ПРИОРИТЕТНЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ПРОЕКТ «ОБРАЗОВАНИЕ»

РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

А.Л. СКУБАЧЕВСКИЙ, П.Л. ГУРЕВИЧ

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ НЕЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА К НЕЛОКАЛЬНЫМ ПРОБЛЕМАМ ПРОЦЕССОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕПЛА

Учебное пособие

Москва

2008

Инновационная образовательная программа
Российского университета дружбы народов

«Создание комплекса инновационных образовательных программ и формирование инновационной образовательной среды, позволяющих эффективно реализовывать государственные интересы РФ через систему экспорта образовательных услуг»

Экспертное заключение –

доктор физико-математических наук, профессор *В.А. Кондратьев*

Скубачевский А.Л., Гуревич П.Л.

Применение методов нелинейного функционального анализа к нелокальным проблемам процессов распределения тепла: Учеб. пособие. – М.: РУДН, 2008. – 264 с.

Настоящее пособие посвящено теории эллиптических дифференциальных уравнений с нелокальными краевыми условиями и их приложениям к процессам распределения тепла. Пособие в значительной мере основано на исследованиях авторов и на курсах, читавшихся ими для студентов и преподавателей математики в Российском университете дружбы народов, Московском авиационном институте и Университете им. Юстуса Либиха в г. Гиссене (Германия).

Предназначено для студентов бакалавриата, обучающихся по направлению «Математика. Прикладная математика».

Учебное пособие выполнено в рамках инновационной образовательной программы Российского университета дружбы народов, направление «Комплекс экспортоориентированных инновационных образовательных программ по приоритетным направлениям науки и технологий», и входит в состав учебно-методического комплекса, включающего описание курса, программу и электронный учебник.

Оглавление

Основные обозначения

$\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел;

$\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел;

$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел;

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел;

$\mathbb{R}^n$ — n-мерное вещественное пространство;

$\mathbb{C}^n$ — n-мерное комплексное пространство;

$\rho(x, A) = \inf\limits_{y \in A} |x - y|$ — расстояние от точки x до множества A в $\mathbb{R}^n$;

$B_R\big(x^0\big)$ — шар $\{x \in B : \|x - x^0\| < R\}$ в банаховом пространстве B;

$B_R = B_R(0)$;

$[a, b]$ — замкнутый интервал $\{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$;

(a, b) — открытый интервал $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$;

$\overline{Q}$ — замыкание Q;

$\prod$ — прямое произведение;

$\oplus$ — ортогональная сумма;

$\rho(x, A) = \inf\limits_{y \in A} |x - y|$ — расстояние от точки x до множества A в $\mathbb{R}^n$;

$\Box$ — конец доказательства;

$k_1, k_2, \ldots$ и $c_1, c_2, \ldots$ — положительные константы, не зависящие от аргументов или неизвестных функций в неравенстве; в случае других предположений относительно констант это будет оговорено дополнительно.

Введение

I. Обыкновенные дифференциальные уравнения с интегральными краевыми условиями возникают в теории турбулентности (см. работу А. Зоммерфельда [55]) и в теории марковских процессов. Разрешимость и спектральные свойства обыкновенных дифференциальных уравнений с нелокальными краевыми условиями рассматривались М. Пиконе [49, 50], Я. Д. Тамаркиным [37], А. М. Кролом [47], В. А. Ильиным и Е. И. Моисеевым [11, 12] и многими другими.

Одной из первых работ, посвященных нелокальным эллиптическим краевым задачам, была работа Т. Карлемана [42], результаты которой он изложил на пленарном докладе во время Международного конгресса математиков в 1932 г. Т. Карлеман рассмотрел задачу о нахождении голоморфной функции в области Ω, удовлетворяющей нелокальному краевому условию, связывающему значения неизвестной функции в точке t границы $\partial\Omega$ со значениями в точке $\alpha(t)$, где $\alpha(\alpha(t)) \equiv t$ и $\alpha(\partial\Omega) = \partial\Omega$. Данная задача была сведена им к сингулярному интегральному уравнению со сдвигом.

Независимо от указанных работ рассматривались абстрактные нелокальные эллиптические краевые задачи (см., например, работы М. И. Вишика [5] и Ф. Браудера [41]). В то время были известны лишь примеры эллиптических задач с носителями нелокальных членов на границе. Однако общие результаты, полученные в этих работах, образовали позднее теорию линейных операторов в банаховых пространствах [20], которая используется в современной теории эллиптических задач, включая нелокальные задачи.

Новая нелокальная краевая задача для эллиптического дифференциального уравнения, возникающая в теории плазмы, была сформулирована А. В. Бицадзе и А. А. Самарским [4]:

$$(Aw)(x) = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) w_{x_i x_j}(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) w_{x_i}(x) + a_0(x) w(x) = \\ = f_0(x) \qquad (x \in Q), \tag{1}$$

$$\begin{aligned} w(x)|_{M_1} &= b(x) w(\omega(x))|_{M_1} + f_1(x) \quad (x \in M_1), \\ w(x)|_{M_2} &= f_2(x) \qquad\qquad\qquad\qquad\quad (x \in M_2). \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j > 0 \quad (0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n,\ x \in \overline{Q}),$$

$Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей ∂Q, $M_1 \subset \partial Q$ — $(n-1)$-мерное гладкое многообразие, открытое в топологии ∂Q, $M_2 = \partial Q \setminus M_1$ — $(n-1)$-мерное гладкое многообразие; $\omega(x)$ — C^∞-диффеоморфизм, отображающий некоторую окрестность Ω_1 многообразия M_1 на множество $\omega(\Omega_1)$ так, что $\omega(M_1) \subset Q$, $a_{ij}, a_i, a_0, b \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — вещественнозначные функции. Вообще говоря, $\omega(\overline{M}_1) \cap \partial Q \neq \varnothing$, см. рис. 1.

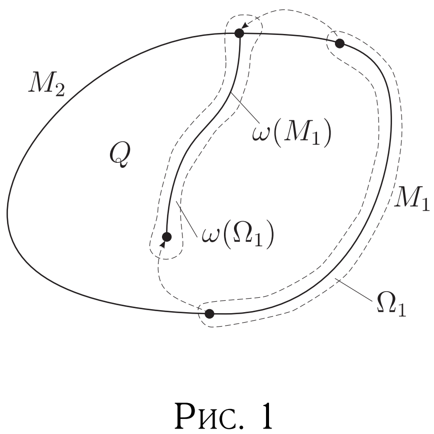

Рис. 1

В [4] была изучена следующая задача:

$$-\triangle w(x) = f_0(x) \quad (x \in Q = (0,2) \times (0,1)), \tag{3}$$

$$\begin{aligned} w(x_1,0) = w(x_1,1) = 0 \qquad\qquad & (0 \leqslant x_1 \leqslant 2), \\ w(0,x_2) = \gamma_1 w(1,x_2), \quad w(2,x_2) = \gamma_2 w(1,x_2) \quad & (0 \leqslant x_2 \leqslant 1) \end{aligned} \tag{4}$$

для $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 1$, где $\triangle$ — оператор Лапласа, $x = (x_1, x_2)$, см. рис. 2.

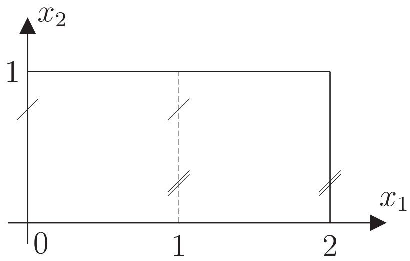

Рис. 2

Поскольку носитель нелокальных членов $\{1\} \times [0,1]$ в задаче (3), (4) имеет пустое пересечение с множеством $\{2\} \times [0,1]$, эта задача была сведена к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Равенства $\gamma_1 = 0$ и $\gamma_2 = 1$ позволяют применить принцип максимума. Таким образом, была доказана единственность классического решения задачи (3), (4). Из единственности решения и теоремы Фредгольма следует существование решения.

В общем случае задача (1), (2) оказалась значительно более сложной. *Вопрос о разрешимости нелокальных эллиптических задач вида* (1), (2) *был сформулирован как нерешенная задача* [27]. Различные случаи эллиптических задач с нелокальными краевыми условиями вида (2) изучались многими математиками. Большинство публикаций было посвящено случаю $M_2 = \varnothing$, $\omega(\partial Q) \cap \partial Q = \varnothing$. В противном случае авторы предполагали, что множество $\omega(M_1)$ удовлетворяет некоторым жестким геометрическим условиям вблизи границы ∂Q, например $\overline{\omega(M_1)} \cap \overline{M}_1 = \varnothing$.

Лишь последние достижения в теории уравнений в частных производных и функционально-дифференциальных уравнений позволили исследовать проблему разрешимости для широкого класса нелокальных эллиптических краевых задач, см. [28–30, 53], а также монографию [54] и приведенную в ней библиографию. В этих работах была создана классификация нелокальных эллиптических краевых задач, основанная на геометрической структуре носителей нелокальных членов:

(a) $M_2 = \varnothing$, $\omega(\partial Q) \subset Q$ (рис. 3),

(b) $M_2 \neq \varnothing$, $\overline{\omega(M_1)} \cap (\overline{M}_1 \setminus M_1) = \varnothing$ (рис. 4),

(c) $M_2 \neq \varnothing$, $\overline{\omega(M_1)} \cap (\overline{M}_1 \setminus M_1) \neq \varnothing$ (рис. 5).

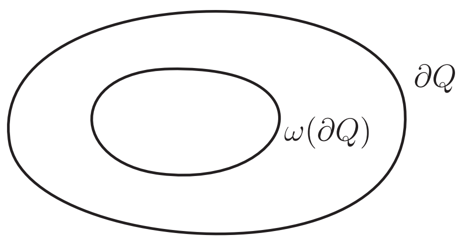

Рис. 3

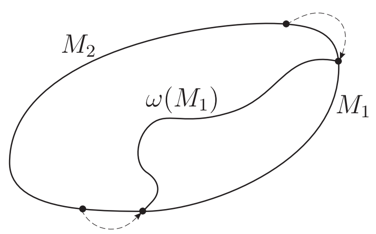

Рис. 4

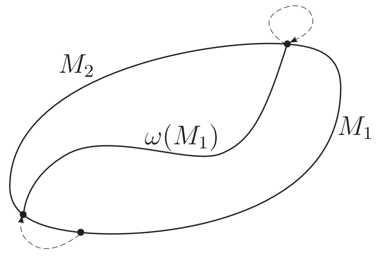

Рис. 5

В соответствии с этой классификацией были изучены фредгольмова и однозначная разрешимость в пространствах Соболева и весовых пространствах Кондратьева, свойства индекса, спектральные свойства соответствующих операторов, асимптотическое поведение решений вблизи точек сопряжения, гладкость обобщенных решений и связь с эллиптическими функционально-дифференциальными уравнениями.

В первом случае, грубо говоря, добавление нелокальных членов не меняет основных свойств эллиптической задачи: имеет место гладкость решений, фредгольмово свойство соответствующего оператора, устойчивость индекса по отношению к произвольным нелокальным возмущениям, дискретность и секториальная структура спектра оператора. Второй и третий случаи значительно более трудные, так как носитель нелокальных членов имеет непустое пересечение с границей. Это приводит к появлению степенных особенностей у решений вблизи множества точек сопряжения $\overline{M}_1 \setminus M_1$, поэтому соответствующие нелокальные эллиптические задачи естественно рассматривать в весовых пространствах. В данном пособии подробно рассматривается первый случай. Ситуация, когда носитель нелокальных членов имеет непустое пересечение с границей, исследуется в области специального вида, а именно цилиндрической области. При этом предполагается, что нелокальные условия заданы на сдвигах оснований цилиндра. Кроме того, подход носителя к границе возможен в задаче термоконтроля. В обоих случаях удается решать задачи в обычных пространствах Соболева. Второй и третий случаи подробно рассмотрены в учебном пособии [33], также написанном в рамках подпрограммы «Инновационного образовательного проекта».

II. Рассмотрим теперь некоторые приложения нелокальных эллиптических краевых задач. Для того чтобы проиллюстрировать взаимосвязь между краевыми задачами для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и эллиптическими дифференциальными уравнениями с нелокальными краевыми условиями, рассмотрим следующий пример:

$$-\Delta R_Q u = f_0(x) \qquad (x \in Q), \tag{5}$$

$$u(x) = 0 \qquad (x \in \partial Q). \tag{6}$$

Здесь

$$Ru(x) = u(x_1, x_2) + \gamma_1 u(x_1 + 1, x_2) + \gamma_2 u(x_1 - 1, x_2),$$

$Q = (0,2) \times (0,1)$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$, $f_0 \in L_2(Q)$. Поскольку разностный оператор R нелокальный, мы должны задавать краевые условия не только на границе ∂Q, но и в некоторой окрестности ∂Q. Поэтому мы вводим ограниченный оператор

$$R_Q = P_Q R I_Q : L_2(Q) \to L_2(Q),$$

где I_Q — оператор продолжения функций из $L_2(Q)$ нулем в $\mathbb{R}^2 \setminus Q$, P_Q — оператор сужения функций из $L_2(\mathbb{R}^2)$ на Q.

Пусть $W^k(Q)$ — пространство Соболева порядка k, и пусть

$$\mathring{W}^1(Q) = \{u \in W^1(Q) : u|_{\partial Q} = 0\},$$

где $u|_{\partial Q}$ — след функции u (см. приложение B). Предположим, что $u \in \mathring{W}^1(Q)$. Обозначим $w = R_Q u$. Тогда $w \in W^1(Q)$ и

$$w|_{x_2=0} = w|_{x_2=1} = 0,$$

$$w|_{x_1=0} = \gamma_1 u|_{x_1=1}, \quad w|_{x_1=1} = u|_{x_1=1}, \quad w|_{x_1=2} = \gamma_2 u|_{x_1=1}.$$

Следовательно, $w(x)$ удовлетворяет нелокальным условиям (4). Другими словами, $R_Q(\mathring{W}^1(Q)) \subset W^1_\gamma(Q)$, где

$$W^1_\gamma(Q) = \{w \in W^1(Q) : w \text{ удовлетворяет условиям (4)}\}.$$

Заметим, что оператор $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$ имеет ограниченный обратный тогда и только тогда, когда $\gamma_1\gamma_2 \neq 1$. В примере 8.4 из [54, гл. 2, § 8] доказано, что если $\gamma_1\gamma_2 \neq 1$, то оператор R_Q отображает $\mathring{W}^1(Q)$ на $W^1_\gamma(Q)$ непрерывно и взаимно однозначно. Это утверждение является частным случаем теоремы об изоморфизме для невырожденного разностного оператора (см. теорему 8.1 в [54, § 8]). Определим неограниченные операторы

$$\mathcal{A}_R : \mathcal{D}(\mathcal{A}_R) \subset L_2(Q) \to L_2(Q), \qquad \mathcal{A}_\gamma : \mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma) \subset L_2(Q) \to L_2(Q),$$

действующие в пространстве обобщенных функций $\mathcal{D}'(Q)$ (см. приложение B) по формулам

$$\mathcal{A}_R u = -\Delta R_Q u \quad (u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_R) = \{u \in \mathring{W}^1(Q) : \mathcal{A}_R u \in L_2(Q)\}),$$

$$\mathcal{A}_\gamma u = -\Delta w \qquad (w \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma) = \{w \in W^1_\gamma(Q) : \mathcal{A}_\gamma w \in L_2(Q)\}).$$

Если $\gamma_1\gamma_2 \neq 1$, то $\mathcal{A}_R = \mathcal{A}_\gamma R_Q$. Таким образом, задачи (3), (4) и (5), (6) эквивалентны для $\gamma_1\gamma_2 \neq 1$. Поэтому мы можем применить некоторые результаты, касающиеся задачи (5), (6), к исследованию задачи (3), (4) (см. примеры 13.3 и 13.4 в [54, гл. 2, § 13]). В частности, если

$$|\gamma_1 + \gamma_2| < 2,$$

то оператор $\mathcal{A}_R$ имеет ограниченный обратный $\mathcal{A}_R^{-1} : L_2(Q) \to \mathring{W}_2^1(Q)$. Следовательно, если $|\gamma_1 + \gamma_2| < 2$, то существует единственное обобщенное решение $w \in W_\gamma^1(Q)$ задачи (3), (4) для любого $f_0 \in L_2(Q)$. Заметим, что в этом случае мы не можем применить принцип максимума. Обратно, некоторые утверждения о разрешимости задачи (3), (4) могут быть использованы в исследовании задачи (5), (6) (см. пример 23.1 в [54, гл. 5, § 23]).

