяся сфера применения систем автоматического управления есть результат, отражающий достижения в области науки и бурного развития различных технических средств. Практика и появляющиеся возможности технической реализации непрерывно «генерируют» новые или/и модифицируют старые постановки задач анализа и синтеза систем управления. Требования же к системам, качеству их функционирования, надежности, способности работать в условиях неполной априорной и текущей информации постоянно растут. При этом главной идеей, определяющей успех разработки системы управления, была и остается идея оптимальности.

Основным методом синтеза оптимальных систем является метод аналитического конструирования. Термин «аналитическое конструирование», подразумевающий синтез оптимальных систем управления, основанный на минимизации функционала качества, был введен советским ученым Александром Михайловичем Летовым (1911 – 1974). Метод А.М. Летова разрабатывался вначале на основе применения классического вариационного исчисления. Однако в настоящее время термином «аналитическое конструирование» можно объединить все методы синтеза систем как детерминированных, так и стохастических с полной информацией о параметрах, состоянии и возмущениях, т.е. все методы, позволяющие применять аналитические методы для исследования разнообразных задач оптимального управления и оценивания. Этот метод, основы которого изложены в [1, 2, 3], разработанные как для детерминированных, так и для стохастических систем, позволяют на стадии проектирования синтезировать условия (параметры и управления), при которых система будет выполнять поставленную задачу наилучшим образом с позиции заданного функционала качества, другими словами, позволяют синтезировать оптимальную систему.

В большинстве методов аналитического конструирования оптимальных систем, разработанных до сих пор, рассматриваются задачи во временной области с использованием понятия состояния и теории матриц. В общих чертах основной подход к проблеме выглядит следующим образом:

1) определить динамические характеристики объекта в форме дифференциальных уравнений или уравнений в конечных разностях;

2) определить множества допустимых траекторий системы и управлений (ограничения на координаты состояния, управляющие воздействия, задаваемые в виде равенств или неравенств);

3) задать цели управления;

4) задать функцию потерь или функционал качества.

Задачей оптимального управления *объектом с полной информацией по отношению к множеству целей, функционалу качества, множеству допустимых управлений, множеству состояний и начальному состоянию объекта в момент начала управления является отыскание управления, принадлежащего допустимому множеству управлений, минимизирующее заданный функционал качества.*

Существование оптимального управления не является необходимым: в множестве допустимых управлений может вообще не оказаться управлений, переводящих объект из начального состояния в заданное множество целей.

Синтез оптимальной системы управления осуществляется с использованием необходимых и достаточных условий минимума функционала качества.

Таким образом, применение аналитических методов конструирования требует знания всей информации об объекте, внешней среде и процессов, протекающих внутри системы, т.е. применение аналитических методов конструирования возможно в условиях полной информации.

Главное преимущество аналитических методов заключается в том, что если решение получено, то решен целый класс задач, а не одна специфическая. Именно это свойство придает аналитическим методам большое теоретическое значение.

Сложность большого количества современных систем управления зачастую не позволяет получить заранее полное описание процессов, протекающих внутри системы, и ее взаимодействия со средой. Достаточно часто математическая модель системы управления учитывает лишь допустимые области изменения параметров управляемой системы и характеристик ее отдельных элементов без конкретизации самих этих параметров и характеристик. Указанные области могут определяться, например, интервальными ограничениями, соответствующими заданным техническим допускам на систему.

Применение аналитических методов для нестационарных систем управления с неполной информацией о параметрах, входных воздействиях, помехах либо сопряжено с большими вычислительными трудностями, либо не представляется возможным (как в случае синтеза оптимальной системы). Поэтому правомерен подход к конструированию таких систем, основанный на использовании дополнительных цепей, на которые возлагаются задачи оптимизации системы в смысле выбранного критерия качества в процессе работы системы и по мере накопления и обработки необходимой для этих целей информации.

Метод, основанный на указанном подходе, можно объединить общим названием – алгоритмическое конструирование нестационарных систем управления [4]. Термин «алгоритмическое конструирование» был введен советским ученым Борисом Николаевичем Петровым (1913 – 1980) [12].

Задачей управления системой с оптимизацией *(в случае неполной информации о параметрах объекта и его взаимодействия со средой) по отношению к множеству целей, функционалу качества, множеству допустимых управлений, множеству состояний и начальному состоянию объекта в момент начала управления является отыскание координатно-параметрического управления, принадлежащего допустимым множествам управляющих координатных и параметрических воздействий, минимизирующих заданный функционал качества по мере накопления и обработки необходимой и соответствующей информации.*

Существование координатно-параметрического управления, оптимизирующего систему с неполной информацией, не является необходимым: а) начальные условия объекта, начальная и/или текущая неопределенность, длительность интервала управления системой могут оказаться такими, что процесс оптимизации может быть не закончен, т.е. перестраиваемые параметры за время управления системой могут не достичь значений, при которых функционал качества достигает минимального значения; б) во множествах допустимых управляющих координатных и/или параметрических воздействий может вообще не оказаться управлений, переводящих объект из начального состояния в заданное множество целей.

Таким образом, если с помощью методов аналитического конструирования можно на стадии проектирования создавать оптимальную систему, то с помощью методов алгоритмического конструирования можно создавать систему, снабженную дополнительными цепями, с помощью которых система в процессе функционирования будет оптимизировать свою работу.

Отметим, что применять методы алгоритмического конструирования, основанные на возможности параметрической оптимизации нестационарной системы, в ряде случаев, с позиции технической реализации, не является рациональным или не представляется возможным.

В связи с этим возникает задача построения управления не для одной конкретной, точно заданной системы, а целого семейства систем, параметры и характеристики элементов которых принадлежат заранее известным множествам. В современной литературе по теории управления соответствующая проблема получила название задачи робастного управления. Существует несколько определений робастного управления, в которых так или иначе отражается существо постановки задачи управления нестационарным объектом. Дадим определение робастного управления, как это будет пониматься в данной книге.

З***адачей робастного управления*** *по отношению к множеству целей, функционалу качества, множеству допустимых управлений, множеству состояний и начальному состоянию объекта в момент начала управления и множеству возможных значений параметров и характеристик элементов объекта является отыскание управления, принадлежащего допустимому множеству управляющих воздействий, минимизирующго заданный функционал и обеспечивающего перевод системы из начального состояния в заданное множество целей при любых значениях параметров и характеристик элементов объекта, принадлежащих множеству возможных значений.*

По существу задача робастного управления может быть отнесена к задачам аналитического конструирования, так как для ее решения используется известная информация о допустимых областях изменения параметров управляемой системы и характеристик ее отдельных элементов без конкретизации самих этих параметров и характеристик.

Существование робастного управления не является необходимым (из самого его определения).

Отметим, что теория робастного управления только еще формируется и основные результаты получены для анализа робастной устойчивости и робастной стабилизации линейных объектов. При анализе робастной устойчивости исследуется не одна заданная линейная система, а устойчивость целого семейства систем, соответствующих исходной (номинальной) системе при наличии неопределенности. Задачи управления, как правило, сводятся к задачам стабилизации или оптимального управления при не заданном времени окончания переходного процесса. Этим и объясняется применение для решения таких задач классических методов, которые основаны на использовании теории матриц и передаточных функций (комплексных коэффициентов усиления). Использование этих методов для синтеза управляющих воздействий для нестационарных систем при заданном интервале управления невозможно.

Часть I. Случайные процессы в системах управления

Глава 1. Основные понятия и определения

§ 1.1. Математические модели динамических неопределенных объектов

Неопределенность, как правило, задается в виде некоторого множества возможных значений параметров объекта. Такое задание параметрической неопределенности приводит к различным видам неопределенности характеристических полиномов: его коэффициенты могут принадлежать заданным интервалам либо функциям интервалов. Существует четыре основных вида неопределенности полиномов:

- интервальная неопределенность;
- аффинная неопределенность;
- полилинейная неопределенность;
- полиномиальная неопределенность.

Рассмотрим два класса управляемых в сделанном выше смысле неопределенных непрерывных систем: нелинейные ***NS***-системы и линейные $\boldsymbol{S}^{\alpha}$-системы [18].

***NS*-системы**

Пусть нестационарный наблюдаемый и управляемый динамический объект описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x,u,\alpha(t)),\ \ x \in R^n,\ t \in [t_0,T]. \tag{1.1}$$

Здесь $\alpha(t) = \alpha(t_0,T) \in A$ – возможная траектория изменения параметров объекта (1.1). Пространство $A \in R^k$ имеет действительную размерность. Пусть D – область (t,x)-пространства. Обозначим через D_α область (t,x,α) - пространства:

$D_\alpha : (t,x) \in D,\ \alpha \in A$, и пусть функция $f(x,u,\alpha(t)) \in C$ на D_α удовлетворяет по x условиям Липшица, т.е. $f \in (C, Lip)$ в D_α или, другими словами, существует постоянная $L > 0$ такая, что выполняются следующие условия:

$$\left|f(x(t),u(t),\alpha(t)) - f(z(t),v(t),\alpha(t))\right| \le L(\left|x(t)-z(t)\right| + \left|u(t)-v(t)\right|),$$
$$\left|f_x(x(t),u(t),\alpha(t)) - f_z(z(t),u(t),\alpha(t))\right| \le L(\left|x(t)-z(t)\right| + \left|u(t)-v(t)\right|).$$

Здесь $f_x(x(t),u(t),\alpha(t))$ и $f_z(z(t),v(t),\alpha(t))$ – производные функций $f(x(t),u(t),t)$ и $f(y(t),v(t),\alpha(t))$ по $x(t)$ и $z(t)$ соответственно.

При этих условиях справедливы теоремы о локальном существовании, единственности и непрерывной зависимости на конечном интервале решения $x(x_0,t_0,t)$ уравнений вида (1.1) от начальных условий $x_0 \in R^n$ и $t_0 \in [t_0, T]$ для каждой траектории $\alpha(t_0,T)$ из A [34].

Так как $\alpha(t) = \alpha(t_0,T) \in A$, то все решения дифференциального уравнения (1.1) принадлежат некоторому дифференциальному включению

$$\frac{d}{dt}x(t) \subset f(x,u,\alpha(t)),\ x(t_0) = x_0. \tag{1.2}$$

Допустимое множество параметрической неопределенности A может иметь более сложную структуру, например – зависеть от состояния системы, и тогда $\alpha(t,x(t)) \in A$, $t \in [t_0,T]$.

Предполагается, что при всех возможных траекториях изменения параметров объекта (1.1) $\alpha(t_0,T) \in A$ сохраняется управляемость объекта.

Предположим, что имеется траектория изменения параметров объекта $\alpha^*(t_0,T) \in A$, при которых выполнение задачи оптимального управления представляются наиболее сложными. Можно сформулировать условия, которым отвечают значения этих параметров. Если: функция f измерима на множестве D_α при любых фиксированных α и x; функция f непрерывна по x при любых фиксированных t и α; при фиксированном t функция f непрерывна по совокупности переменных (x,α), то существует функция $m(t)$, интегрируемая по Лебегу на интервале $[t_0, T]$, такая, что если $\left| f(x,u,\alpha^*(t)) \right| = m(t)$, то $\left| f(x,u,\alpha(t)) \right| \le m(t)$, $\alpha(t) \in A$, $t \in [t_0, T]$.

Объект из дифференциального включения (1.2) при $\alpha^*(t_0, T) \in A$ принимает вполне определенное описание

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x,u,\alpha^*(t)), \ \alpha^*(t) = \alpha^*(t_0, T) \in A. \tag{1.3}$$

Будем искать управление $u(t) \in U$ как функцию состояния объекта (1.3):

$$u(t) = Kx(t). \tag{1.4}$$

Тогда правая часть уравнения (1.3) с управлением (1.4) будет иметь вид $f(x,\mathrm{u},\alpha^*(t)) = f^*(x,\alpha^*(t))$.

Предположим:

1) $f_i^*(x,\alpha^*(t))$, $i = 1,...,n$ – элементы вектора $f^*(x,\alpha^*(t))$ непрерывны относительно $x(t)$ и t;

2) $\dfrac{\partial f_i^*(x,\alpha^*(t))}{\partial x_k(t)}, \dfrac{\partial f_i^*(x,\alpha^*(t))}{\partial t}$ непрерывны по $x(t)$ и t для $i, k = 1,...,n$.

Эти предположения [34, 37] позволяют представить исходное уравнение объекта в окрестности регулярной точки x^* статической характеристики в виде

$$\frac{d}{dt}x(t) = \left[A + \alpha^*\right]x(t) + \left[B + \beta^*\right]Kx(t) + \Im(t,x), \tag{1.5}$$

где $\left[A + \alpha^*\right]$ и $\left[B + \beta^*\right]$ - постоянные матрицы, а вектор-функция $\Im(t,x) \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$ удовлетворяет условию $\Im_i(t,0) = 0$ и

$$\left| \Im_i(t,x) - \Im_i(t,y) \right| \le g(t)\sum_{i=1}^{n} \left| x_i(t) - y_i(t) \right|$$

или более общему:

$$\left| \Im_i(t,x) \right| \le g(t)\sum_{i=1}^{n} \left| x_i(t) \right|. \tag{1.6}$$

Если $g(t)$ – непрерывная, ограниченная для $t > t_0$ функция, то систему (1.5) называют *сравнимой с линейной*. Всякое решение подобной системы определено для всех значений $t \ge t_0$.

Если $g(t)$ удовлетворяет более сильному требованию $\int_0^\infty g(t)dt < \infty$, то систему называют *почти линейной*.

Если ввести положительно определенную матрицу $P = pI$ такую, что $\Im^T(t,x)g(t) \le p,\ \ p > 0$, то условие (1.6) можно переписать в виде

$$\Im^T(t,x)\{\Im(t,x) - Px(t)\} < 0 \text{ при } x(t) \ne 0. \tag{1.6a}$$

Пусть $\mathcal{T} = \left[A + \alpha^*\right] + K\left[B + \beta^*\right]$. Тогда решение уравнения (1.5) записывается в виде

$$x(t) = \left[\exp(\mathcal{T}t)\right]\left\{x^*(0) + \int_0^t \left[\exp(-\mathcal{T}\tau)\ \right]\Im(x(\tau))\,d\tau\right\}.$$

Отметим, что матрицы при $x(t)$ в (1.5) не зависят от времени. Тогда можно построить каноническую форму этой матрицы. Предположим, что собственные значения матрицы $\mathcal{T}$ действительны и различны. В этом случае

$$\Lambda = P\mathcal{T}P^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ – собственные значения матрицы $\mathcal{T}$, а Λ – матрица собственных значений. Здесь P – невырожденная матрица.

S^z-системы

Достаточно большое количество объектов управления можно описать с помощью систем линейных дифференциальных уравнений с неполной информацией о параметрах и векторе состояния.

Пусть управляемый и наблюдаемый линейный нестационарный динамический объект описывается системой линейных неоднородных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = [A+\alpha(t)]x(t) + [B+\beta(t)]\,u(t) + [D+d(t)]\,z(t), \\ &x(t_0) = x_0, \quad x \in R^n, u \in R^r, r \le n, \; z \in R^{qr}, \end{aligned} \tag{1.7}$$

где $x \in R^n, u \in R^r, r \le n$, $z(t)$ – вектор внешних координатных возмущений.

Начальное условие принадлежит заранее известному подмножеству, т.е. $x(t_0) \in X_0$.

Матрицы $\alpha(t), \beta(t)$ и $d(t)$ содержат параметры, подверженные неконтролируемым возмущениям, причем

$$\alpha(t), \beta(t), d(t) \in \Omega \tag{1.8}$$

– неизвестные вещественные матричные функции на $t \in [t_0, T]$. Для определенности размерности матриц $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и $d(t)$ – $n \times n$, $n \times r$ и $n \times q$ соответственно.

Предполагается, что возмущения $\alpha(t), \beta(t), d(t) \in \Omega$ таковы, что пара $([A+\alpha(t)],[B+\beta(t)])$ сохраняет управляемость объекта (1.6) при $\forall t \in [t_0, T]$.

Допустимое множество неопределенности Ω может иметь более сложную структуру, например – зависеть от состояния системы, и тогда $\alpha(t, x(t)), \beta(t, x(t)), d(t, x(t)) \in \Omega$.

Относительно нестационарных матриц

$A(t) = [A+\alpha(t)] \in R^{n \times n}$, $B(t) = [B+\beta(t)] \in R^{n \times m}$, $D(t) = [D+d(t)] \in R^{nxq}$

предполагается, что они измеримы по Лебегу на всем конечном интервале управления объектом (1.7) во множестве R и почти всюду на R удовлетворяют включению

$$A(t) \in co\{A_1, ..., A_v\},\; B(t) \in co\{B_1, ..., B_k\},\; D(t) \in co\{D_1, ..., D_s\}, \tag{1.9}$$

где $A_i \in R^{nxn}, i = 1,...,v,\; B_j \in R^{nxm}, j = 1,...,k,\; D_j \in R^{nxq}$ – заданные матрицы, а символ "co" обозначает выпуклую оболочку.

Выпуклые многогранники в (1.9) задают структуру параметрической неопределенности в описании системы (1.7). Ее частным случаем является интервальная неопределенность

$$\begin{aligned} &\underline{A} \le A(t) \le \overline{A} \Leftrightarrow \underline{\alpha}_{ij} \le \alpha_{ij}(t) \le \overline{\alpha}_{ij}; \\ &\underline{B} \le B(t) \le \overline{B} \Leftrightarrow \underline{b}_{ik} \le b_{ik}(t) \le \overline{b}_{ik}; \\ &\underline{D} \le D(t) \le \overline{D} \Leftrightarrow \underline{d}_{il} \le d_{il}(t) \le \overline{d}_{il}; \\ &i,\ j = 1,\dots,n,\ k = 1,\dots,r,\ l = 1,\dots,q,\ t \in [t_0, T], \end{aligned} \tag{1.10}$$

где $\underline{A}, \overline{A}$, $\underline{B}, \overline{B}$ и $\underline{D}, \overline{D}$ – известные постоянные матрицы надлежащих размеров, а неравенства в (1.10) носят поэлементный характер.

Неопределенность вносится и неизвестным координатным возмущением $z(t)$, для которого полагается известной мажоранта

$z^M(t) = (z_1^M(t),\dots,z_q^M(t)),\ t \in [t_0, T]$,

т.е. для всех $t \in [t_0, T]$ класс координатных возмущений Z определен неравенством

$$Z \equiv \{z(t): |z(t) \le z^M(t)|\}. \tag{1.11}$$

Для таких объектов дополнительной задачей управления есть обеспечение инвариантности каких-либо координат объекта к соответствующим возмущениям.

Предположим, что имеется траектория изменения параметров объекта (1.7) $(\alpha^*(t_0,T), \beta^*(t_0,T)) \in \Omega$, при которых выполнение задачи оптимального управления представляются наиболее сложными.

Управление для системы (1.7) при этих значениях параметров будем находить в виде (1.4). Тогда система «объект-регулятор» будет иметь вид

$$\frac{d}{dt}x(t) = [A + \alpha^* + [B + \beta^*]K]x(t) + [D + d(t)]\, z(t)\ , \tag{1.12}$$

или

$$\frac{d}{dt}x(t) = \mathcal{L}\, x(t) + [D + d(t)]\, z(t)\,,$$

где матрица $\mathcal{L} = A + \alpha^* + [B + \beta^*]K$.

Решение уравнения (1.12) имеет вид

$$x(t) = [\exp(\mathcal{L}t)]\{x^*(0) + \int_0^t [\exp(-\mathcal{L}\tau)][D + d(\tau)]\, z(\tau)\, d\tau\}.$$

Частным случаем $\boldsymbol{S}^z$-системы являются $\boldsymbol{S}$-системы, для них $D(t)z(t) \equiv 0, \forall t \in [t_0, T]$.

Для описания линейных систем пользуются передаточными функциями, элементы которых могут зависеть от параметров, т.е. передаточная функция (пусть, для простоты, в одномерном случае) приобретает вид

$$H(s,q) = \frac{A(s,q)}{B(s,q)}, \ q \in Q,$$

где $A(s,q)$ и $B(s,q)$ – неопределенные полиномы, коэффициенты $a_i(s,q)$ и $b_i(s,q)$ которых зависят от $q \in Q$. В этом случае говорят о неопределенном объекте $H(s,q)$. Передаточную функцию $H(s,q)$ можно представить в виде $H(s) = H_0(s) + \Delta H(s)$, где $\Delta H(s)$ – частотная неопределенность принадлежит тому или иному классу. Например, $|\Delta H(j\omega)| \le |W(j\omega)|$ для всех ω при заданной функции $W(s)$, $W^{-1}(s) \in RH_\infty$. Иными словами, $\|W^{-1}(s)\Delta H(s)\|_\infty \le 1$. Кроме того, предполагается, что число неустойчивых полюсов $H_0(s) + \Delta H(s)$ одинаково для всех допустимых $\Delta H(s)$.

Для матричной передаточной функции может быть задана неопределенность в виде $H(s) = H_0(s) + W_1(s)\Delta(s)W_2(s)$, где $W_1(s),\ W_2(s) \in RH_\infty$ – заданные функции, $\Delta(s) \in RH_\infty$, $\|\Delta(s)\|_\infty \le 1$. Такое задание неопределенности называют аддитивной моделью. Наряду с ней может рассматриваться мультипликативная модель задания неопределенности $H(s) = H_0(s) + [I + W_1(s)\Delta(s)W_2(s)]$.

N-системы

Синтез управлений в виде (1.4) требует знания всего пространства состояний объекта. В большинстве задач из всего пространства состояний объекта доступно измерениям ограниченное количество координат. Таким образом, учитывая (1.3) и (1.7), исходные системы будут иметь вид

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = f(x,u,\alpha^*(t)),\ \alpha^*(t) = \alpha^*(t_0,T) \in A, \\ &y(t) = C(t,x), \end{aligned} \tag{1.13}$$

или

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = \left[A + \alpha(t)\right]x(t) + \left[B + \beta(t)\right]u(t) + \left[D + d(t)\right]z(t), \\ &y(t) = C(t,x). \end{aligned} \tag{1.14}$$

Здесь $x \in R^n$, $y \in R^m$, $m \le n$.

При такой постановке задачи конструирования системы управления обычно решается дополнительная задача синтеза наблюдателя, на который возлагается задача построения по измеряемым координатам состояния объекта оценки этого состояния, т.е.

$\hat{x}(t) = G(t)y(t)$.

Здесь оператор $G(t)$ преобразует R^m в R^n.

Построение оценки состояния возможно, если система «объект-измеритель» обладает свойством наблюдаемости [8].

Системы (1.13) и (1.14) описываются детерминированными уравнениями. В случае действия помех в объекте и на входе измерителя проблема построения оценки решается практически такими же методами, что и в детерминированном случае.

Следует отметить, что теория оценивания переменных состояния динамических систем не ограничивается рассмотрением объектов с полной информацией о параметрах объекта (фильтр Калмана, наблюдатель Луенбергера). Параметрическая неопределенность и нестационарность приводит к необходимости строить адаптивные, робастные, робастно-адаптивные наблюдатели.

§ 1.2. Общая конструкция алгоритмов параметрической оптимизации

Применение аналитических методов конструирования для нестационарных систем с неполной информацией о параметрах и возмущениях, действующих на систему, не дает реализуемых решений. Возникает необходимость развития таких методов, которые не требовали бы детального знания всего пространства состояния системы управления и ее взаимодействия с внешней средой, а базировались только на анализе ее входных процессов и внешнего поведения. При этом система должна быть организована таким образом, чтобы, используя текущую информацию, по мере уменьшения априорной неопределенности, улучшать функционирование системы в смысле заданного критерия качества. Другими словами, проблема заключается в построении системы, способной себя оптимизировать по мере накопления и обработки информации о выполнении поставленной задачи в изменяющейся среде.

Реализуемые решения поставленной задачи можно получить с помощью алгоритмических процедур.

Под алгоритмическим конструированием нестационарной системы с неполной информацией о параметрах, состоянии и внешней среде понимается совокупность алгоритмов, позволяющих оптимизировать систему управления в соответствии с заданным критерием качества ее работы [4].

Пусть нестационарный управляемый объект описывается векторным дифференциальным уравнением вида

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = f(x,u,w,a,t),\\ &x(t_0) = x_0; \end{aligned}\right\} \qquad (1.15)$$

здесь $x(t)\in R^n$ – вектор состояния объекта, $u(t)\in R^r$ – вектор управляющих воздействий, $w(t)\in R^k$ – вектор возмущаемых параметров, $a(t)\in R^P$ – вектор параметров, выделенных для оптимизации функционирования объекта. В общем случае $k \geq p$. С помощью параметров $a(t)$ предполагается парировать соответствующие параметрические возмущения. Предполагается, что вектор возмущенных параметров принадлежит известному множеству, т.е. $w(t) \in W$.

Измеряемый выход объекта описывается уравнением

$$y(t) = C(x, n, t), \tag{1.16}$$

где $y(t) \in R^m$, $m \leq n$; $n(t)$ – помеха.

Задан функционал

$$J = J(x, u). \tag{1.17}$$

Кроме этого, как правило, задаются множество допустимых траекторий состояния объекта и множество допустимых управляющих воздействий:

$$x(t) \in X, \quad u(t) \in U. \tag{1.18}$$

В ряде случаев кроме функционала качества задается цель управления

$$S\big(x(T), T\big) = 0 \tag{1.19}$$

Задача, определенная в виде (1.15) – (1.17), может носить как детерминированный, так и стохастический характер.

Задача об оптимальном управлении формулируется следующим образом: из всех возможных управляющих воздействий для объекта (1.15), (1.16), при которых достигается цель управления (1.19), найти такое, при котором выполняются ограничения (1.18), а функционал качества (1.17) принимает минимальное значение.

Алгоритмическое конструирование нестационарной системы управления с неполной информацией включает три этапа.

Первый этап. На этом этапе используется метод аналитического конструирования систем с полной информацией. Исходя из заданного критерия качества работы системы (1.17), учитывая ограничения (1.18) и априорную информацию о системе (1.15), (1.16), производится синтез основной структуры системы управления (синтез структурного пространства параметров). Как правило, синтез структуры производится с использованием необходимых условий минимума функционала (1.17) с объектом (1.15), (1.16) и ограничений (1.18). Достаточные условия минимума функционала либо обеспечиваются самой постановкой задачи (например, линейный объект и квадратичный функционал), либо наложением практических условий, при которых необходимые условия являются и достаточными. Пусть необходимые и достаточные условия минимума функционала (1.17) записываются в виде

$$G(x,u)=0. \qquad (1.20)$$

Так как функционал (1.17) и его необходимые и достаточные условия (1.20) при связях (1.15) и ограничениях (1.18) зависят от состояния $x(t)$, то и оптимальное управление, синтезированное с использованием (1.20), будет являться функцией состояния объекта (1.15), а не его выхода (1.16). Таким образом, использование условий (1.6) для синтеза регулятора не приводит к реализуемым решениям.

Для получения реализуемой основной структуры системы управления введем наблюдатель, на который возложим решение задачи построения оценки состояния объекта (1.15) по его измеряемому выходу (1.16). Пусть $\hat{x}(t)\in R^n$ – оценка процесса $x(t)$. Тогда

$$\varepsilon(t)=x(t)-\hat{x}(t). \qquad (1.21)$$

Подставим $x(t)$ из (1.21) в исходный функционал (1.17). Для достаточно большого количества функционалов, используемых в практике конструирования оптимальных систем, обладающих свойством сепарабельности относительно $\varepsilon(t)$ и $u(t)$, можно получить

$$J(x,u)=J_1(\varepsilon)+J_2(\hat{x},u)+J_3(\varepsilon,\hat{x}). \qquad (1.22)$$

Так, для широко используемого квадратичного критерия в стохастических задачах

$$J(x,u)=M\left[\frac{1}{2}x^T(T)Fx(T)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left\{x^T(t)Q(t)x(t)+u^T(t)R(t)u(t)\right\}dt\right] \qquad (1.23)$$

функционалы $J_1(\varepsilon)$, $J_2(\hat{x},u)$, $J_3(\varepsilon,\hat{x})$ имеют вид

$$J_1(\varepsilon)=M\left[\frac{1}{2}\varepsilon^T(T)F\varepsilon(T)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\varepsilon^T(t)Q(t)\varepsilon(t)dt\right], \qquad (1.24)$$

$$J_2(\hat{x},u)=M\left[\frac{1}{2}\hat{x}^T(T)F\hat{x}(T)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left\{\hat{x}^T(t)Q(t)\hat{x}(t)+u^T(t)R(t)u(t)\right\}dt\right], \qquad (1.25)$$

$$J_3(\hat{x},\varepsilon)=M\left[\varepsilon^T(T)F\hat{x}(T)+\int_{t_0}^{T}\varepsilon^T(t)Q(t)\hat{x}(t)dt\right]. \qquad (1.26)$$

Учитывая, что минимум функционала $J_1(\varepsilon)$ достигается при равенстве нулю функционала $J_3(\varepsilon,\hat{x})$ ($J_3(\varepsilon,\hat{x})=0$ есть не что иное, как уравнение Винера–Хопфа), задача построения основной структуры системы управления разбивается на две подзадачи:

А) построение структуры наблюдателя, на который возлагается задача оптимальной оценки $\hat{x}(t)$ процесса $x(t)$ по измерениям $y(t)$ (функционал оптимизации $J_1(\varepsilon)$);

Б) построение структуры оптимального регулятора (функционал $J_2(\hat{x},u)$).

Пусть необходимые и достаточные условия минимума функционалов $J_1(\varepsilon)$ и $J_2(\hat{x},u)$ записываются в виде

$$G_1(\varepsilon)=0,\ G_2(\hat{x},u)=0. \qquad (1.27)$$

Используя условия (1.27), можно синтезировать структуру наблюдателя и регулятора.

Таким образом, результатом аналитического конструирования является структура системы управления (структурное пространство параметров). Другими словами, в силу отсутствия полной информации о параметрах системы и ее взаимодействии со средой система управления синтезирована с точностью до параметров, т.е. определена структура системы управления, однако ее оптимальные параметры с помощью аналитических процедур отыскать невозможно.

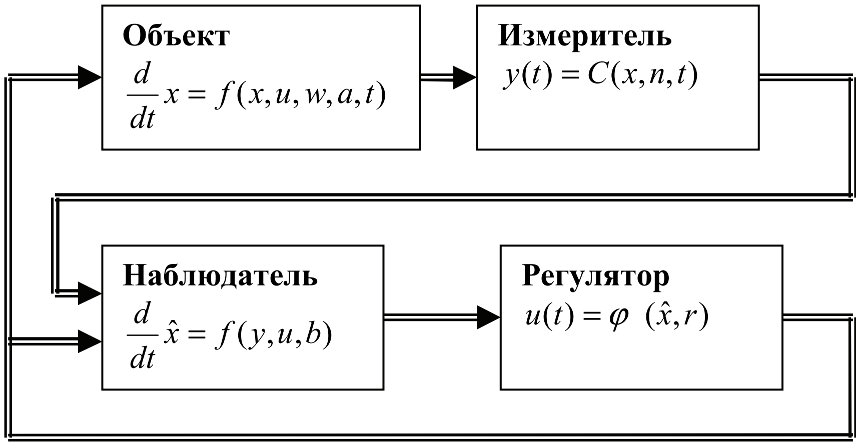

Рис. 1.1. Блок-схема основной структуры системы управления

Второй этап. Используя полученные на предыдущем этапе проектирования необходимые и достаточные условия (1.27) минимума соответствующих функционалов качества $J_1(\varepsilon)$ и $J_2(\hat{x},u)$, построим множество алгоритмов оптимизации системы в структурном пространстве с помощью выделенных для этих целей параметров (a – параметры оптимизации объекта, b – параметры оптимизации наблюдателя, r – параметры оптимизации регулятора).

Пусть

$$\vartheta^T(t) = \left(a^T(t), b^T(t), r^T(t)\right) \in \Pi .$$

При этом предполагается, что пространство Π содержит такой вектор параметров $\vartheta^0(t) \in \Pi$, при которых система управления достигает минимальных значений функционалов $J_1(\varepsilon)$ и $J_2(\hat{x},u)$ при любых параметрических возмущениях $w(t) \in W$. Другими словами, предполагается, что процесс оптимизации системы может быть эффективным.

Так как условия (1.27) являются необходимыми и достаточными условиями минимума функционалов $J_1(\varepsilon)$ и $J_2(\hat{x},u)$, то эти условия удовлетворяются только при $\vartheta(t)=\vartheta^0(t)$. Это обстоятельство положим в основу конструкции множества алгоритмов оптимизации объекта, наблюдателя и регулятора.

Так как в первое условие (1.27) входит ошибка наблюдения $\varepsilon(t)$, то оптимизация может производиться за счет перестройки параметров объекта и наблюдателя $x(t,a)$ и $\hat{x}(t,b)$, так как $G_1\left(x(t,a^0(t))-\hat{x}(t,b^0(t))\right)=0$. Второе условие (1.27) можно использовать для построения алгоритмов оптимизации регулятора, так как $G_2\left(\hat{x}(t,b^0(t)),u(t,r^0(t))\right)=0$.

Множество алгоритмов оптимизации будут иметь вид

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}a(t)=\beta_1(t)G_1(x(t,a(t))-\hat{x}(t)), \quad a(t_0)=a_0,\\
&\frac{d}{dt}b(t)=\beta_2(t)G_1((x(t)-\hat{x}(t,b(t))), \quad b(t_0)=b_0,\\
&\frac{d}{dt}r(t)=\beta_3(t)G_2(\hat{x}(t),u(t,r(t))), \quad r(t_0)=r_0.
\end{aligned} \tag{1.28}$$

Выражения (1.28) описывают семейство алгоритмов оптимизации, каждый из которых может отличаться конкретным выбором или назначением вектор-функций $\beta_1(t),\ \beta_2(t),\ \beta_3(t)$.

Третий этап. На третьем этапе алгоритмического конструирования нестационарной системы с неполной информацией следует произвести выбор таких $\beta_1(t),\ \beta_2(t),\ \beta_3(t)$, при которых будет обеспечиваться асимптотический перевод системы управления из периферийных значений функционалов качества в их минимальное состояние. Такой подход позволяет использовать для поиска указанных вектор-функций конструктивный аппарат функций Ляпунова. Назначим функции Ляпунова в виде

$$\begin{aligned}
&V_1(\varepsilon,a,b)=\mathrm{P}_1(J_1(\varepsilon)),\\
&V_2(\hat{x},u,r)=\mathrm{P}_2(J_2(\hat{x},u)),
\end{aligned} \tag{1.29}$$

где $\mathrm{P}_1\left(J_1(\varepsilon)\right)$ и $\mathrm{P}_2\left(J_2(\hat{x},u)\right)$ – положительно определенные ограниченные функции везде, кроме, как, быть может, при $\vartheta(t)=\vartheta^{\,0}(t)$. Отметим, что функции $V_1(\varepsilon,a,b)$ и $V_2(\hat{x},u,r)$ в явном виде не зависят от времени.

Тогда полные производные функций Ляпунова по времени с учетом (1.28) будут иметь вид

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}V_1(\varepsilon,a,b)=\frac{\partial P_1\left(J_1(\varepsilon)\right)}{\partial a(t)}\beta_1\,G_1(\varepsilon)+\frac{\partial P_1\left(J_1(\varepsilon)\right)}{\partial b(t)}\beta_2\,G_1(\varepsilon),\\ \frac{d}{dt}V_2(\hat{x},u,r)=\frac{\partial P_2\left(J_2(\hat{x},u)\right)}{\partial r(t)}\beta_3\,G_2(\hat{x},u).\end{gathered}\tag{1.30}$$

Как видно из полученных выражений для полных производных функций Ляпунова по времени, для обеспечения асимптотических свойств процессу параметрической оптимизации, вектор-функции $\beta_1(t),\ \beta_2(t),\ \beta_3(t)$ могут быть выбраны в виде

$$\beta_1(t)=-G_1\left(\varepsilon,a,b\right)\left\{\frac{\partial P_1\left(J_1(\varepsilon)\right)}{\partial a(t)}\right\}^T,\tag{1.31}$$

$$\beta_2(t)=-G_1\left(\varepsilon,a,b\right)\left\{\frac{\partial P_1\left(J_1(\varepsilon)\right)}{\partial b(t)}\right\}^T,\tag{1.32}$$

$$\beta_3(t)=-G_2\left(\varepsilon,a,b\right)\left\{\frac{\partial P_2\left(J_2(\hat{x},u)\right)}{\partial r(t)}\right\}^T.\tag{1.33}$$

Таким образом, алгоритмы оптимизации (1.28) с учетом (1.31) – (1.33) будут иметь вид

$$\frac{d}{dt}a(t)=-\left\{\frac{\partial P_1\left(J_1(\varepsilon)\right)}{\partial a(t)}\right\}^T G_1^2\left(\varepsilon,a,b\right),\ a(t_0)=a_0,\tag{1.34}$$

$$\frac{d}{dt}b(t)=-\left\{\frac{\partial P_1\left(J_1(\varepsilon)\right)}{\partial b(t)}\right\}^T G_1^2\left(\varepsilon,a,b\right),\ b(t_0)=b_0,\tag{1.35}$$

$$\frac{d}{dt}r(t)=-\left\{\frac{\partial P_2\left(J_2(\hat{x},u)\right)}{\partial r(t)}\right\}^T G_2^2\left(\varepsilon,a,b\right),\ r(t_0)=r_0.\tag{1.36}$$

Следует отметить, что алгоритмы (1.34) и (1.35) не реализуемы, так как для их реализации требуется знание всего вектора состояния объекта

$x(t)$. Для построения реализуемых алгоритмов параметрической оптимизации объекта и наблюдателя образуем вспомогательный функционал $J_1(\varepsilon^*)$, где

$$\varepsilon^*(t) = y(t) - C(\hat{x}) \in R^m. \qquad (1.37)$$

Если пара объект (1.15) и измеритель (1.16) наблюдаема, то можно организовать вспомогательный функционал $J_1(\varepsilon^*)$ так, что функционалы $J_1(\varepsilon)$ и $J_1(\varepsilon^*)$ будут эквивалентны, т.е. будут достигать минимума при одних и тех же значениях параметров объекта и наблюдателя, т.е.

$$J_1^0(\varepsilon) = \min_{a,b} J_1(\varepsilon(t,a,b)) = J_1(\varepsilon(t,a^0,b^0)),$$
$$J_1^0(\varepsilon^*) = \min_{a,b} J_1(\varepsilon^*(t,a,b)) = J_1(\varepsilon^*(t,a^0,b^0)).$$

Отметим, что в общем случае $J_1^0(\varepsilon) \neq J_1^0(\varepsilon^*)$.

Тогда реализуемые аналоги алгоритмов оптимизации (1.34) и (1.35) будут иметь вид

$$\frac{d}{dt}a(t) = -\left\{\frac{\partial P_1(J_1(\varepsilon^*))}{\partial a(t)}\right\}^T G_1^2(\varepsilon^*,a,b),\ a(t_0) = a_0, \qquad (1.38)$$

$$\frac{d}{dt}b(t) = -\left\{\frac{\partial P_1(J_1(\varepsilon^*))}{\partial b(t)}\right\}^T G_1^2(\varepsilon^*,a,b),\ b(t_0) = b_0. \qquad (1.39)$$

Таким образом, результатом алгоритмического конструирования являются:

1. Структура системы управления, содержащая объект, измеритель, наблюдатель и регулятор, определенная с учетом всей имеющейся на стадии проектирования информации об объекте, среде, ограничениях и функционале качества.
2. Реализуемые алгоритмы оптимизации объекта, наблюдателя и регулятора в структурном пространстве параметров.

Алгоритмы оптимизации, организованные в соответствии с изложенной методикой, обладают существенным свойством – изменение параметров объекта или регулятора происходит только в том случае, когда система неоптимальная. По выбору (назначению) параметров $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$, $\beta_3(t)$ эти алгоритмы оптимизации можно отнести к градиентным алгоритмам [32, 54].

На рис.1.2 представлена блок-схема нестационарной системы управления, реализованной в соответствии с полученными результатами.

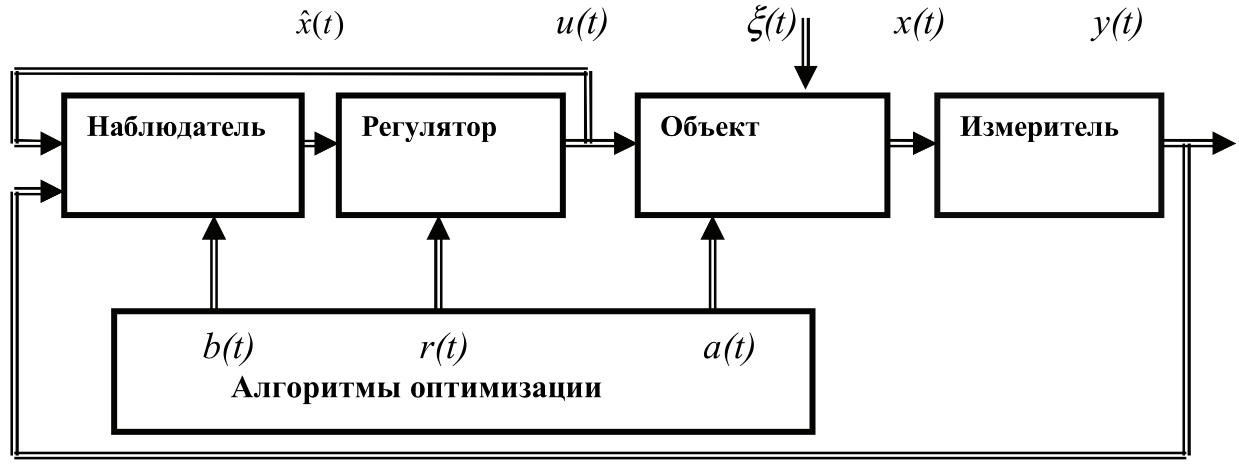

Рис. 1.2. Блок-схема нестационарной системы управления с параметрической оптимизацией

Метод алгоритмического конструирования применим и для идентификации нестационарных объектов. Идентификация динамических объектов в общем случае состоит в определении их структуры и параметров по наблюдаемым данным – входному воздействию и выходной величине [31]. Идентификация осуществляется при помощи настраиваемой модели той или иной структуры, параметры которой могут изменяться. При этом предполагается, что система «объект-измеритель» наблюдаема. Предположение о наблюдаемости является необходимым, но не достаточным условием идентифицируемости нестационарной системы, параметры которой подвергаются неконтролируемым возмущением.

Для решения задачи идентификации, как это следует из схемы (рис.1.3), необходимо:

1) очертить класс систем;
2) выбрать для этого класса систем настраиваемую модель μ;

3) выбрать критерий качества идентификации – средние потери, которые бы характеризовали различие между выходами системы и настраиваемой модели;
4) сформировать алгоритм параметрической настройки модели.

Выбор структуры модели осуществляется на основе априорных сведений о системе и помехах. В современной теории идентификации выбор структуры настраиваемой модели для заданного класса динамических объектов в значительной мере произволен. Пусть $\mathcal{M}$ – множество возможных моделей системы.

Соответствие настраиваемой модели системе, т.е. качество идентификации, оценивается критерием идентификации

$$J(\alpha) = M[F\{\varepsilon(t)\}]. \qquad (1.40)$$

Здесь

$$\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t), \qquad (1.41)$$

$F[\varepsilon(t)]$ – функция потерь, символ M – математическое ожидание.

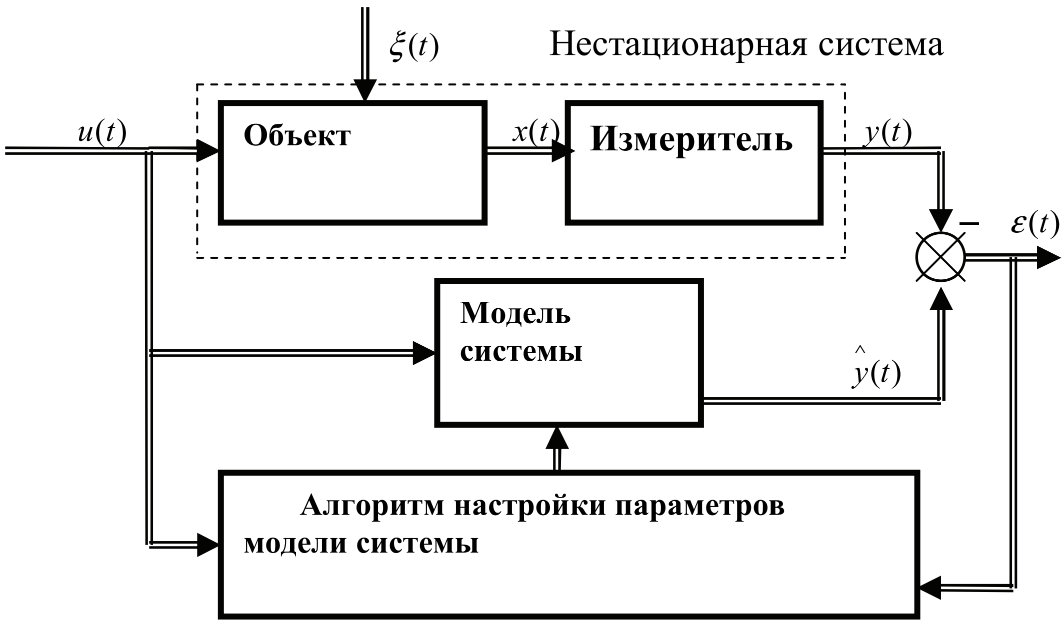

Рис. 1.3. Блок-схема идентификации нестационарной системы «объект-измеритель» методом настраиваемой модели

Критерий качества идентификации (1.40) представляет собой средние потери. Чем меньше средние потери, тем выше качество идентификации. Структура системы представлена на рис 1.3.

Под оптимальной настраиваемой моделью понимается модель $\mu(u,\alpha)\in \mathcal{M}$ такая, для которой $J(\alpha)=M[F\{\varepsilon(t)\}]$ достигается минимально возможное значение при определенных значениях ее параметров, т.е.

$$J(\alpha^0)=\min_{\mu}\min_{\alpha} M[F\{\varepsilon(t)\}].$$

Что касается алгоритмов идентификации, то, в соответствии с методом алгоритмического конструирования, в основе алгоритмов параметрической оптимизации модели объекта используются необходимые условия минимума функционала (1.40).

В книге рассматриваются два класса алгоритмов параметрической оптимизации: алгоритмы, в конструкции которых используется модифицированное уравнение Винера–Хопфа и алгоритмы, использующие условие оптимальности, формулируемое, как поведение гамильтониана на оптимальной траектории. Алгоритмы, использующие модифицированное уравнение Винера–Хопфа, используются для оптимизации системы в смысле функционала $J_1(\varepsilon)$ (1.24) и рассмотрены в гл. 4. Алгоритмы, основанные на применении гамильтониана, используются для оптимизации системы в смысле функционала $J_2(\hat{x},u)$ (1.25) (гл. 5).

§ 1.3. Связь алгоритмического конструирования с методами теории адаптации

Бурное развитие методов управления динамическими системами в условиях неполной информации повлекло за собой появление большого числа статей в научно-технических журналах, книг, в которых делаются попытки систематического изложения основ теории управления такими системами.

Для наименования систем, способных функционировать в различных условиях, накапливая опыт эффективности своих действий, приспосабливаться к этим условиям и достигать цели управления, в литературе используются различные названия: самонастраивающиеся системы, адаптивные системы, системы с самоорганизацией, системы с оптимизацией и т.п. Эти названия часто скорее указывают на метод реализации решений математического конструирования нестационарных систем управления с неполной информацией, чем на принцип конструирования.

Определение, наиболее полно описывающее системы, конструирование которых рассматривается в данной книге, сформулировано в работах [1, 4, 5, 13, 16, 24, 44] – это адаптивные системы.

«Адаптацией мы будем называть процесс изменения параметров и структуры системы, а возможно, и управляющих воздействий на основе текущей информации с целью достижения определенного, обычно оптимального, состояния системы при начальной неопределенности и изменяющихся условиях работы» [44].

Принципиальная основа метода алгоритмического конструирования, заключающаяся в назначении функционала качества, сужает класс задач построения динамических систем с неполной информацией. Действительно, значительное количество методов организации дополнительных цепей, на которые возлагаются задачи парирования и/или компенсирования параметрической неопределенности, предложенных, реализованных и успешно функционирующих на практике, в явном виде не связано с функционалами качества работы системы. К подобным методам можно отнести организацию самонастраивающихся систем, работающих на границе устойчивости [24], беспоисковых самонастраивающихся систем с контролем высокочастотной и низкочастотной составляющих спектров движения координат системы [23, 25], и многих других, построенных на основе анализа конкретных систем, выявления присущих этим системам закономерностей и использования этих закономерностей для организации дополнительных цепей.

Несмотря на общие черты, присущие беспоисковым самонастраивающимся системам, синтезированным с помощью второго метода Ляпунова [2, 3, 4, 24, 32, 37, 42, 46], и системам, организованным в соответствии с результатами алгоритмического конструирования, основная из которых – обеспечение асимптотической устойчивости движения, имеются и существенные отличия. Основное отличие заключается в том, что в системах, синтезированных методом алгоритмического конструирования, в случае отсутствия параметрических возмущений и совпадения их параметров с расчетными дополнительные цепи не функционируют. В этом случае цепи параметрической оптимизации как бы отключены и подключаются тогда и только тогда, когда на систему начинают действовать возмущения и система «выходит» из оптимального (расчетного) режима.

Стохастические нестационарные системы, алгоритмы оптимизации которых получены методом алгоритмического конструирования, могут трактоваться как самонастраивающиеся системы, организованные с использованием методов стохастической аппроксимации [27, 40] или корреляционных методов [37].

В зависимости от выбора или назначения параметров $\beta_1(t), \beta_2(t), \beta_3(t)$ алгоритмов оптимизации нестационарную систему, синтезированную с помощью метода алгоритмического конструирования, можно отнести к самонастраивающимся системам со вспомогательным оператором или к системам с использованием функций чувствительности.

В теории адаптивных систем определенное место занимает метод рекуррентных целевых неравенств. Заданные неравенства определяют цель настройки параметров системы. На решениях системы вида (1.1) задается целевая линейно зависящая от параметров функция $S(x,u,a)$, для которой управляющим воздействием должно выполняться неравенство

$$S(x,u,a) \le C,$$

где C – заданное положительное число. Метод решения рекуррентных целевых неравенств состоит в исследовании различных рекуррентных неравенств, в нахождении конечно-сходящихся алгоритмов их решения, когда при $t \ge t_0$ за счет перестройки параметров системы выполняется заданное целевое неравенство. Наибольшую известность среди адаптивных конечно-сходящихся алгоритмов решения счетной системы рекуррентных неравенств получили алгоритмы «полозкового» типа, поскольку рекуррентные целевые неравенства задают в параметрическом пространстве отдельные полосы между соответствующими гиперплоскостями.

Системы, синтезированные методом алгоритмического конструирования, близки по своей организации к системам с эталонной моделью, хотя сама модель может не присутствовать в виде отдельного реального динамического звена. При этом можно выделить три случая:

1. Если имеется возможность парировать параметрические возмущения объекта с помощью выделенных для этой цели параметров самого объекта, то наблюдатель (рис. 1.4) играет роль эталонной модели объекта. Такой принцип организации управления объектом называют координатно-параметрическим.
2. Если в объекте не выделены параметры, с помощью которых можно было бы парировать параметрические возмущения, то в этом случае навязать желаемое поведение управляемому объекту можно с помощью параметрической настройки регулятора и соответствующей параметрической настройки наблюдателя. В этом случае наблюдатель выполняет роль «обучаемой» модели. Этот

принцип организации управления нестационарным объектом называют [17, 53, 59] адаптивным координатным управлением с подстраиваемой (обучаемой) моделью (рис. 1.5).

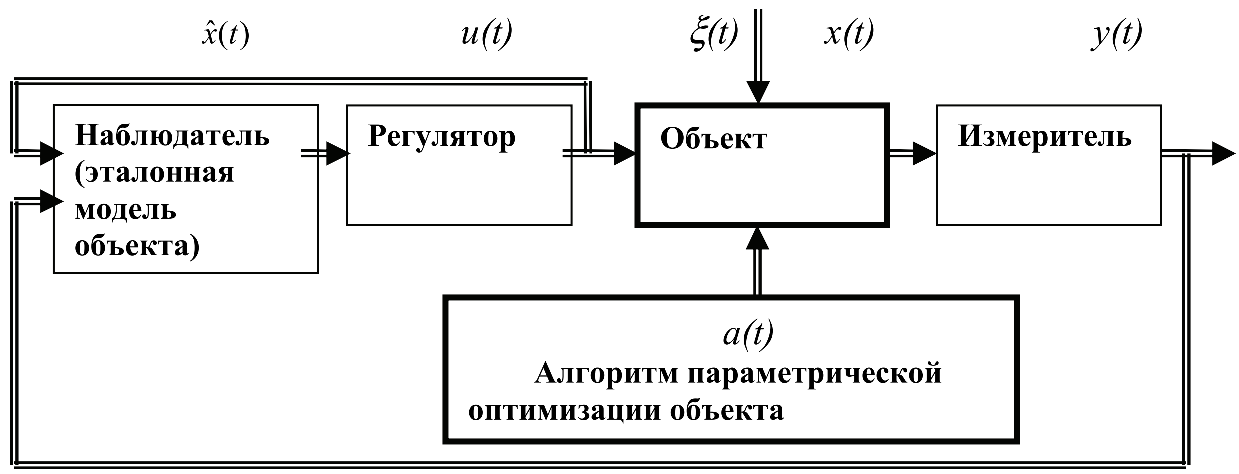

Рис. 1.4. Блок-схема нестационарной системы координатно-параметрического управления с наблюдателем, выполняющим роль эталонной модели объекта ($\xi(t)$ – параметрические возмущения)

3. Если в объекте выделены параметры, с помощью которых можно парировать лишь часть параметрических возмущений, то в этом случае навязать желаемое поведение управляемому объекту можно с помощью подстройки выделенных параметров объекта к соответствующим значениям параметров модели, а соответствующих (оставшихся) параметров модели – к изменяющимся параметром объекта, возмущения которых не удается парировать в самом объекте. При этом необходимо производить и перестройку параметров регулятора. Этот принцип организации управления нестационарным объектом называют координатно-параметрическим с подстраиваемой моделью (рис. 1.2) [2, 5].

Нетрудно видеть, что методы 2 и 3 организации управления нестационарным объектом содержат задачу «обучения» наблюдателя или задачу идентификации объекта методом настраиваемой модели. Задача идентификации и оценивания неизвестных параметров является одной из наиболее важных задач теории и практики управления [4, 13, 19, 24, 27, 35, 31, 44, 45].

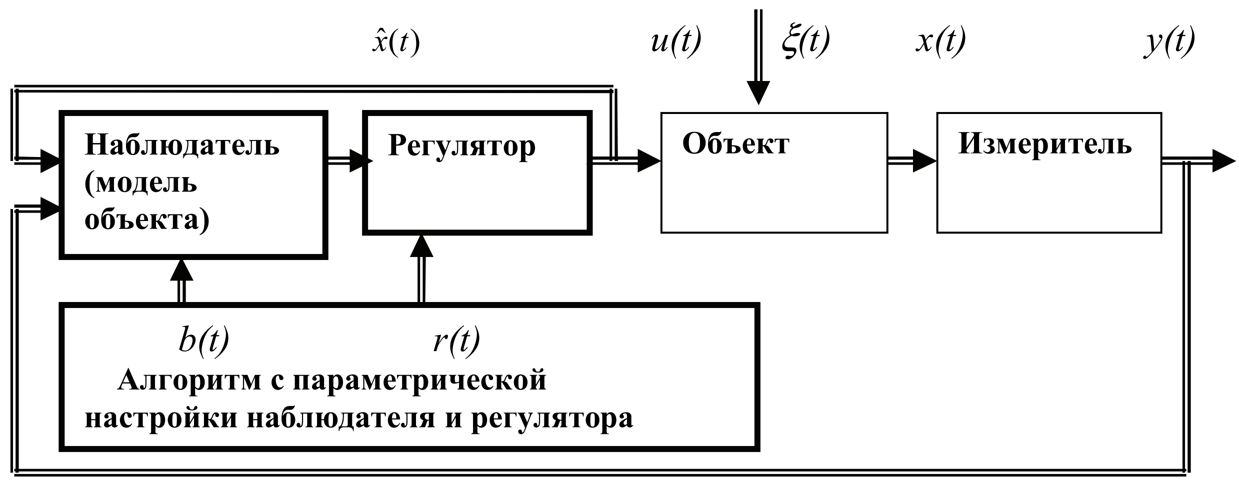

Рис. 1.5. Блок-схема нестационарной системы координатного управления с наблюдателем, выполняющим роль модели нестационарного объекта, и параметрически настраиваемым регулятором

Все рассмотренные выше методы организации цепей самонастройки относятся к беспоисковым методам. Организовать движение системы к оптимальному режиму можно и с помощью специальных поисковых процедур [43]. Однако в отличие от известных поисковых методов оптимизации нестационарную систему можно организовать с помощью предлагаемого алгоритма

$$\frac{d}{dt}\vartheta(t) = \tilde{\beta}\,(t)G(x,u),\ \vartheta\,(t_0) = \vartheta_0,$$

где $\tilde{\beta}\,(t)$ отыскивается с помощью введения специальных поисковых процедур, так что система, находясь в оптимальном режиме (когда выполняется условие $G(x,u)=0$), не будет испытывать поисковых воздействий.

§ 1.4. Постановка задачи о робастном управлении

В настоящее время основу теории робастного управления составляют методы анализа робастной устойчивости и робастной стабилизации линейных объектов. При этом исследуется не одна заданная линейная система, а устойчивость целого семейства систем, соответствующих исходной (номинальной) системе при наличии неопределенности.

Первые решения проблемы интервальной устойчивости получены А.А. Марковым и П.Л. Чебышевым (1894г.).

Итальянский ученый С. Фаэдо сформулировал достаточные условия интервальной устойчивости, выраженные через граничные значения параметров полиномов (1953г.). Однако наибольший интерес к данным задачам появился после того, как В.Л. Харитонов дал критерий устойчивости семейства полиномов, которому в пространстве параметров отвечает параллелепипед (1978г.). Дальнейшие исследования в этом направлении были связаны с желанием уменьшить число проверяемых полиномов. Появилось большое количество работ, в которых анализ интервальных систем рассматривался на основе корневого годографа [33].

Задачи управления неопределенными объектами, как правило, сводятся к задачам стабилизации или оптимального управления при не заданном времени окончания переходного процесса. Это позволяет при анализе устойчивости и синтезе стабилизирующих управлений использовать частотные методы, разработанные в теории автоматического регулирования [33]. Использование этих методов для синтеза управляющих воздействий для нестационарных систем при заданном интервале управления невозможно.

Дадим общую постановку задачи о робастном управлении неопределенным детерминированным объектом. Пусть нестационарный наблюдаемый и управляемый динамический объект описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x,u,\alpha(t)),\ x \in R^n,\ \alpha(t) \in A,\ t \in [t_0,T]. \qquad (1.68)$$

$$y(t) = C(x(t)),\ y \in R^m,\ m \le n. \qquad (1.69)$$

Начальное состояние $x(t_0)$ объекта (1.68) принадлежит ограниченному множеству X_0, т.е.

$$x(t_0) \in X_0. \qquad (1.70)$$

Заданы также условия на правом конце:

$$g(x(T)) = 0, \qquad (1.71)$$

где $g(x(T))$ – скалярная функция.

Предполагается, что управление $u(t) \in U$ почти всюду, $U_{\text{М}}$ – замкнутое ограниченное множество в евклидовом пространстве R^r.

Задан функционал, оценивающий эффективность управления объектом (1.68):

$$J = J(x,u). \qquad (1.72)$$

Предположим, что при известных траекториях изменения параметров для каждого управляемого объекта из множества (1.68) можно синтезировать $u^0(t) \in U$, при котором выполняется условие (1.71) и функционал (1.72) принимает минимальное значение. Однако оптимальное управление, синтезированное для какой либо известной траектории параметров объекта, может оказаться далеко не оптимальным при другой траектории параметров. Более того, управление может и не обеспечить даже устойчивости системы «объект-регулятор» при траекториях параметров, отличных от той, которая использовалась при синтезе оптимального управления.

При отсутствии информации о значениях, которые принимают параметры объекта $\alpha(t_0,T)\in A$ в интервале управления, будем считать, что задача успешно решена, если удастся найти управление $u^*(t)\in U$, переводящее систему из $x(t_0)\in X_0$ в $x^*(T)$, при котором цель управления (1.71) будет выполняться с заданной точностью, т.е.

$$\left|g(x^*(T))\right|\le d\,. \qquad (1.73)$$

Здесь d – фиксированная неотрицательная постоянная, $x^*(T)$ – состояние, принимаемое объектом в момент окончания периода управления при конкретных значениях параметров $\alpha(t_0,T)\in A$ и соответствующем управлении $u^*(t_0,T)$.

Определение 1.4.1

Будем называть систему «объект-регулятор» ***робастно управляемой*** с заданным показателем робастности [4], если:

найдется такое управление $u^*(t_0,T)\in U$ для объекта

$$\frac{d}{dt}x(t)=f(x,u,\alpha(t)),\; x\in R^n,\, t\in[t_0,T],$$

которое при любых возможных траекториях параметров $\alpha(t_0,T)$, принадлежащих заданному множеству траекторий A, т.е. $\alpha(t_0,T)\in A$, переводит объект из начального состояния $x(t_0)$, принадлежащего заданному множеству начальных состояний X_0, т.е. $x(t_0)\in X_0$, в состояние $x^*(T)$, при котором цель управления $g(x^*(T))$ достигается с заданной точностью d, т.е. $\left|g(x^*(T))\right|\le d$.

Для некоторых задач d-робастного управления может быть добавлено еще одно условие, а именно: функционал, оценивающий качество управления, должен принимает значение, не превышающее заданного, т.е. $J(x^*,u^*)\le J^{\max}(x,u)$, $u(t_0,T)\in U$.

Управление $u^*(t_0,T)\in U$ будем называть робастным.

Учитывая специфику задачи стабилизации нестационарного объекта, уместно ввести еще одно определение.

Определение 1.4.2

Будем называть систему ***робастно стабилизируемой***, если для нестационарного объекта вида (1.68) найдется регулятор с постоянными параметрами, который обеспечит асимптотическое движение системы "объект-регулятор" при любых возможных траекториях изменения параметров объекта $\alpha(t) = \alpha(t_0, T) \in A$ из любого $x_0 \in X_0$ к $x(t) = 0$ при $t \to \infty$.

Частным видом условия (1.73) может быть условие $\left| \pi x^*(T) \right| \le d_1$ или $\left\| \pi x^*(T) \right\| \le d_2$, где π – оператор проектирования из R^n на R^k.

Здесь и далее: $|z| = \sum_{i=1}^{n} |z_i|$ – норма (или величина) и $\|z\| = \left(\sum_{i=1}^{n} z_i^2 \right)^{1/2}$ – эвклидова (длина) норма вектора $z \in R^n$. В ряде случаев норма $|z|$ более удобна, чем длина $\|z\|$.

Для решения задач синтеза d-робастного управления будем использовать принцип минимакса. Применение минимаксного подхода позволяет перейти от исследования систем, описываемых дифференциальным включением вида (1.2), к системе, являющейся мажорантой этих систем, и получить необходимые и достаточные условия существования d-робастного управления неопределенными линейными и нелинейными объектами.

Робастное управление, в силу сделанного выше определения, $u^*(t) \in U$ определяется соотношениями:

$$u^*(t_0, T) = \arg \sup_{x_0 \in X_0} \sup_{\alpha \in A} \inf_{u \in U} \left| g(x^*(T)) \right| \le d, \qquad (1.74)$$

$$J(x^*, u^*) = \min_{u \in U} \sup_{\alpha \in A} J(x, u) \le J^{\max}(x, u). \qquad (1.75)$$

Пусть α^* – значения параметров объекта (1.68), при которых выполняются условия (1.74) и (1.75). Очевидно, что α^* принадлежит границе замыкания множества возможных значений параметров объекта, т.е. $\alpha^* \in \partial A$. Таким образом, можно считать α^* мажорантой для $\alpha(t_0,T)$, т.е. $\left|\alpha^*\right| \ge \left|\alpha(t_0,T)\right|$. Для векторно-матричной формы, в которой возможно задание структуры параметров объекта, последнее неравенство выполняется поэлементно.

Назовем гарантированным значением критерия качества при d-робастном управлении величину

$$\overline{J} = \sup_{\alpha \in A} J(x,u)\Big|_{|g(x(T))| \le d}.$$

Оптимальным гарантированным значением критерия качества при робастном управлении будет величина

$$J^0 = \inf_{u \in U} \sup_{\alpha \in A} J(x,u)\Big|_{|g(x(T))| \le d}.$$

Теорема 1.4.1

Пусть множество допустимых траекторий изменения параметров A не пусто. Тогда задача нахождения оптимального управления в виде

$$u^0(t) = \arg\inf_{u \in U} \sup_{\alpha \in A} J(x,u)$$

имеет решение, если

$$\exists u^*(t): \sup_{\alpha \in A} J(x^*,u^*) < \infty.$$

Доказательство теоремы вытекает из определения оптимального управления. Действительно, если $u^0(t) \in U$ минимизирует функционал $J(x,u)$ при любых $\alpha(t_0,T) \in A$, то $J(x^0,u^0) < \infty$.

Очевидно, что ограничения на управляющие воздействия, при которых задача робастного управления будет выполнена, зависят от начального состояния $x(t_0) \in X_0$, от значений параметров $\alpha(t_0,T) \in A$ и от периода управления $T-t_0$, т.е. выпуклое множество U, содержащее робастное управление, определяется выражением

$$U = \\ = \{x_0 \in X_0, \alpha(t_0,T) \in A, t \in [t_0,T], u^*(t_0,T): \frac{d}{dt}x(t) = f(x^*,u^*,\alpha(t)), \left|g(x^*(T))\right| \le d\}. \quad (1.76)$$

Если робастное управление будет таковым, что $u^*(t) \in U$, где U соответствует выражению (1.76), то задача робастного управления будет успешно завершена за заданный период управления $T-t_0$ при любом начальном условии $x_0 \in X_0$ и при любом фиксированном $\alpha\,(t_0,T) \in A$. Для этого необходимо, чтобы

$$\sup_{x_0,\,\alpha} \inf_{u \in U} \left|g(x^*(T))\right| \le d,\ x_0 \in X_0,\ \alpha\,(t_0,T) \in A. \quad (1.77)$$

Действительно, поскольку при любом фиксированном $x_0 \in X_0$ и любых фиксированных значениях параметров объекта $\alpha\,(t_0,T) \in A$ должно выполняться неравенство

$$\inf_{u \in U} \left|g(x^*(T))\right| \le d,\ x_0 \in X_0,\ \alpha\,(t_0,T) \in A,$$

то следует условие (1.77). Отметим, что условие (1.77) к тому же будет и достаточным, если для любого $x_0 \in X_0$ и любых значений параметров $\alpha(t_0,T) \in A$ найдется такое $u^*(t_0,T) \in U$, что

$$d \ge \inf_{u \in U} \left|g(\,x(T))\right|.$$

Следует отметить, что в задачах робастного управления (расчете системы на "худший случай"), реализуемого с использованием минимаксного подхода, в общем случае точка минимакса не является седловой точкой, т.е. перестановочные операции inf и sup могут дать несовпадающие результаты.

При заданных ограничениях на управляющие воздействия и заданном начальном условии $x(t_0) \in X_0$ может представлять интерес решение «двойственной» задачи, т.е. определения

$$a^* = \arg\max_{a\in A} \underline{J}(x,u),$$

где $\underline{J}(x,u) = \inf_{u\in U} J(x,u)\,_{|g(x(T))|\le d}$.

В заключение описания метода, который используется в данной книге, следует отметить, что применение минимакса для синтеза d-робастного управления неопределенными системами приводит к управлениям, которые можно назвать «расточительными», так как в интервале управления параметры системы и ее начальное состояние возможно и не будут принимать «наихудших» значений. Другими словами,

$$J(x(t,a^*),u^0) \ge J(x(t,a),u^0),\ \alpha(t_0,T)\in A.$$

Кроме этого, $|z(t)|$, являющееся решением уравнения

$$\frac{d}{dt}z(t) = f(z,u^0,a^*),\ z(t_0) = x_0^*,$$

является мажорантой $|x(t)|$, являющегося решением уравнения

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x,u^0,a),\ x(t_0) = x_0,\ a(t_0,T)\in A,$$

т.е. $|z(t)| \ge |x(t)|$.

§ 1.5. Выводы

В настоящей главе приведены определения систем управления с неполной информацией, рассмотрен метод конструирования нестационарных систем управления с неполной информацией с общим названием «алгоритмическое конструирование», дана постановка задачи о робастном управлении.

Метод алгоритмического конструирования включает в себя три этапа проектирования. На первом этапе, исходя из заданного функционала качества и целевой функции, учитывая ограничения и всю априорную информацию об объекте, производится синтез основной структуры системы управления. На втором этапе проектируется множество принципиальных алгоритмов оптимизации системы в структурном пространстве параметров. В основу конструкции алгоритмов оптимизации положены необходимые и достаточные условия минимума функционала качества, найденные на первом этапе.

Для построения множества реализуемых алгоритмов оптимизации предложен подход, основанный на организации вспомогательных функционалов качества, содержащих только измеряемую информацию и эквивалентных заданному, т.е. таких реализуемых функционалов качества, которые достигают минимума при тех же значениях параметров системы, что и исходный функционал.

На третьем этапе производится выбор или назначение параметров алгоритмов оптимизации таких, при которых этот алгоритм обеспечит асимптотические свойства процессу оптимизации, т.е. перевод из периферийных значений функционала к его минимальному значению асимптотически. Такой подход к выбору параметров позволяет применить конструктивный аппарат функций Ляпунова.

Изложенный подход к конструированию нестационарной системы с неполной информацией основан на использовании основных результатов аналитического конструирования систем с полной информацией – необходимых и достаточных условий минимума функционала качества.

Показана связь метода алгоритмического конструирования с основными методами, разработанными в рамках адаптивных (самонастраивающихся) систем.

Теория робастного управления только еще формируется и основные результаты получены для анализа робастной устойчивости и робастной стабилизации линейных объектов. В книге излагается подход, основанный на применении теории дифференциальных игр. Это позволяет использовать методы аналитического конструирования систем с полной информацией.

Глава 2. Оптимальное оценивание состояния линейных стохастических систем

Основные результаты теории линейных стохастических систем могут быть сформулированы в «широком смысле» и в «узком смысле». В первом случае изучаются линейные операции над процессами, характеризуемыми только ковариационной функцией. Во втором случае процессы предполагаются гауссовскими, но при этом допускаются нелинейные оценки и управление. Преимущество представления теории в «широком смысле» заключается в том, что она может быть полностью описана в рамках гильбертовых подпространств и винеровских интегралов, а для ее изложения требуются лишь некоторые сведения из теории меры, но совершенно не нужны интегралы Ито, стохастические исчисления, мартингалы и т.п. Многие из используемых при этом идей перенесены в теорию нелинейной фильтрации и управления. Таким образом, эта глава книги может рассматриваться как введение в разделы, в которых рассматриваются нелинейные стохастические системы.

§ 2.1. Геометрическая структура линейного оценивания

Пусть $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ – независимые случайные величины с

$$M[Y_i]=0,\ 0<DY_i=M[Y_i^2]<\infty,\ i=1,2,...,n,$$

а X – случайная величина с нулевым средним и конечной дисперсией. *Линейная оценка* $\hat{X}$ случайной величины X по заданным $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ есть произвольная линейная комбинация

$$\widehat{X}=\sum_{i=1}^{n}a_iY_i\,, \tag{2.1}$$

а среднеквадратичная ошибка есть $M[\{X-\widehat{X}\}^2]$.

Выберем коэффициенты a_i так, чтобы минимизировать среднеквадратичную ошибку. Так как по условию случайные величины $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ независимы, т.е. $M[Y_iY_j]=0$, то

$$M[\{X-\sum_{i=1}^{n}a_iY_i\}^2]=M[X^2]+\sum_{i=1}^{n}a_i^2\,M[Y_i^2]-2\sum_{i=1}^{n}a_i\,M[Y_i\,X].$$

Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial a_i}M[\{X-\sum_{i=1}^{n}a_iY_i\}^2]=2a_iM[Y_i^2]-2M[Y_i\,X].$$

Следовательно, величина $M[\{X-\widehat{X}\}^2]$ минимизируется, если положить

$$a_i=\frac{M[Y_iX]}{M[Y_i^2]}, \tag{2.2}$$

и оценка, минимизирующая среднеквадратичную ошибку, будет определяться следующим выражением

$$\widehat{X}=\sum_{i=1}^{n}\frac{M[Y_iX]}{M[Y_i^2]}Y_i\,, \tag{2.3}$$

или в векторной форме, в том случае, когда случайные величины некоррелированы и матрица $M[Y\,Y^T]$ несингулярная,

$$\widehat{X}=M[X\,Y^T]M[Y\,Y^T]^{-1}\,Y\,. \tag{2.4}$$

Этот результат можно интерпретировать на геометрическом языке следующим образом. Пусть $\aleph$ – множество всех линейных комбинаций величин $Y_1, Y_2, ..., Y_n$, т.е.

$$\aleph=\left\{\sum_{i=1}^{n}\beta_iY_i+\beta_{n+1}X\,\middle|\;\beta=(\beta_1,...,\beta_{n+1})\in R^{n+1}\right\}.$$

Для $U,V\in\aleph$ определим *скалярное произведение*

$$(U,V)=M[UV]$$

и *норму*

$$\|U\|=\sqrt{(U,U)}\,.$$

Назовем U и V *ортогональными* $(U\perp V)$, если $(U,V)=0$. Для $U_1,...,U_k\in\aleph$ обозначим $\mathrm{L}(U_1,...,U_k)$ подпространство, натянутое на $U_1,...,U_k$:

$$\mathrm{L}(U_1,...,U_k)=\left\{\sum_{i=1}^{k}\beta_iU_i\,\middle|\beta\in R^k\right\}.$$

Будем говорить, что $(V \perp \mathrm{L}(U_1,...,U_k))$, если $(V \perp U)$ для всех $U \in \mathrm{L}(U_1,...,U_k)$). Пусть теперь $\widehat{X}$ – линейная оценка с наименьшей среднеквадратической ошибкой, задаваемая формулами (2.1) и (2.2).

Предложение. *Оценка $\widehat{X}$ определяется условиями:*

а) $\widehat{X} \in \mathrm{L}(Y_1,...,Y_n)$;

б) $X - \widehat{X} \perp \mathrm{L}(Y_1,...,Y_n)$.

Доказательство. Пусть $Z \in \mathrm{L}(Y_1,...,Y_n)$. Тогда $Z = \sum_{i=1}^{n} \beta_i Y_i$ для некоторого $\beta \in R^n$. Ясно, что $X - Z \perp \mathrm{L}(Y_1,...,Y_n)$, если и только если $X - Z \perp Y_i$ для всех $i = 1,...,n$, что в свою очередь эквивалентно условию $(X, Y_i) \perp (Z, Y_i) = \beta_i (Y_i, Y_i)$, т.е. $\beta_i = \alpha_i$, $i = 1,...,n$. Но тогда $Z = \widehat{X}$ и $X - \widehat{X} \perp \mathrm{L}(Y_1,...,Y_n)$.

Величина $\widehat{X}$, удовлетворяющая условиям (а) и (б), называется *ортогональной проекцией X на* $\mathrm{L}(Y_1,...,Y_n)$.

Случай ненулевого среднего

В случае, когда случайные величины X и $Y_1, Y_2, ..., Y_n$, возможно, ненулевые средние $m_X, m_1, m_2,...,m_n$ соответственно, то им отвечает аффинная оценка

$$\widehat{X} = \sum_{i=1}^{n} a_i \{Y_i - m_i\} + m_X \tag{2.5}$$

и ошибка оценивания имеет вид

$$M\left(X - \widehat{X}\right)^2 = M\left(X^C - \sum_{i=1}^{n} a_i Y_i^C\right)^2,$$

где X^C, Y_i^C – центрированные случайные величины:

$X^C - m_X$, $Y^C - m_Y$.

Таким образом, задача сводится к случаю нулевого среднего и коэффициенты a_i могут быть определены в виде (2.2) т.е., $M[\widehat{X}] = M[X]$ и ошибка $X - \widehat{X}$ всегда имеют нулевое среднее.