Рассмотрим теперь приложения нелокальных задач к процессам распределения тепла. В настоящем пособии изучаются математические модели задач терморегуляции, возникающие в химических реакторах и системах климат-контроля. Задача заключается в регулировании температуры внутри области (например химического реактора) посредством нагревательных элементов, установленных на границе области. При этом обратная связь осуществляется на основании показателей температурных датчиков, расположенных внутри области (рис. 6).

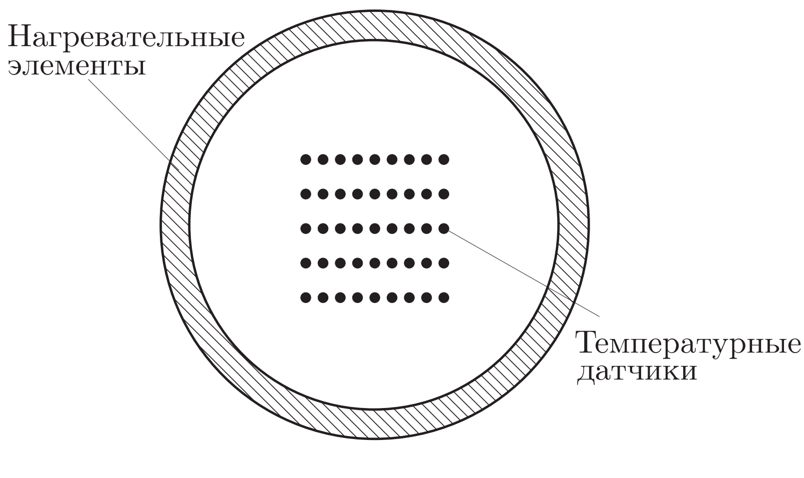

Рис. 6. Схематичное изображение сечения химического реактора

Обозначим через $w(x,t)$ температуру в точке $x \in Q$ в момент времени $t \geqslant 0$. Предположим, что функция $w(x,t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$w_t(x,t) = \Delta w(x,t) - p(x)w(x,t) \quad ((x,t) \in Q_T) \tag{7}$$

с начальным условием

$$w(x,0) = \varphi(x) \quad (x \in Q), \tag{8}$$

где $Q_T = Q \times (0,T)$, $T > 0$, $p \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $p(x) \geqslant 0$ и $\varphi \in L_2(Q)$ — заданная вещественнозначная функция (рис. 7).

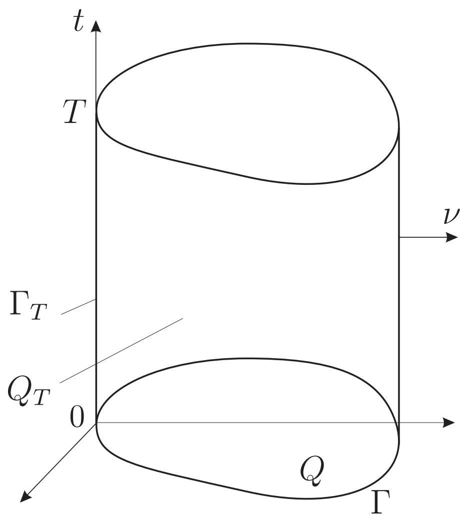

Рис. 7. Области Q и Q_T

Краевое условие содержит вещественнозначную функцию управления $u(t)$, которая регулирует соответственно температуру на границе, поток через границу или температуру окружающей среды:

$$-\gamma\frac{\partial w}{\partial \nu} = \sigma(x)(w(x,t) - w_e(x)) - K(x)(u(t) - u_c) \quad ((x,t) \in \Gamma_T), \tag{9}$$

где $\Gamma_T = \Gamma \times (0,T)$, ν — внешняя нормаль к Γ_T в точке (x,t), $\gamma \geqslant 0$, $\sigma, w_e, K \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — вещественнозначные функции, $\sigma(x) \geqslant 0$, $\sigma(x) \geqslant \sigma_0 > 0$ при $\gamma = 0$, $u_c > 0$.

Для любой функции $v(x,t)$ введем обозначение

$$v_m(t) = \int\limits_Q m(x)v(x,t)\,dx,$$

где $m \in L_\infty(Q)$. Если $w(x,t)$ соответствует температуре в области Q, то $w_m(t)$ — «средняя» температура по области (с весом $m(x)$). В конкретных приложениях свойства функции $m(x)$ определяются свойствами температурных датчиков, расположенных внутри области.

Пусть функция управления $u(t)$ удовлетворяет задаче Коши

$$u'(t) + au(t) = H(w_m, t) \quad (t \in (0,T)), \tag{10}$$

$$u(0) = u_0, \tag{11}$$

где $a > 0$, $u_0 \in \mathbb{R}$, а w — функция, удовлетворяющая соотношениям (3.1.1)–(3.1.3). Функционал $H(g,t)$ ($g \in C[0,T]$) при $t \geqslant 0$ определен следующим образом (ср. [19, гл. 5, § 28]):

$$H(g,t) = \begin{cases} 1, & \text{если } g(t) \leqslant w_1, \\ 1, & \text{если } g(\tau) \in (w_1, w_2) \text{ при } \tau \in [0,t] \\ 1, & \text{если } g(t) \in (w_1, w_2) \text{ и } \exists t_1 \in [0,t) : \\ & g(t_1) = w_1 \text{ и } g(t) \in (w_1, w_2) \ \text{ при } t \in (t_1, t], \\ 0, & \text{если } g(t) \in (w_1, w_2) \text{ и } \exists t_1 \in [0,t) : \\ & g(t_1) = w_2 \text{ и } g(t) \in (w_1, w_2) \ \text{ при } t \in (t_1, t], \\ 0, & \text{если } g(t) \geqslant w_2, \end{cases}$$

где w_1 и w_2 ($w_1 < w_2$) фиксированы (более подробно см. гл. 3). Зависимость функционала H от средней температуры w_m изображена на рис. 8 Поскольку оператор гистерезиса H нелинейный, задача (7)–(11) также нелинейная. С другой стороны, зависимость функционала от «средней» по области температуры обуславливает нелокальные эффекты. Нас будет интересовать вопрос существования и единственности решений задачи (7)–(11), а также периодичности решений задачи (7), (9), (10).

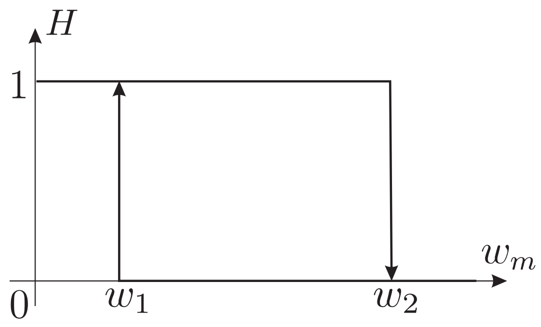

Рис. 8. Зависимость функционала H от средней температуры w_m

Модели регулирования температуры, близкие к рассматриваемой, были впервые предложены К. Гласхофом и Дж. Шпрекельсом (см. работу [45]), где было доказано существование решений задачи термоконтроля.

Вопрос о существовании *периодических* решений оказался значительно более сложным. В работе [43] А. Фридман и Л.-С. Джианг рассмотрели одномерную задачу, предполагая, что температура термостата изменяется мгновенно. Иными словами, вместо уравнения (10) имело место равенство $u(t) = H(w_m, t)$. В этом случае было доказано существование периодического решения. Существование периодических решений одномерной задачи в случае, когда температура термостата меняется постепенно (т. е. в случае, когда $u(t)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению), было доказано Дж. Прюсом [51]. Вопрос о существовании периодических решений в многомерном случае остается открытым.

В данном пособии мы доказываем существование и единственность решения задачи термоконтроля в случае уравнения теплопроводности, а также исследуем *периодичность* решений в многомерном случае. Пара, состоящая из функций $w(x,t)$ и $u(t)$ (температура и управление соответственно), периодичных по времени с одним и тем же периодом, называется *сильным периодическим решением* (см. определения 3.3.1 и 3.3.2). Наряду с сильным периодическим решением мы вводим понятие *периодического в среднем решения*. Под периодическим в среднем решением понимаем такую пару $(w(x,t),u(t))$, что «средняя» температура и функция управления периодичны по времени с одним и тем же периодом (см. определение 3.3.3). Основной результат, который будет доказан в гл. 3, — так называемое *условное существование периодического решения*. Мы покажем, что существование периодического в среднем решения влечет существование сильного периодического решения с тем же периодом.

Далее мы рассмотрим частный случай задачи термоконтроля, а именно предположим, что на границе контролируется тепловой поток (т. е. краевые условия являются условиями Неймана), а температурные датчики распределены по всей области равномерно. В этом случае мы докажем существование периодического в среднем решения. Следовательно, применяя сформулированный выше общий результат, мы заключаем, что существует также сильное периодическое решение.

III. Пособие состоит из трех глав и приложения.

Глава 1 посвящена обыкновенным дифференциальным уравнениям с нелокальными краевыми условиями и краевым задачам для дифференциально-разностных уравнений в одномерном случае. Основная цель этой главы — продемонстрировать некоторые методы этой работы в простейшем случае и получить вспомогательные результаты, используемые в других главах.

В § 1.1 рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка со спектральным параметром и нелокальными краевыми условиями, связывающими значения неизвестной функции на концах интервала со значениями на некотором компакте внутри интервала. В частности, этот компакт может состоять из конечного числа точек. Выводятся априорные оценки решений в пространствах Соболева с нормами, зависящими от спектрального параметра. Как следствие, получена фредгольмовость соответствующего оператора, дискретность и секториальную структуру спектра.

В § 1.2 будут изучены свойства разностных операторов на конечном интервале $(0,d)$. Основной результат этого параграфа заключается в том, что невырожденный разностный оператор отображает непрерывно и взаимно однозначно пространство Соболева $\mathring{W}^1(0,d)$ на пространство $W^1_\gamma(0,d)$, которое является подпространством функций из $W^1(0,d)$, связывающих значения функций на концах интервала $(0,d)$ со значениями в некоторых внутренних точках.

В § 1.3 исследуются краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений. Вышеупомянутое свойство разностного оператора позволяет свести краевую задачу для дифференциально-разностного уравнения второго порядка к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка с нелокальными краевыми условиями и применить результаты § 1.1. Используя этот подход, мы докажем, что соответствующий дифференциально-разностный оператор фредгольмов и имеет тривиальный индекс, а гладкость обобщенных решений сохраняется на некоторых подынтервалах. Известно, что гладкость обобщенных решений может нарушаться внутри интервала $(0,d)$, см. пример 1.3.2.

Применяя идею фридрихсова расширения в случае, когда симметрическая часть разностного оператора положительно определена, мы докажем дискретность и секториальную структуру спектра. В дальнейшем мы используем этот результат в доказательстве однозначной разрешимости нелокальной эллиптической краевой задачи в двугранном угле (см. § 2.3, пример 2.3.2, в [33]).

В § 1.4 рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $2m$ с параметром и общими краевыми условиями, содержащими нелокальные члены. Этот параграф является обобщением § 1.1. С другой стороны, он будет использоваться для исследования нелокальных эллиптических краевых задач в плоских углах (см. § 2.1 в [33]).

В гл. 2 исследуются эллиптические дифференциальные уравнения с носителями нелокальных членов на некотором компакте внутри области. Такие задачи можно рассматривать как обобщение задачи (1), (2) в первом случае.

В § 2.1 изучается уравнение

$$Au = \sum_{\beta+|\alpha|\leqslant 2m} a_{\alpha\beta}(x)\lambda^{\beta}D^{\alpha}u(x) = f_0(x) \qquad (x \in Q) \tag{12}$$

с нелокальными краевыми условиями

$$B_{\mu}u = \sum_{s=0}^{S} \sum_{\beta+|\alpha|\leqslant m_{\mu}} b_{\mu s\alpha\beta}(x)\lambda^{\beta}(D^{\alpha}u)(\omega_s(x))|_{\partial Q} = f_{\mu}(x) \qquad (x \in \partial Q,\ \mu = 1, \dots, m). \tag{13}$$

Здесь $a_{\alpha\beta}, b_{\mu s\alpha\beta} \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ — комплекснозначные функции, $n \geqslant 2$, $Q \in \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial Q \in C^{\infty}$, λ — комплексный параметр, ω_s — C^∞-диффеоморфизмы, отображающие некоторую окрестность Ω границы ∂Q на множество $\omega_s(\Omega)$ так, что $\overline{\omega_s(\Omega)} \subset Q$ при $s > 0$ (рис. 9), $\omega_0(x) \equiv x$, $S \in \mathbb{N}$. Мы будем предполагать, что операторы

$$\sum_{\beta+|\alpha|=2m} a_{\alpha\beta}(x) q^\beta D^\alpha, \qquad \sum_{\beta+|\alpha|=m_\mu} b_{\mu 0\alpha\beta}(x) q^\beta D^\alpha \quad (\mu = 1, \ldots, m)$$

удовлетворяют условиям эллиптичности с параметром λ в угле

$$\theta = \{\lambda \in \mathbb{C} : \varphi_1 \leqslant \arg \lambda \leqslant \varphi_2\}$$

в смысле Аграновича и Вишика (см. условия C.3 и C.4). Мы получим априорные оценки решений в пространствах Соболева и докажем существование и единственность решения для достаточно больших значений параметра $\lambda \in \theta$. Эти результаты обобщены на случай абстрактных нелокальных членов с носителями внутри области.

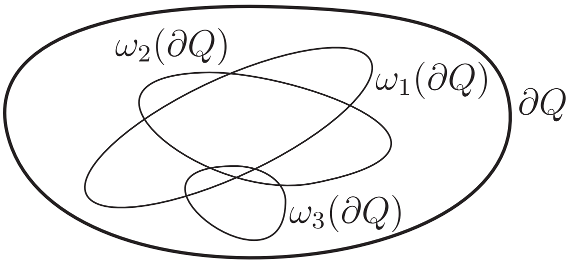

Рис. 9

В § 2.2 рассматривается нелокальная задача

$$Au = \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) = f_0(x) \qquad (x \in Q), \tag{14}$$

$$B_\mu u = \sum_{s=0}^{S} \sum_{|\alpha| \leqslant m_\mu} b_{\mu s\alpha}(x)(D^\alpha u)(\omega_s(x))|_{\partial Q} = f_\mu(x) \qquad (x \in \partial Q,\ \mu = 1, \ldots, m). \tag{15}$$

Здесь $a_\alpha, b_{\mu s\alpha} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — комплекснозначные функции, $n \geqslant 2$, $Q \subset \mathbb{R}^n$ и ω_s имеют тот же смысл, что и в § 2.1. Будем предполагать, что операторы

$$\sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x)D^\alpha \qquad \sum_{|\alpha|=m_\mu} b_{\mu 0\alpha}(x)D^\alpha \quad (\mu = 1, \dots, m)$$

соответствуют эллиптической задаче (см. условия C.1 и C.2). В отличие от § 2.1 мы не можем доказать существование единственного решения для достаточно больших значений параметра. Однако, используя, как и в § 2.1, отделение нелокальных членов, мы выведем априорную оценку решений в пространствах Соболева. Следовательно, оператор $L = \{A, B_\mu\}$, соответствующий задаче (14), (15), имеет замкнутый образ $\mathcal{R}(L)$ и конечномерное ядро $\mathcal{N}(L)$. Затем, используя специальный метод компенсации нелокальных членов, мы построим правый регуляризатор для оператора L. Отсюда следует, что ортогональное дополнение к $\mathcal{R}(L)$ также конечномерно. Таким образом, оператор L фредгольмов. Результаты обобщены на случай абстрактных нелокальных членов с носителями внутри области.

В § 2.3 мы изучим нелокальную задачу в цилиндре

$$Au = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u + \lambda u = f_0(x) \qquad (x \in Q), \quad (16)$$

$$\begin{gathered} B_\rho u = u|_{x_1=t_\rho} + \sum_{j=1}^{k} b_{\rho j}(x') u|_{x_1=d_j} = f_\rho(x') \qquad (x' \in G,\ \rho = 1, 2), \\ u|_{[0,d]\times\partial G} = 0. \end{gathered} \quad (17)$$

Здесь $Q = (0, d) \times G \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ — ограниченная область (с границей $\partial G \in C^\infty$, если $n \geqslant 3$); $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x' = (x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$; $a_{ij},\ a_i,\ a_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — вещественнозначные функции, $a_{ij} = a_{ji}$ $(i, j = 1, \dots, n)$; $b_{\rho j} \in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ — комплекснозначные функции; $0 < d_j < d$, $t_1 = 0$, $t_2 = d$ (рис. 10).

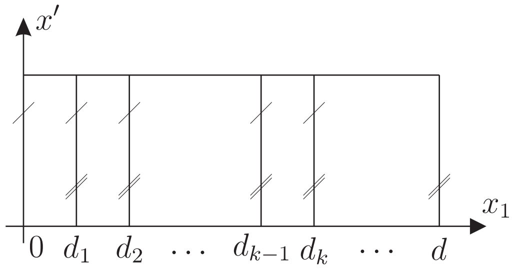

Рис. 10

Предположим, что

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j > 0 \qquad (x \in \overline{Q},\ 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n).$$

Формально задача (16), (17) принадлежит второму классу нашей классификации. Однако благодаря специальному подходу носителей нелокальных членов к границе мы можем применить те же методы, что и в § 2.1. Для достаточно больших $\lambda \in \theta = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg\lambda| \leqslant \varepsilon < \pi\}$ мы докажем существование и единственность решения. В частности, это утверждение выполняется для задачи (3), (4) (см. пример 2.3.2). Результаты о разрешимости задачи (16), (17) обобщены на случай абстрактных нелокальных членов с носителями на $[\sigma, d-\sigma] \times \overline{G}$, $\sigma > 0$.

Во втором и третьем случаях из-за появления степенных особенностей решений нелокальных задач мы будем рассматривать эти задачи в весовых пространствах (см. гл. 2 и 3 в [33]).

Глава 3 посвящена приложению нелокальных задач к процессам распределения тепла.

В § 3.1 рассматривается постановка задачи термоконтроля. Предполагается, что функция, описывающая температуру в области, удовлетворяет уравнению теплопроводности и краевому условию на границе области (допускается первое, второе или третье краевое условие). Правая часть краевого условия содержит функцию управления, описывающую поведение нагревательного элемента на границе. Функция управления удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению, в правой части которого стоит нелинейный оператор гистерезиса. Наличие обыкновенного дифференциального уравнения для функции управления соответствует тому факту, что состояние нагревательного элемента изменяется постепенно, а не скачком.

В § 3.2 исследуется задача с начальными условиями и доказывается существование и единственность сильного решения. Используя теорию начально-краевых задач для линейных параболических уравнений, мы доказываем существование решений между моментами переключения оператора гистерезиса и оцениваем снизу интервалы между переключениями.

В § 3.3 доказан основной результат об условном существовании периодического решения. Мы вводим нелинейный оператор G сдвига на период T функции, описывающей температуру в области. Оператор G определен на всех таких начальных распределениях температуры, для которых соответствующее сильное решение имеет заданную T-периодическую «среднюю» температуру и заданную T-периодическую функцию управления. Мы доказываем, что область определения оператора G есть непустое замкнутое множество, а сам оператор G есть сжимающее отображение. Применяя теорему Банаха о неподвижной точке, получаем требуемый результат.

В § 3.4 представлен пример, когда на границе регулируется тепловой поток (т. е. краевое условие является условием Неймана) и температурные датчики внутри области распределены равномерно. Оказывается, что в этом случае «средняя» температура удовлетворяет некоторому обыкновенному дифференциальному уравнению. Анализируя это уравнение совместно с уравнением для функции управления, нам удается доказать существование периодического в среднем решения. Применяя основной результат из § 3.3, мы получаем теорему о существовании сильного периодического решения рассматриваемой задачи.

IV. В конце глав, в примечаниях, обсуждаются библиографические ссылки. Кроме того, к каждой главе предложены упражнения, позволяющие читателю проверить себя и закрепить общие теоретические положения.

В конце пособия приведен список литературы. Работы, обязательные к изучению, помечены звездочкой. Они включают в себя книги и статьи по некоторым фундаментальным разделам функционального анализа, теории функциональных пространств и теории эллиптических краевых задач. Для удобства читателя основные результаты этих разделов содержатся в приложениях A, B и C. Кроме того, часть этих результатов подробно изложена в учебном пособии [2], написанном в рамках той же подпрограммы «Инновационного образовательного проекта», что и настоящее пособие.

Глава 1

Нелокальные краевые задачи в одномерном случае

1.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка с нелокальными условиями

Постановка нелокальной краевой задачи. Рассмотрим уравнение

$$Au + \lambda^2 u = -a_0(t)u''(t) + A^1 u + \lambda^2 u = f_0(t) \qquad (t \in (0,d)) \tag{1.1.1}$$

с нелокальными краевыми условиями

$$\begin{aligned} B_1 u &= u|_{t=0} + \big(B_1^1 u\big)|_{t=0} + B_1^2 u = f_1, \\ B_2 u &= u|_{t=d} + \big(B_2^1 u\big)|_{t=d} + B_2^2 u = f_2. \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

Здесь $a_0 \in C[0,d]$ — вещественнозначная функция, $a_0(t) \geqslant k > 0$ $(0 \leqslant t \leqslant d)$; $f_0 \in L_2(0,d)$ — комплекснозначная функция, $f_\rho \in \mathbb{C}\,(\rho = 1,2)$; $\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр, операторы A^1, B_ρ^1 и B_ρ^2 удовлетворяют следующим условиям.

Условие 1.1.1. Оператор $A^1 : W^1(0,d) \to L_2(0,d)$ является линейным ограниченным оператором.

Условие 1.1.2. Существует $\sigma_0 > 0$ такое, что для любого $0 < \sigma < \sigma_0$ найдутся линейные ограниченные операторы

$$G_\rho^{\sigma 1}, G_\rho^{\sigma 2} : L_2(0,d) \to L_2(0,d),$$

удовлетворяющие условиям: $B_\rho^1 = G_\rho^{\sigma 1} + G_\rho^{\sigma 2}$ и

$$\|G_\rho^{\sigma 1}u\|_{W^s(0,d)} \leqslant c_1\|u\|_{W^s(\sigma,d-\sigma)} \qquad (u \in W^s(0,d)), \tag{1.1.3}$$

$$\|G_\rho^{\sigma 2}u\|_{W^s(0,d)} \leqslant c_2(\sigma)\|u\|_{W^s(0,d)} \qquad (u \in W^s(0,d)), \tag{1.1.4}$$

где $c_1 > 0$ не зависит от σ и u, $c_2(\sigma) \geqslant 0$ не зависит от u, $c_2(\sigma) \to 0$ при $\sigma \to 0$, $s = 0, 2$, $\rho = 1, 2$.

Условие 1.1.3. Операторы $B_\rho^2 : L_2(0,d) \to \mathbb{C}$ являются линейными ограниченными функционалами.

Введем линейный ограниченный оператор $A^0 : W^1(0,d) \to L_2(0,d)$ по формуле

$$A^0 u = -a_0(t)u''(t). \tag{1.1.5}$$

Изучим теперь пример такой нелокальной задачи.

Пример 1.1.1. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$-a_0(t)u''(t) + a_1(t)u'(t) + a_2(t)u(t) + \lambda^2 u = f_0(t) \qquad (t \in (0,d)) \tag{1.1.6}$$

с нелокальными краевыми условиями

$$\begin{aligned} u(0) + \sum_{j=1}^{\infty} b_{1j}u(d_j) + \int\limits_0^d e_1(t)u(t)dt = f_1, \\ u(d) + \sum_{j=1}^{\infty} b_{2j}u(d_j) + \int\limits_0^d e_2(t)u(t)dt = f_2, \end{aligned} \tag{1.1.7}$$

где $a_i, e_\rho \in C[0,d]$ — вещественнозначные функции ($i = 0,1,2,\ \rho = 1,2$), $a_0(t) \geqslant k > 0$ $(0 \leqslant t \leqslant d)$; $f_0 \in L_2(0,d)$ — комплекснозначная функция; $b_{\rho j}, f_\rho \in \mathbb{C}$; $\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр; $0 < d_j < d$ $(j = 1, 2, \dots)$.

В отличие от обычных краевых условий нелокальные условия (1.1.7) содержат значения неизвестной функции не только на концах интервала $(0,d)$, но и во внутренних точках интервала.

Лемма 1.1.1. *Предположим, что*
$$\sum_{j=1}^{\infty} |b_{\rho j}| < \infty \qquad (\rho = 1, 2). \tag{1.1.8}$$
Тогда операторы A и B_ρ могут быть представлены в виде
$$Au = A^0 u + A^1 u, \tag{1.1.9}$$
$$B_\rho u = \big(u + B_\rho^1 u\big)|_{t=t_\rho} + B_\rho^2 u, \tag{1.1.10}$$
где оператор A^0 задан формулой (1.1.5)*, а операторы A^1, B_ρ^1 и B_ρ^2 удовлетворяют условиям* 1.1.1*,* 1.1.2 *и* 1.1.3 *соответственно, $t_1 = 0$, $t_2 = d$, $\rho = 1, 2$.*

Доказательство. Обозначим
$$A^1 u = a_1(t) u'(t) + a_2(t) u(t).$$
Очевидно, оператор A^1 удовлетворяет условию 1.1.1.

Для каждого $0 < \sigma < d/6$ обозначим
$$J_1^{\sigma 1} = \{j \in \mathbb{N} : \sigma \leqslant d_j \leqslant d/2\}, \qquad J_1^{\sigma 2} = \{j \in \mathbb{N} : 0 < d_j < \sigma\},$$
$$J_2^{\sigma 1} = \{j \in \mathbb{N} : d/2 < d_j \leqslant d - \sigma\}, \qquad J_2^{\sigma 2} = \{j \in \mathbb{N} : d - \sigma < d_j < d\}.$$

Введем линейный ограниченный оператор
$$B_\rho^1 : L_2(0, d) \to L_2(0, d) \qquad (\rho = 1, 2),$$
заданный формулами
$$B_\rho = G_\rho^{\sigma 1} + G_\rho^{\sigma 2} \qquad (\rho = 1, 2), \tag{1.1.11}$$
где
$$\big(G_1^{\sigma l} u\big)(t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j \in J_1^{\sigma l}} b_{1j} u(t + d_j)\eta(t) + \sum_{j \in J_2^{\sigma l}} b_{1j} u(-t + d_j)\eta(t) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{для } 0 \leqslant t \leqslant d/2, \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{для } d/2 < t \leqslant d, \end{cases} \tag{1.1.12}$$

$$
\big(G_2^{\sigma l}u\big)(t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j\in J_1^{\sigma l}} b_{2j}u(d-t+d_j)\eta(t-d)+ & \\ \qquad\displaystyle + \sum_{j\in J_2^{\sigma l}} b_{2j}u(t-d+d_j)\eta(t-d) & \text{для } d/2\leqslant t\leqslant d, \\ 0 & \text{для } 0\leqslant t< d/2, \end{cases} \tag{1.1.13}
$$

где $l = 1, 2$. Здесь $\eta \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R})$ — вещественнозначная функция такая, что

$$
0\leqslant \eta(t)\leqslant 1, \qquad \eta(t) = 1 \quad (|t|\leqslant d/4), \qquad \eta(t) = 0 \quad (|t|\geqslant d/3).
$$

Из условия (1.1.8) и формул (1.1.11)–(1.1.13) следует, что операторы B_ρ^1 удовлетворяют условию 1.1.2 с $\sigma_0 = d/6$.

Обозначим

$$
B_\rho^2 u = \int\limits_0^d e_\rho(t)u(t)dt.
$$

Очевидно, функционалы B_ρ^2 удовлетворяют условию 1.1.3.

Таким образом, операторы A и B_ρ можно записать в виде (1.1.9) и (1.1.10) соответственно. $\square$

Разрешимость и спектр. Введем линейные ограниченные операторы

$$
L(\lambda), L_0(\lambda), L_\tau(\lambda) : W^2(0,d) \to \mathcal{W}[0,d] = L_2(0,d)\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}
$$

по формулам

$$
L(\lambda)u = \big(Au + \lambda^2 u, B_1u, B_2u\big), \qquad L_0(\lambda)u = \big(A^0u + \lambda^2 u, u(0), u(d)\big),
$$
$$
L_\tau(\lambda)u = L_0(\lambda) + \tau(L(\lambda) - L_0(\lambda))u,
$$

где $0\leqslant\tau\leqslant 1$.

Очевидно, $L_\tau(\lambda) = L_0(\lambda)$ для $\tau = 0$ и $L_\tau(\lambda) = L(\lambda)$ для $\tau = 1$.

Мы будем использовать нормы

$$|||u|||_{W^2(0,d)} = \left(\|u\|^2_{W^2(0,d)} + |\lambda|^4\|u\|^2_{L_2(0,d)}\right)^{1/2}, \qquad (1.1.14)$$

$$|||f|||_{\mathcal{W}[0,d]} = \left(\|f_0\|^2_{L_2(0,d)} + |\lambda|^3\big(|f_1|^2 + |f_2|^2\big)\right)^{1/2}, \qquad (1.1.15)$$

зависящие от параметра λ (см. приложение C); здесь $f = (f_0, f_1, f_2)$ и $|\lambda| \geqslant 1$.

Определение 1.1.1. Функцию $u \in W^2(0,d)$ мы назовем *сильным решением* задачи (1.1.1), (1.1.2), если

$$L(\lambda)u = f. \qquad (1.1.16)$$

Положим

$$\omega_\varepsilon = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg\lambda| \leqslant \varepsilon \ \text{ или } \ |\arg\lambda - \pi| \leqslant \varepsilon\},$$

$$\omega_{\varepsilon,q} = \{\lambda \in \omega_\varepsilon : |\lambda| \geqslant q\},$$

где $0 < \varepsilon < \pi/2$.

Основной целью данного параграфа является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1.1.1. *Пусть выполняются условия* 1.1.1–1.1.3. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

(a) *Оператор* $L(\lambda) : W^2(0,d) \to \mathcal{W}[0,d]$ *фредгольмов и* $\operatorname{ind} L(\lambda) = 0$ *для всех* $\lambda \in \mathbb{C}$.