Рекуррентное оценивание

В случае, когда наблюдаемые случайные величины $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ представляют собой результаты измерений, проводимых последовательно во времени, оценка $\widehat{X}$ процесса X является рекуррентной, если $\widehat{X}_k$ получается в результате «модернизации» оценки $\widehat{X}_{k-1}$, т.е. если $\widehat{X}_k$ можно представить в виде

$$\widehat{X}_k = f_k(\widehat{X}_{k-1}, Y_k)\,. \tag{2.6}$$

Если такие функции $f_k(\widehat{X}_{k-1}, Y_k)$ существуют, то (2.6) дает эффективную с вычислительной точки зрения оценку процедуру, так как нет необходимости запоминать все прошлые наблюдения. Требуются только текущая оценка и последнее наблюдение. Используя геометрическую интерпретацию, нетрудно понять, как можно осуществить рекуррентное оценивание. Пусть $L_K = \mathrm{L}(Y_1, ..., Y_n)$. Так как $L_{K-1} \subset L_K$, то всегда можно написать

$$\widehat{X}_K = A_K + B_K\,, \tag{2.7}$$

где $A_K \in L_{K-1}$ и $B_K \perp L_{K-1}$. Если $E_K = X - \widehat{X}_K$, то $X = E_K + \widehat{X}_K = E_K + (A_K + B_K)$, причем $A_K \in L_{K-1}$ и $B_K + E_K \perp L_{K-1}$. Однако существует только одно такое разложение для X, это $X = E_{K-1} + \widehat{X}_{K-1}$. Поэтому $A_K = \widehat{X}_{K-1}$, а B_K является проекцией X на $L_K - L_{K-1}$ (ортогональное дополнение L_{K-1} в L_K). Если $L_K = L_{K-1}$, то $L_K - L_{K-1} = \{0\}$, и потому $B_K = 0$. В противном случае это подпространство одномерно, поскольку, если $\wp_K -$ оператор проектирования на L_K, то

$$L_K - L_{K-1} = \mathrm{L}(\widetilde{Y}_K)\,, \tag{2.8}$$

где $\widetilde{Y}_K = Y_K - \wp_{K-1} Y_K$.

Последовательность взаимно ортогональных случайных величин $(\widetilde{Y}_K,\ k = 1,2,...)$ называется *обновляющей последовательностью*, а B_K – *обновляющей проекцией* X. Из (2.2) и (2.8) следует

$$B_K = \frac{(X,\widetilde{Y}_K)}{(\widetilde{Y}_K,\widetilde{Y}_K)}\widetilde{Y}_K .$$

Поэтому (2.7) принимает вид

$$\widehat{X}_K = \widehat{X}_{K-1} + \frac{(X,\widetilde{Y}_K)}{(\widetilde{Y}_K,\widetilde{Y}_K)}(Y_K - \wp_{K-1}Y_K). \qquad (2.9)$$

Термин «обновление» выражает ту мысль, что проекция $(\widetilde{Y}_K,\ k=1,2,\ldots)$ предоставляет «новую информацию», полученную в момент k.

Гауссовский случай

Случайный n-мерный вектор W имеет гауссовское распределение $N(m,Q)$, если логарифм его характеристической функции является квадратичной формой:

$$\varPhi_W(u) = M[\exp(i\,u^T W)] = \exp\left(i\,m^T u - \frac{1}{2}u^T Q u\right), \qquad (2.10)$$

где $m = M[W],\ m \in R^n$, а $Q = M\left[(W-m)(W-m)^T\right]$ – неотрицательно определенная матрица.

Из (2.10) вытекают следующие свойства:

а) линейная комбинация независимых гауссовских случайных величин является гауссовской;

б) любая неотрицательно определенная матрица Q является ковариационной матрицей некоторого гауссовского случайного вектора.

В задаче линейного оценивания X по наблюдениям $Y_1,\ldots,Y_n$ используются только математические ожидания и ковариации. Поэтому без ограничения общности можно предполагать, что случайные величины являются гауссовскими, так как в противном случае их можно заменить гауссовскими случайными величинами $X^*, Y_1^*,\ldots,Y_n^*$ с той же самой ковариационной матрицей. Однако в гауссовском случае получается наиболее сильный результат, заключающийся в том, что $\widehat{X}$ является также наилучшей *нелинейной* оценкой. Действительно, пусть $E = X - \widehat{X}$. Тогда $\widehat{X}$ и E являются ортогональными (т.е. некоррелированными) и гауссовскими в силу свойства (а). Поэтому они независимы. Вычислим условную характеристическую функцию X при заданном $Y=(Y_1,\ldots,Y_n)$

$$\Phi_{X|Y}(u,Y)\equiv M\left[\exp(iuX\,|\,Y)\right]=$$
$$=M\left[\exp(iu(\hat{X}+E)\,|\,Y)\right]=\exp(iu\hat{X})\;M\left[\exp(iuE\,|\,Y)\right].$$

Так как $\hat{X}=\mathrm{L}(Y_1,\ldots,Y_n)$ и ошибка $E=X-\hat{X}$ не зависят от Y, то

$$\Phi_{X|Y}(u,Y)=\exp(iu\hat{X})M\left[\exp(iuE)\right].$$

Так как E имеет распределение $N(0,\sigma^2)$, где $\sigma^2=D[E]$, то

$$\Phi_{X|Y}(u,Y)=\exp\left(iu\hat{X}-\frac{1}{2}u^2\sigma^2\right),$$

что является характеристической функцией распределения $N(\hat{X},\sigma^2)$. Поэтому $\hat{X}$ совпадает с условным средним случайной величины X:

$$\hat{X}=M[X\,|\,Y].$$

Рассмотрим нахождение нелинейной функции $f(Y)$, которая минимизирует $M\left[(X-f(Y))^2\right]$. Пусть $g_{X|Y}(x,y)$ – условная плотность распределения X при заданном Y, а $g(y)>0$- маргинальная плотность распределения Y. Тогда

$$M\left[(X-f(Y))^2\right]=\int_R g(y)\left\{\int_R[(x-f(y)]^2 g_{X|Y}(x;y)\,dx\right\}dy.$$

Так как $g(y)>0$ для всех y, то последнее выражение достигает минимума, если при каждом y минимизируется подынтегральная функция в фигурных скобках

$$f(Y)=M\left[X\,|\,Y=y\right]=\int_R x\;g_{X|Y}(x,y)\,dx=\hat{X}.$$

Оценка $\hat{X}$ в гауссовском случае является не только наилучшей *линейной* оценкой, но и наилучшей среди возможных оценок, поскольку она совпадает с условным средним. В общем же случае эта оценка не будет наилучшей *нелинейной* оценкой.

Для любого распределения выполняется неравенство

$$M\left[\left(X-M[X\,|\,Y]\right)^2\right]\le M\left[\left(X-\hat{X}\right)^2\right],$$

которое в случае гауссовского распределения переходит в равенство. Это показывает, что гауссовское распределение является «наиболее» случайным в том смысле, что из всех возможных распределений для (X,Y) с заданной ковариационной матрицей именно на гауссовском распределении максимизируется минимально достижимая ошибка оценивания.

§ 2.2. Оценивание в линейных динамических системах

При конструировании систем управления часто возникает задача определения оценки состояния системы, подверженной действиям случайных возмущений. Другими словами, требуется определить состояние системы управления в момент времени t на основе измерений ее фазовых координат на интервале времени $[t_0,t]$, производимых с ошибками. Такое выделение полезного сигнала при наличии случайных помех называется фильтрацией. К этой задаче примыкает задача предсказания наиболее вероятного состояния системы или значения полезного сигнала в момент времени $t_1>t$, т.е. экстраполяция сигнала, а также задача сглаживания измерений при $t_1<t$. Задачи, связанные с определением наилучшей оценки состояния системы, находящейся под воздействием неконтролируемых случайных помех, по неполным измерениям ее состояния, содержащим помехи, составляют основу статистической теории оптимальных систем.

За характеристику точности оценки оптимальной системы или ошибку фильтрации часто принимают математическое ожидание квадрата ошибки. Критерий минимума средней квадратической ошибки приводит к наиболее простым алгоритмам определения линейных оптимальных оценок.

В настоящем параграфе будут рассматриваться гауссовские марковские процессы, с помощью которых можно довольно часто аппроксимировать многие динамические явления, как в природе, так и те, которые созданы руками человека.

Рассмотрим общую постановку задачи фильтрации. Пусть $x(t)$ гауссовский марковский случайный процесс, образованный решением линейной динамической системы, на входе которой действует гауссовский «белый» шу»:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t)w(t), \\ &x(t_0) = x_0 , \end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

где $x(t) \in R^n$ – вектор состояний; $x(t_0)$ – гауссовский вектор начального состояния системы; $w(t) \in R^r$ – вектор входа – гауссовский «белый» шум с $M[w(t)] = 0,\ M[w(t)w(\tau)] = W(t)\delta(t-\tau)$ статистически не связанный с начальным состоянием системы, т.е. $M[x(t_0)\, w^T(t)] = 0$. Здесь $W(t)$ – матрица интенсивностей «белого» шума, $\delta(t-\tau)$ – дельта-функция Дирака:

$$\delta(t-\tau) = \begin{cases} 0, & если \quad \tau \neq t, \\ \infty, & если \quad \tau = t, \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)d\tau = 1 .$$

Пусть $y(t)$ – наблюдаемый векторный сигнал, содержащий компоненты вектора полезного сигнала $x(t)$, аддитивно связанные с помехой $v(t)$:

$$y(t) = C(t)x(t) + v(t) . \tag{2.12}$$

Задача фильтрации заключается в том, чтобы по заданному $y(\tau)$ для $\tau \in [t_0, t]$ построить такую оценку $\hat{x}(t)$ полезного сигнала $x(t)$, которая доставляет минимум среднему квадрату ошибки

$$J(\varepsilon) = tr\, M[\varepsilon(t)\ \varepsilon^T(t)] , \tag{2.13}$$

где tr – оператор «след матрицы»,

$$\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t) . \tag{2.14}$$

§ 2.3. Общее условие минимума средней квадратической ошибки. Уравнение Винера – Хопфа

Выведем общее условие минимума средней квадратической ошибки. Предположим, что $L(t)$ – линейный оператор системы, преобразующий $y(t)$ в $\hat{x}(t)$, причем $L \in R$. Тогда

$$\hat{x}(t) = L(t)y(t)\,. \tag{2.15}$$

Определение 2.3.1. Оператор L называется линейным, если его область определения R является линейным подпространством и он линеен на R, т.е.

$$L(az + bs) = aLz + bLs\,.$$

Отметим, что множество значений линейного оператора также является линейным пространством.

В силу приведенных свойств линейных операторов, определим оператор $L^0(t) \in R$, при котором критерий качества (2.13) принимает минимальное значение. Обозначим

$$L(t) = L^0(t) + \mu r(t)\,, \tag{2.16}$$

где μ – матрица переменных параметров, $r(t) \in R$ – произвольный ненулевой линейный оператор.

Если $L^0(t)$ есть искомый оператор, то при любых $\mu \neq 0$ происходит увеличение среднего квадрата ошибки и выражение (2.13) принимает минимальное значение лишь при $\mu = 0$. С другой стороны, если подставить (2.16) в (2.15) и затем в (2.14), то среднее значение квадрата ошибки становится функцией параметров матрицы μ и, чтобы отыскать минимум (2.13), нужно $\partial J(\mu)/\partial\mu$ приравнять к нулю. Но как было отмечено, минимальное значение функционал (2.13) принимает при $\mu = 0$. Отсюда получается условие минимума критерия качества (2.13)

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{ tr\ M\left[\varepsilon(t)\ \varepsilon^T(t)\right]\right\} = 0 \ \ при\ \mu = 0\,. \tag{2.17}$$

Выразим условие (2.17) в явном виде. Учитывая, что $\hat{x}(t) = [L(t) + \mu r(t)]y(t)$, выражение (2.17) принимает вид

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\mu}\{ tr\ M[\varepsilon(t)\ \varepsilon^T(t)]\} = \\
&= \frac{\partial}{\partial\mu}\{ tr\ M[\{x(t) - \hat{x}(t)\}\{x(t) - \hat{x}(t)\}^T]\} = \\
&= \frac{\partial}{\partial\mu}\Big\{\ tr\ M[x(t)\ x^T(t)] - x(t)\{L^0(t)y(t)\}^T - \\
&- x(t)\{r(t)y(t)\}^T\mu^T - \\
&- \{L^0(t)y(t)\}x^T(t) - \mu\{r(t)y(t)\}x^T(t) + \\
&+ \mu\{r(t)y(t)\}\{L^0(t)y(t)\}^T + \\
&+ \{L^0(t)y(t)\}\{r(t)y(t)\}^T\mu^T + \\
&+ \mu\{r(t)y(t)\}\{r(t)y(t)\}^T\mu^T\ ]\ \Big\} = 0\ \ при\ \mu = 0.
\end{aligned}
$$

Учитывая, что

$$
\frac{\partial}{\partial\mu} tr\,\mu\alpha\beta^T = \beta\alpha^T,\ \ \frac{\partial}{\partial\mu} tr\,\beta\alpha^T\mu^T = \beta\alpha^T,
$$

$$
\frac{\partial}{\partial\mu} tr\,\mu\ z\mu^T{}_{при\ \mu=0} = 0,
$$

последнее выражение можно переписать в виде

$$
M[\{x(t) - \mathrm{L}^0(\mathrm{t})\,\mathrm{y}(t)\}\{r(t)y(t)\}^T] = 0,\ \ r(t) \in R. \tag{2.18}
$$

Если ввести обозначения

$$
K_{yy}(\tau,\eta) = M[y(\tau)y^T(\eta)],\ \ K_{xy}(t,\eta) = M[x(t)y^T(\eta)]\ ,
$$

то уравнение (2.18) можно переписать в виде

$$
r(\eta)\{K_{xy}(t,\eta) - L^0(\tau)K_{yy}(t,\tau)\} = 0,\ \ r(\eta) \in R. \tag{2.19}
$$

Условие (2.19) должно выполняться для оптимального оператора $L^0(\tau)$ и произвольного ненулевого оператора $r(\eta)$ из линейного пространства R.

Выполнение равенства (2.19) для всех операторов $r(\eta) \in R$ необходимо и достаточно, если класс операторов R представляет собой линейное пространство. Уравнение (2.19) определяет оптимальный оператор, для которого мгновенное значение средней квадратической ошибки для каждого текущего момента времени t имеет наименьшее возможное значение. Это условие является общим условием, которому должен отвечать оптимальный оператор принадлежащий некоторому линейному пространству R, и носит название уравнения Винера – Хопфа в ортогональных проекциях.

Уравнение (2.19) может выполняться для всех операторов $r(\eta)$ только в том случае, если при любом $\eta \in T$, где T – период, на котором распространяется действие линейных операторов рассмотренного класса (т.е. на область наблюдения случайного процесса $y(\eta)$), имеет место равенство

$$K_{xy}(t,\eta) - L^0(\tau)K_{yy}(t,\tau) = 0 \ . \qquad (2.20)$$

Условие (2.20) необходимое, но недостаточное для того, чтобы оператор $L(\tau)$ был бы оптимальным. Необходимо еще, чтобы уравнение (2.19) удовлетворялось для всех дифференциальных операторов $r(\eta)$, содержащихся в рассматриваемом классе R.

Поскольку внутри области T уравнение (2.19) удовлетворяется тождественно относительно η, то при любых $\eta \in T$ удовлетворяются и все уравнения, получаемые в результате дифференцирования уравнения (2.19) по η.

Однако, вследствие возможных разрывов производных функции $K_{yy}(t,\eta)$ при $\eta = t$, некоторые уравнения, полученные из (2.19) дифференцированием по η, могут и не удовлетворяться на границе области T. Поэтому условие выполнения равенства (2.20) для всех дифференциальных операторов $r(\eta)$ не является следствием уравнения (2.19) для значений η на границе области T и это условие следует добавить к условию (2.20).

Таким образом, для того чтобы оператор L был бы оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял условию (2.20) и всем уравнениям, полученным из (2.19) путем применения всех допустимых операций по η при изменении τ в заданной области T.

Из этого условия следует, что допустимыми дифференциальными операциями могут быть только такие, в результате двойного применения которых к функции $K_{yy}(t,\eta)$ по одному разу по отношению к каждому аргументу поочередно при $\eta = t$, при которых будет выполняться соотношение (2.20).

Как известно, линейная система может быть охарактеризована интегральным оператором, который через импульсные (весовые) переходные матрицы физически осуществимой системы выражается так

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) = L^0(t)y(t) = \int_{t_0}^{t} g(t,\tau)y(\tau)\,d\tau, \\ r(t)y(t) = \int_{t_0}^{t} h(t,\tau)y(\tau)\,d\tau, \end{aligned} \tag{2.21}$$

где $g(t,\tau)$, $h(t,\tau)$ – импульсные переходные матрицы. Необходимое и достаточное условие (2.19) минимума средней квадратической ошибки (2.13) с учетом (2.21) принимает вид

$$\int_{t_0}^{t} h(t,\eta)\left\{ M[x(t)y^T(\eta)] - \int_{t_0}^{t} g(t,\tau)M[y(\tau)y^T(\eta)]\,d\tau \right\} d\eta = 0.$$

Это уравнение может удовлетворяться для произвольных ненулевых импульсных переходных матриц $h(t,\eta)$ только в том случае, если выражение в фигурных скобках тождественно равно нулю:

$$M[x(t)y^T(\eta)] - \int_{t_0}^{t} g(t,\tau)M[y(\tau)y^T(\eta)]\,d\tau = 0, \quad t_0 \le \eta \le t$$

или

$$K_{xy}(t,\eta) - \int_{t_0}^{t} g(t,\tau)K_{yy}(\tau,\eta)\,d\tau = 0, \quad t_0 \le \eta \le t. \tag{2.22}$$

Выражение (2.22) называется уравнением Винера-Хопфа в интегральной форме.

Полученное уравнение можно трактовать следующим образом: если на вход системы управления подается входное воздействие в виде корреляционной матрицы $K_{yy}(\tau,\eta)=M[y(\tau)y^T(\eta)]$ наблюдаемого процесса $y(t)$, то система управления оптимальна тогда и только тогда, когда ее реакция на это входное воздействие равно взаимно-корреляционной матрице $K_{xy}(t,\eta)=M[x(t)y^T(\eta)]$ полезного процесса $x(t)$ и входного процесса $y(t)$.

В общем случае решение уравнения (2.22) во временной области весьма затруднительно. Решение этого уравнения относительно импульсной переходной матрицы $g(t,\tau)$ неустойчиво к малым изменениям исходных данных, т.е. малые изменения данных в $K_{yy}(\tau,\eta)=M[y(\tau)y^T(\eta)]$ могут приводить к произвольно большим изменениям решения. Задачи подобного типа относятся к классу некорректно поставленных задач и для их решения применяются методы регуляризации.

Задача несколько упрощается для стационарного случая, когда для $g(t)$, $K_y(\tau)$, $K_{xy}(\tau)$ существует преобразование Лапласа.

Практически более простой алгоритм линейной фильтрации был получен, когда проблема фильтрации была рассмотрена во временной области с точки зрения концепции «состояний». Получающийся при этом линейный фильтр называется фильтром Калмана – Бьюси.

§ 2.4. Фильтр Калмана – Бьюси

Рассмотрим вопрос о нахождении наилучшего в смысле минимумасредней квадратической ошибки линейного фильтра для сигнала, являющегося решением некоторого линейного дифференциального уравнения

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t)w(t), \\ &x(t_0) = x_0. \end{aligned}\right\} \qquad (2.23)$$

Здесь $x(t) \in R^n$; x_0 – гауссовский случайный вектор с нулевым математическим ожиданием, т.е. $M = [x(t_0)] = 0$; $w(t)$ – «белый» шум, имеющий характеристики

$$M[w(t)] = 0,\ M[w(t)\,w^T(\tau)] = W(t)\,\delta(t-\tau). \qquad (2.24)$$

На интервале $[t_0, t]$ измеряется вектор $y(t)$, связанный с вектором $x(t)$ линейным матричным уравнением

$$y(t) = C(t)x(t) + v(t). \qquad (2.25)$$

Здесь $C(t)$ – матрица измерений; $y(t) \in R^m$, $m \le n$; $v(t) \in R^m$ – гауссовский «белый» шум, имеющий характеристики

$$M[v(t)] = 0,\ M[v(t)v^T(\tau)] = V(t)\,\delta(t-\tau). \qquad (2.26)$$

Будем считать, что $x(t_0)$, $w(t)$, $v(t)$ не коррелированны между собой, т.е.

$$M[x(t_0)\,w^T(t)] = 0,\ M[x(t_0)\,v^T(t)] = 0,\ M[v(t)\,w^T(\tau)] = 0.$$

Задача состоит в том, чтобы по заданному $y(\tau)$ для $\tau \in [t_0, t]$ построить оценку случайной функции $x(t)$ в виде решения линейного дифференциального уравнения

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = F(t)\hat{x}(t) + K(t)y(t), \\ &\hat{x}(t_0) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \hat{x}(t) \in R^n \qquad (2.27)$$

такой, чтобы она минимизировала среднюю квадратическую ошибку

$$\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t). \qquad (2.28)$$

Как было показано ранее, линейная оптимальная оценка в смысле минимума дисперсии ошибки удовлетворяет уравнению Винера-Хопфа (2.19). В силу того что указанное условие должно выполняться для любых операторов $r(t) \in R$, это условие должно выполняться и для элементарного оператора сдвига (запаздывания). В силу этого условие (2.19) перепишем в виде

$$M[\{x(t)-\hat{x}(t)\}\, y^T(\eta)]=0,\ \eta\in[t_0,t]. \qquad (2.29)$$

Продифференцируем уравнение (2.29) по аргументу t, получим

$$M\left[\left\{\ \frac{d}{dt}x(t)-\frac{d}{dt}\hat{x}(t)\ \right\} y^T(\eta)\ \right]=0,\ \eta\in[t_0,t]. \qquad (2.30)$$

Подставляя в (2.29) выражения для $\frac{d}{dt}x(t)$ и $\frac{d}{dt}\hat{x}(t)$, т.е. (2.23) и (2.27) соответственно, а также учитывая (2.25) и учитывая, что $x(t_0), w(t), v(t)$ некоррелированны для всех $\eta\in[t_0,t]$, получим

$$\begin{aligned}&[A(t)-K(t)C(t)]M\left[x(t)y^T(\eta)\right]=\\&=F(t)M\left[\hat{x}(t)y^T(\eta)\right],\ \eta\in[t_0,t].\end{aligned} \qquad (2.31)$$

Из уравнения (2.29) следует, что

$$M\left[x(t)y^T(\eta)\right]=M\left[\hat{x}(t)y^T(\eta)\right],\ \eta\in[t_0,t]. \qquad (2.32)$$

Уравнение (2.31) с учетом (2.32) можно переписать в виде

$$\left[A(t)-K(t)C(t)-F(t)\right]M\left[\hat{x}(t)y^T(\eta)\right]=0,\ \eta\in[t_0,t]. \qquad (2.33)$$

Пусть $\Phi(t,\tau)$ – фундаментальная матрица решений уравнения (2.27), тогда

$$\hat{x}(t)=\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)K(\tau)y(\tau)d\tau \qquad (2.34)$$

и

$$\frac{d}{dt}\hat{x}(t)=F(t)\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)K(\tau)y(\tau)d\tau+K(t)y(t). \qquad (2.35)$$

Подставляя (2.34) в (2.33), получим

$$\int_{t_0}^{t}\left[A(t)-K(t)C(t)-F(t)\right]\Phi(t,\tau)K(\tau)M[y(\tau)y^T(\eta)]d\tau=0. \qquad (2.36)$$

Для того чтобы выполнялось условие (2.36), необходимо, чтобы подынтегральное выражение равнялось нулю. Учитывая это обстоятельство, а также потребовав, чтобы $V(t)$ была бы положительно определенной, из (2.36) получаем

$$\left[A(t)-K(t)C(t)-F(t)\right]\Phi(t,\tau)K(\tau)=0,\quad \tau\in[t_0,t],$$

откуда

$$F(t)\,\Phi(t,\tau)K(\tau)=\left[A(t)-K(t)C(t)\right]\Phi(t,\tau)K(\tau)\,. \qquad (2.37)$$

Подставляя (2.37) в (2.35), получаем

$$\frac{d}{dt}\hat{x}(t)=\left[A(t)-K(t)C(t)\right]\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)K(\tau)y(\tau)d\tau+K(t)y(t)$$

или

$$\frac{d}{dt}\hat{x}(t)=\left[A(t)-K(t)C(t)\right]\hat{x}(t)+K(t)y(t)\,. \qquad (2.38)$$

Приравнивая правые части уравнений (2.27) и (2.38), получаем

$$F(t)=A(t)-K(t)C(t)\,. \qquad (2.39)$$

Найдем уравнение, решением которого будет ошибка фильтрации. Для этого из уравнения (2.23) вычтем уравнение (2.39). В результате получим

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\varepsilon(t)=\left[A(t)-K(t)C(t)\right]\varepsilon(t)+B(t)w(t)-K(t)v(t),\\&\varepsilon(t_0)=x(t_0).\end{aligned}\right\} \qquad (2.40)$$

Для того чтобы полностью определить уравнение (2.38), необходимо отыскать матрицу $K(t)$, при которой оценка $\hat{x}(t)$ удовлетворяет уравнению Винера – Хопфа.

Подставим решение уравнения (2.40) в (2.29). Используя (2.25) и учитывая, что процессы $w(t)$, $v(t)$ некоррелированны, получим

$$M\left[\left\{\Phi(t,\eta)\varepsilon(\eta)+\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)[B(\tau)w(\tau)-K(\tau)v(\tau)]\,d\tau\right\}y^T(\eta)\right]=0\,,$$

или

$$\Phi(t,\eta)M[\varepsilon(\eta)x^T(\eta)]\,C^T(\eta)-\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)K(\tau)V(\tau)\delta(\tau-\eta]\,d\tau=0\,.$$

Учитывая свойства дельта-функции, последнее выражение можно переписать в виде

$$\Phi(t,\eta)\left\{M[\varepsilon(\eta)x^T(\eta)]\,C^T(\eta)-K(\eta)V(\eta)\right\}=0\,,$$

откуда получим

$$M[\varepsilon(t)x^T(t)]\,C^T(t)=K(t)V(t)\,, \tag{2.41}$$

т.к. $\Phi(t,\eta)$ обратимая матрица.

Рассмотрим левую часть уравнения (2.41). Учитывая, что

$$M[\{x(t)-\hat{x}(t)\}\hat{x}^T(t)]=0, \tag{2.42}$$

получаем

$$M\left[\varepsilon(t)x^T(t)\right]=M\left[\varepsilon(t)\varepsilon^T(t)\right]. \tag{2.43}$$

Введем обозначение $P(t)=M\left[\varepsilon(t)\varepsilon^T(t)\right]$, т.е. $P(t)$ – дисперсионная матрица ошибок. Сравнивая (2.43) и (2.41), получаем

$$K(t)V(t)=P(t)C^T(t)$$

откуда, учитывая, что матрица $V(t)$ обратимая, получаем

$$K(t)=P(t)C^T(t)V^{-1}(t)\,. \tag{2.44}$$

Осталось отыскать уравнение, которое описывает динамику изменения дисперсионной матрицы $P(t)$. Учитывая (2.42), получим

$$\begin{aligned}P(t)&=M\left[\varepsilon(t)\varepsilon^T(t)\right]=\\&=M\left[x(t)x^T(t)\right]-M\left[\hat{x}(t)\hat{x}^T(t)\right]=X(t)-\hat{X}(t).\end{aligned} \tag{2.45}$$

Используем результаты, полученные в § 2.1.

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}X(t)=A(t)X(t)+X(t)A^T(t)+B(t)W(t)B^T(t),\\&X(t_0)=X_0\,.\end{aligned}\right\} \tag{2.46}$$

Аналогично получаем

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\hat{X}(t)=A(t)\hat{X}(t)+\hat{X}(t)A^T(t)+K(t)V(t)K^T(t),\\&\hat{X}(t_0)=0.\end{aligned}\right\} \tag{2.47}$$

Вычитая из (2.46) уравнение (2.47) и учитывая (2.44), получаем матричное уравнение типа Риккати, решением которого является дисперсионная матрица ошибок $P(t)$:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}P(t) = A(t)P(t) + P(t)A^T(t) - \\ &- P(t)C^T(t)V^{-1}(t)C(t)P(t) + B(t)W(t)B^T(t), \\ &P(t_0) = X_0, \end{aligned}\right\} \tag{2.48}$$

при этом учитывалось, что матрицы $P(t)$ и $V(t)$ симметричные.

В стационарном случае, когда матрицы A, B, C не зависят от времени и «белые» шумы $w(t), v(t)$ стационарны, дисперсионная матрица ошибок P после окончания переходных процессов, вызванных неадекватностью начальных условий полезного процесса и фильтра, становится постоянной. В силу этого матрица K в установившемся состоянии является константой, поэтому оптимальный фильтр также является стационарным и задается уравнением

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = [A - KC]\hat{x}(t) + Ky(t), \\ &\hat{x}(t_0) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{2.49}$$

которое во временной области эквивалентно фильтру Винера, определенного в частотной области решением интегрального уравнения Винера – Хопфа (2.22).

Матрица P определяется решением алгебраического уравнения

$$AP + PA^T - PC^TV^{-1}CP + BWB^T = 0. \tag{2.50}$$

Импульсная переходная матрица фильтра Винера в этом случае определяется выражением

$$g(t-\tau) = \left\{\exp\left[A - PC^TV^{-1}C\right](t-\tau)\right\}PC^TV^{-1}.$$

Полученный в данном параграфе линейный фильтр, который был в 1961 году, описан Калманом и Бьюси дает наилучшую смещенную оценку в смысле минимума дисперсии ошибки, так как начальное состояние фильтра $\hat{x}(t_0) = 0$. Для того чтобы получить несмещенную оценку, следует учесть отличное от нуля начальное условие в уравнении (2.27). Для получения несмещенной оценки при начальных условиях $x(t_0)=x_0$, $M[x(t_0)]\neq 0$ начальные условия дифференциального уравнения, описывающие фильтр, должны быть $\hat{x}(t_0)=M[x(t_0)]$.

В общем случае полезный векторный процесс может порождаться не только «белым» шумом $w(t)$, но и некоторым детерминированным сигналом. Поэтому целесообразно обобщение на этот случай с учетом отличных от нуля начальных условий.

Так же и в случае формирования полезного сигнала $x(t)$ «белым» шумом $w(t)$ и детерминированным сигналом $u(t)$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}x(t)=A(t)x(t)+B(t)w(t)+u(t),\\&x(t_0)=x_0.\end{aligned}\right\} \tag{2.51}$$

Наилучшая линейная несмещенная оценка процесса $x(t)$ по наблюдаемому процессу $y(t)$

$$y(t)=C(t)x(t)+v(t),$$

в смысле минимума средней квадратической ошибки, является решением дифференциального уравнения

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\hat{x}(t)=[A(t)-K(t)C(t)]\hat{x}(t)+K(t)y(t)+u(t),\\&\hat{x}(t_0)=M[x(t_0)],\end{aligned}\right\} \tag{2.52}$$

где матрица $K(t)$ определяется выражением (2.44), в котором $P(t)$ является решением дифференциального уравнения типа Риккати (2.48) с начальным условием $P(t_0)=X_0-m_x\,m_x^T$.

§ 2.5. Обобщенный линейный фильтр

В предыдущих разделах предполагалось, что «белый» шум $w(t)$, формирующий полезный процесс $x(t)$ и «белый» шум измерений $v(t)$ некоррелированны. Рассмотрим случай построения оптимального линейного фильтра для случая коррелированных гауссовых шумов $w(t)$ и $v(t)$.

Пусть теперь полезный сигнал $x(t)$ является решением дифференциального уравнения

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}x(t)=A(t)x(t)+B(t)w(t)+u(t),\\&x(t_0)=x_0,\end{aligned}\right\}\ x(t)\in R^n, \tag{2.53}$$

где $u(t)$ – детерминированный процесс;

$$M[w(t)]=0,\ M[w(t)w^T(\tau)]=W(t)\delta(t-\tau),$$

а измеряемый вектор определяется выражением

$$y(t)=C(t)x(t)+v(t),\ \ y(t)\in R^m,\ m\le n, \tag{2.54}$$

$M[v(t)]=0,\ M[v(t)v^T(\tau)]=V(t)\delta(t-\tau)$, причем

$$M[w(t)v^T(\tau)]=\Pi(t)\delta(t-\tau). \tag{2.55}$$

Тогда задача фильтрации заключается в том, чтобы по заданному $y(\tau)$ для $\tau\in[t_0,t]$ построить оценку $\hat{x}(t)$ полезного процесса $x(t)$ в виде решения линейного дифференциального уравнения

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\hat{x}(t)=F(t)\hat{x}(t)+K(t)y(t)+u(t),\\&\hat{x}(t_0)=M[x(t_0)],\end{aligned}\right\}\ \hat{x}(t)\in R^n \tag{2.56}$$

такой, чтобы она минимизировала среднюю квадратическую ошибку $\varepsilon(t)=x(t)-\hat{x}(t)$.

Учитывая результаты предыдущего параграфа, назначим матрицу $F(t)$ в виде

$$F(t)=A(t)-K(t)C(t). \tag{2.57}$$

Тогда фильтр (2.56) будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\hat{x}(t)=[A(t)-K(t)C(t)]\hat{x}(t)+K(t)y(t)+u(t),\\&\hat{x}(t_0)=M[x(t_0)].\end{aligned}\right\} \tag{2.58}$$

Этот фильтр содержит в качестве неизвестного параметра матрицу $K(t)$, которую, естественно, следует выбирать из условия минимума средней квадратической ошибки $J(\varepsilon) = tr\,P(t) = tr\,M\left[\varepsilon(t)\varepsilon^T(t)\right]$, т.е.

$$\min_K J(\varepsilon) = \min_K tr\{P(t)\}. \tag{2.59}$$

Для решения этой задачи применим способ, основывающийся на вариационном принципе при локальном критерии качества в открытой области изменения параметров матрицы $K(t)$. Он состоит в том, что минимуму положительно определенной квадратичной формы по выбираемому параметру при фиксированном времени соответствует максимум по тому же параметру производной по времени с противоположным знаком от этой положительно определенной квадратичной формы, т.е.

$$\max_K\{-\frac{d}{dt}J(\varepsilon)\} = \max_K\{-tr\frac{d}{dt}P(t)\}. \tag{2.60}$$

Найдем выражение для производной дисперсионной матрицы $P(t)$. Для этого, вычитая (2.58) из (2.53), получим дифференциальное уравнение для ошибки фильтрации

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\varepsilon(t) = [A(t) - K(t)C(t)]\,\varepsilon(t) + B(t)w(t) - K(t)v(t),\\&\varepsilon(t_0) = x(t_0) - \bar{x}(t_0).\end{aligned}\right\} \tag{2.61}$$

Здесь $\bar{x}(t_0) = M[x(t_0)]$.

Так как

$$\frac{d}{dt}P(t) = M\left[\varepsilon(t)\left\{\frac{d}{dt}\varepsilon(t)\right\}^T\right] + M\left[\left\{\frac{d}{dt}\varepsilon(t)\right\}\varepsilon^T(t)\right], \tag{2.62}$$

то, подставляя в (2.61) (2.62), будем иметь

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}P(t) = [A(t) - K(t)C(t)]\,P(t) + P(t)\,[A(t) - K(t)C(t)]^T +\\&+ B(t)M\left[w(t)\,\varepsilon^T(t)\right] + M\left[\varepsilon(t)\,w^T(t)\right]B^T(t) -\\&- K(t)M\left[v(t)\,\varepsilon^T(t)\right] - M\left[\varepsilon(t)\,v^T(t)\right]K^T(t),\\&P(t_0) = X_0 - \bar{x}_0\bar{x}_{0\,x}^T.\end{aligned}\right\} \tag{2.63}$$

Пусть $\Phi(t,\tau)$ – фундаментальная матрица решений уравнения (2.61), тогда

$$\varepsilon(t) = \Phi(t,t_0)\,\varepsilon(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)[B(\tau)w(\tau) - K(\tau)v(\tau)]\,d\tau\,. \qquad (2.64)$$

Используя (2.59), найдем выражение для $M[\varepsilon(t)\,w^T(\tau)]$ и $M[\varepsilon(t)\,v^T(\tau)]$:

$$\begin{aligned}
&M[\varepsilon(t)\,w^T(\tau)] = \Phi(t,t_0)\,M[\varepsilon(t_0)\,w^T(\tau)] + \\
&+\int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\,M[B(\tau)w(\tau)w^T(\tau) - K(\tau)v(\tau)w^T(\tau)]\,d\tau = \\
&= \frac{1}{2}B(t)W(t) - \frac{1}{2}K(t)\Pi^T(t),
\end{aligned}$$

так как начальные условия $\varepsilon(t_0)$ и «белый» шум $w(t)$ некоррелированны, т.е. $M[\varepsilon(t_0)\,w^T(t)] = 0$.

Аналогично имеем

$$\begin{aligned}
&M[\varepsilon(t)\,v^T(\tau)] = \Phi(t,t_0)\,M[\varepsilon(t_0)\,v^T(\tau)] + \\
&+\int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\,M[B(\tau)w(\tau)v^T(\tau) - K(\tau)v(\tau)v^T(\tau)]\,d\tau = \\
&= \frac{1}{2}B(t)\Pi(t) - \frac{1}{2}K(t)V(t),
\end{aligned}$$

так как начальные условия $\varepsilon(t_0)$ и «белый» шум $v(t)$ некоррелированны, т.е. $M[\varepsilon(t_0)\,v^T(t)] = 0$.

Уравнение для дисперсионной матрицы, с учетом полученных результатов, принимает вид

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}P(t) = [A(t) - K(t)C(t)]P(t) + P(t)[A(t) - K(t)C(t)]^T + \\
&B(t)W(t)B^T(t) + K(t)V(t)K^T(t) - \\
&- K(t)\Pi^T(t)B^T(t) - B(t)\Pi(t)K^T(t), \\
&P(t_0) = X_0 - \bar{x}_0\bar{x}_0^T\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (2.65)$$

Как следует из постановки задачи, при оптимизации параметров матрицы $K(t)$ никаких ограничений на область их изменений не наложено. Следовательно, оптимальные значения этих параметров должны быть определены в открытой области их изменения, т.е. оптимальные значения параметров матрицы $K(t)$ являются стационарной точкой квадратичной формы $tr\left\{\frac{d}{dt}P(t)\right\}$ в пространстве этих параметров. Поэтому условие экстремума (2.60) можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial K(t)}\left[tr\left\{\frac{d}{dt}P(t)\right\}\right]=0. \tag{2.66}$$

Подставляя в (2.66) уравнение (2.65), определяющее производную дисперсионной матрицы ошибок, запишем полученное с учетом только членов, зависящих от матрицы $K(t)$:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial K(t)}tr\left[\ -K(t)C(t)P(t)-P(t)C^T(t)K^T(t)+K(t)V(t)K^T(t)-\right.\\ \left.-K(t)\Pi^T(t)B^T(t)-B(t)\Pi(t)K^T(t)\ \right]=0.\end{gathered} \tag{2.67}$$

Принимая во внимание соотношения для производных скалярных величин по матрице, приведенных в § 2.2, из последнего уравнения получаем

$$-P(t)C^T(t)+K(t)V(t)-B(t)\Pi(t)=0,$$

откуда

$$K(t)=\left[P(t)C^T(t)+B(t)\Pi(t)\right]V^{-1}(t). \tag{2.68}$$

Здесь, как и ранее, предполагалось, что матрица $V(t)$ обратимая.

Таким образом, наилучшая линейная оценка процесса $x(t)$ по наблюдаемому процессу $y(t)$ в смысле минимума средней квадратической ошибки, является решением дифференциального уравнения (2.58), где матрица $K(t)$ определяется выражением (2.68), в котором $P(t)$ является решением дифференциального уравнения типа Риккати

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}P(t)=\left[A(t)-B(t)\Pi)(t)V^{-1}(t)C(t)\right]P(t)+\\ &+P(t)\left[A(t)-B(t)\Pi)(t)V^{-1}(t)C(t)\right]^T-\\ &\qquad -P(t)C^T(t)V^{-1}(t)C(t)P(t)+\\ &+B(t)\left[W(t)-\Pi(t)V^{-1}(t)\Pi^T(t)\ \right]B^T(t),\\ &P(t_0)=X_0-\bar{x}_0\bar{x}_0^T.\end{aligned}\right\} \tag{2.69}$$

Отметим, что рассмотренная в § 2.3 задача построения линейного фильтра является частной по отношению к данной задаче. Действительно, при $\Pi(t)=0$, т.е. при отсутствии корреляции между шумами $w(t)$ и $v(t)$ выражения, определяющие матрицы $F(t), K(t)$ и $P(t)$ обобщенного фильтра и фильтра Калмана – Бьюси, совпадают.

§ 2.6. Фильтрация при «небелых» шумах

Практический интерес представляет собой обобщение задачи фильтрации для коррелированных во времени ошибок и измерений.

Пусть полезный процесс $x(t)$ является решением линейного дифференциального уравнения

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t)=A(t)x(t)+B(t)w(t)+u(t),\\ &x(t_0)=x_0 \end{aligned}\right\} x(t)\in R^n \tag{2.70}$$

и измеряемый сигнал удовлетворяет уравнению

$$y(t)=C(t)x(t)+z(t),\ y(t)\in R^m,\ m\le n, \tag{2.71}$$

где $z(t)$ – помеха, представляющая собой гауссовский марковский процесс

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}z(t)=G(t)z(t)+Q(t)v(t),\\ &z(t_0)=z_0. \end{aligned}\right\} z(t)\in R^m \tag{2.72}$$

Процессы $w(t)$ и $v(t)$ - «белые» некоррелированные шумы, причем

$$\begin{aligned} &M[w(t)]=0,\ M[v(t)]=0,\\ &M[w(t)w^T(\tau)]=W(t)\delta(t-\tau),\\ &M[v(t)v^T(\tau)]=V(t)\delta(t-\tau). \end{aligned}$$

«Белый» шум $v(t)$ будем считать некоррелированным с начальными условиями $x(t_0)$ и $z(t_0)$.

Продифференцировав выражение (2.71) по времени и подставляя вместо $\frac{d}{dt}x(t)$ и $\frac{d}{dt}z(t)$ их значения, определяемые соответственно уравнениями (2.70) и (2.72), получим

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}y(t) = \left[\frac{d}{dt}C(t) + C(t)A(t)\right]x(t) + G(t)z(t) + \\
&+ C(t)u(t) + C(t)B(t)w(t) + Q(t)v(t), \\
&y(t_0) = C(t_0)x(t_0) + z(t_0).
\end{aligned}
\right\}
\tag{2.73}
$$

Используя полученную формулу, введем функцию

$$
y^*(t) = \frac{d}{dt}y(t) - G(t)y(t) - C(t)u(t) \ . \tag{2.74}
$$

Учитывая (2.73), будем иметь

$$
\begin{aligned}
&y^*(t) = \left[\frac{d}{dt}C(t) + C(t)A(t) - G(t)C(t)\right]x(t) + \\
&+ C(t)B(t)w(t) + Q(t)v(t).
\end{aligned}
\tag{2.75}
$$

Введем обозначения

$$
C^*(t) = \frac{d}{dt}C(t) + C(t)A(t) - G(t)C(t) \ , \tag{2.76}
$$

$$
s(t) = C(t)B(t)w(t) + Q(t)v(t). \tag{2.77}
$$

Тогда выражение (2.75) примет вид

$$
y^*(t) = C^*(t)x(t) + s(t), \tag{2.78}
$$

где $s(t)$ – «белый» шум с симметричной положительно определенной матрицей интенсивностей, равной

$$
S(t) = C(t)B(t)W(t)B^T(t)C^T(t) + Q(t)V(t)Q^T(t) \ . \tag{2.79}
$$

Теперь исходная задача фильтрации может быть переформулирована: требуется построить наилучшую среднеквадратичную оценку процесса $x(t)$ по наблюдениям $y^*(t)$, причем шумы $w(t)$ и $s(t)$ коррелированны:

$$
M[w(t)s^T(\tau)] = W(t)B^T(t)C^T(t)\delta(t-\tau) \ . \tag{2.80}
$$

Применим результаты предыдущего параграфа к рассматриваемой задаче. Тогда оптимальная линейная оценка будет являться решением дифференциального уравнения

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = A(t)\hat{x}(t) + K(t)[y^*(t) - C^*(t)\hat{x}(t)] + u(t), \\
&\hat{x}(t_0) = \bar{x}_0,
\end{aligned}
\right\}
\tag{2.81}
$$

$$
\hat{x}(t) \in R^n,
$$

где матрица $K(t)$ определяется выражением

$$
\begin{aligned}
K(t) = &\left[P(t)\{C^*(t)\}^T + B(t)W(t)B^T(t)C^T(t)\right]\times \\
&\times\left[C(t)B(t)W(t)B^T(t)C^T(t) + Q(t)V(t)Q^T(t)\right]^{-1}.
\end{aligned} \tag{2.82}
$$

В уравнение (2.80) входит функция $y^*(t)$, которая содержит производную по времени от измеряемой функции $y(t)$. Для того чтобы избежать необходимости отыскания производной $y(t)$, введем дополнительный вектор состояния $x^*(t)$, связанный с оценкой $\hat{x}(t)$ следующим образом:

$$
\hat{x}(t) = x^*(t) + K(t)y(t). \tag{2.83}
$$

Продифференцируем соотношение (2.83) по времени и, подставляя выражения для $\frac{d}{dt}\hat{x}(t)$ и $\frac{d}{dt}y^*(t)$ в полученное уравнение, получим

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}x^*(t) = [A(t) - K(t)C^*(t)]\,\hat{x}(t) - \\
&-[\frac{d}{dt}K(t) + K(t)G(t)]\,y(t) + [I - K(t)C(t)]\,u(t).
\end{aligned} \tag{2.84}
$$

Теперь вместо уравнения (2.81), определяющего оценку $\hat{x}(t)$, следует использовать уравнения (2.84) и (2.83), которые запишем в виде

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}x^*(t) = [A(t) - K(t)C^*(t)]\,x^*(t) + \\
&+[A(t)K(t) - K(t)C^*(t)K(t) - \frac{d}{dt}K(t) - \\
&-K(t)G(t)]\,y(t)] + [I - K(t)C(t)]\,u(t), \\
&\;x^*(t_0) = \bar{x}_0 - K(t_0)y(t_0),
\end{aligned}
\right\} \tag{2.85}
$$

В уравнение (2.82), определяющее матрицу $K(t)$, входит дисперсионная матрица $P(t)$. Найдем дифференциальное уравнение, решением которого является матрица $P(t)$. Для этого продифференцируем $P(t)$ по времени

$$
\frac{d}{dt}P(t) = M\left[\left\{\frac{d}{dt}\varepsilon(t)\right\}\varepsilon^T(t)\right] + M\left[\varepsilon(t)\left\{\frac{d}{dt}\varepsilon(t)\right\}^T\right], \tag{2.86}
$$

отыщем выражение для $\frac{d}{dt}\varepsilon(t)$ и подставим в (2.86).

Для отыскания выражения $\frac{d}{dt}\varepsilon(t)$ воспользуемся уравнениями (2.70) и (2.81). Получим

$$\frac{d}{dt}\varepsilon(t) = [A(t) - K(t)C^*(t)]\varepsilon(t) + B(t)w(t) - K(t)s(t). \tag{2.87}$$

Подставляя (2.87) в (2.86), будем иметь

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}P(t) = \\ &= [A(t) - K(t)C^*(t)]P(t) + P(t)[A(t) - K(t)C^*(t)]^T + \\ &\qquad + B(t)M[w(t)\varepsilon^T(t)] + M[\varepsilon(t)w^T(t)]B^T(t) - \\ &\qquad - K(t)M[s(t)\varepsilon^T(t)] - M[\varepsilon(t)s^T(t)]K^T(t). \end{aligned} \tag{2.88}$$

Пусть $\Phi(t,\tau)$ – фундаментальная матрица решений дифференциального уравнения (2.87). Тогда, учитывая свойства дельта-функции, будем иметь

$$\begin{aligned} &M[\varepsilon(t)w^T(t)] = \\ &= \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)M[B(\tau)w(\tau)w^T(t) - K(\tau)s(\tau)w^T(t)]d\tau = \\ &= \frac{1}{2}[B(t) - K(t)C(t)B(t)]W(t); \end{aligned} \tag{2.89}$$

$$\begin{aligned} &M[\varepsilon(t)s^T(t)] = \\ &= \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)M[B(\tau)w(\tau)s^T(t) - K(\tau)s(\tau)s^T(t)]d\tau = \\ &= \frac{1}{2}[B(t) - K(t)C(t)B(t)]W(t)B^T(t)C^T(t) - \\ &- \frac{1}{2}K(t)Q(t)V(t)Q^T(t). \end{aligned} \tag{2.90}$$

Подставляя (2.89) и (2.90) и их транспонированные значения в (2.88), получим уравнение для дисперсионной матрицы ошибок

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}P(t)= \\
&=[A(t)-K(t)C^*(t)]P(t)+P(t)[A(t)-K(t)C^*(t)]^T- \\
&-B(t)W(t)B^T(t)C^T(t)K^T(t)-K(t)C(t)B(t)W(t)B^T(t)+ \\
&+K(t)[Q(t)V(t)Q^T(t)+C(t)B(t)W(t)B^TC^T(t)]K^T(t)+ \\
&+B(t)W(t)B^T(t).
\end{aligned}
\tag{2.91}
$$

Уравнение (2.85) преобразуем, подставив в него выражение (2.82). После приведения подобных членов получим уравнение для $P(t)$ в виде

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}P(t)=[A(t)-B(t)W(t)B^T(t)C^T(t)S^{-1}(t)]P(t)+ \\
&+P(t)[A(t^T-B(t)W(t)B^T(t)C^T(t)S^{-1}(t)]^T- \\
&-B(t)\{C^*(t)\}^T\ S^{-1}(t)C^*(t)P(t)+ \\
&+B(t)[W(t)B^T(t)C^T(t)S^{-1}(t)C(t)B(t)W(t)+W(t)]B^T(t)],
\end{aligned}
\tag{2.92}
$$

где матрица $S(t)$ определяется соотношением (2.79).

Начальные условия для уравнения (2.92) можно получить из соотношения

$$P(t_0)=X_0-\hat{X}_0. \tag{2.93}$$

Итак, наилучшей линейной оценкой $\hat{x}(t)$ процесса $x(t)$ по наблюдаемому сигналу $y(t)$ при «небелых» шумах (2.72) является решение дифференциального уравнения (2.85) и уравнения (2.83), где матрица $K(t)$ определяется соотношением (2.82). Дисперсионная матрица $P(t)$ является решением нелинейного дифференциального уравнения (2.92) с начальными условиями (2.93).

§ 2.7. Оптимальная фильтрация нелинейных динамических систем

Большая часть из встречающихся динамических систем и систем измерений являются нелинейными. Уравнениями оптимальных фильтров, полученных в параграфах 2.3–2.5 для линейных систем, можно пользоваться в случае нелинейных систем с «белыми» шумами, если провести линеаризацию относительно номинальной траектории или если непрерывно (или от случая к случаю) проводить линеаризацию относительно текущих оценок начиная с априорной. Пусть динамическая система описывается векторным нелинейным дифференциальным уравнением

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x,u,w)\,. \tag{2.94}$$

Здесь $x(t)\in R^n$ состояние системы, $u(t)\in R^r$ – управляющее воздействие, $w(t)\in R^m$ – возмущение , представленное случайным процессом.

В дополнение к системам, рассматриваемым в данной главе, которые действительно являются линейными, уравнения вида

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + G(t)w(t) \tag{2.95}$$

часто используются при рассмотрении малых отклонений величин $x,\ u,\ w$ от уравнении (2.94) около «номинальной траектории» $\langle \bar{x}(t),\ \bar{u}(t),\ \bar{w}(t)\rangle$. Здесь $\bar{w}(t)$ будет средним значением возмущения, т.е. $\bar{w}(t) = M[w(t)]$, а $\bar{x}(t)$ – желаемой траекторией состояния. Если функция $f(t,x,u,w)$ дифференцируема по всем аргументам, то, обозначая $\tilde{x}(t) = x(t) - \bar{x}(t)$ можно записать

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{u},\bar{w})\right)\tilde{x}(t) +$$
$$+\left(\frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x},\bar{u},\bar{w})\right)\tilde{u}(t) + \left(\frac{\partial f}{\partial w}(\bar{x},\bar{u},\bar{w})\right)\tilde{w}(t) + o(\tilde{x},\tilde{u},\tilde{w}).$$

Если $|\,\tilde{x}(t)\,|,\ |\,\tilde{u}(t)\,|,\ |\,\tilde{w}(t)\,|$ являются малыми, то последнее слагаемое также мало и может рассматриваться как дополнительное возмущение. Таким образом, можно перейти к уравнению (2.95), где $A(t),\ B(t,)\ G(t)$ теперь являются производными функции $f(t,x,u,w)$ по соответствующим переменным, вычисленным вдоль номинальной траектории.

Даже для линейного уравнения (2.95) трудно получить полезные результаты, не делая каких-либо предположений относительно случайного процесса $w(t)$. Поэтому, как и в предыдущих параграфах настоящей главы, будем предполагать, что $w(t)$ – «белый» гауссовский шум.

Рассмотрим один из возможных фильтров для нелинейного непрерывного процесса, который «генерируется» решением нелинейного уравнения, возбуждаемого «белым» шумом:

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x,t) + G(t)w(t). \tag{2.96}$$

Здесь

$$x \in R^n,\ M[w(t)] = \overline{w}(t),$$
$$M[\{w(t) - \overline{w}(t)\}\{w(\tau) - \overline{w}(\tau)\}^T] = W(t)\delta(t-\tau),$$
$$M[x(t_0)] = \bar{x}_0,\ M[\{x(t_0) - \bar{x}_0\}\{x(t_0) - \bar{x}_0\}^T] = X_0,$$
$$M[\{x(t_0) - \bar{x}_0\}\{w(t) - \overline{w}(t)\}^T] = 0.$$

Процесс измерения описывается соотношением

$$y(t) = C(t,x) + v(t), \tag{2.97}$$

где $y \in R^m,\ m \le n;\ M[v(t)] - 0,\ M[v(t)v^T(\tau)] = V(t)\delta(t-\tau)$,

$$M[\{x(t_0) - \bar{x}_0\}v^T(\tau)] = 0,\ M[\{w(t) - \overline{w}(t)\}v^T(\tau)] = 0.$$

Нелинейности через функции $f(x,t)$ и $C(t,x)$ входят соответственно только в уравнения (2.96) и (2.97). Одним из возможных фильтров для рассматриваемой нелинейной системы является следующая очевидная модификация линейного фильтра из § 2.3:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = f(\hat{x},t) + G(t)\overline{w}(t) + \\
&+ P(t)\left\{\frac{\partial C(x,t)}{\partial x}\right\}^T V^{-1}(t)\left[y(t) - C(\hat{x},t)\right], \\
&\hat{x}(t_0) = \bar{x}_0,
\end{aligned}\right\} \tag{2.98}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}P(t) = \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}P(t) + P(t)\left\{\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right\}^T - \\
&- P(t)\left\{\frac{\partial C(x,t)}{\partial x}\right\}^T V^{-1}(t)\frac{\partial C(x,t)}{\partial x}P(t) + G(t)W(t)G^T(t), \\
&P(t_0) = X_{0.}
\end{aligned}\right\}$$

Здесь частные производные $\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}$ и $\frac{\partial C(x,t)}{\partial x}$ могут вычисляться вдоль номинальной траектории или для большей точности их можно вычислять, полагая $x(t) = \hat{x}(t)$. Однако в этом случае матрицу $P(t)$ заранее вычислить нельзя, так как она, согласно выбранной процедуре, зависит от текущей оценки $\hat{x}(t)$, следует вычислять в реальном времени.

§ 2.8. Оптимальное сглаживание и интерполяция для непрерывных процессов

Задача оптимального сглаживания для непрерывных процессов может быть поставлена как задача определения значений $x(t_0)$ и $w(t)$, которые минимизируют критерий качества

$$\begin{aligned} J(x_0, w) = \frac{1}{2}[\hat{x}(t_0) - x(t_0)]^T P^{-1}(t_0)[\hat{x}(t_0) - x(t_0)] + \\ + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} \{ [w(t) - \overline{w}(t)]^T W^{-1}(t)[w(t) - \overline{w}(t)] + \\ + [y(t) - C(t)x(t)]^T V^{-1}(t)[y(t) - C(t)x(t)] \} dt \end{aligned} \tag{2.99}$$

при ограничении

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t)w(t). \tag{2.100}$$

Это детерминированная задача оптимизации, к которой применимы стандартные методы оптимального управления. Гамильтониан в этой задаче имеет вид

$$\begin{aligned} H = \frac{1}{2}[w(t) - \overline{w}(t)]W^{-1}(t)[w(t) - \overline{w}(t)]^T + \\ + \frac{1}{2}[y(t) - C(t)x(t)]V^{-1}(t)[y(t) - C(t)x(t)]^T + \\ + \lambda^T(t)[A(t)x(t) + B(t)w(t)]. \end{aligned} \tag{2.101}$$

Необходимые условия минимума функционала (2.99) при ограничении (2.100) записываются как уравнения Эйлера – Лагранжа.

$$\frac{d}{dt}x(t)=\left\{\frac{\partial H(x,\lambda,w,t)}{\partial\lambda(t)}\right\}^{\mathrm{T}},\quad x(t_0)=\hat{x}(t_0)-P(t_0)\lambda(t_0);$$

$$\frac{d}{dt}\lambda(t)=-\left\{\frac{\partial H(x,\lambda,w,t)}{\partial x(t)}\right\}^{T},\quad \lambda(T)=0; \qquad (2.102)$$

$$\frac{\partial H}{\partial w(t)}=0.$$

Таким образом, учитывая, что

$$\frac{\partial H(x,\lambda,w,t)}{\partial w(t)}=\left[w(t)-\overline{w}(t)\right]W^{-1}(t)+\lambda^{T}(t)B(t)=0,$$

откуда

$$w(t)=\overline{w}(t)-W(t)B(t)\lambda(t), \qquad (2.103)$$

необходимые условия минимума функционала (2.97) будут описываться двухточечной краевой задачей

$$\begin{bmatrix}\frac{d}{dt}x(t)\\ \frac{d}{dt}\lambda(t)\end{bmatrix}=$$

$$+\begin{bmatrix}A(t) & -B(t)W(t)B^{T}(t)\\ -C^{T}(t)V^{-1}(t)C(t) & -A(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ \lambda(t)\end{bmatrix}+ \qquad (2.104)$$

$$+\begin{bmatrix}B(t)\overline{w}(t)\\ C^{T}(t)V^{-1}(t)y(t)\end{bmatrix},$$

$$x(t_0)=\hat{x}(t_0)-P(t_0)\lambda(t_0),\quad \lambda(T)=0. \qquad (2.105)$$

Обозначим решение двухточечной краевой задачи (2.104), (2.105), которым являются сглаживающие оценки в непрерывном случае, через $\hat{x}(t/T)$ и $\hat{w}(t/T)$. Так как двухточечная краевая задача линейна, то решение можно получить либо методами, использующими переходные матрицы, либо методом прогонки. Остановимся на последнем, положим, что решение $x(t)=\hat{x}(t/T)$ может быть представлено в виде

$$x(t)=\hat{x}(t)-P(t)\lambda(t), \qquad (2.106)$$

где $\hat{x}(t)$ и $P(t)$ подлежат определению. Дифференцируя (2.106) и учитывая (2.104), получаем

$$
\begin{aligned}
&A(t)x(t)-B(t)W(t)B^T(t)\lambda(t)+B(t)\overline{w}(t)=\\
&=\frac{d}{dt}\hat{x}(t)-\frac{d}{dt}P(t)\lambda(t)-\\
&-P(t)\left[-C^T(t)V^{-1}(t)C(t)x(t)-A^T(t)\lambda(t)+C^T(t)V^{-1}(t)y(t)\right]
\end{aligned}
$$

или

$$
\begin{aligned}
&-\frac{d}{dt}\hat{x}(t)+A(t)\hat{x}(t)-P(t)C^T(t)V^{-1}(t)C(t)\hat{x}(t)+\\
&+B(t)\overline{w}(t)+P(t)C^{-1}(t)V^{-1}(t)y(t)=\\
&=\Bigg[\quad-\frac{d}{dt}P(t)+A(t)P(t)+P(t)A^T(t)-\\
&--P(t)C^T(t)V^{-1}(t)C(t)P(t)+B(t)W(t)B^T(t)\quad\Bigg]\lambda(t).
\end{aligned}
$$

Таким образом, если потребовать, чтобы $\hat{x}(t)$ и $P(t)$ удовлетворяли уравнениям фильтрации (§ 2.3)

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\hat{x}(t)=A(t)\hat{x}(t)+P(t)C^T(t)V^{-1}(t)\left[y(t)-C(t)\hat{x}(t)\right]-B(t)\overline{w}(t),\\
&\hat{x}(t_0)=\hat{x}_0,\\
&\frac{d}{dt}P(t)=A(t)P(t)+P(t)A^T(t)-P(t)C^T(t)V^{-1}(t)C(t)P(t)+\\
&+B(t)W(t)B^T(t),\ P(t_0)=P_0,
\end{aligned}
\tag{2.107}
$$

то тогда (2.106) становится тождеством. При $t=T$ будет выполняться тождество $\hat{x}(t/T)=x(T)=\hat{x}(T)$, Функцию $\lambda(t)$ можно вычислить, интегрируя «назад» (в обратном времени) (начиная с $t=T$) уравнение

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\lambda(t)=-\left[A(t)-P(t)C^T(t)V^{-1}(t)C(t)\right]\lambda(t)+\\
&+C^T(t)V^{-1}(t)\left[y(t)-C(t)\hat{x}(t)\right],\ \lambda(T)=0,
\end{aligned}
\tag{2.108}
$$

тогда как уравнения (2.107) интегрируются «вперед». Зная $\lambda(t)$, из формулы (2.103) можно найти $\hat{w}(t/T)$, а из формулы (2.106) – $\hat{x}(t/T)$.

Глава 3. Управление линейными стохастическими системами с квадратическим функционалом качества

Применение методов аналитического конструирования оптимальных управлений основано на определенных допущениях, основным из которых является выбор функционала критерия оптимума. В принципе функционал качества может быть выбран из довольно широкого класса. Однако известные решения задачи аналитического конструирования в замкнутой форме получаются только для квадратического функционала. Поэтому синтез на основе квадратических функционалов имеет широкое применение, кроме того, во многих практических задачах он соответствует их существу.

Квадратический критерий имеет еще одну замечательную особенность, допускающую возможность значительного упрощения синтеза оптимального управления в линейных системах при случайных возмущениях. Эта особенность состоит в справедливости так называемого «принципа стохастической эквивалентности» или теоремы разделения. Этот принцип позволяет применить результаты аналитического конструирования управления линейными объектами и методы построения оптимальных фильтров, так как задача аналитического конструирования управлений линейными объектами, подверженных случайным возмущениям, с квадратическим критерием качества сводится к двум последовательно решаемым задачам.

Таким образом, важным следствием теоремы разделения является возможность объединения результатов теории линейной фильтрации случайных сигналов и детерминированной теории оптимального управления при синтезе оптимальных систем.

§ 3.1. Системы с процессами типа «белого» шума

Рассмотрим задачу построения оптимального регулятора для линейной системы, возмущаемой гауссовским «белым» шумом, когда критерий качества является квадратичной формой, начальные условия случайны, но точно известно состояние системы. Представим управляемую систему следующей линейной моделью:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + w(t), \\ &x_0 = x(t_0), \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

где $x \in R^n$, $u \in R^r$, $w \in R^n$; причем

$$\left.\begin{aligned} &M[w(t)] = 0,\ M[w(t)w^T(\tau)] = W(t)\delta(t-\tau); \\ &M[x(t_0)] = 0;\ M[x(t_0)x^T(t_0)] = X_0. \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

Пусть критерий качества есть среднее по ансамблю от квадратичной формы

$$J(x,u) = \\ = \frac{1}{2}M\left[x^T(T)Fx(T) + \int_{t_0}^{T}\left\{x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)\right\}dt\right], \tag{3.3}$$

где матрицы $F(t)$ и $Q(t)$ – положительно полуопределены,

матрица $R(t)$ – положительно определена,

время T – задано.

Требуется выбрать управление $u(t)$, которое минимизирует функционал (3.3).

Процесс $w(t)$ представляет собой случайное возмущение с нулевым средним и малым (по сравнению с характеристическими постоянными времени системы) временем корреляции. Таким образом, предсказать $w(t)$ при $\tau > t$, даже точно зная состояние для $\tau < t$, не представляется возможным. Поэтому оптимальный регулятор эквивалентен детерминированному регулятору

$$u(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)S(t)x(t), \tag{3.4}$$

где $S(t)$ определяется решением матричного дифференциального уравнения типа Риккати

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d}{dt}S(t)=A(t)S(t)+S(t)A^T(t)-\\ -S(t)B(t)R^{-1}(t)B(t)S(t)+Q(t),\\ S(T)=F.\end{array}\right\} \tag{3.5}$$

Найдем уравнения, определяющие поведение оптимальной системы в среднем. Уравнение (3.1) с учетом (3.4) будет иметь вид:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d}{dt}x(t)=\left[A(t)-B(t)R^{-1}(t)B^T(t)S(t)\right]x(t)+w(t),\\ x(t_0)=x_0.\end{array}\right\} \tag{3.6}$$

Легко показать, что ковариация процесса $x(t)$ будет определяться уравнением

$$X(t)=M\left[x(t)x^T(t)\right],\quad \left.\begin{array}{l}\dfrac{d}{dt}X(t)=\left[A(t)-B(t)R^{-1}(t)B^T(t)S(t)\right]X(t)+\\ +X(t)\left[A(t)-B(t)R^{-1}(t)B^T(t)S(t)\right]^T+W(t),\\ X(t_0)=X_0.\end{array}\right\} \tag{3.7}$$

Аналогично находится матрица ковариаций управления

$$U(t)=M\left[u(t)u^T(t)\right],$$

$$U(t)=R^{-1}(t)B^T(t)S(t)X(t)S(t)B(t)R^{-1}(t). \tag{3.8}$$

Определим среднее значение критерия качества, который с учетом (3.4) можно переписать в виде

$$J(x,u)=\frac{1}{2}M\left[\; x^T(T)Fx(T)+\right.$$

$$\left.+\int_{t_0}^{T}\left\{x^T(t)\{Q(t)+S(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)S(t)\}x(t)\right\}dt\;\right]$$

или

$$J(x,u)=\frac{1}{2}tr\left\{\begin{array}{l} FX(T)+ \\ =+\int\limits_{t_0}^{T}\left[\{Q(t)+S(t)B(t)R^{-1}(t)B^{T}(t)S(t)\}X(t)\right]dt \end{array}\right\}, \qquad (3.9)$$

где tr – оператор «след матрицы».

В подынтегральное выражение функционала (3.9) добавим $\frac{d}{dt}\{S(t)X(t)\}$, компенсировав вне интеграла выражением $\{S(t_0)X(t_0)-S(T)X(T)\}$. Принимая во внимание, что $S(T)=F$, и, учитывая (3.6), получим

$$J(x,u)=\frac{1}{2}tr\left\{S(t_0)X(t_0)+\int\limits_{t_0}^{T}S(t)W(t)dt\right\}. \qquad (3.10)$$

При $W(t)=0$ (шум отсутствует) значение критерия качества при оптимальном управлении будет

$$J(x,u)=\frac{1}{2}tr\{S(t_0)X(t_0)\}.$$

Таким образом, поскольку при неотрицательно определенных матрицах $S(t)$ и $W(t)$ величина $tr\int\limits_{t_0}^{T}S(t)W(t)dt$ неотрицательна, наличие шума в системе ($W(t)\neq 0$) увеличивает значение критерия качества.

Рассмотрим статистически стационарный случай. Если управляемая система и шум в ней стационарны (матрицы A, B, W постоянны), матрицы Q, R положительно определены и содержат постоянные элементы, $T\to\infty$ ($F=0$), то регулятор может быть стационарным, т.е. может быть постоянной матрица $\hat{S}$. Матрица ковариаций состояния также постоянна и определяется решением алгебраического уравнения

$$\left[A-BR^{-1}B^{T}\hat{S}\right]X+X\left[A-BR^{-1}B^{T}\hat{S}\right]^{T}+W(t)=0.$$

Матрица ковариаций управления определяется

$$U=R^{-1}B^{T}\hat{S}\,X\,\hat{S}\,B\,R^{-1},$$

где матрица $\hat{S}$ определяется решением алгебраического уравнения

$$\hat{S}A + A\hat{S} - \hat{S}BR^{-1}B^T\hat{S} + Q = 0 .$$

§ 3.2. Принцип стохастической эквивалентности

Пусть для $t \in [t_0, T]$ задана линейная модель системы

$$\left. \begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + w(t), \\ &x(t_0) = x_0 \end{aligned} \right\} \qquad (3.11)$$

и совокупность измерений $y(t)$

$$y(t) = C(t)x(t) + v(t) , \qquad (3.12)$$

где $x \in R^n, u \in R^r, y \in R^r, m \le n;$ $w(t), v(t)$ – «белые» гауссовские шумы, причем $M[w(t)] = 0,\ M[v(t)] = 0,$

$$M\left[\begin{pmatrix} w(t) \\ v(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w^T(\tau) & v^T(\tau) \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} W(t) & \Pi(t) \\ \Pi^T(t) & V(t) \end{pmatrix}\delta(t-\tau) , \qquad (3.13)$$

$x(t_0)$ - гауссовский случайный вектор с нулевым математическим ожиданием, независимый от $w(t)$ и $v(t)$, т.е.

$$\begin{aligned} &M[x(t_0)] = 0,\ M[w(t)x^T(t_0)] = 0,\ M[v(t)x^T(t_0)] = 0, \\ &M[x(t_0)x^T(t_0)] = X(t_0). \end{aligned} \qquad (3.14)$$

Требуется найти такое управление $u(t)$, которое минимизирует функционал

$$\begin{aligned} J(x,u) = \frac{1}{2}M\Big[\ & x^T(T)Fx(T) + \\ + \int_{t_0}^{T} & \left\{\begin{pmatrix} x^T(t) & u^T(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q(t) & N(t) \\ N^T(t) & R(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix}\right\}dt\ \Big]. \end{aligned} \qquad (3.15)$$

Так как оптимальное управление есть функция состояния объекта, а не его измеряемых координат, то использовать функционал качества в том виде, как он записан в (3.15), не представляется возможным, так как $x(t)$ наблюдается по условию задачи в аддитивной связи с помехой типа «белого» шума $v(t)$.

Введем в рассмотрение оценку $\hat{x}(t) \in R^n$ процесса $x(t)$, построенную по измеряемому процессу $y(t)$, и ошибку оценивания $\varepsilon(t)$, определяемую выражением

$$\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t). \tag{3.16}$$

Подставляя в (3.15) $x(t) = \varepsilon(t) + \hat{x}(t)$, представим функционал (3.16) в виде

$$J(x,u) = J_1(\varepsilon) + J_2(\hat{x},u) + J_3(\varepsilon,\hat{x},u), \tag{3.17}$$

где

$$J_1(\varepsilon) = \frac{1}{2} M\left[\varepsilon^T(T) F \varepsilon(T) + \int_{t_0}^{T} \varepsilon^T(t) Q(t) \varepsilon(t) dt \right], \tag{3.18}$$

$$\begin{gathered} J_2(\hat{x},u) = \frac{1}{2} M\Bigg[\hat{x}^T(T) F \hat{x}(T) + \\ + \int_{t_0}^{T} \left\{ \begin{pmatrix} \hat{x}^T(t) & u^T(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q(t) & N(t) \\ N^T(t) & R(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}(t) \\ u(t) \end{pmatrix} \right\} dt \Bigg], \end{gathered} \tag{3.19}$$

$$\begin{gathered} J_3(\varepsilon,\hat{x},u) = M\Bigg[\varepsilon^T(T) F \hat{x}(T) + \\ + \int_{t_0}^{T} \varepsilon^T(t) [Q(t)\hat{x}(t) + N(t) u(t)] dt \Bigg]. \end{gathered} \tag{3.20}$$

Нетрудно видеть, что управление, синтезированное с использованием функционала (3.19), будет являться функцией оценки $\hat{x}(t)$, т.е. $u(t) = -G(t)\hat{x}(t)$, где матрица $G(t)$ будет найдена позже. Таким образом, функционал $J_3(\varepsilon,\hat{x},u) = J_3(\varepsilon,\hat{x})$ будет иметь вид

$$J_3(\varepsilon,\hat{x},u) = M\left[\varepsilon^T(T) F \hat{x}(T) + \int_{t_0}^{T} \varepsilon^T(t) [Q^*(t)] \hat{x}(t) dt \right], \tag{3.21}$$

где $Q^*(t) = Q(t) - N(t)\, G(t)$.

Равенство нулю функционала $J_3(\varepsilon,\hat{x})$, т.е. $J_3(\varepsilon,\hat{x}) = 0$, образует уравнение Винера–Хопфа, которое является в данном случае необходимым и достаточным условием минимума среднеквадратичной ошибки наблюдения, т.е. минимума функционала (3.18). В этом нетрудно убедиться, использовав методику поиска оптимального оператора фильтра, примененную в § 2.3.

Таким образом, если удастся построить оптимальную оценку в смысле минимума функционала (3.18), то функционал $J_3(\varepsilon,\hat{x})$ обращается в нуль. В силу этого задача построения оптимального управления с позиций функционала (3.15) разбивается на две подзадачи:

1. построение оценки $\hat{x}(t)$ процесса $x(t)$ по наблюдениям $y(t)$, обеспечивающей минимум функционалу (3.18);
2. синтез оптимального управления с использованием функционала (3.19).

Это и есть «теорема разделения».

Задача, сформулированная в п.1, является типичной задачей фильтрации. Поэтому, учитывая результаты гл. 2, оптимальный фильтр будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\hat{x}(t)=A(t)\,\hat{x}(t)+B(t)u(t)+K(t)[y(t)-C(t)x(t)]\,,\\&\hat{x}(t_0)=0,\end{aligned}\right\}\qquad(3.22)$$

где

$$K(t)=\left\{P(t)C^T(t)+\Pi(t)\right\}V^{-1}(t)\,,\qquad(3.23)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}P(t)=\\&=[A(t)-\Pi(t)V^{-1}(t)C(t)]P(t)+P(t)[A(t)-\Pi(t)V^{-1}(t)C(t)]^T-\\&-P(t)C^T(t)V^{-1}(t)C(t)P(t)+W(t)-\Pi(t)V^{-1}(t)\Pi^T(t),\\&P(t_0)=X(t_0)\,.\end{aligned}\right\}\qquad(3.24)$$

Напомним, что $P(t)=M[\varepsilon(t)\,\varepsilon^T(t)]$ – дисперсионная матрица ошибок.

Приступим к решению задачи, сформулированной в п.2. Пусть

$$\xi(t)=y(t)-C(t)\hat{x}(t)$$

или, с учетом (3.16),

$$\xi(t)=C(t)\varepsilon(t)+v(t)\,.\qquad(3.25)$$

Найдем ковариацию процесса $\xi(t)$

$$\begin{aligned} &M[\xi(t)\,\xi^T(t)] = C(t)P(t)C^T(t) + C(t)M[\varepsilon(t)\,v^T(t)] + \\ &+ M[v(t)\,\varepsilon^T(t)]C^T(t) + M[v(t)v^T(t)]. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Дифференциальное уравнение для ошибки можно найти, вычитая (3.22) из (3.11):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\varepsilon(t) = [A(t) - K(t)C(t)]\,\varepsilon(t) + w(t) - K(t)v(t), \\ &\varepsilon(t_0) = x(t_0). \end{aligned}\right\} \tag{3.27}$$

Пусть $\varPhi(t,\tau)$ – фундаментальная матрица решений дифференциального уравнения (3.27). Тогда решение этого уравнения будет иметь вид

$$\varepsilon(t) = \varPhi(t,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \varPhi(t,\tau)[w(\tau) - K(\tau)v(\tau)]d\tau\,. \tag{3.28}$$

Слагаемые $C(t)M[\varepsilon(t)\,v^T(t)]$ и $M[v(t)\,\varepsilon^T(t)]C^T(t)$ с учетом (3.28), (3.13) и (3.14) будут иметь вид

$$C(t)M[\varepsilon(t)\,v^T(t)] = \frac{1}{2}C(t)\{\varPi(t) - K(t)V(t)\}\,,$$

$$M[v(t)\varepsilon^T(t)]C^T(t) = \frac{1}{2}\{\varPi(t) - K(t)V(t)\}^T C^T(t)\,,$$

или, учитывая (3.23),

$$C(t)M[\varepsilon(t)\,v^T(t)] + M[v(t)\,\varepsilon^T(t)]\,C^T(t) = -C(t)P(t)C^T(t)\,.$$

Выражение (3.26) с учетом полученных результатов можно переписать в виде

$$M[\xi(t)\,\xi^T(t)] = M[v(t)v^T(t)]\,, \tag{3.29}$$

т.е. в уравнении (3.22) воздействие $K(t)[y(t) - C(t)\hat{x}(t)]$ можно рассматривать как эквивалентный «белый» шум с нулевым средним и корреляционной матрицей $K(t)\,V(t)K^T(t)\delta(t-\tau)$.