(b) *Для любого* $0 < \varepsilon < \pi/2$ *существует* $q = q(\varepsilon) > 1$ *такое, что для* $\lambda \in \omega_{\varepsilon,q}$ *оператор* $L(\lambda)$ *имеет ограниченный обратный* $L^{-1}(\lambda) : \mathcal{W}[0,d] \to W^2(0,d)$ *и каждая функция* $u \in W^2(0,d)$ *удовлетворяет неравенству*

$$c_3|||L(\lambda)u|||_{\mathcal{W}[0,d]} \leqslant |||u|||_{W^2(0,d)} \leqslant c_4|||L(\lambda)u|||_{\mathcal{W}[0,d]}, \qquad (1.1.17)$$

где $c_3, c_4 > 0$ *не зависят от* λ *и от* u.

Введем неограниченный оператор $\mathcal{A}_B : \mathcal{D}(\mathcal{A}_B) \subset L_2(0,d) \to L_2(0,d)$ по формуле

$$\mathcal{A}_B u = Au, \qquad \mathcal{D}(\mathcal{A}_B) = W_B^2(0,d) = \left\{u \in W^2(0,d) : B_\rho u = 0,\ \rho = 1,2\right\}.$$

Предполагая на данный момент, что теорема 1.1.1 справедлива, мы докажем следующее утверждение (ср. следствие C.2).

Следствие 1.1.1. *Пусть выполнены условия* 1.1.1–1.1.3. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

(a) *Оператор* $\mathcal{A}_B : \mathcal{D}(\mathcal{A}_B) \subset L_2(0,d) \to L_2(0,d)$ *фредгольмов, и* $\operatorname{ind} \mathcal{A}_B = 0$.

(b) *Спектр* $\sigma(\mathcal{A}_B)$ *оператора* $\mathcal{A}_B$ *дискретный.*

(c) *Для* $\eta \notin \sigma(\mathcal{A}_B)$ *резольвента*

$$R(\eta, \mathcal{A}_B) = (\eta I - \mathcal{A}_B)^{-1} : L_2(0,d) \to L_2(0,d)$$

есть компактный оператор.

(d) *Для любого* $0 < \delta < \pi$ *все точки спектра* $\sigma(\mathcal{A}_B)$, *кроме, возможно, конечного их числа, принадлежат углу комплексной плоскости* $|\arg \eta| < \delta$.

Доказательство. Обозначим

$$\Omega_{\delta,r} = \{\eta \in \mathbb{C} : |\arg \eta| \geqslant \delta,\ |\eta| \geqslant r\}.$$

Пусть $\lambda \in \omega_{\varepsilon,q}$, где $\varepsilon = (\pi - \delta)/2$, $0 < \delta < \pi$ — произвольное фиксированное число. Тогда $\eta = -\lambda^2 \in \Omega_{\delta,r}$ для $r = q^2$. В силу теоремы 1.1.1 существует ограниченный оператор

$$(\eta I - \mathcal{A}_B)^{-1} : L_2(0,d) \to W^2(0,d).$$

Следовательно, из компактности оператора вложения $W^2(0,d)$ в $L_2(0,d)$ вытекает, что оператор

$$(\eta I - \mathcal{A}_B)^{-1} : L_2(0,d) \to L_2(0,d)$$

компактный. Таким образом, по теореме A.12 спектр $\sigma(\mathcal{A}_B)$ состоит из изолированных собственных значений конечной кратности и для любого $\delta > 0$ все точки спектра $\sigma(\mathcal{A}_B)$, кроме, возможно, конечного их числа, принадлежат углу $|\arg\lambda| < \delta$ (рис. 1.1.1). Утверждение (a) следует из формулы

$$\mathcal{A}_B = (\mathcal{A}_B - \eta I)\Big(I - (\eta I - \mathcal{A}_B)^{-1}\eta\Big) \qquad (\eta \in \rho(\mathcal{A}_B))$$

и теоремы A.1. □

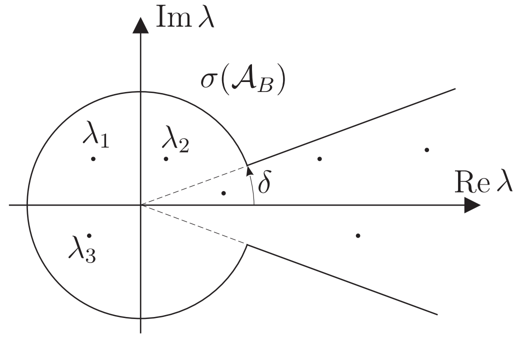

Рис. 1.1.1

Следствие 1.1.2. *Пусть выполнено условие* (1.1.8). *Тогда для операторов* $\mathcal{L}(\lambda)$ *и* $\mathcal{A}_B$, *соответствующих нелокальной краевой задаче* (1.1.6), (1.1.7), *справедливы утверждения теоремы* 1.1.1 *и следствия* 1.1.1.

Это следствие вытекает из леммы 1.1.1, теоремы 1.1.1 и следствия 1.1.1.

Приведем пример нелокальной задачи (1.1.1), (1.1.2), которая не может быть представлена в виде (1.1.6), (1.1.7).

Пример 1.1.2. Рассмотрим задачу

$$-a_0(t)u''(t) + A^1 u + \lambda^2 u = f_0(t) \qquad (t \in (0,d)), \tag{1.1.18}$$

$$u(0) + \big(B_1^1 u\big)|_{t=0} = f_1, \qquad u(d) = f_2, \tag{1.1.19}$$

где

$$A^1 u = F^{-1}(\xi F(\eta u) \operatorname{arctg} \xi), \qquad B_1^1 u = F^{-1}(F(\eta u)\sin\xi),$$

$\eta = \eta(t) \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R})$ — вещественнозначная функция такая, что $\eta(t) = 1$ $(t \in [d/4, d/3])$, $\eta(t) = 0$ $(t \notin (0,d))$, $F(v) = (Fv)(\xi)$ — преобразование Фурье функции v по t, $F^{-1}(w) = \big(F^{-1}w\big)(t)$ — обратное преобразование Фурье функции w по ξ, $\xi \in \mathbb{R}$.

Очевидно, оператор A^1 удовлетворяет условию 1.1.1.

Докажем, что условие (1.1.2) выполняется для оператора B_1^1. Для любого $0 < \sigma < d/6$ мы определим функцию $\psi_\sigma \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R})$ так, что $\psi_\sigma(t) = 1$ $(t \in [2\sigma, d-2\sigma])$, $\psi_\sigma(t) = 0$ $(t \notin [\sigma, d-\sigma])$,

$$|\psi_\sigma^{(j)}(t)| \leqslant k_1 \sigma^{-j} \qquad (t \in [0,d]). \tag{1.1.20}$$

Введем линейные ограниченные операторы

$$G_1^{\sigma 1}, G_1^{\sigma 2} : L_2(0,d) \to L_2(0,d)$$

по формулам

$$G_1^{\sigma 1} u = B_1^1(\psi_\sigma u), \qquad G_1^{\sigma 2} u = B_1^1((1-\psi_\sigma)u).$$

Докажем, что выполняется неравенство (1.1.4). Из определения функции $\eta(t)$ и формулы Тейлора следует, что

$$|\eta^{(i)}(t)| \leqslant k_2 \sigma^3 \qquad (t \in [0, 2\sigma] \cup [d-2\sigma, d],\ i = 0,1,2). \tag{1.1.21}$$

Поскольку функция $\sin\xi$ ограничена, в силу формулы Лейбница и неравенств (1.1.20), (1.1.21) мы имеем

$$\|G_1^{\sigma 2} u\|_{W^k(0,d)} \leqslant k_3 \|\eta(1-\psi_\sigma)u\|_{W^k(0,d)} \leqslant k_4 \sigma \|u\|_{W^k(0,d)},$$

где $k_3, k_4 > 0$ не зависят от σ, $k = 0, 1, 2$. Аналогично мы можем показать, что оператор $G_1^{\sigma 1}$ удовлетворяет неравенству (1.1.3).

Таким образом, теорема 1.1.1 и следствие 1.1.1 остаются справедливыми для операторов $L(\lambda)$ и $\mathcal{A}_B$, соответствующих нелокальной краевой задаче (1.1.18), (1.1.19).

Доказательство теоремы 1.1.1. Докажем сначала следующую априорную оценку.

Лемма 1.1.2. *Пусть выполнены условия* 1.1.1–1.1.3. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $q > 1$ *такое, что для* $\lambda \in \omega_{\varepsilon,q}$ *и* $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ *имеет место оценка*

$$c_3 |||L_\tau(\lambda)u|||_{\mathcal{W}[0,d]} \leqslant |||u|||_{W^2(0,d)} \leqslant c_4 |||L_\tau(\lambda)u|||_{\mathcal{W}[0,d]} \qquad \big(u \in W^2(0,d)\big), \tag{1.1.22}$$

где константы $c_3, c_4 > 0$ *не зависят от* λ, τ, u.

Доказательство. Докажем правую часть неравенства (1.1.22). Обозначим $L_\tau(\lambda)u = f$. Тогда

$$L_0(\lambda)u = f + \Phi, \tag{1.1.23}$$

где

$$\Phi = \big(-\tau A^1 u, -\tau\big(B_1^1 u\big)|_{t=0} - \tau B_1^2 u, -\tau\big(B_2^1 u\big)|_{t=d} - \tau B_2^2 u\big).$$

В силу замечания C.5 существует $q_0 = q_0(\varepsilon) > 1$ такое, что для $\lambda \in \omega_{\varepsilon,q_0}$ решение «локальной» задачи (1.1.23) оценивается следующим образом:

$$|||u|||_{W^2(0,d)} \leqslant k_1 |||f + \Phi|||_{\mathcal{W}[0,d]}. \tag{1.1.24}$$

Из условий 1.1.1, 1.1.3 и из неравенства (B.25) мы получим

$$\|\tau A^1 u\|_{L_2(0,d)} \leqslant k_2|\lambda|^{-1}|||u|||_{W^2(0,d)}, \tag{1.1.25}$$

$$|\lambda|^{3/2}|\tau B_\rho^2 u| \leqslant k_3|\lambda|^{3/2}\|u\|_{L_2(0,d)} \leqslant k_3|\lambda|^{-1/2}|||u|||_{W^2(0,d)}. \tag{1.1.26}$$

В силу неравенств (B.25) и (B.26) мы имеем

$$\begin{aligned} |\lambda|^{3/2}\left|\tau\left(B_1^1 u\right)|_{t=0}\right| &\leqslant k_4|\lambda|\left(\|B_1^1 u\|_{W^1(0,d)} + |\lambda|\cdot\|B_1^1 u\|_{L_2(0,d)}\right) \leqslant \\ &\leqslant k_5\left(\|B_1^1 u\|_{W^2(0,d)} + |\lambda|^2\|B_1^1 u\|_{L_2(0,d)}\right). \end{aligned} \tag{1.1.27}$$

Из неравенства (1.1.4) следует, что

$$\|G^{\sigma 2}u\|_{W^2(0,d)} + |\lambda|^2\|G_1^{\sigma 2}u\|_{L_2(0,d)} \leqslant 2c_2(\sigma)|||u|||_{W^2(0,d)}, \tag{1.1.28}$$

где $c_2(\sigma) \to 0$ при $\sigma \to 0$. Выбираем $0 < \sigma < \sigma_0$ так, что

$$2k_1k_5c_2(\sigma) < 1/8. \tag{1.1.29}$$

Для фиксированного σ, удовлетворяющего (1.1.29), введем вещественнозначную функцию $\xi \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R})$ такую, что $\xi(t) = 1$ $(t \in [\sigma, d-\sigma])$, $\xi(t) = 0$ $(t \notin [\sigma/2, d-\sigma/2])$. Из неравенства (1.1.3), замечания С.5, формулы Лейбница, условия 1.1.1 и неравенства (B.25) получим

$$\begin{aligned} \|G^{\sigma 1}u\|_{W^2(0,d)} + |\lambda|^2\|G_1^{\sigma 1}u\|_{L_2(0,d)} &\leqslant 2c_1|||u|||_{W^2(\sigma,d-\sigma)} \leqslant 2c_1|||\xi u|||_{W^2(0,d)} \leqslant \\ &\leqslant k_6\|\left(A^0 + \lambda^2 I\right)(\xi u)\|_{L_2(0,d)} \leqslant \\ &\leqslant k_7\left(\|\left(A^0 + \tau A^1 + \lambda^2 I\right)u\|_{L_2(0,d)} + \|u\|_{W^1(0,d)}\right) \leqslant \\ &\leqslant k_8\left(\|\left(A^0 + \tau A^1 + \lambda^2 I\right)u\|_{L_2(0,d)} + |\lambda|^{-1}|||u|||_{W^2(0,d)}\right). \end{aligned} \tag{1.1.30}$$

Из неравенств (1.1.27), (1.1.28) и (1.1.30) вытекает, что

$$\begin{aligned} &|\lambda|^{3/2}\left|\tau\left(B_1^1 u\right)|_{t=0}\right| \leqslant \\ &\leqslant k_5\left(k_8\|\left(A^0 + \tau A^1 + \lambda^2 I\right)u\|_{L_2(0,d)} + \left(k_8|\lambda|^{-1} + 2c_2(\sigma)\right)|||u|||_{W^2(0,d)}\right). \end{aligned} \tag{1.1.31}$$

Здесь константы $k_1, \ldots, k_8 > 0$ не зависят λ, τ и u.

Аналогично

$$|\lambda|^{3/2}\left|\tau\big(B_2^1 u\big)|_{t=d}\right| \leqslant$$
$$\leqslant k_5\Big(k_8\left\|\big(A^0+\tau A^1+\lambda^2 I\big)u\right\|_{L_2(0,d)}+\big(k_8|\lambda|^{-1}+2c_2(\sigma)\big)|||u|||_{W^2(0,d)}\Big). \tag{1.1.32}$$

Из неравенств (1.1.24)–(1.1.26), (1.1.31) и (1.1.32) следует, что

$$|||u|||_{W^2(0,d)} \leqslant k_1(1+2k_5k_8)|||L_\tau(\lambda)u|||_{\mathcal{W}[0,d]}+$$
$$+\Big(4k_1k_5c_2(\sigma)+2k_1k_3|\lambda|^{-1/2}+k_1(k_2+2k_5k_8)|\lambda|^{-1}\Big)|||u|||_{W^2(0,d)}. \tag{1.1.33}$$

В силу (1.1.29), выбирая $q > q_0$ так, что

$$k_1\Big(2k_3q^{-1/2}+(k_2+2k_5k_8)q^{-1}\Big) < 1/4,$$

мы получим

$$|||u|||_{W^2(0,d)} \leqslant 2k_1(1+2k_5k_8)|||L_\tau(\lambda)u|||_{\mathcal{W}[0,d]}$$

для $\lambda \in \omega_{\varepsilon,q}$.

Первое неравенство в (1.1.22) следует из неравенств (1.1.25), (1.1.26), (1.1.31) и (1.1.32). $\square$

Используя лемму 1.1.2, замечание C.5 и теорему A.5, мы убеждаемся в справедливости утверждения (b) из теоремы 1.1.1. Таким образом, в силу компактности оператора вложения $W^2(0,d)$ в $L_2(0,d)$ и теоремы A.1 мы получаем утверждение (a). Доказательство теоремы 1.1.1 теперь полностью завершено. $\square$

Заметим, что теорема 1.1.1 остается справедливой, если константа $c_2(\sigma)$ в неравенстве (1.1.4) достаточно мала. Однако, если $c_2(\sigma)$ достаточно велика, мы можем получить

$$B_1^1 u = B_2^1 u = -u.$$

Следовательно, нелокальные условия (1.1.2) примут вид

$$B^2_\rho u = f_\rho \qquad (\rho = 1, 2). \tag{1.1.34}$$

В частности, B^2_ρ могут быть интегральными операторами:

$$\int\limits_0^d e_\rho(t)u(t) = f_\rho \qquad (\rho = 1, 2)$$

(ср. пример 1.1.1). Тогда область определения соответствующего оператора $\mathcal{A}_B$ не плотна в $L_2(0, d)$. Исследование такой задачи оказывается значительно более сложным и выходит за рамки данного пособия.