Таким образом, оценка, полученная как решение уравнения

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\hat{x}_M(t) = A(t)\hat{x}_M(t) + B(t)u(t) + K(t)v(t), \\ &\hat{x}_M(t) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{3.30}$$

статистически эквивалентна оценке, полученной как решение уравнения (3.22), и в силу этого уравнение (3.30) можно использовать при синтезе статистически оптимального управления $u(t)$.

Задача построения оптимального управления для системы вида (3.30), возбуждаемой процессом типа «белый» шум, с квадратичным критерием качества вида (3.19) рассмотрена в предыдущем параграфе настоящей главы. Управление описывается следующим уравнением

$$u(t) = -R^{-1}(t)[B^T(t)L(t) + N^T(t)]\,\hat{x}(t), \qquad (3.31)$$

где положительно определенная матрица $L(t)$ является решением уравнения типа Риккати

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}L(t) + L(t)[A(t) - B(t)R^{-1}(t)N^T(t)] + \\
&+[A(t) - B(t)R^{-1}(t)N^T(t)]^T L(t) - \\
&- L(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)L(t) + Q(t) - N(t)R^{-1}(t)N^T(t) = 0, \\
&L(T) = F.
\end{aligned}\right\} \qquad (3.32)$$

Управление (3.31), являясь оптимальным управлением для наблюдателя (3.22), в силу принципа статистической эквивалентности является и оптимальным для исходной системы (3.11).

Итак, в данном разделе рассмотрен довольно мощный метод аналитического конструирования регуляторов для систем, содержащих аддитивные «белые» шумы в уравнениях системы и измерении координат ее состояния. Этот метод заключается в создании наблюдателя, вырабатывающего оценку состояния системы и играющего роль ее модели. При этом получается, что размерность векторов состояний системы и наблюдателя одинаковы, т.е. модель системы должна быть адекватна в определенном смысле исходной системе.

При применении на практике методов, разработанных в общей теории оптимальных систем (в данном случае метода, который излагается в данном параграфе), зачастую возникают значительные трудности из-за сложности объектов управления (многомерность, многосвязанность, наличие существенных нелинейностей), невозможность получения достаточной информации о состоянии объекта и т.д. При решении таких задач закономерен подход, заключающийся в построении «упрощенной» модели системы, синтезе управлений на этой модели и использовании полученных управлений на реальном объекте. Эффективность управления в этом случае зависит в первую очередь от адекватности построенной модели процессам, протекающим в исходной системе. При этом предполагается исследование вопросов устойчивости замкнутой системы и точности управления.

§ 3.3. Поведение оптимальной управляемой системы в среднем

Найдем уравнения, определяющие поведение управляемой системы в среднем. Уравнения системы управления и наблюдателя с учетом (3.31) имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = A(t) - B(t)R^{-1}(t)[B^T(t)L(t) + N^T(t)]\hat{x}(t) + w(t), \\ &x(t_0) = x_0\ , \end{aligned}\right\} \tag{3.33}$$

$$y(t) = C(t)x(t) + v(t), \tag{3.34}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = \{A(t) - B(t)R^{-1}(t)[B^T(t)L(t) + N^T(t)]\}\hat{x}(t) + \\ &+ B(t) + K(t)[y(t) - C(t)\hat{x}], \\ &\hat{x}(t) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.35}$$

Рассмотрим выражение $X(t) = M[x(t)x^T(t)]$. Замечая, что $x(t) = \varepsilon(t) + \hat{x}(t)$, получим

$$\begin{aligned} X(t) &= M[\{\varepsilon(t) + \hat{x}(t)\}\{\varepsilon(t) + \hat{x}(t)\}^T] = \\ &= M[\varepsilon(t)\varepsilon^T(t)] + M[\hat{x}(t)\varepsilon^T(t)] + M[\varepsilon(t)\hat{x}^T(t)] + M[\hat{x}(t)\hat{x}^T(t)]. \end{aligned}$$

Или, учитывая, что в случае оптимальной оценки $M[\varepsilon(t)\hat{x}^T(t)] = 0$, получим

$$X(t) = P(t) + \hat{X}(t), \qquad (3.36),$$

где $P(t) = M[\varepsilon(t)\varepsilon^T(t)], \quad \hat{X}(t) = M[\hat{x}(t)\hat{x}^T(t)]$.

Продифференцировав (3.36) по времени, получим

$$\frac{d}{dt}X(t)=\frac{d}{dt}P(t)+\frac{d}{dt}\hat{X}(t). \qquad (3.37)$$

Матрица $\frac{d}{dt}P(t)$ определяется уравнением (3.24). Найдем ковариационную матрицу $\frac{d}{dt}\hat{X}(t)$. Так как

$$\frac{d}{dt}\hat{X}(t)=M\left[\left(\frac{d}{dt}\hat{x}(t)\right)\hat{x}^T(t)\right]+M\left[\hat{x}(t)\left(\frac{d}{dt}\hat{x}(t)\right)^T\right], \qquad (3.38)$$

то, подставляя в (3.38) выражение для $\frac{d}{dt}\hat{x}(t)$ (3.35) и учитывая (3.23), получим

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\hat{X}(t)=M[A(t)-B(t)R^{-1}(t)\{B^T(t)L(t)-N^T(t)\}]\hat{X}(t)+\\
&+\hat{X}(t)M[A(t)-B(t)R^{-1}(t)\{B^T(t)L(t)-N^T(t)\}]^T+\\
&+[P(t)C^T(t)+\Pi(t)]V^{-1}(t)[P(t)C^T(t)+\Pi(t)]^T,\\
&\hat{X}(t_0)=0.
\end{aligned}\right\} \qquad (3.39)$$

Линейное уравнение (3.39) позволит предсказать изменение во времени дисперсий фазовых координат и их смешанных моментов второго порядка. Дисперсионную матрицу управления можно получить, используя (3.31):

$$\begin{aligned}
&U(t)=R^{-1}(t)[B^T(t)L(t)+N^T(t)]\hat{X}(t)[B^T(t)L(t)+\\
&+N^T(t)]^T R^{-1}(t).
\end{aligned} \qquad (3.40)$$

Определим среднее значение критерия качества. С помощью оператора «след матрицы» функционал (3.15), подставляя в него $x(t)=\varepsilon(t)+\hat{x}(t)$, $u(t)=-G(t)\hat{x}(t)$, где $G(t)=R^{-1}(t)[B^T(t)L(t)+N^T(t)]$, и учитывая, что $M[\varepsilon(t)\,\hat{x}(t)]=0$, можно переписать в виде

$$J(x,u)=\frac{1}{2}tr\left\{\ FX(T)+\right.$$

$$\left.+\left\{FX(T)+\int_{t_0}^{T}\left[\begin{pmatrix} Q(t) & N(t)\\ N^T(t) & R(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{X}(t) & -\hat{X}(t)G^T(t)\\ -G(t)\hat{X}(t) & G(t)\hat{X}(t)\hat{G}(t)\end{pmatrix}\right]dt\right\}.\right.$$

К полученному подынтегральному выражению прибавим полный дифференциал $\frac{d}{dt}\{L(t)X(t)\}$ и компенсируем это слагаемыми $L(t_0)X(t_0)-L(T)X(T)$ вне интеграла. Принимая во внимание, что $L(T)=F$, получим

$$
\begin{aligned}
J(x,u)=\frac{1}{2}tr\Bigg\{\ & L(t_0)X(t_0)+ \\
+\int_{t_0}^{T}\Bigg[\ & Q(t)\hat{X}(t)-N(t)G(t)\hat{X}(t)-\hat{X}(t)G^T(t)N^T(t)+ \\
& +R(t)G(t)\hat{X}(t)G^T(t)+\left[\frac{d}{dt}L(t)\right]X(t)+L(t)\left[\frac{d}{dt}X(t)\right]\ \Bigg]dt\ \Bigg\}.
\end{aligned}
\tag{3.41}
$$

Подставляя теперь в (3.41) выражения для $\frac{d}{dt}L(t)$ и $\frac{d}{dt}\hat{X}(t)$, т.е. (3.32) и (3.39) с учетом (3.37), и сократив подобные члены, получим

$$
\begin{aligned}
J(x,u)=\frac{1}{2}tr\Bigg\{\ & L(t_0)X(t_0)+ \\
+\int_{t_0}^{T}\Big[& L(t)W(t)+G^T(t)R(t)G(t)P(t)\Big]dt\ \Bigg\}.
\end{aligned}
\tag{3.42}
$$

В детерминированном случае $W(t)=0, P(t)=0$ и поэтому $\hat{X}(t)=X(t)$, а $J(x,u)=\frac{1}{2}tr\,\{L(t_0)X(t_0)\}$. Поскольку в общем случае $tr\,\{L(t)W(t)\}$ и $tr\,\{G^T(t)R(t)G(t)P(t)\}$ положительны, то наличие шума в системе и измерениях приводит к увеличению значения критерия качества.

В стационарном случае, когда A,B,C,W,V,Π,Q,R,N не зависят от времени, $F=0$, время окончания переходного процесса не задано, управляемая система может достичь статистически стационарного состояния, иными словами $\frac{d}{dt}P=0$, $\frac{d}{dt}L=0$, т.е. матрицы P и L постоянны, а поэтому постоянна и матрица K.

Ковариационные матрицы вектора $X(t)$ и $U(t)$ можно получить, решив нижеследующие алгебраические уравнения:

$$L\left[A-BR^{-1}N^{T}\right]+\left[A-BR^{-1}N^{T}\right]^{T}L-LBR^{-1}B^{T}L+Q-NR^{-1}N^{T}=0,$$

$$\left[A-\Pi V^{-1}C\right]P+P\left[A-\Pi V^{-1}C\right]^{T}-PC^{T}V^{-1}CP+W-\Pi V^{-1}\Pi^{T}=0,$$

$$K=\left[PC^{T}+\Pi\right]V^{-1},$$

$$U=R^{-1}\left[PC^{T}+\Pi\right]V^{-1}\hat{X}V^{-1}\left[PC^{T}+\Pi\right]^{T}R^{-1}.$$

Для отыскания ковариации управления следует отыскать $\hat{X}$, решив алгебраическое уравнение

$$[A-KC]\hat{X}+\hat{X}[A-KC]^{T}+KVK=0.$$

Ковариацию вектора состояния X можно найти, использовав соотношение (3.36)

$$X(t)=P(t)+\hat{X}(t).$$

В заключение заметим, что вся в целом система управления устойчива, если устойчивы состояния равновесия $\frac{d}{dt}P=0$ и $\frac{d}{dt}L=0$. Этими условиями являются:

А) система (A,B) управляема, система (A,C) наблюдаема;

В) матрицы R и V – положительно определенные, матрицы Q и W – положительно полуопределенные.

Часть II. Координатно-параметрическое управление неопределенными объектами

Глава 4. Конструирование алгоритмов оптимизации с помощью модифицированного уравнения Винера – Хопфа

§ 4.1. Постановка задачи

В настоящем параграфе рассматриваются вопросы построения основной конструкции алгоритмов оптимизации нестационарных систем управления, измерение состояния которых производится на фоне помех. Концепция, выработанная при построении алгоритмов оптимизации, может использоваться для решения широкого спектра задач – от построения систем идентификации, решения задач фильтрации нестационарных процессов до построения алгоритмов параметрического управления нестационарными объектами.

Пусть, для определенности, объект описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = f(x,u,w,t), \\ &x(t_0) = x_0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

и измерения его состояния

$$y(t) = C(x,t) + n(t), \tag{4.2}$$

где $x \in R^n$, $y \in R^m$, $n \geq m$, *w(t)* и *n(t)* – гауссовские шумы, причем

$$M[w(t)] = 0,\ M[n(t)] = 0,$$

$$M\left[\begin{pmatrix} w(t) \\ n(t) \end{pmatrix} \left(w^T(\eta)\ n^T(\eta)\right)\right] = \begin{pmatrix} W(t) & \Pi(t) \\ \Pi^T(t) & N(t) \end{pmatrix} \delta(t-\eta),$$

здесь $\delta(t-\eta)$ - функция Дирака.

Отметим, что изменение во времени вектор-функции $f(x,u,w,t)$ происходит вследствие того, что параметры этой вектор-функции находятся под воздействием внешних возмущений, т.е.

$f(x,u,w,t) = f(x,u,w,\eta(t))$, где $\eta(t)$ – параметры объекта, изменяющиеся по неизвестному закону, причем $\|\eta(t)\| \le H = const > 0,\ t \ge t_0$.

Пусть

$$\varepsilon(t) = L(t)x(t) - \Psi(t)\hat{x}(t), \tag{4.3}$$

где $\hat{x}(t) \in R^q$ – оценка процесса есть решение дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = f_m(y,u,\alpha(t)), \\ &\hat{x}(t_0) = \hat{x}_0, \end{aligned} \tag{4.4}$$

$\varepsilon(t) \in R^k$ ошибка наблюдения, $L \in R,\ \Psi \in R$ – линейные операторы, преобразующие $R^n \to R^k$ и $R^q \to R^k$ соответственно, $\alpha \in R^l$ – вектор параметров оптимизации модели. Предположим, что функция $f_m(x,u,\alpha)$ дважды дифференцируема по $\alpha(t)$.

Следует отметить, что этап выбора структуры модели чрезвычайно ответственен. Уместность, применимость и эффективность построенной оценки существенно зависит от степени достоверности, с которой математическая модель описывает реальную ситуацию (объект, измерения, внешние параметрические возмущения). В большинстве практических задач полная, точная модель вообще отсутствует, и ее построение связано с большими трудностями, а потому задачу построения оценки по измеряемому процессу *y(t)* приходится решать при неполном знании модели. Еще больше усложняется задача, когда шумы $w(t)$ и *n(t)* или/и параметры объекта (4.1) меняются неконтролируемым образом.

Кроме того, определение состояния стохастического объекта, описываемого нелинейными дифференциальными уравнениями, по измерениям его фазовых составляющих на фоне помех требует реализации решений нелинейных дифференциальных уравнений. Причем точное построение, например, нелинейного фильтра, невозможно и, что очень важно, получение оценки точности аппроксимации при субоптимальной реализации нелинейного фильтра либо затруднено, либо невозможно.

Альтернативным предложением в приведенных ситуациях может быть построение линейной модели с перестраиваемыми параметрами.

Задача заключается в построении оценки процесса $\hat{x}(t)$ на модели (4.4) по наблюдениям *y(t)* наилучшей с позиций функционала

$$J(\varepsilon) = M[F(\varepsilon)], \tag{4.5}$$

методом соответствующего управления параметрами $\alpha(t)$. Таким образом, функционал (4.5) следует записать в виде

$$J(\varepsilon) = M[F(\varepsilon(t,\alpha))]. \tag{4.6}$$

Функция потерь $F(\varepsilon(t,\alpha))$ обычно представляет собой четную функцию невязки, т.е.

$$F(\varepsilon(t,\alpha)) = F(-\varepsilon(t,\alpha)).$$

Наиболее распространенными функциями потерь являются квадратичные функции $F(\varepsilon(t,\alpha)) = \varepsilon^T(t,\alpha)\varepsilon(t,\alpha)$. Реже применяются модульные функции потерь $F(\varepsilon(t,\alpha)) = \|\varepsilon(t,\alpha)\|$. Еще реже используются функции потерь, отличные от квадратичных и модульных [78, 80].

Метод минимизации квадратичного функционала

$$J(\varepsilon) = M\|\varepsilon(t,\alpha)\|^2 \tag{4.7}$$

соответствует широко распространенному методу наименьших квадратов. Этот метод при гауссовских полезных процессах и гауссовских шумах в измерении позволяет выразить минимизируемый функционал (4.6) в явной аналитической форме через корреляционные функции.

Минимизация же неквадратических функционалов приводит к необходимости решения нелинейной системы уравнений.

§ 4.2. Общие условия минимума функционала качества

Условия, определяющие оптимальное решение $\alpha^0(t)$, запишутся в виде

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial\alpha(t)}J(\varepsilon) = M\left[\frac{\partial}{\partial\alpha(t)}F(\varepsilon(t,\alpha))\right] = 0, \\ &\frac{\partial^2}{\partial\alpha_i(t)\partial\alpha_j(t)}J(\varepsilon) = M\left[\frac{\partial^2 F(\varepsilon(t,\alpha))}{\partial\alpha_i(t)\partial\alpha_j(t)}\right] > 0,\ i, j = 1,\dots,l,\ при\ \alpha(t) = \alpha^0(t). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Векторы первого уравнения в (4.8)

$$\frac{\partial}{\partial\alpha(t)}J(\varepsilon) = \left(\frac{\partial J(\varepsilon)}{\partial\alpha_1},\dots,\frac{\partial J(\varepsilon)}{\partial\alpha_l}\right)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial\alpha(t)}\left[F(\varepsilon(t,\alpha)\right] = \left(\frac{\partial F(\varepsilon(t,\alpha))}{\partial\alpha_1},\dots,\frac{\partial F(\varepsilon(t,\alpha))}{\partial\alpha_l}\right)$$

представляют собой градиенты средних потерь и функции потерь соответственно. Матрицы во втором уравнении (4.8)

$$\frac{\partial^2 J(\varepsilon)}{\partial\alpha_i(t)\partial\alpha_j(t)},\quad \frac{\partial F(\varepsilon(t,\alpha))}{\partial\alpha_i(t)\partial\alpha_j(t)}$$

представляют собой матрицы Гессе – матрицы вторых производных функции средних потерь и функции потерь соответственно.

Условия (4.8) являются условиями идентифицируемости.

Как уже отмечалось ранее, при синтезе оптимальных систем нередко используются квадратичные функционалы

$$J(x,\hat{x}) = M\left\|L(t)x(t) - \Psi(t)\hat{x}(t)\right\|^2. \tag{4.9}$$

Прежде чем находить общее условие минимума функционала вида (4.9), отметим, что достаточно большое количество моделей объектов управления можно описать с помощью систем линейных дифференциальных уравнений с неполной информацией о параметрах и векторе состояния. Для таких моделей справедливо

$$\hat{x}(t) = \Im(\alpha(t),t)y(t), \tag{4.10}$$

где $\Im(\alpha(t),t) \in R$ – пространство линейных операторов с параметрами оптимизации $\alpha(t)$.

В общем случае на структуру и параметры линейного оператора $\Im(\alpha(t),\tau)$ могут быть наложены ограничения, т.е. оператор $\Im(\alpha(t),t) \in R_1$, где $R_1 \subset R$, имеет непроизвольную (заданную) структуру.

Покажем, что оптимальный оператор $\Im^0(\alpha(t),t) = \Im(\alpha^0(t),t) \in R_1$, где $\alpha^0(t)$ – значения параметров оптимизации оператора $\Im(\alpha(t),t)$, при которых $\hat{x}(t)$ доставляет минимум функционалу (4.9), удовлетворяет условию

$$M\left[\left\{L(t)x(t) - \Psi(t)\Im(\alpha^0(t),t)y(t)\right\}^T \left\{\aleph(t)y(t)\right\}\right] = 0, \quad \aleph(t) \neq 0\,. \qquad (4.11)$$

Дли гауссовских процессов и линейных операторов условие (4.11) является необходимым и достаточным условием минимума функционала (4.9) и имеет вид уравнения Винера – Хопфа [9, 54].

Для доказательства положим

$$\Im(\alpha(t),t) = \Im(\alpha^0(t),t) + \lambda\,\aleph(t), \qquad (4.12)$$

где $\aleph \in R_1$ - линейный ненулевой оператор, такой, что $\Im(\alpha(t),\tau) \in R_1$,

λ – весовой коэффициент.

Подставив (4.12) в (4.10) и затем в (4.9), получим критерий качества как функцию от весового коэффициента.

Принимая во внимание, что оператор $\Im(\alpha(t),\tau)$ совпадает с оптимальным оператором $\Im(\alpha^0(t),\tau)$ только при $\lambda = 0$, найдем

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} J(\ldots\lambda) \quad при \quad \lambda = 0,$$

т.е.

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} M\left\| L(t)x(t) - \Psi(t)\left[\Im(a,t) + \lambda\,\aleph(t)\right]y(t)\right\|^2 = 0 \quad при \quad \lambda = 0\,.$$

В результате получим выражение, совпадающее с (4.11).

Условие вида (4.11) можно получить, если исследовать функционал при $\alpha(t) = \alpha^0(t)$. Условия оптимальности будут иметь вид

$$\left[\frac{\partial}{\partial\alpha(t)} J(x,\hat{x})\right]^T = M\left[-\left\{\frac{\partial\Psi(t)\hat{x}(t)}{\partial\alpha(t)}\right\}^T \{L(t)x(t)-\Psi(t)\hat{x}(t)\}\right] = 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha_i(t)\partial\alpha_j(t)} J(x,\hat{x}) = M\left[\left\{\frac{\partial\Psi(t)\hat{x}(t)}{\partial\alpha_i(t)}\right\}^T \frac{\partial\Psi(t)\hat{x}(t)}{\partial\alpha_j(t)}\right] > 0,\ i,j=1,\dots,l,\ \textit{при}\ \alpha(t)=\alpha^0(t).$$

Если пространство операторов объекта и его модели линейное, то условие (4.11) является необходимым и достаточным условием минимума функционала (4.9). В общем же случае, когда пространство операторов объекта и его модели произвольное, условие (4.11) является достаточным и для получения необходимых условий требуется наложение дополнительных ограничений на класс этих операторов.

Таким образом, уравнение (4.11) для линейных операторов может иметь только одно решение. Вопрос о том, имеется ли вообще решение, в общем случае остается открытым. Однако вопрос о существовании решения уравнения (4.11) выясняется автоматически во всех случаях, когда удается найти решение этого уравнения.

Заметим также, что уравнение (4.11) всегда имеет решение, если множество R_1 замкнуто, т.е. содержит пределы всех возможных последовательностей своих элементов. Если множество R_1 не замкнуто, то уравнение (4.11) может не иметь решения.

В дальнейшем будем полагать, что ограничения на операторы объекта и его модели накладываются такие, при которых решение уравнения (4.11) существует.

Полученное выше сформулируем в виде теоремы.

Теорема 4.2.1

Пусть объект описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x,u,w,t),$$
$$x(t_0) = x_0$$

и измерения его состояния

$$y(t) = C(t) + n(t),$$

где $x \in R^n$, $y \in R^m$, $n \ge m$, *w(t)* и *n(t)* – центрированные гауссовские шумы. Тогда оптимальный оператор $\Im^0(\alpha(t),t) = \Im(\alpha^0(t),t) \in R$, где R – пространство линейных операторов, $\alpha^0(t)$ – значения параметров оптимизации оператора $\Im(\alpha(t),t)$, при которых $\hat{x}(t)$ доставляет минимум функционалу $J(x,\hat{x}) = M\left\|L(t)x(t) - \Psi(t)\hat{x}(t)\right\|^2$,

удовлетворяет условию

$$M\left[\left\{L(t)x(t) - \Psi(t)\Im(\alpha^0(t),t\ )y(t)\right\}^T \left\{\aleph(t)y(t)\right\}\right] = 0, \quad \aleph(t) \ne 0 \ .$$

§ 4.3. Основная конструкция алгоритмов оптимизации в задачах идентификации

Типичная схема системы идентификации с параметрической оптимизацией модели объекта представлена на рис. 4.1.

Сделаем ряд предположений об объекте. Пусть объект описывается нелинейным дифференциальным уравнением

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x,u,w,t), \ x(t_0) = x_0 .$$

Вектор-функция $f(x,u,w,t)$ содержит параметры $\eta(t) \in \Re_\eta$, изменяющиеся под воздействием внешних возмущений, т.е. $f(x,u,w,t) = f(x,u,w,\eta(t))$, и допускает дифференцирование по совокупности переменных необходимое количество раз.

В качестве модели объекта используется модель, описываемая уравнением вида (4.4),

$$\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = f_m(y,u,\alpha(t)),$$
$$\hat{x}(t_0) = \hat{x}_0.$$

Критерий качества идентификации в этой задаче имеет вид

$$J(\varepsilon) = M\left[F(\varepsilon\ (t,\alpha,\eta))\right]. \qquad (4.13)$$

В задачах идентификации можно использовать первое из условий (4.8). Тогда

$$\frac{d}{dt}\alpha(t) = -M\left[\left\{\frac{\partial F(\varepsilon(t,\alpha,\eta))}{\partial \alpha(t)}\right\}^T\right], \qquad (4.14)$$
$$\alpha(t_0) = \alpha_0.$$

Найдем условие, при выполнении которого алгоритмы вида (4.14) обеспечивают необходимые свойства процессу оптимизации. Это условие имеет вид

$$\frac{d}{dt}J(\varepsilon) = \frac{\partial}{\partial t}J(\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial \alpha(t)}J(\varepsilon)\frac{d}{dt}\alpha(t) + \frac{\partial}{\partial \eta(t)}J(\varepsilon)\frac{d}{dt}\eta(t) \le 0\,.$$

Учитывая (4.14) и то обстоятельство, что функционал (4.13) в явном виде не зависит от t, получим

$$\frac{d}{dt}J(\varepsilon) = -\left\{M\left[\left\{\frac{\partial F(\varepsilon(t,\alpha,\eta))}{\partial \alpha(t)}\right\}\right]\right\}M\left[\left\{\frac{\partial F(\varepsilon(t,\alpha,\eta))}{\partial \alpha(t)}\right\}^T\right] +$$
$$+\left\{M\left[\left\{\frac{\partial F(\varepsilon(t,\alpha,\eta))}{\partial \eta(t)}\right\}\right]\right\}\frac{d}{dt}\eta(t) \le 0.$$

Очевидно, что это условие будет выполняться, если скорость перестройки параметров модели будет отвечать условию

$$\left\|M\left[\frac{\partial F(\varepsilon(t,\alpha,\eta))}{\partial \alpha(t)}\right]\right\|^2 > \left|\left\{M\left[\frac{\partial F(\varepsilon(t,\alpha,\eta))}{\partial \eta(t)}\right]\right\}\frac{d}{dt}\eta(t)\right|. \qquad (4.15)$$

Таким образом, выполнение условия (4.15) гарантирует успешное «отслеживание» изменений параметров объекта с выбранными алгоритмами изменения параметров модели (4.4). При этом обеспечивается «перевод» функционала качества из любых периферийных значений к его минимальному значению асимптотически.

Предположение о наблюдаемости объекта и неравенство (4.15) образуют необходимые и достаточные условия идентифицируемости нестационарной системы.

Если изменение параметров $\eta(t)$ носит квазистационарный характер, т.е. имеются интервалы времени, в которых $\eta = const$, и $\alpha^0(t)$ – значения параметров модели, при которых функционал (4.13) достигает минимума, то для ошибки

$$\delta(t) = \alpha(t) - \alpha^0 \qquad (4.16)$$

можно найти уравнение динамики. Продифференцировав (4.16) по t и учитывая (4.14), получим

$$\frac{d}{dt}\delta(t) = -M\left[\left\{\frac{\partial F(\varepsilon,\alpha,\eta)}{\partial \alpha(t)}\right\}^T\right], \qquad (4.17)$$
$$\delta_0 = \alpha^0 - \alpha_0.$$

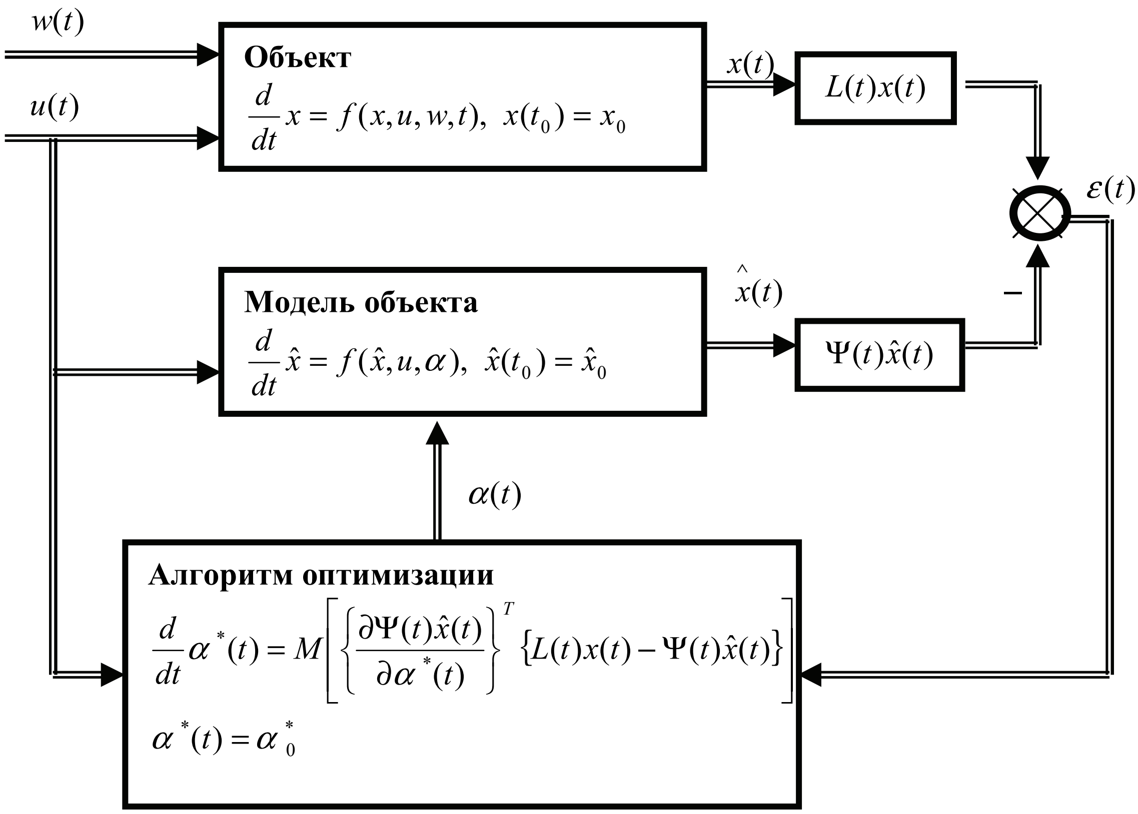

Рис. 4.1. Блок-схема системы идентификации нестационарного объекта методом настраиваемой модели

Разлагая $\partial F(\varepsilon,\alpha,\eta))/\partial\alpha(t)$ в ряд относительно α^0 и ограничиваясь линейным приближением по δ, получим

$$\frac{d}{dt}\delta(t) = -M\left[\left\{\frac{\partial F(\varepsilon,\alpha,\eta)}{\partial\alpha(t)}\right\}^T_{\text{при } \alpha=\alpha^0}\right] - M\left[\left\{\frac{\partial^2 F(\varepsilon,\alpha,\eta)}{\partial\alpha^2(t)}\right\}_{\text{при } \alpha=\alpha^0}\right]\delta(t), \quad (4.18)$$

или, учитывая первое выражение (4.8), получим

$$\frac{d}{dt}\delta(t) = -M\left[\left\{\frac{\partial^2 F(\varepsilon,\alpha,\eta)}{\partial\alpha^2(t)}\right\}_{\text{при } \alpha=\alpha^0}\right]\delta(t), \qquad (4.19)$$

$$\delta_0 = \alpha^0 - \alpha_0.$$

Для квадратичных функционалов вида (4.9) алгоритм оптимизации имеет вид

$$\frac{d}{dt}\alpha(t) = M\left[\left\{\frac{\partial\Psi(t)\hat{x}(t)}{\partial\alpha(t)}\right\}^T\{L(t)x(t) - \Psi(t)\hat{x}(t)\}\right], \qquad (4.20)$$

$$\alpha(t_0) = \alpha_0.$$

Разновидностью алгоритма (4.20) является [79]

$$\frac{d}{dt}\alpha(t) = \Gamma M\left[\left\{\frac{\partial\Psi(t)\hat{x}(t)}{\partial\alpha(t)}\right\}^T\{L(t)x(t) - \Psi(t)\hat{x}(t)\}\right], \qquad (4.21)$$

$$\alpha(t_0) = \alpha_0,$$

где Г – матрица усиления. Выбор этой матрицы определяет тот или иной конкретный метод. Так, скалярная матрица усиления

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & & 0 & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & & & \gamma \end{bmatrix} = \gamma E, \ \gamma > 0,$$

где E – единичная матрица, соответствует градиентному методу. Диагональная матрица усиления

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & & 0 & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & & \gamma_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & & & \gamma_N \end{bmatrix}, \ \gamma_i > 0, \ i = 1,\dots,N,$$

соответствует псевдоградиентному методу. Обратная матрица, элементы которой

$$\frac{\partial^2 \Psi(t)\hat{x}(t)}{\partial \alpha_i \, \partial \alpha_j}, \; i, j = 1, \ldots, N, \tag{4.22}$$

соответствует методу Ньютона. Если же в (4.22) $\alpha(t) = \alpha(t_0)$, то алгоритм (4.14) соответствует модифицированному методу Ньютона.

Что касается значения функционала качества (4.9), принимаемого при реализации системы идентификации с алгоритмами оптимизации типа (4.20), то справедливо следующее соотношение:

$$M\left\|L(t)x(t) - \Psi(t)\Im(\alpha^0(t), \tau)y(t)\right\|^2 \le M\left\|L(t)x(t) - \Psi(t)\Im(\alpha(t), \tau)y(t)\right\|^2,$$

или

$$J(x, \hat{x}^0) \le J(x, \hat{x}).$$

§ 4.4. Модифицированное уравнение Винера–Хопфа в задачах фильтрации нестационарных процессов

Задача линейной фильтрации, первоначально изученная Колмогоровым и Винером в специальном случае, была позднее всесторонне исследована Калманом и Бьюси [9]. Многочисленные приложения подтвердили успех их теории, которая базируется на использовании моделей полезного случайного процесса и шума. Однако реализация фильтра Калмана–Бьюси требует знания параметров этих моделей на всем интервале наблюдения. Понятно, что для выделения нестационарного полезного процесса на фоне нестационарных шумов использование в полной мере результатов Калмана – Бьюси невозможно. Кроме того, фильтр Калмана – Бьюси оптимален в среднем. На отдельных реализациях этот фильтр может быть далеко не оптимальным. В данном разделе книги рассматривается задача построения нестационарного фильтра, наделенного способностью оптимизировать свою работу по мере накопления необходимой для этого информации [7].

Пусть задан полезный гауссовский марковский процесс как результат прохождения нестационарного «белого» шума через линейную динамическую систему

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t)\omega(t), \\ &x(t_0) = x_0 . \end{aligned}\right\} \tag{4.23}$$

Задан измеряемый процесс

$$y(t) = Cx(t) + n(t). \tag{4.24}$$

В (4.23) и (4.24) $x \in R^n$, $y \in R^m$, $\omega \in R^r$, $n \in R^m$. Нестационарные процессы $\omega(t)$ и *n(t)* –«белые» гауссовские центрированные шумы с интенсивностями *W(t)* и *N(t)*. Пара $\langle A, C \rangle$ наблюдаема. Предполагается, что шумы $\omega(t)$ и *n(t)* некоррелированны и $M\left[x(t_0)^T \omega(t)\right] = 0,\ M\left[x(t_0)^T n(t)\right] = 0$.

Требуется построить фильтр оптимальный в смысле минимума дисперсии ошибки выделения полезного процесса на фоне шумов, т.е. функционал качества имеет вид

$$J(\varepsilon) = M[\varepsilon^T(t)\varepsilon(t)], \tag{4.25}$$

здесь M – знак математического ожидания и

$$\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t), \tag{4.26}$$

где $\hat{x}(t)$ – оценка полезного процесса.

Фильтр Калмана–Бьюси имеет вид [9]

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = A(t)\hat{x}(t) + K(t)[y(t) - C\hat{x}(t)], \\ &\hat{x}(t_0) = \bar{x}_0, \end{aligned} \tag{4.27}$$

здесь $\bar{x}_0 = M[x(t_0)]$,

$$K(t) = P(t)CN^{-1}(t), \tag{4.28}$$

где $P(t) = M[\varepsilon(t)\varepsilon^T(t)]$ – дисперсионная матрица ошибок, являющаяся решением уравнения типа Риккати

$$\frac{d}{dt}P(t) = A(t)P(t) + P(t)A^T(t) - P(t)C^T N^{-1}(t)CP(t) + B(t)W(t)B^T(t),$$
$$P(t_0) = M[(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)^T]. \qquad (4.29)$$

Ошибка фильтрации при этом будет решением дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt}\varepsilon(t) = \left[A(t) - K(t)C\right]\varepsilon(t) + B(t)\omega(t) - K(t)n(t),$$
$$\varepsilon(t_0) = x_0 - \bar{x}_0. \qquad (4.30)$$

В силу того что параметры матриц А*(t), B(t), W(t)* и *N(t)* неизвестны, реализовать фильтр в виде (4.27) – (4.29) невозможно.

Сделаем предварительные предположения. Предположим, что можно представить

$$A(t) = A + a(t),\ B(t) = B + b(t), \qquad (4.31)$$

тогда

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}x(t) = [A + a(t)]x(t) + [B + b(t)]\,\omega^*(t),\\ &x(t_0) = x_0,\end{aligned}\right\} \qquad (4.32)$$

здесь *a(t), b(t)* – матрицы возмущенных параметров, $\omega^*(t)$ – стационарный «белый» шум с интенсивностью W^* (нестационарность процесса $\omega(t)$ «вынесена» в изменение параметров матрицы *b(t)*).

Предположим, что матрица интенсивностей нестационарного «белого» шума *N(t)* представима в виде $N(t) = N + \delta(t)$.

Предположим также, что неопределенность имеет интервальный характер, т.е. имеют место следующие неравенства:

$\underline{a}_{ij} \le a_{ij}(t) \le \bar{a}_{ij}$, $\underline{b}_{ik} \le b_{ik}(t) \le \bar{b}_{ik}$, $\underline{\delta}_{kl} \le \delta_{kl}(t) \le \bar{\delta}_{kl}$, *i,j=1,...,n; k,l=1,...,r,* $t \ge t_0$

(черта внизу – минимальное значение, черта вверху – максимальное значение).

Основную структуру фильтра будем строить в виде

$$\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = [A + \varphi(t)]\hat{x}(t) + [K^*(t) + k(t)][y(t) - C\hat{x}(t)],$$
$$\hat{x}(t_0) = \bar{x}_0, \qquad (4.33)$$

где матрица $K^*(t)$ находится как решение следующего уравнения:

$$K^*(t) = P^*(t)CN^{-1}, \tag{4.34}$$

здесь $P^*(t)$ – решение дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}P^*(t) = AP^*(t) + P^*(t)A^T - P^*(t)C^T N^{-1}CP^*(t) + BW^*B^T, \\ &P^*(t_0) = P(t_0). \end{aligned} \tag{4.35}$$

Решения (4.35) и (4.34) реализуются на стадии проектирования нестационарного фильтра.

Таким образом, фильтр синтезирован с точностью до значений параметров матриц $\varphi(t)$ и $k(t)$, на которые возлагается задача оптимизировать работу фильтра в смысле функционала (4.25) по мере накопления необходимой для этих целей информации.

Сформируем алгоритм оптимизации. Необходимое, а в рассматриваемой постановке задачи и достаточное, условие минимума функционала (4.25) описывается уравнением Винера – Хопфа [9]:

$$M[\{x(t) - \hat{x}(t)\}^T \{L(t)y(t)\}] = 0, \tag{4.36}$$

здесь оператор *L(t)* преобразует вектор $y \in R^m$ в вектор $z \in R^n$.

Уравнение (4.36) должно выполняться для любого ненулевого линейного оператора $L(t) \in R$ его положим в основу конструкции алгоритмов оптимизации фильтра (4.33).

Организуем векторы $\varphi^*(t)$ и $k^*(t)$ размерностью $n^2 \times 1$ и $(n \times m) \times 1$ из элементов матриц *a(t)* и *k(t)* соответственно.

Представим конструкцию алгоритмов оптимизации в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\varphi^*(t) = M[\{\Pi_\varphi(t)y(t)\}\{x(t) - \hat{x}(t)\}], \\ &\varphi^*(t_0) = \varphi^*_0, \end{aligned} \tag{4.37}$$

$$\frac{d}{dt}k^*(t) = M[\{\Pi_k(t)y(t)\}\{x(t)-\hat{x}(t)\}],$$
$$k^*(t_0) = k_0^*, \tag{4.38}$$

здесь $\Pi_\varphi(t)$ и $\Pi_k(t)$ - линейные операторы, преобразующие m – мерный вектор *y(t)* в матрицы размерности $(n\times n)\times m$ и $(n\times m)\times m$ соответственно.

При выборе операторов $\Pi_\varphi(t)$ и $\Pi_k(t)$ потребуем, чтобы процесс оптимизации, т.е. перевода функционала качества из периферийных его значений в минимум, обладал свойством асимптотики. Это означает, что должно выполняться условие

$$\frac{d}{dt}J(x,\hat{x}) \le 0,$$

т.е.

$$\frac{\partial J(x,\hat{x})}{\partial t} + \frac{\partial J(x,\hat{x})}{\partial \varphi^*(t)}\frac{d\,\varphi^*(t)}{dt} + \frac{\partial J(x,\hat{x})}{\partial k^*(t)}\frac{d\,k^*(t)}{dt} \le 0. \tag{4.39}$$

Так как функционал (4.25) в явном виде не зависит от *t*, *x(t)* не зависит от параметров оптимизации $\varphi^*(t)$ и $k^*(t)$, то условие (4.39), учитывая (4.38), можно переписать в виде

$$\left\{M\left[-\frac{\partial\hat{x}(t)}{\partial\varphi^*(t)}\right]^T\{x(t)-\hat{x}(t)\}\right\}^T M\left[\Pi_\phi(t)y(t)\{x(t)-\hat{x}(t)\}\right] +$$
$$+\left\{M\left[-\frac{\partial\hat{x}(t)}{\partial k^*(t)}\right]^T\{x(t)-\hat{x}(t)\}\right\}^T M\left[\Pi_k(t)y(t)\{x(t)-\hat{x}(t)\}\right] \le 0. \tag{4.40}$$

Нетрудно видеть, что выбор или назначение операторов $\Pi_\varphi(t)$ и $\Pi_k(t)$ в виде

$$\Pi_\varphi(t)y(t) = \left\{\frac{\partial\hat{x}(t)}{\partial\varphi^*(t)}\right\}^T,\ \Pi_k(t)y(t) = \left\{\frac{\partial\hat{x}(t)}{\partial k^*(t)}\right\}^T \tag{4.41}$$

обеспечивает асимптотические свойства процессу оптимизации.

Алгоритмы (4.37) и (4.38) с учетом (4.41) принимают вид

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\varphi^*(t) = M\left[\left\{\frac{\partial \hat{x}(t)}{\partial \varphi^*(t)}\right\}^T \{x(t)-\hat{x}(t)\}\right],\\
&\varphi^*(t_0) = \varphi^*_0,\\
&\frac{d}{dt}k^*(t) = M\left[\left\{\frac{\partial \hat{x}(t)}{\partial k^*(t)}\right\}^T \{x(t)-\hat{x}(t)\}\right],\\
&k^*(t_0) = k^*_0.
\end{aligned}
\tag{4.42}
$$

Условия, определяющие оптимальные значения параметров матриц $\varphi(t)$ и $k(t)$, запишутся при $\varphi(t)=\phi^0(t)$ и $k(t)=k^0(t)$ в виде

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \varphi^*(t)}J(x,\hat{x}) = -2M\left[\left\{\frac{\partial \hat{x}(t)}{\partial \varphi^*(t)}\right\}^T \{x(t)-\hat{x}(t)\}\right] = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial k^*(t)}J(x,\hat{x}) = -2M\left[\left\{\frac{\partial \hat{x}(t)}{\partial k^*(t)}\right\}^T \{x(t)-\hat{x}(t)\}\right] = 0,
\end{aligned}
\tag{4.43}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial \varphi^*_i(t)\partial \varphi^*_j(t)}J(x,\hat{x}) = -2M\left[\left\{\frac{\partial^2 \hat{x}(t)}{\partial \varphi^*_i(t)\partial \varphi^*_j(t)}\right\}^T \{x(t)-\hat{x}(t)\}\right]+\\
&+2M\left[\left\{\frac{\partial \hat{x}(t)}{\partial \varphi^*_i(t)}\right\}^T \frac{\partial \hat{x}(t)}{\partial \varphi^*_j(t)}\right] = 2M\left[\left\{\frac{\partial \hat{x}(t)}{\partial \varphi^*_i(t)}\right\}^T \frac{\partial \hat{x}(t)}{\partial \varphi^*_j(t)}\right] > 0, \quad i,j=1,\dots,n^2,\\
&\frac{\partial^2}{\partial k^*_i(t)\partial k^*_h(t)}J(x,\hat{x}) = -2M\left[\left\{\frac{\partial^2 \hat{x}(t)}{\partial k^*_i(t)\partial k^*_h(t)}\right\}^T \{x(t)-\hat{x}(t)\}\right]+\\
&+2M\left[\left\{\frac{\partial \hat{x}(t)}{\partial k^*_i(t)}\right\}^T \frac{\partial \hat{x}(t)}{\partial k^*_h(t)}\right] = 2M\left[\left\{\frac{\partial \hat{x}(t)}{\partial k^*_i(t)}\right\}^T \frac{\partial \hat{x}(t)}{\partial k^*_h(t)}\right] > 0, \quad i,h=1,\dots,n\times m.
\end{aligned}
\tag{4.44}
$$

Условие положительной определенности вторых производных говорит о возможности достижения минимального значения функционала качества (4.25) при использовании алгоритмов вида (4.42).

Отметим, что в алгоритмы вида (4.42) входит процесс $x(t)$, что делает эти алгоритмы нереализуемыми.

Для построения реализуемых алгоритмов оптимизации в указанном выше смысле построим функционал, эквивалентный заданному функционалу (4.25).

Определение 4.4.1.

Два функционала, введенные для оценки решения задачи фильтрации, эквивалентны, если они достигают своих минимумов при одних и тех же значениях параметров фильтра. При этом значения минимумов могут быть различными.

Введем в рассмотрение функционал

$$J(\varepsilon(t), \varepsilon(t-\gamma)) = M\left[\{x(t) - \hat{x}(t)\}^T \{x(t-\gamma) - \hat{x}(t-\gamma)\}\right] = trM\left[\varepsilon(t)\varepsilon^T(t-\gamma)\right]. \qquad (4.45)$$

В выражении (4.45) оператор *tr* означает «след матрицы».

При малых значениях сдвига γ по сравнению с динамикой модели (4.23) функционал (4.45) эквивалентен в указанном смысле исходному функционалу (4.25). Необходимые и достаточные для данной задачи условия минимума функционала (4.45) имеют, в силу симметричности корреляционной функции, вид

$$M[\{x(t_1) - \hat{x}(t_1)\}^T \{L(t)y(t)\}] = M[\{x(t) - \hat{x}(t)\}^T \{L(t_1)y(t_1)\}] = 0, \; t_1 = t - \gamma. \qquad (4.46)$$

Однако использование условия (4.43) для построения алгоритмов оптимизации не приведет к реализуемым результатам, так как эти условия содержат процесс $x(t)$, который измеряется в виде (4.24).

Введем в рассмотрение функционал

$$J(\varepsilon^*(t), \varepsilon^*(t_1)) = M\left[\{y(t) - C\hat{x}(t)\}^T \{y(t_1) - C\hat{x}(t_1)\}\right], \; t_1 = t - \gamma, \; \gamma \neq 0. \qquad (4.47)$$

Учитывая (4.24), имеем

$$\begin{aligned} &J(\varepsilon^*(t), \varepsilon^*(t_1)) = \\ &= tr\{\; CM\left[\varepsilon(t)\varepsilon^T(t_1)\right]C^T + CM\left[\varepsilon(t)n^T(t_1)\right] + M\left[n(t)\varepsilon^T(t_1)\right]C + M\left[n(t)n^T(t_1)\right]\;\}. \end{aligned} \qquad (4.48)$$

Пусть $\Phi(t, \tau)$ – фундаментальная матрица решений дифференциального уравнения (4.30). Тогда

$$M\left[\varepsilon(t)n^T(t_1)\right] = M\left[\Phi(t, t_0)\varepsilon(t_0)n^T(t_1) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)\left[B(\tau)\omega(\tau) - K(\tau)n(\tau)\right] n^T(t_1) d\tau\right] = 0,$$

в силу того, что $M\left[\varepsilon(t_0)n^T(t_1)\right] = 0$, $M\left[\omega(t)n^T(t_1)\right] = 0$ и $M\left[n(t)n^T(t_1)\right] = 0$ при $t_1 = t - \gamma, \; \gamma \neq 0$.

Таким образом,

$$J(\varepsilon^*(t),\varepsilon^*(t_1)) = trCM\left[\varepsilon(t)\varepsilon^T(t_1)\right]C^T,\ t_1 = t-\gamma,\ \gamma\neq 0. \qquad (4.49)$$

При постановке задачи предполагалось, что система (4.23) – (4.24) наблюдаема. В силу этого, сравнивая (4.49) и (4.45), можно сделать вывод, что для систем, обладающих структурным свойством наблюдаемости, функционал (4.47) достигает минимума при тех же значениях параметров фильтра, что и функционал (4.45). В этом смысле функционалы (4.45) и (4.47) эквивалентны.

Так как функционал (4.47) эквивалентен функционалу (4.45), а функционал (4.45) эквивалентен исходному функционалу (4.25), то функционал (4.47) также эквивалентен исходному функционалу (4.25). Функционал (4.47) содержит только измеряемые процессы. В силу этого необходимые и достаточные условия минимума этого функционала можно использовать для построения реализуемых алгоритмов оптимизации.

Необходимые условия минимума функционала (4.47) имеют вид

$$M[\{y(t_1)-C\hat{x}(t_1)\}^T\{L_1(t)y(t)\}] = M[\{y(t)-C\hat{x}(t)\}^T\{L_1(t_1)y(t_1)\}] = 0,\ t_1 = t-\gamma, \qquad (4.50)$$

здесь оператор $L_1(t)$ преобразует вектор $y\in R^m$ в вектор $z_1\in R^m$.

Определение 4.4.2.

Необходимое и достаточное условие (4.50) минимума функционала

$$J(\varepsilon^*(t),\varepsilon^*(t_1)) = M\left[\{y(t)-C\hat{x}(t)\}^T\{y(t_1)-C\hat{x}(t_1)\}\right],\ t_1 = t-\gamma,\ \gamma\neq 0$$

будем называть модифицированным уравнением Винера-Хопфа.

Если же в (4.50) подставить выражение для *y(t)* (4.24), то можно показать, что условие (4.50) является необходимым и достаточным условием минимума как функционала (4.47), так и функционала (4.25). Действительно,

$$M[\{y(t)-C\hat{x}(t)\}\{L(t_1)y(t_1)\}^T] = CM[\{x(t)-\hat{x}(t)\}\{L(t_1)y(t_1)\}^T] + M[n(t)\{L(t_1)y(t_1)\}^T] = 0$$

в силу того, что $M\left[\hat{x}(t_0)n^T(t_1)\right]=0$ и $M\left[n(t)n^T(t_1)\right]=0$, т.е.

$$M[\{y(t_1)-C\hat{x}(t_1)\}^T\{L_1(t)y(t)\}]=M[\{x(t)-\hat{x}(t)\}^T\{L(t_1)y(t_1)\}]=0,$$
$$L(t_1)=C^T L_1(t_1),\ t_1=t-\gamma.$$

Теорема 4.4.1. Для системы (4.23)–(4.24), обладающей структурным свойством наблюдаемости, функционал

$$J(\varepsilon^*(t),\varepsilon^*(t_1))=M\left[\left\{y(t)-C\hat{x}(t)\right\}^T\left\{y(t_1)-C\hat{x}(t_1)\right\}\right],\ t_1=t-\gamma, \qquad \textbf{\textit{(1)}}$$

необходимые и достаточные условия минимума которого имеют вид:

$$M\left[\left\{y(t_1)-C\hat{x}(t_1)\right\}^T\{L_1(t)y(t)\}\right]=M\left[\left\{y(t)-C\hat{x}(t)\right\}^T\{L_1(t_1)y(t_1)\}\right]=0,\ t_1=t-\gamma,$$

достигает минимума при тех же значениях параметров фильтра, что и функционал

$$J(\varepsilon(t),\varepsilon(t-\gamma))=M\left[\left\{x(t)-\hat{x}(t)\right\}^T\left\{x(t-\gamma)-\hat{x}(t-\gamma)\right\}\right]=trM\left[\varepsilon(t)\varepsilon^T(t-\gamma)\right], \qquad \textbf{\textit{(2)}}$$

необходимые и достаточные условия минимума которого имеют вид:

$$M\left[\left\{x(t_1)-\hat{x}(t_1)\right\}^T\{L(t)y(t)\}\right]=M\left[\left\{x(t)-\hat{x}(t)\right\}^T\{L(t_1)y(t_1)\}\right]=0,\ t_1=t-\gamma.$$

Эти функционалы эквивалентны в смысле определения 4.1. А так как функционал ***(2)*** эквивалентен исходному функционалу

$$J(\varepsilon)=M\left[\varepsilon^T(t)\varepsilon(t)\right], \qquad \textbf{\textit{(3)}}$$

необходимые и достаточные условия минимума которого имеют вид:

$$M\left[\left\{x(t)-\hat{x}(t)\right\}^T\{L(t)y(t)\}\right]=0,$$

то функционал ***(1)*** также эквивалентен функционалу ***(3)***.

Реализуемые алгоритмы оптимизации, с учетом изложенного выше, принимают вид

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\varphi^*(t) = M\left[\left\{\frac{\partial C\hat{x}(t)}{\partial \varphi^*(t)}\right\}^T \{y(t_1) - C\hat{x}(t_1)\}\right],\\
&\varphi^*(t_0) = \varphi^*_0,\\
&\frac{d}{dt}k^*(t) = M\left[\left\{\frac{\partial C\hat{x}(t)}{\partial k^*(t)}\right\}^T \{y(t_1) - C\hat{x}(t_1)\}\right],\\
&k^*(t_0) = k^*_0,\\
&t_1 - t = \gamma \neq 0.
\end{aligned}
\tag{4.51}
$$

Нетрудно видеть, что необходимые и достаточные условия минимума функционала (4.25) вида (4.43), (4.44) выполняются и для алгоритмов (4.51).

В алгоритмах (4.51) первые сомножители есть функции чувствительности.

Таким образом, фильтр для выделения нестационарного полезного процесса (4.23) на фоне нестационарных шумов (4.24) с функционалом качества (4.25) может быть реализован в виде:

- основная структура фильтра строится с точностью до параметров как фильтр Калмана–Бьюси (4.33) – (4.35);
- алгоритмы параметрической оптимизации организуются с помощью модифицированного уравнения Винера–Хопфа и функций чувствительности. Алгоритмы вида (4.51) обеспечивают асимптотические свойства процессу оптимизации в смысле заданного функционала качества работы фильтра.

§ 4.5. Система с эталонной моделью

Существует большое разнообразие методов использования эталонной модели в адаптивных системах. В настоящем параграфе рассматривается задача адаптивного управления нелинейным о бъектом с линейной эталонной моделью. Роль эталонной модели выполняет наблюдатель.

Пусть нелинейный управляемый объект, который подвергается параметрическим возмущениям, описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = f(x,a,t) + Bu(t) + w(t), \\ &x(t_0) = x_0, \end{aligned} \tag{4.52}$$

где $x \in R^n$, $a \in \Re_a \subset R^p$ – вектор параметров объекта, $x(t_0)$ – вектор начальных условий состояния объекта, который может иметь как детерминированный, так и случайный характер, w(t) – вектор непрерывных внешних возмущений, $f(x,a,t)$ – непрерывно дифференцируемая вектор функция, $u \in R^r$ – вектор управляющих воздействий. Вектор параметров объекта представим в виде

$$a(t) = a^* + \eta\,(t) - a_н(t)\,, \tag{4.53}$$

где $\eta\,(t)$ – вектор параметрических возмущений, $a_н(t)$ – вектор настраиваемых параметров. Предполагается, что существует такое значение настраиваемых параметров $a_н^0(t) \cong \eta(t)$, что $f \cong f(x,a^*)$, где a^* – значение параметров объекта в случае отсутствия возмущений, т.е. настройкой параметров $a_н\,(t)$ можно «парировать» параметрические возмущения объекта.

Предполагается также, что при $a\,(t) = a^*$ уравнение (4.52) описывает движение объекта относительно положения равновесия $x = 0$, причем вектор-функция $f(x,a,t)$ обладает свойством $f(0,a^*) = 0,\ \forall\, a^* \in \Re_a$, т.е. любые значения вектора параметров, при которых устраняется влияние внешних параметрических возмущений, не изменяет положения равновесия. Измерение вектора состояния объекта (4.52) происходит на фоне шумов

$$y(t) = Cx(t) + n(t)\,. \tag{4.54}$$

Относительно внешних возмущений $w(t)$ и шумов в измерении состояния объекта $n(t)$ предполагается, что $w(t)$ и $n(t)$ - процессы типа «белый» гауссовский шум, причем

$$\begin{aligned} &M[w(t)]=0,\ M[n(t)]=0,\ M\left[w^T(t)\,n(t)\right]=0,\\ &M\left[w(t)\,w^T(t-\tau)\right]=W(t)\delta\,(t-\tau),\ M\left[n(t)\,n^T(t-\tau)\right]=N(t)\delta\,(t-\tau). \end{aligned} \qquad (4.55)$$

Предполагается, что известно среднее значение вектора начальных состояний, т.е. известно $M[x(t_0)]=\bar{x}_0$.

Задан функционал качества

$$J(x,u)=\frac{1}{2}M\left[x^T(T)Fx(T)+\int_{t_0}^{T}\left\{x^T(t)Qx(t)+u^T(t)Ru(t)\right\}dt\right], \qquad (4.56)$$

где матрицы F и Q – положительно определенные, матрица R – положительно определенная, времена t_0 и T – заданы.

Прежде чем приступить к задаче синтеза управляющих воздействий $u(t)$, оптимальных с позиций функционала (4.56), проведем предварительное преобразование вектор - функции $f(x,a^*)$. Так как $f(x,a^*)$ дифференцируема, применим к ней в окрестности точки $x=0$ формулу Тейлора и выделим линейную часть

$$f(x,a^*)=Ax(t)+\Im(x,a^*), \qquad (4.57)$$

где $A=\partial f(x,a^*)/\partial x(t)_{при\ x=0}$, $\Im(x,a^*)$ - остаточный член.

Структурная схема системы представлена на рис. 4.2.

В соответствии с принципом разделения на первом этапе решается задача построения наилучшей оценки в соответствии с функционалом

$$J(\varepsilon)=\frac{1}{2}M\left[\varepsilon^{\,T}(T)F\varepsilon(T)+\int_{t_0}^{T}\varepsilon^{\,T}(T)Q\varepsilon(T)dt\right], \qquad (4.58)$$

где $\varepsilon\,(t)=x(t)-\hat{x}(t)$.

Структура наблюдателя имеет вид

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\hat{x}(t)=A\hat{x}(t)+\Im(\hat{x},a^*)+Bu(t)+[K+k(t)][y(t)-C\hat{x}(t)],\\ &\hat{x}(t_0)=\bar{x}_0. \end{aligned} \qquad (4.59)$$

Здесь $k(t)$ – матрица настраиваемых параметров наблюдателя.

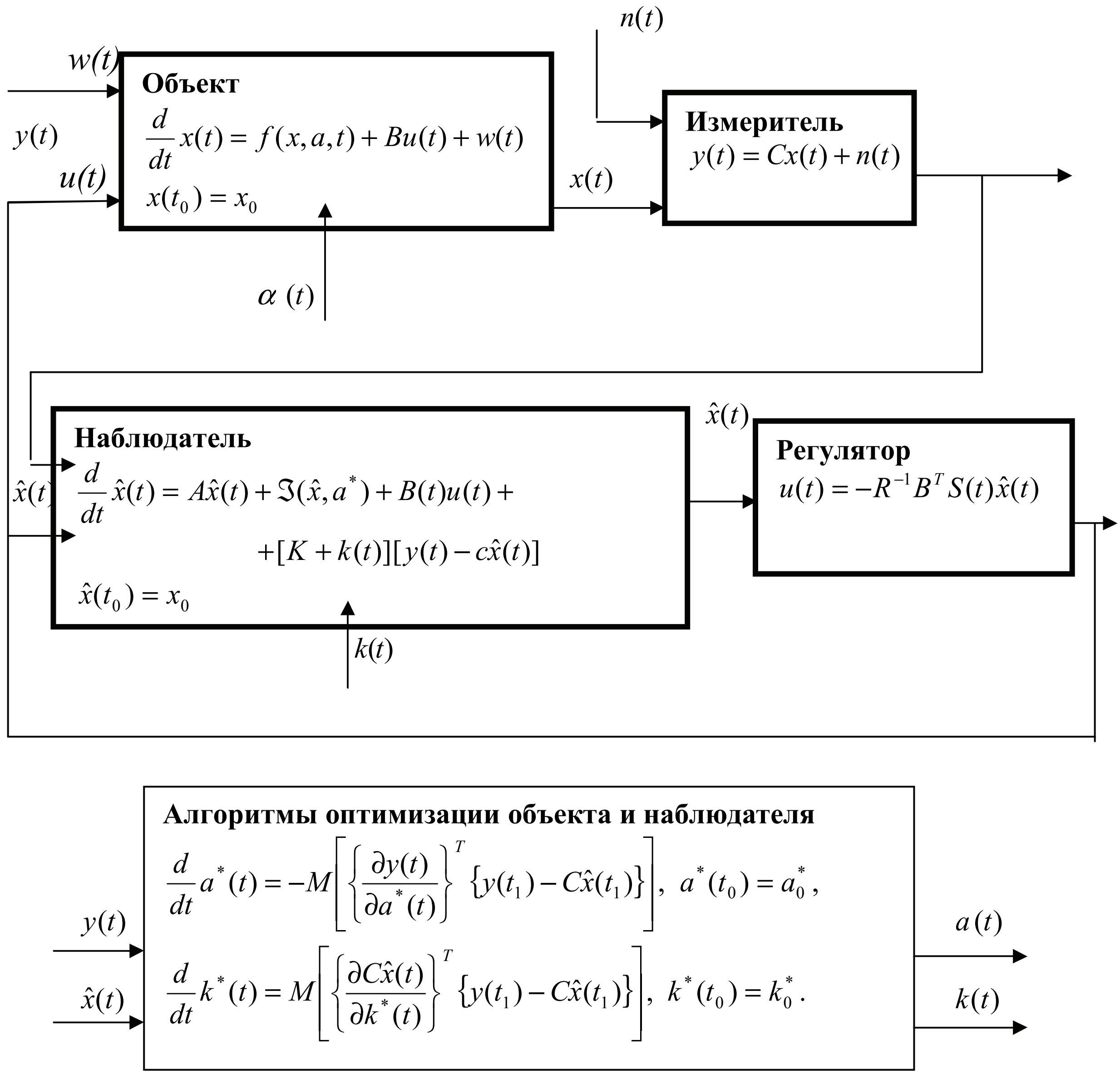

Рис. 4.2. Блок–схема системы с эталонной моделью

Из (4.59) видно, что наблюдатель может играть роль модели объекта. Параметры матрицы K вычисляются на стадии проектирования наблюдателя:

$$K = P^* C^T \left(N^*\right)^{-1}, \tag{4.60}$$

где дисперсионная матрица P^* есть положительный корень решения алгебраического уравнения

$$AP^* + P\left(A^*\right)^T - P^* C^T \left(N^*\right)^{-1} CP^* + W^* = 0\,. \qquad (4.61)$$

На втором этапе следует синтезировать оптимальное управление $u(t)$. Функционал качества имеет вид

$$J(x,u) = \frac{1}{2} M\left[\hat{x}^T(T)F\hat{x}(T) + \int_{t_0}^{T} \left\{\hat{x}^T(t)Q\hat{x}(t) + u^T(t)Ru(t)\right\}dt\right]. \qquad (4.62)$$

В случае, когда управление, синтезированное по первому приближению, удовлетворяет качеству переходных процессов, оно имеет вид

$$u(t) = -R^{-1}B^T S(t)\hat{x}(t)\,, \qquad (4.63)$$

где положительно определенная матрица $S(t)$ является решением дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}S(t) + \left(A^*\right)^T S(t) + S(t)A^* - S(t)BR^{-1}B^T S(t) + Q = 0, \\ &S(T) = F. \end{aligned} \qquad (4.64)$$

Алгоритмы парирования параметрических возмущений в объекте и нестационарности шумов в объекте и в измерениях с учетом результатов, изложенных выше, имеют вид

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}a_н^*(t) = -M\left[\left\{\frac{\partial y(t)}{\partial a_н^*(t)}\right\}^T \{y(t_1) - C\hat{x}(t_1)\}\right],\ \ a_н^*(t_0) = 0\,, \\ &\frac{d}{dt}k_н^*(t) = M\left[\left\{\frac{\partial C\hat{x}(t)}{\partial k_н^*(t)}\right\}^T \{y(t_1) - C\hat{x}(t_1)\}\right],\ \ k_н^*(t_0) = 0\,, \\ &t_1 - t = \gamma \neq 0. \end{aligned} \qquad (4.65)$$

Отметим, что представление (4.57) будет более точным при бесконечном числе членов ряда, т.е. когда $f(x,a^*) = Ax(t) + \Im(x,a^*) + D$, где D – вектор, состоящий из остаточных членов в данном разложении. В этом случае полагаем векторную величину достаточно малой постоянно действующей помехой, которая будет учитываться в наблюдателе в процессе перестройки параметров матрицы $k(t)$.

Следует заметить, что случай, когда удается парировать все изменения параметров объекта, вызванные внешними возмущениями, достаточно редкий. Чаще всего количество параметров объекта, выделенных для соответствующего управления, существенно меньше необходимого. В этом случае остальной частью возмущенных параметров, при выполнении ряда условий, можно управлять изменением параметров регулятора. Таким образом, регулятор кроме основной задачи управления объектом выполняет задачу компенсации части параметрических возмущений объекта.

Предположим, что общее количество параметров, подвергающихся возмущениям, равно h, т.е. $\eta \in R^h$ и $\eta(t) = \eta_1(t) + \eta_2(t)$, где $\eta_1 \in R^e$, $e < h$ – возмущения, которые можно парировать настройкой соответствующих параметров объекта, $\eta_2 \in R^{h-e}$ – возмущения, воздействия которых можно компенсировать соответствующими изменениями параметров регулятора.

Управление будет содержать две составляющие:

$u(t) = u_{oc}(t) + u_{ком}(t)$,

где $u_{oc}(t)$ соответствует управлению

$u_{oc}(t) = -R^{-1}B^T S(t)\hat{x}(t)$,

а матрица $S(t)$ находится на стадии проектирования системы и является решением уравнения (4.64),

$u_{ком}(t) = -R^{-1}B^T s(t)\hat{x}(t)$,

где $s(t)$ – матрица настраиваемых параметров регулятора.

Модель уравнения объекта будет иметь вид

$$\frac{d}{dt}x(t) = \left[A^* + \eta_1(t) - a_н(t)\right]x(t) - BR^{-1}B^T S(t)\hat{x}(t) +$$
$$+ \left[\eta_2(t)x(t) - BR^{-1}B^T s(t)\hat{x}(t)\right] + +\Im(x,a) + w(t), \qquad (4.66)$$
$$x(t_0) = x_0.$$

Ясно, что успешная компенсация параметрических возмущений параметров объекта за счет соответствующей настройки параметров регулятора возможна, если матрица B такова, что может выполняться следующее условие:

$$s(t) = \left[BR^{-1}B^T\right]^T \eta_2(t). \quad (4.67)$$

Алгоритмы парирования параметрических возмущений $\eta_1(t)$ соответствующей настройкой выделенных для этой цели параметров объекта имеют вид

$$\frac{d}{dt} a_н^*(t) = -M\left[\left\{\frac{\partial y(t)}{\partial a_н^*(t)}\right\}^T \{y(t_1) - C\hat{x}(t_1)\}\right], \ a_н^*(t_0) = 0, \ a_н^* \in R^e. \quad (4.68)$$

Алгоритмы настройки параметров регулятора для компенсации влияния параметрических возмущений $\eta_2(t)$ имеют вид

$$\frac{d}{dt} s^*(t) = -M\left[\left\{\frac{\partial y(t)}{\partial s^*(t)}\right\}^T \{y(t_1) - C\hat{x}(t_1)\}\right], \ s^*(t_0) = 0, \ s^* \in R^{h-e}. \quad (4.69)$$

Алгоритмы настройки вектора коэффициентов усиления наблюдателя имеют вид

$$\frac{d}{dt} k^*(t) = M\left[\left\{\frac{\partial C\hat{x}(t)}{\partial k^*(t)}\right\}^T \{y(t_1) - C\hat{x}(t_1)\}\right], \ k^*(t_0) = 0, \ k^* \in R^{(n\times m)}. \quad (4.70)$$

Следует отметить, что основной проблемой реализации алгоритмов (4.68) и (4.69), так же как и первого алгоритма из (4.65), является нахождение матрицы функций чувствительности $\partial y(t)/\partial a_н^*(t)$ и $\partial y(t)/\partial s^*(t)$. Реализуемые алгоритмы перестройки параметров парирования и компенсации параметрических возмущений можно получить, исследуя функционал (4.56), что делается в следующей главе.

§ 4.6. Система с комбинированным критерием качества

Рассмотрим общий случай, когда нестационарная система управления может быть представлена моделью

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x,a,t) + Bu(t) + w(t),$$
$$x(t_0) = x_0, \tag{4.71}$$

где $x \in R^n$, $a \in \Re_a \subset R^p$ – вектор параметров объекта, $x(t_0)$ – вектор начальных условий состояния объекта, который может иметь как детерминированный, так и случайный характер, $w(t)$ – вектор непрерывных внешних возмущений, $f(x,a,t)$ – непрерывно дифференцируемая вектор функция, $u \in R^r$ – вектор управляющих воздействий, $t \in [t_0, T]$. Вектор параметров объекта представим в виде

$$a(t) = a^* - \eta\,(t) + a_н(t), \tag{4.72}$$

где $a_н(t) \in R^k$, $a_н(t) \in \Re$ – вектор настраиваемых параметров, $\eta\,(t) \in R^k$, $\eta\,(t) \in \Re$ – вектор параметров, изменяющихся неконтролируемым образом под влиянием внешних возмущений.

В зависимости от внешней среды при конкретных входных воздействиях параметры нестационарной системы (4.71) должны настраиваться так, чтобы функционал

$$J(x, z_i) = \sum_{i=1}^{N} \mu_i\, M \left\| z_i(t) - C_i x(t) \right\|^2, \tag{4.73}$$

где $\mu_i > 0$, $\sum_{i=0}^{N} \mu_i = 1$ – весовые коэффициенты, $z_i(t) = L_i(t)\, y(t)$ – модели поведения, $i = 1,...,N$, C_i– матрицы измерений, принимал минимальное значение. При этом предполагается, что имеются такие значения параметров системы $\alpha^0(t) \in \Re$, $t \in [t_0, T]$, при которых функционал (4.73) принимает минимальное значение, т.е.

$$J^0(x,z) = \min_{\alpha} J(x(t,\eta,\alpha^0), z).$$

При некоторых предположениях, касающихся гладкости функционала (4.73), необходимые и достаточные условия минимума имеют вид

$$\sum_{i=1}^{N}\mu_i M\left[\left\{\frac{\partial C_i x(t)}{\partial \alpha_{н}(t)}\right\}^T \{z_i(t)-C_i x(t)\}\right]=0, \qquad (4.74)$$

$$\sum_{i=1}^{N}\mu_i M\left[\left\{\frac{\partial^2 C_i x(t)}{\partial \alpha_{н\,j}(t)\,\partial \alpha_{н\,l}(t)}\right\}\right]>0, \quad j,l=1,...,k. \qquad (4.75)$$

Процесс оптимизации, заключающийся в перестроении параметров системы в соответствии с функционалом (4.73), должен обеспечивать следующее условие:

$$\frac{dJ(x,z)}{dt}=\frac{\partial J(x,z)}{\partial t}+\frac{\partial J(x,z)}{\partial \alpha_{н}(t)}\frac{d\alpha_{н}(t)}{dt}+\frac{\partial J(x,z)}{\partial \eta(t)}\frac{d\eta(t)}{dt}\le 0. \qquad (4.76)$$

Если алгоритм оптимизации организовать с использованием условия (4.76), т.е.

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\alpha_{н}(t)=\sum_{i=1}^{N}\mu_i M\left[\left\{\frac{\partial C_i x(t)}{\partial \alpha_{н}(t)}\right\}^T \{z_i(t)-C_i x(t)\}\right],\\ \alpha(t_0)=\alpha_0,\end{gathered} \qquad (4.77)$$

то из (4.76) можно получить условие на скорость сходимости $\alpha_{н}(t_0)\to\alpha_{н}^{0}(t)=\eta(t)$:

$$\begin{gathered}\left\|\sum_{i=1}^{N}\mu_i M\left[\left\{\frac{\partial C_i x(t)}{\partial \alpha_{н}(t)}\right\}^T \{z_i(t)-C_i x(t)\}\right]\right\|^2 >\\ >\left|\left\{\sum_{i=1}^{N}\mu_i M\left[\left\{\frac{\partial C_i x(t)}{\partial \eta(t)}\right\}^T \{z_i(t)-C_i x(t)\}\right]\right\}^T \frac{d}{dt}\eta(t)\right|, \quad t\in[t_0,T].\end{gathered} \qquad (4.78)$$

В том случае, когда $N=2$, выражения для алгоритмов оптимизации принимают более конкретный вид. Действительно, пусть

$$\mu_1=\mu^2,\ \mu_2=(1-\mu)^2 .$$

Тогда функционал качества будет иметь вид

$$J(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=M\left[\mu^2\|\varepsilon_1(t)\|^2+(1-\mu)^2\|\varepsilon_2(t)\|^2\right], \qquad (4.79)$$

где

$$\begin{gathered}\varepsilon_1(t)=z_1(t)-C_1x(a,t),\\ \varepsilon_2(t)=z_2(t)-C_2x(a,t).\end{gathered} \qquad (4.80)$$

Здесь $z_1 \in R^{k1}$, $z_2 \in R^{k2}$ – желаемые траектории, C_1, C_2 – матрицы измерений,

Так как функционал (4.79) выпуклый по параметру μ, то необходимые и достаточные условия минимума функционала находятся из условий

$$\frac{\partial J(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}{\partial \mu} = 0, \ \frac{\partial^2 J(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}{\partial \mu^2} > 0$$

или

$$\mu M\|\varepsilon_1(t)\|^2 - (1-\mu)M\|\varepsilon_2(t)\|^2 = 0\,, \tag{4.81}$$

$$M\|\varepsilon_1(t)\|^2 + M\|\varepsilon_2(t)\|^2 > 0\,. \tag{4.82}$$

Из условия (4.81) получаем

$$\mu = \frac{M\|\varepsilon_2(t)\|^2}{M\|\varepsilon_1(t)\|^2 + M\|\varepsilon_2(t)\|^2}\,. \tag{4.83}$$

Достаточные условия (4.82) выполняются в силу положительной определенности входящих в это условие дисперсий ошибок.