1.2. Разностные операторы в одномерном случае

Разностные операторы в $L_2(0, d)$. Рассмотрим *разностный оператор*

$$R : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R}),$$

определенный по формуле

$$(Rv)(t) = \sum_{j=-m}^{m} b_j v(t + j), \tag{1.2.1}$$

где b_j — действительные числа.

Введем операторы

$$I_Q : L_2(0, d) \to L_2(\mathbb{R}), \qquad P_Q : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(0, d),$$

$$R_Q : L_2(0, d) \to L_2(0, d)$$

по формулам

$$(I_Q v)(t) = v(t) \quad (t \in (0, d)), \qquad v(t) = 0 \quad (t \notin (0, d)), \tag{1.2.2}$$

$$(P_Q v)(t) = v(t) \quad (t \in (0, d)), \tag{1.2.3}$$

$$R_Q = P_Q R I_Q, \tag{1.2.4}$$

где $Q = (0, d)$.

Мы будем пользоваться этими операторами при изучении краевых задач для дифференциально-разностных уравнений. Сдвиги $t \to t + j$ могут отображать точки отрезка $[0, d]$ в множество $[-m, 0] \cup [d, d+m]$. Следовательно, мы должны рассматривать краевые условия для дифференциально-разностного уравнения не только в точках 0 и d, но также на множестве $[-m, 0] \cup [d, d+m]$. Для того чтобы удовлетворялись краевые условия, мы введем оператор I_Q. Использование оператора P_Q необходимо для рассмотрения уравнения не на всей оси $\mathbb{R}$, а лишь на интервале $(0, d)$.

Пример 1.2.1. Пусть $d = 2$, и пусть $(Rv)(t) = v(t) + 2v(t-1)$. Положим $v(t) = t$ $(t \in (0, 1])$ и $v(t) = 2 - t$ $(t \in (1, 2))$.

Тогда

$$(RI_Qv)(t) = 0 \quad (t \in (-\infty, 0]), \qquad (RI_Qv)(t) = v(t) = t \quad (t \in (0, 1]),$$
$$(RI_Qv)(t) = v(t) + 2v(t-1) = 2 - t + 2(t-1) = t \quad (t \in (1, 2)),$$
$$(RI_Qv)(t) = 2v(t-1) = 2(2 - (t-1)) = 6 - 2t \quad (t \in [2, 3)),$$
$$(RI_Qv)(t) = 0 \quad (t \in [3, \infty)),$$

см. рис. 1.2.1.

Лемма 1.2.1. *$I_Q^* = P_Q$, $P_Q^* = I_Q$, т. е. для всех $u \in L_2(0, d)$, $v \in L_2(\mathbb{R})$*

$$(I_Qu, v)_{L_2(\mathbb{R})} = (u, P_Qv)_{L_2(0,d)}.$$

Доказательство следует из (1.2.2) и (1.2.3).

Из леммы 1.2.1 вытекает следующий результат.

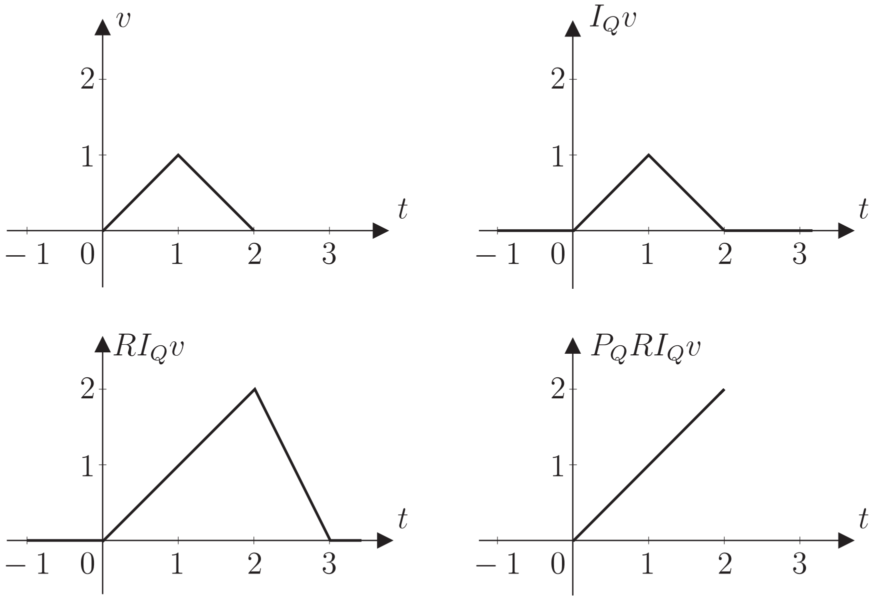

Рис. 1.2.1

Лемма 1.2.2. *Операторы* $R : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ *и* $R_Q : L_2(0,d) \to L_2(0,d)$ *ограничены, и*

$$(R^*v)(t) = \sum_{j=-m}^{m} b_j v(t-j), \qquad R_Q^* = P_Q R^* I_Q.$$

Пусть $d = N + \theta$, где $0 < \theta \leqslant 1$, $N \in \mathbb{N}$.

Не ограничивая общности, будем считать, что $m = N$. Действительно, если $m < N$, мы можем предполагать, что $b_j = 0$ при $|j| > m$. Если $m > N$, то оператор R_Q не зависит от коэффициентов b_j при $|j| > N$.

Если $0 < \theta < 1$, мы обозначим

$$Q_{1k} = (k-1, k-1+\theta) \quad (k = 1, \ldots, N+1),$$

$$Q_{2k} = (k-1+\theta, k) \qquad (k = 1, \ldots, N).$$

Если $\theta = 1$, мы обозначим

$$Q_{1k} = (k-1, k) \quad (k = 1, \ldots, N+1).$$

Таким образом, существует два класса интервалов Q_{1k} и Q_{2k}, если $0 < \theta < 1$, и лишь один класс интервалов Q_{1k}, если $\theta = 1$. Каждые два интервала одного и того же класса могут быть получены друг из друга сдвигом на некоторое целое число.

Пусть

$$P_s : L_2(0,d) \to L_2\left(\bigcup_k Q_{sk}\right)$$

есть оператор ортогонального проектирования на $L_2\left(\bigcup\limits_k Q_{sk}\right)$, где

$$L_2\left(\bigcup_k Q_{sk}\right) = \left\{u \in L_2(0,d) : u(t) = 0 \text{ для } t \in (0,d) \setminus \bigcup_k Q_{sk}\right\},$$

P_1 — единичный оператор, если $\theta = 1$. Очевидно,

$$L_2(0,d) = \bigoplus_s L_2\left(\bigcup_k Q_{sk}\right). \tag{1.2.5}$$

Лемма 1.2.3. *Пространство* $L_2\left(\bigcup\limits_k Q_{sk}\right)$ — *инвариантное подпространство оператора* R_Q.

Доказательство вытекает из следующего свойства интервалов Q_{sk}. Для каждого интервала Q_{sk} и целого j либо существует $Q_{sm} = Q_{sk} + j$, либо $Q_{sk} + j \subset \mathbb{R} \setminus (0,d)$.

Введем изоморфизм гильбертовых пространств

$$U_s : L_2\left(\bigcup_k Q_{sk}\right) \to L_2^M(Q_{s1})$$

по формуле

$$(U_s v)_k(t) = v(t + k - 1) \qquad (t \in Q_{s1},\ k = 1, \dots, M), \tag{1.2.6}$$

где $L_2^M(Q_{s1}) = \prod\limits_{k=1}^{M} L_2(Q_{s1})$, $M = N+1$, если $s = 1$, $M = N$, если $s = 2$ (рис. 1.2.2).

Обозначим через R_1 матрицу порядка $(N+1)\times(N+1)$ с элементами

$$r_{ik} = b_{k-i} \qquad (i,k = 1, \dots, N+1). \tag{1.2.7}$$

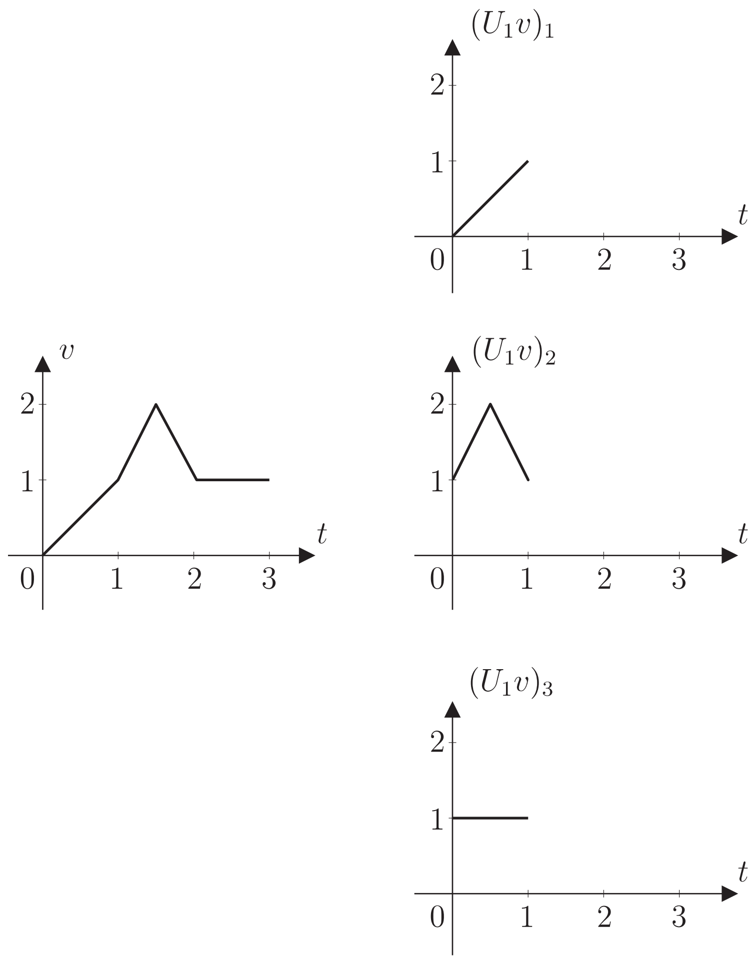

Рис. 1.2.2

Обозначим через R_2 матрицу порядка $N \times N$, полученную из матрицы R_1 вычеркиванием последнего столбца и последней строки. Другими словами,

$$R_1 = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_N \\ b_{-1} & b_0 & \dots & b_{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{-N} & b_{-N+1} & \dots & b_0 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_{N-1} \\ b_{-1} & b_0 & \dots & b_{N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{-N+1} & b_{-N+2} & \dots & b_0 \end{pmatrix}.$$

Введем оператор

$$R_{Qs} = U_s R_Q U_s^{-1} : L_2^M(Q_{s1}) \to L_2^M(Q_{s1}). \tag{1.2.8}$$

Здесь и всюду в данном параграфе $s = 1, 2$, если $\theta < 1$, и $s = 1$, если $\theta = 1$.

Лемма 1.2.4. *Оператор R_{Qs} является оператором умножения на матрицу R_s.*

Доказательство. Пусть $V(t) \in L_2^M(Q_{s1})$. Обозначим

$$v(t) = U_s^{-1}V(t) \in L_2\left(\bigcup_k Q_{sk}\right).$$

Тогда из (1.2.1), (1.2.4), (1.2.6) и (1.2.8) мы имеем

$$\begin{aligned}(R_{Qs}V)_i(t) = (U_sR_Qv)_i(t) = \sum_{j=-i+1}^{M-i} b_jv(t+i-1+j) = \\ = \sum_{k=1}^{M} b_{k-i}v(t+k-1) = \sum_{k=1}^{M} b_{k-i}V_k(t) \qquad (t \in Q_{s1}).\end{aligned} \tag{1.2.9}$$

$\square$

Лемма 1.2.5. *Имеем*

$$\sigma(R_Q) = \begin{cases} \sigma(R_1) \cup \sigma(R_2), & \text{если } \theta < 1, \\ \sigma(R_1), & \text{если } \theta = 1. \end{cases}$$

Доказательство. В силу лемм 1.2.3 и 1.2.4

$$\bigcup_s \sigma(R_s) \subset \sigma(R_Q)$$

($s = 1, 2$, если $\theta < 1$, $s = 1$, если $\theta = 1$). Пусть $\lambda \notin \bigcup\limits_s \sigma(R_s)$. Тогда оператор

$$A_\lambda = \sum_s U_s^{-1}(R_{Qs} - \lambda I)^{-1}U_sP_s : L_2(0, d) \to L_2(0, d)$$

ограниченный. По лемме 1.2.3 $P_sR_Q = R_QP_s$. Следовательно,

$$A_\lambda(R_Q - \lambda I) = \sum_s U_s^{-1}(R_{Qs} - \lambda I)^{-1}U_s(R_Q - \lambda I)P_s = I.$$

Аналогично $(R_Q - \lambda I)A_\lambda = I$. Таким образом, оператор $R_Q - \lambda I$ имеет ограниченный обратный при $\lambda \notin \bigcup\limits_s \sigma(R_s)$. $\square$

Определение 1.2.1. Оператор R_Q называется *невырожденным*, если $0 \notin \sigma(R_Q)$. Если $0 \in \sigma(R_Q)$, то R_Q называется *вырожденным* оператором.

Замечание 1.2.1. В силу леммы 1.2.5 оператор R_Q является невырожденным тогда и только тогда, когда $0 \notin \bigcup\limits_s \sigma(R_s)$ ($s = 1, 2$, если $\theta < 1$, и $s = 1$, если $\theta = 1$). Обратно, оператор R_Q является вырожденным, если $0 \in \bigcup\limits_s \sigma(R_s)$.

Для вырожденного оператора R_Q справедливо следующее утверждение.

Лемма 1.2.6. *Пусть R_Q — вырожденный оператор. Тогда*

$$\dim \mathcal{N}(R_Q) = \infty,$$

где $\mathcal{N}(R_Q)$ — ядро оператора R_Q.

Доказательство. Из замечания 1.2.1 следует существование такого s, что $\det R_s = 0$. Поэтому в силу леммы 1.2.4 $\mathcal{N}(R_{Qs})$ нетривиально и состоит из вектор-функций $V \in L_2^N(Q_{s1})$, удовлетворяющих системе уравнений

$$R_s V(t) = 0 \qquad (\text{п. в. } \ t \in Q_{s1}). \tag{1.2.10}$$

Поэтому $\dim \ \mathcal{N}(R_{Qs}) = \infty$. Положим $v = U_s^{-1} V$. Из лемм 1.2.3, 1.2.4 и формулы (1.2.8) следует, что

$$R_Q v = P_s R_Q v = U_s^{-1} R_{Qs} V = U_s^{-1} R_s V = 0.$$

Отсюда имеем $v \in \mathcal{N}(R_Q)$. Итак, доказано, что $\dim \mathcal{N}(R_Q) = \infty$. $\square$

Разностные операторы в пространствах Соболева.

Лемма 1.2.7. *Оператор R_Q отображает непрерывно пространство $\mathring{W}^k(0,d)$ в пространство $W^k(0,d)$, и*

$$(R_Q v)^{(j)} = R_Q v^{(j)} \qquad (j \leqslant k) \tag{1.2.11}$$

для всех $v \in \mathring{W}^k(0,d)$.