Подставляя (4.83) в (4.79), будем иметь

$$J(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = \frac{M\|\varepsilon_1(t)\|^2\, M\|\varepsilon_2(t)\|^2}{M\|\varepsilon_1(t)\|^2 + M\|\varepsilon_2(t)\|^2}\,. \tag{4.84}$$

Нетрудно видеть, что функционал, содержащий только числитель выражения (4.84), т.е.

$$J^*(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = M\|\varepsilon_1(t)\|^2\, M\|\varepsilon_2(t)\|^2, \tag{4.85}$$

эквивалентен исходному, т.е. минимизируется при тех же значениях параметров, что и функционал (4.84).

Пусть оптимальная траектория (состояние) системы представима в виде

$$x(a,t) = x(a^0,t) + \lambda\, v(t),\ v(t) \neq 0\,, \tag{4.86}$$

где $x(a^0,t)$ – траектория системы, содержащей параметры $a^0(t)$, при которых обеспечивается минимум функционала (4.85), $v(t)$– произвольный ненулевой процесс, λ– множитель Лагранжа. Подставив (4.86) в (4.80) и затем в (4.85), получим $J^* = J^*(...\lambda)$. В открытой области линейных операторов минимум функционала (4.85) отыскивается в соответствии с процедурой

$$\frac{\partial J^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}{\partial \lambda} = 0, \; при \, \lambda = 0 \, .$$

Таким образом, необходимое и достаточное условие минимума функционала (4.85) будет иметь вид

$$\begin{aligned} &M[\Pi_1(t)x(t)\{z_1(t) - C_1 x(t)\}]M\|\varepsilon_2(t)\|^2 + \\ &+ M[\Pi_2(t)x(t)\{z_2(t) - C_2 x(t)\}]M\|\varepsilon_1(t)\|^2 = 0 \end{aligned}, \qquad (4.87)$$

где линейные операторы $\Pi_1(t)$ и $\Pi_2(t)$ обеспечивают преобразование вектора $x(t)$ в матрицы соответствующей размерности $l_1 \times k_1$ и $l_1 \times k_2$. В соответствии с методикой алгоритмического конструирования нестационарных систем с неполной информацией семейство алгоритмов параметрической оптимизации системы будет иметь вид

$$\frac{d}{dt}a(t) = M[\Pi_1(t)x(t)\{z_1(t) - C_1 x(t)\}]M\|\varepsilon_2(t)\|^2 + M[\Pi_2(t)x(t)\{z_2(t) - C_2 x(t)\}]M\|\varepsilon_1(t)\|^2 = 0,$$
$$a(t_0) = a_0 \, .$$

Назначим операторы $\Pi_1(t)$ и $\Pi_2(t)$ так, чтобы параметрическая оптимизация системы обладала асимптотическими свойствами, т.е.

$$\frac{dJ^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}{dt} = \frac{\partial J^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}{\partial t} + \frac{\partial J^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}{\partial a(t)} \frac{da(t)}{dt} \le 0$$

или

$$\begin{aligned} &-\left\{ M\left[\left\{\frac{\partial C_1 x(t)}{\partial a(t)}\right\}^T \varepsilon_1(t)\right] M\|\varepsilon_2(t)\|^2 + \right. \\ &\left. + M\left[\left\{\frac{\partial C_2 x(t)}{\partial a(t)}\right\}^T \varepsilon_2(t)\right] M\|\varepsilon_1(t)\|^2 \right\} \left\{ M[\{\Pi_1(t)x(t)\}\varepsilon_1(t)]M\|\varepsilon_2(t)\|^2 + \right. \qquad (4.88) \\ &\left. + M[\{\Pi_2(t)x(t)\}\varepsilon_2(t)]M\|\varepsilon_1(t)\|^2 \right\} \le 0. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что при

$$\Pi_1(t) = \left\{\frac{\partial C_1 x(t)}{\partial a(t)}\right\}^T, \ \Pi_2(t) = \left\{\frac{\partial C_2 x(t)}{\partial a(t)}\right\}^T$$

выражение (4.88) принимает вид

$$-\left\| M\left[\left\{\frac{\partial C_1 x(t)}{\partial a(t)}\right\}^T \varepsilon_1(t)\right] M\|\varepsilon_2(t)\|^2 + M\left[\left\{\frac{\partial C_2 x(t)}{\partial a(t)}\right\}^T \varepsilon_2(t)\right] M\|\varepsilon_1(t)\|^2 \right\|^2 \le 0.$$

Таким образом, алгоритм параметрической оптимизации

$$\frac{d}{dt}a(t) = M\left[\left\{\frac{\partial C_1 x(t)}{\partial a(t)}\right\}^T \varepsilon_1(t)\right] M\|\varepsilon_2(t)\|^2 + M\left[\left\{\frac{\partial C_2 x(t)}{\partial a(t)}\right\}^T \varepsilon_2(t)\right] M\|\varepsilon_1(t)\|^2, \qquad (4.89)$$

$$a(t_0) = a_0$$

обладает заданными свойствами.

Однако если измерение состояния объекта производится на фоне помех

$$y(t) = Cx(t) + \xi(t),$$

где $y(t) \in R^m$, причем $m \le n$ и $\xi(t)$ – «белый шум», то реализовать алгоритм оптимизации в виде (4.89) невозможно (в силу отсутствия полной информации о процессе $x(t)$). В этом случае следует организовать вспомогательный функционал качества, эквивалентный исходному функционалу (4.85). Таким функционалом может быть

$$\tilde{J}^*(\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*) = M\|\varepsilon_1^*(t)\varepsilon_1^*(t_1)\| M\|\varepsilon_2^*(t)\varepsilon_2^*(t_1)\|,$$

где

$$\varepsilon_1^*(t) = C_{11} z_1(t) - y(t),$$
$$\varepsilon_2^*(t) = C_{21} z_2(t) - y(t),$$
$$t_1 = t + \tau.$$

Алгоритм оптимизации для этой задачи будет иметь вид

$$\frac{d}{dt}a(t) = M\left[\left\{\frac{\partial y(t)}{\partial a(t)}\right\}^T \varepsilon_1^*(t_1)\right] M\|\varepsilon_2^*(t)\varepsilon_2^*(t_1)\| + M\left[\left\{\frac{\partial y(t)}{\partial a(t)}\right\}^T \varepsilon_2^*(t_1)\right] M\|\varepsilon_1^*(t)\varepsilon_1^*(t_1)\|,$$

$$a(t_0) = a_0.$$

§ 4.7. Управление нестационарными стохастическими объектами в условиях неполной информации

Рассмотрим задачу управления линейным нестационарным объектом с квадратичным критерием качества в стохастической постановке. Пусть объект управления описывается уравнением

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}x(t) = [A(t)+a(t)]x(t) + B(t)u(t) + w(t),\\ &x(t_0) = x_0,\end{aligned} \tag{4.90}$$

$$y(t) = C(t)x(t) + \upsilon(t), \tag{4.91}$$

где $x(t) \in R^n$, $y(t) \in R^m$, $m \le n$. Процессы $w(t)$, $\upsilon(t)$ – «белые» центрированные некоррелированные шумы с интенсивностями $W(t)$ и $V(t)$. Предполагается, что интенсивности этих шумов меняются во времени по неизвестному закону, но известно, что $\underline{W} \le W(t) \le \overline{W}$ и $\underline{V} \le V(t) \le \overline{V}$. Предполагается, что с помощью настройки выделенных для этой цели параметров матрицы $a(t)$ можно достичь следующего условия:

$$A^0 = A(t) + a(t), \tag{4.92}$$

где A^0 – матрица с известными постоянными параметрами.

Отметим, что матрицы (A, B) образуют управляемую пару, а матрицы (A, C) – наблюдаемую пару.

Функционал качества имеет вид

$$J(x,u) = \frac{1}{2}M\left[\|x(T)\|_F^2 + \int_{t_0}^{T}\left\{\|x(t)\|_{Q(t)}^2 + \|u(t)\|_{R(t)}^2\right\}dt\right], \tag{4.93}$$

где матрицы F, $Q(t)$ – положительно полуопределенные, матрица $R(t)$ – положительно определенная.

В соответствии с теоремой разделения задача конструирования основного контура системы управления разбивается на две подзадачи.

1. Построение наблюдателя. Уравнение, описывающее наблюдатель, будет иметь вид

$$\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = A^0 x(t) + B(t)u(t) + K^*(t)\left[y(t) - C(t)\hat{x}(t)\right], \qquad (4.94)$$
$$x(t_0) = x_0,$$

где

$$K^*(t) = K(t) + k(t)\,. \qquad (4.95)$$

Матрица $K(t)$ определяется соотношением

$$K(t) = P(t)C^T(t)V^*, \qquad (4.96)$$

где дисперсионная матрица ошибок $P(t)$ является решением уравнения типа Риккати:

$$\frac{d}{dt}P(t) = A^0 P(t) + P(t)\left(A^0\right)^T - P(t)C^T(t)V^*C(t)P(t) + W^*, \qquad (4.97)$$
$$P(t_0) = M\left[\{x_0 - \hat{x}_0\}\{x_0 - \hat{x}_0\}^T\right].$$

Здесь W^*, V^* – некоторые средние значения интенсивностей шумов.

2. Построение регулятора. Регулятор описывается соотношением

$$u(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)S(t)\hat{x}(t)\,, \qquad (4.98)$$

где положительно определенная матрица S(t) является решением уравнения типа Риккати

$$\frac{d}{dt}S(t) = S(t)A^0 + \left(A^0\right)^T S(t) - S(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)S(t) + Q(t), \qquad (4.99)$$
$$S(T) = F.$$

Уравнения (4.98) и (4.99) содержат известные параметры и могут быть решены на стадии проектирования системы управления.

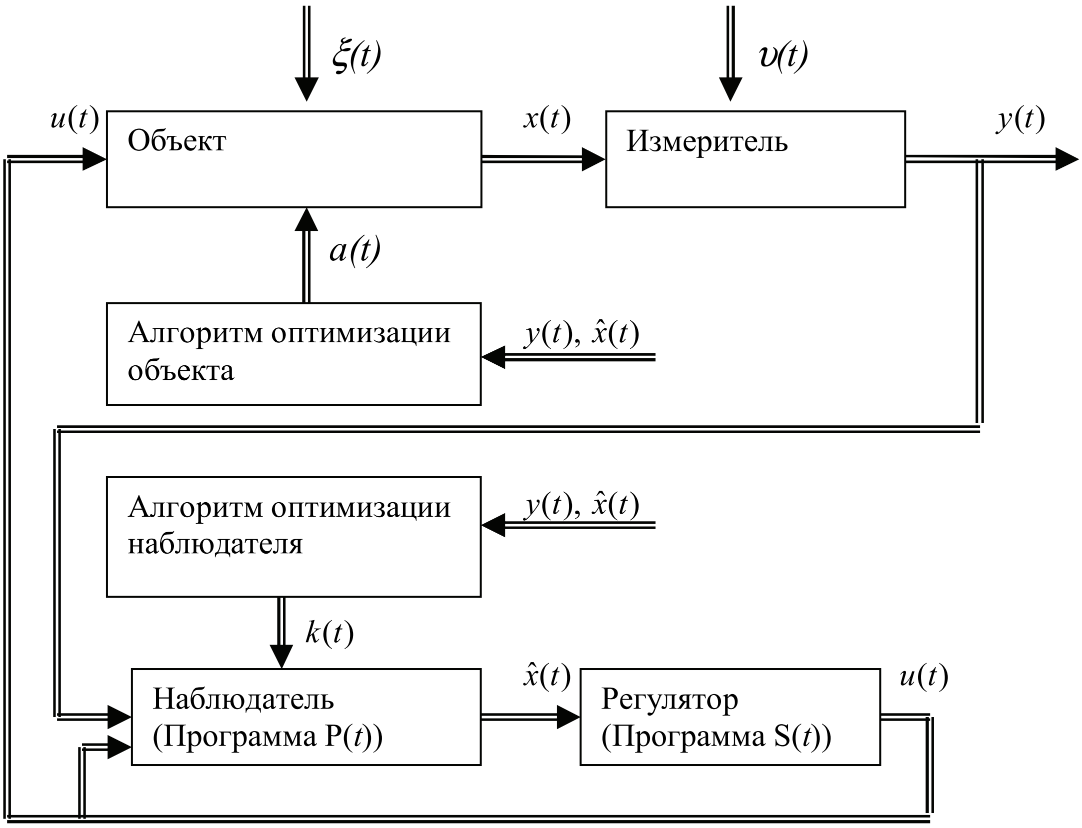

Рис. 4.3. Блок-схема нестационарной системы управления с параметрической оптимизацией объекта и наблюдателя

Таким образом, на этих двух этапах конструирования определена основная структура системы управления. На следующем этапе следует построить дополнительные цепи, на которые будет возложена задача оптимизации системы за счет соответствующей настройки параметров матриц $a(t)$ и $k(t)$. Из параметров матриц $a(t)$ и $k(t)$ образуем векторы соответствующих размеров $\vec{a}(t)$ и $\vec{k}(t)$. Учитывая результаты, изложенные в предыдущих параграфах работы, алгоритмы оптимизации нестационарной системы управления будут иметь вид

$$\frac{d}{dt}\vec{a}(t) = -M\left[\left\{\frac{\partial y(t)}{\partial \vec{a}(t)}\right\}^T \{y(t_1) - C(t_1)\hat{x}(t_1)\}\right],$$

$$\frac{d}{dt}\vec{k}(t) = M\left[\left\{\frac{\partial C(t)\hat{x}(t)}{\partial \vec{a}(t)}\right\}^T \{y(t_1) - C(t_1)\hat{x}(t_1)\}\right], \qquad (4.100)$$

$$\vec{a}(t_0) = \vec{a}_{0,}\ \vec{k}(t_0) = \vec{k}_0\,,\ t_1 = t + \eta.$$

Блок-схема нестационарной системы управления с цепями параметрической оптимизации объекта и наблюдателя представлена на рис. 4.3.

Глава 5. Конструирование алгоритмов оптимизации с помощью функций допустимых значений управляющих воздействий

§ 5.1. Постановка задачи

В настоящей главе рассматривается метод формирования алгоритмов оптимизации нестационарных систем управления, основанный на применении функций допустимых значений управляющих воздействий. В вариационном исчислении этими функциями являются гамильтонианы. Алгоритмы, организованные с помощью гамильтонианов, могут использоваться как для оптимизации самих нестационарных объектов, если для этой цели выделены соответствующие параметры, так и для оптимизации всей управляемой системы с помощью соответствующей параметрической настройки регуляторов.

Пусть управляемый объект описывается нелинейным уравнением общего вида

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = f(t,x,u,\eta(t),\alpha(t)), \\ &x(t_0) = x_0. \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

Здесь $x \in R^n$, $u \in R^r$, $u(t) \in U$, $\eta \in R^k -$ вектор параметров объекта, подвергающихся воздействию неконтролируемых возмущений, $\alpha \in R^g$ – вектор параметров объекта оптимизации системы. Отметим, что в общем случае $k \ge g$. Выделенные для параметрической оптимизации параметры системы могут находиться как в самом объекте, так и в регуляторе.

Заданы ограничения на конечное состояние системы в виде функций, т.е. в момент окончания переходного процесса состояние системы должно отвечать следующему уравнению:

$$\Psi(x(T),T) = 0,\ \Psi \in R^q. \tag{5.2}$$

Функционал качества с учетом (5.2) запишем в виде

$$J(x,u) = \Phi(x(T),T) + \int_{t_0}^{T} L(x,u,t)dt\,, \tag{5.3}$$

где

$$\Phi(x(T),T) = K(x(T),T) + \gamma^{\,T}\Psi(x(T),T)\,. \tag{5.4}$$

Здесь $\gamma \in R^q$ – вспомогательная переменная.

Рассмотрим возможные постановки оптимизации системы управления нестационарным объектом (5.1).

А. Параметрическое управление

Управляемый объект

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d}{dt}x(t) = f(t,x,\eta,\alpha) + B(t,x)u(t),\\ x(t_0) = x_0\,.\end{array}\right\} \tag{5.5}$$

Здесь $x \in R^n$, $u \in R^r$, $u(t) \in U$, $\eta \in R^k$ – вектор параметров объекта, подвергающихся воздействию неконтролируемых возмущений, $\alpha \in R^g$ – вектор параметров объекта оптимизации системы.

Обычно оптимизацию системы за счет соответствующего изменения параметров относят к классу систем с параметрическим управлением.

В. Координатное управление

Управляемый объект

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d}{dt}x(t) = f(t,x,\eta) + B(t,x)u(x,\alpha),\\ x(t_0) = x_0\,.\end{array}\right\} \tag{5.6}$$

Здесь $x \in R^n$, $u \in R^r$, $u(t) \in U$, $\eta \in R^k$ – вектор параметров объекта, подвергающихся воздействию неконтролируемых возмущений, $\alpha \in R^g$ – вектор параметров регулятора. Оптимизация системы управления осуществляется соответствующей перестройкой параметров регулятора.

Этот класс нестационарных систем управления с оптимизацией относят к системам координатного управления.

С. Координатно-параметрическое управление

Управляемый объект

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}x(t)=f(t,x,\eta,\alpha_1)+B(t,x)u(x,\alpha_2),\\&x(t_0)=x_0.\end{aligned}\right\}\tag{5.7}$$

Здесь $x\in R^n$, $u\in R^r$, $u(t)\in U$, $\eta\in R^k$ – вектор параметров объекта, подвергающихся воздействию неконтролируемых возмущений, $\alpha_1\in R^{g_1}$ – вектор параметров объекта, $\alpha_2\in R^{g_2}$ – вектор параметров регулятора.

Оптимизация системы управления осуществляется соответствующей перестройкой как параметров объекта, так и параметров регулятора.
Этот класс нестационарных систем управления с оптимизацией относят к системам координатно-параметрического управления.

Предполагается, что:

- вектор-функция $f(t,x,\eta,\alpha)$ и матрица $B(t,x,\alpha)$ гладкие и допускают дифференцирование необходимое количество раз по совокупности переменных;
- параметрическая неопределенность имеет интервальный характер, т.е. $\eta_i\le\eta_i(t)\le\overline{\eta}_i$, $i=1,\dots,k$, таким образом, известна область изменения возмущенных параметров объекта $\eta(t)\in\Lambda$;
- область параметров, предназначенных для оптимизации системы управления при соответствующем $u^0(t)\in U$, содержит те значения, при которых достигается поставленная цель, т.е. $\alpha^0(t)\in\mathrm{A}$, где A – область изменения параметров оптимизации.

Функционал качества зададим в виде функционала Больца (5.3). В различных постановках задачи время окончания переходного процесса T может быть не задано (как в (5.3)), но может быть и фиксировано.

Синтез оптимального управления проведем в предположении о существовании оптимального управления и об отсутствии параметрических возмущений, т.е. для $\forall t \in [t_0, T]$, $\eta(t) = 0$ и $\alpha(t) = 0$ [6, 9].

Для системы управления с объектом (5.1) в предположении об отсутствии параметрических возмущений образуем гамильтониан

$$H(t, x, \lambda, u) = L(t, x, u) + \lambda^T(t) f(t, x, u), \tag{5.8}$$

где $\lambda(t)$ – вспомогательная переменная, являющаяся решением дифференциального уравнения

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\lambda(t) = -\left\{\frac{\partial H(t, x, \lambda, u)}{\partial x(t)}\right\}, \\ &\lambda(T) = \left\{\frac{\partial \Phi(x(T), T)}{\partial x(T)}\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{5.9}$$

Оптимальное управление отыскивается:

- в случае, когда ограничения на управление не эффективны, т.е. оптимальное управление достигается внутри области допустимых управлений (не находится на границах замыкания заданного множества допустимых управлений U), то

$$\frac{\partial H(t, x, \lambda, u)}{\partial u(t)} = 0; \tag{5.10}$$

- в случае, когда ограничения на управление эффективны, т.е. оптимальное управление достигается на границах области допустимых управлений U, то

$$H(t, x^0, \lambda, u^0) = \min_{u(t) \in U} H(t, x^0, \lambda, u), \; t \in [t_0, T]. \tag{5.11}$$

Таким образом, оптимальное управление выбирается из условия

$$u^0(t) = \arg \min_{u \in U} H(x^0, u, \lambda, t). \tag{5.12}$$

Следует отметить, что краевые условия на правом конце для переменной $\lambda(t)$ и поведение гамильтониана зависят от объекта, вида задаваемой области конечных значений состояния системы и задания (или незадания) времени переходного процесса.

Условия оптимальности, сформулированные в виде двухточечной краевой задачи (5.1), (5.9) и условий выбора управления (5.10), (5.12), являются необходимыми условиями минимума функционала (5.3).

Дополнительным условием, усиливающим необходимые условия, является уравнение Гамильтона – Якоби

$$\frac{\partial J(x,t)}{\partial t} + H\left[x, \frac{\partial J(x,t)}{\partial x(t)}, u\left(x, \frac{\partial J(x,t)}{\partial x(t)}\right), t\right] = 0 \qquad (5.13)$$

с граничным условием

$$J(x,t) = 0 \ \textit{при} \ \Phi(x(t),t) = 0\,. \qquad (5.14)$$

Отметим, что уравнение Гамильтона– Якоби, являющееся уравнением в частных производных, в ряде случаев довольно трудно решить (а иногда и невозможно). Конкретное решение может представлять собой лишь функционал вдоль данной траектории, а не во всей области существования (x,t). По этой причине уравнение Гамильтона – Якоби чаще всего используется для проверки оптимальности управления, полученного с помощью необходимых условий, записанных в виде двухточечной краевой задачи (5.1), (5.9) и условий выбора управлений (5.10) или (5.12).

В общем случае область изменений управляющих воздействий U является ограниченной. В соответствии с принципом минимума Понтрягина стационарная траектория может содержать дуги, вдоль которых вектор управления принадлежит границе U. С помощью операции, предложенной Фрайесом де Ведеком [52], можно перейти к открытой области изменения управлений. Эта операция состоит в замене вектора $u(t)$ функцией другого вектора, не ограниченного во всем R^n.

Продифференцировав $H(x,u,\lambda,t)$ по времени, с учетом возможности перехода к открытой области управляющих воздействий получим

$$\frac{d}{dt}H(x,u,\lambda,t) = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{dt} + \frac{\partial H}{\partial u}\frac{du}{dt}\,.$$

Учитывая, что дифференциальные уравнения (5.1) и (5.9) образуют каноническую форму, а также, что $\frac{\partial H}{\partial u}\frac{du}{dt}=0$ (либо $\frac{\partial H}{\partial u}=0$, либо $\frac{du}{dt}=0$, либо $\frac{\partial H}{\partial u}$ и $\frac{du}{dt}$ − ортогональны), последнее выражение можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}H(x,u,\lambda,t)=\frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial t}. \tag{5.15}$$

Краевые условия для уравнения (5.15) задаются на правом конце и зависят от области конечных значений состояния системы управления. В табл. 5.1 приведены результаты аналитического конструирования систем с полной информацией различных постановок задач (в виде необходимых условий оптимальности).

Как видно из табл., поведение гамильтониана при оптимальном управлении подчиняется вполне определенной траектории, которая является решением дифференциального уравнения с краевым условием на правом конце (за исключением стационарного случая, когда гамильтониан не зависит от времени).

В аналитической теории при нахождении оптимальных управлений тот факт, что гамильтониан при этом изменяется по вполне определенной траектории, не используется. Это поведение положим в основу конструкции алгоритмов оптимизации системы управления.

Запишем необходимые условия минимума функционала качества, выраженные в поведении гамильтониана на оптимальной траектории, в виде

$$\Re^0(t)=H^0(t)+\phi\,(t)=0, \tag{5.16}$$

где $\phi\,(t)$ принимает конкретные значения для каждой из приведенных в табл. 5.1 задач.

Таблица 5.1

Результаты аналитического конструирования

Система	Функционал	Время T	Область конечных Значений	**Поведение гамильтониана на оптимальной траектории**	Краевые условия для $\lambda(t)$
$\dot{x}(t) = f(x,u)$	$L = L(x,u)$ $K = 0$	T – не задано	$x_1(T)$ – задано	$H^0(t) = H^0(T) = 0$	$\lambda(T)$ – условий нет
			S_1 : $\Psi i(x(T)) = 0$ $i = 1,\dots,q$		$\lambda(T)$ нормален к S_1 в точке $x(T)$; $\lambda(T) = \sum_{i=1}^{q} \gamma_i \{\frac{\partial \Psi_i(x(T))}{\partial x_i(T)}\}^T$
	$L = L(x,u)$ $K = K(x(T))$		R^n		$\lambda(t) = \{\frac{\partial K(x(T))}{\partial x(T)}\}$
	$L=L(x,u)$ $K=0$	T – фиксировано	$x_1(T)$ – задано	$H^0(t) = H^0(T) = const$	$\lambda(T)$ – условий нет
	$L=L(x,u)$ $K=K(x(T))$		S_1 : $\Psi i(x(T)) = 0$ $i = 1,\dots,q$		$\lambda(T) = \sum_{i=1}^{q} \gamma_i \{\frac{\partial \Psi_i(x(T))}{\partial x_i(T)}\} +$ $+ \{\frac{\partial K(x(T))}{\partial x(T)}\}^T$

Продолжение таблицы 5.1

Система	Функционал	Время Т	Область конечных значений	Поведение гамильтониана на оптимальной траектории	Краевые условия для $\lambda(t)$
$\dot{x}(t) = f(x,u,t)$	$L = L(x,u,t)$ $K=0$	$T-$ не задано	$x_1(T)$ − задано	$H^0(t) = -\int_{t_0}^{T} \frac{\partial H^0(t)}{\partial t} dt$ $H^0(T) = 0$	$\lambda(T)$ − условий нет
			$\Psi(T)$	$H^0(t) = \lambda^T(T) \frac{\partial \Psi(T)}{\partial T} -$ $-\int_{t_0}^{T} \frac{\partial H^0(t)}{\partial t} dt$ $H^0(T) = \lambda^T(T) \frac{\partial \Psi(T)}{\partial T}$	
	$L = L(x,u,t)$ $K = K(x(T),T)$		S_1 : $\Psi i(x(T)) = 0$ $i = 1,\ldots,q$	$H^0(t) = H^0(T) =$ $= -\int_{t_0}^{T} \{ \frac{\partial H^0(t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 K(t)}{\partial t^2} dt,$ $H^0(T) = \sum_{i=1}^{q} \gamma_i \frac{\partial \Psi_i(x(T))}{\partial T} - \frac{\partial K(x(T),T)}{\partial T}$	$\lambda(T) = \sum_{i=1}^{q} \gamma_i \{ \frac{\partial \Psi_i(x(T))}{\partial x_i(T)} \} +$ $+ \{ \frac{\partial K(x(T))}{\partial x(T)} \}^T$

Окончание таблицы 5.1

Система	Функционал	Время T	Область конечных Значений	Поведение гамильтониана на оптимальной траектории	Краевые условия для $\lambda(t)$
$\dot{x}(t) = f(x,u,t)$	$L = L(x,u,t)$ $K = K(x(T),T)$	T – не задано	R^n	$H^0(t) = H^0(T) =$ $= -\int_{t_0}^{T} \{\frac{\partial H^0(t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 K(t)}{\partial t^2} dt,$ $H^0(T) = -\frac{\partial K(x(T),T)}{\partial T}$	$\dot{\lambda}(T) = \{\frac{\partial K(x(T),T)}{\partial x(T)}\}^T$
	$L = L(x,u,t)$ $K = 0$	T – фиксировано	x_1	$H^0(t) = H^0(T) =$ $= -\int_{t_0}^{T} \{\frac{\partial H^0(t)}{\partial t} dt$	$\lambda(T)$ – условий нет
			S_1 : $\Psi i(x(T)) = 0$ $i = 1,\dots,q$		$\lambda(T)$ нормален к S_1 в точке $x(T)$; $\lambda(T) = \sum_{i=1}^{q} \gamma_i \{\frac{\partial \Psi_i(x(T))}{\partial x_i(T)}\}^T$
	$L = L(x,u,t)$ $K=K(x(T),T)$		R^n		$\dot{\lambda}(T) = \{\frac{\partial K(x(T),T)}{\partial x(T)}\}^T$

Таким образом, условие (5.16) есть необходимое условие минимума оптимальности системы управления. Если же задача имеет только один минимум и отсутствуют другие точки стационарности гамильтониана (например, линейный объект и квадратичный критерий качества) или исследователь располагает информацией о допустимой области изменений управляющих воздействий, управления из которой ограничивают область изменения значений функционала качества так, что можно рассматривать задачу с одним минимумом, то условие (5.16) является и достаточным условием оптимальности.

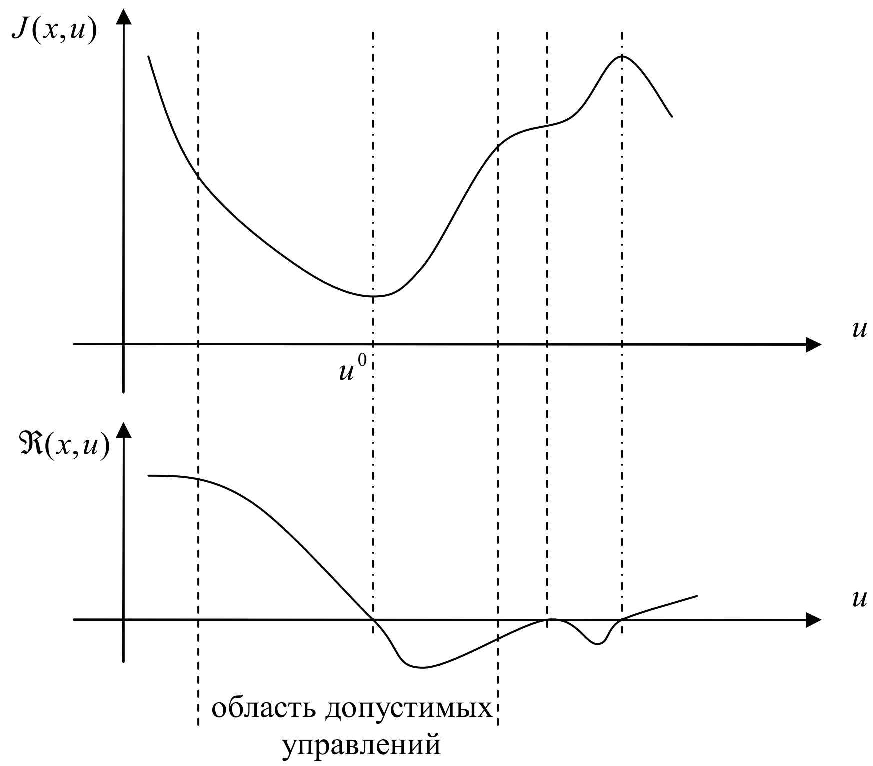

Рис. 5.1. Символический график зависимостей $J(x,u)$ и $\Re(x,u)$ от управляющих воздействий $u(t)$

На рис. 5.1 представлен символический график зависимости функционала $J(x,u)$ и необходимых условий (5.16) от управляющих воздействий $u(t)$ с выделенной областью допустимых изменений этих воздействий. Отметим, что «ось» u на этом рисунке представляет собой функциональное пространство, т.е. каждая точка «оси» u есть функция $u_i(t_0, T)$.

В основу конструкции алгоритмов оптимизации положим необходимые и достаточные условия оптимальности (5.16).

Все положения, относительно поведения гамильтониана на оптимальной траектории, можно распространить и на стохастические задачи [9].

§ 5.2. Основная конструкция алгоритмов оптимизации, использующая поведение гамильтониана

Пусть нестационарный управляемый объект описывается векторным дифференциальным уравнением вида

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = f(x,u,\eta,\alpha,t), \\ &x(t_0) = x_0. \end{aligned}\right\} \tag{5.17}$$

здесь $x \in R^n -$ вектор состояния объекта, $u \in R^r -$ вектор управляющих воздействий, $\eta \in R^k -$ вектор возмущаемых параметров, $a \in R^P -$ вектор параметров, выделенных для оптимизации функционирования объекта. В общем случае $k \geq p$.

Рассмотрим вначале случай, когда $p = k$ и с помощью параметров $a(t)$ предполагается парировать соответствующие параметрические возмущения, т.е. предполагается, что возможно достижение следующего соотношения:

$$a(t) = \eta(t). \tag{5.18}$$

При выполнении (5.18) уравнение объекта (5.17) будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = f(x,u,t), \\ &x(t_0) = x_0. \end{aligned}\right\} \tag{5.19}$$

Оптимальное управление $u^0(t)$ при выполнении соотношения (5.18) для объекта (5.19) обеспечивает выполнение уравнения Гамильтона–Якоби (5.13) с краевым условием (5.14).

Если функционал $J(x,u,t)$ гладкий, то уравнение

$$\frac{\partial J(x.t)}{\partial t}+H\left[x(t),u\left\{x(t),\frac{\partial J(x,t)}{\partial x(t)}\right\},\lambda(t),t\right]=0 \qquad (5.20)$$

описывает поведение функционала $J(x,u,t)$ вдоль траектории $x(t)$ данной системы. Таким образом, независимо от того, какое управление $u(t)$ приводит к заданной области краевых значений состояния системы S, функционал должен удовлетворять уравнению (5.20).

Пусть $\alpha(t)=\eta(t)$, $u^0(t)=u\left\{x^0(t),\frac{\partial J(x^0,t)}{\partial x^0(t)}\right\}$ − оптимальное управление и $J^0=J(x^0,t)$ − оптимальная поверхность функционала. Тогда из уравнения Гамильтона – Якоби будем иметь

$$\frac{\partial J(x^0.t)}{\partial t}=-H\left[x^0(t),u\left\{x^0(t),\frac{\partial J(x^0,t)}{\partial x^0(t)}\right\},\lambda(t),t\right]. \qquad (5.21)$$

Для случая, когда, $\alpha(t)\neq\eta(t)$, управления $u(t)=u\left\{x(t),\frac{\partial J(x,t)}{\partial x(t)}\right\}$, уравнение Гамильтона – Якоби будет иметь вид

$$\frac{\partial J(x.t)}{\partial t}+\frac{\partial J(x.t)}{\partial t}\frac{d}{d\,t}\eta(t)+\frac{\partial J(x.t)}{\partial t}\frac{d}{d\,t}\alpha(t)=H-\left[x(t),u\left\{x(t),\frac{\partial J(x,t)}{\partial x(t)}\right\},\lambda(t),t\right]=0. \qquad (5.22)$$

Учитывая, что $u^0(t)=u\left\{x^0(t),\frac{\partial J(x^0,t)}{\partial x^0(t)}\right\}$ является H-минимальным управлением, т.е.

$$H\left[x^0(t),u\left\{x^0(t),\frac{\partial J(x^0,t)}{\partial x^0(t)}\right\},\lambda(t),t\right]\le H\left[x^0(t),u\left\{x(t),\frac{\partial J(x,t)}{\partial x(t)}\right\},\lambda(t),t\right],$$

сравнивая левые части уравнений (5.21) и (5.22), получим следующее условие:

$$\frac{\partial J(x.t)}{\partial t}\frac{d}{d\,t}\eta(t)+\frac{\partial J(x.t)}{\partial t}\frac{d}{d\,t}\alpha(t)\le 0\,, \qquad (5.23)$$

так как $\dfrac{\partial J(x^0,t)}{\partial t}=\dfrac{\partial J(x,t)}{\partial t}$.

Назначим алгоритм, «парирующий» параметрические возмущения $\eta(t)$, в виде

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{d}\alpha(t)=-\frac{\partial J(x,t)}{\partial\alpha(t)}\,,\\&\alpha(t_0)=\alpha_0\,.\end{aligned}\right\} \qquad (5.24)$$

Используя неравенство (5.23), можно получить условие на максимально возможную скорость изменения возмущенных параметров, при которой алгоритм (5.24) обеспечит асимптотические свойства процессу параметрической оптимизации. Подставляя (5.24) в (5.23), получим

$$\frac{\partial J(x.t)}{\partial\eta(t)}\frac{d}{d\,t}\eta(t)\le\frac{\partial J(x.t)}{\partial\alpha(t)}\left\{\frac{\partial J(x.t)}{\partial\alpha(t)}\right\}^T.$$

откуда

$$\left\|\frac{d}{dt}\bar{\eta}(t)\right\|<\left\|\frac{\partial J(x,t)}{\partial\eta(t)}\right\|^{-1}\left\|\frac{\partial J(x,t)}{\partial\alpha(t)}\right\|^2, \qquad (5.25)$$

где $\dfrac{d}{dt}\bar{\eta}(t)$ − наибольшая скорость изменения возмущающих параметров.

Полученное выше, сформулируем в виде теоремы.

Теорема 5.2.1

Пусть нестационарный управляемый объект описывается векторным дифференциальным уравнением вида

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}x(t)=f(x,u,\eta,\,\alpha,t),\\&x(t_0)=x_0.\end{aligned}\right\}$$

здесь $x\in R^n$ − вектор состояния объекта, $u\in R^r$ − вектор управляющих воздействий, $\eta\in R^k$ − вектор возмущаемых параметров, $a\in R^P$ − вектор параметров, выделенных для оптимизации функционирования объекта. Алгоритм градиентного типа

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\alpha(t)=-\left\{\frac{\partial J(x,t)}{\partial \alpha(t)}\right\}^T,\\&\alpha(t_0)=\alpha_0.\end{aligned}\right\}$$

«парирующий» параметрические возмущения $\eta(t)$, обеспечит асимптотические свойства процессу параметрической оптимизации, если выполняется следующее неравенство

$$\left\|\frac{d}{dt}\bar{\eta}(t)\right\|<\left\|\frac{\partial J(x,t)}{\partial \eta(t)}\right\|^{-1}\left\|\frac{\partial J(x,t)}{\partial \alpha(t)}\right\|^2,$$

где $\frac{d}{dt}\bar{\eta}(t)$ − наибольшая скорость изменения возмущающих параметров.

Вернемся к поведению гамильтониана на оптимальной траектории (5.16). Очевидно, что если $\alpha(t)\neq\eta(t)$, то равенство (5.16) выполняться не будет, т.е. $\Re(t)=H(x,u,\lambda,t)+\phi\,(t)\neq 0$. Это обстоятельство положим в основу алгоритмов оптимизации. Введем в рассмотрение функцию Ляпунова

$$V=\frac{1}{2}\left\{\Re(x,u,\lambda,t)-\Re(x^0,u^0,\lambda,t)\right\}^2=\frac{1}{2}\left\{\Re(x,u,\lambda,t)\right\}^2. \tag{5.26}$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}V=\Re\left\{\frac{\partial H}{\partial \eta(t)}\frac{d}{dt}\eta(t)+\frac{\partial H}{\partial \alpha(t)}\frac{d}{dt}\alpha(t)\right\}\le 0, \tag{5.27}$$

так как $\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial H^0}{\partial t}$, $\frac{\partial \phi(t)}{\partial \eta(t)}=0$ и $\frac{\partial \phi(t)}{\partial \alpha(t)}=0$.

Пусть алгоритм параметрической оптимизации имеет вид

$$\frac{d}{dt}\alpha(t)=-\left\{\frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial \alpha(t)}\right\}^T\Re(t). \tag{5.28}$$

Тогда неравенство (5.27) примет вид

$$\Re\frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial \eta(t)}\frac{d}{dt}\eta(t)-\Re^2\frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial a(t)}\left\{\frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial a(t)}\right\}^T\le 0. \tag{5.29}$$

Из последнего неравенства следует, что параметрическая оптимизация будет успешной, если будет выполняться следующее неравенство:

$$\Re\frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial\eta(t)}\frac{d}{dt}\eta(t)-\Re^2\frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial a(t)}\left\{\frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial a(t)}\right\}^T<0.$$

Назначение алгоритма параметрической оптимизации в виде (5.28) позволит получить условие успешной параметрической оптимизации:

$$\left\|\Re(t)\,\frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial a(t)}\right\|^2>\left|\frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial\eta(t)}\left(\frac{d}{dt}\eta\ (t)\right)^*\right|,\ t\in[t_0,T],$$

(5.30)

где $\left(\frac{d\eta(t)}{dt}\right)^*$ − максимальное значение скорости изменения параметров, подвергающихся возмущениям.

Несколько иной алгоритм параметрической оптимизации можно получить, если структуру алгоритма представить в виде

$$\frac{d}{dt}a(t)=\Im(t)\Re(t). \tag{5.31}$$

Здесь вектор-функция $\Im(t)$ должна определить направление и скорость изменения параметров оптимизации, а скалярная функция $\Re(t)$ − момент остановки процесса оптимизации. Условие (5.29) будет иметь вид

$$\Re\frac{\partial H}{\partial\eta(t)}\frac{d}{dt}\eta(t)-\Re^2\frac{\partial H}{\partial\alpha(t)}\Im\le 0. \tag{5.32}$$

Если назначить вектор-функцию $\Im(t)$ в виде

$$\Im(t)=-\left\{\frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial a(t)}\right\}^T\Re(t),$$

то алгоритм (5.31) принимает вид

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}a(t)=-\left\{\frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial a(t)}\right\}^T\Re^2(t),\\&a(t_0)=a_0.\end{aligned}\right\} \tag{5.33}$$

Полученные условия (5.25) и (5.30) являются необходимыми условиями успешного процесса параметрической оптимизации нестационарного объекта вида (5.17).

Сравним эффективности алгоритмов оптимизации (5.28) и (5.33). Очевидно, если функция $|\Re(x,u,\lambda,t)|<1$, то скорость перестройки параметров при алгоритме (5.28) выше, чем при использовании алгоритма (5.33). Если же $|\Re(x,u,\lambda,t)|>1$, то скорость перестройки параметров при применении алгоритма (5.33) выше, чем при использовании алгоритма (5.28).

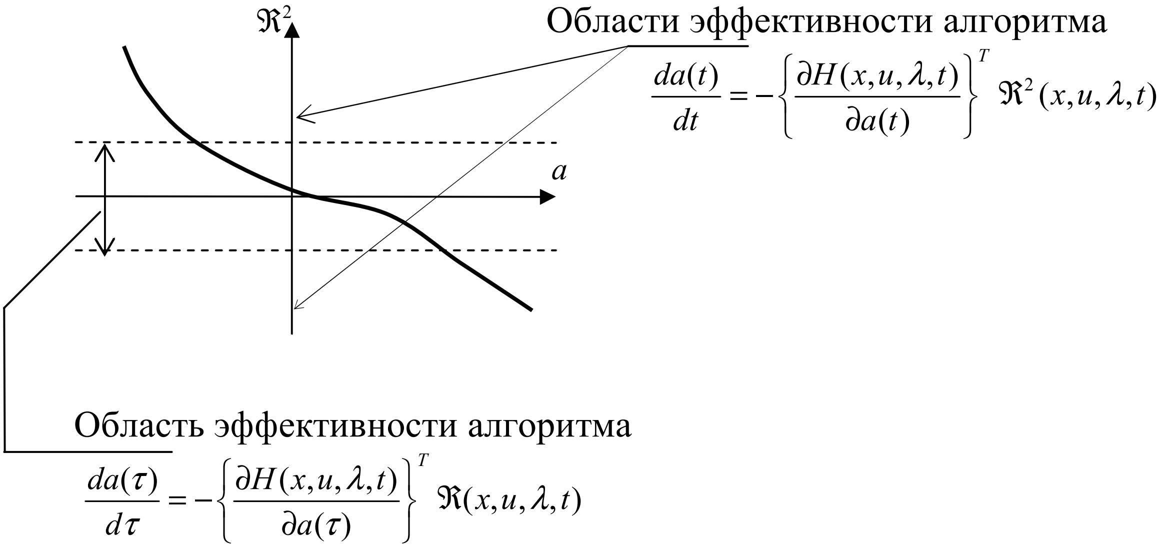

Рис. 5.2. Области эффективности алгоритмов (5.28) и (5.33)

Этот факт иллюстрирует рис. 5.2. Здесь «ось» a представляет собой функциональное пространство, т.е. каждая точка на «оси» a есть функция $a_j(t_0,T)$.

§ 5.3. Задача стабилизации нестационарного линейного детерминированного объекта

Продемонстрируем применение конструкций алгоритмов оптимизации нестационарных систем на примере решения задачи математического конструирования системы стабилизации нестационарного линейного объекта, который описывается следующим уравнением:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + Bu(t), \\ &x(t_0) = x_0, \end{aligned}\right\} \tag{5.34}$$

где $x \in R^n$, $u \in R^r$.

Предполагается, что матрицы $\langle A(t), B \rangle$ обеспечивают объекту свойство управляемости.

Функционал качества имеет вид

$$J(x,u) = \frac{1}{2}x^T(T)Fx(T) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\{x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)x(t)\}dt, \tag{5.35}$$

где матрицы $F, Q(t) -$ положительно определенные, матрица $R(t)$ - положительно определенная, время $T -$ задано, на управление $u(t)$ ограничение не наложено.

Известно [6 ,9], что оптимальное управление, т.е. решение задачи в условиях полной информации об объекте, определяется соотношением

$$u(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)S(t)x(t), \tag{5.36}$$

где симметричная положительно определенная матрица $S(t)$ является решением уравнения типа Риккати:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}S(t) + S(t)A(t) + A^T(t)S(t) - S(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)S(t) + Q(t) = 0, \\ &S(T) = F. \end{aligned} \tag{5.37}$$

Ясно, что, если отсутствует полная информация о параметрах объекта (5.34), предлагаемое решение оказывается нереализуемым.

Рассмотрим последовательно варианты А, В, С задач, изложенных в предыдущем § 5.1.

А. Параметрическое управление

Матрица $A(t)$ дифференциального уравнения (5.34) представима в виде

$$A(t) = A + \eta(t) - a(t), \tag{5.38}$$

где $A-$ известная матрица, синтезированное управление с которой обеспечивает приемлемые переходные процессы в системе, $\eta(t)-$ матрица параметрических возмущений, неопределенность которых имеет интервальный характер, т.е. известно, что $\underline{\eta}_{ij} \le \eta_{ij}(t) \le \overline{\eta}_{ij}$, $t \in [t_0, T]$, где $\underline{\eta}_{ij}, \overline{\eta}_{ij}, i, j = 1,...,n$ – известные величины, матрица $\alpha(t)-$ матрица параметров парирования параметрических возмущений.

Задача параметрического управления заключается в достижении соотношения $\alpha(t) \approx \eta(t)$. При этом объект будет описываться следующим дифференциальным уравнением:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ &x(t_0) = x_0 . \end{aligned}\right\} \tag{5.39}$$

Управление для объекта (5.34) будем синтезировать на его модели (5.39). Регулятор будет описываться следующим уравнением:

$$u(t) = -R(t)B^T(t)S^*(t)x(t), \tag{5.40}$$

где матрица $S^*(t)$ находится на стадии проектирования системы как решение дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}S^*(t) + S^*(t)A + A^T S^*(t) - S^*(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)S^*(t) + Q(t) = 0, \\ &S^*(T) = F. \end{aligned} \tag{5.41}$$

Гамильтониан в данной задаче имеет вид

$$\begin{aligned} &H(x,u,t) = \\ &= \frac{1}{2}x^T(t)Q(t) + \frac{1}{2}u^T(t)R(t)u(t) + x^T(t)S^*(t)\{[A + a(t) - \varphi(t)]x(t) + Bu(t)\} \end{aligned} \tag{5.42}$$

и на оптимальной траектории (когда $\alpha(t) = \eta(t)$) является функцией времени:

$$H^0(t) = -\frac{1}{2}x^T(t)\left[\frac{d}{dt}S^*(t)\right]x(t). \tag{5.43}$$

Выберем алгоритм параметрической оптимизации в виде (5.28):

$$\frac{d}{dt}\alpha(t) = -\left\{\frac{\partial\left[H(x,u,t) - H^0(t)\right]}{\partial\alpha(t)}\right\}^T \left[H(x,u,t) - H^0(t)\right],\ \ \alpha(t_0) = 0\,,$$

или, учитывая (5.42),

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\alpha(t) = S^*(t)\,x(t)\,x^T(t)\left\{\frac{1}{2}x^T(t)\left[Q(t) + S^*(t)BR^{-1}(t)B^TS^*(t) + \frac{d}{dt}S^*(t)\right]x(t) + \right.\\ &\left. + x^TS^*(t)\,\frac{dx(t)}{dt}\right\},\\ &\ \alpha(t_0) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (5.44)$$

В. Координатное управление

Пусть объект описывается уравнением

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = \left[A + \eta(t)\right]x(t) + Bu(t),\\ &x(t_0) = x_0\,. \end{aligned}\right\} \quad (5.45)$$

Предполагается, что имеется возможность компенсации параметрических возмущений $a(t)$ за счет соответствующего управления параметрами регулятора:

$$u(t) = -R^{-1}B^T\left[S^*(t) + s(t)\right]x(t)\,, \quad (5.46)$$

где матрица $S^*(t)$ есть решение дифференциального уравнения (5.41), матрица $s(t)$ − матрица настраиваемых параметров.

Объект (5.34) при управлении (5.46) будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = \left[A + \eta(t) - BR^{-1}(t)B^TS^*(t) - BR^{-1}(t)B^Ts(t)\right]x(t),\\ &x(t_0) = x_0\,. \end{aligned}\right\}$$

Очевидно, что полная компенсация параметрических возмущений $\eta(t)$ за счет настройки параметров регулятора будет только в том случае, если будет выполняться соотношение

$$BR^{-1}(t)B^Ts(t) = \eta(t)\,,$$

откуда

$$s(t) = \left[BR^{-1}(t)B\right]^{-1}\eta(t)\,. \quad (5.47)$$

Таким образом, условие обратимости матрицы $BR^{-1}(t)B^T$ есть условие полной компенсируемости параметрических возмущений в объекте за счет координатного управления.

Гамильтониан в данной задаче имеет вид

$$H(x,u,t) = \\ =\frac{1}{2}x^T(t)\left\{Q(t)-\left[S^*(t)+s(t)\right]BR^{-1}(t)B^T\left[S^*(t)+s(t)\right]+2S^*(t)\left[A+\eta(t)\right]\right\}x(t) \tag{5.48}$$

и на оптимальной траектории (когда координатное управление полностью компенсирует параметрические возмущения в объекте) является функцией времени (5.44):

$$H^0(t)=-\frac{1}{2}x^T(t)\left[\frac{d}{dt}S^*(t)\right]x(t).$$

Алгоритм перестройки параметров матрицы $s(t)$ будет иметь вид

$$\frac{d}{dt}s(t)=-\left\{\frac{\partial\left[H(x,u,t)-H^0(t)\right]}{\partial s(t)}\right\}^T\left[H(x,u,t)-H^0(t)\right],\ \ s(t_0)=0,$$

или, учитывая (5.39),

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}s(t)=BR^{-1}(t)B^T\left[S^*(t)+s(t)\right]x(t)x^T(t)\left\{\frac{1}{2}x^T(t)\left[Q(t)+\frac{d}{dt}S^*(t)\right]x(t)+\right.\\&\left.+\frac{1}{2}u^T(t)R(t)u(t)+x^T(t)\left[S^*(t)+s(t)\right]\frac{dx(t)}{dt}\right\},\\&s(t_0)=0.\end{aligned}\right\} \tag{5.49}$$

Следует отметить, что условие обратимости матрицы $BR^{-1}(t)B^T$ в большинстве случаев не выполняется и реализовать полное компенсирование параметрических возмущений в объекте за счет координатного управления не удается. Реализуемое решение задачи в этих случаях можно получить, применяя координатно-параметрическое управление.

С. Координатно-параметрическое управление

Нестационарный объект (5.34) с параметрами $\alpha_1(t)$, выделенными для парирования части параметрических возмущений, и регулятором

(5.46), с помощью перестройки параметров которого (матрицы $s(t)$) можно компенсировать остальную часть параметрических возмущений, будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = \left[A - BR^{-1}(t)B^T S^*(t) + \eta(t) - \alpha_1(t) - BR^{-1}(t)B^T s(t)\right]x(t), \\ &x(t_0) = x_0 . \end{aligned}\right\} \tag{5.50}$$

Таким образом, предполагается, что возможно выполнение следующих условий:

$$\left.\begin{aligned} &\eta_1(t) = \alpha_1(t), \\ &\eta_2(t) = BR^{-1}(t)B^T s(t), \end{aligned}\right\} \tag{5.51}$$

где $\eta(t) = \eta_1(t) + \eta_2(t)$, матрица $\eta_1(t)$ не содержит элементов матрицы $\eta_2(t)$, а матрица $a_2(t)$ не содержит элементов матрицы $a_1(t)$. Матрица же $s(t)$ содержит ненулевые элементы только там, где находятся элементы матрицы $\eta_2(t)$. Пусть, для определенности, матрица $\eta(t)$ содержит n^2 элементов, тогда матрица $\eta_1(t)$ содержит k_1 элементов, отличных от нуля, матрица $\eta_2(t)$ содержит k_2 элементов, отличных от нуля ($k_1 + k_2 = n^2$), и матрица $s(t)$ содержит k_2 элементов, отличных от нуля.

Если конструктивно можно реализовать условия (5.51), то алгоритмы оптимизации нестационарной системы будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\alpha_1(t) = \\ &= S^*(t)x(t)x^T(t)\left\{\frac{1}{2}x^T(t)\left[Q(t) + S^*(t)BR^{-1}(t)B^T S^*(t) + \left[\frac{d}{dt}S^*(t)\right]\right]x(t) + x^T(t)S^*(t)\frac{dx(t)}{dt}\right\}, \\ &\alpha_1(t_0) = 0, \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}s(t) = BR^{-1}(t)B^T\left[S^*(t) + s(t)\right]x(t)x^T(t)\left\{\frac{1}{2}x^T(t)\left[Q(t + \frac{d}{dt}S^*(t))\right]x(t) + \frac{1}{2}u^T(t)R(t)u(t) + \right. \\ &\left. + x^T(t)\left[S^*(t) + s(t)\right]\frac{dx(t)}{dt}\right\}, \\ &s(t_0) = 0. \end{aligned}\right\}$$

Выбором матрицы $Q(t)$ в функционале (5.35) можно добиться следующего соотношения:

$$H(x^0, u^0, \lambda, t) \equiv 0,\ t \in [t_0, T].$$

Для этого назначим матрицу $Q(t)$ в виде

$$Q = SBR^{-1}B^T S - A^T S - SA. \tag{5.52}$$

При таком назначении матрицы $Q(t)$ матрица $S(t) = const$, так как $\frac{d}{dt}S(t) = 0$ и $S(t) = F,\ t \in [t_0, T]$. Из (5.52) видно, что матрицы F и R в функционале (5.35) должны назначаться так, чтобы матрица $Q = FBR^{-1}B^T F - A^T F - FA$ была бы положительно определенной и переходные процессы, которые описываются уравнением

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = [A - BR^{-1}B^T F]\,x(t), \\ &x(t_0) = x_0, \end{aligned}\right\}$$

удовлетворяли бы заданным целям управления.

Параметрическое управление

В случае параметрического управления объектом

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = [A + \eta(t) - \alpha(t) - BR^{-1}B^T F]x(t), \\ &x(t_0) = x_0. \end{aligned}\right\} \tag{5.53}$$

В силу назначения матрицы Q в виде (5.52) гамильтониан будет иметь вид

$$H(\eta(t), \alpha(t)) = x^T(t)F\left\{\left[BR^{-1}B^T F - A\right]x(t) + \frac{d}{dt}x(t)\right\}. \tag{5.54}$$

Введем функцию Ляпунова

$$V = \frac{1}{2}\left\|\left[A - BR^{-1}B^T F\right]x(t) - \frac{d}{dt}x(t)\right\|^2 \geq 0. \tag{5.55}$$

Полная производная функции Ляпунова по времени в рассматриваемой задаче при $\eta = const$ должна удовлетворять следующему условию:

$$\frac{d}{dt}V = -\left\{\left[A - BR^{-1}B^T F\right]x(t) - \frac{d}{dt}x(t)\right\}^T \left\{\frac{d}{dt}\alpha(t)\right\}x(t) \leq 0.$$

Таким образом, алгоритм настройки параметров $\alpha(t)$ может быть назначен в виде

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\alpha(t)=\left\{\left[A-BR^{-1}B^{T}F\right]x(t)+\frac{d}{dt}x(t)\right\}x^{T}(t),\\&\alpha(t_0)=\alpha_0.\end{aligned}\right\}\qquad(5.56)$$

Координатное управление объектом

Координатное управления объектом

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}x(t)=\left[A+\eta(t)\right]x(t)+Bu(t),\\&x(t_0)=x_0\end{aligned}\right\}\qquad(5.57)$$

осуществляется с помощью регулятора с перестраиваемыми параметрами

$$u(t)=-R^{-1}B^{T}\left[F+s(t)\right]x(t)\,,\qquad(5.58)$$

где матрица F определяется вместе с матрицей R в функционале (5.35) так, чтобы матрица $Q=FBR^{-1}B^{T}F-A^{T}F-FA$ была бы положительно определенной и переходные процессы, которые описываются уравнением

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}x(t)=\left[A-BR^{-1}B^{T}F\right]x(t),\\&x(t_0)=x_0,\end{aligned}\right\}\qquad(5.59)$$

удовлетворяли бы заданным целям управления, а матрица $s(t)$ − матрица настраиваемых параметров.

Полная производная функции Ляпунова (5.55) по времени при $\eta=const$ должна удовлетворять следующему условию:

$$\frac{d}{dt}V=\left\{\left[A-BR^{-1}B^{T}F\right]x(t)-\frac{d}{dt}x(t)\right\}^{T}BR^{-1}B^{T}\left\{\frac{d}{dt}s(t)\right\}x(t)\le 0\,.$$

Алгоритм настройки параметров может быть назначен в виде

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}s(t)=-\left\{\left[BR^{-1}B^{T}F-A\right]x(t)+\frac{d}{dt}x(t)\right\}x^{T}(t)BR^{-1}B^{T},\\&s(t_0)=s_0.\end{aligned}\right\}\qquad(5.60)$$

Следует напомнить, что полностью парировать параметрические возмущения $\eta(t)$ с помощью соответствующей настройки параметров регулятора можно только в том случае, когда матрица $BR^{-1}B^T$ обратима.

§ 5.4. Задача стабилизации нестационарного линейного детерминированного объекта с неполной информацией о состоянии

Рассмотрим задачу стабилизации линейного детерминированного объекта с неполной информацией о состоянии. В этой задаче, все предположения относительно параметров объекта и функционала качества остаются такими, какими были описаны в § 5.3, т.е. объект описывается уравнением

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + Bu(t), \\ &x(t_0) = x_0, \end{aligned}\right\} \tag{5.61}$$

где $x \in R^n$, $u \in R^r$.

Предполагается, что матрицы $\langle A(t), B\rangle$ обеспечивают объекту свойство управляемости.

Функционал качества имеет вид

$$J(x,u) = \frac{1}{2}x^T(T)Fx(T) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\{x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)x(t)\}dt, \tag{5.62}$$

где матрицы $F, Q(t)$ − положительно полуопределенные, матрица $R(t)$ − положительно определенная, время T − задано, на управление $u(t)$ ограничение не наложено.

Однако в отличие от задачи предыдущего параграфа состояние объекта измеряется не полностью:

$$y(t) = Cx(t),\ y \in R^m,\ m < n, \tag{5.63}$$

где C − матрица измерений размерностью $m \times n$. Предполагается, что каждая строка матрицы измерений содержит не более одного не зависящего от времени элемента. Таким образом, вектор измерений содержит m элементов вектора $x(t)$ с известными, не зависящими от времени коэффициентами.

Требуется синтезировать управление, доставляющее минимум функционалу (5.62) на объекте (5.61) при измерении вектора состояния в виде (5.63).

В такой постановке задачи реализуемые решения можно получить, как показывалось в гл. 1, введением в структуру системы наблюдателя

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\hat{x}(t)=A(t)\hat{x}(t)+Bu(t)+K(t)[y(t)-C\hat{x}(t)],\\&\hat{x}(t_0)=\hat{x}_0,\end{aligned}\right\}\qquad \hat{x}\in R^n. \tag{5.64}$$

Ошибка наблюдения описывается следующим соотношением:

$$\varepsilon(t)=x(t)-\hat{x}(t). \tag{5.65}$$

Как уже показывалось в первой главе, подстановка $x(t)$ из (5.65) в (5.62) позволяет представить задачу об оптимальном управлении с функционалом (5.62) как задачу построения оптимального наблюдателя и оптимального регулятора.

Продифференцировав (5.65) по времени и учитывая (5.61) и (5.64), получим

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\varepsilon(t)=[A(t)-K(t)C]\varepsilon(t),\\&\varepsilon(t_0)=x_0-\hat{x}_0.\end{aligned}\right\} \tag{5.66}$$

Матрица $K(t)$ должна быть выбрана так, чтобы решение уравнения (5.66) доставило минимум функционалу

$$J_1(\varepsilon)=\frac{1}{2}\varepsilon^T(T)F\,\varepsilon(T)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\varepsilon^T(t)Q(t)\varepsilon(t)dt. \tag{5.67}$$

Представим уравнение (5.66) с помощью линейного преобразования в виде

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\varepsilon(t)=A^T(t)\varepsilon(t)-C^Tu_1(t),\\&\varepsilon(t_0)=x_0-\hat{x}_0,\end{aligned}\right\}$$

где

$$u_1(t) = K^T(t)\varepsilon(t)\,. \tag{5.68}$$

Функционал качества (5.67) запишем в виде

$$J_1(\varepsilon) = \frac{1}{2}\varepsilon^T(T)F\,\varepsilon(T) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left[\varepsilon^T(t)Q_1(t)\varepsilon(t) + u_1^T(t)R_1(t)u_1(t)\right]dt.,$$

где матрицы $Q_1(t),\, R_1(t)$ будут выбраны позже.

Оптимальное управление ошибкой будет определяться уравнением

$$u_1(t) = R_1^{-1}(t)CL(t)\varepsilon(t)\,, \tag{5.69}$$

где матрица $L(t)$ является решением уравнения

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}L(t) + A(t)L(t) + L(t)A^T(t) - L(t)C^T R_1^{-1}(t)CL(t) + Q_1(t) = 0,\\ &L(T) = F.\end{aligned}\right\} \tag{5.70}$$

Очевидно, что матрицы $Q_1(t),\, R_1(t)$ должны выбираться так, чтобы выполнялось условие

$$Q(t) = Q_1(t) + L(t)C^T R_1^{-1}CL(t)\,. \tag{5.71}$$

Подставляя второе слагаемое правой части равенства (5.71) в (5.70), получим

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}L(t) + A(t)L(t) + L(t)A^T(t) = Q(t) - 2Q_1(t),\\ &L(T) = F.\end{aligned}\right\} \tag{5.72}$$

Так как матрица $L(t)$ должна быть положительно определенной, то

$$Q(t) - 2Q_1(t) \ge 0\,. \tag{5.73}$$

Матрица $Q_1(t)$ может быть назначена в виде $Q_1(t) = 0{,}5Q(t)$, тогда уравнение (5.72) становится автономным линейным дифференциальным уравнением с краевым условием на правом конце:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}L(t) + A(t)L(t) + L(t)A^T(t) = 0,\\ &L(T) = F.\end{aligned}\right\} \tag{5.74}$$

Управление $u(t)$, доставляющее минимум функционалу

$$J(\hat{x},u)=\frac{1}{2}\hat{x}^T(T)F\hat{x}(T)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left\{\hat{x}^T(t)Q(t)\hat{x}(t)+u^T(t)R(t)x(t)\right\}dt,$$

имеет вид

$$u(t)=R^{-1}(t)B^T S(t)\hat{x}(t), \tag{5.75}$$

где положительно определенная матрица $S(t)$ является решением дифференциального уравнения

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}S(t)+A^T(t)S(t)+S(t)A(t)-S(t)BR^{-1}(t)B^T S(t)+Q(t)=0,\\&S(T)=F.\end{aligned}\right\} \tag{5.76}$$

К сожалению, при отсутствии информации об изменении параметров матрицы $A(t)$ реализовать полученное аналитическое решение невозможно.

Прежде чем перейти к рассмотрению вариантов задач (A, B, C), введем вектор $z\in R^n$, который будет являться решением дифференциального уравнения

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}z(t)=A(t)z(t)+Bu(t),\\&z(t_0)=\hat{x}_0.\end{aligned}\right\} \tag{5.77}$$

Очевидно, что при $\hat{x}(t_0)=x(t_0)$ выполняются следующие соотношения:

$$\hat{x}(t)=x(t),\ \ z(t)=\hat{x}(t),\ \ z(t)=x(t). \tag{5.78}$$

Вектор $z(t)$ может быть сформирован из m измеряемых координат вектора состояния $x(t)$ и $n-m$ соответствующих координат вектора $\hat{x}(t)$, т.е.

$$z^T=\left(x_1,...,x_m,\hat{x}_{m+1},...\hat{x}_n\right). \tag{5.79}$$

Очевидно, что при выполнении условий (5.78) вектор $z(t)$ может быть использован при реализации любых математических конструкций вместо векторов $x(t)$ и $\hat{x}(t)$.

А. Параметрическое управление

Матрица $A(t)$ дифференциального уравнения (5.61) представима в виде

$$A(t) = A + \eta(t) - a(t), \tag{5.80}$$

где $A-$ известная матрица, которая используется (в предположении об отсутствии параметрических помех или их полной компенсации) при синтезе управления, обеспечивающего приемлемые переходные процессы в системе;

$\eta(t)-$ матрица параметрических возмущений, неопределенность которых имеет интервальный характер, т.е. известно, что $\underline{\eta}_{i\,j} \le \eta_{i\,j}(t) \le \overline{\eta}_{i\,j}$, $t \in [t_0, T]$, где $\underline{\eta}_{i\,j}$, $\overline{\eta}_{i\,j}$, $i, j = 1, ..., n$ - известные величины; матрица $\alpha(t)-$ матрица параметров парирования параметрических возмущений.

Задача параметрического управления заключается в достижении соотношения $a(t) = \eta(t)$.

Наблюдатель будет играть роль модели объекта и будет описываться следующим дифференциальным уравнением:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K^*(t)[y(t) - C\hat{x}(t)], \\ &\hat{x}(t_0) = \hat{x}_0, \end{aligned}\right\} \tag{5.81}$$

где

$$K^*(t) = R_1^{-1}(t) C L^*(t), \tag{5.82}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}L^*(t) + AL^*(t) + L^* A^T(t) = 0, \\ &L^*(T) = F. \end{aligned}\right\} \tag{6.83}$$

Регулятор будет описываться следующим уравнением:

$$u(t) = -R^{-1}(t) B^T(t) S^*(t) \hat{x}(t), \tag{5.84}$$

где матрица $S^*(t)$ находится на стадии проектирования системы как решение дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt}S^*(t)+S^*(t)A+A^TS^*(t)-S^*(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)S^*(t)+Q(t)=0,$$
$$S^*(T)=F. \qquad (5.85)$$

Гамильтониан в данной задаче на оптимальной траектории (когда $a(t)=\eta(t)$ и выполняются соотношения (5.78) является функцией времени:

$$H^0(t)=-\frac{1}{2}x^T(t)\left[\frac{d}{dt}S^*(t)\right]x(t)=$$
$$=-\frac{1}{2}\hat{x}^T(t)\left[\frac{d}{dt}S^*(t)\right]\hat{x}(t)=-\frac{1}{2}z^T(t)\left[\frac{d}{dt}S^*(t)\right]z(t). \qquad (5.86)$$

Таким образом, на оптимальной траектории будет выполняться следующее условие:

$$\Re(t)=H(z,u,t)-H^0(t)=0. \qquad (5.87)$$

В случае, когда не выполняются соотношения (5.78), а это может быть следствием неравенства начальных условий объекта и наблюдателя или/и неполного парирования возмущенных параметров, т.е. $a(t)\neq\eta(t)$, условие (5.87) выполняться не будет.

Это обстоятельство и положим в основу конструкции алгоритма парирования параметрических возмущений.

Цепи параметрической оптимизации системы за счет парирования возмущений в самом объекте будут описываться следующим уравнением:

$$\frac{d}{dt}\alpha(t)=-\left\{\frac{\partial\left[H(z,\hat{x},u,t)-H^0(t)\right]}{\partial\alpha(t)}\right\}^T\left[H(z,\hat{x},u,t)-H^0(t)\right],\ \ \alpha(t_0)=0,$$

или

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\alpha(t)=\\&=S^*(t)z(t)z^T(t)\left\{\frac{1}{2}z^T(t)\left[Q(t)+S^*(t)BR^{-1}(t)B^TS^*(t)+\left[\frac{d}{dt}S^*(t)\right]\right]z(t)+z^T(t)S^*(t)\frac{d\hat{x}(t)}{dt}\right\},\\&\alpha(t_0)=0.\end{aligned}\right\}$$
$$(5.88)$$

В. Координатное управление

Пусть объект описывается уравнением

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = \left[A + \eta(t)\right]x(t) + Bu(t), \\ &x(t_0) = x_0 . \end{aligned}\right\} \qquad (5.89)$$

Предполагается, что имеется возможность компенсации параметрических возмущений $\eta(t)$ за счет соответствующего управления параметрами регулятора:

$$u(t) = -R^{-1}B^T\left[S^*(t) + s(t)\right]\hat{x}(t), \qquad (5.90)$$

где матрица $S^*(t)$ есть решение дифференциального уравнения (5.82), матрица $s(t)$ − матрица настраиваемых параметров, а вектор $\hat{x}(t)$ - выход наблюдателя (5.81).

Объект (5.89) при управлении (5.90) и равенстве его начальных условий и начальных условий наблюдателя будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = \left[A + \eta(t) - BR^{-1}(t)B^T S^*(t) - BR^{-1}(t)B^T s(t)\right]x(t), \\ &x(t_0) = x_0 . \end{aligned}\right\}$$

Очевидно, что полная компенсация параметрических возмущений $\eta(t)$ за счет настройки параметров регулятора будет только в том случае, если будут выполняться соотношения

$$\hat{x}(t_0) = x(t_0) \quad \text{и} \quad BR^{-1}(t)B^T s(t) = \eta(t),$$

откуда, как и в предыдущем параграфе,

$$s(t) = \left[BR^{-1}(t)B\right]^{-1}\eta(t). \qquad (5.91)$$

Таким образом, условие обратимости матрицы $BR^{-1}(t)B^T$ есть условие полной компенсируемости параметрических возмущений в объекте за счет координатного управления.

Гамильтониан в данной задаче на оптимальной траектории (когда координатное управление полностью компенсирует параметрические возмущения в объекте) является функцией времени:

$$H^0(t) = -\frac{1}{2} x^T(t) \left[\frac{d}{dt} S^*(t) \right] x(t) = -\frac{1}{2} \hat{x}^T(t) \left[\frac{d}{dt} S^*(t) \right] \hat{x}(t) = -\frac{1}{2} z^T(t) \left[\frac{d}{dt} S^*(t) \right] z(t) .$$

Алгоритм перестройки параметров матрицы $s(t)$ будет иметь вид

$$\frac{d}{dt} s(t) = -\left\{ \frac{\partial \left[H(z, \hat{x}, u, t) - H^0(t) \right]}{\partial s(t)} \right\}^T \left[H(z, \hat{x}, u, t) - H^0(t) \right], \ \ s(t_0) = 0 ,$$

или

$$\left. \begin{aligned} & \frac{d}{dt} s(t) = BR^{-1}(t) B^T \left[S^*(t) + s(t) \right] z(t) z^T(t) \left\{ \frac{1}{2} z^T(t) \left[Q(t + \frac{d}{dt} S^*(t)) \right] z(t) + \right. \\ & + \frac{1}{2} u^T(t) R(t) u(t) + \\ & \left. + z^T(t) \left[S^*(t) + s(t) \right] \frac{d\hat{x}(t)}{dt} \right\}, \\ & s(t_0) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.92)$$

Условие обратимости матрицы $BR^{-1}(t)B^T$ в большинстве случаев не выполняется, и реализовать полное компенсирование параметрических возмущений в объекте за счет координатного управления не удается. Реализуемое решение задачи в этих случаях можно получить, применяя координатно-параметрическое управление.

<u>С. Координатно-параметрическое управление</u>

Нестационарный объект

$$\left. \begin{aligned} & \frac{d}{dt} x(t) = \left[A + \eta(t) - \alpha_1(t) \right] x(t) + Bu(t), \\ & x(t_0) = x_0 . \end{aligned} \right\}$$

с параметрами $\alpha_1(t)$, выделенными для парирования части параметрических возмущений, наблюдателем (5.81) – (5.84) и регулятором (5.90), с помощью перестройки параметров которого (параметров матрицы $s(t)$) можно компенсировать остальную часть параметрических возмущений при выполнении соотношений (5.78), будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} & \frac{d}{dt} x(t) = \left[A - BR^{-1}(t) B^T S^*(t) + \eta(t) - \alpha_1(t) - BR^{-1}(t) B^T s(t) \right] x(t), \\ & x(t_0) = x_0 . \end{aligned} \right\} \quad (5.93)$$

Таким образом, предполагается, что возможно выполнение следующих условий:

$$\left.\begin{aligned} &\eta_1(t) = \alpha_1(t), \\ &\eta_2(t) = BR^{-1}(t)B^T s(t), \end{aligned}\right\} \qquad (5.94)$$

где $\eta(t) = \eta_1(t) + \eta_2(t)$. Предполагается, что матрица $\eta_1(t)$ не содержит элементов матрицы $\eta_2(t)$, а матрица $\eta_2(t)$ не содержит элементов матрицы $\eta_1(t)$. Матрица же $s(t)$ содержит ненулевые элементы только там, где находятся элементы матрицы $\eta_2(t)$. Если конструктивно можно реализовать условия (5.94), то алгоритмы оптимизации нестационарной системы будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\alpha_1(t) = \\ &= S^*(t)z(t)z^T(t)\left\{\frac{1}{2}z^T(t)\left[Q(t) + S^*(t)BR^{-1}(t)B^T S^*(t) + \left[\frac{d}{dt}S^*(t)\right]\right]z(t) + z^T(t)S^*(t)\frac{d\hat{x}(t)}{dt}\right\}, \\ &\varphi_1(t_0) = 0, \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}s(t) = BR^{-1}(t)B^T\left[S^*(t) + s(t)\right]z(t)z^T(t)\left\{\frac{1}{2}z^T(t)\left[Q(t + \frac{d}{dt}S^*(t))\right]z(t) + \right. \\ &\left.\frac{1}{2}u^T(t)R(t)u(t) + z^T(t)\left[S^*(t) + s(t)\right]\frac{d\hat{x}(t)}{dt}\right\}, \\ &s(t_0) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (5.95)$$

Отметим, что управление вида (5.75), (5.84), (5.90) можно улучшить, если его организовать, используя вектор $z(t)$, например,

$$u(t) = R^{-1}(t)BS(t)z(t).$$

§ 5.5. Решение двухточечной краевой задачи общего вида с помощью алгоритмов оптимизации

В настоящем параграфе рассмотрим возможный путь решения двухточечной задачи, которая встречается при синтезе оптимальных по быстродействию управлений.

Пусть управляемый объект описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = f(x,u), \\ &x(t_0) = x_0, \end{aligned}\right\} \quad x \in R^n,\ u \in R^r,\ u(t) \in U. \tag{5.96}$$

Функционал качества имеет вид

$$J(x,u) = K(x(T),T) + \int_{t_0}^{T} L(x,u)dt, \tag{5.97}$$

где время T не задано.

Задача заключается в построении управления $u(t) \in U$, доставляющего минимум функционалу (5.97) на объекте (5.96).

Как известно [6, 9], необходимые условия оптимальности записываются в виде двухточечной задачи, в которой дополнительная переменная $\lambda(t)$ является решением дифференциального уравнения с краевым условием на правом конце:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\lambda(t) = -\left\{\frac{\partial H(x,u,\lambda)}{\partial x(t)}\right\}^T, \\ &\lambda(T) = \left\{\frac{\partial K(x(T),T)}{\partial x(T)}\right\}^T, \end{aligned}\right\} \tag{5.98}$$

где

$$H(x,u,\lambda) = L(x,u) + \lambda^T(t) f(x,u). \tag{5.99}$$

Оптимальное управление находится из условия

$$H^0 = H(x^0,u^0,\lambda) = \min_{u(t)\in U} H(x,u,\lambda). \tag{5.100}$$

Найденное таким образом оптимальное управление зависит как от $x(t)$, так и от $\lambda(t)$.