Доказательство. Очевидно, равенство (1.2.11) выполняется для всех $v \in \dot{C}^\infty(0,d)$. Таким образом, по лемме 1.2.2 для любых $v \in \dot{C}^\infty(0,d)$ мы имеем

$$\left\|(R_Q v)^{(j)}\right\|_{L_2(0,d)} = \left\|R_Q v^{(j)}\right\|_{L_2(0,d)} \leqslant k_1 \left\|v^{(j)}\right\|_{L_2(0,d)} \qquad (j \leqslant k),$$
$$\|R_Q v\|_{L_2(0,d)} \leqslant k_1 \|v\|_{L_2(0,d)}.$$

Следовательно, для всех $v \in \dot{C}^\infty(0,d)$

$$\|R_Q v\|_{W^k(0,d)} \leqslant k_1 \|v\|_{W^k(0,d)}.$$

Поскольку множество $\dot{C}^\infty(0,d)$ всюду плотно в пространстве $\mathring{W}^k(0,d)$, из последнего неравенства следует, что оператор R_Q отображает непрерывно $\mathring{W}^k(0,d)$ в $W^k(0,d)$. Следовательно, из плотности $\dot{C}^\infty(0,d)$ в $\mathring{W}^k(0,d)$ и равенства (1.2.11) для $v \in \dot{C}^\infty(0,d)$ мы получим равенство (1.2.11) для всех $v \in \mathring{W}^k(0,d)$. $\square$

Лемма 1.2.8. *Пусть $v \in W^k(Q_{si})$ для всех s и $i = 1,\dots,M$, где $k \geqslant 0$ — целое. Тогда $R_Q v \in W^k(Q_{sj})$ и*

$$\|R_Q v\|_{W^k(Q_{sj})} \leqslant c_1 \sum_{i=1}^{M} \|v\|_{W^k(Q_{si})}. \tag{1.2.12}$$

Доказательство следует из формул (1.2.6) и (1.2.8).

Лемма 1.2.9. *Пусть оператор R_Q невырожденный и $R_Q v \in W^k(Q_{si})$ для всех s и $i = 1, \dots, M$, где $k \geqslant 0$ — целое. Тогда $v \in W^k(Q_{sj})$ и*

$$\|v\|_{W^k(Q_{sj})} \leqslant c_2 \sum_{i=1}^{M} \|R_Q v\|_{W^k(Q_{si})}. \tag{1.2.13}$$

Доказательство. Очевидно, $(U_s P_s R_Q v)_i \in W^k(Q_{s1})$ $(i = 1, \dots, M)$, т. е. $(R_s U_s P_s v)_i \in W^k(Q_{sj})$ $(i = 1, \dots, M)$. Отсюда мы имеем $(U_s P_s v)_j = \big(R_s^{-1}(R_s U_s P_s v)\big)_j \in W^k(Q_{s1})$ $(j = 1, \dots, M)$. Таким образом, $v \in W^k(Q_{sj})$ и справедливо неравенство (1.2.13). $\square$

Регулярные разностные операторы.

Определение 1.2.2. Невырожденный разностный оператор R_Q называется *регулярным*, если $\det R_2 \neq 0$. Невырожденный разностный оператор R_Q называется *нерегулярным*, если $\det R_2 = 0$.

Замечание 1.2.2. В силу леммы 1.2.5 при $\theta < 1$ оператор R_Q регулярный тогда и только тогда, когда $\det R_1 \neq 0$, $\det R_2 \neq 0$. Поэтому в случае $\theta < 1$ любой невырожденный оператор R_Q является регулярным. В случае $\theta = 1$ оператор R_Q является нерегулярным тогда и только тогда, когда $\det R_1 \neq 0$, $\det R_2 = 0$.

Обозначим через $W^1_\gamma(0, d)$ подпространство функций из $W^1(0, d)$, удовлетворяющих условиям

$$u(0) = \sum_{i=1}^{N} \gamma_{1i} u(i), \qquad u(d) = \sum_{i=1}^{N} \gamma_{2i} u(d - i), \tag{1.2.14}$$

где γ_{ji} — вещественные числа $(j = 1, 2,\ i = 1, \dots, N)$, $\gamma = \{\gamma_{ji}\}$.

Теорема 1.2.1. *Пусть оператор* R_Q *регулярный. Тогда существуют вещественные числа* γ_{ji} $(j = 1, 2,\ i = 1, \ldots, N)$ *такие, что оператор* R_Q *отображает* $\mathring{W}^1(0,d)$ *на* $W^1_\gamma(0,d)$ *непрерывно и взаимно однозначно.*

Доказательство. 1. Вначале докажем, что существуют γ_{ji} такие, что $R_Q\bigl(\mathring{W}^1(0,d)\bigr) \subset W^1_\gamma(0,d)$.

Обозначим через R_1^1 $\bigl(R_1^{N+1}\bigr)$ матрицу, полученную из R_1 вычеркиванием первого (последнего) столбца. Обозначим через e_i (g_i) i-ю строку матрицы R_1^1 $\bigl(R_1^{N+1}\bigr)$. Матрица, полученная из R_1 вычеркиванием первой строки и первого столбца, совпадает с матрицей R_2, полученной из R_1 вычеркиванием последней строки и последнего столбца. Таким образом, из условия $\det R_2 \neq 0$ вытекает, что

$$e_1 = \sum_{i=1}^{N} \gamma_{1i} e_{i+1}, \qquad g_{N+1} = \sum_{i=1}^{N} \gamma_{2i} g_{N+1-i}, \tag{1.2.15}$$

где γ_{1i}, γ_{2i} — вещественные числа.

По лемме 1.2.7 $R_Q\bigl(\mathring{W}^1(0,d)\bigr) \subset W^1(0,d)$. Таким образом, из (1.2.6), (1.2.15) и леммы 1.2.3 следует, что для $v \in \mathring{W}^1(0,d)$

$$\begin{gathered}(R_Q v)(0) = (U_1 P_1 R_Q v)_1(0) = (R_1 U_1 P_1 v)_1(0) = \\ = \sum_{i=1}^{N} \gamma_{1i} (R_1 U_1 P_1 v)_{i+1}(0) = \sum_{i=1}^{N} \gamma_{1i} (R_Q v)(i).\end{gathered} \tag{1.2.16}$$

Аналогично получаем

$$(R_Q v)(d) = \sum_{i=1}^{N} \gamma_{2i} (R_Q v)(d-i). \tag{1.2.17}$$

Следовательно,

$$R_Q\bigl(\mathring{W}^1(0,d)\bigr) \subset W^1_\gamma(0,d).$$

2. Докажем теперь обратное включение

$$W^1_\gamma(0,d) \subset R_Q\bigl(\mathring{W}^1(0,d)\bigr).$$

Предположим, что $u \in W^1_\gamma(0,d)$. По предположению оператор $R_Q : L_2(0,d) \to L_2(0,d)$ имеет ограниченный обратный $R_Q^{-1} : L_2(0,d) \to L_2(0,d)$. Покажем, что $v = R_Q^{-1}u \in \mathring{W}^1(0,d)$.

Не ограничивая общности, рассмотрим случай $\theta = 1$. В этом случае $s = 1$, $M = N+1$. В силу леммы 1.2.9 $v \in W^1(Q_{1p})$ $(p = 1,\dots,N+1)$. Поэтому согласно теореме B.10 достаточно доказать, что

$$v(p-0) = v(p+0) \quad (p = 1,\dots,N), \qquad v(0) = v(N+1) = 0,$$

где

$$v(p-0) = \lim_{t\to p,\ t<p} v(t), \qquad v(p+0) = \lim_{t\to p,\ t>p} v(t).$$

Обозначим

$$\varphi_p = v(p+0) \quad (p = 0,\dots,N), \qquad \psi_j = v(j-0) \quad (j = 1,\dots,N+1).$$

Очевидно,

$$\varphi_p = (U_1 v)_{p+1}(0+0), \qquad \psi_j = (U_1 v)_j(1-0).$$

Поскольку $R_Q v \in W^1(0,d)$, то из (1.2.6) и леммы 1.2.4 мы имеем

$$(R_1 U_1 v)_{i+1}(0+0) = (U_1 R_Q v)_{i+1}(0+0) = (R_Q v)(i+0) =$$
$$= (R_Q v)(i-0) = (U_1 R_Q v)_i(1-0) = (R_1 U_1 v)_i(1-0) \quad (i = 1,\dots,N).$$

Таким образом, функции φ_p и ψ_j удовлетворяют следующим условиям:

$$\sum_{p=1}^{N+1} r_{i+1,p}\varphi_{p-1} = \sum_{p=1}^{N+1} r_{ip}\psi_p \qquad (i = 1,\dots,N). \tag{1.2.18}$$

Более того, функция $R_Q v$ удовлетворяет условиям (1.2.16), (1.2.17), которые можно записать в виде

$$\sum_{p=1}^{N+1} r_{1p}\varphi_{p-1} = \sum_{i=1}^{N} \gamma_{1i} \sum_{p=1}^{N+1} r_{i+1,p}\varphi_{p-1}, \tag{1.2.19}$$

$$\sum_{p=1}^{N+1} r_{N+1,p}\psi_p = \sum_{i=1}^{N} \gamma_{2i} \sum_{p=1}^{N+1} r_{N+1-i,p}\psi_p. \tag{1.2.20}$$

Из условий (1.2.15), (1.2.19) и (1.2.20) мы получаем

$$\Bigl(r_{11} - \sum_{i=1}^{N} \gamma_{1i} r_{i+1,1}\Bigr)\varphi_0 = 0,$$

$$\Bigl(r_{N+1,N+1} - \sum_{i=1}^{N} \gamma_{2i} r_{N+1-i,N+1}\Bigr)\psi_{N+1} = 0.$$

Множитель перед φ_0 (ψ_{N+1}) ненулевой. В противном случае в силу (1.2.15) первая (последняя) строка R_1 равна линейной комбинации остальных строк. Но это невозможно, так как $\det R_1 \neq 0$. Следовательно, $\varphi_0 = \psi_{N+1} = 0$.

Таким образом, система (1.2.18) будет иметь вид

$$\sum_{p=1}^{N} r_{i+1,p+1}\varphi_p = \sum_{p=1}^{N} r_{ip}\psi_p \qquad (i = 1, \dots, N).$$

Поскольку $r_{i+1,p+1} = r_{ip}$ $(i, p = 1, \dots, N)$ и $\det R_2 \neq 0$, мы получим $\varphi_p = \psi_p$ $(p = 1, \dots, N)$. Итак, мы доказали, что $W^1_\gamma(0, d) \subset R_Q\bigl(\mathring{W}^1(0, d)\bigr)$.

$\square$

Пример 1.2.2. Пусть $d = 2$ и

$$(Rv)(t) = b_0 v(t) + b_1 v(t+1) + b_{-1} v(t-1),$$

где $b_j \in \mathbb{R}$.

В этом случае мы получим один класс, содержащий два интервала $Q_{11} = (0, 1)$ и $Q_{12} = (1, 2)$. Очевидно, матрицы R_1 и R_2 имеют вид

$$R_1 = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 \\ b_{-1} & b_0 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = (b_0).$$

Предположим, что

$$b_0^2 - b_1 b_{-1} \neq 0, \qquad b_0 \neq 0$$

(см. теорему 1.2.1). Тогда

$$R_Q\bigl(\mathring{W}^1(0, 2)\bigr) = W^1_\gamma(0, 2),$$

где

$$W^1_\gamma(0,2) = \{u \in W^1(0,2) : u(0) = \gamma_{11}u(1),\ u(2) = \gamma_{21}u(1)\},$$

$\gamma_{11} = b_1/b_0$, $\gamma_{21} = b_{-1}/b_0$.

Пример 1.2.3. Пусть $d = 2\dfrac{1}{3}$ и

$$(Rv)(t) = b_0v(t) + b_1v(t+1) + b_{-1}v(t-1),$$

где $b_j \in \mathbb{R}$.

В этом случае мы имеем два класса интервалов, а именно:

$$Q_{1k} = (k-1, k-1+1/3) \quad (k = 1, 2, 3)$$

и

$$Q_{2k} = (k-1+1/3, k) \quad (k = 1, 2).$$

Матрицы R_1 и R_2 имеют следующий вид:

$$R_1 = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & 0 \\ b_{-1} & b_0 & b_1 \\ 0 & b_{-1} & b_0 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 \\ b_{-1} & b_0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\det R_1 \neq 0$, $\det R_2 \neq 0$, т. е.

$$b_0\bigl(b_0^2 - 2b_1b_{-1}\bigr) \neq 0, \qquad b_0^2 - b_1b_{-1} \neq 0.$$

Тогда в силу теоремы 1.2.1

$$R_Q\left(\mathring{W}^k\left(0, 2\frac{1}{3}\right)\right) = W^1_\gamma\left(0, 2\frac{1}{3}\right),$$

где

$$W^1_\gamma\left(0, 2\frac{1}{3}\right) = \left\{u \in W^1\left(0, 2\frac{1}{3}\right) : u(0) = \gamma_{11}u(1) + \gamma_{12}u(2),\right.$$
$$\left. u\left(2\frac{1}{3}\right) = \gamma_{21}u\left(1\frac{1}{3}\right) + \gamma_{22}u\left(\frac{1}{3}\right)\right\},$$

$\gamma_{11} = b_0b_1/\Delta$, $\gamma_{12} = -b_1^2/\Delta$, $\gamma_{21} = b_{-1}b_0/\Delta$, $\gamma_{22} = -b_{-1}^2/\Delta$, $\Delta = b_0^2 - b_1b_{-1}$.

Нерегулярные разностные операторы. Пусть $\theta = 1$. В этом случае $d = N + 1$. Обозначим через $W^1_{\gamma,m}(0, d)$ подпространство функций из $W^1(0, d)$, удовлетворяющих условиям

$$u(N+1) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant N+1,\, i \neq m+1} \gamma_{1i} u(i-1), \tag{1.2.21}$$

$$u(m) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant N,\, i \neq m} \gamma_{2i} u(i), \tag{1.2.22}$$

где m — фиксированное число такое, что $1 \leqslant m \leqslant N$, γ_{1i} $(i = 1, \ldots, N+1,$ $i \neq m+1)$ и γ_{2i} $(i = 1, \ldots, N,\ i \neq m)$ — вещественные числа, $\gamma = \{\gamma_{ji}\}$.

Теорема 1.2.2. *Пусть $\theta = 1$, и пусть оператор R_Q нерегулярный. Тогда существует целое число m, $1 \leqslant m \leqslant N$, и вещественные числа γ_{1i} $(i = 1, \ldots, N+1,\ i \neq m+1,\ \gamma_{11} \neq 0)$ и γ_{2i} $(i = 1, \ldots, N, i \neq m)$ такие, что оператор R_Q отображает $\mathring{W}^1(0, d)$ на $W^1_{\gamma,m}(0, d)$ непрерывно и взаимно однозначно.*

Доказательство. 1. Прежде всего докажем, что существует натуральное число m, $1 \leqslant m \leqslant N$, и вещественные числа γ_{1i} $(i = 1, \ldots, N+1,$ $i \neq m+1,\ \gamma_{1i} \neq 0)$ и γ_{2i} $(i = 1, \ldots, N,\ i \neq m)$ такие, что

$$R_Q\big(\mathring{W}^1(0, d)\big) \subset W^1_{\gamma,m}(0, d).$$

Обозначим через R_1^1 $\big(R_1^{N+1}\big)$ матрицу, полученную из R_1 вычеркиванием первого (последнего) столбца. Обозначим через e_i (g_i) i-ю строку матрицы R_1^1 $\big(R_1^{N+1}\big)$.