Отметим, что гамильтониан (5.100) в данной задаче не зависит от времени, постоянен на всей траектории и, кроме этого,

$$H^0(t) = H(x^0,u^0,\lambda) = 0,\ t \in [t_0,T]. \tag{5.101}$$

Уравнения (5.93) и (5.95) образуют каноническую систему, связанную с основной задачей [6]:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= \left\{\frac{\partial H(x,u,\lambda)}{\partial \lambda(t)}\right\}^T, \\ \frac{d}{dt}\lambda(t) &= -\left\{\frac{\partial H(x,u,\lambda)}{\partial x(t)}\right\}^T. \end{aligned}\right\} \tag{5.102}$$

Первое уравнение канонической системы (5.102) есть в точности исходная система уравнений, описывающая объект управления, которая не зависит от дополнительной переменной $\lambda(t)$. Второе уравнение канонической системы (5.102) описывает движение нормали к гиперплоскости вдоль оптимальной траектории. Это уравнение имеет множество решений, каждое из которых описывает движение соответствующей нормали к гиперплоскости вдоль оптимальной траектории. Понятно, что каноническая система имеет решения вдоль любой траектории системы, а не только для оптимального управления. Однако главное свойство переменной $\lambda(t)$ состоит в том, что оптимальное решение является точкой стационарности гамильтониана (5.100) в случае, когда ограничения на управляющие воздействия неэффективны или гамильтониан принимает минимальное значение, когда оптимальное управление достигается на замыкании допустимой области управляющих воздействий.

Это свойство переменной $\lambda(t)$, связанное с поведением гамильтониана на оптимальной траектории (5.101), будет использовано при построении алгоритма оптимизационного решения двухточечной задачи (5.96), (5.98) с управлением, определяемым условием (5.100).

Введем в рассмотрение оценку дополнительной переменной $\hat{\lambda}(t)$, которая связана с $\lambda(t)$ следующим отношением:

$$\lambda(t) = \hat{\lambda}(t) + \delta(t), \tag{5.103}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\hat{\lambda}(t) = -\left\{\frac{\partial H(x,u,\hat{\lambda},\delta)}{\partial x(t)}\right\}^T, \\ &\hat{\lambda}(t_0) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{5.104}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\delta(t) = -\left\{\frac{\partial H(x,u,\hat{\lambda},\delta)}{\partial \delta(t)}\right\}^T H(x,u,\lambda,\delta), \\ &\delta(t_0) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.105}$$

Более конкретно алгоритм (5.105) имеет вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\delta(t) = -f(x,u)\left\{L(x,u) + \left[\hat{\lambda}(t) + \delta(t)\right]^T f(x,u)\right\}, \\ &\delta(t_0) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.106}$$

§ 5.6. Параметрическое управление нестационарным объектом методом скоростного спуска по лагранжиану

Метод, рассматриваемый в данном разделе, можно отнести к методам локальной оптимизации. Пусть нестационарная управляемая система описывается уравнением движения:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = f(x,u,\eta,\alpha), \\ &x(t_0) = x_0, \end{aligned}\right\} \tag{5.107}$$

где $x \in R^n$, $u \in R^r$, $u(t) \in U$, $\eta \in R^k$, $\eta(t) \in \Omega -$ вектор параметров объекта, подвергающихся воздействию неконтролируемых возмущений, $\alpha \in R^k -$ вектор параметров объекта оптимизации системы. Предполагается, что изменением настраиваемых параметров можно добиться следующего соотношения:

$$\alpha(t) \approx \eta(t). \tag{5.108}$$

Выделенные для параметрической оптимизации параметры системы могут находиться как в самом объекте, так и в регуляторе.

Заданы ограничения на конечное состояние системы в виде функций, т.е. в момент окончания переходного процесса состояние системы должно отвечать следующему уравнению:

$$\Psi(x(T)) = 0,\ \Psi \in R^q. \qquad (5.109)$$

Функционал качества с учетом (5.109) запишем в виде

$$J(x,u) = \Phi(x(T)) + \int_{t_0}^{T} L(x,u)dt\,, \qquad (5.110)$$

где

$$\Phi(x(T)) = K(x(T)) + \gamma^{\,T}\Psi(x(T))\,. \qquad (5.111)$$

Здесь $\gamma \in R^q$ − вспомогательная переменная.

Добавим в подынтегральное выражение функционала (5.110) $\frac{d}{dt}\Phi(x(t))$, компенсировав вне интеграла выражением $\Phi(x(t_0)) - \Phi(x(T))$. Тогда будем иметь

$$J(x,u) = \Phi(x(t_0)) + \int_{t_0}^{T} \hbar(x,u)dt\,, \qquad (5.112)$$

где

$$\hbar(x,u) = L(x,u) + \frac{d}{dt}\Phi(x(t))\,. \qquad (5.113)$$

Так как первое слагаемое функционала (5.112) не зависит от управления, то функционал

$$J^*(x,u) = \int_{t_0}^{T} \hbar(x,u)dt \qquad (5.114)$$

эквивалентен исходному функционалу (5.110).

Предположим, что закон управления имеет вид

$$u(t) = \varphi\,[x(t)] \qquad (5.115)$$

и $u^0(t) \in U$ − оптимальное управление, синтезированное при выполнении соотношения (5.108).

Таким образом, при выполнении соотношения (5.108) оптимальное управление $u^0(t)$ и соответствующая ему траектория движения системы $x^0(t)$ доставляют минимум функционалу (5.110) или, что то же самое, функционалу (5.114).

Изменение подынтегральной функции функционала (5.114) при оптимальном управлении и соответствующей ему траектории системы в интервале времени управления $[t_0, T]$ имеет максимально возможную скорость, причем $d\lambda(x^0(t), u^0(t))/dt \le 0$. Другими словами, при любом управлении, отличном от оптимального, или при нарушении соотношения (5.108) справедливо следующее: $\lambda(x^0(t), u^0(t)) \le \lambda(x(t), u(t))\ \forall t \in [t_0, T]$.

Так как система уравнений (5.107) и (5.115) является замкнутой, то управляемая система «объект + регулятор» записывается в виде

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = f_{зам}(x, \eta, \alpha), \\ &x(t_0) = x_0 \end{aligned}\right\} \tag{5.116}$$

и $J^*(x) = \int_{t_0}^{T} \hbar(x(t, \eta, \alpha))dt$.

В качестве алгоритма работы настраиваемых параметров выберем следующий закон:

$$\frac{d}{dt}\alpha(t) = -G\frac{\partial \lambda(x(t, \eta, \alpha))}{\partial \alpha(t)}, \tag{5.117}$$

где G − симметрическая положительно определенная матрица. Изменение вектора $\alpha(t)$, согласно алгоритму (5.117), происходит в направлении антиградиента от скорости изменения функционала (5.114).

Поскольку система (5.116) является замкнутой, исследование ее поведения в фазовом пространстве (x, η, α) и нахождение условий, при которых система уравнений (5.114) с законом управления параметров (5.117) будет обладать устойчивыми свойствами, проведем с помощью функции Ляпунова следующего вида:

$$V(x, \eta, \alpha) = J^*(x) + \frac{1}{2}(\eta(t) - \alpha(t))^T G^{-1}(\eta(t) - \alpha(t)). \tag{5.118}$$

Предположим, что функция (лагранжиан) $\lambda = \lambda(x, \eta, \alpha)$ выпукла по компонентам вектора настраиваемых параметров $\alpha(t)$, $t \in [t_0, T]$, т.е.

$$\lambda(x(t, \eta, \alpha)) - \lambda(x(t)) \ge (\eta(t) - \alpha(t))\frac{d\alpha(t)}{dt}, \tag{5.119}$$

где $\lambda(x(t)) = \lambda(x(t), \alpha(t) = \eta(t))$, траектории системы (5.116) ограничены и тем самым система стабилизируема. Очевидно, что условию (5.119) удовлетворяет линейная по $\alpha(t)$ функция $\lambda(x,\eta,\alpha)$.

Найдем производную функции Ляпунова (5.118) по времени

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}V(x,\eta,\alpha)=-\lambda(x,\eta,\alpha)+(\eta(t)+\alpha(t))^T G^{-1}\frac{d\eta(t)}{dt}-(\eta(t)-\alpha(t))^T G^{-1}\frac{d\alpha(t)}{dt}=\\&=-\lambda(x(t,\eta,\alpha))+(\eta(t)-\alpha(t))^T G^{-1}\frac{d\eta(t)}{dt}-(\eta(t)+\alpha(t))^T\left\{\frac{\partial\lambda(x(t,\eta,\alpha))}{\partial\alpha(t)}\right\}^T\le 0.\end{aligned}\qquad(5.120)$$

Используя условие (5.119), получим

$$\frac{d}{dt}V(x,\eta,\alpha)=-\lambda(x)+(\eta(t)-\alpha(t))^T G^{-1}\frac{d\eta(t)}{dt}\le 0\,.\qquad(5.121)$$

Из (5.118) следует, что на траекториях системы (5.116) при возмущениях $\left\{\frac{d\eta(t)}{dt},[\eta(t)-\alpha(t)]\right\},\ \forall t\in[t_0,T]$, при которых выполняется условие

$$\lambda(x)>\left|(\eta(t)-\alpha(t))^T G^{-1}\frac{d\eta(t)}{dt}\right|,\qquad(5.122)$$

величина $J^*(x)$ ограничена сверху, т.е.

$$J^*(x(t))\le V(x(t),\eta,\alpha),\ t\in[t_0,T].$$

Продифференцировав лагранжиан по t при $\alpha(t)\ne\eta(t)$, получим условие его асимптотического поведения в процессе координатного и параметрического управления объекта (5.116)

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\lambda(x(t,\eta,\alpha))=\\&=\frac{\partial\lambda(x(t,\eta,\alpha))}{\partial x(t)}f_{зам}(x,\eta,\alpha)+\frac{\partial\lambda(x(t,\eta,\alpha))}{\partial\eta(t)}\frac{d\eta(t)}{dt}+\frac{\partial\lambda(x(t,\eta,\alpha))}{\partial\alpha(t)}\frac{d\alpha(t)}{dt}=\\&=\frac{\partial\lambda(x(t,\eta,\alpha))}{\partial x(t)}f_{зам}(x,\eta,\alpha)+\\&+\frac{\partial\lambda(x(t,\eta,\alpha))}{\partial\eta(t)}\frac{d\eta(t)}{dt}-\frac{\partial\lambda(x(t,\eta,\alpha))}{\partial\alpha(t)}G\left\{\frac{\partial\lambda(x(t,\eta,\alpha))}{\partial\alpha(t)}\right\}^T\le 0,\end{aligned}\qquad(5.123)$$

откуда

$$\frac{\partial \lambda(x(t,\eta,\alpha))}{\partial x(t)} f_{зам}(x,\eta,\alpha) + \frac{\partial \lambda(x(t,\eta,\alpha))}{\partial \eta(t)} \frac{d\eta(t)}{dt} \le$$
$$\le \frac{\partial \lambda(x(t,\eta,\alpha))}{\partial \alpha(t)} G \left\{ \frac{\partial \lambda(x(t,\eta,\alpha))}{\partial \alpha(t)} \right\}^T$$

или

$$\left| \frac{\partial \lambda(x(t,\eta,\alpha))}{\partial x(t)} f_{зам}(x,\eta,\alpha) + \frac{\partial \lambda(x(t,\eta,\alpha))}{\partial \eta(t)} \frac{d\eta(t)}{dt} \right| <$$
$$< \frac{\partial \lambda(x(t,\eta,\alpha))}{\partial \alpha(t)} G \left\{ \frac{\partial \lambda(x(t,\eta,\alpha))}{\partial \alpha(t)} \right\}^T .$$

Из последнего неравенства можно получить ограничения на скорость изменения параметрических возмущений и начальное рассогласование параметров настройки и параметров, подвергающихся возмущениям, при выполнении которых и при выбранном алгоритме параметрического управления (5.117) лагранжиан будет монотонно убывать в течение всего интервала управления:

$$\begin{gathered} \left\| \frac{d}{dt}\eta(t) \right\| < \left\| \frac{\partial \lambda(x(t,\eta,\alpha))}{\partial \eta(t)} \right\|^{-1} \times \\ \times \left[\left\{ \frac{\partial \lambda(x(t,\eta,\alpha))}{\partial \alpha(t)} G \left(\frac{\partial \lambda(x(t,\eta,\alpha))}{\partial \alpha(t)} \right)^T \right\} - \left| \frac{\partial \lambda(x(t,\eta,\alpha))}{\partial x(t)} f_{зам}(x,\eta,\alpha) \right| \right]. \end{gathered} \tag{5.124}$$

При выполнении условий (5.122) и (5.124) все траектории исследуемой системы (5.116) ограничены, так как они будут лежать в области $V(x(t,\eta,\alpha)) \le V(x(t_0,\eta,\alpha))$.

Ответить на вопрос: «Как связаны значения параметрических возмущений, заданного периода управления и начальных условий на область достижимости?» в общей постановке задачи или крайне сложно или невозможно. В более простом случае, когда система описывается линейными дифференциальными уравнениями, это сделать можно.

Пусть объект описывается следующим выражением:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = [A + \eta(t) - \alpha(t)]x(t) + Bu(t), \\ x(t_0) = t_0, \end{cases} \tag{5.125}$$

где $x \in R^n$, $u \in R^r$.

Задан функционал

$$J(x,u) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left\{x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)\right\}dt \tag{5.126}$$

и задана цель управления в виде

$$|\vartheta, x(T)| \le d, \tag{5.127}$$

здесь $\vartheta \in R^n$.

Пусть управление, при котором в случае $\alpha(t) \approx \eta(t)$ выполняется целевое условие (5.127), описывается следующим соотношением:

$$u(t) = -R^{-1}B^T Sx(t), \tag{5.128}$$

где положительно определенная матрица S является решением уравнения

$$SA + A^T S - SBR^{-1}B^T S + Q = 0. \tag{5.129}$$

Таким образом, уравнение, описывающее систему «объект-регулятор», будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = [D + \eta(t) - \alpha(t)]x, \\ &x(t_0) = x_0, \end{aligned}\right\} \tag{5.130}$$

где $D = A - BR^{-1}B^T S$.

Найдем максимальное среднее значение параметрического рассогласования

$$\overline{\Delta} = M[\eta(t) - \alpha(t)], \qquad 5.131)$$

где M − оператор математического ожидания, при котором при заданном интервале управления $T - t_0$ и заданном начальном условии $x(t_0) = x_0$ будет выполняться целевое условие (5.127). Уравнение движения (5.130) с учетом (5.131) имеет вид

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d}{dt}x(t)=\left[D+\overline{\Delta}\right]x(t),\\ x(t_0)=x_0.\end{array}\right\}$$

Таким образом,

$$x(T)=\left\{\exp\left[-\left(D+\overline{\Delta}\right)\left(T-t_0\right)\right]\right\}x(t_0)$$

и целевое условие запишется в виде

$$\left|\vartheta,\left\{\exp\left[-(D+\overline{\Delta})(T-t_0)\right]\right\}x(t_0)\right|\le d\ . \qquad (5.132)$$

Выполнение условия (5.132) относительно максимального среднего значения параметрических возмущений (5.131) гарантирует выполнение задачи координатно-параметрического управления объектом (5.126) при заданной динамике объекта, заданных начальных условиях и заданном интервале управления.

Глава 6. Конструирование алгоритмов оптимизации с помощью функций Беллмана

§ 6.1. Постановка задачи

В настоящей главе рассматривается метод формирования алгоритмов оптимизации нестационарных систем управления, основанный на применении функций Беллмана. Алгоритмы, организованные с помощью функций Беллмана, могут использоваться как для оптимизации самих нестационарных объектов, если для этой цели выделены соответствующие параметры, так и для оптимизации всей управляемой системы с помощью соответствующей параметрической настройки регуляторов.

Пусть движение управляемого объекта описывается уравнением

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = f(x,u,t), \\ &x(t_0) = x_{0,} \end{aligned}\right\} \tag{6.1}$$

где $x \in R^n$, $u \in R^r \setminus U$, $t \in [t_0, T]$.

Функционал качества имеет вид

$$J(u) = K(x(T)) + \int_{t_0}^{T} L(x,u,t)dt\,. \tag{6.2}$$

Для объекта (6.1) рассмотрим задачу о минимизации функционала (6.2). Выпишем уравнение Беллмана для этой задачи [9]:

$$\left.\begin{aligned} &\inf_{u(t)\in U}\left[\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x(t)} f(x,u,t) + L(x,u,t)\right] = 0, \\ &V(x.,T) = K(x(T)), \end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

где $V(x,t)$ − функция Беллмана,

$$V(x,s) = \inf_{u(t)\in U}\left[K(x(T)) + \int_{s}^{T} L(x,u,t)dt\right]. \tag{6.4}$$

Отметим, что если решение исходной задачи оптимального управления (6.1), (6.2) существует, а функция Беллмана $V(x,t)$ непрерывно дифференцируема, то управление, реализующее инфинум выражения (6.4), выражается функцией времени и фазовых координат объекта (6.1). Таким образом, с помощью метода динамического программирования может быть реализовано управление по принципу обратной связи.

Однако при этом необходимо иметь в виду следующее.

1. В заданном классе допустимых управлений не всегда существует такое, при котором достигается инфинум в (6.4).
2. Функция Беллмана $V(x,t)$ не всегда обладает той гладкостью, которая используется при выводе задачи Коши (6.3). Другими словами, функция Беллмана не всегда удовлетворяет соответствующему рассматриваемой задаче уравнению Беллмана или же удовлетворяет ему в некотором обобщенном смысле. Следовательно, решение уравнения Беллмана не обязательно совпадает с соответствующей функцией Беллмана.
3. Если функция Беллмана $V(x,t)$ удовлетворяет уравнению Беллмана, то отсюда не следует, что управление, при котором достигается инфинум в (6.3), является оптимальным. В частности, при этом управлении может и не существовать решения уравнений движения (6.1).
4. Решение задачи Коши (6.3) может оказаться не единственным. В этом случае требуется дополнительное исследование, позволяющее установить, какое из этих решений является функцией Беллмана исходной задачи оптимального управления.

Вместе с тем иногда метод динамического программирования приводит к решению задачи (6.1), (6.2).

Пусть существует единственное непрерывно дифференцируемое решение $V^0(x,t)$ задачи

$$\inf_{u(t)\in U}\left[\frac{\partial V^0(x,t)}{\partial x(t)} f(x,u,t)+L(x,u,t)\right]= \\ =\frac{\partial V^0(x,t)}{\partial x(t)} f(x,u^0,t)+L(x,u^0,t). \qquad (6.5)$$

Тогда управление $u^0(x.t)$ является оптимальным, а соответствующая функция Беллмана есть $V^0(x,t)$.

Вычислим полную производную функции Беллмана вдоль оптимальной траектории системы (6.1) при управлении $u^0(t)$. В силу равенства

$$\frac{dV(x,t)}{dt}=\frac{\partial V(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial V(x,t)}{\partial x(t)} f(x,u^0,t),$$

используя соотношения (6.5) и (6.4), находим

$$\frac{dV(x,t)}{dt}=-L(x,u^0,t),\ t\in[t_0,T]. \qquad (6.6)$$

Равенство (6.6) справедливо для любых $x\in R^n$. В частности, оно справедливо, если вместо $x(t)$ подставить траекторию $x^0(t)$, соответствующую оптимальному управлению $u^0(t)$, т.е.

$$\frac{dV(x^0,t)}{dt}=-L(x^0,u^0,t),\ t\in[t_0,T]. \qquad (6.7)$$

Основными этапами построения управляющего воздействия являются:

1) найти управление $u=u(x,\frac{\partial V(x,t)}{\partial x(t)},t)$, реализующее минимум левой части уравнения (6.3);
2) подставляя это управление в (6.3), получаем нелинейное уравнение в частных производных относительно функции $V(x,t)$ с соответствующим краевым условием, заданным на правом конце;
3) решая полученную задачу, определяем $V(x,t)$;

4) подставляя найденное значение функции Беллмана $V(x,t)$ в выражение для управления $u = u\left(x, \frac{\partial V(x,t)}{\partial x(t)}, t\right)$, определенное в п. 1, находим оптимальное управление $u(x,t) = u\left(x, \frac{\partial V(x,t)}{\partial x(t)}, t\right)$.

Основным условием успешного решения поставленной задачи синтеза оптимального управления является нахождение функции Беллмана $V(x,t),\ t \in [t_0, T]$, которая полностью определяет управляющее воздействие и оптимальную траекторию движения объекта.

Таким образом, функция Беллмана в интервале оптимального управления объектом (6.1) ведет себя вполне определенным образом:

$$V^0(t) = V(x^0, t),\ t \in [t_0, T]. \tag{6.8}$$

Любое поведение объекта, отличное от оптимального, т.е. при $x(t) \neq x^0(t)$, приведет к тому, что

$$V(x,t) \neq V^0(t),\ t \in [t_0, T]. \tag{6.9}$$

Это свойство функции Беллмана положим в основу конструкции алгоритмов оптимизации систем управления с неполной информацией о параметрах.

§ 6.2. Основная конструкция алгоритмов оптимизации, использующая функции Беллмана

Пусть нестационарный управляемый объект описывается векторным дифференциальным уравнением вида

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = f(x,u,\eta,a,t) \\ &x(t_0) = x_0, \end{aligned}\right\} \tag{6.10}$$

здесь $x \in R^n -$ вектор состояния объекта, $u \in R^r -$ вектор управляющих воздействий, $\eta \in R^k -$ вектор возмущаемых параметров, $a \in R^P -$ вектор параметров, выделенных для оптимизации функционирования объекта. В общем случае $k \geq p$.

Рассмотрим вначале случай, когда $p = k$ и с помощью параметров $a(t)$ предполагается парировать соответствующие параметрические возмущения, т.е. предполагается, что возможно достижение следующего соотношения

$$a(t) = \eta(t). \tag{6.11}$$

При выполнении (6.11) уравнение объекта (6.10) будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = f(x,u,t), \\ &x(t_0) = x_0. \end{aligned}\right\} \tag{6.12}$$

Предположим, что все вышесказанное относительно функции Беллмана в рассматриваемой задаче выполняется и эта функция при оптимальном управлении объектом (6.12), т.е. при $a(t) = \eta(t)$, принимает значение

$$V^0(t) = V(x^0(t, \alpha(t) = \eta(t)), t),\ t \in [t_0, T]. \tag{6.13}$$

Нарушение равенства (6.11) приведет к тому, что

$$V(x(t, \alpha(t) \neq \eta(t), t) \neq V^0(t),\ t \in [t_0, T].$$

Таким образом, функция Беллмана $V^0(t) = V(x^0(t, a(t) = \eta(t), t),\ t \in [t_0, T]$ может быть использована в качестве модели поведения системы при воздействии параметрических возмущений.

Введем в рассмотрение скалярную функцию

$$\Re(t) = \frac{1}{2}\left\{V(x,t) - V^0(t)\right\}^2. \tag{6.14}$$

Понятно, что при выполнении равенства (6.11) $\Re^0(t) = 0,\ t \in [t_0, T]$.

Полная производная выражения (6.14) должна быть отрицательно определенной, т.е.

$$\frac{d\Re(t)}{dt}=\left\{V(x,t)-V^0(t)\right\}\left\{\frac{dV(x,t)}{dt}-\frac{dV^0(t)}{dt}\right\}\le 0\,,$$

или с учетом (6.6) и (6.7)

$$\frac{d\Re(t)}{dt}=\left\{V(x,t)-V^0(t)\right\}\left\{-L(x,u^0,t)+L(x^0,u^0,t)\right\}\le 0\,. \qquad (6.15)$$

Пусть

$$\nabla(t)=a(t)-\eta(t)\,, \qquad (6.16)$$

тогда, при малых значениях $\nabla(t)$, справедливо

$$\left\{-L(x,u^0,t)+L(x^0,u^0,t)\right\}=-\frac{\partial L(x,u^0,t)}{\partial\nabla(t)}\,\frac{d\nabla(t)}{dt}\,. \qquad (6.17)$$

Подставляя (6.17) в (6.15), получим

$$\frac{d\Re(t)}{dt}=-\left\{V(x,t)-V^0(t)\right\}\frac{\partial L(x,u^0,t)}{\partial\nabla(t)}\,\frac{d\nabla(t)}{dt}\le 0\,. \qquad (6.18)$$

Условие (6.18) будет выполняться, если вектор-функцию $\nabla(t)$ выбрать как решение уравнения

$$\frac{d\nabla(t)}{dt}=\left\{\frac{\partial L(x,u^0,t)}{\partial\nabla(t)}\right\}^T\left\{V(x,t)-V^0(t)\right\}. \qquad (6.19)$$

Найдем условия успешной параметрической оптимизации. Учитывая (6.16), правую часть выражения (6.18) перепишем в виде

$$\left\{V(x,t)-V^0(t)\right\}\left\{\frac{\partial L(x,u^0,t)}{\partial a(t)}\,\frac{da(t)}{dt}-\frac{\partial L(x,u^0,t)}{\partial\eta(t)}\,\frac{d\eta(t)}{dt}\right\}\ge 0\,. \qquad (6.20)$$

Используя неравенство Шварца – Коши – Буняковского, получим

$$\left|V(x,t)-V^0(t)\right|\left\{\left\|\frac{\partial L(x,u^0,t)}{\partial a(t)}\right\|\left\|\frac{da(t)}{dt}\right\|-\left\|\frac{\partial L(x,u^0,t)}{\partial\eta(t)}\right\|\left\|\frac{d\eta(t)}{dt}\right\|\right\}\ge 0\,.$$

Из последнего неравенства получаем условие, которое должно быть наложено на скорость изменения параметров оптимизации по отношению к максимальной скорости изменения возмущающих параметров:

$$\left\|\frac{da(t)}{dt}\right\|>\left\|\frac{\partial L(x,u^0,t)}{\partial a(t)}\right\|^{-1}\left\|\frac{\partial L(x,u^0,t)}{\partial\eta(t)}\right\|\left\|\left\{\frac{d\eta(t)}{dt}\right\}^*\right\|. \qquad (6.21)$$

Здесь $\left\{\frac{d\eta(t)}{dt}\right\}^{*}$ – максимально возможная скорость изменения возмущающих параметров.

В том случае, когда выполняется условие (6.21), алгоритм параметрической оптимизации имеет вид

$$\left.\begin{aligned}&\frac{da(t)}{dt}=\left\{\frac{\partial L(x,u^0,t)}{\partial a(t)}\right\}^T\left\{V(x,t)-V^0(t)\right\},\\&a(t_0)=a_0.\end{aligned}\right\}\tag{6.22}$$

Учитывая то обстоятельство, что изменение выражения $V(x,t)-V^0(t)$ при параметрической оптимизации пропорционально изменению выражения $L(x,u^0,t)-L(x^0,u^0,t)$, алгоритм (6.22) можно переписать в эквивалентной форме:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{da(t)}{dt}=\left\{\frac{\partial L(x,u^0,t)}{\partial a(t)}\right\}^T\left\{L(x,u^0,t)-L(x^0,u^0,t)\right\},\\&a(t_0)=a_0.\end{aligned}\right\}\tag{6.23}$$

Сформулируем теорему.

Теорема 6.2.1

Пусть нестационарный управляемый объект описывается векторным дифференциальным уравнением вида

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}x(t)=f(x,u,\eta,a,t)\\&x(t_0)=x_0,\end{aligned}\right\}$$

где $x\in R^n$ – вектор состояния объекта, $u\in R^r$ – вектор управляющих воздействий, $\eta\in R^k$ – вектор возмущаемых параметров, $a\in R^P$ – вектор параметров, выделенных для оптимизации функционирования объекта.

Алгоритмы вида

$$\left.\begin{aligned}&\frac{da(t)}{dt}=\left\{\frac{\partial L(x,u^0,t)}{\partial a(t)}\right\}^T\left\{V(x,t)-V^0(t)\right\},\\&a(t_0)=a_0,\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{da(t)}{dt}=\left\{\frac{\partial L(x,u^0,t)}{\partial a(t)}\right\}^T\left\{L(x,u^0,t)-L(x^0,u^0,t)\right\},\\&a(t_0)=a_0\end{aligned}\right\}$$

обеспечивают асимптотические свойства процесса параметрической оптимизации нестационарного объекта, если выполняется условие

$$\left\|\frac{da(t)}{dt}\right\|>\left\|\frac{\partial L(x,u^0,t)}{\partial a(t)}\right\|^{-1}\left\|\frac{\partial L(x,u^0,t)}{\partial \eta(t)}\right\|\left\|\left\{\frac{d\eta(t)}{dt}\right\}^*\right\|,$$

где $\left\{\frac{d\eta(t)}{dt}\right\}^*$ - максимально возможная скорость изменения возмущающих параметров.

Следует отметить, что для реализации алгоритмов оптимизации вида (6.22), (6.23) необходимо предварительно найти $u^0(t)$, т.е. решить задачу оптимального управления для случая $a(t)=\eta(t)$ ($\nabla(t)=a(t)-\eta(t)=0$ − случай отсутствия или полной компенсации параметрических возмущающих воздействий).

§ 6.3. Координатная оптимизация в задаче стабилизации нелинейного объекта

Реализовать аналитическими методами синтез оптимального управления методом динамического программирования удается весьма в редких случаях. Основные проблемы связаны с решением нелинейного дифференциального уравнения в частных производных с краевым условием, заданным на правом конце. Если же объект подвергается неконтролируемым параметрическим возмущениям, то решение задачи методом динамического программирования вообще невозможно. Предложим решение задачи управления нестационарным объектом методом параметрической оптимизации, в основе которого лежит метод алгоритмического конструирования. Это решение содержит две принципиальные позиции:

1) функция Беллмана задается изначально;
2) решение уравнения Беллмана обеспечивается за счет управления нестационарным объектом соответствующим алгоритмом параметрической оптимизации.

При этом, естественно, предполагается существование оптимального решения, т.е. существование функции $V(x^0,t)$, которая является решением уравнения Беллмана.

Пусть управляемый объект описывается нелинейным дифференциальным уравнением

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = f(x,t) + g(x,t)u(t) \\ &x(t_0) = x_{0,} \end{aligned}\right\}, \tag{6.24}$$

где $x \in R^n$, $u \in R^r$, вектор-функция $f(x,t)$ и матрица $g(x,t)$ непрерывны по обоим аргументам и являются липшицевыми по аргументу x. При этих условиях справедливы теоремы о существовании, единственности и непосредственной зависимости на конечном интервале решения уравнения (6.24) от начальных условий. Предположим также, что вектор-функция $f(x,t)$ и матрица $g(x,t)$ необходимое количество раз дифференцируемы.

Функционал качества имеет вид

$$J(x,u) = \frac{1}{2}\left\{ x^T(T)Fx(T) + \int_{t_0}^{T} \left[x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t) \right] dt \right\}, \tag{6.25}$$

где матрица $Q -$ положительно полуопределенная, матрицы F и $R -$ положительно определенные.

Зададим функцию Беллмана в предположении, что она дважды непрерывно дифференцируема по x и один раз – по t в виде

$$V(x,t) = \frac{1}{2}x^T(t)S(t)x(t). \tag{6.26}$$

Очевидно, что в этом случае краевое условие на функцию Беллмана (7.26) будет выполняться, если при $t = T$ будет тождественно выполняться соотношение $S(T) = F$, тогда

$$V(x,T) = \frac{1}{2} x^T(T) F x(T). \tag{6.27}$$

Запишем уравнение Беллмана для функционала (6.25)

$$\min_{u \in U} \left[L_u V + \frac{1}{2} \left\{ x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t) \right\} \right] = 0, \; t \in [t_0, T] \tag{6.28}$$

с производящим дифференциальным оператором процесса V

$$L_u V = \frac{dV(x,t)}{dt} \tag{6.29}$$

и граничным условием

$$V(x,T) = \frac{1}{2} x^T(T) F x(T),$$

которое, в силу задания функции Беллмана (6.26), выполняется тождественно.

Уравнение (6.28) можно переписать:

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x(t)} f(x,t) + \frac{1}{2} x^T(t) Q x(t) + \min_{u \in U} \left[\frac{\partial V(x,t)}{\partial x(t)} g(t) u(t) + \frac{1}{2} u^T(t) R u(t) \right] = 0,$$

откуда оптимальное управление $u(x,t)$ находится в виде

$$u(t) = -R^{-1} g^T(x,t) \left\{ \frac{\partial V(x,t)}{\partial x(t)} \right\}^T \tag{6.30}$$

или, учитывая (6.26),

$$u(t) = -R^{-1} g^T(x,t) S(t) x(t). \tag{6.31}$$

Подставив (6.31) в (6.28), получим

$$L_u V = -\frac{1}{2} x^T(t) \left[Q + S(t) g(x,t) R^{-1} g^T(x,t) S(t) \right] x(t), \; t \in [t_0, T] \tag{6.32}$$

или, с учетом (6.29), получим нелинейное уравнение с краевыми условиями, заданными на правом конце, которое необходимо разрешить относительно матрицы $S(t)$:

$$x^T(t)\left\{\frac{dS(t)}{dt}\right\}x(t)+x^T(t)S(t)f(x,t)+f^T(x,t)S(t)x(t)-$$
$$-x^T(t)S(t)g(x,t)R^{-1}g(x,t)S(t)x(t)+x^T(t)Qx(t)=0, \qquad (6.33)$$
$$S(T)=F.$$

Понятно, что задача нахождения матрицы $S(t)$ как решения уравнения (6.33) возможна в весьма ограниченных постановках (например, линейный объект).

Перепишем уравнение (6.32) в эквивалентной форме:

$$\frac{dV(x,t)}{dt}=-\frac{1}{2}x^T(t)\left[Q+S(t)g(x,t)R^{-1}g^T(x,t)S(t)\right]x(t)\,. \qquad (6.34)$$

Отметим, что в правой части равенства (6.34) находится лагранжиан функционала (6.25). В этом нетрудно убедиться, подставив в подынтегральное выражение функционала (6.25) управление (6.31). Введем обозначение

$$\Re=\frac{1}{2}L(x,u)\quad .$$

В силу вида этого уравнения по теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости следует, что $x(t)\to 0\ (t\to\infty)$. Это свойство выполняется, так как

$$\Re=\frac{1}{2}x^T(t)\left[Q+S(t)g(x,t)R^{-1}g^T(x,t)S(t)\right]x(t)\geq 0,\ \ t\in[t_0,T]\,. \qquad (6.35)$$

Пусть

$$S(t)=F+s(t)\,, \qquad (6.36)$$

где $s(t)$ − матрица перестраиваемых параметров.

Алгоритм параметрической оптимизации должен обеспечить тождественное выполнение уравнения Беллмана (6.34).

Найдем производную функции $\Re$ по времени. Так как функции $\Re$ в явном виде не зависит от t, то

$$\frac{d\Re}{dt}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s(t)}\left\{x^T(t)\left\{Q+[F+s(t)]g(x,t)R^{-1}g^T(x,t)[F+s(t)]\right\}x(t)\right\}\left\{\frac{ds(t)}{dt}\right\}\ .$$

Условие асимптотического поведения решения уравнения (6.34) запишется следующим неравенством:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial s(t)}\left[x^T(t)\left\{Q+\left[F+s(t)\right]g(x,t)R^{-1}g^T(x,t)\left[F+s(t)\right]\right\}x(t)\right]\right\}\left\{\frac{ds(t)}{dt}\right\}\le 0. \qquad (6.37)$$

Условие (6.37) будет выполняться, если выбрать $s(t)$, как решение уравнения

$$\left\{\frac{ds(t)}{dt}\right\}=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s(t)}\left\{x^T(t)\left\{Q+\left[F+s(t)\right]g(x,t)R^{-1}g^T(x,t)\left[F+s(t)\right]\right\}x(t)\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned}&\left\{\frac{ds(t)}{dt}\right\}=-g(x,t)R^{-1}g^T(x,t)\left[F+s(t)\right]x(t)x^T(t),\\&s(t_0)=s_0.\end{aligned}\right\} \qquad (6.38)$$

Так как матрица $s(t)$ − положительно полуопределенная и при $t\to T$ $s(t)\to 0$, начальное условие $s(t_0)$ для алгоритма (6.38) назначим так, чтобы выполнялось условие (6.28), т.е. $S(T)=F$,

$$s(t_0)=g(x_0,t_0)R^{-1}g^T(x_0,t_0)Fx(t_0)x^T(t_0). \qquad (6.39)$$

Отметим, что при построении алгоритма (6.38) исследовалась правая часть уравнения Беллмана. Таким образом, указанный алгоритм, перестраивая параметры матрицы $s(t)$, осуществляет тождественное выполнение уравнения Беллмана.

Алгоритм (6.38) в ряде случаев можно использовать в системе с координатным управлением нестационарным объектом. Пусть нестационарный объект описывается уравнением

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}x(t)=f(x,\eta,t)+g(x,t)u(t),\\&x(t_0)=x_0.\end{aligned}\right\} \qquad (6.40)$$

Здесь $\eta(t)\in\Lambda$ − вектор параметров, подвергающихся неконтролируемым возмущениям. Предположим, что для всех значений $\eta(t)\in\Lambda$ объект (6.40) сохраняет структурное свойство управляемости.

Функционал качества задан в виде (6.25). Уравнение регулятора с параметрической настройкой описывается соотношениями (6.31), (6.36), (6.38). Решение уравнения Беллмана, как и в предыдущей задаче, обеспечивается выбором сходящегося алгоритма параметрической оптимизации. Уравнение движения такого управляемого нестационарного объекта будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = f(x,\eta,t) - g(x,t)R^{-1}g^{T}(x,t)\left[F + s(t)\right]x(t), \\ &x(t_0) = x_{0,} \end{aligned}\right\}$$

Параметры матрицы $s(t)$ находятся в соответствии с алгоритмом (6.38).

Часть III. Робастные системы управления

Глава 7. Робастное управление линейными неопределенными системами

§ 7.1. Постановка задачи

Как уже отмечалось, достаточно большое количество объектов управления можно описать с помощью систем линейных дифференциальных уравнений с неполной информацией о параметрах и векторе состояния. При этом критерий качества управления во многих случаях представляет собой квадратичную форму.

Пусть управляемый и наблюдаемый линейный нестационарный динамический объект описывается системой линейных неоднородных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = [A+\alpha\ (t)]x(t)+[B+\beta\ (t)]u(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{7.1}$$

где $x \in R^n, u \in R^r,\ r \le n$.

Начальное условие принадлежит заранее известному подмножеству, т.е.

$$x(t_0) \in X_0. \tag{7.2}$$

Матрицы $\alpha\ (t)$ и $\beta\ (t)$ содержат параметры, подверженные неконтролируемым возмущениям, причем

$$\alpha\ (t), \beta\ (t) \in \Omega \tag{7.3}$$

− неизвестные вещественные матричные функции на $t \in [t_0, T]$. (Для определенности размерности матриц $\alpha\ (t)$ и $\beta\ (t)$ – $n \times n$ и $n \times r$ соответственно.)

Предполагается, что возмущения $\alpha\ (t), \beta\ (t) \in \Omega$ таковы, что пара $([A+\alpha(t)],\ [B+\beta(t)])$ сохраняет управляемость объекта (7.1) при $\forall t \in [t_0, T]$. Информация о возможной структуре параметрической неопределенности помещена в § 1.2.

На управляющие воздействия априори ограничения не накладываются. Вопрос о существовании соответствующих управлений и тем самым ограничениях, при которых возможно выполнение задачи управления, будет рассматривается для каждой задачи.

Задан функционал качества

$$J(x,u) = \frac{1}{2} x^T(T) F x(T) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{T} \left\{ x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t) \right\} dt . \tag{7.4}$$

В задаче терминального управления задан интервал управления $[t_0, T]$, матрица R – положительно определена, матрицы Q и F – положительно полуопределены. В задаче синтеза управления, стабилизирующего объект (7.1), $t_0 = 0$, $T \to \infty$, $F = 0$.

Рассмотрим вначале вопрос о построении регулятора для объекта (7.1) при $\alpha(t) = 0, \beta(t) = 0$. В случае отсутствия ограничений на управляющие воздействия, оптимальное управление имеет вид [5, 6]

$$u(t) = -R^{-1} B^T S(t) x(t) , \tag{7.5}$$

где матрица $S(t)$ определяется решением уравнения типа Риккати

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} S(t) + S(t) A + A^T S(t) - S(t) B R^{-1} B^T S(t) + Q = 0, \\ S(T) = F. \end{cases} \tag{7.6}$$

Таким образом, в задаче с заданным интервалом управления даже в случае, когда объект (7.1) стационарен, т.е. матрицы A и B постоянные, и матрицы Q и R в функционале (7.4) также постоянные, матрица усилений регулятора зависит от времени.

Для того чтобы регулятор в терминальной задаче содержал постоянные параметры, назначим матрицу штрафа первого слагаемого функционала в виде $F = S$, где положительно определенная матрица S является решением уравнения Риккати – Лурье.

$$SA + A^T S - SBR^{-1} B^T S + Q = 0 . \tag{7.7}$$

Очевидно, что в случае такого назначения матрицы F будет выполняться соотношение $\frac{d}{dt}S(t)=0$, т.е. $S=const$ на всем интервале управления.

Таким образом, оптимальное управление для объекта (7.1) при $\alpha(t)=0,\ \beta(t)=0$ и предложенном назначении матрицы штрафа при терминальном элементе функционала качества (7.4) определяется соотношением

$$u(t)=-R^{-1}B^{T}Sx(t)\,, \tag{7.8}$$

где матрица S, соответствует решению уравнения (7.7).

Матрицы Q и R назначаются так, чтобы управление (7.8) обеспечивало приемлемое поведение модели в интервале управления $[t_0,T]$ и соответствующее этому поведению принимаемое значение функции качества.

Оптимальное значение функционала будет определяться соотношением

$$J^{0}(x,u)=\frac{1}{2}x^{T}(t_0)Sx(t_0)\,. \tag{7.9}$$

§ 7.2. Робастное управление линейными нестационарными системами

Задача стабилизации

Определим множество неопределенности Ω значений матриц $\alpha(t),\ \beta(t)$ при открытом интервале управления (задача стабилизации), при которых объект (7.1) стабилизируем с управлением

$$u(t)=-R^{-1}[B+\beta(t)]^{T}Sx(t)\,, \tag{7.10}$$

где матрица S является решением уравнения (7.7).

Определение 7.2.1

Будем называть систему ***робастно стабилизируемой***, если для нестационарного объекта вида (7.1) найдется регулятор с постоянными параметрами, который обеспечит асимптотическое движение системы "объект-регулятор" из любого $x_0 \in X_0$ к $x(t)=0$ при $t \to \infty$.

Определим значения матриц a^*, β^*. Пусть при a^*, $\beta^* \in \Omega$ выполняется следующее соотношение:

$$
\begin{aligned}
&\left|\left[A + a^* - \left(B + \beta^*\right) R^{-1} \left(B + \beta^*\right)^T S\right] x(t)\right| \geq \\
&\geq \left|\left[A + a(t) - \left(B + \beta(t)\right) R^{-1} \left(B + \beta(t)\right)^T S\right] x(t)\right|.
\end{aligned}
\tag{7.11}
$$

Объект (7.1) с управлением

$$u(t) = -R^{-1}\left[B + \beta^*\right]^T S x(t), \tag{7.12}$$

где матрица S определяется решением уравнения

$$S\left[A + a^*\right] +^T S\left[A + a^*\right]^T - S\left[B + \beta^*\right] R^{-1}\left[B + \beta^*\right]^T S + Q = 0, \tag{7.13}$$

имеет вид

$$\frac{d}{dt} x(t) = \left\{A + a(t) - \left[B + \beta(t)\right] R^{-1}\left[B + \beta^*\right]^T S\right\} x(t), \; x(t_0) = x_0. \tag{7.14}$$

Введем в рассмотрение функцию Ляпунова

$$V(x) = \frac{1}{2} x^T(t) S x(t). \tag{7.15}$$

Тогда, учитывая (7.14), (7.15) и (7.12), получим

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} V(t) = x^T(t)\left\{S\left[A + a(t)\right] + \left[A + a(t)\right]^T S - 2S\left[B + \beta(t)\right] R^{-1}\left[B + \beta^*\right]^T S\right\} \leq \\
&\leq -\frac{1}{2} x^T(t)\left\{Q + S\left[B + \beta^*\right] R^{-1}\left[B + \beta^*\right]^T S\right\} x(t) \leq 0.
\end{aligned}
\tag{7.16}
$$

Таким образом, можно утверждать, что объект (7.1) с управлением (7.12) в силу (7.11) сохраняет устойчивость при любых значениях матриц $\alpha\,(t), \beta\,(t) \in \Omega$.

Оценим возможное рассогласования траекторий $\widetilde{x}(t)$ объекта (7.1) при $\alpha\,(t) = 0$ и $\beta\,(t) = 0$ с управлением (7.12) и ее робастной модели с параметрами a^*, $\beta^* \in \Omega$. Запишем эти уравнения:

$$\frac{d}{dt}\widetilde{x}(t) = \left\{A - BR^{-1}\left[B + \beta^*\right]^T S\right\}\widetilde{x}(t), \; \widetilde{x}(t_0) = x_0$$

или

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = L\tilde{x}(t) - c(t), \ \tilde{x}(t_0) = x_0, \qquad (7.17)$$

$$\frac{d}{dt}z(t) = Lz(t), \ z(t_0) = x_0, \qquad (7.18)$$

где

$$c(t) = \left\{a^* - \beta^* R^{-1}\left[B + \beta^*\right]^T S\right\}\tilde{x}(t), \qquad (7.19)$$

$$L = A + a^* - \left[B + \beta^*\right]R^{-1}\left[B + \beta^*\right]^T S. \qquad (7.20)$$

Пусть

$$\varepsilon(t) = z(t) - \tilde{x}(t). \qquad (7.21)$$

Тогда, учитывая (7.17) и (7.18), будем иметь

$$\frac{d}{dt}\varepsilon(t) = L\varepsilon(t) + c(t), \ \varepsilon(t_0) = 0. \qquad (7.22)$$

Запишем решение уравнения (7.22) в виде:

$$\|\varepsilon(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} \{\exp L[t-\tau]\} c(\tau)\, d\tau \right\|.$$

Учитывая, что корни характеристической матрицы L являются действительными и отрицательными, можно назначить такие положительные постоянные K и ρ, что $\|\exp L t\| \le K e^{-\rho t}$.

Тогда

$$\|\varepsilon(t)\| \le \int_{t_0}^{t} \|\exp L[t-\tau]\| \|c(\tau)\| d\tau \le K \int_{t_0}^{t} e^{-\rho[t-\tau]} \|c(\tau)\| d\tau. \qquad (7.23)$$

Как было показано, управление (7.12) обеспечивает системе свойства асимптотической устойчивости, т.е. $\|z(0)\| \ge \|z(t)\|$ при $t \ge 0$. Учитывая, что параметрические возмущения принадлежат ограниченной области возможных значений, справедливо считать, что $\|c(0)\| \ge \|c(t)\|$ при $t \ge 0$. Тогда из (7.23) будем иметь оценку рассогласования траекторий системы при $\alpha(t) = 0$ и $\beta(t) = 0$ и ее робастной модели

$$\|\varepsilon(t)\| \le \frac{K}{\rho}\left[1 - e^{-\rho t}\right] \left\| \left\{a^* - \beta^* R^{-1}\left[B + \beta^*\right]^T S\right\} x(0) \right\|. \qquad (7.24)$$

Теорема 7.2.1

Пусть неопределенный объект описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = [A+\alpha\,(t)]\,x(t) + [B+\beta\,(t)]u(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

где $\alpha\,(t), \beta\,(t) \in \Omega$.

Управление $u(t) = -R^{-1}B^T Sx(t)$, где положительно определенная матрица S является решением уравнения

$$S\left[A+a^*\right] +^T S\left[A+a^*\right]^T - S\left[B+\beta^*\right]R^{-1}\left[B+\beta^*\right]^T S + Q = 0,\;\; R, Q > 0,$$

обеспечивает устойчивое движение системе, при этом возможный рост решения неопределенной системы, вызванный параметрическими возмущениями $\alpha\,(t), \beta\,(t)$, при $t \ge 0$ не превосходит величины

$$\left\| z(t) - \widetilde{x}(t) \right\| \le \frac{K}{\rho}\left[1-e^{-\rho t}\right]\left\| \left\{ a^* - \beta^* R^{-1}\left[B+\beta^*\right]^T S \right\} z(0) \right\|.$$

Задача d-робастного управления

Рассмотрим задачу с заданным интервалом управления и заданной областью возможных терминальных значений состояния системы. Пусть состояние системы на правом конце должно подчиняться условию

$$\| x(t) \| \le d^*,\;\; d^* \ge 0. \tag{7.25}$$

Здесь $\| x(t) \| = \sum_{i=1}^{n} | x(t) |$.

Найдем условие, при котором будет выполняться задача терминального управления (7.25). Принимая во внимание, что максимальное изменение траектории объекта будет при $\|\varepsilon_{\max}(T)\| = d$, рассмотрим неравенство (7.24) при $t = T$:

$$d \le \frac{K}{\rho}\left[1-e^{-\rho T}\right]\left\| \left\{ a^* - \beta^* R^{-1}\left[B+\beta^*\right]^T S \right\} x(0) \right\|$$

откуда

$$\left\|\left\{a^* - \beta^* R^{-1}\left[B + \beta^*\right]^T S\right\} x(0)\right\| \le \frac{\rho d}{K\left[1 - e^{-\rho T}\right]}. \qquad (7.26)$$

Выполнение условия (7.26) означает, что параметрические возмущения $\alpha(t), \beta(t) \in \Omega$ и начальные условия $x^*(t_0) \in X_0$ не помешают выполнить задачу d-робастного управления.

При найденных $a^*, \beta^* \in \Omega$ и построенном регуляторе вида (7.13) полученное неравенство можно использовать для определения области начальных условий, траектории движения из которых попадут в заданный момент T в заданную область терминальных значений.

Показатель робастности может быть задан в ином виде. Пусть $D-$ вектор из $R^l : D = (d_1,..,d_{l,})^T$.

Образуем вектор $\widetilde{D}_M = (d_1,..,d_{l,}, x^*_{l+1}(T),..., x^*_n(T))^T \in R^n$.

В этом случае условие на правом конце запишем как:

$$\widetilde{D}_M = \exp\{L(T - t_0)\}\left|x(t_0)\right|. \qquad (7.27)$$

Понятно, что выполнение этого условия зависит от параметров самой системы (параметров объекта и регулятора), от начальных условий и интервала управления. Найдем оценки: 1) области начальных условий при заданном множестве параметрических возмущений системы и заданном интервале управления; 2) интервала управления при заданном множестве параметрических возмущений системы и заданном начальном условии. Поиск этих оценок будем производить с использованием робастной модели системы (7.18).

Умножим обе части равенства (7.28) справа на $\left|x^T(t_0)\right|$:

$$\widetilde{D}_M \left|x^T(t_0)\right| = \exp\{L\ (T - t_0)\}\left|x\ (t_0)\right|\left|x^T(t_0)\right|,$$

откуда

$$\left\|\widetilde{D}_M\, x^T(t_0)\right\| \le \left\|\exp\{L\ (T - t_0)\}\right\|\left\|x\ (t_0)\, x^T(t_0)\right\|. \qquad (7.28)$$

Как и раньше, будем использовать такие положительные постоянные K и ρ, что $\|\exp L t\| \le K e^{-\rho t}$.

Тогда из (7.28) будем иметь

$$\left\| \widetilde{D}_M \, x^T(t_0) \right\| \le K e^{-\rho(T-t_0)} \left\| x\,(t_0)\, x^T(t_0) \right\|.$$

Прологарифмируем полученное уравнение:

$$\ln K \left\| \widetilde{D}_M \, x^T(t_0) \right\| \le -\rho(T-t_0) + \ln \left\| x\,(t_0)\, x^T(t_0) \right\|.$$

Из последнего выражения будем иметь оценку времени успешного завершения d-робастного управления с незаданным временем окончания управления неопределенным объектом:

$$(T-t_0) \ge \frac{1}{\rho} \ln \frac{\left\| x\,(t_0)\, x^T(t_0) \right\|}{K \left\| \widetilde{D}_M \, x^T(t_0) \right\|}\,. \tag{7.29}$$

Так как $\|\exp L t\| \le K e^{-\rho t}$, то, учитывая что $T > t_0$, из (7.29) можно получить оценку для постоянных K и ρ, при которых успешно решается задача d-робастного управления, т.е. косвенную оценку матрицы $L = A + a^* - \left[B + \beta^*\right] R^{-1} \left[B + \beta^*\right]^T S$:

$$\rho \le \frac{1}{T-t_0} \ln \frac{\left\| x\,(t_0)\, x^T(t_0) \right\|}{K \left\| \widetilde{D}_M \, x^T(t_0) \right\|} \tag{7.30}$$

или, учитывая, что $\rho = \rho(S)$, запишем

$$\rho(S) \le \frac{1}{(T-t_0)} \ln \frac{\left\| x\,(t_0)\, x^T(t_0) \right\|}{K \left\| \widetilde{D}_M \, x^T(t_0) \right\|}. \tag{7.31}$$

Отметим, что робастное управление (7.12) требует для своей реализации знания всего состояния объекта, что делает его для многих практических задач нереализуемым. Конструирование нестационарной системы с неполной информацией о состоянии системы будет рассмотрено в следующих разделах данной главы.

§ 7.3. Дифференциальные игры в задачах конструирования робастного управления линейными системами

Перепишем уравнение, описывающее нестационарный объект (7.1), в виде

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x_1(t) = A\,x_1(t) + B\,u_1(t) + v(t), \\ x_1(t_0) = x_0\,, \end{cases} \tag{7.41}$$

где $v(t) = \alpha(t)x(t) + \beta(t)u(t)$. (7.42)

Для оценки эффективности управления $u_1(t)$ при возмущающем воздействии $v(t)$ зададим функционал качества:

$$J_1(x_1,u_1,\mathrm{v}) = \\ = \frac{1}{2}x_1^{\,T}(T)Sx_1(T) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left\{x_1^{\,T}(t)Q_1(t)\,x_1(t) + u_1^{\,T}(t)Ru_1(t) - v^T(t)P(t)\,v(t)\right\}dt, \tag{7.43}$$

где матрица R была ранее задана в функционале (7.4). Условия выбора матриц $Q_1(t)$ и $P(t)$ будут определены ниже.

Оптимальные антагонистические управления $u_1(t)$ и $v(t)$ определяются соотношениями [3, 4]

$$u(t) = -R^{-1}B^T S_1(t)x_1(t)\,, \qquad v(t) = P^{-1}(t)S_1(t)x_1(t)\,, \tag{7.44}$$

где положительно определенная матрица $S_1(t)$ является решением уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}S_1(t) + S_1(t)A + A^T S_1(t) - S_1(t)\left[BR^{-1}B^T - P^{-1}\right]S_1(t) + Q_1 = 0\,, \\ S_1(T) = S. \end{cases} \tag{7.45}$$

Здесь матрица S – решение уравнения Риккати−Лурье (7.7).

Движение объекта при управлениях (7.44) будет описываться уравнением

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x_1(t) = [A - \left\{BR^{-1}B^T - P^{-1}(t)\right\}S_1(t)]\,x_1(t), \\ x_1(t_0) = x_0\,. \end{cases} \tag{7.46}$$

Определим условия выбора матриц $Q_1(t)$ и $P(t)$, при которых рассматриваемая задача дифференциальной игры будет эквивалентна задаче, рассмотренной в предыдущем параграфе. Сравнивая уравнения Риккати (7.45) и (7.7), получим, что для выполнения равенства $S_1(t)=S(t)$ матрицы $Q_1(t)$ и $P(t)$ должны быть связаны соотношением

$$SP^{-1}(t)S = Q - Q_1(t),\ \forall t\in[t_0,T]. \tag{7.47}$$

При таком соотношении матриц $Q_1(t)$ и $P(t)$, учитывая (7.45), будет выполняться $S_1(t)=S=const$ для $t\in[t_0,T]$ и

$$J^o(x,u) = J_1^{\,o}(x_1,u_1,v) = \frac{1}{2}x^T(t_0)S\,x(t_0).$$

Сравнивая (7.42) и второе равенство (7.44) и учитывая, что матрица $P^{-1}(t)$ должна быть симметричная, получим

$$[SP^{-1}(t)S - \frac{1}{2}\alpha^T(t)S - \frac{1}{2}S\alpha(t) + \frac{1}{2}S\beta(t)R^{-1}B^TS + \frac{1}{2}S\beta(t)R^{-1}B^TS]x(t) = 0. \tag{7.48}$$

Учитывая, что матрица S обратима, умножим полученное выражение слева и справа на S^{-1} и получим условие назначения матрицы $P^{-1}(t)$:

$$P^{-1}(t) = \frac{1}{2}\left[S^{-1}\alpha^T(t) + \alpha(t)S^{-1} - \beta(t)R^{-1}B^T - BR^{-1}B^T\beta(t)\right],\quad t\in[t_0,T]. \tag{7.49}$$

Из условия разрешимости уравнения Риккати (7.45), заключающееся в положительной определенности матрицы $BR^{-1}B^T - P^{-1}(t)$, получим условие, определяющее множество неопределенности Ω. Это множество должно быть таковым, что для любых $\alpha(t),\ \beta(t)\in\Omega$ матрица

$$BR^{-1}B^T - \frac{1}{2}\left[S^{-1}\alpha^T(t) + \alpha(t)S^{-1} - \beta(t)R^{-1}B^T - BR^{-1}B^T\beta(t)\right]$$

сохраняет свою положительную определенность.

Полученный результат можно сформулировать в виде теоремы:

Теорема 7.3.1.

Эквивалентной задачей об управлении объекта

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = [A+\alpha\ (t)]x(t) + [B+\beta(t)]u(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

$x \in R^n$, $u \in R^r$, $r \le n$,

заключающейся в построении такой стратегии $u(t) \in U$, при которой будет достигаться минимум функционала

$$J(x,u) = \frac{1}{2} x^T(T)Sx(T) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} \left\{ x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t) \right\} dt,$$

где Q, R – положительно определенные матрицы;

положительно определенная матрица S является решением уравнения

$$SA + A^T S - SBR^{-1}B^T S + Q = 0,$$

является задача линейной дифференциальной игры с объектом:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} x_1(t) = Ax_1(t) + Bu_1(t) + v(t), \\ x_1(t_0) = x_0, \end{cases}$$

где $x_1(t) \in R^n, u_1(t) \in R^r, r \le n;$ $u_1(t) \in U$; $v(t) \in R^{n+r}, v(t) \in V$,

и функционалом, оценивающим выбранную стратегию:

$$J_1(x_1,u_1) = \frac{1}{2} x_1^T(T)Sx_1(T) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} \left\{ x_1^T(t)Q_1(t)x_1(t) + u_1^T(t)Ru_1(t) - v^T(t)P(t)v(t) \right\} dt,$$

где матрица $P(t)$ и $Q_1(t)$ назначены так, чтобы выполнялось условие:

$$SP^{-1}(t)S = Q - Q_1(t), \ \forall t \in [t_0, T]$$

и множество параметрических возмущений таково, что при любых $\alpha(t), \beta(t) \in \Omega$, где $t \in [t_0, T]$, матрица

$$BR^{-1}B^T - \frac{1}{2}\left[S^{-1}\alpha^T(t) + \alpha(t)S^{-1} - \beta(t)R^{-1}B^T - BR^{-1}B^T\beta(t) \right]$$

сохраняет свою положительную определенность.

Следствие

Выбор матриц $Q_1(t)$ и $P(t)$ указанным способом обеспечивает выполнение равенств:

1. $x(t) = x_1(t)$ для $\forall t \in [t_0, T]$.

2. $J^o(x,u) = J_1^{\,o}(x_1,u_1,v) = \frac{1}{2} x^T(t_0)S(t_0)x(t_0)$.

Нетрудно показать, что справедливо следующее соотношение:

$$J(x,u_1^0) \le J(x_1,u_1^0,v^0) \le J(x_1,v^0)\,, \qquad (7.50)$$

где

$$J_1(x_1,u_1,v) = \frac{1}{2}x_1{}^T(T)Sx_1(T) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left\{x_1{}^T(t)Q_1x_1(t) + u_1{}^T(t)R\,u_1(t) - v^T(t)Pv(t)\right\}dt\,.$$

Справедливость этого положения доказывается решением следующих задач.

Задача 1. Рассмотрим ситуацию, когда $u_1 \ne 0,\ v = 0$. В этом случае объект (7.41) и функционал (7.43) будут иметь вид

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x_1(t) = Ax_1(t) + Bu_1(t), \\ x_1(t_0) = x_0, \end{cases}$$

$$J_1(x_1,u_1) = \frac{1}{2}x_1{}^T(T)Sx_1(T) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left\{x_1{}^T(t)Q_1(t)x_1(t) + u_1{}^T(t)R\,u_1(t)\right\}dt \to \min_{u\in U}\,.$$

При управлении $u_1^0(t) = -R^{-1}B^T S\,x_1(t)$ функционал (7.43) будет иметь вид

$$J(x_1,u_1^0) = \frac{1}{2}x^T(t_0)S_1(t_0)x(t_0) - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}x_1^T(t)SP^{-1}(t)Sx_1(t)dt\,. \qquad (7.51)$$

Задача 2. Рассмотрим ситуацию, когда $u_1 = 0,\ v \ne 0$. В этом случае объект (7.41) и функционал (7.43) будут иметь вид

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x_1(t) = Ax_1(t) + v(t), \\ x_1(t_0) = x_0, \end{cases}$$

$$J_1(x_1,v) = \frac{1}{2}x_1{}^T(T)Sx_1(T) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left\{x_1{}^T(t)Q_1(t)x_1(t) - v^T(t)P(t)v(t)\right\}dt \to \max_{v\in V}\,.$$

При управлении $v^0(t) = P(t)^{-1}S\,x_1(t)$ функционал будет иметь вид

$$J(x_1,v^0) = \frac{1}{2}x^T(t_0)S\,x(t_0) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}x_1^T(t)SBR^{-1}B^TSx_1(t)dt\,. \qquad (7.52)$$

Задача 3. В ситуации, когда $u_1 \neq 0,\ v \neq 0$ объект описывается уравнением (7.41) и функционал имеет вид

$$J_1(x_1,u_1) = \frac{1}{2} x_1^T(T) S x_1(T) +$$
$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left\{x_1^T(t)Q_1(\mathrm{t})x_1(t) + u_1^T(t)Ru_1(t) - v^T(t)P(t)v(t)\right\}dt \to \min_{u\in U}\max_{v\in V}.$$

При управлениях $u_1^0(t) = -R^{-1}B^T S\,x_1(t)$ и $v^0(t) = P(t)^{-1} S\,x_1(t)$ принимает значение

$$J(x_1,u_1,v^0) = \frac{1}{2} x^T(t_0) S\, x(t_0)\,. \qquad (7.53)$$

Сравнивая (7.51), (7.52) и (7.53), получаем соотношение (7.50).

Задача стабилизации

Для нахождения условий, при которых объект (7.41) с параметрическими возмущениями $\alpha(t) - \beta(t)R^{-1}B^T S$ будет стабилизирован управлением $u(t) = -R^{-1}B^T S\,x_1(t)$, запишем функцию Ляпунова

$$V = \frac{1}{2} x_1^T(t) S x_1(t)\,.$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}V(t) =$$
$$= \frac{1}{2}x_1^T(t)\left\{S\alpha(t) + \alpha^T(t)S - S\left[B+\beta(t)\right]R^{-1}\left[B+\beta(t)\right]^T S + S\beta(t)BR^{-1}\beta^T(t)S - Q\right\}x_1(t) \le 0.$$

Пусть $\alpha^*,\ \beta^*$ таковы, что

$$\mathcal{L} = S\alpha^* + (\alpha^*)^T S - S\left[B+\beta^*\right]R^{-1}\left[B+\beta^*\right]^T S + S\beta^* R^{-1}(\beta^*)^T S - Q = 0\,, \qquad (7.54)$$

т.е. множество значений матриц $\alpha^*,\ \beta^*$ образуют границу замыкания $\partial\Omega$ множества Ω. Тогда для всех $\alpha(t), \beta(t) \in \Omega$, при которых матрица $\mathcal{L}$ отрицательно определена, объект (7.41) стабилизируем управлением

$$u(t) = -R^{-1}B^T S\,x(t)\,.$$

Теорема 7.3.2

Задача о робастной стабилизации нестационарного объекта вида (7.41), (7.42) с регулятором $u(t) = -R^{-1}B^T Sx(t)$, содержащим постоянные параметры, имеет решение, если матрица

$$\pounds = S\alpha(t) + \alpha^T(t)S - S[B + \beta(t)]R^{-1}[B + \beta(t)]^T S + S\beta(t)R^{-1}\beta^T(t)S - Q$$

отрицательно определена.

Задача d–робастного управления

Рассмотрим теперь задачу d-робастного управления. Условие на правом конце зададим в виде

$$\left\| \pi x_1(T) \right\| \le d . \tag{7.55}$$

Здесь π – оператор проектирования из R^n на R^q, а d – фиксированная неотрицательная постоянная. Очевидно, что в общем случае время $T - t_0$ должно зависеть от начального состояния $x(t_0)$ и параметров системы.

Для того чтобы можно было завершить игру за время $T - t_0$, необходимо, чтобы

$$\sup_{v(t)} \inf_{u_1(t)} \left\| \pi x_1(T) \right\| \le d . \tag{7.56}$$

Действительно, поскольку игра должна быть завершена независимо от возмущений $v(t)$, при любом фиксированном $v(t_0, T)$ должно выполняться неравенство

$$\inf_{u_1(t)} \left\| \pi x_1(T) \right\| \le d , \tag{7.57}$$

а отсюда следует условие (7.55).

Условие (7.55) является достаточным, если для любого $v(t)$ найдется такое управление $u_j(t) \in U$, что

$$\left\| \pi x_u(T) \right\| = \inf_{u_1(t)} \left\| \pi x_1(T) \right\|,$$

здесь $x_u(T)-$ значение $x_j(T)$, достигаемое при конкретном управлении $u_j(t)\in U$, где $t\in[t_0,T]$.

Как уже отмечалось, в задачах робастного управления (расчете системы на "худший случай"), реализуемого с использованием минимаксного подхода, в общем случае точка минимакса не является седловой точкой, т.е. перестановочные операции *inf* и *sup* могут дать несовпадающие результаты. Однако минимакс обладает свойством, которым не обладает седло, а именно, если минимакс существует, то по определению функционал $J(x_1,u_1,v)$ гарантированно имеет максимум по $v(t)$ для каждого $u_j(t)\in U$, а не только для оптимального управления, как это гарантируется определением седловой точки.

Отметим, что для робастного минимаксного управления справедливо следующее соотношение:

$$\inf_{u_1(t)} \left\|\pi x_1(T)\right\| \le \sup_{v(t)}\left\|\pi x_1(T)\right\|. \tag{7.58}$$

Найдем условия, при которых игра будет завершена в момент *T*.

Пусть $\Phi(t)$ − фундаментальная матрица решений уравнения

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}x_1(t)=Ax_1(t)+Bu_1(t)+v(t),\\ x_1(t_0)=x_0\,,\end{cases}$$

т.е. $\dfrac{d}{dt}\Phi(t)=A\Phi(t),\ \Phi(0)=I,$ где $I-$ единичная матрица. Тогда

$$\left\|\pi x_1(T)\right\|=\left\|\pi\,\Phi(T-t_0)x(t_0)+\pi\int_{t_0}^{T}\Phi(T-s)Bu_1(s)ds+\pi\int_{t_0}^{T}\Phi(T-s)v(s)ds\right\|\le d\,. \tag{7.59}$$

Множества U и V ограниченные. Ограниченность множества U, в силу постановки задачи о робастном управлении, следует из ограниченности множества V. Поэтому покажем, что множество

$$V=\left\{v(t)\in R^{n+r}:v(t)=\left\{\alpha\,(t)x_1(t)+\beta\,(t)u_1(t)\right\},\ x_1(t_0)=x_0,\ u_1(t)\in U\right\} \tag{7.60}$$

ограниченное.

Пусть $\alpha^* = \max|\alpha(t)|,\ \beta^* = \max|\beta(t)|,\ \Omega^* = \{\alpha^*\ \beta^*\}, x_{nax} = \max|x_1(t)|; \forall t \in [t_0, T].$ Тогда

$$\|v(t)\| = \sqrt{\langle v(t), v(t)\rangle} = \sqrt{\alpha^2(t)x_1(t) + \beta^2(t)u_1(t)} \le \Omega^* \sqrt{x_{\max}^2 + u_{\max}^2} = const = C\ .$$

Таким образом, множество V воздействий $v(t)$, где $t \in [t_0, T]$, ограничено. В силу ограниченности множества V множество U также ограничено. Предположим, что множества U и V выпуклы. Обозначим через Θu_1 множество

$$\Theta u_1 = \left\{\pi \int_{t_0}^{T} \Phi(T-s)Bu_1(t)ds : u_1(t) \in U\ \text{почти всюду}\right\}.$$

Аналогично положим

$$\Theta v = \left\{\pi \int_{t_0}^{T} \Phi(T-s)\, v(s)ds : v(t) \in V\ \text{почти всюду}\right\}.$$

Оба множества ограничены и выпуклы. Более того, они замкнуты. Действительно, пусть

$$z^* = \pi \int_{t_0}^{T} \Phi(T-s)Bu_1^*(s)ds\,,$$

а так как множество U ограничено, то можно выбрать последовательность $\{u_1^*(t)\} \in U$, слабо сходящуюся в $L_2(t_0, T)$ к некоторому элементу $u_1^0(t)$ (также принадлежащему U почти всюду) и

$$z^0 = \lim z^* = \pi \int_{t_0}^{T} \Phi(T-s)Bu_1^0(s)ds.$$

Аналогично можно убедиться в замкнутости множества Θv.

Сформулируем необходимые и достаточные условия возможности завершения игры за время $T - t_0$.

Пусть $e \in R^k$ – произвольный единичный вектор.

Теорема 7.3.3

Для того чтобы можно было завершить игру к моменту *T*, начиная из состояния $x(t_0)$ в момент t_0, необходимо и достаточно, чтобы для любого единичного вектора $e \in R^k$ выполнялось неравенство

$$d^* - \left| e, \pi \left\{ \Phi(T-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{T} \Phi(T-s)u_1(s)ds \right\} \right| \geq \left| e, \pi \int_{t_0}^{T} \Phi(T-s)v(s)ds \right| \qquad (7.61)$$

Здесь d^* − фиксированная неотрицательная величина.

Из (7.61) следует, что при отсутствии параметрических возмущений ($v(t)=0$, $t \in [t_0, T]$) управление $u_1(t)$ должно быть таким, что

$$\left| e, \pi \left\{ \Phi(T-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{T} \Phi(T-s)u_1(s)ds \right\} \right| < d^*.$$

Условие (7.61) перепишем в виде:

$$\varphi\,(e,T) \leq d^*. \qquad (7.62)$$

Необходимость. Предположим, что игру можно завершить за время $T-t_0$, но при этом условие (7.62) не выполняется. Это означает, что для некоторого единичного вектора *e*

$$\varphi\,(e,T) > d^*,$$

т.е. множество V содержит такое $v^*(t), t \in [t_0, T]$, что

$$d^* < \left| e, \pi \left\{ \Phi(T-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{T} \Phi(T-s)\left[Bu_1(s) - v^*(s)\right]ds \right\} \right|$$

при любом допустимом управлении $u_1(t), t \in [t_0, T]$, а это противоречит сделанному предположению, что игру можно завершить за время $T-t_0$.

Достаточность. Докажем, что условие (7.62) достаточно, для того чтобы игру можно было завершить за время $T-t_0$. Предположим, что это не так. Это предположение означает, что можно найти такое $v^*(t) \in V$, $t \in [t_0, T]$, что множество

$$\pi\,\Phi(T-t_0)x(t_0)+\pi\int_{t_0}^{T}\Phi(T-s)Bu_1(s)ds+\pi\int_{t_0}^{T}\Phi(T-s)v^*(s)ds$$

ни при каком допустимом управлении $u_1(t)\in U, t\in[t_0,T]$ не пересекается с областью $S(d)$, представляющей собой шар радиуса d с центром в начале координат пространства R^k. Тогда с шаром $S(d)$ не пересекается и замкнутое выпуклое множество

$$\pi\,\Phi(T-t_0)x(t_0)+\pi\int_{t_0}^{T}\Phi(T-s)Bu_1(s)ds+\Theta v\,.$$

Это значит, что расстояние между этими множествами строго больше нуля и, следовательно, они сильно отделимы. Другими словами, найдется такой единичный вектор $e\in R^k$, что

$$\inf_{u_1(t)}\left\|e,\pi\,x_1(T)\right\|>\sup_{v(t)}\left\|e,\pi\,x_1(T)\right\|=d^*,$$

откуда $\varphi\,(e,T)>d^*$, что противоречит условию (7.62).

Множество *U*, которое содержит управляющие воздействия, при которых игра будет завершена за время $T-t_0$ при любых наперед заданных множествах начальных условий и возмущений параметров, свяжем с определением значения матрицы *R* функционала (7.43).

Пусть α^*, $\beta^*\in\partial\Omega_P$. Тогда, учитывая (7.42) и (7.44), система (7.41) может быть записана в виде

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}x(t)=\left[A-BR^{-1}B^TS^*\right]x(t)+\left[\alpha^*-\beta^*R^{-1}B^TS^*\right]x(t),\\ x(t_0)=x_0,\end{cases}\qquad(7.63)$$

где положительно определенная матрица S^* является решением уравнения Риккати-Лурье

$$S^*A+A^TS^*-S^*\left[BR^{-1}B^T-P^{-1}\right]S^*+Q_1=0\,.$$

Решение уравнения (7.63), записанное в форме Коши, будет иметь вид

$$x(T) = \Psi(T - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{T} \Psi(T - s)\left[\alpha^* - \beta^* R^{-1} B^T S^*\right] x(s)\, ds. \tag{7.64}$$

Здесь $\Psi(T - s) = \left\{\exp\left[A - BR^{-1}B^T S^*\right]\right\}(T - s),\ s \in [t_0, T]$.

Пусть $\eta^T = e^T \pi$. Запишем условие d-робастной стабилизации (7.62) с учетом (7.63):

$$\left| \eta, \left\{ \Psi(T - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{T} \Psi(T - s)\left[\alpha^* - \beta^* R^{-1} B^T S^*\right] x(s)\, ds \right\} \right| \le d,$$

откуда

$$d - \left| \eta, \left\{ \Psi(T - t_0)x(t_0) \right\} \right| \ge \left| \eta, \left\{ \int_{t_0}^{T} \Psi(T - s)\left[\alpha^* - \beta^* R^{-1} B^T S^*\right] x(s)\, ds \right\} \right|. \tag{7.65}$$

При отсутствии параметрических возмущений ($\alpha(t) = 0,\ \beta(t) = 0,\ t \in [t_0, T]$) управление должно быть таким, что

$$\left| \eta, \left\{ \Psi(T - t_0)x(t_0) \right\} \right| < d. \tag{7.66}$$

Применяя к правой части неравенства (7.65) неравенство Коши–Буняковского - Шварца [10], получаем:

$$\begin{gathered} d - \left| \eta^T \left\{ \exp\left[A - BR^{-1}B^T S^*\right](T - t_0) \right\} x(t_0) \right| \ge \\ \ge \left| \int_{t_0}^{T} \left\| \eta^T \left\{ \exp\left[A - BR^{-1}B^T S^*\right](T - s) \right\} \right\| \cdot \left\| [\alpha^* - \beta^* R^{-1} B^T S^*]\, x(s) \right\| ds \right|. \end{gathered} \tag{7.67}$$

Очевидно, что условие d-робастной стабилизации будет выполняться, если значения матриц параметрических возмущений α^* и β^* таковы, что правая часть неравенства (7.67) при фиксированной матрице R и вычисленной матрице S^* принимает максимальное значение.

Из структуры неравенства (7.67) видно, что граничные значения параметров матриц $\alpha^*,\ \beta^* \in \partial\Omega_P$ должны обеспечивать максимальное значение нормы $\left\| [\alpha^* - \beta^* R^{-1} B^T S^*]\, x(s) \right\|$.

Из условия положительной определенности матрицы $Q_1 = Q - S^*\alpha^* + S\beta^* R^{-1}B^T S^*$ следует, что $\alpha^* = \max|\alpha\ (t)|,\ \beta^* = \min|\beta\ (t)|$

Выполнение условия d-робастной стабилизации зависит не только от значений параметрических возмущений, но и от начального состояния системы $x(t_0)$ и интервала управления $T - t_0$.

Если при выполнении условия (7.66) условие (7.67) не выполняется, то это означает, что ограничения на управления, сформулированные в виде назначения матрицы R, настолько «жесткие», а возможные параметрические возмущения и начальные условия $x(t_0)$ настолько велики, что поставленная задача при этих условиях неразрешима.

В этом случае при заданных наихудших параметрических возмущениях и заданных начальных условиях $x(t_0) \in X_0$ следует вернуться к функционалу качества и внести, если это возможно по самой постановке задачи, изменения в значения матриц Q и R (что повлечет изменение матрицы S^*) так, чтобы удовлетворялось условие (7.67).

Если при постановке задачи было заданы:

- критическое значение функционала качества $J^{\max}(x,u)$, которое не должно быть превышено,
- область допустимых управляющих воздействий U,

то условие (7.67) можно использовать для нахождения положительно определенной матрицы S^*, при которой эти условия выполняются при заданном интервале управления, заданных границах параметрических возмущений, заданной точности выполняемой задачи управления и затем проверить: выполняются ли условия

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}x^T(t_0)S^*x(t_0) \le J^{\max}(x,u), \\ &R^{-1}[B+\beta^*]^T S^* x(t_0) \in U. \end{aligned} \tag{7.68}$$

§ 7.4. Робастная инвариантность неопределенных линейных систем

Как уже говорилось в первой главе, дополнительную неопределенность вносит координатное возмущение $D(t)z(t)$. Пусть модель объекта, построенная с использованием матрицы «наихудших» параметров, имеет вид

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = A^* x(t) + B(t)u(t) + K\sigma(t) + D(t)z(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{7.69}$$

$x \in R^n$, $u \in R^r$, $z \in R^p$, $n > p$, $r > p$.

В уравнении объекта $u(t)$ – управление, обеспечивающее заданное качество переходного процесса всей системы, $\sigma(t)$ – управление, обеспечивающее независимость ряда координат системы от возмущений $D(t)z(t)$.

Задан функционал качества:

$$J(x,u) = \frac{1}{2}x^T(T)S\,x\ (T) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left\{x^T(t)Q\,x\ (t) + u^T(t)R\,u(t)\right\}dt, \tag{7.70}$$

где положительно определенная матрица S является решением уравнения типа Риккати−Лурье

$$SA + A^T S - SBR^{-1}B^T S + Q = 0. \tag{7.71}$$

Напомним, что такое назначение весовой матрицы в первом слагаемом функционала (7.70) позволяет синтезировать регулятор, который будет содержать постоянные параметры при заданном времени процесса управления.

Синтез основного управления $u(t)$ произведем при $D(t)z(t) = 0$, $K\sigma(t) = 0$. Оптимальное управление, синтезированное на модели:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = A^* x(t) + B(t)u(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

имеет вид [2, 3]:

$$u(t) = -R^{-1}B^T Sx(t), \tag{7.72}$$

где положительно определенная матрица S является решением уравнения

$$SA^* + (A^*)S - SBR^{-1}B^T S + Q + 0.$$

Запишем объект (7.69) с управлением (7.72):

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = [A^* - BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\mathrm{S}]x(t) + K\sigma(t) + D(t)z(t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{7.73}$$

Синтезируем управление $\sigma(t)$ таким образом, чтобы $\mathrm{n}-p$ компонент вектора состояния объекта (7.73) не подвергались возмущениям $D(t)z(t)$.

Пусть

$$L = A^* - BR^{-1}B^T S. \tag{7.74}$$

Тогда из (7.73) будем иметь

$$\frac{d}{dt}x_1(t) = L_{11}x_1(t) + L_{12}x_2(t) + K_1\sigma(t), \tag{7.75}$$

$$\frac{d}{dt}x_2(t) = L_{21}x_1(t) + L_{22}x_2(t) + K_2\sigma(t) + Dz(t), \tag{7.76}$$

где $x_1 \in R^{n-p}$, $x_2 \in R^p$ $\sigma_1 \in R^{r-p}$, $\sigma_2 \in R^p$,

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & 0 \\ 0 & Q_{22} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} R_{11} & 0 \\ 0 & R_{22} \end{pmatrix}.$$

Введем дополнительный функционал

$$\begin{aligned} J^* &= \frac{1}{2}x_1^T(T)F_{11}x_1(T)\} + \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^T \{[L_{12}x_2(t) + K_1\sigma(t)]^T R_{11}[L_{12}x_2(t) + K_1\sigma(t)] + x_1^T(t)Q_{11}x_1(t)\}dt \end{aligned} \tag{7.77}$$

Введем гамильтониан

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{2}\{[L_{12}x_2(t) + K_1\sigma(t)]^T R_{11}[L_{12}x_2(t) + K_1\sigma(t)] + x_1^T(t)Q_{11}x_1(t)\} + \\ &+ \lambda^T(t)\{L_{11}x_1(t) + L_{12}x_2(t) + K_1\sigma(t)\}. \end{aligned} \tag{7.78}$$

Вспомогательная переменная $\lambda(t)$ определяется уравнением

$$\frac{d}{dt}\lambda(t) = -L_{11}^T\lambda(t) - Q_{11}x_1(t), \quad \lambda(T) = F_{11}x_1(T). \tag{7.79}$$

Управление $\sigma(t)$ – точка стационарности гамильтониана:

$$\frac{\partial H_1}{\partial\sigma(t)} = 0, \quad K_1^T R_{11}L_{12}x_2(t) + K_1^T R_{11}K_1\sigma(t) + K_1^T\lambda(t) = 0.$$

Отсюда

$$\sigma(t) = -[K_1^T R_{11}K_1]^{-1}K_1^T[R_{11}L_{12}x_2(t) + \lambda(t)], \tag{7.80}$$

тогда

$$K_1\sigma(t) = -[L_{12}x_2(t) + R_{11}^{-1}\lambda(t)]. \tag{7.81}$$

Будем искать, как $\lambda(t) = M(t)x_1(t)$. Учитывая (7.75), (7.81) и (7.79), получим

$$\frac{d}{dt}M(t) + ML_{11} + L_{11}^T M - MR_{11}^{-1}M + Q_{11} = 0,\ M(T) = F_{11}. \tag{7.82}$$

Для того чтобы управление вида (7.80) не зависело от t, назначим $F_{11} = M$, где M – положительно определенная матрица решения уравнения

$$ML_{11} + L_{11}^T M - MR_{11}^{-1}M + Q_{11} = 0. \tag{7.83}$$

Тогда

$$K_1\sigma(t) = -[R_{11}^{-1}Mx_1(t) + L_{12}x_2(t)],$$

и уравнение (7.75) примет вид

$$\frac{d}{dt}x_1(t) = [L_{11} - R_{11}^{-1}M]x_1(t). \tag{7.84}$$

Таким образом, координата $x_1(t) \in R^{n-p}$ в случае, когда матрица A^* совпадает с реальными значениями возмущений $[A + a(t)]$, не зависит от возмущений $D(t)z(t)$. Естественно, такое совпадение практически невозможно. Рассмотрим влияния несовпадения значений параметров реального объекта и его модели, содержащей матрицу A^*.

Пусть $\bar{a}$ матрица возможных максимальных рассогласований $\bar{a} = \left| a(t) - a^* \right|$ и неопределенность, вносимая неизвестными координатными возмущениями, имеет известную мажоранту:

$$\left| D(t)z(t) \right| \le Z,\ \left| d_1(t)z_1(t),...,d_P(t)z_P(t) \right| \le (z_1^M,...,z_P^M),\quad z_i^M > 0,\ i = 1,...,p\,. \tag{7.85}$$

Тогда рассогласование между решениями уравнения модели и реального объекта будет определяться соотношением

$$\varepsilon(t) = x^*(t) - x(t)\,. \tag{7.86}$$

Учитывая (7.84) и (7.76), будем иметь

$$\frac{d}{dt}\varepsilon(t) = \bar{a}\varepsilon(t) + Z,\ \varepsilon(0) = 0\,. \tag{7.87}$$

Используя преобразование подобия

$$\varepsilon(t) = P^{-1}e(t)\,, \tag{7.88}$$

можем записать:

$$\frac{d}{dt}e(t) = P^{-1}\bar{a}Pe(t) + P^{-1}Z,\quad e(0) = 0\,.$$

Так как $P\bar{a}P^{-1} = \Lambda$ [8], то

$$e(T) = \{\exp(\Lambda T)\}\int_0^T \{\exp(-\Lambda t)\}\eta dt\,, \tag{7.89}$$

где $\eta = P^{-1}Z$.

Запишем решение уравнения (7.89):

$$e(T) = \{\exp(\Lambda T)\}\Lambda^{-1}[I - \{\exp(-\Lambda T)\}]\eta$$

или, учитывая свойство коммутативности матриц $\{\exp(\Lambda T)\}$ и Λ^{-1}, получим

$$e(T) = \Lambda^{-1}[\{\exp(\Lambda T)\} - I]\eta\,.$$

Откуда, учитывая, что матрица $\bar{a}$ содержит параметры наибольших рассогласований между параметрами модели A^* и реальных параметрических возмущений матрицы $A(t)$, имеем оценку для максимального влияния внешнего воздействия $D(t)z(t)$ на координату $x_1(t)$ в заданный момент T :

$$\|e(T)\| \le \left| \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} [\exp(\lambda_i T) - 1] \eta_i \right| . \qquad (7.90)$$

Так как $\lambda_i < 0$, то при $T \to \infty$, $\|e(T)\| \to \left| \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} \eta_i \right|$.

В том случае, когда норма ошибки превосходит установленный допуск, т.е. $\left| \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} \eta_i \right| > d$, то следует вернуться к уравнению (7.70) и изменить назначение весовой матрицы Q и/или матрицы R, что приведет к необходимости решения уравнения типа Риккати−Лурье (7.71).

§ 7.5. Множество возможных робастных управлений линейным объектом

Пусть задан объект в виде

$$\frac{d}{dt} x(t) = [A + \alpha(t)] x(t), \; x(t_0) = x_0 , \qquad (7.91)$$

$$y(t) = Cx(t) . \qquad (7.92)$$

Здесь $x \in R^n$, $y \in R^m$, $m \le n$; $[A + \alpha(t)]$ и $C -$ действительные матрицы. Относительно матрицы $\alpha(t)$, содержащей параметры, подвергающиеся внешним возмущениям, сохраняются предположения, сделанные в предыдущих параграфах данной главы. Таким образом, далее будем рассматривать матрицу $A^* = A + a^*$, содержащую постоянные элементы, «наихудшие» с позиции устойчивости объекта (7.91).

Предположим, что пара $\langle A, C \rangle$ наблюдаема при любых $A(t) = A + \alpha(t)$, т.е. и при $A^* = A + a^*$. Условие наблюдаемости записывается в виде: $rank\, H_X = n$, где

$$H_X = \left[C^T \quad C^T (A^*)^T \quad C^T ((A^*)^T)^2 \quad \ldots C^T ((A^*)^T)^{n-1} \right]. \qquad (7.93)$$

Управляемую систему представим в виде

$$\frac{d}{dt} x(t) = A^* x(t) + Bu(t), \; x(t_0) = x_0 . \qquad (7.94)$$

Управляемость системы (7.94) определяется парой $\langle A,B\rangle$, т.е. $rank\, G_X = n$, где

$$G_X = \begin{bmatrix} B & BA & B\{A)^2 & \dots B\{A)^{n-1} \end{bmatrix}. \qquad (7.95)$$

Найдем параметры матрицы B, при которых система (7.94) будет асимптотически устойчива. Введем в рассмотрение эквивалентную систему. Пусть $x(t) = P^{-1}z(t)$. Тогда

$$\frac{d}{dt}z(t) = (A^*)^T z(t) + C^T B^T z(t),\ z(t_0) = Px(t_0)\,. \qquad (7.96)$$

Обратимая матрица P удовлетворяет уравнению

$$P[(A^*)^T + C^T B^T]P = A^* + BC\,.$$

Пусть

$$\gamma(t) = B^T z(t)\,. \qquad (7.97)$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}z(t) = (A^*)^T z(t) + C^T \gamma(t),\ z(t_0) = Px(t_0)\,. \qquad (7.98)$$

Предположим, что пара $\left\langle (A^*)^{\mathrm{T}}, C^T \right\rangle$ управляема, т.е. $rank\, G_Z = n$, где

$$G_Z = \begin{bmatrix} C^T & C^T(A^*)^T & C^T((A^*)^T)^2 & \dots C^T((A^*)^T)^{n-1} \end{bmatrix}. \qquad (7.99)$$

Сравнивая (7.99) и (7.93), делаем вывод, что требование наблюдаемости для системы (7.91), (7.92) эквивалентно требованию управляемости эквивалентной системы (7.98), так как $H_X = G_Z$.

Для поиска управляющих воздействий, обеспечивающих стабилизацию системы (7.98), введем функционал

$$J(z,\gamma) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left\{ z^T(t)Qz(t) + \gamma^T(t)\gamma(t) \right\} dt\,. \qquad (7.100)$$

Здесь Q – положительно определенная матрица.

Очевидно [2, 3], что оптимальное управление объектом (7.98) определяется соотношением

$$\gamma(t) = -CSz(t)\,, \qquad (7.101)$$

где положительно определенная матрица S является решением уравнения Риккати-Лурье

$$S(A^*)^T + A^*S - SC^TCS + Q = 0\,. \qquad (7.102)$$

Так как матрица Q – положительно определенная, то множество $\boldsymbol{S}$ положительно определенных матриц S, т.е. $S \in \boldsymbol{S}$, при которых регулятор (7.101) обеспечит асимптотическую устойчивость объекта (7.98), будет определяться неравенством

$$S(A^*)^T + A^*S - SC^TCS < 0\,. \qquad (7.103)$$

Для проверки устойчивости системы (7.98), (7.101) с матрицей $S \in \boldsymbol{S}$ введем функцию Ляпунова

$$V(z) = \frac{1}{2} z^T(t) S z(t)\,.$$

Тогда

$$\frac{d}{dt} V(z) = -z^T(t)[SC^TCS]z(t) \le 0\,,$$

так как матрица SC^TCS по крайней мере положительно определена.

Сравнивая (7.101) с (7.97), получаем

$$B = -SC^T\,. \qquad (7.104)$$

Таким образом, система (7.81) с учетом (7.91) будет иметь вид

$$\frac{d}{dt} x(t) = A^* x(t) - SC^T y(t),\;\; x(t_0) = x_0\,. \qquad (7.105)$$

Теорема 7.5.1

Пусть $\boldsymbol{S}$ – множество положительно определенных матриц S, удовлетворяющих неравенству

$$S(A^*)^T + A^*S - SC^TCS < 0\,,$$

где A и C – действительные матрицы размерностью $n \times n$ и $n \times m$, $n \ge m$ соответственно, образуют наблюдаемую пару $\langle A, C \rangle$.

Тогда линейная система

$$\frac{d}{dt}x(t) = A^* x(t) - \mathrm{SC}^{\mathrm{T}} y(t),\ x(t_0) = x_0,$$
$$y(t) = Cx(t)$$

асимптотически устойчива при всех $S \in \boldsymbol{S}$.

Отметим, что если задана положительно определенная матрица Q, то решение уравнения $S(A^*)^T + A^* S - SC^T CS + Q = 0$ при $Q_1 < Q$ будет таким, что положительно определенные матрицы S и S_1 будут связаны соотношением $S_1 < S \in \boldsymbol{S}$. Кроме того, достаточно часто в задачах управления стационарными объектами матрицу веса в первом подынтегральном слагаемом функционала качества назначают в виде $Q = \gamma C^T C$, где $\gamma > 0$. Тогда, если $\gamma_1 > \gamma_2$, то $S_1 > S_2$.

7.5.1. Нахождение интервала робастного управления при заданных области начальных условий и параметрах регулятора

Рассмотрим проблему d-робастности объекта (7.105). Очевидно, что для этого необходимо получить усиленные условия выбора матрицы S. Управляемый объект (7.105) имеет вид

$$\frac{d}{dt}x(t) = [A^* - SC^T C]x(t),\ x(t_0) = x_0. \qquad (7.106)$$

Предположим, что в назначенный момент $T > 0$ должно выполняться условие

$$|x(T)| \le D. \qquad (7.107)$$

Здесь $|x(T)|$ − вектор, состоящий из модулей $|x_i(T)|$, D – вектор, составленный из $d_i > 0,\ i = 1,...,n$. Таким образом, условие (7.107) должно выполняться поэлементно. Решение однородного уравнения (7.106) записывается в виде

$$|x(T)| = \left|\left\{\exp[A - SC^T C]T\right\}x(0)\right|. \qquad (7.108)$$

Умножим (7.108) справа на $|x(0)|$:

$$\left|x(T)x^T(0)\right| = \left|\left\{\exp[A^* - SC^T C]T\right\}x(0)x^T(0)\right| \le D\left|x^T(0)\right|. \qquad (7.109)$$

Так как матрицы $\left|D\,x^T(t_0)\right|$ и $x(T)\,x^T(0)$ положительные, но необратимые, поэтому прологарифмировать выражение (7.109) не удастся [7].

Представим матрицу $\left|x(T)\,x^T(0)\right|$ в виде суммы двух обратимых неотрицательных матриц:

$$\left|x(T)\,x^T(0)\right| = X_{01} + X_{02}\,. \tag{7.110}$$

Тогда выражение (7.109) примет вид:

$$\left|D\,x^T(0)\right| = (\exp LT)\,X_{01} + (\exp LT)X_{02} = (\exp LT)\left[I + X_{02}\left(X_{01}\right)^{-1}\right]X_{01}\,,$$

откуда

$$\left|D\,x^T(0)\right|\left(X_{01}\right)^{-1} = (\exp LT)\,X_{01} + (\exp LT)X_{02} = (\exp LT)\left[I + X_{02}\left(X_{01}\right)^{-1}\right],$$

где $L = \left[\,A^* - C^T CS\right]$.

Пусть $\alpha, \beta, x_0 \in \Omega_p$, $\widetilde{D}^T = (d_1,..,d_{l,}, x_{l+1}(T),..., x_n(T)) \in R^n$, тогда

$$\left|D\,x^T(0)\right|\left(X_{01}\right)^{-1} \geq (\exp LT)\left[I + X_{02}\left(X_{01}\right)^{-1}\right]. \tag{7.112}$$

Учитывая, что матрицы $\left|\widetilde{D}_P\,x_P^T(t_0)\right|\left(X_{01}\right)^{-1}$ и $\left[I + X_{02}\left(X_{01}\right)^{-1}\right]$ обратимые, прологарифмируем полученное выражение:

$$C^T CS \geq A^* + \frac{1}{T}\left\{\ln\left[I + X_{02}\left(X_{01}\right)^{-1}\right] - \ln\left|D\,x^T(0)\right|\left(X_{01}\right)^{-1}\right\}. \tag{7.113}$$

Умножив (7.113) справа на положительно определенную симметричную матрицу S, получим условие d-робастности

$$\begin{gathered}(A^*)^T S + \frac{1}{T}\left\{\ln\left[I + X_{02}\left(X_{01}\right)^{-1}\right] - \ln\left|D\,x^T(0)\right|\left(X_{01}\right)^{-1}\right\}S + \\ + S\,A^* + \frac{1}{T}S\frac{1}{T}\left\{\ln\left[I + X_{02}\left(X_{01}\right)^{-1}\right] - \ln\left|D\,x^T(0)\right|\left(X_{01}\right)^{-1}\right\}^T - 2SC^T CS \leq 0\,.\end{gathered} \tag{7.114}$$

Теорема 7.5.2

Пусть $\boldsymbol{S^*} \in \boldsymbol{S}$ – множество положительно определенных матриц S, удовлетворяющих неравенству

$$\begin{gathered}(A^*)^T S + \frac{1}{T}\left\{\ln\left[I + X_{02}\left(X_{01}\right)^{-1}\right] - \ln\left|D\,x^T(0)\right|\left(X_{01}\right)^{-1}\right\}S + \\ + S\,A^* + \frac{1}{T}S\frac{1}{T}\left\{\ln\left[I + X_{02}\left(X_{01}\right)^{-1}\right] - \ln\left|D\,x^T(0)\right|\left(X_{01}\right)^{-1}\right\}^T - 2SC^T CS \leq 0\,.\end{gathered}$$

Тогда линейная система

$$\frac{d}{dt}x(t) = A^* x(t) - SC^T y(t),\ \ x(t_0) = x_0$$

d -робастна при всех $S \in$ **S***.

Следствие

Используя (7.113), можно оценить начальные условия

$$\left\| \ln\left[I + X_{02}\left(X_{01}\right)^{-1}\right] - \ln\left|D\, x^T(0)\right| \left(X_{01}\right)^{-1} \right\| \le T \left\|A^* - C^T CS\right\| \tag{7.115}$$

и период управления

$$T \ge \left\| \ln\left[I + X_{02}\left(X_{01}\right)^{-1}\right] - \ln\left|D\, x^T(0)\right| \left(X_{01}\right)^{-1} \right\| \left\|A^* - C^T CS\right\|^{-1}. \tag{7.116}$$

при которых будет выполняться условие $|x(T)| \le D$.

7.5.2. Нахождение параметров регулятора при заданной области начальных условий и времени окончания переходного процесса

Пусть задано значение функционала, характеризующее желаемое качество переходных процессов и затрачиваемые на это ресурсы:

$$J(x,u) = \frac{1}{2} x^T(t_0) S_{\max} x(t_0)\,. \tag{7.117}$$

Очевидно, что весовая матрица в первом подынтегральном слагаемом функционала качества может быть определена как

$$Q_{\max} = S_{\max} B R^{-1} B^T S_{\max} - S_{\max} A^* - (A^*)^T S_{\max}\,. \tag{7.118}$$

Значения $S_{\max}$ и $Q_{\max}$ определяют правые границы множеств возможных значений параметров регулятора и весовой матрицы Q.

Для отыскания левой границы рассмотрим условие d-робастности, выполняемое на границе замыкания области D, т.е.

$$|x(T)| = D\,. \tag{7.119}$$

Пусть $q \le Q_{\max}$. Тогда справедливо следующее неравенство

$$SA^* + \left(A^*\right)^T S - SBR^{-1}B^T S + q \le 0\,. \tag{7.120}$$

Возможные траектории объекта будут определяться следующим дифференциальным включением

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \subset \left[A^* - BR^{-1}B^T S\right] x(t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (7.121)$$

Обозначим

$$L = A^* - BR^{-1}B^T S. \quad (7.122)$$

Для системы (7.121) семейство решений записываются в виде

$$|x(T)| \subset e^{LT} |x(0)|. \quad (7.123)$$

Умножим (7.123) слева на $x(T)$:

$$x(T)x^T(T) \subset e^{LT} \left| x(0)x^T(T) \right|. \quad (7.124)$$

Как и раньше, предположим, что в назначенный момент $T > 0$ должно выполняться условие

$$|x(T)| \leq D. \quad (7.125)$$

С учетом (7.119) и (7.124) получаем:

$$DD^T \geq e^{LT} \left| x(t_0)D^T \right| \quad (7.126)$$

или

$$\left\| DD^T \right\| \geq \left\| e^{LT} \right\| \left\| x(t_0)D^T \right\|,$$

откуда

$$\left\| DD^T \right\| \geq Ke^{-\rho T} \left\| x(t_0)D^T \right\|.$$

Прологарифмировав последнее, получим

$$\rho T \geq \ln \frac{\left\| DD^T \right\|}{K \left\| x(t_0)D \right\|}. \quad (7.127)$$

Тогда

$$\rho(S) \geq \frac{1}{T} \ln \frac{\left\| DD^T \right\|}{K \left\| x(t_0)D \right\|}. \quad (7.128)$$

Очевидно, что при $|x(T)| = D$

$$e^{LT} \left| x(t_0)D^T \right| - DD^T = 0, \quad (7.129)$$

где матрица содержит матрицу $S_{\min}$

$$L = A^* - \mathrm{S}_{\min} \mathrm{C}^{\mathrm{T}} C,$$

которая соответствует решению уравнения

$$S_{\min}A + A^T S_{\min} - S_{\min}BR^{-1}B^T S_{\min} + Q_{\min} = 0\,. \qquad (7.130)$$

В этом случае из уравнения (7.130) можно найти $Q_{\min}$:

$$Q_{\min} = S_{\min}BR^{-1}B^T S_{\min} - S_{\min}A - A^T S_{\min}. \qquad (7.131)$$

Полученные результаты можно обобщить в виде теоремы.

Теорема 7.5.3

Линейная система вида

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \left[A^* - BR^{-1}B^T S\right]x(t), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

d-робастно управляема, если матрица S отвечает условию

$S_{\min} \le S \le S_{\max}$.

7.5.3. Нахождение области начальных условий при заданных параметрах регулятора и времени окончания переходного процесса

Пусть задан регулятор, содержащий постоянные параметры – уже известную матрицу усилений S, требуется определить область начальных условий X_0 такую, что для всех траекторий, начинающихся из данной области, то есть для $\forall x_0 \in X_0$, выполняется условие $|x(T)| \le D$.

Рассматриваемый объект имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \left[A^* - BR^{-1}B^T S\right]x(t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \qquad (7.132)$$

Обозначим

$$L^* = A^* - BR^{-1}B^T S_{\max}\,. \qquad (7.133)$$

Тогда решение уравнения (7.132) будет иметь вид

$$|x(T)| = D = \exp\left\{L^* T\right\}\left|x^*_{\max}(0)\right|\,.$$

Из последнего условия будем иметь

$$\left|x^*_{\max}(0)\right| = \exp\left\{-L^* T\right\}D\,. \qquad (7.134)$$

Таким образом, область возможных значений начальных условий, при которых успешно выполняется задача d-робастного управления при заданном времени окончания переходного процесса, будет определяться соотношением:

$$-\exp\left\{-\left(A^{*}-BR^{-1}B^{T}S_{\max}\right)T\right\}D \le x(0) \le \exp\left\{-L\left(A^{*}-BR^{-1}B^{T}S_{\max}\right)T\right\}D . \qquad (7.135)$$

Теорема 7.5.4

Пусть задан регулятор, содержащий постоянные параметры – известную матрицу $S_{\max}$, и задан момент времени T.

Тогда для линейной системы

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \left[A^{*}-BR^{-1}B^{T}S_{\max}\right]x(t), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

будет выполняться условие $|x(T)| \le D$, для всех траекторий, начинающихся из области X_0, определяемой соотношением:

$$-\exp\left\{-\left(A^{*}-BR^{-1}B^{T}S_{\max}\right)T\right\}D \le x(0) \le \exp\left\{-L\left(A^{*}-BR^{-1}B^{T}S_{\max}\right)T\right\}D .$$

§ 7.6. Модель объекта пониженного порядка

В ряде задач управления динамическим объектом требуется построить для его описания математическую модель пониженного порядка. Пусть полное математическое описание объекта, построенное, как это делалось в предыдущих параграфах главы, с использованием матрицы «наихудших» параметров, имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = A^{*}x(t) + Bu(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \qquad (7.136)$$

Синтез управления для объекта (7.136) осуществляется с использованием функционала качества:

$$J(x,u) = \frac{1}{2}x^{T}(T)\mathrm{S}x\ (T) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left\{x^{T}(t)Qx\ (t) + u^{T}(t)Ru(t)\right\}dt , \qquad (7.137)$$

Оптимальное управление имеет вид [2, 3]

$$u(t) = -R^{-1}B^{T}Sx(t) , \qquad (7.138)$$

где положительно определенная матрица S является решением уравнения

$$SA^* + (A^*)S - SBR^{-1}B^T S + Q = 0\,.$$

Запишем объект (7.136) с управлением (7.138):

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = [A^* - BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\mathrm{S}]x(t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{7.139}$$

Пусть $x^T(t) = (x_1^T(t)\;\; x_2^T(t))$, где $x_1 \in R^m$, $x_2 \in R^{n-m}$,

$$L^* = A^* - BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\mathrm{S}\,, \tag{7.140}$$

$$L^* = \begin{pmatrix} L^*_{11} & L^*_{12} \\ L^*_{21} & L^*_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}x_1(t) = L^*_{11}x_1(t) + L^*_{12}x_2(t)\,, \tag{7.141}$$

$$\frac{d}{dt}x_2(t) = L^*_{21}x_1(t) + L^*_{22}x_2(t)\,. \tag{7.142}$$

Пусть измеряется $x_2(t)$.

$$y(t) = Cx(t) = x_2(t)\,. \tag{7.143}$$

В выражениях (7.136), (7.141) и (7.142) $x \in R^n$, $y \in R^m$, $u \in R^r$, $n > m$.

Требуется построить $x_1(t)$ по наблюдениям $y(t)$.

Построим модель пониженного порядка объекта (7.142) в виде

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}z(t) = L^*_{11}z(t) + \sigma(t), \\ z(t_0) = 0, \end{cases} \tag{7.144}$$

здесь $z \in R^m$, вектор $\sigma(t)$ играет роль управления, с помощью которого предполагается приблизить $z(t)$ к $x_2(t)$.

Пусть

$$\varepsilon(\mathrm{t}) = x_2(t) - z(t)\,.$$

Тогда, учитывая (7.142) и (7.144), уравнение для ошибки будет иметь вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\varepsilon(t) = L^*_{11}\varepsilon(t) + L^*_{12}x_2(t) - \sigma(t), \\ \varepsilon(t_0) = 0. \end{cases} \tag{7.145}$$

Для синтеза управления $\sigma(t)$ введем дополнительный функционал

$$J^* = \frac{1}{2}\varepsilon^T(T)F\varepsilon(T)\} +$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^T \{[L_{12}^* x_2(t) - \sigma(t)]^T \mathrm{R}[L_{12}^* x_2(t) - \sigma(t)] + \varepsilon^T(t)Q\varepsilon(t)\}dt \qquad (7.146)$$

Образуем гамильтониан:

$$H = \frac{1}{2}\{[L_{12}^* x_2(t) - \sigma(t)]^T R[L_{12}^* x_2(t) - \sigma(t)] +$$
$$+\varepsilon^T(t)Q\varepsilon(t)\} + \lambda^T(t)\{L_{11}^*\varepsilon(t) + L_{12}^* x_2(t) - \sigma(t)\}. \qquad (7.147)$$

Вспомогательная переменная $\lambda(t)$ определяется уравнением

$$\frac{d}{dt}\lambda(t) = -(L_{11}^*)^T\lambda(t) - Q\varepsilon(t), \quad \lambda(T) = F\varepsilon(T). \qquad (7.148)$$

Определим управление $\sigma(t)$ [2, 3]:

$$\frac{\partial H}{\partial \sigma(t)} = 0, \quad -RL_{12}^* x_2(t) + R\sigma(t) - \lambda(t) = 0,$$

откуда

$$\sigma(t) = R^{-1}\lambda(t) + L_{12}^* x_2(t). \qquad (7.149)$$

Будем искать, как $\lambda(t) = M(t)\varepsilon(t)$. Учитывая (7.148), (7.145) и (7.149), получим

$$\frac{d}{dt}M(t) + ML_{11}^* + (L_{11}^*)^T M - MR^{-1}M + Q = 0,\ M(T) = F. \qquad (7.150)$$

Для того чтобы управление вида (7.149) не зависело от t, можно назначить $F = M$, где M – положительно определенная матрица решения уравнения

$$ML_{11}^* + (L_{11}^*)^T M - MR^{-1}M + Q = 0. \qquad (7.151)$$

Тогда

$$\sigma(t) = R^{-1}M\varepsilon(t) + L_{12}^* x_2(t)],$$

и уравнение (7.144) примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}z(t) = L_{11}^* z(t) + R^{-1}M\varepsilon(t) + L_{12}^* x_2(t), \\ z(t_0) = 0. \end{cases} \qquad (7.152)$$

Уравнение ошибки принимает вид

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\varepsilon(t) = [L_{11}^{*} - R^{-1}M]\,\varepsilon(t), \\ \varepsilon(0) = 0. \end{cases} \qquad (7.153)$$

Нетрудно видеть, что при точном измерении состояния $x_2(t)$ и «совпадении» значений параметров матриц L_{11} с L_{11}^{*} $\varepsilon(t_0) = 0$ (при этом учитывалось то обстоятельство, что при вычислении матрицы M из всех четырех матриц L используется только матрица L_{11}^{*}).

Найдем значение влияния параметрических возмущений матрицы $L_{11}(t)$ на ошибку представления $x_1(t)$.

Пусть измерения состояния $x_2(t)$ производится с ошибкой, т.е.

$$y(t) = x_2(t) + \vartheta(t), \qquad (7.154)$$

где $\quad \left|\vartheta_1(t),\ldots,\vartheta_m(t)\right| \le (\vartheta_1^M,\ldots,\vartheta_m^M), \;\; \vartheta_i^M > 0,\; i = 1,\ldots,m, \qquad (7.155)$

и $\bar{l}_{11}-$ матрица возможных максимальных параметрических рассогласований $\bar{l}_{11} = \max\left| L_{11}(t) - L_{11}^{*} \right|$.

Тогда рассогласование между решениями уравнения модели пониженной размерности и реального объекта будет определяться соотношением

$$\varepsilon(t) = x_1(t) - z^{*}(t). \qquad (7.156)$$

Учитывая (7.141) и (7.152), будем иметь

$$\frac{d}{dt}\varepsilon(t) = l_{11}\,\varepsilon(t) + \Theta,\; \varepsilon(0) = 0, \qquad (7.157)$$

где $\Theta = L_{12}^{*}\vartheta^M$.

Используя преобразование подобия

$$\varepsilon(t) = P^{-1}e(t), \qquad (7.158)$$

можем записать:

$$\frac{d}{dt}e(t) = P^{-1}\bar{l}_{11}Pe(t) + P^{-1}\Theta, \;\; e(0) = 0.$$

Так как $P\bar{l}_{11}P^{-1} = \Lambda$ [8], то

$$e(T) = \{\exp(\Lambda T)\}\int_0^T \{\exp(-\Lambda t)\}\eta dt\,, \tag{7.159}$$

где $\eta = P^{-1}\Theta$.

Запишем решение уравнения (7.159):

$e(T) = \{\exp(\Lambda T)\}\Lambda^{-1}[I - \{\exp(-\Lambda T)\}]\eta$,

или, учитывая свойство коммутативности матриц $\{\exp(\Lambda T)\}$ и Λ^{-1}, получим

$e(T) = \Lambda^{-1}[\{\exp(\Lambda T)\} - I]\eta$.

Откуда, учитывая, что матрица $\bar{l}_{11}$ содержит параметры наибольших рассогласований между параметрами модели L_{11}^{*} и реальных параметрических возмущений матрицы $L_{11}(t)$, имеем

$$\|e(T)\| \le \left|\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}[\exp(\lambda_i T) - 1]\eta_i\right|. \tag{7.160}$$

Так как $\lambda_i < 0$, то при $T \to \infty$, $\|e(T)\| \to \left|\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}\eta_i\right|$. В том случае, когда норма ошибки превосходит установленный допуск, т.е. $\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}\eta_i\right| > d$, следует вернуться к уравнению (7.151) и изменить назначение весовой матрицы Q.

§ 7.7. Линейно-квадратичная задача при неполной информации о состоянии объекта

Управляемый и наблюдаемый линейный нестационарный динамический объект описывается системой линейных неоднородных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = [A + \alpha\,(t)]x(t) + [B + \beta\,(t)]u(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{7.161}$$

где $x \in R^n, u \in R^r, r \le n$.

Относительно ограничений на управление, начального условия $x(t_0)$ и матриц $\alpha(t)$ и $\beta(t)$, содержащих параметрические возмущения, сохраняются предположения, сделанные в предыдущем параграфе.

Измеритель состояния объекта (7.161) описывается уравнением

$$y(t) = Cx(t), \quad y \in R^m, m \leq n. \tag{7.162}$$

Задача управления объектом (7.161), как и в § 7.3, заключается в построении такой стратегии $u(t) \in U$, при которой минимизируется функционал

$$J(x,u) = \frac{1}{2} x^T(T) S x(T) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{T} \left\{ x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t) \right\} dt, \tag{7.163}$$

где положительно определенная матрица S определяется из решения уравнения Риккати−Лурье

$$SA + A^T S - SBR^{-1} B^T S + Q = 0,$$

заданные матрицы Q, R − положительно определены, интервал управления $[t_0, T]$ задан, и при этом в момент времени T будет выполняться следующее условие:

$$\Im([t_0, T], x(t_0)) = \max_{x \in \mathrm{R}(T, x_0)} \left| \langle \eta, x(T) \rangle \right| \leq d, \tag{7.164}$$

где $\Im([t_0, T], x(t_0))$ обозначает множество достижимости системы (7.161) из начальной точки $x(t_0) \in R^n$ за время $T - t_0$;

$\eta \in R^n$ − единичный вектор,

d − фиксированная положительная величина.

В данной постановке задачи реализовать управление как функцию состояния объекта не представляется возможным.

Рассмотрим эквивалентную объекту (7.161) минимаксную модель

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} x_1(t) = A x_1(t) + B u_1(t) + N v(t), \\ x_1(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{7.165}$$

где

$x_1(t) \in R^n, u_1(t) \in R^r, r \le n;\ \ u_1(t) \in U$;

$v(t) \in R^{n+r}, v(t) \in V$, (7.166)

и функционал

$$J(x,u) = \frac{1}{2} x_1^T(T) S x_1(T) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{T} \left\{ x_1^T(t) Q_1(t) x_1(t) + u_1^T(t) R u_1(t) - v^T(t) P(t) v(t) \right\} dt \,. \qquad (7.167)$$

Будем полагать, что матрицы A, B, N − такие, что пара (A, B^*), где $B^* = (B, N)$ − управляема.

Реализуемое решение будем искать на основе построения наблюдателя, задача которого состоит в «выработке» оценки $\hat{x}(t)$ состояния объекта (7.161) по измерениям (7.162). Представим $\hat{x}(t)$ в виде

$$\hat{x}(t) = \ell(t,\tau) y(\tau)\,, \qquad (7.168)$$

где $\ell(\mathrm{t},\tau)$ − линейный оператор в R^n.

Обозначим:

$$\varepsilon\,(t) = x(t) - \hat{x}(t)\,. \qquad (7.169)$$

Тогда, подставляя *x(t)* из (7.169) в функционал (7.167), будем иметь:

$$J(x,u,v) = J_1(\varepsilon) + J_2(\hat{x},u,v) + J_3(\varepsilon,\hat{x})\,, \qquad (7.170)$$

где

$$J_1(\varepsilon) = \frac{1}{2} \varepsilon^T(T) S(T) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{T} \varepsilon^T(t) Q_1(t) \varepsilon(t) dt\,, \qquad (7.171)$$

$$J_2(x,u) = \frac{1}{2} \hat{x}_1^T(T) S \hat{x}_1(T) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{T} \left\{ \hat{x}_1^T(t) Q_1(t) \hat{x}_1(t) + u_1^T(t) R u_1(t) - v^T(t) P(t) v(t) \right\} dt\,, \qquad (7.172)$$

$$J_3(\varepsilon,\hat{x}) = \varepsilon^{\ T}(t) S \hat{x}(T) + \int_{t_0}^{T} \varepsilon^{\ T}(t) Q_1(t) \hat{x}(t) dt\,. \qquad (7.173)$$

Здесь матрицы $Q_1(t)$ и $P(t)$ определяются так, чтобы выполнялись соотношения (§ 7.2):

$Q_1(t) = Q - q(t),\ t \in [t_0, T]$;

$N^T P^{-1}(t) N = [B + \beta(t)] R^{-1} [B + \beta(t)]^T - B R^{-1} B^T - S^{-1} \alpha^T(t) - \alpha(t) S^{-1},\ \ t \in [t_0, T]$.

Рассмотрим функционал (7.171). Найдем условия выбора оператора $\ell(t,\tau)$, при котором $\varepsilon\,(t)$ минимизирует функционал (7.171).

Пусть

$$\ell(t,\tau)=\ell^{o}(t,\tau)+\mu\; r(t,\tau)\,, \tag{7.174}$$

где

$\ell^{o}(t,\tau)\in R^{n}-$ линейный оператор, при котором обеспечивается минимум рассматриваемого функционала;

$r(t,\tau)\in R^{n}, r(t,\tau)\neq 0$;

μ − коэффициент Лагранжа.

При этом $J_1(\varepsilon)=J_1(...,\mu)$. Произведем следующую операцию: $\left.\dfrac{\partial J_1(...,\mu)}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}=0$. В результате получим:

$$\varepsilon^{\;T}(t)F\hat{x}(T)+\int_{t_0}^{T}\varepsilon^{\;T}(t)Q^{*}\,\hat{x}(t)dt=0\,. \tag{7.175}$$

Сравнивая (7.173) и (7.175), приходим к выводу, что при «оптимальном» операторе $\ell^{o}(t,\tau)\in R^{n}$ справедливо следующее равенство:

$$J^{o}(x,u,v)=J_1^{\;o}(\varepsilon)+J_2^{\;o}(\hat{x},u,v)\,. \tag{7.176}$$

Будем искать $\hat{x}(t)$ как решение следующего дифференциального уравнения:

$$\begin{cases}\hat{\dot{x}}(t)=M(t)\hat{x}(t)+K(t)y(t)+Bu(t)+Nv(t),\\ \hat{x}(t_0)=\hat{x}_0,\end{cases} \tag{7.177}$$

где матрицы $M(t)$ и $K(t)$ подлежат нахождению.

Вычитая (7.177) из (7.165) и учитывая (7.162), будем иметь

$$\begin{cases}\dot{\varepsilon}\;(t)=Ax(t)-M(t)\hat{x}(t)-K(t)Cx(t),\\ \varepsilon\;(t_0)=\varepsilon_0=x_0-\hat{x}_0.\end{cases} \tag{7.178}$$

Выберем матрицу $M(t)$ в виде

$$M(t)=A-K(t)C \tag{7.179}$$

и перепишем (7.178):

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}\ (t) = A\varepsilon(t) - K(t)C\varepsilon\ \ (t), \\ \varepsilon\ (t_0) = \varepsilon_0\ = x_0 - \hat{x}_0. \end{cases} \tag{7.180}$$

Применим к (7.180) эквивалентное преобразование. Пусть Π − такая матрица преобразования с постоянными коэффициентами, что $e(t) = \Pi^{-1}\varepsilon\ (t)$, Π^{-1} − существует и верно:

$$\Pi^{-1}G\,\Pi = G^T.$$

Отметим, что такое преобразование не меняет геометрического смысла (вид траекторий) решений дифференциального уравнения.

Тогда уравнение (7.180) и функционал (7.171) примут вид

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = A^T e(t) - C^T K^T(t)\, e(t), \\ e(t_0) = e_0; \end{cases} \tag{7.181}$$

$$J_1(\varepsilon) = \frac{1}{2} e^T(T) S\, e(T) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} e^T(t) Q_1\,(t)\, e(t) dt\,. \tag{7.182}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\gamma\ (t) = K^T(t) e(t) \tag{7.183}$$

и представим подынтегральную часть функционала (7.182) в виде

$$e^T(t) Q_1(t) e(t) = e^T(t) Q_1^* e(t) + \gamma^{\ T}(t) R_1^* \gamma\ (t)\,, \tag{7.184}$$

где условия выбора Q_1^*, R_1^* будут определены ниже.

Тогда систему (7.181) и функционал (7.182) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = A^T e(t) - C^T \gamma\ (t), \\ e(t_0) = e_0; \end{cases} \tag{7.185}$$

$$J_1(\varepsilon) = \frac{1}{2} e^T(T) S\, e(T) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} \left\{ e^T(t) Q_1^*(t)\, e(t) + \gamma^T(t) R_1^* \gamma(t) \right\} dt \tag{7.186}$$

Система (7.185) и функционал (7.186) представляют собой стандартную линейно-квадратичную задачу, ее решение будет иметь вид [2]

$$\gamma(t) = \left(R_1^*\right)^{-1} CL(t)e(t) \;, \tag{7.187}$$

где $L(t)$ является решением матричного уравнения Риккати:

$$\begin{cases} \dot{L}(t) + A^T L(t) + L(t)A - L(t)C^T \left(R_1^*\right)^{-1} CL(t) + Q_1^* = 0, \\ L(T) = F. \end{cases} \tag{7.188}$$

Сравнивая (7.183) и (7.187), получим:

$$K(t) = L(t)C^T \left(R_1^*\right)^{-1}. \tag{7.189}$$

Подставим (7.187) в (7.184). Будем иметь:

$$Q_1(t) = Q_1^*(t) + L(t)C^T (R_1^*)^{-1} CL(t). \tag{7.190}$$

Подставляя Q_1^* из (7.190) в (7.188), получим:

$$\begin{cases} \dot{L}(t) + A^T L(t) + L(t)A - 2L(t)C^T \left(R_1^*\right)^{-1} CL(t) + Q_1(t) = 0, \\ L(T) = F. \end{cases} \tag{7.191}$$

Реализуемый регулятор $u^*(t)$ и оценку вектора возмущений будем строить в виде

$$u^*(t) = -R^{-1} B^T S^*(t)\hat{x}(t), \tag{7.192}$$

$$v^*(t) = P^{-1} N^T S^*(t)\hat{x}(t). \tag{7.193}$$

Таким образом, система управления, содержащая наблюдатель, будет иметь вид:

<u>объект:</u>

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [A + \alpha(t)]x(t) - [B + \beta(t)]R^{-1} B^T S^*(t)\hat{x}(t), \\ x(t_0) = x_0; \end{cases} \tag{7.194}$$

<u>измеритель состояния объекта:</u>

$$y(t) = Cx(t); \tag{7.195}$$

<u>робастный наблюдатель</u>

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \{\, A + \alpha^* - [\, (B + \beta^*)R^{-1}(B + \beta^*)^T - NP^{-1}N^T]S^*(t) - \\ - L(t)C^T (R_1^*)^{-1} C \,\}\hat{x}(t) + L(t)C^T (R_1^*)^{-1} y(t), \\ \hat{x}(t_0) = \hat{x}_0. \end{cases} \tag{7.196}$$

Матрицы $S^*(t)$ и $L(t)$ определяются решениями уравнений типа Риккати–Лурье уравнения Риккати

$$
\begin{aligned}
&[A+\alpha^*]^T S^*(t)+S^*(t)[A+\alpha^*]- \\
&-S^*(t)\{[B+\beta^*]R^{-1}[B+\beta^*]^T-NP^{-1}N^T\}S^*(t)+Q=0,
\end{aligned} \tag{7.197}
$$

$$
(A+\alpha^*)^T L(t)+L(t)(A+\alpha^*)-2L(t)C^T\left(R_1^*\right)^{-1}CL(t)+Q_1^*=0. \tag{7.198}
$$

Вернемся к вопросу назначения матриц R_1^* и Q_1^*. Перепишем соотношение (7.190) в виде

$$
Q_1^*=Q^*-L(t)C^T(R_1^*)^{-1}CL(t). \tag{7.199}
$$

Из этого соотношения можно видеть, что, вообще говоря, необходимо выбирать только матрицу R_1^*, так как тогда матрица Q_1^* вычисляется с помощью простого вычитания. В общем случае матрица R_1^* выбирается с помощью численного моделирования таким образом, чтобы переходные процессы в наблюдателе проходили значительно быстрее, чем во всей системе управления.

§ 7.8. Робастное управление стохастическим нестационарным объектом с неполной информацией о состоянии

Нестационарный объект с неполной информацией о параметрах описывается линейным стохастическим дифференциальным уравнением

$$
\begin{cases}
\dfrac{d}{dt}x(t)=[A+\alpha(t)]x(t)+[B+\beta(t)]u(t)+\omega(t), \\
x(t_0)=x_0,
\end{cases} \tag{7.200}
$$

где $\alpha(t),\beta(t)\in\Omega-$ матрицы параметров, подвергающихся неконтролируемым возмущениям.

Состояние объекта (7.200) измеряется на фоне шумов:

$$
y(t)=Cx(t)+n(t). \tag{7.201}
$$

В (7.200) и (7.201)

$$
\begin{aligned}
&x\in R^n,\ y\in R^m, \\
&M[w(t)]=0,\ M[n(t)]=0,\ M[w(t)n^T(\tau)]=0, \\
&M[w(t)w^T(\tau)]=W(t)\delta(t-\tau),\ M[n(t)n^T(\tau)]=N(t)\delta(t-\tau), \\
&M[x(t_0)]=\bar{x}_0,\ M[x(t_0)\omega^T(t)]=0,\ M[x(t_0)n^T(t)]=0.
\end{aligned}
$$

Предполагается, что нестационарные «белые» шумы имеют следующие интенсивности:

$$W(t) = W + \mathsf{w}(t), \; N(t) = N + \mathsf{n}(t). \qquad (7.202)$$

Задан функционал качества

$$J(x,u) = \frac{1}{2} M\,[x^T(T) S^* x(T) + \int_{t_0}^{T} \{x^T(t) Q\, x(t) + u^T(t) R\, u(t)\} dt\,], \qquad (7.203)$$

где Q, R, S^* – положительно определенные матрицы соответствующих размерностей, интервал управления $T - t_0$ – задан.

Задана цель управления:

$$X_{ii}(T) \le d_i, \quad i = \overline{1,l}\,, \quad l \le n, \qquad (7.204)$$

где $X(T) = M[x(T)x^T(T)],\; d_i > 0$.

Требуется построить регулятор с постоянной матрицей усиления, при котором достигается цель управления (7.204) и минимизируется функционал (7.203).

Пусть $\alpha^*, \beta^*, \bar{x}_0^*,\; W^*, N^* \in \partial\Omega^*$ – наихудшие значения параметров объекта, оценки его начального состояния и интенсивности шумов, при которых достигается цель управления. Таким образом, $\partial\Omega^*$ – граница множества возможных значений $\alpha(t), \beta(t), \bar{x}_0,\, W(t), N(t) \in \Omega$.

Определим матрицу S^* как решение уравнения типа Риккати−Лурье

$$S^*[A+\alpha^*] + [A+\alpha^*]^T S^* - S^*[B+\beta^*] R^{-1} [B+\beta^*]^T S^* + Q = 0. \qquad (7.205)$$

Такое назначение весовой матрицы штрафа при первом слагаемом позволяет построить робастный регулятор, т.е. регулятор с постоянными параметрами при заданном интервале управления $T - t_0$.

В соответствии с теоремой разделения задача конструирования системы управления разбивается на две подзадачи:

1). построение наблюдателя с функционалом качества

$$J_1(\varepsilon)=\frac{1}{2}M\,[\varepsilon^T(T)S^*\,\varepsilon(T)+\int_{t_0}^{T}\varepsilon^T(t)Q\,\varepsilon(t)\,dt\,],$$

где $\varepsilon(t)=x(t)-\hat{x}(t)$;

2). построение регулятора с функционалом качества

$$J_2(\hat{x},u)=\frac{1}{2}M\,[\hat{x}^T(T)S^*\,\hat{x}(T)+\int_{t_0}^{T}\left\{\hat{x}^T(t)Q\,\hat{x}(t)+u^T(t)R\,u(t)\right\}dt\,].$$

Построим робастный наблюдатель (робастный фильтр Калмана):

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\hat{x}(t)=\left[A+\alpha^*\right]\hat{x}(t)+\left[B+\beta^*\right]u(t)+K\left[y(t)-C\,\hat{x}(t)\right],\\ \hat{x}(t_0)=\bar{x}_0^*,\end{cases}\tag{7.206}$$

где

$$K=P^*C^T(N^*)^{-1},\tag{7.207}$$

$$\left[A+\alpha^*\right]P^*+P^*\left[A+\alpha^*\right]^T-P^*\left[B+\beta^*\right](N^*)^{-1}\left[B+\beta^*\right]P^*+W^*=0.\tag{7.208}$$

Робастный регулятор будет иметь вид:

$$u(t)=-R^{-1}\left[B+\beta^*\right]^TS^*\hat{x}(t).\tag{7.209}$$

Объединим уравнения, описывающие объект и наблюдатель, в уравнение:

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}\dfrac{d}{dt}x(t)\\ \dfrac{d}{dt}\hat{x}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A+\alpha(t) & -[B+\beta(t)]R^{-1}\left[B+\beta^*\right]S^*\\ KC & A+\alpha^*-\left[B+\beta^*\right]R^{-1}\left[B+\beta^*\right]S^*-KC\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\ \hat{x}(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\omega^*(t)\\ Kn^*(t)\end{pmatrix},\\ \begin{pmatrix}x(t_0)\\ \hat{x}(t_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\ \bar{x}^*{}_0\end{pmatrix}.\end{cases}\tag{7.210}$$

Введем обозначения:

$$z^T(t)=\left(x^T(t)\ \hat{x}^T(t)\right).\tag{7.211}$$

Тогда уравнение (7.210) при наихудших значениях параметров объекта, оценки его начального состояния и интенсивности шумов примет вид:

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}z^*(t)=\mathcal{A}^*z^*(t)+\xi^*(t),\\ z^*(t_0)=z_0^*,\end{cases}\tag{7.212}$$

где

$$\mathcal{A}^*=\begin{pmatrix} A+\alpha^* & -\left[B+\beta^*\right]R^{-1}\left[B+\beta^*\right]S^* \\ KC & A+\alpha^*-\left[B+\beta^*\right]R^{-1}\left[B+\beta^*\right]S^*-KC \end{pmatrix},\ \xi^*(t)=\begin{pmatrix} \varpi^*(t) \\ Kn^*(t) \end{pmatrix}. \qquad (7.213)$$

Найдем второй момент процесса $z^*(t)$. Определим:

$$\mu(t)=M\left[z(t)z^T(t)\right]. \qquad (7.214)$$

Тогда уравнение для вторых моментов будет иметь вид

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\mu^*(t)=\mathcal{A}^*\mu^*(t)+\mu^*(t)\left(\mathcal{A}^*\right)^T+\Xi^*, \\ \mu^*(t_0)=\mu_0, \end{cases} \qquad (7.215)$$

где $\Xi^*=\begin{pmatrix} W^* & 0 \\ 0 & KN^*K^T \end{pmatrix}$.

Отметим, что уравнение (7.215) содержит параметры системы, начальные условия и интенсивности шумов, значения которых находятся на границе возможных возмущающих воздействий. Так как матрица вторых моментов $\mu^*(T)$ содержит матрицу $X^*(T)$, то будет выполняться следующее равенство:

$$X^*_{ii}(T)=\mu^*_{ii}(T)=d_{ii},\quad i=\overline{1,l}. \qquad (7.216)$$

Запишем решение уравнения (7.215):

$$\mu^*(T)=\left\{\exp\left[\mathcal{A}^*(T-t_0)\right]\right\}\mu_0+\int_{t_0}^{T}\left\{\exp\left[\mathcal{A}^*(T-\tau)\right]\right\}\Xi^*d\tau,$$

откуда

$$\mu^*(T)=\left\{\exp\left[\mathcal{A}^*(T-t_0)\right]\right\}\left[\mu_0+A^{*-1}\Xi^*\right]-A^{*-1}\Xi^*. \qquad (7.217)$$

Для получения каждого из l интересующих нас диагональных элементов матрицы $\mu^*(T)$ необходимо умножить обе части уравнения (7.217) слева на $\eta_i\in R^{2n}$ и справа на η_i^T, где $\eta_i=(\underbrace{0,..,0}_{i-1},1,\underbrace{0,..,0}_{2n-i})$. После осуществления этой процедуры получаем

$$d_{ii}+\left(A^{*-1}\Xi^*\right)_{ii}=\left\{\exp\left[\mathcal{A}^*(T-t_0)\right]\right\}_{(i)}\left[\mu_0+A^{*-1}\Xi^*\right]^{(i)},\quad i=\overline{1,l}, \qquad (7.218)$$

где нижний индекс (i) означает i–ю строку, а верхний индекс (i) – i-й столбец.

Полученное соотношение (7.218) следует использовать для определения границы $\partial\Omega^*$ множества Ω возможных значений $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\bar{x}_0$, $W(t)$, $N(t)$.

Таким образом, для того чтобы объект (7.200) можно было назвать *d*-робастно стабилизируемым с управлением (7.209), необходимо и достаточно, чтобы для всех $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\bar{x}_0$, $W(t), N(t) \in \Omega$, но $\alpha(t) \neq \alpha^*$, $\beta(t) \neq \beta^*$,
$x_0 \neq \bar{x}_0$, $W(t) \neq W^*$, $N(t) \neq N^*$ выполнялось условие:

$$d_{ii} + \left(A^{*-1}\Xi^*\right)_{ii} \geq \left\{\exp\left[\mathcal{A}^*(T-t_0)\right]\right\}_{(i)} \left[\mu_0 + A^{*-1}\Xi^*\right]^{(i)}, \quad i = \overline{1,l}. \tag{7.219}$$

Замечание

Из (7.219) видно, что изменение интенсивности шума в измерении состояния объекта существенно влияет на качество оцениваемого процесса. При значительных изменениях интенсивности шума в измерениях следует ввести цепи оптимизации наблюдателя по параметрам матрицы $K(t)$. Тогда наблюдатель будет иметь вид

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\hat{x}(t) = \left[A + \alpha^*\right]\hat{x}(t) + \left[B + \beta^*\right]u(t) + [K + k(t)][y(t) - C\,\hat{x}(t)], \\ \hat{x}(t_0) = \bar{x}_0^*, \end{cases} \tag{7.220}$$

где изменение значений параметров матрицы $k(t)$ будет производиться с помощью алгоритма, основанного на использовании модифицированного уравнения Винера–Хопфа (гл. 4):

$$\frac{d}{dt}k\,(t) = M\left[\left\{\frac{\partial C\hat{x}(t)}{\partial k\,(t)}\right\}^T \{y(t_1) - C\hat{x}(t_1)\}\right], \quad t - t_1 = \gamma \neq 0,$$
$$k\,(t_0) = k_{\,0}. \tag{7.221}$$

§ 7.9. Задача *d*-робастного сближения с нестационарным объектом

Пусть задана линейная управляемая система

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{7.222}$$

$$y(t) = Cx(t), \tag{7.223}$$

где $x \in R^n$, $u \in R^r$, $y \in R^m$.

Траектория объекта, с которым должна сблизится система (7.222), (7.223), описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{d}{dt}z(t) = [G + g(t)]z(t) + w(t), \tag{7.224}$$

где $z(t) \in R^m$. Измерения траектории объекта производятся на фоне помех:

$$\gamma(t) = z(t) + n(t). \tag{7.225}$$

В (7.224) и (7.225) $w(t)$ и $n(t)$ – «белые» шумы, с характеристиками:

$$\begin{aligned} &M[w(t)] = 0,\ \ M[n(t)] = 0,\ \ M[w(t)n^T(\tau)] = 0, \\ &M[w(t)w^T(\tau)] = W(t)\delta(t-\tau),\ \ M[n(t)n^T(\tau)] = N(t)\delta(t-\tau). \end{aligned} \tag{7.226}$$

Уравнение объекта (7.224) известно с точностью до некоторого множества Ω возможных значений параметров матрицы $g(t)$, т.е. $g(t) \in \Omega$. Известна область Z_0 возможных начальных значений траектории $z(t_0)$, т.е. $z(t_0) \in Z_0$.

Задача управления объектом (7.222), (7.223) заключается в его сближении с объектом (7.224) за время не большее, чем заданное. Другими словами, требуется построить такое управление, которое в момент времени $t^* \in [t_0, T]$, где $T - t_0$ – возможный интервал времени управления, обеспечит выполнение условия

$$\eta^T P(t^*)\eta \le d. \tag{7.227}$$

Здесь

$$P(t^*) = M[\{y(t^*) - z(t^*)\}\{y(t^*) - z(t^*)\}^T] = M[e(t^*)e^T(t^*)]. \tag{7.228}$$

Задан функционал, оценивающий эффективность управления:

$$J(e,u) = \frac{1}{2} M\,[e^T(T)S\,e(T) + \int\limits_{t_0}^{T} \{e^T(t)Q\,e(t) + u^T(t)R\,u(t)\}dt\,], \tag{7.229}$$

где моменты времени t_0 и T заданы, матрицы Q и R положительно определены, а положительно определенная матрица S определяется решением уравнения Риккати−Лурье

$$SA + A^T S - SBR^{-1}B^T S + Q = 0\,. \tag{7.230}$$

Задание матрицы S в виде решения (7.230) обеспечивает постоянство параметров регулятора во всем интервале управления.

Вначале рассмотрим случай, когда шумы в объекте и измерениях его состояния отсутствуют, т.е. $w(t) = 0,\ n(t) = 0$.

Оптимальное управление при полной информации о параметрах объекта (7.224) и при отсутствии помех в измерении имеет вид [2]:

$$u(t) = -R^{-1}B^T[Sx(t) - H(t)z(t)]\,, \tag{7.231}$$

где матрица $H(t)$ определяется решением дифференциального уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}H(t) + H(t)[G + g(t)] + [A^T - SBR^{-1}B^T\,]H(t) + C^T Q = 0\,, \\ H(T) = C^T S\,. \end{cases} \tag{7.232}$$

Уравнение рассогласования траекторий системы (7.222), (7.223) и объекта (7.224) имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}e(t) = C[A - BR^{-1}B^T S]x(t) - [G + g(t) - CBR^{-1}B^T H(t)]z(t)\,, \\ e(t_0) = Cx(t_0) - z(t_0)\,. \end{cases} \tag{7.233}$$

Матрицы в функционале (7.229) назначены так, что при отсутствии вариаций параметров объекта (7.224), т.е. при $g(t) = 0$, $t \in [t_0, T]$ и отсутствии шумов, выполняется следующее условие:

$$\left|\eta^T e(T)\right| < d\,.$$

При $g(t) \neq 0$, $t \in [t_0, T]$ и отсутствии шумов условие выполнения задачи имеет вид

$$\left|\eta^T\left\{e(t_0)+\int_{t_0}^{T}[A-CBR^{-1}B^TS]x(\tau)\,d\tau-\int_{t_0}^{T}[G+g(t)-CBR^{-1}B^TH(\tau)]z(\tau)\,d\tau\right\}\right|\le d$$

или

$$\int_{t_0}^{T}\left\|\eta^T[G+g(t)-CBR^{-1}B^TH(\tau)]\right\|\left\|z(\tau)\right\|d\tau\le\left|\eta^T\left\{e(t_0)-\int_{t_0}^{T}[A-CBR^{-1}B^TS]x(\tau)\,d\tau\right\}\right|. \quad (7.234)$$

Если g^* – значение матрицы $g(t)\in\Omega$, принадлежащее границе множества Ω, т.е. $g^*\in\partial\Omega$ и $e^*(t_0)$ − максимальное рассогласование траекторий в начальный момент t_0, то при $g(t)=g^*$ и $e(t_0)=e^*(t_0)$ должно выполняется условие

$$\begin{aligned}&\int_{t_0}^{T}\left\|\eta^T[G+g^*-CBR^{-1}B^TH^*(\tau)]\right\|\left\|z^*(\tau)\right\|d\tau=\\&=\left|\eta^T\left\{e(t_0)-\int_{t_0}^{T}[A-CBR^{-1}B^TS]x(\tau)\,d\tau\right\}\right|,\end{aligned} \quad (7.235)$$

где матрица $H^*(t)$ находится как решение уравнения

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}H^*(t)+H^*(t)[G+g^*]+[A^T-SBR^{-1}B^T]H^*(t)+C^TQ=0,\\ H^*(T)=C^TS,\end{cases} \quad (7.236)$$

и

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}z^*(t)=[G+g^*]z^*(t),\\ z^*(t_0)=\partial Z_0.\end{cases} \quad (7.237)$$

Здесь ∂Z_0 − граница значений начальных условий объекта.

Условие (7.235) показывает, какие предельные параметрические вариации в уравнении (7.224) траектории объекта при максимально возможных начальных рассогласованиях траекторий системы и объекта и отсутствии помехи в измерениях, задача будет выполнена при заданных матрицах штрафа в функционале (7.229).

Таким образом, оптимальное управление синтезируется при максимальных отклонениях начальных условий и максимально возможных вариациях параметров уравнения траектории объекта. При этом будет выполняться уравнение (7.235).

Так как период управления значительно больше постоянных времени объекта, то в задаче сближения системы (7.222), (7.223) с объектом (7.224) может использоваться функционал без первого слагаемого, т.е.

$$J(e,u) = \frac{1}{2} M \int_{t_0}^{T} \left\{ e^T(t) Q e(t) + u^T(t) R u(t) \right\} dt .$$

В этом случае матрица H^* будет содержать постоянные элементы и определяться решением алгебраического уравнения

$$H^*[G + g^*] + [A^T - SBR^{-1}B^T] H^* + C^T Q = 0 .$$

Управление для системы будет иметь вид

$$u(t) = -R^{-1}B^T [Sx(t) - H^* z(t)] . \qquad (7.238)$$

Так как измерения траектории объекта производятся на фоне помех, то управление (7.238) оказывается нереализуемым. Для построения реализуемого управления следует использовать оценку $\hat{z}(t)$ траектории объекта (7.224), которую следует искать в виде решения следующего уравнения [4]:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} \hat{z}(t) = [G + \hat{g}(t)] \hat{z}(t) + [K + k(t)][\gamma(t) - \hat{z}(t)], \\ \hat{z}(t_0) = 0 , \end{cases} \qquad (7.239)$$

где матрица K вычисляется по формуле:

$$K = P^*(N^*)^{-1} . \qquad (7.240)$$

Здесь положительно определенная матрица P^* является решением уравнения:

$$GP^* + G^T P^* - P^*(N^*)^{-1} P^* + W^* = 0 , \qquad (7.241)$$

где W^*, N^* – известные интенсивности процессов $w(t)$ и $n(t)$ соответственно.

Изменения интенсивностей этих процессов учитывается алгоритмами перестройки параметров фильтра, т.е. параметров матриц $\hat{g}(t)$ и $k(t)$. Эти алгоритмы организуются с помощью алгоритмов, в основе которых положено модифицированное уравнение Винера−Хопфа (глава 2):

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\hat{a}(t) = M\left[\left\{\dfrac{\partial \hat{z}(t)}{\partial \hat{a}(t)}\right\}^T \left\{ \gamma(t) - \hat{z}(t) \right\}\right], \\ \hat{a}(t_0) = 0, \end{cases} \tag{7.242}$$

$$\hat{a}^T(t) = \left(\hat{g}^T(t)\ \ k^T(t)\right).$$

Так как система (7.222), (7.223) описывается детерминированными уравнениями, то для построения наблюдателя для системы, вырабатывающего оценку процесса $\hat{x}(t)$ по измерениям $y(t)$, можно использовать наблюдатель минимальной размерности (наблюдатель Луенбергера), т.е. находить $n-m$ оценок состояния системы (7.222).

Управление (7.238) с учетом построенных оценок состояния системы и объекта будет иметь вид:

$$u(t) = -R^{-1}B^T[S\hat{x}(t) - K(t)\hat{z}(t)]. \tag{7.243}$$

§ 7.10. Управление выводом и сопровождением по нестационарной траектории

Задана линейная наблюдаемая и управляемая система

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + Bu(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{7.244}$$

$$A(t) = A + a(t),\ \underline{a_{ij}} \le a_{ij}(t) \le \overline{a_{ij}},\ i, j = 1,..,n,\ x \in R^n;\ u \in R^r.$$

Пусть вектор $z(t)$ − желаемый выход системы, $z \in R^n$;

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}z(t) = G(t)z(t) + w(t), \\ z(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{7.245}$$

$w(t)$ − «белый» шум, $M[w(t)]=0$, интенсивность W, $z\in R^n$;

ошибка $e(t)=x(t)-z(t)$,

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}e(t)=\dfrac{d}{dt}x(t)-\dfrac{d}{dt}z(t)=A(t)x(t)+Bu(t)-G(t)z(t)-w(t),\\ e(t_0)=x_0-z_0.\end{cases} \tag{7.246}$$

Пусть $G(t)=A+g(t),\ \underline{g_{ij}}\le g_{ij}(t)\le\overline{g_{ij}},\ i,j=1,..,n$, тогда

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}e(t)=Ax(t)+a(t)x(t)+Bu(t)-A(t)z(t)-w(t),\\ e(t_0)=x_0-z_0.\end{cases} \tag{7.247}$$

или

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}e(t)=Ae(t)+Bu(t)+\left[a(t)x(t)-g(t)z(t)\right]-w(t),\\ e(t_0)=e_0.\end{cases} \tag{7.248}$$

Пусть

$$N(t)v(t)=a(t)x(t)-g(t)z(t), \tag{7.249}$$

тогда

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}e(t)=Ae(t)+Bu(t)+N(t)v(t)-w(t),\\ e(t_0)=e_0.\end{cases} \tag{7.250}$$

Введем функционал качества

$$J(e,u,v)=$$
$$=M\left[\frac{1}{2}e^T(T)Fe(T)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left\{e^T(t)Q(t)e(t)+u^T(t)R(t)u(t)-v^T(t)P(t)v(t)\right\}dt\right]. \tag{7.251}$$

где матрицы F и $Q(t)$ положительно полуопределены, матрица $R(t)$ – положительно определена, *u(t)* – не ограничено, *T* – задано.

Так как $w(t)$-белый шум, то

$$u(t)=-R^{-1}(t)B^T(t)K(t)e(t), \tag{7.252}$$

$$v(t)=-P^{-1}(t)N^T(t)K(t)e(t), \tag{7.253}$$

где $K(t)$ есть решение уравнения

$$\begin{cases}\dot{K}(t)+K(t)A+A^TK(t)-K(t)[BR^{-1}B^T-NP^{-1}N^T]K(t)+Q=0,\\ K(T)=F.\end{cases} \tag{7.254}$$

Учитывая (7.249), имеем

$$v(t) = N^{-1}\left[a(t)x(t) - g(t)z(t)\right], \tag{7.255}$$

сравнивая (7.255) и (7.249), получим

$$v(t) = -P^{-1}(t)N^{T}(t)K(t)e(t) = N^{-1}[a(t)x(t) - g(t)z(t)], \tag{7.256}$$

тогда (7.250) будет иметь вид

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}e(t) = Ae(t) - BR^{-1}B^{T}K(t)e(t) + [a(t)x(t) - g(t)z(t)] - w(t), \\ e(t_0) = e_0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}e(t) = [A - BR^{-1}B^{T}K(t)]e(t) + [a(t)x(t) - g(t)z(t)] - w(t), \\ e(t_0) = e_0. \end{cases} \tag{7.257}$$

Пусть a^{*} и g^{*} − "наихудшие" значения матриц $a(t)$ и $g(t)$ с позиций функционала (7.251). Для квазистационарного режима, т.е. при $F = 0$ и $T - t_0$ − достаточно большом (по сравнению с постоянными системы (7.245), будем иметь

$$\hat{K}(t)A^{*} + (A^{*})^{T}\hat{K}(t) - \hat{K}(t)[BR^{-1}B^{T} - NP^{-1}N^{T}]\hat{K}(t) + Q = 0, \tag{7.258}$$

где A^{*} - матрица $A(t)$, содержащая "наихудшие" значения параметров. Отсюда матрица $[BR^{-1}B^{T} - NP^{-1}N^{T}]$ должна быть (по крайней мере) положительно полуопределенной.

Уравнение (7.257) с "наихудшими" значениями параметров

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}e(t) = [A - BR^{-1}B^{T}\hat{K}(t)]e(t) + [a^{*}x(t) - g^{*}z(t)] - w(t), \\ e(t_0) = e_0 \end{cases} \tag{7.259}$$

Цель управления

$$\left|\eta, e(T_1)\right| \le d \text{, здесь } T_1 << T, d > 0. \tag{7.260}$$

Пусть $\Phi(t,\tau)$ − фундаментальная матрица решений уравнения (7.259), тогда

$$e(T_1) = \Phi(T_1, t_0)e_0 + \int_{t_0}^{T_1} \Phi(T_1, \tau)[a^{*}x(\tau) - g^{*}z(\tau)]\,d\tau, \tag{7.261}$$

тогда (7.260) с учетом (7.261) будет иметь вид

$$\left|\eta^T e(T_1)\right| = \left|\eta^T \Phi(T_1,t_0)e_0 + \eta^T \int_{t_0}^{T_1} \Phi(T_1,\tau)[a*x(\tau) - g*z(\tau)]d\tau\right| \le d\,, \tag{7.262}$$

из (7.262) имеем

$$\left|\eta^T \int_{t_0}^{T_1} \Phi(T_1,\tau)[a*x(\tau) - g*z(\tau)]d\tau\right| \le d + \eta^T \Phi(T_1,t_0)e_0\,. \tag{7.263}$$

Так как матрица $\left\lfloor A - BR^{-1}B^T\hat{K}\right\rfloor$ не зависит от t, то

$$\Phi(T_1-\tau) = \{\exp[A - BR^{-1}B^T\hat{K}(t)]\}[T_1-\tau]\text{, тогда} \tag{7.264}$$

$$\left|\ \eta^T\left\{-\int_{t_0}^{T_1}\exp\{A(T_1-\tau)\}BR^{-1}B^TK(\tau)e(\tau)d\tau\right\} + \eta^T\int_{t_0}^{T_1}\exp\{A(T_1-\tau)\}[a*x(\tau)-g*z(\tau)]d\tau + \right.$$

$$\left. + \exp\{A(T_1-t_0)\}e_0\ \right| \le d,$$

откуда

$$\left|\eta^T\left\{\int_{t_0}^{T_1}\exp\{A(T_1-\tau)\}BR^{-1}B^TK(\tau)e(\tau)d\tau\right\}\right| \ge$$

$$\ge \left|\eta^T\exp\{A(T_1-\tau)\}e_0 + \eta^T\int_{t_0}^{T_1}\exp\{A(T_1-\tau)\}[a*x(\tau)-g*z(\tau)]d\tau\right| - d.$$

Это есть условие выбора матрицы R, при назначении которой будет выполняться условие успешного d- робастного терминального управления.

Глава 8. Робастное управление нелинейными неопределенными объектами

§ 8.1. Постановка задачи

Объект управления

Пусть нелинейный нестационарный управляемый объект описывается векторным дифференциальным включением

$$\frac{d}{dt}x(t) \subset f(x,u,\alpha(t)),\ x(t_0) = x_0,\ \ x \in R^n,\ t \in [t_0,T]. \tag{8.1}$$

Здесь:

- $\alpha\ (t) = \alpha(t_0,T) \in \Omega$ или $\alpha\ (t,x(t)) \in \Omega,\ t \in [t_0,T]\ A \in R^k$;
- $D-$ область (t,x)-пространства;
- D_α − область (t,x,α)-пространства, $D_\alpha : (t,x) \in D,\ \alpha \in \Omega$;
- $f \in (C, Lip)$ в D_α.

Определим одну из возможных траекторий $\alpha^*\ (t) = \alpha^*\ (t_0,T) \in \Omega$ изменения параметров объекта (8.1).

Если:

- f измерима на множестве D_α при любых фиксированных α и x;
- f непрерывна по x при любых фиксированных t и α;
- при фиксированном t функция f непрерывна по совокупности переменных (x,α),

то существует функция $m\left(t\right)$, интегрируемая по Лебегу на интервале $[t_0,T]$, такая, что если $\left| f(x,u,\alpha^*(t)) \right| = m\ (t)$, то

$$\left| f(x,u,\alpha(t)) \right| \le m\ (t),\ \alpha(t) \in \Omega,\ t \in [t_0,T]. \tag{8.2}$$

Таким образом, траекторию изменения параметров объекта $\alpha^*\ (t) = \alpha^*\ (t_0,T) \in \Omega$ можно назвать «наихудшей».

Объект при $\alpha^*(t_0,T) \in \Omega$ принимает вполне определенное описание

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x,u,\alpha^*(t)),\ \alpha^*(t) = \alpha^*(t_0,T) \in \Omega. \tag{8.3}$$

Будем искать управление $u(t) \in U$ как функцию состояния объекта (8.3):

$$u(t) = Kx(t). \tag{8.4}$$

Тогда правая часть уравнения (8.3) с управлением (8.4) будет иметь вид $f(x, \mathrm{u}, \alpha^*(t)) = f*(x, \alpha^*(t))$.

Предположим:

1) $f_i^*(x, \alpha^*(t))$, $i = 1, ..., n, -$ элементы вектора $f^*(x, \alpha^*(t))$ непрерывны относительно $x(t)$ и t;

2) $\dfrac{\partial f_i^*(x, \alpha^*(t))}{\partial x_k(t)}, \dfrac{\partial f_i^*(x, \alpha^*(t))}{\partial t}$ непрерывны по $x(t)$ и t для $i, k = 1, ..., n$.