В силу условия $\det R_2 = 0$ строки $g_1, \ldots, g_N$ линейно независимы. Следовательно, существует номер m, $1 \leqslant m \leqslant N$, такой, что строка g_m является линейной комбинацией остальных строк

$$g_m = \sum_{1 \leqslant i \leqslant N,\, i \neq m} \gamma_{2i} g_i, \tag{1.2.23}$$

где γ_{2i} — вещественные числа $(i = 1, \ldots, N, i \neq m)$.

Легко заметить, что $e_{i+1} = g_i$ $(i = 1, \ldots, N)$. Поэтому из (1.2.23) мы получаем

$$e_{m+1} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant N,\, i \neq m} \gamma_{2i} e_{i+1},$$

т. е.

$$e_{m+1} = \sum_{2 \leqslant i \leqslant N+1,\, i \neq m+1} \gamma_{2,i-1} e_i. \tag{1.2.24}$$

Из условия $\det R_1 \neq 0$ следует, что строки

$$e_i \quad (i = 1, \ldots, N+1,\ i \neq m+1)$$

образуют базис в $\mathbb{R}^N$ и строки

$$g_j \quad (j = 1, \ldots, N+1,\ j \neq m)$$

также образуют базис в $\mathbb{R}^N$. Следовательно, существуют вещественные числа γ_{1i} $(i = 1, \ldots, N+1,\ i \neq m+1)$ такие, что

$$g_{N+1} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant N+1,\, i \neq m+1} \gamma_{1i} e_i, \tag{1.2.25}$$

т. е.

$$(r_{N+1,1}, \ldots, r_{N+1,N}) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant N+1,\, i \neq m+1} \gamma_{1i} (r_{i2}, \ldots, r_{i,N+1}). \tag{1.2.26}$$

Покажем, что $\gamma_{11} \neq 0$. Предположим, что $\gamma_{11} = 0$. Тогда (1.2.25) примет вид

$$g_{N+1} = \sum_{2 \leqslant i \leqslant N+1,\, i \neq m+1} \gamma_{1i} e_i = \sum_{1 \leqslant i \leqslant N,\, i \neq m} \gamma_{1,i+1} e_{i+1} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant N,\, i \neq m} \gamma_{1,i+1} g_i.$$

Это противоречит заключению о том, что строки g_j $(j = 1, \ldots, N+1,$ $j \neq m)$ образуют базис в $\mathbb{R}^N$. Таким образом, $\gamma_{11} \neq 0$.

В силу леммы 1.2.7 $R_Q\big(\mathring{W}^k(0,d)\big) \subset W^1(0,d)$. Поэтому из соотношений (1.2.6), (1.2.23) и леммы 1.2.4 следует, что для $v \in \mathring{W}^1(0,d)$

$$\begin{aligned}(R_Q v)(m) &= (U_1 R_Q v)_m(1) = (R_1 U_1 v)_m(1) = \\ &= \sum_{1\leqslant i\leqslant N,\, i\neq m} (\gamma_{2i} R_1 U_1 v)_i(1) = \sum_{1\leqslant i\leqslant N,\, i\neq m} \gamma_{2i}(R_Q v)(i).\end{aligned} \tag{1.2.27}$$

Вновь используя (1.2.6) и лемму 1.2.4, мы имеем

$$\begin{aligned}(R_Q v)(N+1) &= (U_1 R_Q v)_{N+1}(1) = (R_1 U_1 v)_{N+1}(1) = \\ &= \sum_{s=1}^{N} r_{N+1,s}(U_1 v)_s(1) = \sum_{s=1}^{N} r_{N+1,s}(U_1 v)_{s+1}(0) = \\ &= \sum_{s=2}^{N+1} r_{N+1,s-1}(U_1 v)_s(0).\end{aligned} \tag{1.2.28}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}(R_Q v)(i-1) &= (U_1 R_Q v)_i(0) = (R_1 U_1 v)_i(0) = \\ &= \sum_{s=2}^{N+1} r_{is}(U_1 v)_s(0) \quad (i = 1, \ldots, N+1).\end{aligned} \tag{1.2.29}$$

Из (1.2.26), (1.2.28) и (1.2.29) мы получим

$$(R_Q v)(N+1) = \sum_{1\leqslant i\leqslant N+1,\, i\neq m+1} \gamma_{1i}(R_Q v)(i-1). \tag{1.2.30}$$

В силу (1.2.27) и (1.2.30)

$$R_Q\big(\mathring{W}^1(0,d)\big) \subset W^1_{\gamma,m}(0,d).$$

2. Докажем теперь обратное включение

$$W^1_{\gamma,m}(0,d) \subset R_Q\big(\mathring{W}^1(0,d)\big).$$

Пусть $u \in W^1_{\gamma,m}(0,d)$. В силу леммы 1.2.5 оператор $R_Q : L_2(0,d) \to L_2(0,d)$ имеет ограниченный обратный $R_Q^{-1} : L_2(0,d) \to L_2(0,d)$. Покажем, что $v = R_Q^{-1} u \in \mathring{W}^1(0,d)$.

Из леммы 1.2.9 мы получим $v \in W^1(Q_{1p})$ $(p = 1, \dots, N+1)$. Поэтому достаточно доказать, что

$$v(p-0) = v(p+0) \quad (p = 1, \dots, N), \qquad v(0) = v(N+1) = 0.$$

Обозначим

$$\varphi_p = v(p+0) \quad (p = 0, \dots, N), \qquad \psi_j = v(j-0) \quad (j = 1, \dots, N+1).$$

Поскольку $R_Q v \in W^1(0, d)$, мы имеем

$$(R_Q v)(i+0) = (R_Q v)(i-0) \qquad (i = 1, \dots, N).$$

Таким образом, функции φ_p и ψ_j удовлетворяют следующим условиям:

$$\sum_{p=1}^{N+1} r_{i+1,p}\varphi_{p-1} = \sum_{p=1}^{N+1} r_{ip}\psi_p \qquad (i = 1, \dots, N), \tag{1.2.31}$$

ср. (1.2.18).

Более того, функция $R_Q v$ удовлетворяет условию (1.2.27), которое можно записать в виде

$$\sum_{p=1}^{N+1} r_{mp}\psi_p = \sum_{1 \leqslant i \leqslant N,\, i \neq m} \gamma_{2i} \sum_{p=1}^{N+1} r_{ip}\psi_p \tag{1.2.32}$$

или в виде

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{N+1} r_{m+1,p}\varphi_{p-1} &= \sum_{1 \leqslant i \leqslant N,\, i \neq m} \gamma_{2i} \sum_{p=1}^{N+1} r_{i+1,p}\varphi_{p-1} = \\ &= \sum_{2 \leqslant i \leqslant N+1,\, i \neq m+1} \gamma_{2,i-1} \sum_{p=1}^{N+1} r_{ip}\psi_{p-1}. \end{aligned} \tag{1.2.33}$$

Из условий (1.2.32), (1.2.23) и (1.2.33), (1.2.24) мы получим

$$\Bigg(r_{m,N+1} - \sum_{1 \leqslant i \leqslant N,\, i \neq m} \gamma_{2i} r_{i,N+1}\Bigg)\psi_{N+1} = 0, \tag{1.2.34}$$

$$\Bigg(r_{m+1,1} - \sum_{2 \leqslant i \leqslant N+1,\, i \neq m+1} \gamma_{2,i-1} r_{i1}\Bigg)\varphi_0 = 0. \tag{1.2.35}$$

Множитель перед ψ_{N+1} (φ_0) ненулевой. В противном случае мы имеем $\det R_1 = 0$, что противоречит нашему предположению о невырожденности оператора R_Q. Следовательно,

$$\psi_{N+1} = \varphi_0 = 0.$$

Таким образом, система (1.2.31) примет вид

$$\sum_{p=1}^{N} r_{i+1,p+1}\varphi_p = \sum_{p=1}^{N} r_{ip}\psi_p \qquad (i = 1, \ldots, N).$$

Поскольку $r_{i+1,p+1} = r_{ip}$ $(i, p = 1, \ldots, N)$ и m-я строка этой системы является линейной комбинацией остальных строк, данная система эквивалентна системе

$$\sum_{p=1}^{N} r_{ip}\varphi_p = \sum_{p=1}^{N} r_{ip}\psi_p \qquad (i = 1, \ldots, N,\ i \neq m). \tag{1.2.36}$$

Теперь, используя равенства $\varphi_0 = \psi_{N+1} = 0$, мы можем переписать соотношение (1.2.30) в следующем виде:

$$\sum_{p=1}^{N} r_{N+1,p}\psi_p = \sum_{1 \leqslant i \leqslant N+1, i \neq m+1} \gamma_{1i} \sum_{p=1}^{N} r_{i,p+1}\varphi_p. \tag{1.2.37}$$

Из (1.2.26) мы имеем

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant N,\ i \neq m+1} \gamma_{1i} \sum_{p=1}^{N} r_{i,p+1}\varphi_p = \sum_{p=1}^{N} r_{N+1,p}\varphi_p.$$

Таким образом, используя (1.2.37) и последнее соотношение, мы получаем

$$\sum_{p=1}^{N} r_{N+1,p}\psi_p = \sum_{p=1}^{N} r_{N+1,p}\varphi_p. \tag{1.2.38}$$

Используя (1.2.36) и (1.2.38), получим систему N уравнений с N неизвестными

$$\sum_{p=1}^{N} r_{ip}(\varphi_p - \psi_p) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, N+1,\ i \neq m). \tag{1.2.39}$$

Строки системы (1.2.39) совпадают с линейно независимыми строками g_i ($i = 1, \dots, N+1$, $i \neq m$). Следовательно, $\varphi_p - \psi_p = 0$, т. е. $\varphi_p = \psi_p$ ($p = 1, \dots, N$). Мы доказали, что

$$W^1_\gamma(0,d) \subset R_Q\big(\mathring{W}^1(0,d)\big).$$

$\square$

Пример 1.2.4. Пусть $d = 2$ и

$$(Rv)(t) = v(t+1) + v(t-1)$$

(ср. пример 1.2.2).

Мы имеем только один класс, содержащий два интервала $Q_{11} = (0,1)$ и $Q_{12} = (1,2)$. Матрицы R_1 и R_2 имеют вид

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = (0).$$

Очевидно, $m = 1$ и $R_Q\big(\mathring{W}^1(0,2)\big) = W^1_{\gamma,1}(0,2)$, где

$$W^1_{\gamma,1}(0,2) = \{u \in W^1(0,2) : u(0) = u(2),\ u(1) = 0\}.$$

1.3. Краевая задача для дифференциально-разностного уравнения второго порядка

Гладкость обобщенных решений. Рассмотрим *дифференциально-разностное* уравнение

$$-(Rv)''(t) + A_1 v = f_0(t) \qquad (t \in (0,d)) \tag{1.3.1}$$

с однородными краевыми условиями

$$v(t) = 0 \qquad (t \in [-N,0] \cup [d, d+N]). \tag{1.3.2}$$

Здесь $R : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ — разностный оператор вида

$$(Rv)(t) = \sum_{j=-N}^{N} b_j v(t+j),$$

$b_j \in \mathbb{R}$, $A_1 : \mathring{W}^1(0,d) \to L_2(0,d)$ — линейный ограниченный оператор, $d = N + \theta$, $0 < \theta \leqslant 1$, $N \in \mathbb{N}$, $f_0 \in L_2(0,d)$ — комплекснозначная функция. Дифференциально-разностное уравнение с неоднородными краевыми условиями можно легко свести к дифференциально-разностному уравнению с однородными краевыми условиями. Поэтому, не ограничивая общности, мы можем изучать уравнение (1.3.1) с однородными краевыми условиями (1.3.2). Поскольку сдвиги $t \to t + j$ могут отображать точки отрезка $[0, d]$ в множество $[-N, 0] \cup [d, d + N]$, мы рассматриваем краевые условия для уравнения (1.3.1) не только на концах интервала $(0, d)$, но также на множестве $[-N, 0] \cup [d, d + N]$.

Введем операторы $I_Q : L_2(0,d) \to L_2(\mathbb{R})$, $P_Q : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(0,d)$ и $R_Q : L_2(0,d) \to L_2(0,d)$ по формулам (1.2.2)–(1.2.4). Оператор I_Q позволяет рассматривать однородные краевые условия (1.3.2). Оператор P_Q используется для изучения уравнения (1.3.1) не на всей оси $\mathbb{R}$, а лишь на интервале $(0, d)$.

Пусть $\mathcal{A}_R : \mathcal{D}(\mathcal{A}_R) \subset L_2(0,d) \to L_2(0,d)$ — неограниченный оператор, заданный формулами

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_R v = -(R_Q v)''(t) + A_1 v \qquad (v \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_R)), \\ \mathcal{D}(\mathcal{A}_R) = \{v \in \mathring{W}^1(0,d) : R_Q v \in W^2(0,d)\}. \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

Определение 1.3.1. Функция $v \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_R)$ называется *обобщенным решением* задачи (1.3.1), (1.3.2), если

$$\mathcal{A}_R v = f_0. \tag{1.3.4}$$

Это определение эквивалентно следующему.

Определение 1.3.2. Функция $v \in \mathring{W}^1(0,d)$ называется *обобщенным решением* задачи (1.3.1), (1.3.2), если для всех $w \in \mathring{W}^1(0,d)$,

$$\int\limits_0^d \{(R_Q v)'(t)\overline{w'(t)} + (A_1 v)(t)\overline{w(t)}\}\, dt = \int\limits_0^d f_0(t)\overline{w(t)}\, dt. \qquad (1.3.5)$$

Действительно, если функция $v \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_R)$ является обобщенным решением краевой задачи (1.3.1), (1.3.2) в смысле определения 1.3.1, то, умножая (1.3.4) на $\overline{w(t)}$ и интегрируя по частям, мы получаем (1.3.5).

Теперь предположим, что $v \in \mathring{W}^1(0,d)$ — обобщенное решение задачи (1.3.1), (1.3.2) в смысле определения 1.3.2. Тогда из тождества (1.3.5), используя правило дифференцирования обобщенных функций, для всех $w \in \dot{C}^\infty(0,d)$ мы имеем

$$\langle -(R_Q v)'', \overline{w}\rangle + \int\limits_0^d A_1 v\overline{w}\, dt = \int\limits_0^d f_0\overline{w}\, dt. \qquad (1.3.6)$$

Поскольку $A_1 v \in L_2(0,d)$ и $f_0 \in L_2(0,d)$, из (1.3.6) следует, что

$$(R_Q v)'' \in L_2(0,d)$$

и равенство (1.3.4) выполнено.

Рассмотрим пример оператора A_1.

Пример 1.3.1. Пусть

$$A_1 v = a_1(t)(R_{1Q}v)'(t) + a_2(t)(R_{2Q}v)(t), \qquad (1.3.7)$$

где $a_1, a_2 \in C^\infty[0,d]$ — вещественнозначные функции, $R_{iQ} = P_Q R_i I_Q$,

$$(R_i v)(t) = \sum_{j=-N}^{N} b_{ij} v(t+j) \qquad (i = 1, 2),$$

$b_{ij} \in \mathbb{R}$. Тогда в силу лемм 1.2.2 и 1.2.7 оператор $A_1 : \mathring{W}^1(0,d) \to L_2(0,d)$ ограниченный.

В отличие от решений обыкновенных дифференциальных уравнений гладкость обобщенных решений краевых задач для дифференциально-разностных уравнений может нарушаться на интервале $(0,d)$.