Эти предположения [11] позволяют представить исходное уравнение объекта в окрестности регулярной точки x^* статической характеристики в виде

$$\frac{d}{dt}x(t) = \left[A + \alpha^*\right]x(t) + \left[B + \beta^*\right]Kx(t) + \Im(t, x), \tag{8.5}$$

где $\left[A + \alpha^*\right]$ и $\left[B + \beta^*\right]$ - постоянные матрицы,

$\Im(t, x) \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$ удовлетворяет условию $\Im_i(t, 0) = 0$ и

$$\left|\,\Im_i(t, x) - \Im_i(t, y)\,\right| \le g(t)\sum_{i=1}^{n}\left|\,x_i(t) - y_i(t)\,\right|$$

или более общему:

$$\left|\,\Im_i(t, x)\,\right| \le g(t)\sum_{i=1}^{n}\left|\,x_i(t)\,\right|. \tag{8.6}$$

Если $g(t)$ – непрерывная, ограниченная для $t > t_0$, то всякое решение подобной системы определено для всех значений $t \ge t_0$.

Предположим, что существует некоторая положительно определенная матрица P такая, что

$$\Im^T(t, x)\{\Im(t, x) - Px(t)\} < 0 \text{ при } x(t) \ne 0. \tag{8.7}$$

Это предположение обеспечивает почти линейным системам вида (8.5) с действительными отрицательными корнями характеристического уравнения выполнение условия устойчивости по Ляпунову [11].

Пусть начальное состояние объекта принадлежит области замыкания множества начальных состояний $x_0^* \in \partial X_0$ при которых условия выполнения поставленной задачи являются «наихудшими». Тогда, при условии успешного выполнения задачи управления, матрицы $\alpha(x,t)$, $\beta(x,t)$ и вектор $\Im(x,t)$ будут иметь интервальный характер неопределенности.

Пусть в Ω-ножестве возможных траекторий $\alpha(x,t)$ и $\beta(x,t)$, т.е. $\alpha(x,t), \beta(x,t) \in \Omega$, имеются α^*, β^* – «наихудшие» значения параметров матриц, лежащих на границе замыкания множества возможных значений параметрических возмущений и начальных состояний, т.е. $\alpha^*, \beta^* \in \partial\Omega$, при которых удается выполнить поставленную задачу управления объектом

$$\frac{d}{dt}z(t) = \left[A + \alpha^*\right]z(t) + \left[B_1 + \beta^*\right]Kz(t) + \Im(z, a^*, \beta^*), \quad z(t_0) = x_0^* \in X_0. \tag{8.8}$$

Очевидно, что решение уравнения (8.8) при успешном выполнении задачи управления будет являться мажорантой для всех возможных решений уравнения (8.5) при $\alpha(x,t), \beta(x,t) \in \Omega$, т.е.

$$\begin{aligned} &\left|\left[A + \alpha^*\right]x(t) + \left[B_1 + \beta^*\right]K\,x(t) + \Im(x, a^*, \beta^*)\right| \geq \\ &\geq \left|\left[A + \alpha(x,t)\right]x(t) + \left[B_1 + \beta(x,t)\right]K\,x(t) + \Im(x, a(x,t), \beta(x,t))\right|. \end{aligned} \tag{8.9}$$

Задача управления и синтез закона управления

Синтез закона управления для объектов из множества (8.1) с заданным условием на правом конце

$$\left|\eta^T x(T)\right| \leq d > 0 \tag{8.10}$$

будем осуществлять с использованием линейной модели

$$\frac{d}{dt}z_M(t) = \left[A + \alpha^*\right]z_M(t) + \left[B_1 + \beta^*\right]u_M(t), \quad z_M(t_0) = x_0^* \in X_0 \tag{8.11}$$

и функционала

$$J(z,u)=\frac{1}{2}\left[\ z_M^T(T)Fz_M(T)+\int_0^{\mathrm{T}}\left\{z_M^T(t)Q\,z_M(t)+u_M^T(t)Ru_M(t)\right\}dt\ \right], \qquad (8.12)$$

где T – время окончания переходного процесса, задано.

Если назначить матрицу F в первом слагаемом функционала (8.12) в виде $F=S$, где положительно определенная матрица S есть решение уравнения Риккати–Лурье

$$S\left[A+\alpha^*\right]+\left[A+\alpha^*\right]^T S-S\left[B_1+\beta^*\right]R^{-1}\left[B_1+\beta^*\right]^T S+Q=0, \qquad (8.13)$$

то оптимальное управление для модели (8.11) с функционалом (8.12) будет иметь вид [3]:

$$u^*(t)=-R^{-1}\left[B_1+\beta^*\right]S\,z_M(t)\,. \qquad (8.14)$$

Отметим, что в этом случае матрица $\mathrm{S(t)=const,\ \ t\in[0,T]}$.

Если принять, что $\underline{a}\le\alpha(t_0,T)\le\overline{a}$ и $\underline{\beta}\le\beta(t\ ,T)\le\overline{\beta}$ и, учитывая, что положительно определенная матрица S, являющаяся решением уравнений (8.12), принимает наибольшие значения, обеспечивая этим отрицательность значений корней характеристического уравнения системы, при $\overline{a}\in\partial\Omega$ и $\underline{\beta}\in\partial\Omega$, то «наихудшими» значениями матриц параметрических возмущений будут $\alpha^*=\overline{a}$ и $\beta^*=\underline{\beta}$.

Нетрудно убедиться, что синтезированное управление (8.13) обеспечивает отрицательность вещественных частей корней характеристического уравнения системы первого приближения

$$\frac{d}{dt}z_M(t)=\mathcal{T}\,z_M(t)\ , \qquad (8.15)$$

где $\mathcal{T}=A+\alpha^*-\left[B_1+\beta^*\right]R^{-1}\left[B_1+\beta^*\right]^{\mathrm{T}}S$, (8.16)

что является необходимым и достаточным условиями ее асимптотической устойчивости [10].

Учитывая (8.4), используем структуру управления (8.13) для построения управления объектом (8.8):

$$u(t) = -R^{-1}\left[B_1 + \beta^*\right] S\, z(t)\,. \qquad (8.17)$$

Тогда система (8.8) будет иметь вид

$$\frac{d}{dt} z(t) = \mathcal{T}\, z(t) + \Im(z,t),\; z(t_0) = x_0^*. \qquad (8.18)$$

В последующем изложении результатов анализа нелинейных систем вида (8.18) будет использоваться теорема о преобразовании матриц [2, 15]. Согласно этой теореме можно найти такую постоянную обратимую матрицу P, что $\mathcal{T} = P\Lambda P^{-1}$, где диагональная матрица $\Lambda -$ матрица собственных значений матрицы $\mathcal{T}$.

Подстановка $z_1(t) = Pz(t)$ дает

$$\frac{d}{dt} z_1(t) = \Lambda\, z_1(t) + \Im^*(z_1,t),\; z_1(t_0) = P\, x_0^*, \qquad (8.19)$$

где $\Im^*(z_1,t) = P\,\Im(z_1,t)$.

Важно, что функция $\Im^*(z_1,t)$ удовлетворяет тем же условиям, что и $\Im(z,t)$ [5].

Умножая обе части уравнения (8.15) слева на матрицу P^{-1}, получим эквивалентную запись исходного уравнения (8.14)

$$\frac{d}{dt} z(t) = P^{-1}\Lambda P\, z(t) + \Im(z,t),\; z(t_0) = x_0^*. \qquad (8.20)$$

Если собственные значения матрицы $\mathcal{T}$ $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n -$ действительные различные числа, то

$$z(t) = P^{-1}\left\{\exp\Lambda(t-t_0)\right\} P z(t_0) + P^{-1}\int_{t_0}^{t}\left\{\exp\Lambda(t-\tau)\right\} P\,\Im(z,\tau)\,d\tau\,. \qquad (8.21)$$

Следует отметить, что использование регулятора вида (8.14), синтезированного на линейной модели (8.11), для нелинейного объекта (8.8) не изменяет качественной картины расположения траекторий системы (8.18) в начале координат [11].

В последующих разделах главы будут получены условия, при которых управление (8.17) будет обеспечивать стабилизацию и d-робастное управление неопределенным объектом (8.7).

§ 8.2. Необходимые условия существования стабилизирующего управления

Найдем необходимые условия существования стабилизирующего управления вида (8.17) для объекта (8.8). Отметим, что при сделанных предположениях о нелинейной вектор-функции $\Im(z,t)$ рассматриваемый объект с управлением вида (8.17) имеет устойчивое состояние покоя при $z=0$.

Следующий результат Перрона дает простой пример асимптотической устойчивости для решений $z(t)$, начинающихся вблизи точки покоя.

Теорема 8.2.1

Пусть дана система

$$\frac{d}{dt}z(t) = \mathcal{T}\, z(t) + \Im(z,t),$$

где $\mathcal{T}$ – действительная постоянная матрица, все характеристические корни которой имеют отрицательные действительные части. Пусть вектор $\Im(z,t)$ действителен, непрерывен для малых $|z(t)|$ и $t \geq 0$ и

$$\Im(z,t) = 0(|z|) \quad (|z| \to 0)$$

равномерно по t, $t \geq 0$. Тогда решение, равное тождественно нулю, асимптотически устойчиво.

Условия, что матрица $\mathcal{T}$ и вектор $\Im(z,t)$ действительны и что $\Im(z,t)$ непрерывен, могут быть заменены любыми другими условиями, обеспечивающими локальное существование решения исходной системы при малых $|z(t)|$ и $t \geq 0$ [9].

Для рассматриваемой неопределенной системы справедлива следующая теорема.

Теорема 8.2.2

Решение $x=0$ является устойчивым решением уравнения

$$\frac{d}{dt}x(t)=\left[A+\alpha(x,t)\right]x(t)+\left[B_1+\beta(x,t)\right]Kx(t)+\Im(x,a(x,t),\beta(x,t)),$$

$$x(t_0)\in X\,,\ \alpha(x,t),\,\beta(x,t)\in\Omega\,,$$

если решение $z=0$ является устойчивым решением уравнения

$$\frac{d}{dt}z(t)=\left[A+\alpha^*\right]z(t)+\left[B_1+\beta^*\right]Kz(t)+\Im(z,a^*,\beta^*)\,,$$

$$z(t_0)=x(t_0)\,,$$

и

а) $\alpha^*,\,\beta^*\in\Omega$ таковы, что

$$\left|\left[A+\alpha^*\right]x(t)+\left[B_1+\beta^*\right]K\,x(t)+\Im(x,a^*,\beta^*)\right|\geq$$
$$\geq\left|\left[A+\alpha(x,t)\right]x(t)+\left[B_1+\beta(x,t)\right]K\,x(t)+\Im(x,a(x,t),\beta(x,t))\right|,$$

б) $K=-R^{-1}\left[B_1+\beta^*\right]S$,

где $S\left[\mathrm{A}+\alpha^*\right]+\left[\mathrm{A}+\alpha^*\right]^T S-S\left[B_1+\beta^*\right]R^{-1}\left[B_1+\beta^*\right]^T S+Q=0,\ Q,R>0$;

в) $\Im(z,a^*,\beta^*)=0$ при $x(0)=0$;

г) существует положительно определенная матрица P такая, что $\Im^T(z,a^*,\beta^*)\left\{\Im(z,a^*,\beta^*))-Pz(t)\right\}<0$ при $z(t)\neq 0$.

Доказательство теоремы основывается на способе определения функции $z(t)$ (8.9) как мажоранты процесса $x(t)$, синтезе оптимального управления по первому приближению и теореме 8.2.1.

Теперь, когда показано, что при выбранном управлении вида (8.17) неопределенная система имеет «точку покоя», найдем условия асимптотической устойчивости при произвольных $\left|z(t_0)\right|=\left|z(0)\right|\neq 0$. Другими словами, найдем условия асимптотического перехода системы (8.18) из заданного начального состояния в состояние покоя. Очевидно, что эти условия должны предъявить дополнительные требования к нелинейной вектор-функции $\Im(z,a^*,\beta^*,t)=\Im(z,t)$.

Решение уравнения (8.18) имеет вид

$$z(T)=\left[\exp\left(\mathcal{J}T\right)\right]\left\{z(0)+\int_0^T\left[\exp\left(-\mathcal{J}\tau\right)\ \right]\Im(z,\tau)\,d\tau\right\}. \tag{8.22}$$

Из уравнения (8.22) следует, что

$$\left\|z(T)\right\|=\left\|\left[\exp\left(\mathcal{J}T\right)\right]\left\{z(0)+\int_0^T\left[\exp\left(-\mathcal{J}\tau\right)\ \right]\Im(z,\tau)\,d\tau\right\}\right\|.$$

Если управление (8.17) стабилизирует объект (8.8), то при $T\to\infty$ должно выполняться условие:

$$\left\|z(0)+\int_0^T\left\{\exp(-\mathcal{J}\ \tau)\right\}\Im(z,\tau)\,d\tau\right\|\to 0\ \textit{при}\ T\to\infty$$

или

$$\left\|z(0)\right\|-\left\|\int_0^T\left\{\exp(-\mathcal{J}\ \tau)\right\}\Im(z,\tau)\,d\tau\right\|\to 0\ \textit{при}\ T\to\infty\,.$$

Так как первое слагаемое имеет конечное значение, то и второе слагаемое при управлении, стабилизируюшим объект, должно иметь конечное значение при $T\to\infty$. Учитывая, что

$$\left\|\int_0^T\left\{\exp(-\mathcal{J}\ \tau)\right\}\Im(z,\tau)\,d\tau\right\|\le\int_0^T\left\|\left\{\exp(-\mathcal{J}\ \tau)\right\}\Im(z,\tau)\,d\tau\right\|, \tag{8.23}$$

последнее выполняется в том случае, если подынтегральное выражение в правой части неравенства (8.23) будет убывать. Потребуем, чтобы положительно определенное подынтегральное выражение убывало монотонно.

Отметим, что запас устойчивости, определяемый выполнением этого требования, сужает область возможных значений начальных условий, при которых сохраняется устойчивость системы. Вполне уместно более узкий класс систем, в котором выполняется предъявляемое требование, отнести к системам, обладающим свойством «сверхустойчивости» («сверхстабилизируемым») [13].

Найдем условия, которые определят это свойство. Рассмотрим правую часть неравенства (8.23). Так как действительные части характеристических корней матрицы $\mathcal{T}$ отрицательны, то существуют постоянные K и ρ, такие, что $\|\exp \mathcal{T} t\| \le Ke^{-\rho t}$, $t \ge 0$. Тогда

$$\int_0^t \left\| \{\exp \mathcal{T}(t-\tau)\} \Im(z,\tau)\, d\tau \right\| \le Ke^{-\rho t} \int_0^t e^{\rho \tau} \|\Im(z,\tau)\| d\tau .$$

Если начальные условия системы таковы, что $z(t) \to 0$ при $t \to \infty$, т.е. система устойчива, то $\|\Im(z,0)\| > \|\Im(z,t)\|$, $t > 0$. Следовательно,

$$\int_0^t \left\| \{\exp \mathcal{T}(t-\tau)\} \Im(z,\tau)\, d\tau \right\| \le Ke^{-\rho t} \int_0^t e^{\rho \tau} \|\Im(z,\tau)\| d\tau$$

или

$$\int_0^t \left\| \{\exp \mathcal{T}(t-\tau)\} \Im(z,\tau)\, d\tau \right\| \le \frac{1}{\rho} K \|\Im(z,0)\| \left[1 - e^{-\rho t}\right] .$$

Что касается подынтегрального выражения, то условие сверхустойчивости, в том понимании, которое было введено выше, имеет вид:

$$\left\| \{\exp \mathcal{T} t\} \Im(z,t) \right\| \le Ke^{-\rho t} \|\Im(z,t)\| . \tag{8.24}$$

При этом рост интегральной составляющей решения уравнения (8.22) не превосходит некоторого вполне определенного значения, т.е.

$$\int_0^t \left\| \{\exp(-\mathcal{T}\ \tau)\} \Im(z,\tau)\, d\tau \right\| \le \frac{1}{\rho} K \|\Im(z,0)\| \left[1 - e^{-\rho t}\right]. \tag{8.25}$$

Определение 8.2.1

Назовем систему

$$\frac{d}{dt} z(t) = \mathcal{T}\, z(t) + \Im(z,t),\ z \in R^n ,$$

у которой действительные части характеристических корней матрицы $\mathcal{T}$ отрицательны, сверхустойчивой, если выполняется условие

$$\int_0^t \left\| \{\exp \mathcal{T}(t-\tau)\} \Im(z,\tau)\, d\tau \right\| \le Ke^{-\rho t} \int_0^t e^{\rho \tau} \|\Im(z,\tau)\| d\tau,\ t \ge 0 .$$

где постоянные K и ρ такие, что $\|\exp \mathcal{T} t\| \leq K e^{-\rho t},\ t \geq 0$.

Учитывая, что матрица $\mathcal{T}$ – действительная постоянная матрица, все характеристические корни $\lambda_i, i=1,2,...,n$ которой отрицательны, можно определить постоянные K и ρ через характеристики системы, а именно в виде: $K=n$, где $n-$ порядок системы и $\rho=\varphi(\overline{\mu},\underline{\mu})$, где $\overline{\mu}$ есть $\max(\operatorname{Re}\lambda_i)=-\overline{\mu}<0$ и $\underline{\mu}$ есть $\min(\operatorname{Re}\lambda_i)=-\underline{\mu}<0$.

Вернемся к условию (8.23). Оно будет выполняться, если производная по времени от положительно определенной формы

$$\|\{\exp(-\mathcal{T} t)\}\Im(z,t))\|>0,\ x\neq 0 \tag{8.26}$$

будет отрицательной, т.е. условие монотонного убывания подынтегрального выражения (8.23) имеет вид

$$\|\mathcal{T}\{\exp[-\mathcal{T} t]\}\Im(z,t)\|>\left\|\{\exp[-\mathcal{T} t]\}\left\{\frac{d\,\Im(z,t)}{d\,t}\right\}\right\|,\ z\neq 0. \tag{8.27}$$

В начальный момент при $t_0=0$ неравенство (8.27) принимает вид

$$\|\mathcal{T}\ \Im(z,t)\|>\left\|\frac{d\,\Im(z,t)}{d\,t}\right\|,\ z(t)\neq 0\ \ \textit{при}\ t=0, \tag{8.28}$$

или, учитывая, что $\|\mathcal{T}\,\Im(z,t)\|\geq\|\mathcal{T}\|\|\Im(z,t)\|$,

$$\frac{\left\|\frac{d\,\Im(z,t)}{d\,t}\right\|}{\|\Im(z,t)\|}<\|\mathcal{T}\|,\ \ z(t)\neq 0\ \ \textit{при}\ t=0. \tag{8.29}$$

Из неравенств (8.28), (8.29), определяющих условия монотонной асимптотической сходимости подынтегрального выражения в правой части неравенства (8.23), при заданной матрице $\mathcal{T}$ и известной нелинейности $\Im(x,t)$ можно определить условия для начального состояния объекта, при которых стабилизирующее управление вида (8.17) будет существовать.

Используя свойство единственности решений рассматриваемых дифференциальных уравнений, сформулируем следующее утверждение.

Утверждение 8.2.1

Неравенство

$$\left\| \mathcal{T} \{\exp\,[-\mathcal{T}\, t]\,\} \Im(z,t) \right\| \geq \left\| \{\exp\,[-\mathcal{T}\, t]\,\} \left\{ \frac{d\,\Im(z,t)}{d\,t} \right\} \right\|$$

выполняется в любой момент переходного процесса системы

$$\frac{d}{dt} z(t) = \mathcal{T}\, z(t) + \Im(\mathrm{z},\mathrm{t})\,,$$

если оно выполнялось для начальных условий $z(t_0) \in X_0$.

Действительно, пусть $z(t)-$ траектория эволюции модели объекта (8.8), находящегося под воздействием управления (8.17), переводящего объект из начального состояния $z(t_0) = x(0)$ в область заданных терминальных значений $\Psi(z,T)$. Тогда любое промежуточное значение состояния объекта в момент $0 < t_1 \leq T$ можно рассматривать как начальное состояние объекта $z(t_1)$, находящегося под воздействием управления (8.17) и переводящего объект из состояния $z(t_1)$ в заданную область терминальных значений $\Psi(z,T)$. Для этого момента будет справедливо неравенство

$$\left\| \mathcal{T}\ \Im(z,t) \right\| > \left\| \frac{d\,\Im(z,t)}{d\,t} \right\|,\ z(t) \neq 0,\ \textit{при}\ t = t_1\,.$$

Только при $z = 0$ в силу того, что $\Im(0,t) = 0$, будет выполняться

$$\left\| \mathcal{T} \{\exp\,[-\mathcal{T}\, t]\,\} \Im(z,t) \right\| = \left\| \{\exp\,[-\mathcal{T}\, t]\,\} \left\{ \frac{d\,\Im(z,t)}{d\,t} \right\} \right\|,\ \ z = 0\,.$$

Отметим, что матрица $\mathcal{T} = A + \alpha^* - \left[B_1 + \beta^*\right] R^{-1} \left[B_1 + \beta^*\right]^{\mathrm{T}} S$, содержащая постоянные параметры, зависит от ряда параметров, существенным из которых для выполнения условий задачи стабилизации системы (8.18) является положительно определенная матрица S, которая является решением уравнения (8.13). Можно сказать, что $S = S(Q,R)$. Назначая соответствующим образом матрицы Q и R, при заданном начальном состоянии объекта $z(0)$ и известной нелинейной функции $\Im(z,t)$ можно получить решение уравнения (8.18) таким, что будет выполняться при $z(t)\neq 0,\ t\geq 0$ условие

$$\left\|\frac{d\,\Im(z,t)}{d\,t}\right\| < \left\| A+\alpha^{*} - \left[B_1+\beta^{*}\right]R^{-1}\left[B_1+\beta^{*}\right]^{\mathrm{T}} S(\mathrm{Q},\mathrm{R})\ \Im(z,t)\right\| . \qquad (8.30)$$

Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 8.2.3

Пусть мажоранта $z(t)$ нелинейного нестационарного объекта

$$\frac{d}{dt}x(t) = [A+\alpha(x,t)]x(t) + [B_1+\beta(x,t)]u(t) + \Im\,(x,t),$$

где $\alpha(x,\mathrm{t}),\ \beta(x,t)\in\Omega$, , $\Omega-$ замкнутое ограниченное множество возможных траекторий изменений параметров объекта, описывается уравнением

$$\frac{d}{dt}z(t) = \left[A+\alpha^{*}\right]z(t) + \left[B_1+\beta^{*}\right]\mathrm{u}(t) + \Im\,(z,t)\,,\ \alpha^{*},\ \beta^{*}\in\partial\Omega\,.$$

Тогда управление объектом

$$u(t) = -R^{-1}\left[B_1+\beta^{*}\right]S\,x(t)\,,$$

где

$$S\left[\mathrm{A}+\alpha^{*}\right]+\left[\mathrm{A}+\alpha^{*}\right]^{T}S - S\left[B_1+\beta^{*}\right]R^{-1}\left[B_1+\beta^{*}\right]^{T}S + Q = 0\,,$$

является стабилизирующим, т.е. $x(t)\to 0$ при $t\to\infty$, если начальные условия, образующие область начальных условий системы «объект-регулятор», отвечают условию

$$\left\|\frac{d\,\Im(x,t)}{d\,t}\right\| < \|\,\mathcal{T}\,\Im(x,t)\,\|,\ x(t)\neq 0,\ t=0\,.$$

Достаточно часто норма ‖ ‖ более удобна, чем длина ‖ ‖. Если $g(t)=\left\{\exp\,[-\mathcal{T}\,t]\right\}\Im(z,t)$ при $z\neq 0$, то производная существует и

$$\left\|\frac{d}{dt}g\,(t)\right\| \leq \left|\frac{d}{dt}g\,(t)\right| .$$

Пусть $r(t)=|g(t)|$. Если функции $g(t)$ и $r(t)$ интегрируемы на интервале $[0,T]$, то $\left|\int_0^T g(t)\,dt\right| \le \int_0^T r(t)\,dt$, где $\int_0^T g(t)\,dt$ − вектор, i-я компонента которого есть $\int_0^T g_i(t)\,dt$.

Запишем $r(t)=|g(t)|$ в виде

$$r(t)=\sum_{i=1}^{n} g_i(t)\ sign\ g_i(t).$$

Если ни одна из компонент $g(t)$ не обращается в нуль, то производная существует и $\frac{d}{dt}r(t) \le \left|\frac{d}{dt}g(t)\right|$.

В любом случае (обращается ли некоторая компонента $g(t)$ в нуль или нет) всегда справедливо [9], что если $g^{'}(t)$ существует, то левая и правая производные $r_{-}^{'}(t)$ и $r_{+}^{'}(t)$ существуют и удовлетворяют неравенству

$$\left|\frac{d}{dt}r_{\pm}(t)\right| \le \left|\frac{d}{dt}g(t)\right|.$$

Вернемся к уравнению (8.19)

$$\frac{d}{dt}z_1(t)=\Lambda z_1(t)+\Im^*(z_1,t),\ z_1(t_0)=P x_0^*.$$

Рассуждая подобно тому, как это было при получении условий монотонного уменьшения интегральной составляющей решения (8.22), получим условие

$$\left\|\Lambda\{\exp[-\Lambda t]\}\Im^*(z_1,t)\right\| > \left\|\{\exp[-\Lambda t]\}\left\{\frac{d\,\Im^*(z_1,t)}{d\,t}\right\}\right\|,\ z_1 \ne 0.$$

Назначая $g(t)$ в виде

$$\|g(t)\|=\left\|\{\exp[-\Lambda t]\}\Im^*(z_1,t)\right\|,$$

будем иметь

$$\|g(t)\| \le \sum_{i=1}^{n} \{\exp[-\lambda_i t]\} \left|\Im^*(z_1,t)\right|.$$

Тогда условие монотонного убывания нормы подынтегральной функции решения дифференциального уравнения (8.19) будет иметь вид

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\exp[-\lambda_i t] \left\{ -\lambda_i \Im^*_i(z_1,t) + \frac{d}{dt} \Im^*_i(z_1,t) \right\} \right] sign\, \Im^*_i(z_1,t) < 0,\ z_1(t) \ne 0. \qquad (8.31)$$

Учитывая сформулированное выше положение, отметим, что если условие (8.31) выполняется в момент начала переходного процесса, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} \left[-\lambda_i \Im^*_i(z_1,t) + \frac{d}{dt} \Im_i(z,t) \right] sign\, \Im^*_i(z_1,t) < 0,\ z_1(t) \ne 0,\ t = 0, \qquad (8.32)$$

то это условие выполняется в любой момент $0 < t_1 \le T$.

Еще один конструктивный метод поиска области начальных условий, из которой состояние объекта (8.8) под воздействием управления (8.17) приводится в область заданных краевых условий, может быть найден, если принять во внимание, что

$$\sum_{j=1}^{n} g_j(t) \left\{ \frac{d}{dt} g_j(t) \right\} < 0,\ z_1(t) \ne 0$$

или

$$\left\{ \sum_{j=1}^{n} \{\exp[-\lambda_j t]\} \Im^*_j(z_1,t) \right\} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \{\exp[-\lambda_j t]\} \left[-\lambda_j \Im^*_j(z_1,t) + \frac{d}{dt} \Im^*_j(z_1,t) \right] \right\} < 0,\ z_1(t) \ne 0. \quad (8.33)$$

В начале переходного процесса при $t = 0$ последняя система неравенств принимает вид

$$\left\{ \sum_{j=1}^{n} \Im^*_j(z_1,t) \right\} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \left[-\lambda_j \Im^*_j(z_1,t) + \frac{d}{dt} \Im^*_j(z_1,t) \right] \right\} < 0,\quad z_1(t) \ne 0,\ t = 0. \qquad (8.34)$$

Полученное позволяет найти область начальных значений объекта (8.19) $z(0) = x_0^* \in X_0 \subset R^n$, для которых $z_1(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Условие (8.33) можно переформулировать: подынтегральное выражение решения уравнения (8.19) асимптотически убывает, если матрица

$$\left\{\frac{d}{dt}g(t)\right\}g^T(t)=\left\{\frac{d}{dt}\Im^*(z_1,t)\right\}\left\{\{\exp(-\Lambda\tau)\}\Im^*(z_1,t)\right\}^T$$

отрицательно определена при $z_1(t)\neq 0$ или

$$\left\{\frac{d}{dt}\Im^*(z_1,t)-\Lambda\Im^*(z_1,t)\right\}\left\{\Im^*(z_1,t)\right\}^T<0,\ t=0,\ z_1(t)\neq 0\,.$$

Учитывая сформулированное выше положение, отметим, что если условие (8.34) выполняется в момент начала переходного процесса, то это условие выполняется в любой момент $t_1>0$, в котором $z(t_1)\neq 0$.

Теорема 8.2.4

Стабилизирующее управление вида

$$u(t)=-R^{-1}\left[B+\beta^*\right]S\,z(t)$$

для объекта

$$\frac{d}{dt}z(t)=\left[A+\alpha^*\right]z(t)+\left[B_1+\beta^*\right]u(t)+\Im(\mathrm{z},\mathrm{t})$$

существует, если область возможных начальных условий объекта отвечает условию

$$\left\{\frac{d}{dt}\Im^*(z_1,t)-\Lambda\Im^*(z_1,t)\right\}\left\{\Im^*(z_1,t)\right\}^T<0,\ \ z_1(t)\neq 0,\ t=0\,,$$

где $\Im^*(z_1,t)=P\Im(z_1,t)$, $\Lambda=P^{-1}\mathcal{T}P$, $z_1(t)=P\,z(t)$.

Несколько иное условие устойчивости можно получить, рассмотрев подынтегральное выражение правой части неравенства (8.23) и умножив его слева на $\Im^T(z,t)$, т.е.

$$\Im^T(z,t)\{\exp(-\mathcal{T}\ t)\}\Im(z,t)>0,\ \ z(t)\neq 0\,. \tag{8.35}$$

Условие асимптотической устойчивости будет иметь место, если производная по времени выражения (8.35) будет отрицательна при $x(t)\neq 0$:

$$\frac{d}{dt}\left[\Im^T(z,t)\{\exp(-\mathcal{T}\ t)\}\Im(z,t)\right]=\left[\frac{d}{dt}\Im^T(z,t)\right]\{\exp(-\mathcal{T}\ t)\}\Im(z,t)+$$
$$+\Im^T(x(t)\{z,\exp(-\mathcal{T}\ t)\}\left[\frac{d}{dt}\Im(z,t)\right]-\Im^T(z,t)\ \mathcal{T}\{\exp(-\mathcal{T}\ t)\}\Im(z,t)\le 0,$$

или, учитывая коммутативные свойства $\{\exp(-\mathcal{T}\ t)\}$, будем иметь

$$\left[\frac{d}{dt}\Im^T(z,t)\right]\Im(z,t)+\Im^T(z,t)\left[\frac{d}{dt}\Im(z,t)\right]-\Im^T(z,t)\ \mathcal{T}\,\Im(z,t)\le 0\,. \qquad (8.36)$$

Таким образом, система (8.18) с начальными условиями, при которых выполняется условие

$$\left[\frac{d}{dt}\Im^T(z,t)\right]_{t=0}\Im(z,0)+\Im^T(z,0)\left[\frac{d}{dt}\Im(z,t)\right]_{t=0}-\Im^T(z,0)\ \mathcal{T}\,\Im(z,0)\le 0\,, \qquad (8.37)$$

асимптотически устойчива.

Теорема 8.2.5

Система

$$\frac{d}{dt}z(t)=\mathcal{T}\,z(t)+\Im(z,t)$$

асимптотически устойчива, если:

а) решение уравнения $\frac{d}{dt}z_M(t)=\mathcal{T}\,z_M(t),\ z_M(t_0)=x_0$ стремится к нулю при $t\to\infty$;

б) начальные условия системы таковы, что

$$\left[\frac{d}{dt}\Im^T(z,t)\right]_{t=0}\Im(z,0)+\Im^T(z,0)\left[\frac{d}{dt}\Im(z,t)\right]_{t=0}-\Im^T(z,0)\ \mathcal{T}\,\Im(z,0)\le 0\,.$$

Условия существования стабилизирующего управления вида (8.17) можно получить, введя функцию Ляпунова

$$\mathrm{V}=z^T(t)Sz(t)\,, \qquad (8.38)$$

где положительно определенная матрица S есть решение уравнения (8.13).

Производная функции Ляпунова (8.38) будет иметь вид

$$\frac{d}{dt}V=-z^T(t)\left[Q+S\left[B+\beta^*\right]R^{-1}\left[B+\beta^*\right]^TS\right]z(t)+$$
$$+z^T(t)S\,\Im(z,t)+\Im^T(z,t)\,Sz(t)<0\ \text{при}\ z(t)\ne 0. \qquad (8.39)$$

Назначая соответствующим образом матрицы Q и R, можно получить решением уравнения (8.13) матрицу S такую, чтобы выполнялось условие (8.7), т.е.

$$\Im^{\mathrm{T}}(z,t)\{\ \Im(z,t)-Sz(t))\}<0,\ z(t)\neq 0. \quad (8.40)$$

Тогда неравенство (8.39) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}V=-z^{T}(t)\left[Q+SBR^{-1}B^{T}S\right]z(t)+2\Im^{\mathrm{T}}(z,\mathrm{t})\Im(z,t)<0,\ \ z(t)\neq 0, t\geq 0.$$

Таким образом, объект (8.8) стабилизируем управлением (8.17), если выполняется условие

$$z^{T}(t)\left[Q+SBR^{-1}B^{T}S\right]z(t)>2\Im^{\mathrm{T}}(z,t)\Im(z,t),\ \ z(t)\neq 0. \quad (8.41)$$

При конкретных выражениях аналитических нелинейностей можно определить область возможных значений состояния системы $X(t)$ и возможных начальных условий X_0, при которых в задаче с параметрической интервальной неопределенностью будет существовать стабилизирующее управление.

Отметим, что условие (8.41), при выполнении которого система асимптотически устойчива, предъявляет требования к рассматриваемой системе менее строгие, чем условие (8.28), т.к. последнее требует монотонного убывания подынтегрального выражения второго слагаемого в выражении (8.22), выполнение которого обеспечивает асимптотические свойства устойчивости.

§ 8.3. Переходный процесс нелинейной системы в задаче стабилизации

Оценим точность выполнения задачи управления нелинейным объектом (задачи стабилизации)

$$\frac{d}{dt}z(t)=\left[A+\alpha^{*}\right]z(t)+\left[B_1+\beta^{*}\right]u(t)+\Im(z,\mathrm{t}), \quad (8.42)$$

с управлением

$$u(t)=-R^{-1}\left[B_1+\beta^{*}\right]Sz(t). \quad (8.43)$$

Решения уравнения (8.42) и его линеаризованной модели

$$\frac{d}{dt} z_M(t) = \left[A + \alpha^*\right] z_M(t) + \left[B_1 + \beta^*\right] u_M(t)$$

с соответствующими управлениями имеют вид

$$z(t) = \left[\exp(\mathcal{T}t)\right] \left\{ z(0) + \int_0^t \left[\exp(-\mathcal{T}\tau)\right] \Im(z,\tau)\, d\tau \right\},,$$

$$z_{\text{M}}(t) = \left[\exp(\mathcal{T}t)\right] z(0).$$

Если принять, что справедливо соотношение $\|z(t)\| \geq \|z_M(t)\|$ или, что то же самое,

$$\left\| \left[\exp(\mathcal{T}T)\right] \left\{ z(0) + \int_0^t \left[\exp(-\mathcal{T}\tau)\right] \Im(z,\tau)\, d\tau \right\} \right\| \geq \|z_M(t)\|, \tag{8.44}$$

то из неравенства (8.44) имеем

$$\frac{\left\| \left[\exp(-\mathcal{T}t)\right] \Im(z,t) \right\|}{\left\| z(0) + \int_0^t \left[\exp(-\mathcal{T}\tau)\right] \Im(z,\tau)\, d\tau \right\|} \geq \frac{\|\Im(z,t)\|}{\|z_M(t)\|}. \tag{8.45}$$

Интегрируя (8.45) от 0 до t, получаем

$$\ln \left\| z(0) + \int_0^t \left[\exp(-\mathcal{T}\tau)\right] \Im(z,\tau)\, d\tau \right\| - \ln \|z(0)\| \geq \frac{\|\Im(z,t)\|}{\|z_M(t)\|} t.$$

Отсюда следует, что

$$\left\| z(0) + \int_0^t \left[\exp(-\mathcal{T}\tau)\right] \Im(z,\tau)\, d\tau \right\| \geq \|z(0)\| \left\{ \exp\left[\frac{\|\Im(z,t)\|}{\|z_M(t)\|} t \right] \right\}. \tag{8.46}$$

Умножая (8.46) на $\|\exp(\mathcal{T}t)\|$, будем иметь

$$\|z(t)\| \geq \|z_M(t)\| \left\{ \exp\left[\frac{\|\Im(z,t)\|}{\|z_M(t)\|} t \right] \right\}. \tag{8.47}$$

Теорема 8.3.1

Если нелинейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt} z(t) = \mathcal{T} z(t) + \Im(z,t), \;\; z(t_0) = x_0,$$

где $\Im(z,t)$ – нелинейная вектор-функция, и линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} z_M(t) = \mathcal{T}\, z_M(t), \ \ z_M(t_0) = x_0$$

имеют решения для $t \geq 0$, то

$$\|z(t)\| \geq \|z_M(t)\| \left\{ \exp\left[\frac{\|\Im(\mathrm{z},t)\|}{\|z_M(t)\|} t \right] \right\}, \ t \geq 0 .$$

При формулировке теоремы 8.3.1 использовались идеи «основной теоремы об устойчивости» Беллмана [5].

Введем вектор

$$\varepsilon(t) = z(t) - z_M(t) . \tag{8.48}$$

Если решение $\varepsilon(t)$ существует, то из (8.48) следует, что

$$\varepsilon(t) = \int\limits_0^t \left[\exp\left\{ \mathcal{T}(t-\tau) \right\} \right] \Im(z,\tau)\, d\tau \}. \tag{8.49}$$

Напомним, что действительные части характеристических корней матрицы $\mathcal{T}$ $\lambda_i, i = 1,2,...,n$ отрицательны, пусть при этом

$$\max(\operatorname{Re}\lambda_i) = -\overline{\mu} < 0 .$$

Тогда каждое решение системы (8.49), которое стремится к нулю при $t \to \infty$ удовлетворяет условию [9]

$$\lim_{t\to\infty}\sup \frac{\ln|\varepsilon(t)|}{t} \leq -\overline{\mu} . \tag{8.50}$$

Таким образом, все решения (8.49), которые начинаются из множества возможных начальных условий, определяемых, например, соотношением (8.37), удовлетворяют неравенству (8.50).

Учитывая, что действительные корни характеристического уравнения матрицы $\mathcal{T}$ отрицательны, то существуют постоянные K и ρ, такие, что $\|\exp \mathcal{T} t\| \leq Ke^{-\rho t}, \ t \geq 0$. Тогда

$$\|\varepsilon(t)\| \leq Ke^{-\rho t} \int\limits_0^{\mathrm{t}} e^{\rho\tau} \|\Im(\mathrm{z},\tau)\| d\tau .$$

Если начальные условия системы таковы, что $z(t) \to 0$ при $t \to \infty$, т.е. система устойчива, то $\|\Im(z,0)\| > \|\Im(z,t)\|$, $t > 0$. Тогда

$$\|\varepsilon(t)\| \le K\, e^{-\rho\tau} \int_0^t e^{\rho\tau} \|\Im(z,0)\|\, d\tau,$$

откуда

$$\|\varepsilon(t)\| \le \frac{1}{\rho} K\, \|\Im(z,0)\| \left[1 - e^{-\rho\, t}\right]. \qquad (8.51)$$

Таким образом, при $t = T$ возможный рост решения системы по отношению к решению линейной системы описывается соотношением

$$\|\varepsilon(T)\| \le \frac{1}{\rho} K\, \|\Im(z,0)\| \left[1 - e^{-\rho\, T}\right]. \qquad (8.52)$$

Теорема 8.3.2

Возможный рост решения системы

$$\frac{d}{dt} z(t) = \mathcal{T}\, z(t) + \Im(z,t),\ \ z(t_0) = x_0,$$

где $\Im(z,t)$ – нелинейная вектор-функция,

по отношению к решению линейной системы

$$\frac{d}{dt} z_M(t) = \mathcal{T}\, z_M(t),\ \ z_M(t_0) = x_0,$$

у которой действительные части характеристических корней матрицы $\mathcal{T}$ $\lambda_i, i = 1,2,...,n$ отрицательны, для $t \ge 0$ описывается соотношением

$$\|\varepsilon(t)\| \le \frac{1}{\rho} K\, \|\Im(z,0)\| \left[1 - e^{-\rho\, t}\right],$$

где $\varepsilon(t) = z(t) - z_M(t)$.

Следствие

Учитывая, что $\|z(t)\| \ge \|x(t)\|$ и $z(t_0) = x_0$, справедливо соотношение

$$\|x(t) - z_M(t)\| \le \frac{1}{\rho} K\, \|\Im(z,\alpha^*,\beta^*,0)\| \left[1 - e^{-\rho\, t}\right].$$

Отметим, что при заданной области возможных значений параметров нелинейного объекта полученные выше результаты позволяют решить три основные задачи стабилизации системы:

1) заданы уравнения первого приближения, произведен синтез управления, обеспечивающего отрицательность вещественных частей корней характеристического уравнения системы первого приближения, заданы нелинейные члены. Требуется определить область начальных условий, при которых синтезированное по первому приближению управление будет стабилизировать нелинейных объект;
2) заданы уравнения первого приближения, произведен синтез управления, обеспечивающего отрицательность вещественных частей корней характеристического уравнения системы первого приближения, задана область начальных условий системы. Требуется определить условия, которым должны удовлетворять нелинейные члены системы, при которых синтезированное по первому приближению управление будет стабилизировать нелинейную систему;
3) заданы уравнения первого приближения, проведен по первому приближению синтез структуры управляющего устройства (с точностью до значений параметров), задана область начальных условий, заданы нелинейные члены системы. Требуется определить условия, которым должны удовлетворять параметры регулятора, обеспечивающего стабилизацию нелинейного объекта.

§ 8.4. Условия существования терминального робастного управления

Рассмотрим вопрос о существовании управления вида (8.17) при движении нелинейной нестационарной системы в заданном интервале времени из любого начального состояния, принадлежащего заданному множеству, в заданную область.

Условие d-робастности для объекта

$$\frac{d}{dt}z(t) = \left[A + \alpha^* - \left[B_1 + \beta^*\right]R^{-1}\left[B_1 + \beta^*\right]^T S\right]z(t) + \Im(z, a^*, \beta^*), \quad z(t_0) = x_0^* \in X_0$$

имеет вид

$$\| z(T) \| = \left\| \left[\exp(\mathcal{T}\, T)\right]z(0) + \int_0^T \left[\exp(-\mathcal{T}\,\tau)\right]\Im(z,\tau)\,d\tau \right\| \le d\,,$$

откуда

$$\left\|\left[\exp(\mathcal{T}\,T)\right]z(0)\right\| - d \;\le \int_0^T \left\|\left[\exp(-\mathcal{T}\,\tau)\right]\Im(z,\tau)\,d\tau\right\|. \qquad (8.53)$$

Если условие (8.53) не выполняется, то это означает, что для объекта

$$\frac{d}{dt}x(t) = \left[A + \alpha(x,t)\right]x(t) + \left[B_1 + \beta(x,t)\right]u(t) + \Im\left(x, a(x,t), \beta(x,t)\right),$$

с начальным условием $x_0^* = z(t_0) \in X_0$ и заданным периодом управления $[0, T]$, в общем случае не существует управления вида $u(t) = Kx(t) = -R^{-1}\left[B + \beta^*\right]Sx(t)$ с постоянной положительно определенной матрицей S, определяемой решением Риккати–Лурье

$$S\left[\mathrm{A} + \alpha^*\right] + \left[\mathrm{A} + \alpha^*\right]^T S - S\left[B + \beta^*\right]R^{-1}\left[B + \beta^*\right]^T S + Q = 0,$$

которое может обеспечить заданный показатель робастности d.

Выполнение условия (8.27) или (8.30) обеспечивает переходному процессу асимптотическое свойство, предъявляя соответствующие требования к поведению нелинейной вектор-функции, входящей в систему. Таким образом, выполнение этого условия является необходимым условием существования d-робастного управления.

Условие (8.53) является дополнительным условием, обеспечивая достаточные условия существования d-робастного управления.
Выполнение обоих условий гарантирует выполнение задачи d-робастного управления нестационарным объектом.

Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 8.4.1

Пусть $z(T)$ − значение решения уравнения

$$\frac{d}{dt}z(t) = \mathcal{T}\, z(t) + \Im\,(z,t),\ z(t_0) \neq 0 \text{ в момент } t = T > t_0,$$

где $\mathcal{T}$ – действительная постоянная матрица, все характеристические корни которой имеют отрицательные действительные части.

Тогда условия

$$\left\| \frac{d\,\Im(z,t)}{d\,t} \right\| < \left\| \mathcal{T}\, \Im(z,t) \right\|,\ z(t) \neq 0,\ t = 0$$

и

$$\left\| \left[\exp(\mathcal{T}\,T) \right] z(0) \right\| - d \le \int_0^T \left\| \left[\exp(-\mathcal{T}\,\tau) \right] \Im(z,\tau)\, d\tau \right\|$$

являются соответственно необходимыми и достаточными условиями для выполнения соотношения $\left\| z(T) \right\| \le d,\ d > 0$.

Оценим точность выполнения задачи управления нелинейным объектом с управлением вида $u(t) = -R^{-1}\left[B + \beta^* \right] S z(t),\ t \in [0,T]$.

Применим ранее полученный результат (теорема 8.3.2) к задаче робастного управления. Очевидно, что задача робастного управления, состоящая в выполнении условия $\left\| z(T) \right\| \le d$ при $\left\| z_M(T) \right\| < d$, будет успешно решена для объекта

$$\frac{d}{dt}z(t) = \mathcal{T}\, z(t) + \Im\,(z,t),\ z(t_0) \neq 0,$$

если будет выполняться условие

$$1 \le \exp\left[\frac{\left\| \Im(\mathrm{z},\mathrm{T}) \right\|}{\left\| z_M(T) \right\|} T \right] \le \frac{d}{\left\| z_M(T) \right\|}, \tag{8.54}$$

где $\left\| z_M(T) \right\| = \left\| \left\{ \exp\left[\mathcal{T}\,T \right] \right\} x^*(t_0) \right\|$.

Следовательно, для объекта

$$\frac{d}{dt}x(t) = \left\{ A + \alpha(x,t) - \left[B_1 + \beta(x,t) \right] R^{-1} S \right\} x(t) + \Im\,(x, a(x,t), \beta(x,t)),\ x(0) = x_0^*$$

условие успешного выполнения задачи терминального робастного управления будет иметь вид

$$1 \le \exp\left[\frac{\|\Im(\mathrm{x},\mathrm{T})\|}{\|z_M(T)\|}T\right] \le \frac{d}{\|z_M(T)\|}.$$

Условие (8.54) содержит требования к значениям нелинейной вектор-функции $\Im(\mathrm{z},\mathrm{T})$ по отношению к показателю робастности d и длительности процесса управления T. Требования к управлению нелинейным объектом, сфокусированные в выполнении условия $\|z_M(T)\| < d$, учтены при получении условия (8.54).

Используя теорему 8.4.1 и учитывая, что $\|z(t)\| \ge \|x(t)\|$ при $z(t_0) = x(t_0)$, нетрудно видеть, что если $\|z(T)\| \le d$, то и $\|x(T)\| \le d$.

Теорема 8.4.2

Решение уравнения

$$\frac{d}{dt}x(t) = [A + \alpha(x,t)]x(t) + [B_1 + \beta(x,t)]Kx(t) + \Im(x, a(x,t), \beta(x,t)),$$

$$x(t_0) \in X_0,\ \alpha(x,t),\ \beta(x,t) \in \Omega,$$

в момент $t = T > t_0$ удовлетворяет условию $\|x(T)\| \le d,\ d > 0$,

если удовлетворяет условию теоремы 4.4.1 решение уравнения

$$\frac{d}{dt}z(t) = [A + \alpha^*]z(t) + [B_1 + \beta^*]Kz(t) + \Im(z, a^*, \beta^*),$$

$$z(t_0) = x(t_0),$$

где:

а) $\alpha^*, \beta^* \in \Omega$ таковы, что

$$\left|[A + \alpha^*]x(t) + [B_1 + \beta^*]K\,x(t) + \Im(x, a^*, \beta^*)\right| \ge$$
$$\ge \left|[A + \alpha(x,t)]x(t) + [B_1 + \beta(x,t)]K\,x(t) + \Im(x, a(x,t), \beta(x,t))\right|,$$

б) $K = -R^{-1}[B_1 + \beta^*]S$, где

$$S[\mathrm{A} + \alpha^*] + [\mathrm{A} + \alpha^*]^T S - S[B_1 + \beta^*]R^{-1}[B_1 + \beta^*]^T S + Q = 0,\ Q, R > 0.$$

Если условия на правом конце задаются в виде

$$|x_i(T)| \le d_i,\ d_i > 0,\ i = 1,\ldots,n,$$

то проверить возможность выполнения условия (8.49) можно, переписав это условие в виде

$$1 \le \exp\left[\frac{\|\Im(\mathrm{D})\|}{\|z_M(T)\|}T\right] \le \frac{d}{\|z_M(T)\|}, \tag{8.55}$$

где $D^T = (d_1,\ldots,d_n)$.

Так как $\|z_M(T)\| = \left\|\{\exp[\mathcal{T}\,T]\}x^*(t_0)\right\|$, где $\mathcal{T} = A + \alpha^* - \left[B_1 + \beta^*\right]R^{-1}\left[B_1 + \beta^*\right]^T S$, условие (8.55) можно использовать для предварительной проверки назначения весовых матриц функционала (8.12) на возможность выполнения задачи терминального робастного управления.

В заключение отметим, что при заданных областях возможных начальных условий и значений параметров нелинейного объекта, заданном периоде процесса управления, заданных ограничениях на управляющие воздействия, полученные выше результаты позволяют решить разнообразные задачи d-робастного управления системы.

§ 8.5. Робастное управление билинейным объектом

Билинейные системы образуют важный класс нелинейных регулируемых систем. Используя методику построения робастного управления для линейных систем, изложенную в гл. 7, проведем синтез робастного управления и найдем область возможных начальных условий, для которых полученные управления будут стабилизировать неопределенный билинейный объект.

Пусть неопределенный билинейный объект описывается уравнением

$$\frac{d}{dt}x(t) = \left[A + a\ (t)\right]x(t) + \left[B + \beta(t) + x(t)\,M\right]u(t), \tag{8.56}$$

где $x \in R^n, u \in R^r, r \le n, \alpha\,(t), \beta\,(t) \in \Omega$, вектор-строка M размером $1\times r$ содержит действительные коэффициенты.

Начальное условие принадлежит заранее неизвестному, подлежащему определению подмножеству, т.е.

$$x(t_0) \in X_0. \tag{8.57}$$

Предполагается, что возмущения $\alpha(t), \beta(t) \in \Omega$ таковы, что пара $([A+\alpha(t)],\ [B+\beta(t)])$ сохраняет управляемость объекта (8.56) при $\forall t \in [t_0, T]$. Информация о возможной структуре параметрической неопределенности помещена в § 1.2. Предположим, что параметрическая неопределенность имеет интервальных характер, т.е. $\underline{a} \le a\ (t) \le \overline{a}$, $\underline{\beta} \le \beta(t) \le \overline{\beta}$.

Задан функционал качества

$$J(x,u) = \frac{1}{2} x^T(T) F x\ (T) + \frac{1}{2}\int_0^T \left\{ x^T(t) Q x\ (t) + u^T(t) R u(t) \right\} dt. \tag{8.58}$$

В задаче терминального управления задан интервал управления $[t_0, T]$, матрица R – положительно определена, матрица Q и F – положительно полуопределены. В задаче синтеза управления, стабилизирующего объект, (8.56) заданы: $t_0 = 0$, $T \to \infty$, $F = 0$.

Как отмечалось ранее, наихудшими, с позиции синтеза управления, являются следующие значения параметров объекта: $A^* = A + \overline{a}$, $B^* = B + \underline{\beta}$.

Для того чтобы регулятор в терминальной задаче содержал постоянные параметры, назначим матрицу штрафа первого слагаемого функционала в виде $F = S$, где положительно определенная матрица S является решением уравнения Риккати–Лурье

$$SA^* + (A^*)^T S - SB^* R^{-1} (B^*)^T S + Q = 0. \tag{8.59}$$

Очевидно, что в случае такого назначения матрицы F будет выполняться соотношение $\frac{d}{dt} S(t) = 0$, т.е. $S = const$ на всем интервале управления.

Таким образом, субоптимальное управление для объекта (8.56) при предложенном назначении матрицы штрафа при терминальном элементе функционала качества (8.58) определяется соотношением [3]:

$$u(t) = -R^{-1}(B^*)^T Sx(t), \qquad (8.60)$$

где матрица S соответствует решению уравнения (8.59).

Поиск области начальных условий, для которых управлением вида (8.60) будет выполняться решение задачи робастной стабилизации билинейного объекта, будем осуществлять с использованием уравнения

$$\frac{d}{dt}z(t) = \left[A^* - B^* R^{-1}(B^*)^T S\right]z(t) - z(t)MR^{-1}(B^*)^T Sz(t). \qquad (8.61)$$

Введем обозначения, пусть $L = A^* - B^* R^{-1}(B^*)^T S$ и $K = MR^{-1}(B^*)^T S$. Элементы вектор-строки $K = \|k_i\|$, где $k_i = \sum_{j=1}^{r} m_j r_{jj} b_{ij} > 0,\ i = 1,...,n$.

Матрица L, в силу синтезированного управления (8.60), имеет действительные отрицательные характеристические числа. Таким образом, решение уравнения

$$\frac{d}{dt}z_M(t) = \left[A^* - B^* R^{-1}(B^*)^T S\right]z_M(t)$$

при любых начальных условиях $z_M(t_0)$ устойчиво, т.е. $z_M(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Произведем эквивалентное преобразование (8.61). Пусть

$$z_1(t) = P^{-1}z(t), \qquad (8.62)$$

где невырожденная матрица P − матрица преобразования подобия. Тогда

$$P^{-1}\frac{d}{dt}z(t) = P^{-1}LPP^{-1}z(t) - P^{-1}z(t)KPP^{-1}z(t),$$

откуда

$$\frac{d}{dt}z_1(t) = \Lambda z_1(t) - z_1(t)K^* z_1(t),\ \ z_1(t_0) = P^{-1}z(t_0). \qquad (8.63)$$

Здесь

$$\Lambda = P^{-1}LP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix},\ \ K^* = KP. \qquad (8.64)$$

Таким образом, Λ есть матрица собственных значений матрицы L.

Запишем решение уравнения (8.63), начинающееся из пока неопределенного начального условия $z_1(0) = P^{-1} z_0$:

$$z_1(t) = \{\exp[\Lambda t]\} z_1(0) - \int_0^t \{\exp[\Lambda(t-\tau)]\} z_1(\tau) K^* z_1(\tau) d\tau =$$
$$= \exp[\Lambda t]\left[z_1(t_0) - \int_0^t \{\exp[-\Lambda\tau]\} z_1(\tau) K^* z_1(\tau) d\tau \right]. \tag{8.65}$$

Задача робастной стабилизации

Из уравнения (8.65) следует, что

$$\|z_1(t)\| = \left\| [\exp(\Lambda t)] \{z_1(0) + \int_0^t [\exp(-\Lambda\tau)] H(z_1(\tau)) d\tau\} \right\|,$$

где $H(z_1(\tau)) = z_1(\tau) K^* z_1(\tau)$.

Если управление (8.60) стабилизирует объект, то при $T \to \infty$ должно выполняться условие:

$$\left\| z_1(0) + \int_0^t [\exp(-\Lambda\tau)] H(z_1(\tau)) d\tau \right\| \to 0 \text{ } при \text{ } t \to \infty$$

или

$$\|\{z_1(0)\| - \left\| \int_0^t [\exp(-\Lambda\tau)] H(z_1(\tau)) d\tau \right\| \to 0 \text{ } при \text{ } t \to \infty.$$

Так как первое слагаемое имеет конечное значение, то и второе слагаемое при управлении, стабилизирующем объект, должно иметь конечное значение при $t \to \infty$. Учитывая, что

$$\left\| \int_0^t [\exp(-\Lambda\tau)] H(z_1(\tau)) d\tau \right\| \le \int_0^t \left\| \{\exp(-\Lambda\tau)\} H(z_1(\tau)) d\tau \right\|, \tag{8.66}$$

последнее выполняется в том случае, если подынтегральное выражение в правой части неравенства (8.66) будет убывать. Потребуем, чтобы положительно определенное подынтегральное выражение убывало монотонно.

Отметим, что запас устойчивости, определяемый выполнением этого требования, сужает область возможных значений начальных условий, при которых сохраняется устойчивость системы. Как и ранее, вполне уместно более узкий класс систем, в котором выполняется предъявляемое требование, отнести к системам, обладающим свойством «сверхустойчивости» («сверхстабилизируемым») [13].

Найдем условия, которые определят это свойство. Рассмотрим правую часть неравенства (8.66). Так как действительные части характеристических корней матрицы Λ отрицательны, то

$$\| \exp \Lambda t \| = \sum_{i=1}^{n} \exp\{\lambda_i t\} \leq n e^{-\rho t},\ t \geq 0,$$

где n − порядок системы, $(-\rho) = \max\{\mathrm{Re}\,\lambda_i\} < 0$.

Тогда

$$\int_0^t \| \{\exp(\Lambda(t-\tau)\} H(z_1(\tau))\, d\tau \| \leq n e^{-\rho t} \int_0^t e^{\rho \tau} \| H(z_1(\tau)) \| d\tau .$$

Если начальные условия системы таковы, что $z(_1 t) \to 0$ при $t \to \infty$, т.е. система устойчива, то $\| H(z_1(0)) \| > \| H(z_1(t)) \|,\ t > 0$. Следовательно,

$$\int_0^t \| \{\exp \Lambda(t - \tau)\} H(z_1(\tau)) d\tau \| \leq n e^{-\rho t} \int_0^t e^{\rho \tau} \| H(z_1(\tau)) \| d\tau$$

или

$$\int_0^t \| \{\exp \Lambda(t - \tau)\} (H(z_1(\tau)\ d\tau \| \leq \frac{n}{\rho} \| H(z_1(0)) \| \left[1 - e^{-\rho t}\right] .$$

Что касается подынтегрального выражения, то условие сверхустойчивости, в том понимании, которое было введено выше, имеет вид:

$$\| \{\exp \Lambda t\} H(z_1(t)) \| \leq n e^{-\rho t} \| H(z_1(t)) \| . \tag{8.67}$$

При этом рост интегральной составляющей решения уравнения (8.65) не превосходит некоторого вполне определенного значения, т.е.

$$\int_0^t \| \{\exp(-\mathcal{J}'\ \tau)\} H(z_1(\tau))\, d\tau \| \leq \frac{n}{\rho} \| H(z_1(0)) \| \left[1 - e^{-\rho t}\right]. \tag{8.68}$$

Вернемся к условию (8.66). Оно будет выполняться, если производная по времени от положительно определенной формы

$$\left\| \{\exp(-\Lambda\, t)\} H(z_1(t)) \right\| > 0,\;\; z_1 \neq 0 \tag{8.69}$$

будет отрицательной, т.е. условие монотонного убывания подынтегрального выражения (8.66) имеет вид

$$\left\| \Lambda \{\exp[-\Lambda t]\} H(z_1(\tau)) \right\| > \left\| \{\exp[-\Lambda t]\} \left\{ \frac{d\, H(z_1(t))}{d\, t} \right\} \right\|,\;\; z_1 \neq 0\,. \tag{8.70}$$

В начальный момент при $t_0 = 0$ неравенство (8.70) принимает вид

$$\left\| \Lambda\, H(z_1(t)) \right\| > \left\| \frac{d\, H(z_1(t))}{d\, t} \right\|,\;\; z_1(t) \neq 0\;\; при\; t = 0\,. \tag{8.71}$$

или, учитывая, что $\| \Lambda H(z_1(t)) \| \geq \| \Lambda \| \| H(z_1(t)) \|$,

$$\frac{\left\| \dfrac{d\, H(z_1(t))}{d\, t} \right\|}{\| H(z_1(t)) \|} < \| \Lambda \|,\;\; z_1(t) \neq 0\;\; при\; t = 0\,. \tag{8.72}$$

Из неравенств (8.71), (8.72), определяющих условия монотонной асимптотической сходимости подынтегрального выражения в правой части неравенства (8.66), при заданной матрице $\Lambda = P^{-1} \mathcal{T} P$ и известной билинейности $H(z_1(0)$ можно определить условия для начального состояния объекта, при которых стабилизирующее управление будет существовать.

Используя полученные выше результаты, нетрудно доказать следующую теорему.

Теорема 8.5.1

Пусть решение линейного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt} z_M(t) = \Lambda\, z_M(t)$$

устойчиво при $z_M(0) = P^{-1} x(0)$.

Тогда возможный рост решения уравнения

$$\frac{d}{dt}z_1(t) = \Lambda z_1(t) - z_1(t)K^* z_1(t),\ z_1(t_0) = P^{-1}x(0),$$

подчинен условию

$$\| z_1(t) - z_M(t) \| \le \frac{n}{\rho} \| \mathrm{z}_1(0)\mathrm{K}^* z_1(0) \| \left[1 - e^{-\rho\, t}\right],$$

где n − порядок системы и $(-\rho) = \max(\mathrm{Re}\lambda_i) < 0$.

Таким образом, при $t = T$ возможный рост решения системы по отношению к решению линейной системы описывается соотношением

$$\| z(T) - z_M(T) \| \le \frac{n}{\rho} \| \mathrm{z}_1(0)\mathrm{K}_1 z(0) \| \left[1 - e^{-\rho\, T}\right]. \tag{8.73}$$

Задача d-робастного управления

Рассмотрим задачу с заданным интервалом управления и заданной областью возможных терминальных значений состояния системы. Пусть состояние системы на правом конце должно подчиняться условию

$$\| x(T) \| \le d,\ d \ge 0. \tag{8.74}$$

Очевидно, что область начальных условий X_0^*, при которых задача робастного управления будет выполнена, зависит от значений параметров матриц $A(t) = A + a\,(t),\ B(t) = B + \beta(t),\ M$, от периода управления, от значений весовых матриц функционала Q, R (и таким образом от управления $u^*(t_0, T)$), от задания области конечных значений состояния объекта, т.е. область возможных начальных условий определяется выражением

$$X_0^* = \left\{ \alpha\,(t), \beta\,(t) \in \Omega,\ M,\ u^*(t_0, T) : \frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + [B(t) + x(t)M]u(t),\ |x(T)| \le d \right\}.$$

Условие (8.74) с учетом (8.65) запишется в виде

$$\|z_1(T)\| = \left\| \{\exp[\Lambda(T - t_0)]\} z_1(t_0) - \int_{t_0}^{T} \{\exp[\Lambda(T - \tau)]\} z_1(\tau) K^* z_1(\tau)\, d\tau \right\| \le d$$

или

$$\left\| \{\exp[-\Lambda t_0]\} z_1(t_0) - \int_{t_0}^{T} \{\exp[-\Lambda\tau]\} z_1(\tau) K^* z_1(\tau)\, d\tau \right\| \le \left\| \{\exp[-\Lambda T]\} \right\| d \ .$$

Пусть $d^* = \left\| \{\exp[-\Lambda T]\} \right\| d$. Условие успешного d-робастного управления будет иметь вид

$$\left\| \{\exp[-\Lambda t_0]\} z_1(t_0) \right\| - d^* \le \int_{t_0}^{T} \left\| \{\exp[-\Lambda\tau]\} z_1(\tau) K^* z_1(\tau)\, d\tau \right\| \ . \qquad (8.75)$$

Так как $\left\| z_1(T) \right\| \ge \left\| P^{-1} x(T) \right\|$, то выполнение неравенства (8.75) гарантирует успешное выполнение задачи терминального управления неопределенным билинейным объектом (8.42) с регулятором (8.60).

Пусть $t_0 = 0$ и T – заданный момент окончания переходного процесса. Тогда нетрудно показать, что начальные условия системы должны отвечать следующему условию:

$$e^{-\rho T} \left\| \mathrm{z}_1(0) \right\| - \frac{n}{\rho} \left\| \mathrm{z}_1(0) \mathrm{K}^* z_1(0) \right\| \left[1 - e^{-\rho T}\right] \le \frac{d}{n} . \qquad (8.76)$$

Три причины «неуспешного» d-робастного управления билинейным объектом:

1) $P z_1(t_0) \notin X_0^* \subset X_0 \subset Z_0$, т.е. начальные условия не принадлежат области допустимых начальных условий, при которых успешно выполняется задача d-робастного управления;

2) матрицы Q, R в функционале качества таковы, что не существует управлений вида $u(t) = -R^{-1}(B^*)^T S x(t)$, где положительно определенная матрица S является решением уравнения Риккати-Лурье, при котором успешно выполняется задача d-робастного управления;

3) интервал управления $[t_0, T]$ таков, что при заданной области конечных значений и заданном управлении задача d-робастного управления выполнении быть не может.

Изменяя те или иные условия задачи, можно добиться выполнения неравенства (8.73) или (8.76) и тем самым обеспечить успешное выполнения задачи d-робастного управления.

Библиографический список

1. Адаптивные системы автоматического управления // Под ред. В.Б. Яковлева. – Л.: Изд-во Ленинградскою университета, 1984. – 202 с.
2. *Александровский Н.М., Егоров С.В., Кузин Р.Е.* Адаптивные системы автоматического управления сложными технологическими процессами. – М.: Энергия, 1973. – 272 с.
3. Аналитические самонастраивающиеся системы автоматического управления // Под ред. В.В. Солодовникова. – М.: Машиностроение., 1965. – 355 с.
4. *Афанасьев В.Н.* Динамические системы управления с неполной информацией. Алгоритмическое конструирование. – М.: КомКнига, 2007. – 216 с.
5. *Афанасьев В.Н., Данилина А.Н.* Алгоритмическое конструирование систем управления с неполной информацией –М.: МИЭМ, 1992. 150 с.
6. *Афанасьев В.Н., Букреев В.Г., Зайцев А.П. и др.* Электроприводы промышленных роботов с адаптивным управлением // Под ред. В.Н. Афанасьева. – Томск, Изд-во Томского университета, 1987. – 166 с.
7. *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления. – М.: Высшая школа, 2003.–615 с.
8. *Баландин Д.В.,* Коган М.М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. – М.: Физматлит., 2007. – 280 с.
9. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. Изд. 2-е, стереотипное. М.: Едиториал УРСС. 2003. – 216 с.
10. *Бекенбах Э., Беллман Р.* Неравенства. Изд. 2-е, стереотипное. М.: КомКнига. 2007. – 280 с.
11. *Бесекерский В.А., Небылов А.В.* Робастные системы автоматического управления. – М.: Наука, 1983. – 240 с.

12. *Борцов Ю.А., Поляков Н.Д., Путов В.В.* Электромеханические системы с адаптивным и модульным управлением.– Л.: Энергоатомиздат, 1984. – 215 с.
13. *Буков В.Н.* Адаптивные прогнозирующие системы управления полетом. – М.: Наука, 1987, – 230 с.
14. *Вукобратович М., Стокич Д., Кирчански Н.* Неадаптивное и адаптивное управление манипуляционными роботами. – М.: Мир, 1989. – 376 с.
15. *Громыко В.Д., Санковский Е.А.* Самонастраивающиеся системы с моделью. - М.: Энергия, 1974.– 79 с.
16. *Деревицкий Д.П., Фрадков А.Л.* Прикладная теория дискретных адаптивных систем управления. – М.: Наука, 1981.–216 с.
17. Динамика управления роботами // Под ред. Е.И. Юркевича. – М.: Наука, 1984. – 440 с.
18. *Емельянов С.В., Коровин С.К.* Стабилизация неопределенных динамических объектов с непрерывным временем. В сб. Новые методы управления сложными системами.– М.: Наука, 2004.– 87-148.
19. *Емельянов С.В., Коровин С.К.* Наблюдатели состояния для неопределенных систем. Математическое моделирование. Проблемы и результаты. – М.: Наука, 2003. – . 12-35.
20. *Колдингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд.2-е, исправленное. М.: Едиториал УРСС, 2007. – 472 с.
21. *Козлов Ю.М., Юсупов Р.М.* Беспоисковые самонастраивающиеся системы. – М.: Наука, 1969. – 455 с.
22. *Коровин С.К., Фомичев В.В.* Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределенностью. – М.: Физматлит, 2007.–224 с.
23. *Красовский А.А.* Динамика непрерывных самонастраивающихся систем. – М.: Физматгиз, 1963. – 468 с.

24. *Красовский А.А., Буков В.Н., Шендрик В.С.* Универсальные алгоритмы оптимального управления непрерывными процессами. М.: Наука, 1977. *– 272 с.*
25. *Куликовский Р.* Оптимальные и адаптивные процессы в системах автоматического регулирования. – М.: Наука, 1967. – 379 с.
26. *Кунцевич В.М., Лычак М.М.* Синтез оптимальных и адаптивных систем управления. Игровой подход. – Киев: Наукова думка, 1985. – 248 с.
27. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. – М.: Наука, 1977. – 392 с.
28. *Льюнг Л.* Идентификация систем. Теория для пользователя. – М.: Наука, 1991. – 432 с.
29. *Малкин И.Г.* Теория устойчивого движения. Изд. 2-е, стереотипное. М.: Едиториал УРСС. 2004. – 432 с.
30. *Немировский А.С., Цыпкин Я.З.* Об оптимальных алгоритмах адаптивного управления // Автоматика и телемеханика. -1984. -№ 12. – С. 64 – 77.
31. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. Изд. 3-е, испр. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 552 с.
32. *Павлов Б.В., Соловьев И.Г.* Системы прямого адаптивного управления. – М.: Наука, 1989. – 130 с.
33. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление.– М. Наука, 2002. – 303 с.
34. *Саридис Дж.* Самоорганизующиеся системы управления. М.: Наука, 1980. – 400 с.
35. *Сейдж Э., Мелса Дж.* Идентификация систем управления. – М.: Наука, 1974. – 246 с.

36. *Солодовников В.В., Шрамко Л.С.* Расчет и проектирование аналитических самонастраивающихся систем с эталонными моделями. – М.: Машиностроение, 1972. – 270 с.
37. *Тертычный-Даури В.Ю.* Адаптивная механика. – М.: Факториал, 2003. – 464 с.
38. *Тимофеев А.В.* Построение адаптивных систем управления программным движением. – Л.: Энергия, 1980. – 88 с.
39. *Тимофеев А.В.* Адаптивные робототехнические комплексы. Л.: Машиностроение, 1988. – 332 с.
40. *Фомин В.Н.* Рекуррентное оценивание и адаптивная фильтрация. – М.: Наука, 1984. – 288 с.
41. Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А. Адаптивное управление динамическими объектами. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
42. *Фрадков А.Л.* Адаптивное управление в сложных системах. М.: Наука, 1990. – 200 с.
43. *Цыкунов А.М.* Адаптивное управление объектами с последействием. – М.: Наука, 1984. – 214 с.
44. *Цыпкин Я.З.* Основы информационной теории идентификации. – М.: Наука, 1984. – 320 с.
45. *Эйкхофф П.* Основы идентификации систем управления. Оценивание параметров и состояния. – М.: Мир, 1975. -683 с.
46. *Ядыкин И.Б., Шумский В.М., Овсепян Ф.А.* Адаптивное управление непрерывными технологическими процессами. – М.: Машиностроение, 1985. – 240 с.

Дополнительная литература

1. *Аксенов Г.С., Фомин В.Н.* Метод функций Ляпунова в задаче синтеза адаптивных регуляторов // Вопросы кибернетики. Адаптивные системы управления. – М.: Научный совет по кибернетики АН СССР, 1979 – С. 69-93.
2. *Аксенов Г.С., Фомин В.Н.* К задаче об адаптивном управлении манипулятором // Вопросы кибернетики. Адаптивные системы управления. – М.: Научный совет по кибернетики АН СССР, 1976 – С. 164-168.
3. Адаптивные самонастраивающиеся системы автоматического управления / под ред. В.В. Солодовникова. – Машиностроение, 1965. – 355 с.
4. *Андерсон Б., Битмид Р., Джонсон К. и др.* Устойчивость адаптивных систем. – М.: Мир, 1989. – 264 с.
5. *Андриевский Б.Р., Блажкин А.Т., Деревицкий Д.П., Фрадков А.Л.* Метод исследования динамики адаптивных систем управления летательными аппаратами // Управление в пространстве. – М.: Наука, 1976. – Т.1. – С. 149-153.
6. *Архипов М.В., Буков В.Н.* Оценивание в адаптивной оптимальной системе управления // Автоматика и телемеханика. – 1992. - № 5. – С. 82-88.
7. *Атанс М., Фалб П.* Оптимальное управление. – М.: Машиностроение, 1968. – *764 с.*
8. *Афанасьев В.Н., Данилина А.Н.* Вывод и сопровождение нестационарного объекта управления по заданной траектории // Автоматика и телемеханика. – 1979. № 12. – С. 87-94.
9. *Афанасьев В.Н., Данилина А.Н.* Алгоритмическое конструирование систем управления с неполной информацией. – М.: МИЭМ, 1985. – 93 с.

10.*Афанасьев В.Н., Данилина А.Н., Грачева С.С.* Субоптимальное управление: HL алгоритмы решения задач стабилизации // Теория и системы управления. – 1995. - № 4.

11.*Афанасьев В.Н., Неусыпин К.А.* Метод компенсации динамических ошибок нестационарных систем // Автоматика и телемеханика. – 1992. - № 6. – С. 4-17.

12.*Афанасьев В.Н., Титов В.А.* Конструирование нестационарного закона стабилизации с помощью функций Гамильтона // Автоматика и телемеханика. – 1983. - № 5. – С. 87-94..

13.*Афанасьев В.Н., Фурасов В.Д.* Синтез регуляторов, самонастраивающихся при неполной информации о состоянии объекта // Автоматика и телемеханика. – 1976. - № 8. – С. 87-94.

14.*Балакришнан А.* Введение в теорию оптимизации в гильбертовом пространстве. - М.: Мир, 1974. – 259 с.

15.*Болтянский В.Г.* Математические методы оптимального управления. – М.: Наука, 1969. – 408 с.

16.*Брусин В.А.* Синтез робастного регулятора в задаче слежения в условиях неопределенности // Докл. РАН. – 1998. Т. 363, № 5. С. 607-609.

17.*Коган М.М.* Оптимальные робастные законы управления линейными неопределенными системами // Докл. АН РАН. – 1998. – Т. 362. № 2.

18.*Коган М.М.* Теоретико-игровой подход к синтезу робастных регуляторов // Автоматика и телемеханика. – 1997. - № 4. – С. 22-30.

19.*Коровин С.К., Нерсиян А.А., Нисензон Ю.Е.* Управление по выходу линейными неопределенными объектами // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1990. № 1. - С. 67-73.

20.*Красовский А.А.* Динамика непрерывных самонастраивающихся систем. – М.: Физматгиз, 1963. – 468 с.

21. *Красовский А.А.* Субоптимальный адаптивный алгоритм оценивания непрерывных процессов // Докл. АН СССР. –1976. –Т. 230. № 3. – С. 528-540.
22. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. –М.: Наука, 1968.–475 с.
23. *Крутова И.Н., Рутковский В.Ю.* Самонастраивающиеся системы с эталонной моделью // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1964.- № 1. – С. 124-133.
24. *Ландау И.Д.* Адаптивные системы с эталонной моделью. Что возможно и почему? – Труды американского института инженеров механиков. Серия С. Динамические системы и управление. – 1972. № 2. – С. 119-132.
25. *Летов А.М.* Аналитическое конструирование регуляторов // Автоматика и телемеханика. 1960. –I, № 4. - С. 433-435: II, № 5. – С. 563-568: III, № 6. – С. 661-665.
26. *Летов А.М.* Аналитическое конструирование регуляторов // Нелинейные системы автоматического управления. Нелинейная оптимизация систем автоматического управления. – М.: Машиностроение, 1970. –С. 57-87.
27. *Павлов Б.В., Соловьев И.Г.* Системы прямого адаптивного управления. – М.: Наука, 1989. – 130 с.
28. *Пенев Г.Д., Якубович В.А.* О некоторых задачах адаптивного управления // Докл. АН СССР. – 1971. –Т. № 4. –С. 787-790.
29. *Петров Б.Н., Крутько П.Д.* Алгоритмическое конструирование оптимальных регуляторов при неполной информации о состоянии объекта // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. -1972. - № 6. С.186-199.
30. *Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З.* Псевдоградиентные алгоритмы адаптации и обучения // Автоматика и телемеханика. -1973. № 3. - С. 73-84.

31. *Понамаренко В.И., Якубович В.А.* Метод рекуррентных целевых неравенств в задачах адаптивного субоптимального управления динамическими объектами // Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. – М.: Научный совет по кибернетики АН СССР, 1977. -С. 16-28.
32. *Серегин В.И.* Синтез асимптотически устойчивого алгоритма идентификации нелинейной нестационарной системы прямым методом Ляпунова // Автоматика и телемеханика. – 1978. - № 4. – С. 28-32.
33. *Тертычный В.Ю.* Конечная сходимость самонастраивающегося алгоритма адаптации // Автоматика и телемеханика. – 1985. - № 12. – С. 156-160.
34. *Тертычный В.Ю.* Оценивание параметров управляемых динамических систем в условиях параметрического неизвестного дрейфа // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1988. – № 1 – С.93-100.
35. *Тимофеев А.В., Якубович В.А.* Адаптивное управление программным движением робота-манипулятора // Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. – М.: Научный сове по кибернетике АН СССР, 1978. - С. 170-174.
36. *Тихонов В.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979. - 288 с.
37. *Уланов Е.В.* Управление динамическими системами с неизвестными параметрами без измерения производных // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1989. № 4. – С. 3-8.
38. *Уткин В.И.* Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. – М.: Наука, 1981. – 367 с.
39. *Фрадков А.Л.* Синтез адаптивных систем управления нелинейными сингулярно возмущенными объектами // Автоматика и телемеханика. – 1987. - № 6. – С. 100-110.

40. *Хейсин В.Е.* Итеративные процедуры минимизации в условиях дрейфа экстремума // Автоматика и телемеханика. – 1976. - № 11. -С. 91-101.
41. *Цыпкин Я.З.* Адаптация и обучение в автоматических системах. – М.: Наука. 1968. – 399 с.
42. *Цыпкин Я.З.* Оптимальные адаптивные системы управления объектами с *запаздыванием // Автоматика и телемеханика. – 1986. - № 8. -С. 5-24.*
43. *Amato F., Pirouti A., Scala S.* Necessary and sufficient conditions for quadratic stability and stabilizability of uncertain linear time-varying systems // IEEE Transaction on Automatic Control. 1996. V. 41. P. 125-128.
44. *Astrom K.J.* Theory and applications of adaptive control – a survey // Automatica. – 1983. – V. 19, № 5. – P. 471-486.
45. *Astrom K.J.* Adaptive feedback control – a survey // Proc. IEEE. – 1987. – V. 75, № 2. – P. 187-217.
46. *Barmish B.R.* New tools for robustness of linear systems. – NY.: Macmillan, 1994.
47. *Bastin G., Grvers M.R.,* Stable adaptive observers for nonlinear time varying systems. // IEEE Transaction on Automatic Control. 1988. V. 33. P. 650-658.
48. *Bernstein D.S., Haddad W.M.* Robust stability and performance analysis for state-space systems via quadratic Lyapunov bounds // SIAM. J. Matrix Anal. 1990. V. II. P. 239-271.
49. *Egardt B.* Stability of adaptive controllers. – NY. Springer, 1979. – 214 p.
50. Goodwin G., Payne L. Approachement between continues and discrete model reference adaptive control // Automatica. – 1986. – V.22, № 2. – P. 199-207.
51. *Ikeda M., Siljak D.D.* Optimality and robustness of Linear-Quadratic control for nonlinear systems // Automatica. – 1989. – V. 26, № 5. – P. 499-511.

52. *Ioannou P.A., Kokotovic P,V,* Adaptive systems reduced model. – Heidelberg: Springer-Verlag, 1983. – 164 p.
53. *Ioannou P.A., Kokotovic P.V.* Robust redesign of adaptive control // IEEE Transaction on Automatic Control. 1984. V. 29. № 3. P. 202-211.
54. *Kanellakopoulos I., Kokotovic P.V., Morse A.S.* Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems // IEEE Transaction on Automatic Control. 1991. V. 36 № 11. P. 1241-1253.
55. *Kanellakopoulos I., Kokotovic P.V.,* Morse A.S. Adaptive feedback linearization of nonlinear systems // Foundations of adaptive control. – Berlin: Springer-Verlag, 1991. – P. 311-346.
56. *Khargoneker P.P., Petersen I.R., Zhon K.* Robust stabilization of uncertain linear systems: Quadratic stabilizability and H∞ control theory // IEEE Transaction on Automatic Control. 1990. V. 35. № 6. P. 356-361.
57. *Kreisselmeier G.* Adaptive control of class of slowly time-varying plants // Syst. And Contr. Lett. – 1986. -№ 8. – P. 97-193.
58. *Kreisselmeier G., Anderson B.D.* Robust model reference adaptive control // IEEE Transaction on Automatic Control. 1986. V. 31. № 12 P. 127-133.
59. Kudva P., Narendra K.S. Synthesis of an adaptive observer using Lyapunov' s direct method // Int. J. Control. 1973. – V.18. № 6. P. 1201-1210.
60. *Kung M., Narendra K.S.* Stability analysis of discrete-time adaptive control algorithm having a polynomial input // // IEEE Transaction on Automatic Control. 1983. V. 28. № 12 P. 1110-1112.
61. *Landau J.D. A* survey on model reference adaptive techniques-theory and applications // Automatica. – 1974. V. 10. № 4. P. 353-379.
62. *Landau J.D.* Adaptive control systems. The model reference approach. – NY.: Marcel Dekker, 1979. –406.
63. *Leitman G.* On the efficacy of nonlinear control in uncertain linear systems // J. Dynam. Syst. Measurement Control. June, 1981. V. 102.

64.*Landorff J.D., Carroll R.I.* Survey of adaptive control using Lyapunov design // Int. J. Control. – 1973. V. 18, № 5. – P. 897-914.
65.*Marino R.* Adaptive observers for single nonlinear systems // IEEE Transaction on Automatic Control. 1990. V. 35. № 9. - P. 1054-1058.
66.*Middleton R.H., Goodwin G.C., Hill D.J., Mayne D.Q.* Design issues in adaptive control // IEEE Transaction on Automatic Control. 1988. V. 33. № 1. - P. 50-58.
67.*Narendra K.S., Annaswamy A.M., Singh R.P.* A general approach to the stability of adaptive systems // Int. J. Control. 1985. V. 41. № 1. - P. 193-216.
68.*Petersen I.R.* Notions of stabilizability and controllability for class of uncertain linear systems // Int. J. Control. 1987. V. 46. № 2. P. 409-422.
69.*Petersen I.R., McFarlene D.C.* Optimal quarantined cost control and filtering for uncertain linear systems // IEEE Transaction on Automatic Control. 1994. V. 39. P. 1971-1977.
70.*Petersen I.R., Narendra K.S.* Bounded error adaptive control // IEEE Transaction on Automatic Control. 1982. V. 27, № 6. - P. 1161-1168.
71.*Riele B.D., Kokotovich P.V.* Stability analysis of an adaptive systems with unmodeled dynamics // Int. J. Control. 1985. V. 41. № 2. - P. 389-402.
72.*Ryan E.P.* Adaptive stabilization of a class of uncertain nonlinear systems: a differential inclusion approach // Syst. and Contr. Lett. – 1988. -№ 10 – P. 95-100.
73.*Ryan E.P.* Adaptive stabilization of multi-input nonlinear systems // Int. J. Robust and Nonlinear Control. – 1993. -№ 3. P. 169-181.
74.*Sastry S.S., Isidori A.* Adaptive control of linearizable systems // IEEE Transaction on Automatic Control. 1989. V. 34. № 11. - P. 1123-1131.
75.*Siljak D.D.* Parameter space methods for robust control design: a guided tour // IEEE Transaction on Automatic Control. 1989. V. 34. № 4. - P. 674-688.
76.*Trulsson E., Ljung L.* Adaptive control based on explicit criteria minimization // Avtomatica. – 1985. – V. 21, № 4. – P. 385-399.

ОПИСАНИЕ КУРСА И ПРОГРАММА

Название курса

«Нейро-нечеткое управление (Управление неопределенными системами)»

Цель и задачи курса

Целью курса является изучение научных основ математического конструирования систем с неполной информацией о состоянии, параметрах и взаимодействии со средой.

Задачами курса являются:

- изучение классической теории самонастраивающихся, самоорганизующихся и адаптивных систем;
- освоение метода алгоритмического конструирования неопределенных систем, основанных на применение основных результатов аналитического конструирования систем управления с полной информацией;
- изучение методов математического конструирования робастных систем;
- изучение методов организации нейро-сетей, как одних из возможных средств реализации алгоритмов адаптации;
- получение навыков математического моделирования гипотетических систем с неполной информацией обладающих свойствами оптимизации по мере получения, накопления и обработки необходимой информации или робастных систем.

Областью знаний и практики, в которых используется теория управления неопределенными системами, являются технические, медицинские, экологические и пр. системы с неполной информацией о состоянии, параметрах и взаимодействии со средой.

Данная дисциплина предназначена для подготовки бакалавров по направлению «Автоматизация и управление» и специалистов по специальности «Управление и информатика в технических системах». Курс является обязательным.

Курс является теоретическим, но предполагает получение практических навыков по разработке неопределенных систем управления. Для усвоения изучаемого материала достаточно сведений из математического анализа, алгебры, функционального анализа, теории вероятности, теории случайных процессов, теории систем.

Инновационность курса по:

- содержанию

Основу курса составляют достижения по созданию теории управления неопределенными системами, полученные за последние 15 лет в основных научных школах мира. К этим методам относятся новые методы построения адаптивных, робастных, робастно-адаптивных линейных и нелинейных систем. Основу теории адаптивных систем составляет метод алгоритмического конструирования систем управления с неполной информацией. К робастным методам анализа устойчивости линейных систем с интервальной параметрической неопределенностью и построению робастных регуляторов, решающих задачу стабилизации объекта, относятся методы: модифицированный метод Михайлова (годограф Цыпкина-Поляка), робастный критерий Найквиста, μ-анализ и синтез, метод робастного D-разбиения, H_∞-оптимизация. К методам робастного управления неопределенными линейными и нелинейными объектами в терминальной постановке задач относятся методы, основанные на применении качественной теории дифференциальных уравнений.

- методике преподавания

Обучение ведется по кредитно-модульной системе. Организация учебного процесса с использованием системы кредитов осуществляется по так называемой «нелинейной» схеме, в отличие от «линейной», действующей в настоящее время в вузах РФ. Основные отличительные черты нелинейной схемы:

- большая свобода выбора учащимися дисциплин, перечисленных в учебном плане,
- личное участие каждого студента в формировании своего индивидуального учебного плана,
- вовлечение в учебный процесс академических консультантов, содействующих студентам в выборе образовательной траектории, в частности, в выборе изучаемых дисциплин,
- введение системы зачетных единиц (з.е.) для оценки трудозатрат студентов и преподавателей по каждой дисциплине,
- широкие полномочия факультета в организации учебного процесса, в том числе, в определении и учете видов педагогической нагрузки преподавателей,
- обеспеченность учебного процесса всеми необходимыми методическими материалами в печатной и электронной формах,
- обязательное использование балльно-рейтинговых систем для оценки усвоения студентами учебных дисциплин.

Кроме традиционных методов ведения лекционных и практических занятий, студентам предоставлена возможность выполнять исследовательские работы. Тематика исследовательских работ и их выполнение подготовит студентов 4 курса к выполнению на качественном уровне выпускных работ на соискание академической степени бакалавра технике и технологии по направлению «Автоматизация и управление».

- литературе

Используются учебники, разработанные автором, монографии и статьи в научных журналах по теории управления нестационарными системами с неполной информацией о состоянии, параметрах и взаимодействии со средой, а именно Емельянов С.В., Коровин С.К., Пупков К.А., Афанасьев В.Н., Прокопов, Носов В.Р., Рутковский В.Ю., Павлов Б.В., Земляков С.Д., Цыпкин Я.З., Поляк Б.Т., Фрадков А.Л., Тимофеев А.И, Astrom K.J., Narendra K.S., Ryan E.P. и др.

- организации учебного процесса

Введен курсовой проект, ориентированный на использование новейших разработок в области управления неопределенными системами и применение пакета прикладных программ MatLab для моделирования гипотетических неопределенных систем различного профиля. Презентация решений задач идентификации нестационарных объектов и управления неопределенными объектами, полученных бакалавриата и магистратуры 2006 и 2007 годов.

Структура курса

Лекции:	54 часа
Семинары:	18 часа
Контрольные работы:	4 часа
Курсовая работа:	10 часов
Самостоятельная работа:	72 часа

Темы лекций:

Лекция 1

Раздел 1. Введение

1.1.Постановка задачи об анализе и управлении неопределенными системами. 1.2. Основные понятия и определения. 1.3. Математические модели неопределенных динамических объектов. 1.4. Виды неопределенности: параметрическая неопределенность, неполная информация о состоянии объекта, нестационарные и нелинейные возмущения.

Самостоятельная работа студента: 2 часа.

Лекции 2,3,4

Раздел 2. Введение в теорию стохастических систем

2.1. Основные сведения теории случайных процессов. 2.2. Вероятностные характеристики и числовые характеристики случайных процессов.

Раздел 3. Линейное оценивание в динамических системах

3.1. Постановка задачи. 3.2. Уравнение Винера-Хопфа. 3.3. Фильтр Калмана-Бюси. 3.4. Случай коррелированных шумов. 3.5. Случай «цветных» шумов. 3.6.Некоторые соотношения нелинейной фильтрации.

Самостоятельная работа студента: 8 часов.

Лекции 5,6

Раздел 4. Управление стохастическими линейными системами с квадратичным функционалом качества

4.1. Постановка задачи. 4.2. Системы с процессами типа «белый» шум. 4.3. Принцип стохастической эквивалентности. 4.4. Поведение оптимальной управляемой системы в среднем. 4.5. Динамическое программирование и детерминированный линейный регулятор. 4.6. Стохастический линейный регулятор.

Самостоятельная работа студента: 3 часа.

Лекция 7

Раздел 5. Алгоритмическое конструирование как метод конструирования систем управления с неполной информацией

5.1. Постановка задачи. 5.2. Общая конструкция множества алгоритмов оптимизации в задачах идентификации и управления нестационарных объектов. 5.3. Связь методов алгоритмического конструирования с методами адаптации.

Самостоятельная работа студента: 2 часа.

Лекции 8,9,10

Раздел 6. Конструирование алгоритмов оптимизации с помощью модифицированного уравнения Винера – Хопфа

6.1. Постановка задачи. 6.2. Общие условия минимума функционала качества. 6.3. Основная конструкция алгоритмов оптимизации в задачах идентификации. 6.4. Модифицированное уравнение Винера – Хопфа в задачах фильтрации нестационарных процессов. 6.5. Система с эталонной моделью. 6.6. Система с комбинированным критерием качества.

6.7. Управление нестационарными объектами в условиях неполной информации.

Самостоятельная работа студента: 9 часа.

Лекции 11,12,13

Раздел 7. Конструирование алгоритмов оптимизации с помощью функций допустимых значений управляющих воздействий

7.1. Постановка задачи. 7.2. Основная конструкция алгоритмов оптимизации, использующая поведение гамильтониана. 7.3. Задача стабилизации нестационарного линейного детерминированного объекта. 7.4. Задача стабилизации нестационарного линейного детерминированного объекта с неполной информацией о состоянии. 7.5. Решение двухточечной краевой задачи общего вида с помощью алгоритмов оптимизации. 7.6. Параметрическое управление нестационарным объектом методом скоростного спуска по лагранжиану.

Самостоятельная работа студента: 7 часа.

Лекция 14

Раздел 8. Конструирование алгоритмов оптимизации с помощью функций Беллмана

8.1. Постановка задачи. 8.2. Основная конструкция алгоритмов оптимизации, использующая функции Беллмана. 8.3. Координатная оптимизация в задаче стабилизации нелинейного объекта.

Самостоятельная работа студента: 2 часа.

Лекции 15, 16, 17

Раздел 9. Робастная устойчивость и стабилизация линейных систем

9.1. Постановка задачи, основные понятия и определения. 9.2. Робастная устойчивость полиномов. 9.3. Робастная устойчивость матриц. 9.4. Робастная устойчивость при неопределенных передаточных матрицах. 9.5. μ-анализ. 9.6. Робастная стабилизация с помощью регуляторов низкого порядка. 9.7. Робастная квадратичная стабилизация. 9.8. Робастная линейно-квадратичная стабилизация. 9.9. Робастная стабилизация с помощью H_∞-оптимизации. 9.10. μ-синтез.

Самостоятельная работа студента: 9 часов.

Лекции 18, 19, 20, 21

Раздел 10. Робастное управление нестационарными линейными объектами

10.1. Дифференциальные игры в задачах конструирования робастного управления линейными системами. 10.2. Робастная инвариантность неопределенных линейных систем. 10.3. Множество возможных робастных управлений линейным объектом. 10.4. Модель линейной детерминированной системы пониженного порядка. 10.5. Линейно - квадратичная задача при неполной информации о состоянии объекта. 10.6. Робастное управление стохастическим нестационарным объектом с неполной информацией о состоянии. 10.7. Задача d-робастного сближения с нестационарным объектом. 10.8. Управление выводом и сопровождением по нестационарной траектории.

Самостоятельная работа студента: 12 часов.

Лекции 22, 23, 24

Раздел 11. Робастное управление нелинейными неопределенными объектами

11.1. Постановка задачи. 11.2. Необходимые условия существования стабилизирующего управления. 11.3. Переходный процесс нелинейной системы в задаче стабилизации. 11.4. Условия существования терминального робастного управления.11.5. Робастное управление билинейным объектом.

Самостоятельная работа студента: 10 часов.

Лекции 25,26

Раздел 12. Технические средства реализации координатно-параметрического, адаптивного и робастного управления

12.1. Средства математического и программного моделирования систем управления различной физической природы. 12.2 Методы удаленного управления неопределенными объектами с использованием средств коммуникации и программных пакетов. 12.3. Нейронная сеть, топология сети, структура сети. 12.4. Многослойные нейронные сети, «быстрые» алгоритмы. 12.4. Частичные отображения. 12.5. Нейронные сети Хопфилда и Хэмминга

Самостоятельная работа студента: 4 часа.

Лекция 27

Обзор пройденного материала.

Теоретический материал дисциплины подкрепляется демонстрацией решения отдельных задач управления неопределенными объектами:

1. Управление по крену летательного объекта. 2. Продольное движение летательного объекта. 3. Управление морским судном. 4. Управление выводом и сопровождением объекта по нестационарной траектории.

Темы семинарских и практических занятий:

Практическое занятие 1

Раздел 1. Неопределенные динамические системы

Математические модели неопределенных линейных и нелинейных объектов. Виды неопределенности: параметрическая неопределенность, неполная информация о состоянии объекта, нестационарные и нелинейные возмущения.

Практические занятия 2, 3

Раздел 2. Стохастические системы

Линейное оценивание в динамических системах. Уравнение Винера-Хопфа. Фильтр Калмана-Бюси. Различные постановки задачи построения оценок случайных процессов, наблюдаемых на фоне помех.

Практическое занятие 4

Раздел 3. Управление стохастическими линейными системами с квадратичным функционалом качества

Системы с процессами типа «белый» шум. Принцип стохастической эквивалентности в задачах построения стохастических систем управления.

Практические занятия 5, 6, 7

Раздел 4. Алгоритмическое конструирование как метод конструирования систем управления с неполной информацией

Конструирование алгоритмов оптимизации с помощью модифицированного уравнения Винера – Хопфа. Алгоритмы оптимизации объектов, находящихся под воздействием параметрического возмущения. Система с эталонной моделью. Задачи идентификации.

Практическое занятие 7

Раздел 5. Конструирование алгоритмов оптимизации с помощью функций допустимых значений управляющих воздействий

Основная конструкция алгоритмов оптимизации, использующая поведение гамильтониана. Задача стабилизации нестационарного линейного детерминированного объекта. Задача стабилизации нестационарного линейного детерминированного объекта с неполной информацией о состоянии. Построение координатно-параметрического управления объектом с неполной информацией о состоянии, параметрах и взаимодействии со средой.

Практические занятия 8,9

Раздел 6. Робастная устойчивость и стабилизация линейных систем

Робастная устойчивость при неопределенных передаточных матрицах. μ-анализ и синтез неопределенных систем. Робастная стабилизация с помощью H_∞-оптимизации. Робастная инвариантность неопределенных линейных систем. Множество возможных робастных управлений линейным объектом. Модель линейной детерминированной системы пониженного порядка. Задача d-робастного сближения с нестационарным объектом. Необходимые условия существования стабилизирующего управления нелинейного объекта. Переходный процесс нелинейной системы в задаче стабилизации. Робастное управление билинейным объектом.

Контрольные работы

Контрольная работа 1

Тема 1.1. Стохастические системы управления

Конструирование стационарного фильтра Калмана-Бюси.

Тема 1.2. Параметрическое управление и идентификация с применением модифицированного уравнения Винера-Хопфа.

Тема 1.3. Н-алгоритмы оптимизации в задачах координатно-параметрического управления.

Продолжительность контрольной работы: 2 часа.

Контрольная работа 2

Тема 2.1. Анализ робастной устойчивости линейных объектов с параметрической интервальной неопределенностью.

Тема 2.2. Стабилизация линейных неопределенных объектов.

Тема 2.3. Терминальное робастное управление неопределенными объектами.

Продолжительность контрольной работы: 2 часа.

По всем темам контрольных работ предлагаются различные математические модели и параметры.

Описание системы контроля знаний

От студентов требуется посещение лекций и работа на семинарах, выполнение курсовой работы, обязательное участие в аттестационно-тестовых испытаниях.

Бальная структура оценки

Форма контроля	
Посещение занятий	1 балл за одно занятие
Активная работа на семинарах (max 8 баллов)	1 балл за работу у доски
Контрольная работа (2 работы)	0-5 баллов за каждую работу
Выполнение и защита курсовой работы	0-10 баллов
Внутри семестровые аттестации на основе выполнения контрольных заданий на темы пройденного материала	0-16 баллов
Итоговое испытание (экзамен)	0-20 баллов
Всего	100 баллов

Курсовая работа выполняется и сдается в срок, указанный в календарном плане. Работы, сданные с опозданием по неуважительной причине, не принимаются и не оцениваются. Таким образом, даже при отлично сданном экзамене (при максимально набранных 20 баллах), студент, не выполнивший курсовую работу или не сдавший работу в установленный срок, не может рассчитывать на общую оценку выше чем «хорошо».

Шкала оценок (академической учет активности студента)

Баллы за семестр	Автоматическая Оценка	Баллы за экзамен	Общая сумма баллов	Итоговая оценка
91 - 100	5	-	100	5
76 - 90	4	0 - 20	76-90 91 – 110	4 5
55 - 75	3	0 - 20	36 – 75 76 – 90 91 - 95	3 4 5
35 - 54	-	0 - 20	55 - 74	3
< 35	-	-	< 35	2

Студенты, набравшие на экзамене менее 5 баллов, получают оценку «неудовлетворительно» независимо от числа набранных в семестре баллов.

Правила выполнения письменных работ (контрольных работ)

Список тем письменных творческих работ и докладов предлагается студентам в начале учебного года. Студент вправе выбрать тему из данного списка или предложить свою (согласовав с преподавателем). Вопросы и задания по контрольным работам становятся известны непосредственно при тестировании. Требования по оформлению работ: полуторный интервал, кегель – 14, цитирование и сноски в соответствии с принятыми стандартами, тщательно выверенность грамматики, орфографии, синтаксиса, текст должен быть не менее 10 страниц. Письменная работа не должна быть реферативного, описательного характера.

Курсовая работа должна содержать обзорную часть проблемы, иметь четкую постановку задачи, содержать теоретические исследования проблемы и материалы математического моделирования с использованием пакета MatLab. Целью письменных работ и курсового проекта является выработка навыков построения систем управления, моделирования и объяснения результатов моделирования.

Контрольная работа заключается в решении задач управления по тематике и методам, соответствующим пройденному материалу. Продолжение контрольной работы – 2 академических часа.

Академическая этика

Все имеющиеся в работе сноски тщательно выверяются и снабжаются «адресами». Не допускается включать в свою работу результаты работ других авторов без указания на это, использовать чужие идеи без указания первоисточника. Это касается и источников, найденных в Интернете. Необходимо указывать полный адрес сайта. В конце работы дается полный список всех источников.

Программа курса УИК

Аннотированное содержание курса

Прежде чем приступить к описанию курса, следует отметить, что название дисциплины «Нейро-нечеткое управление» не точно отображает проблему управления сложными системами. Само название: «нечеткое управление», не корректно. На самом деле задача заключается в управлении сложными объектами с неполной информацией о состоянии, параметрах и взаимодействии со средой. «Нейро-управление» говорит о том, что для реализации алгоритмов, обеспечивающих выполнение задачи управления подобными объектами, предполагается использовать, как одно из возможных средств, нейро-сети.

Правильное и современное название курса: «Неопределенные системы управления». В первой части необходимо рассмотреть методы конструирования систем с неполной информацией о состоянии, параметрах и взаимодействии со средой (адаптивные, робастные, робастно-адаптивные системы). Название первой части: «Конструирование неопределенных систем управления». Во второй части могут быть рассмотрены методы реализации полученных алгоритмов (в том числе и с помощью нейро-сетей).

Раздел 1. Введение

Развитие науки и промышленности сопровождается созданием управляемых объектов различного назначения, повышением требований к надежности и качеству выполняемой работы, усложнением целей, поставленных перед ними. Значительно расширился класс объектов, работающих в условиях неполной априорной и текущей информации об их состоянии, параметрах, взаимодействии со средой. В связи с этим задача конструирования нестационарных динамических систем, работающих в условиях неполной информации (иными словами, в условиях неопределенности), приобрела исключительное значение в современной теории автоматического управления. Это подтверждается большим количеством публикаций, содержащих как разработку научных основ конструирования нестационарных систем, так и результаты реализации разработанных методов для управления конкретными физическими объектами.

Значительное количество методов конструирования и организации систем было разработано для управления подвижными объектами с неконтролируемо меняющимися параметрами в процессе функционирования, в том числе авиационно-космическими, а также для управления нестационарными технологическими объектами.

Потенциальными сферами приложения идей теории управления нестационарными объектами являются биомедицинские процессы с их сложными и неполностью обусловленными биологическими моделями.

В последнее время многими учеными рассматриваются методы, разрабатываемые для управления нестационарными объектами с неполной информацией об их состоянии, параметрах и взаимодействии со средой, в применении к решению задач, которые требуют «интеллектуальных» способностей и умения принимать правильные решения в сложной неопределенно меняющейся обстановке. Это человеко-машинные системы, системы ручного и телеуправления, манипуляторы, биокибернетические системы, системы с искусственным интеллектом.

Бурное развитие микроэлектроники, и в первую очередь, средств вычислительной техники, позволило реализовать сложные алгоритмы управления нестационарными объектами, что, несомненно, повышает их эффективность, надежность, снижает потребление энергоресурсов.

Вместе с тем следует отметить, что единой теории нестационарных систем управления, способных функционировать в различных условиях, накапливая опыт об эффективности своих действий, приспосабливаться к этим условиям и достигать цели управления, еще не существует. Отдельные же методы их конструирования, разработанные до настоящего времени, слабо связаны между собой и основным методом математического проектирования систем с полной информацией – аналитическим конструированием.

Раздел 2. Введение в теорию стохастических систем

Даны определения некоторых математических понятий, соответствующих названию данного раздела, ряд определений теории вероятностей. Даны описания свойств числовых характеристик случайных величин и процессов. Приведены часто встречающиеся функции распределения случайных величин (нормальное распределение, равномерное распределение, биномиальное распределение, распределение Пуассона). Гауссовские марковские случайные процессы. Чисто случайные процессы («белый» шум). Линейные стохастические уравнения.

Раздел 3. Линейное оценивание в динамических системах

Основные результаты теории линейных стохастических систем могут быть сформулированы в «широком смысле» и в «узком смысле». В первом случае изучаются линейные операции над процессами, характеризуемыми только ковариационной функцией. Во втором случае процессы, предполагаются гауссовскими, но при этом допускаются нелинейные оценки и управление. Преимущество представления теории в «широком смысле» заключается в том, что она может быть полностью описана в рамках гильбертовых подпространств и винеровских интегралов, а для ее изложения требуются лишь некоторые сведения из теории меры, но совершенно не нужны интегралы Ито, стохастические исчисления, мартингалы и т.п. Многие из используемых при этом идей перенесены в теорию нелинейной фильтрации и управления. Таким образом, этот раздел курса может рассматриваться как введение в разделы, в которых рассматриваются нелинейные стохастические системы.

Оценивание в линейных динамических системах

При конструировании систем управления часто возникает задача определения оценки состояния системы, подверженной действиям случайных возмущений. Другими словами, требуется определить состояние системы управления в момент времени t на основе измерений ее фазовых координат на интервале времени $[t_0,t]$, производимых с ошибками. Такое выделение полезного сигнала при наличии случайных помех называется фильтрацией. К этой задаче примыкает задача предсказания наиболее вероятного состояния системы или значения полезного сигнала в момент времени $t_1 > t$, т.е. экстраполяция сигнала, а также задача сглаживания измерений при $t_1 < t$. Задачи, связанные с определением наилучшей оценки состояния системы, находящейся под воздействием неконтролируемых случайных, по неполным измерениям ее состояния, содержащим помехи, составляют основу статистической теории оптимальных систем.

За характеристику точности оценки оптимальной системы или ошибку фильтрации часто принимают математическое ожидание квадрата ошибки. Критерий минимума средней квадратический ошибки приводит к наиболее простым алгоритмам определения линейных оптимальных оценок.

В настоящем разделе будут рассматриваться гауссовские марковские процессы, с помощью которых можно довольно часто аппроксимировать многие динамические явления, как в природе, так и те, которые созданы руками человека.

Задача фильтрации заключается в том, чтобы по заданному $y(\tau)$ для $\tau \in [t_0, t]$ построить такую оценку $\hat{x}(t)$ полезного сигнала $x(t)$, которая доставляет минимум среднему квадрату ошибки

$J(\varepsilon) = tr\, M[\varepsilon(t)\ \varepsilon^T(t)]$,

где tr - оператор «след матрицы»,

$\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$.

Получено общее условие минимума средней квадратической ошибки выделения полезного процесса на фоне шумов. Это условие является общим условием, которому должен отвечать оптимальный оператор, принадлежащий некоторому линейному пространству R, и носит название уравнения Винера – Хопфа в ортогональных проекциях. Для стационарных процессов выведено интегральное уравнение Винера – Хопфа.

Вывод соотношений, описывающих фильтр Калмана-Бюси. Смещенные и несмещенные оценки случайного процесса.

В общем случае полезный векторный процесс может порождаться не только белым шумом, но и некоторым детерминированным сигналом. Поэтому проведено обобщение на этот случай с учетом отличных от нуля начальных условий. Проведено построение «обобщенного фильтра», фильтра с «цветными» шумами в измерениях.

Большая часть из встречающихся динамических систем и систем измерений являются нелинейными. Уравнениями оптимальных фильтров, представленных ранее для линейных систем, можно пользоваться в случае нелинейных систем с «белыми» шумами, если провести линеаризацию относительно номинальной траектории или если непрерывно (или от случая к случаю) проводить линеаризацию относительно текущих оценок начиная с априорной. Приведен пример построения линеаризованного фильтра.

Раздел 4. Управление стохастическими линейными системами с квадратичным функционалом качества

Применение методов аналитического конструирования оптимальных управлений основано на определенных допущениях, основным из которых является выбор функционала критерия оптимума. В принципе функционал качества может быть выбран из довольно широкого класса. Однако известные решения задачи аналитического конструирования в замкнутой форме получаются только для квадратического функционала. Поэтому синтез на основе квадратических функционалов имеет широкое применение, кроме того, во многих практических задачах он соответствует их существу.

Квадратичный критерий имеет еще одну замечательную особенность, допускающую возможность значительного упрощения синтеза оптимального управления в линейных системах при случайных возмущениях. Эта особенность состоит в справедливости так называемого «принципа стохастической эквивалентности» или теоремы разделения. Этот принцип позволяет применить результаты аналитического конструирования управления линейными объектами и методы построения оптимальных фильтров, так как задача аналитического конструирования управлений линейными объектами, подверженных случайным возмущениям, с квадратичным критерием качества сводится к двум последовательно решаемым задачам.

Таким образом, важным следствием теоремы разделения является возможность объединения результатов теории линейной фильтрации случайных сигналов и детерминированной теории оптимального управления при синтезе оптимальных систем.

Рассмотрена задача построения оптимального регулятора для линейной системы, возмущаемой гауссовским «белым» шумом, когда критерий качества является квадратичной формой, начальные условия случайны, но точно известно состояние системы. Рассмотрен статистически стационарный случай.

Доказана теорема «разделения» и представлен «принцип стохастической эквивалентности». Найдены уравнения, определяющие поведение управляемой системы в среднем.

Рассмотрен довольно мощный метод аналитического конструирования регуляторов для систем, содержащих аддитивные «белые» шумы в уравнениях системы и измерении координат ее состояния. Этот метод заключается в создании наблюдателя, вырабатывающего оценку состояния системы и играющего роль ее модели. При этом получается, что размерность векторов состояний системы и наблюдателя одинаковы, т.е. модель системы должна быть адекватна в определенном смысле исходной системе.

При применении на практике методов, разработанных в общей теории оптимальных систем (в данном случае метода, который излагается в данном разделе), зачастую возникают значительные трудности из-за сложности объектов управления (многомерность, многосвязанность, наличие существенных нелинейностей), невозможность получения достаточной информации о состоянии объекта и т.д. При решении таких задач закономерен подход, заключающийся в построении «упрощенной» модели системы, синтезе управлений на этой модели и использование полученных управлений на реальном объекте. Эффективность управления в этом случае зависит в первую очередь от адекватности построенной модели процессам, протекающим в исходной системе. При этом предполагается исследование вопросов устойчивости замкнутой системы и точности управления.

Раздел 5. Алгоритмическое конструирование как метод конструирования систем управления с неполной информацией

Главной идеей, определяющей развитие теории управления, была и остается идея оптимальности. Причиной этого является как расширяющийся круг практических задач, которые требуют внедрения автоматического управления, так и появляющиеся, в связи с развитием технических средств, возможности реализации сложных алгоритмов управления. Кроме этого, непрерывно повышаются и требования к эффективности выполнения задач управления, к экономичности, точности, безопасности.

Методы аналитического конструирования, разработанные как для детерминированных, так и для стохастических систем, позволяют на стадии проектирования синтезировать условия (параметры и управления), при которых система будет выполнять поставленную задачу наилучшим образом с позиции заданного функционала качества, другими словами, позволяют синтезировать оптимальную систему.

В большинстве методов аналитического конструирования оптимальных систем, разработанных до сих пор, рассматриваются задачи во временной области с использованием понятия состояния и теории матриц. В общих чертах основной подход к проблеме выглядит следующим образом:

1. определить динамические характеристики объекта в форме дифференциальных уравнений или уравнений в конечных разностях;

2. определить множества допустимых траекторий системы и управлений (ограничения на координаты состояния, управляющие воздействия, задаваемые в виде равенств или неравенств);

3. задать цели управления;

4. задать функцию потерь или функционал качества.

Задачей оптимального управления объектом с полной информацией по отношению к множеству целей, функционалу качества, множеству допустимых управлений, множеству состояний и начальному состоянию объекта в момент начала управления является отыскание управления, принадлежащего допустимому множеству управлений, минимизирующее заданный функционал качества.

Существование оптимального управления не является необходимым: во множестве допустимых управлений может вообще не оказаться управлений, переводящих объект из начального состояния в заданное множество целей.

Синтез оптимальной системы управления осуществляется с использованием необходимых и достаточных условий минимума функционала качества.

Таким образом, применение аналитических методов конструирования требует знания всей информации об объекте, внешней среде и процессов, протекающих внутри системы, т.е. применение аналитических методов конструирования возможно в условиях полной информации.

Главное преимущество аналитических методов заключается в том, что если решение получено, то решен целый класс задач, а не одна специфическая. Именно это свойство придает аналитическим методам большое теоретическое значение.

Сложность большого количества современных систем управления зачастую не позволяет получить заранее достаточно полное описание процессов, протекающих внутри системы, и ее взаимодействия со средой.

Применение аналитических методов для нестационарных систем управления с неполной информацией о входных воздействиях, помехах либо сопряжено с большими вычислительными трудностями, либо не представляется возможным (как в случае синтеза оптимальной системы).

Поэтому правомерен подход к конструированию таких систем, основанный на использовании дополнительных цепей, на которые возлагаются задачи оптимизации системы в смысле выбранного критерия качества в процессе работы системы и по мере накопления и обработки необходимой для этих целей информации.

Метод, основанный на указанном подходе, объединим общим названием – алгоритмическое конструирование нестационарных систем управления.

Таким образом, **задачей управления системой с оптимизацией** (в случае неполной информации о параметрах объекта и его взаимодействия со средой) по отношению к множеству целей, функционалу качества, множеству допустимых управлений, множеству состояний и начальному состоянию объекта в момент начала управления является отыскание координатно - параметрического управления, принадлежащего допустимым множествам управляющих координатных и параметрических воздействий, минимизирующих заданный функционал качества по мере накопления и обработки необходимой и соответствующей информации.

Существование координатно - параметрического управления, оптимизирующего систему с неполной информацией, не является необходимым: а) начальные условия объекта, начальная и/или текущая неопределенность, длительность интервала управления системой могут оказаться такими, что процесс оптимизации может быть не закончен, т.е. перестраиваемые параметры за время управления системой могут не достичь значений, при которых функционал качества достигает минимального значения; б) во множествах допустимых управляющих координатных и/или параметрических воздействий может вообще не оказаться управлений, переводящих объект из начального состояния в заданное множество целей.

Таким образом, если с помощью методов аналитического конструирования можно на стадии проектирования создавать оптимальную систему, то с помощью методов алгоритмического конструирования можно создавать систему, снабженную дополнительными цепями, с помощью которых система в процессе функционирования будет оптимизировать свою работу.

Достаточно часто математическая модель системы управления имеет неполное описание, которое учитывает лишь допустимые области изменения параметров управляемой системы и характеристик ее отдельных элементов без конкретизации самих этих параметров и характеристик. Указанные области могут определяться, например, интервальными ограничениями, соответствующими заданным техническим допускам на систему.

В связи с этим возникает задача построения управления не для одной конкретной, точно заданной системы, а целого семейства систем, параметры и характеристики элементов которых принадлежат заранее известным множествам. В современной литературе по теории управления соответствующая проблема получила название задачи робастного управления.

Таким образом, **задачей робастного управления** по отношению к множеству целей, функционалу качества, множеству допустимых управлений, множеству состояний и начальному состоянию объекта в момент начала управления и множеству возможных значений параметров и характеристик элементов объекта является отыскание управления, принадлежащего допустимому множеству управляющих воздействий, минимизирующее заданный функционал и обеспечивающего перевод системы из начального состояния в заданное множество целей при любых значениях параметров и характеристик элементов объекта, принадлежащих множеству возможных значений.

По существу задача робастного управления может быть отнесена к задачам аналитического конструирования, так как для ее решения используется известная информация о допустимых областях изменения параметров управляемой системы и характеристик ее отдельных элементов без конкретизации самих этих параметров и характеристик.

Существование робастного управления не является необходимым (из самого его определения).

Раздел 6. Конструирование алгоритмов оптимизации с помощью модифицированного уравнения Винера – Хопфа

В настоящем разделе рассматриваются вопросы построения основной конструкции алгоритмов оптимизации нестационарных систем управления, измерение состояния которых производится на фоне помех. Концепция, выработанная при построении алгоритмов оптимизации, может использоваться для решения широкого спектра задач – от построения систем идентификации, решения задач фильтрации нестационарных процессов до построения алгоритмов параметрического управления нестационарными объектами.

Важным фактором успешного решения задачи построения адаптивных систем является выбор структуры уравнений, описывающих поведение системы. Отмечается, что этап выбора структуры модели чрезвычайно ответственен. Уместность, применимость и эффективность построенной оценки существенно зависит от степени достоверности, с которой математическая модель описывает реальную ситуацию (объект, измерения, внешние параметрические возмущения). В большинстве практических задач полная, точная модель вообще отсутствует, и ее построение связано с большими трудностями, а потому задачу построения оценки по измеряемому процессу $y(t)$ приходится решать при неполном знании модели. Еще больше усложняется задача, когда шумы $w(t)$ и $n(t)$ или/и параметры объект меняются неконтролируемым образом.

Кроме того, определение состояния стохастического объекта, описываемого нелинейными дифференциальными уравнениями, по измерениям его фазовых составляющих на фоне помех требует реализации решений нелинейных дифференциальных уравнений. Причем точное построение, например, нелинейного фильтра, невозможно и, что очень важно, получение оценки точности аппроксимации при субоптимальной реализации нелинейного фильтра либо затруднено, либо невозможно. Альтернативным предложением в приведенных ситуациях может быть построение линейной модели с перестраиваемыми параметрами.

Обосновывается применение в качестве основы алгоритмов параметрического управления модифицированного уравнения Винера-Хопфа. Проводится математическое конструирование основной конструкции алгоритмов идентификации нестационарных объектов. Получены условия эффективности алгоритмов идентификации.

Задача линейной фильтрации, первоначально изученная Колмогоровым и Винером в специальном случае, была позднее всесторонне исследована Калманом и Бьюси. Многочисленные приложения подтвердили успех их теории, которая базируется на использовании моделей полезного случайного процесса и шума. Однако реализация «фильтра Калмана – Бьюси» требует знания параметров этих моделей на всем интервале наблюдения. Понятно, что для выделения нестационарного полезного процесса на фоне нестационарных шумов использование в полной мере результатов Калмана – Бьюси невозможно. Кроме того, фильтр Калмана – Бьюси оптимален в среднем. На отдельных реализациях этот фильтр может быть далеко не оптимальным. В данном разделе курса рассматривается задача построения нестационарного фильтра, наделенного способностью оптимизировать свою работу по мере накопления необходимой для этого информации. Фильтр для выделения нестационарного полезного процесса на фоне нестационарных шумов с функционалом качества может быть реализован в виде:

- основная структура фильтра строится с точностью до параметров как фильтр Калмана – Бьюси;
- алгоритмы параметрической оптимизации организуются с помощью модифицированного уравнения Винера – Хопфа и функций чувствительности. Полученные алгоритмы обеспечивают асимптотические свойства процессу оптимизации в смысле заданного функционала качества работы фильтра.

Эталонные модели в задачах адаптивных систем.

Существует большое разнообразие методов использования эталонной модели в адаптивных системах. В настоящем разделе рассматривается задача адаптивного управления нелинейным объектом с линейной эталонной моделью. Роль эталонной модели выполняет наблюдатель. Следует заметить, что случай, когда удается парировать все изменения параметров объекта, вызванные внешними возмущениями, достаточно редкий. Чаще всего количество параметров объекта, выделенных для соответствующего управления, существенно меньше необходимого. В этом случае остальной частью возмущенных параметров, при выполнении ряда условий, можно управлять изменением параметров регулятора. Таким образом, регулятор кроме основной задачи управления объектом выполняет задачу компенсации части параметрических возмущений объекта.

Рассмотрена задача управления линейным нестационарным объектом с квадратичным критерием качества в стохастической постановке.

Раздел 7. Конструирование алгоритмов оптимизации с помощью функций допустимых значений управляющих воздействий

В настоящем разделе рассматривается метод формирования алгоритмов оптимизации нестационарных систем управления, основанный на применении функций допустимых значений управляющих воздействий.

В вариационном исчислении этими функциями являются гамильтонианы. Алгоритмы, организованные с помощью гамильтонианов, могут использоваться как для оптимизации самих нестационарных объектов, если для этой цели выделены соответствующие параметры, так и для оптимизации всей управляемой системы с помощью соответствующей параметрической настройки регуляторов.

Дана общая постановка задачи конструирования системы управления с координатно-параметрической оптимизацией. Рассмотрены различные возможности реализации управления. Параметрическое управление (оптимизация системы производится за счет соответствующего изменения параметров объекта), координатное управление (оптимизация системы управления осуществляется соответствующей перестройкой параметров регулятора), кординатно-параметрическое управление (оптимизация системы управления осуществляется соответствующей перестройкой, как параметров объекта, так и параметров регулятора).

Показано, что поведение гамильтониана при оптимальном управлении принимает вполне определенную траекторию, определяемую решением дифференциального уравнения с краевым условием на правом конце (за исключением стационарного случая, когда гамильтониан не зависит от времени).

В аналитической теории при нахождении оптимальных управлений тот факт, что гамильтониан при этом изменяется по вполне определенной траектории, не используется. Это поведение положено в основу конструкции алгоритмов оптимизации системы управления. Обоснована конструкция алгоритмов оптимизации, использующая поведение гамильтониана. Эти алгоритмы можно отнести к алгоритмам скоростного градиента. Получено условие на максимально возможную скорость изменения возмущенных параметров, при которой алгоритм, в основе которого положено поведение гамильтониана на оптимальной траектории, обеспечит асимптотические свойства процессу параметрической оптимизации.

Продемонстрировано применение конструкций алгоритмов оптимизации нестационарных систем на примере решения задачи математического конструирования системы стабилизации нестационарного линейного объекта (параметрическое управление, координатное управление, координатно-параметрическое управление).

Рассмотрена задача стабилизации линейного детерминированного объекта с неполной информацией о состоянии.

Раздел 8. Конструирование алгоритмов оптимизации с помощью функций Беллмана

В настоящем разделе рассматривается метод формирования алгоритмов оптимизации нестационарных систем управления, основанный на применении функций Беллмана.

Координатная оптимизация в задаче стабилизации нелинейного объекта

Реализовать аналитическими методами синтез оптимального управления методом динамического программирования удается весьма в редких случаях. Основные проблемы связаны с решением нелинейного дифференциального уравнения в частных производных с краевым условием, заданным на правом конце. Если же объект подвергается неконтролируемым параметрическим возмущениям, то решение задачи методом динамического программирования вообще невозможно. Предложим решение задачи управления нестационарным объектом методом параметрической оптимизации, в основе которого лежит метод алгоритмического конструирования. Это решение содержит две принципиальные позиции:

1) функция Беллмана задается изначально;

2) решение уравнения Беллмана обеспечивается за счет управления нестационарным объектом соответствующим алгоритмом параметрической оптимизации.

При этом, естественно, предполагается существование оптимального решения, т.е. существование функции Беллмана, которая является решением уравнения Беллмана.

Алгоритмы, организованные с помощью функций Беллмана, могут использоваться как для оптимизации самих нестационарных объектов, если для этой цели выделены соответствующие параметры, так и для оптимизации всей управляемой системы с помощью соответствующей параметрической настройки регуляторов.

Дана общая постановка задачи управления нестационарной системой с оптимизацией. Выписано уравнение Беллмана для этой задачи. Приведено решение задачи управления стационарным линейным объектом и выписано поведение функции Беллмана на оптимальной траектории. Это уравнение и является «опорным» для определения момента выхода системы из оптимального режима вследствие действия неконтролируемых параметрических возмущений. Представлена основная конструкция алгоритмов оптимизации, использующая поведение функции Беллмана на оптимальной траектории.

Раздел 9. Робастная устойчивость и стабилизация линейных систем

Робастная устойчивость при наличии параметрической неопределенности

В отличие от теории автоматического регулирования, где исследуется устойчивость одной системы, в этом разделе исследуется устойчивость целого семейства систем, соответствующих исходной (номинальной) системе при наличии параметрической неопределенности. Прежде чем перейти к динамическим системам, исследуется робастная устойчивость полиномов. Дается ряд теорем, особое место среди которых, занимает теорема Харитонова. Теореме Харитонова можно придать графическую форму, проверяя поведение годографов (годограф Цыпкина-Поляка). Рассмотрено параметрическое семейство матриц с интервальным характером значений элементов или с аффинное семейство. Вводится определение робастной устойчивости семейства матриц. Введено понятие и определены свойства комплексного радиуса устойчивости семейства матриц. Дается материал по робастной устойчивости при неопределенных передаточных матрицах. Обобщенная схема анализа робастной устойчивости при разнообразных типах неопределенности представлена μ-анализом.

Робастная стабилизация при наличии параметрической неопределенности

Аппарат, применяемый для анализа устойчивости, можно успешно использовать при конструировании регуляторов, обеспечивающих системе устойчивость. Рассматривается робастная стабилизация с помощью регуляторов низкого порядка (конструирование регулятора с помощью робастного *D*-разбиения). Использование конструктивного аппарата функций Ляпунова приводит к возможности использовать матричные линейные неравенства (робастная квадратичная стабилизация). Использование квадратичного функционала Лагранжа для синтеза регулятора, стабилизирующего систему, приводит к уравнению типа Риккати-Лурье (робастная линейно-квадратичная стабилизация). Рассмотрена теория робастной стабилизации с помощью аппарата H_∞. Рассмотренный в этом разделе μ-анализ можно использовать для синтеза регулятора, обеспечивающего системе устойчивость (μ-синтез).

Раздел 10. Робастное управление нестационарными линейными объектами

В первой части данного раздела рассматриваются вопросы построения «оценивателей» и «наблюдателей» состояния динамических объектов с неполной информацией о состоянии и взаимодействии со средой. Задача оценивателей и наблюдателей состоит в построении динамического преобразования выходного (измеряемого) сигнала объекта в наилучшую, в определенном смысле, оценку состояния этого объекта. Однако цели построения оценок разные.

использование минимаксного подхода к построению робастного управления неопределенными объектами производится методами аналитического конструирования. Получаемые оптимальные управления являются функциями состояния системы [2,3], а не доступных для измерения координат. К тому же достаточно часто измерения координат состояния системы производится на фоне помех. Все это приводит к необходимости построения соответствующих ***наблюдателей***, задачей которых является выработка оценки состояния системы по доступным измерениям ее координат. Эти наблюдатели, в силу нестационарности помех и параметров объекта, могут строиться как робастные, адаптивные, робастно-адаптивные.

В отличие от оценивателей, цель построения наблюдателями оценки состояния объекта подчинена задаче успешного выполнения всей задачи управления динамическим неопределенным объектом.

Использование минимаксного подхода к построению робастного управления неопределенными объектами производится методами аналитического конструирования. Получаемые оптимальные управления являются функциями состояния системы, а не доступных для измерения координат. К тому же достаточно часто измерения координат состояния системы производится на фоне помех. Все это приводит к необходимости построения соответствующих ***наблюдателей***, задачей которых является выработка оценки состояния системы по доступным измерениям ее координат. Эти наблюдатели, в силу нестационарности помех и параметров объекта, могут строиться как робастные, адаптивные, робастно-адаптивные.

В отличие от оценивателей, цель построения наблюдателями оценки состояния объекта подчинена задаче успешного выполнения всей задачи управления динамическим неопределенным объектом.

Рассматриваются вопросы построения робастных, адаптивных, робастно-адаптивных наблюдателей и оценивателей. Под адаптацией понимается процесс изменения параметров и структуры наблюдателя, а возможно, и управляющих воздействий на основе текущей информации с целью достижения определенного, обычно оптимального, состояния системы при начальной неопределенности и изменяющихся условиях работы.

Отмечается, что существование адаптивного или робастно-адаптивного управления, оптимизирующего наблюдатель для объекта с неполной информацией, не является необходимым: а) начальные условия объекта и наблюдателя, начальная и/или текущая параметрическая неопределенность, длительность интервала управления системой могут оказаться такими, что процесс оптимизации наблюдателя может быть не закончен, т.е. перестраиваемые параметры наблюдателя за время управления системой могут не достичь значений, при которых обеспечивается наилучшая оценка состояния объекта (т.е. соответствующий функционал качества достигает минимального значения); б) во множествах допустимых управляющих параметрических воздействий может вообще не оказаться управлений, обеспечивающих наилучшую оценку состояния неопределенного объекта.

Робастно-адаптивные наблюдатели

Возможны постановки задач построения наблюдателей, при решении которых нет необходимости реализации всей совокупности алгоритмов параметрической оптимизации. Например, при значительной параметрической неопределенности объекта и небольших изменениях интенсивностей шумов целесообразно вводить параметрическую оптимизацию наблюдателя за счет соответствующих параметров, используя рассмотренные ранее алгоритмы. Тогда параметры матрицы усиления ошибки наблюдения необходимо вычислять на стадии проектирования наблюдателя, используя при этом те же значения матрицы, которые будут использоваться при синтезе робастного управления.

В другом случае, когда параметры объекта изменяются незначительно, но шумы имеют значительную нестационарность, следует оптимизировать наблюдатель за счет соответствующей настройки параметров матриц.

Наблюдатель «минимальной сложности»

Этот наблюдатель называют достаточно часто наблюдателем Луенбергера. Для того чтобы определить структуру наблюдателя «минимальной сложности» рассматривается вначале задача с полной информации о параметрах объекта.

Робастно-адаптивный наблюдатель «минимальной сложности»

В том случае, когда интервал возможных изменений параметров матрицы достаточно широкий, но при этом выполняется условие успешного «отслеживания» параметрами наблюдателя изменений параметров объекта, возможно построение структуры робастно-адаптивного наблюдателя минимальной размерности.

Введено определение d-робастного оценивателя. Выводятся условия существования этого оценивателя.

Известно, что достаточно большое количество объектов управления можно описать с помощью систем линейных дифференциальных уравнений с неполной информацией о параметрах и векторе состояния. При этом критерий качества управления во многих случаях представляет собой квадратичную форму.

Для того чтобы регулятор в терминальной задаче содержал постоянные параметры, матрица штрафа первого слагаемого квадратичного функционала задается в виде положительно определенной матрицы, которая является решением уравнения Риккати – Лурье.

Задача стабилизации

В задаче стабилизации определяется множество неопределенности значений матриц, входящих в уравнение системы, при открытом интервале управления, при которых задача успешно решается. Введено определение: Будем называть систему ***робастно стабилизируемой***, если для неопределенного объекта вида найдется регулятор с постоянными параметрами, который обеспечит асимптотическое движение системы "объект-регулятор" из любого $x_0 \in X_0$ к $x(t) = 0$ при $t \to \infty$.

Задача d-робастного управления

Рассматривается задача с заданным интервалом управления и заданной областью возможных терминальных значений состояния системы. Под этим понимается: состояние системы на правом конце должно подчиняться условию $\| x(t) \| \le d^*$, $d^* \ge 0$.

Отмечается, что построенное робастное управление требует для своей реализации знания всего состояния объекта, что делает его для многих практических задач нереализуемым. Конструирование нестационарной системы с неполной информацией о состоянии системы рассматривается далее.

Для конструирования неопределенных нестационарных систем достаточно мощным аппаратом является аппарат дифференциальных игр. При этом конструирование системы управления ведется в расчете на «худший» случай.

Дополнительную неопределенность в описание системы может вносить координатное возмущение $D(t)z(t)$. В разделе рассматривается задача, достаточно часто встречающаяся, построения системы инвариантной (по крайней мере, по части координат) к этим возмущениям.

В ряде задач управления динамическим объектом требуется построить для его описания математическую модель пониженного порядка. Дано общее решение этой задачи.

Рассмотрены линейно - квадратичные задачи d-робастного управления при неполной информации о состоянии объекта в детерминированной и стохастической постановке.

Раздел 11. Робастное управление нелинейными неопределенными объектами

Нелинейный нестационарный управляемый объект описывается векторным дифференциальным уравнением. Заданы интервалы параметрической неопределенности, цель управления и ограничения на управление. Задача управления объектом заключается в построении управления, доставляющего минимум функционалу качества и выполнению условия $\left|\eta^T x(T)\right| \le d > 0$.

Делаются предположения относительно правой части уравнения, описывающего систему, которые позволяют представить исходное уравнение объекта в окрестности точки $x = 0$ в виде уравнения «первого приближения». Для «наихудших» начальных значений состояний системы и ее параметров строится уравнение мажоранты. Это уравнение используется для синтеза по первому приближению управляющих воздействий. Синтезированное управление обеспечивает отрицательность вещественных частей корней характеристического уравнения системы первого приближения, что обеспечивает выполнение условия устойчивости линейной модели. Использование управления, синтезированного на линейной модели, для исходного нелинейного объекта не изменяет качественной картины расположения траекторий системы «объект-регулятор» в начале координат. Далее выводятся и изучаются необходимые и достаточные условия, при которых построенное управление обеспечивает стабилизацию и ***d***-робастное управление нелинейным неопределенным объектом.

Раздел 12. Технические средства реализации координатно-параметрического, адаптивного и робастного управления

Напоминаются основные средства математического и программного моделирования систем управления различной физической природы (в частности, MatLab). Приводятся примеры и методы удаленного управления неопределенными объектами с использованием средств коммуникации и программных пакетов.

Основные этапы развития теории искусственных нейронных сетей. Определение искусственных нейронных сетей и их классификация. Структура технического нейрона. Многослойные нейронные сети и их аппроксимирующие свойства.

Быстрые нейронные сети являются разновидностью многослойных нейронных сетей прямого распространения. БНС сопоставимы с обычными нейронными сетями примерно в том же отношении как алгоритмы быстрого преобразования Фурье (БПФ) с прямым дискретным преобразованием Фурье. Высокая вычислительная эффективность БНС достигается за счет разумных ограничений на структурную организацию нейронной сети. Структура БНС в какой-то мере повторяет структуру нейронных сетей живой природы, для которых всегда существуют ограничения на размерности рецепторных полей и на связи между нейронами. Показывается, что вопросы структурной организации БНС следует рассматривать на двух уровнях: уровне структурной модели БНС и уровне топологической реализации БНС. Если уровень структурной модели определяет общие свойства БНС по размерностям рецепторных полей и структуре межслойных связей, то уровень топологии определяет конкретную аппаратную или программную реализацию нейронной сети. Оба эти уровня рассмотрения неразрывно связаны между собой.

Среди различных конфигураций искусственных нейронных сетей (НС) встречаются такие, при классификации которых по принципу обучения, строго говоря, не подходят ни обучение с учителем, ни обучение без учителя. В таких сетях весовые коэффициенты синапсов рассчитываются только однажды перед началом функционирования сети на основе информации об обрабатываемых данных, и все обучение сети сводится именно к этому расчету. С одной стороны, предъявление априорной информации можно расценивать, как помощь учителя, но с другой – сеть фактически просто запоминает образцы до того, как на ее вход поступают реальные данные, и не может изменять свое поведение, поэтому говорить о звене обратной связи с "миром" (учителем) не приходится. Из сетей с подобной логикой работы наиболее известны сеть Хопфилда и сеть Хэмминга, которые обычно используются для организации ассоциативной памяти.

Сравнительный анализ нейросетевых вычислительных структур и традиционного программного обеспечения.

Обязательная литература

1. Афанасьев В.Н. Оптимальные системы. Аналитическое конструирование. Изд-во РУДН, 2007.
2. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. – М.: Высшая школа, 2003.
3. Афанасьев В.Н. Динамические системы с неполной информацией. Алгоритмическое конструирование. – М.: КомКнига, 2007. 216 с.
4. Пупков К.А., Егупов Н.Д. Методы робастного, нейро-нечеткого и адаптивного управления. – М.: Изд-во МГТУ им Баумана, 2003.

5. Пупков К.А., Коньков В.Г. Интеллектуальные системы. М.: Изд-во МГТУ им Баумана, 2003.
6. Емельянов С.В., Коровин С.К. Стабилизация неопределенных динамических объектов с непрерывным временем. В сб. «Новые методы управления сложными системами».– М.: Наука, 2004.
7. Емельянов С.В., Коровин С.К. Наблюдатели состояния для неопределенных систем. Математическое моделирование. Проблемы и результаты. – М.: Наука, 2003.
8. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление.– М. Наука, 2002.
9. Цыпкин Я.З. Основы информационной теории идентификации. – М.: Наука, 1984.
10. Дорогов А.Ю., Алексеев А.А. Математические модели быстрых нейронных сетей. В сб. научн. тр. СПбГЭТУ «Системы управления и обработки информации». Вып.490, 1996.

Дополнительная литература

1. Адаптивные самонастраивающиеся системы автоматического управления / под ред. В.В. Солодовникова. – Машиностроение, 1965.
2. Андерсон Б., Битмид Р., Джонсон К. и др. Устойчивость адаптивных систем. – М.: Мир, 1989.
3. Архипов М.В., Буков В.Н. Оценивание в адаптивной оптимальной системе управления // Автоматика и телемеханика. – 1992. - № 5. – С. 82-88.
4. Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление. – М.: Машиностроение, 1968. – 764 с.
5. Афанасьев В.Н., Данилина А.Н. Вывод и сопровождение нестационарного объекта управления по заданной траектории // Автоматика и телемеханика. – 1979. - № 12.

6. Афанасьев В.Н., Данилина А.Н., Грачева С.С. Субоптимальное управление: HL алгоритмы решения задач стабилизации // Теория и системы управления. – 1995. - № 4.
7. Балакришнан А. Введение в теорию оптимизации в гильбертовом пространстве. - М.: Мир, 1974. – 259 с.
8. Беллман Р. Процессы регулирования с адаптацией. – М.: Наука, 1964.
9. Брусин В.А. Синтез робастного регулятора в задаче слежения в условиях неопределенности // Докл. РАН. – 1998. Т. 363, № 5.
10. Коган М.М. Оптимальные робастные законы управления линейными неопределенными системами // Докл. АН РАН. – 1998. – Т. 3.
11. Коровин С.К., Нерсиян А.А., Нисензон Ю.Е. Управление по выходу линейными неопределенными объектами // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1990. № 1.
12. Красовский А.А. Динамика непрерывных самонастраивающихся систем. – М.: Физматгиз, 1963.
13. Красовский Н.Н. Теория управления движением. –М.: Наука, 1968.
14. Павлов Б.В., Соловьев И.Г. Системы прямого адаптивного управления. – М.: Наука, 1989.
15. Петров Б.Н., Крутько П.Д. Алгоритмическое конструирование оптимальных регуляторов при неполной информации о состоянии объекта // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. -1972. - № 6.
16. Серегин В.И. Синтез асимптотически устойчивого алгоритма идентификации нелинейной нестационарной системы прямым методом Ляпунова // Автоматика и телемеханика. – 1978. - № 4. – С. 28-32.
17. Тертычный В.Ю. Конечная сходимость самонастраивающегося алгоритма адаптации // Автоматика и телемеханика. – 1985. - № 12.
18. Тертычный В.Ю. Оценивание параметров управляемых динамических систем в условиях параметрического неизвестного

дрейфа // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1988. – № 1 – С.93-100.

19. Тихонов В.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979. - 288 с.
20. Уткин В.И. Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. – М.: Наука, 1981.
21. Фрадков А.Л. Синтез адаптивных систем управления нелинейными сингулярно возмущенными объектами // Автоматика и телемеханика. – 1987. - № 6.
22. Amato F., Pirouti A., Scala S. Necessary and sufficient conditions for quadratic stability and stabilizability of uncertain linear time-varying systems // IEEE Transaction on Automatic Control. 1996. V. 41.
23. Astrom K.J. Adaptive feedback control – a survey // Proc. IEEE. – 1987. – V. 75, № 2.
24. Barmish B.R. New tools for robustness of linear systems. – NY.: Macmillan, 1994.
25. Bernstein D.S., Haddad W.M. Robust stability and performance analysis for state-space systems via quadratic Lyapunov bounds // SIAM. J. Matrix Anal. 1990. V. II.
26. Egardt B. Stability of adaptive controllers. – NY. Springer, 1979.
27. Goodwin G., Payne L. Approachement between continues and discrete model reference adaptive control // Automatica. – 1986. – V.22, № 2.
28. Ioannou P.A., Kokotovic P.V. Robust redesign of adaptive control // IEEE Transaction on Automatic Control. 1984. V. 29. № 3.
29. Kanellakopoulos I., Kokotovic P.V., Morse A.S. Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems // IEEE Transaction on Automatic Control. 1991. V. 36 № 11.
30. Kreisselmeier G., Anderson B.D. Robust model reference adaptive control // IEEE Transaction on Automatic Control. 1986. V. 31. № 12 P. 127-133.

31. Marino R. Adaptive observers for single nonlinear systems // IEEE Transaction on Automatic Control. 1990. V. 35. № 9.
32. Middleton R.H., Goodwin G.C., Hill D.J., Mayne D.Q. Design issues in adaptive control//IEEE Transaction on Automatic Control.1988.V.33.№ 1
33. Ryan E.P. Adaptive stabilization of multi-input nonlinear systems // Int. J. Robust and Nonlinear Control. – 1993. -№ 3.
34. Sastry S.S., Isidori A. Adaptive control of linearizable systems // IEEE Transaction on Automatic Control. 1989. V. 34. № 11.
35. Siljak D.D. Parameter space methods for robust control design: a guided tour // IEEE Transaction on Automatic Control. 1989. V. 34. № 4.
36. Trulsson E., Ljung L. Adaptive control based on explicit criteria minimization // Avtomatica. – 1985. – V. 21, № 4.

Список тем письменных творческих работ и докладов

1. Задача стабилизации подвижного нестационарного объекта по крену.

Афанасьев В.Н., Носов В.Р., Колмановский В.Б. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа. 2003.
Афанасьев В.Н. Динамические системы управления с неполной информацией. Алгоритмическое конструирование. – М:. КомКнига, 2007.

2. Адаптивные наблюдатели состояния для неопределенных систем.

Афанасьев В.Н. Динамические системы управления с неполной информацией. Алгоритмическое конструирование. – М:. КомКнига, 2007.
Емельянов С.В., Коровин С.К. Наблюдатели состояния для неопределенных систем. Математическое моделирование. Проблемы и результаты. – М.: Наука, 2003.

3. Исследование эффективности алгоритмов адаптации, использующих модифицированное уравнение Винера-Хопфа.

Афанасьев В.Н. Динамические системы управления с неполной информацией. Алгоритмическое конструирование. – М:. КомКнига, 2007.

4. Исследование эффективности алгоритмов адаптации, использующих поведение гамильтониана на оптимальной траектории.

Афанасьев В.Н., Носов В.Р., Колмановский В.Б. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа. 2003.
Афанасьев В.Н. Динамические системы управления с неполной информацией. Алгоритмическое конструирование. – М:. КомКнига, 2007.

5. Робастная устойчивость линейных детерминированных объектов.

Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление.– М. Наука, 2002.

6. Оптимальная траектория перелета на круговую орбиту максимального радиуса

Афанасьев В.Н. Аналитическое конструирование непрерывных систем управления. М.: Изд-во РУДН. 2005.
Брайсон А., Хо Ю-Ши Прикладная теория оптимального управления. М.: Изд-во Мир. 1972.

7. Вертикальный подъем ракеты на максимальную высоту (Задача Годдарда)

Афанасьев В.Н., Носов В.Р., Колмановский В.Б. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа. 2003.
Афанасьев В.Н. Динамические системы управления с неполной информацией. Алгоритмическое конструирование. – М:. КомКнига, 2007.

8. Задача об оптимуме мощности атомного реактора

Афанасьев В.Н., Носов В.Р., Колмановский В.Б. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа. 2003.
Афанасьев В.Н. Динамические системы управления с неполной информацией. Алгоритмическое конструирование. – М:. КомКнига, 2007.

Выполненные творческие работы докладываются студентами на семинарах кафедры. Лучшие работы могут быть рекомендованы для представление на конкурсы Министерства науки и образования.

Курсовая работа

Темы курсовых работ:

1. Построение, моделирование и исследование адаптивного фильтра.
2. Построение, моделирование и исследование системы идентификации нестационарной системы.
3. Построение, моделирование и исследование параметрической оптимизации нестационарной системы.
4. Построение, моделирование и исследование нестационарной системы с параметрической оптимизации регулятора (адаптивное координатное управление).
5. Построение, моделирование и исследование робастного регулятора, стабилизирующего неопределенный объект.

6. Построение, моделирование и исследование d-робастного регулятора линейного объекта.
7. Построение, моделирование и исследование d-робастного регулятора нелинейного объекта.

Задания содержат теоретическую часть и моделирование системы управления с использованием пакета MatLab.

РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ
КАФЕДРА КИБЕРНЕТИКИ И МЕХАТРОНИКИ

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН

Число недель 18 час
Лекций 54 час
Практ..занятий 18час
Консульт. 14,1 час
Зачеты 16,3 час
Всего 124,23 час

учебных занятий по дисциплине «Нейро-нечеткое управление»
индекс специальности 550200 / группы ИУБ 401, 402, 403 / курс 4 / семестр _ / 200_/200_ учебного года
д.т.н., профессора Афанасьева В.Н.

недели	Лекции	Число часов	Практические занятия, срок выполнения	Число часов
1	**Раздел 1.** Введение 1.1.Постановка задачи об анализе и управлении неопределенными системами. 1.2. Основные понятия и определения. 1.3. Математические модели неопределенных динамических объектов. 1.4. Виды неопределенности: параметрическая неопределенность, неполная информация о состоянии объекта, нестационарные и нелинейные возмущения.	2		
2	**Раздел 2**. Введение в теорию стохастических систем. 2.1. Основные сведения теории случайных процессов. 2.2. Вероятностные характеристики и числовые характеристики случайных процессов.	2	**Раздел 1.** Неопределенные динамические системы Математические модели неопределенных линейных и нелинейных объектов. Виды неопределенности: параметрическая неопределенность, неполная информация о состоянии объекта, нестационарные и нелинейные возмущения.	2

3	**Раздел 3.** Линейное оценивание в динамических системах. 3.1. Постановка задачи. 3.2. Уравнение Винера-Хопфа. 3.3. Фильтр Калмана-Бюси			
4	. 3.4. Случай коррелированных шумов. 3.5. Случай «цветных» шумов. 3.6. Некоторые соотношения нелинейной фильтрации.	2	**Раздел 2**. Стохастические системы Линейное оценивание в динамических системах. Уравнение Винера-Хопфа. Фильтр Калмана-Бюси.	
5	**Раздел 4.** Управление стохастическими линейными системами с квадратическим функционалом качества 4.1. Постановка задачи. 4.2. Системы с процессами типа «белый» шум. 4.3. Принцип стохастической эквивалентности.	2	**Выдача заданий на курсовое проектирование**	
6	4.4. Поведение оптимальной управляемой системы в среднем. 4.5. Динамическое программирование и детерминированный линейный регулятор. 4.6. Стохастический линейный регулятор.	2	**Раздел 2**. Стохастические системы Различные постановки задачи построения оценок случайных процессов, наблюдаемых на фоне помех.	2
7	**Раздел 5**. Алгоритмическое конструирование как метод конструирования систем управления с неполной информацией. 5.1. Постановка задачи. 5.2. Общая конструкция множества алгоритмов оптимизации в задачах идентификации и управления нестационарных объектов. 5.3. Связь методов алгоритмического конструирования с методами адаптации.	2		
8	**Раздел 6.** Конструирование алгоритмов оптимизации с помощью модифицированного уравнения Винера – Хопфа. 6.1. Постановка задачи. 6.2. Общие условия минимума функционала качества.	2	**Раздел 3.** Управление стохастическими линейными системами с квадратичным функционалом качества Системы с процессами типа «белый» шум. Принцип стохастической эквивалентности в задачах построения стохастических систем управления.	2

9	6.3. Основная конструкция алгоритмов оптимизации в задачах идентификации. 6.4. Модифицированное уравнение Винера – Хопфа в задачах фильтрации нестационарных процессов.	2	**Контрольная работа**: задачи из пройденного материала	
10	6.5. Система с эталонной моделью. 6.6. Система с комбинированным критерием качества. 6.7. Управление нестационарными объектами в условиях неполной информации.	2	**Раздел 4**. Алгоритмическое конструирование как метод конструирования систем управления с неполной информацией Конструирование алгоритмов оптимизации с помощью модифицированного уравнения Винера – Хопфа.	2
11	**Раздел 7** Конструирование алгоритмов оптимизации с помощью функций допустимых значений управляющих воздействий. 7.1. Постановка задачи. 7.2. Основная конструкция алгоритмов оптимизации, использующая поведение гамильтониана. 7.3. Задача стабилизации нестационарного линейного детерминированного объекта.	2		
12	7.4. Задача стабилизации нестационарного линейного детерминированного объекта с неполной информацией о состоянии.	2	Алгоритмы оптимизации объектов, находящихся под воздействием параметрического возмущения.	2
13	7.5. Решение двухточечной краевой задачи общего вида с помощью алгоритмов оптимизации. 7.6. Параметрическое управление нестационарным объектом методом скоростного спуска по лагранжиану.	2		
14	**Раздел 8**. Конструирование алгоритмов оптимизации с помощью функций Беллмана. 8.1. Постановка задачи. 8.2. Основная конструкция алгоритмов оптимизации, использующая функции Беллмана. 8.3.	2	Система с эталонной моделью. Задачи идентификации.	2

	Алгоритмический метод решения уравнения Беллмана в задаче стабилизации нелинейного объекта.			
15	**Раздел 9**. Робастная устойчивость и стабилизация линейных систем 9.1. Постановка задачи, основные понятия и определения. 9.2. Робастная устойчивость полиномов. 9.3. Робастная устойчивость матриц.	2		
16	9.4. Робастная устойчивость при неопределенных передаточных матрицах. 9.5. μ-анализ. 9.6. Робастная стабилизация с помощью регуляторов низкого порядка. 9.7. Робастная квадратичная стабилизация.	2	**Контрольная работа**: задачи из пройденного материала.	2
17	9.8. Робастная линейно-квадратичная стабилизация. 9.9. Робастная стабилизация с помощью H_∞-оптимизации. 9.10. μ-синтез.	2		
18	**Раздел 10**. Робастное управление нестационарными линейными объектами 10.1. Дифференциальные игры в задачах конструирования робастного управления линейными системами. 10.2. Робастная инвариантность неопределенных линейных систем. 10.3. Множество возможных робастных управлений линейным объектом.	2	**Раздел 5**. Конструирование алгоритмов оптимизации с помощью функций допустимых значений управляющих воздействий Основная конструкция алгоритмов оптимизации, использующая поведение гамильтониана. Задача стабилизации нестационарного линейного детерминированного объекта.	2
19	10.4. Модель линейной детерминированной системы пониженного порядка. 10.5. Линейно - квадратичная задача при неполной информации о состоянии объекта.	2		

20	10.6. Робастное управление стохастическим нестационарным объектом с неполной информацией о состоянии.	2	**Раздел 6**. Робастная устойчивость и стабилизация линейных систем Робастная устойчивость при неопределенных передаточных матрицах. μ-анализ и синтез неопределенных систем. Робастная стабилизация с помощью H_∞-оптимизации.	2
21	10.7. Задача d-робастного сближения с нестационарным объектом. 10.8. Управление выводом и сопровождением по нестационарной траектории.	2		
22	**Раздел 11**. Робастное управление нелинейными неопределенными объектами 11.1. Постановка задачи. 11.2. Необходимые условия существования стабилизирующего управления.	2	Робастная инвариантность неопределенных линейных систем..Задача d-робастного сближения с нестационарным объектом. Необходимые условия существования стабилизирующего управления нелинейного объекта.	2
23	11.3. Переходный процесс нелинейной системы в задаче стабилизации.	2		
24	11.4. Условия существования терминального робастного управления.11.5. Робастное управление билинейным объектом.	2		
25	**Раздел 12.** Технические средства реализации координатно-параметрического, адаптивного и робастного управления 12.1. Средства математического и программного моделирования систем управления различной физической природы. 12.2 Методы удаленного управления неопределенными объектами с использованием средств коммуникации и программных пакетов.	2	Задача d-робастного сближения с нестационарным объектом. Необходимые условия существования стабилизирующего управления нелинейного объекта. Переходный процесс нелинейной системы в задаче стабилизации. Робастное управление билинейным объектом.	2

26	12.3. Нейронная сеть, топология сети, структура сети. 12.4. Многослойные нейронные сети, «быстрые» алгоритмы. 12.4. Частичные отображения. 12.5. Нейронные сети Хопфилда и Хэмминга.	2		
27	Обзор пройденного материала	2		

Ведущий дисциплину: профессор В.Н. Афанасьев

Зав.кафедрой: профессор К.А. Пупков

Дата: __ сентября 200_ года