Теорема 1.3.1. *Предположим, что оператор R_Q невырожденный. Пусть $f_0 \in W^k(0,d)$, и пусть оператор A_1 имеет вид* (1.3.7)*, если $k \geqslant 1$. Пусть $v(t)$ — обобщенное решение краевой задачи* (1.3.1)*,* (1.3.2)*. Тогда*

$$v \in W^{k+2}(j-1,j) \quad (j=1,\dots,N+1),$$

если $\theta = 1$, и

$$\begin{aligned} &v \in W^{k+2}(j-1,j-1+\theta) && (j=1,\dots,N+1),\\ &v \in W^{k+2}(j-1+\theta,j) && (j=1,\dots,N), \end{aligned}$$

если $\theta < 1$.

Доказательство. Докажем теорему 1.3.1 по индукции.

Пусть $k=0$. Тогда по определению 1.3.1 $R_Q v \in W^2(0,d)$. Поэтому из леммы 1.2.9 следует, что $v \in W^2(Q_{si})$ для всех s и $i=1,\dots,M$.

Пусть теперь утверждение теоремы 1.3.1 справедливо для некоторого неотрицательного целого $k=m-1$. Докажем, что это утверждение выполняется также для $k=m$. Предположим, что $f_0 \in W^m(0,d)$. Уравнение (1.3.4) примет вид

$$-(R_Q v)'' = F_0 = f_0 - A_1 v.$$

По предположению индукции $v \in W^{m+1}(Q_{si})$ для всех s и $i=1,\dots,M$. Поэтому в силу леммы 1.2.8 $F \in W^m(Q_{si})$, т. е. $R_Q v \in W^{m+2}(Q_{si})$. Из леммы 1.2.9 вытекает, что $v \in W^{m+2}(Q_{si})$. $\square$

Рассмотрим пример, в котором гладкость обобщенного решения нарушается даже при бесконечно дифференцируемой правой части уравнения. Этот пример показывает также, как найти обобщенное решение задачи (1.3.1), (1.3.2) путем сведения к дифференциальному уравнению с нелокальными краевыми условиями.

Пример 1.3.2. Рассмотрим краевую задачу

$$-(Rv)''(t) = 1 \qquad (t \in (0,2)), \tag{1.3.8}$$

$$v(t) = 0 \qquad (t \in [-1,0] \cup [2,3]), \tag{1.3.9}$$

где

$$(Rv)(t) = v(t) + bv(t+1) + bv(t-1), \quad |b| \neq 1.$$

Тогда

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{pmatrix}$$

и $\det R_1 \neq 0$ (см. пример 1.2.2). В силу теоремы 1.2.1 оператор R_Q отображает непрерывно и взаимно однозначно $\mathring{W}^1(0,2)$ на $W^1_\gamma(0,2)$, где $W^1_\gamma(0,2)$ — подпространство функций $u \in W^1(0,2)$ таких, что

$$u(0) = bu(1) = u(2). \tag{1.3.10}$$

Следовательно, краевая задача (1.3.8), (1.3.9) эквивалентна уравнению

$$-u''(t) = 1 \tag{1.3.11}$$

с нелокальными условиями (1.3.10). Подставляя общее решение уравнения (1.3.11) в (1.3.10), мы видим, что существует единственное сильное решение задачи (1.3.11), (1.3.10)

$$u(t) = -\frac{t^2}{2} + t + \frac{b}{2(1-b)}.$$

Поэтому мы можем найти обобщенное решение задачи (1.3.8), (1.3.9) следующим образом:

$$v(t) = R_Q^{-1} u(t).$$

Поскольку

$$R_1^{-1} = \frac{1}{1-b^2} \begin{pmatrix} 1 & -b \\ -b & 1 \end{pmatrix},$$

то $R_Q^{-1} = P_Q R' I_Q$, где

$$(R'w)(t) = \frac{w(t) - bw(t+1) - bw(t-1)}{1-b^2}.$$

Таким образом, существует единственное обобщенное решение задачи (1.3.8), (1.3.9)

$$v(t) = \begin{cases} -\dfrac{t^2}{2(1+b)} + \dfrac{t}{1-b^2} & (t \in (0,1)), \\ -\dfrac{t^2}{2(1+b)} + \dfrac{1-2b}{1-b^2}\, t + \dfrac{2b}{1-b^2} & (t \in (1,2)), \end{cases} \tag{1.3.12}$$

см. рис. 1.3.1.

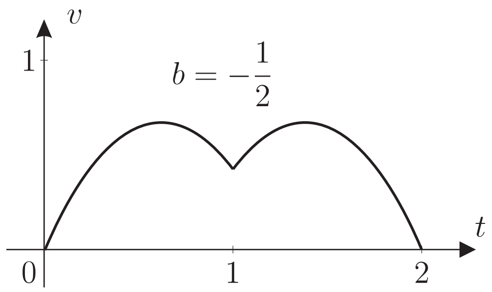

Рис. 1.3.1

Очевидно, производная $v'(t)$ имеет разрыв в точке $t = 1$, если $b \neq 0$, т. е. $v \in \mathring{W}^1(0,2) \setminus W^2(0,2)$.

Продемонстрируем теперь другой путь нахождения обобщенного решения краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения.

Пример 1.3.3. Рассмотрим вновь краевую задачу (1.3.8), (1.3.9).

Введем новые функции

$$v_1(t) = v(t) \qquad (t \in (0,1)),$$
$$v_2(t) = v(t+1) \quad (t \in (0,1)).$$

Тогда из (1.3.8), (1.3.9) следует, что

$$\begin{aligned} -v_1''(t) - bv_2''(t) = 1 \quad (t \in (0,1)), \\ -bv_1''(t) - v_2''(t) = 1 \quad (t \in (0,1)). \end{aligned} \tag{1.3.13}$$

Общее решение системы (1.3.13) имеет вид

$$\begin{aligned} v_1(t) = -\frac{t^2}{2(1+b)} + c_1 t + c_2, \\ v_2(t) = -\frac{t^2}{2(1+b)} + c_3 t + c_4. \end{aligned} \tag{1.3.14}$$

Поскольку $v \in \mathring{W}^1(0,2)$ и $\mathring{W}^1(0,2) \subset C[0,2]$, мы получим

$$v(0) = v(2) = 0, \qquad v(1-0) = v(1+0).$$

Из условия $R_Q v \in W^2(0,2)$ следует, что

$$(R_Q v)'(1-0) = (R_Q v)'(1+0).$$

Мы можем переписать эти условия в следующем виде:

$$\begin{aligned} &v_1(0) = 0, && v_2(1) = 0, \\ &v_1(1) = v_2(0), && v_1'(1) + bv_2'(1) = bv_1'(0) + v_2'(0). \end{aligned} \tag{1.3.15}$$

Из системы (1.3.15) мы находим константы $c_1, \ldots, c_4$. Подставляя эти константы в (1.3.14), мы имеем

$$\begin{aligned} v_1(t) &= -\frac{t^2}{2(1+b)} + \frac{t}{1-b^2} && (t \in (0,1)), \\ v_2(t) &= -\frac{t^2}{2(1+b)} - \frac{bt}{1-b^2} + \frac{1}{2(1-b)} && (t \in (0,1)). \end{aligned} \tag{1.3.16}$$

Из равенств (1.3.16) мы получаем (1.3.12).

Федгольмова разрешимость. В случае невырожденного оператора R_Q мы установим фредгольмовость оператора $\mathcal{A}_R$.

Теорема 1.3.2. *Предположим, что оператор R_Q невырожденный. Тогда неограниченный оператор $\mathcal{A}_R : \mathcal{D}(\mathcal{A}_R) \subset L_2(0,d) \to L_2(0,d)$ фредгольмов и* $\operatorname{ind} \mathcal{A}_R = 0$.

В теореме 1.3.2 мы рассматриваем как регулярные, так и нерегулярные разностные операторы. В случае регулярного оператора R_Q мы сведем задачу (1.3.1), (1.3.2) к обыкновенному дифференциальному уравнению с нелокальными краевыми условиями (1.2.14). Затем мы применим следствие 1.1.2 о разрешимости этой нелокальной задачи. Для нерегулярного оператора R_Q мы сведем задачу (1.3.1), (1.3.2) к обыкновенному дифференциальному уравнению с нелокальными краевыми условиями (1.2.21), (1.2.22). Установим теперь фредгольмово свойство оператора, соответствующего этой вспомогательной нелокальной краевой задаче.

Пусть $\theta = 1$, т. е. $d = N + 1$. Обозначим через $W^1_{\gamma,m}(0,d)$ подпространство функций из $W^1(0,d)$, удовлетворяющих условиям

$$u(N+1) = \sum_{1\leqslant i\leqslant N+1,\, i\neq m+1} \gamma_{1i} u(i-1), \tag{1.3.17}$$

$$u(m) = \sum_{1\leqslant i\leqslant N,\, i\neq m} \gamma_{2i} u(i), \tag{1.3.18}$$

где m — фиксированное число такое, что $1 \leqslant m \leqslant N$, γ_{1i} $(i = 1, \dots, N+1,$ $i \neq m+1)$ и γ_{2i} $(i = 1, \dots, N,\ i \neq m)$ — вещественные числа, $\gamma = \{\gamma_{ji}\}$.

Введем ограниченный оператор $\mathcal{A}_{\gamma,m} : W^2(0,d) \cap W^1_{\gamma,m}(0,d) \to L_2(0,d)$, заданный по формуле

$$\mathcal{A}_{\gamma,m} u = -u'' + A_1 R_Q^{-1} u. \tag{1.3.19}$$

Лемма 1.3.1. *Ограниченный оператор* $\mathcal{A}_{\gamma,m} : W^2(0,d) \cap W^1_{\gamma,m}(0,d) \to L_2(0,d)$ *фредгольмов, и* $\operatorname{ind} \mathcal{A}_{\gamma,m} = 0$.

Доказательство. Из компактности оператора вложения $W^2(0,d) \cap W^1_{\gamma,m}(0,d)$ в $W^1_{\gamma,m}(0,d)$ и теоремы 1.2.2 следует, что оператор $A_1 R_Q^{-1} : W^2(0,d) \cap W^1_{\gamma,m}(0,d) \to L_2(0,d)$ компактный. В силу теоремы А.7 компактное возмущение не меняет свойства фредгольмовости и индекса оператора. Поэтому, не ограничивая общности, мы можем полагать, что $A_1 R_Q^{-1} = 0$.

Рассмотрим неоднородное операторное уравнение

$$\mathcal{A}_{\gamma,m} u = f_0, \tag{1.3.20}$$

где $f_0 \in L_2(0,d)$. Это уравнение эквивалентно обыкновенному дифференциальному уравнению

$$-u''(t) = f_0(t) \qquad (t \in (0, N+1)) \tag{1.3.21}$$

с нелокальными краевыми условиями (1.3.17), (1.3.18).

Общее решение уравнения (1.3.21) имеет вид

$$u(t) = c_1 + c_2 t - \int\limits_0^t (t-\tau) f_0(\tau)\, d\tau. \tag{1.3.22}$$

Подставляя (1.3.22) в (1.3.17) и (1.3.18), мы получим уравнения для констант c_1 и c_2

$$\begin{gathered} c_1 \left(1 - \sum_{1 \leqslant i \leqslant N+1,\, i \neq m+1} \gamma_{1i} \right) + c_2 \left(N + 1 - \sum_{2 \leqslant i \leqslant N,\, i \neq m+1} \gamma_{2i} (i-1) \right) = \\ = \int\limits_0^{N+1} (N+1-\tau) f_0(\tau)\, d\tau - \sum_{1 \leqslant i \leqslant N,\, i \neq m} \gamma_{1,i+1} \int\limits_0^i (i-\tau) f_0(\tau)\, d\tau, \end{gathered} \tag{1.3.23}$$

$$
\begin{gathered}
c_1\left(1-\sum_{1\leqslant i\leqslant N,\, i\neq m}\gamma_{2i}\right)+c_2\left(m-\sum_{1\leqslant i\leqslant N,\, i\neq m}\gamma_{2i}i\right)= \\
=\int\limits_0^m (m-\tau)f_0(\tau)d\tau-\sum_{1\leqslant i\leqslant N,\, i\neq m}\gamma_{2i}\int\limits_0^i (i-\tau)f_0(\tau)d\tau.
\end{gathered}
\tag{1.3.24}
$$

Обозначим

$$
\Phi_i(f_0)=\int\limits_0^i (i-\tau)f_0(\tau)d\tau \qquad (i=1,\ldots,N+1).
$$

Очевидно, $\Phi_i(f_0)=(f_0,\varphi_0)_{L_2(0,d)}$, где

$$
\varphi_i(\tau)=(i-\tau)\theta(i-\tau),
$$

$\theta(t)=1$ при $t\geqslant 0$, $\theta(t)=0$ при $t<0$. Следовательно, $\Phi_i(f_0)$ — линейно независимые непрерывные функционалы на $L_2(0,d)$. Отсюда следует, что

$$
\begin{gathered}
F_1(f_0)=\Phi_{N+1}(f_0)-\sum_{1\leqslant i\leqslant N,\, i\neq m}\gamma_{1,i+1}\Phi_i(f_0), \\
F_2(f_0)=\Phi_m(f_0)-\sum_{1\leqslant i\leqslant N,\, i\neq m}\gamma_{2i}\Phi_i(f_0)\ -
\end{gathered}
$$

также линейно независимые непрерывные функционалы на $L_2(0,d)$.

Таким образом, система (1.3.23), (1.3.24) примет вид

$$
\begin{gathered}
c_1\left(1-\sum_{1\leqslant i\leqslant N+1,\, i\neq m+1}\gamma_{1i}\right)+ \\
+c_2\left(N+1-\sum_{2\leqslant i\leqslant N,\, i\neq m+1}\gamma_{2i}(i-1)\right)=F_1(f_0), \qquad (1.3.25) \\
c_1\left(1-\sum_{1\leqslant i\leqslant N,\, i\neq m}\gamma_{2i}\right)+c_2\left(m-\sum_{1\leqslant i\leqslant N,\, i\neq m}\gamma_{2i}i\right)=F_2(f_0).
\end{gathered}
$$

Отсюда следует, что образ $\mathcal{R}(\mathcal{A}_{\gamma,m})$ замкнут в пространстве $L_2(0,d)$ и $\operatorname{codim}\mathcal{R}(\mathcal{A}_{\gamma,m})\leqslant 2$. Обозначим через M матрицу системы (1.3.25).

Очевидно, $\mathcal{N}(\mathcal{A}_{\gamma,m}) \neq \{0\}$ тогда и только тогда, когда $\det M = 0$. Более того, $\dim \mathcal{N}(\mathcal{A}_{\gamma,m}) = 2 - \operatorname{rank} M$. Поэтому оператор $\mathcal{A}_{\gamma,m}$ фредгольмов.

Теперь остается доказать, что $\operatorname{ind} \mathcal{A}_{\gamma,m} = 0$. Рассмотрим три случая.

1. $\operatorname{rank} M = 2$. В этом случае

$$\dim \mathcal{N}(\mathcal{A}_{\gamma,m}) = 0, \qquad \operatorname{codim} \mathcal{R}(\mathcal{A}_{\gamma,m}) = 0,$$

   т. е. $\operatorname{ind} \mathcal{A}_{\gamma,m} = 0$.

2. $\operatorname{rank} M = 1$. Очевидно, $\dim \mathcal{N}(\mathcal{A}_{\gamma,m}) = 1$. С другой стороны, система (1.3.25) совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы равен 1. Это означает, что f_0 должна удовлетворять условию

$$\alpha_1 F_1(f_0) + \alpha_2 F_2(f_0) = 0,$$

   где $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$. Поскольку функционалы F_1 и F_2 — линейно независимы, это означает, что $\operatorname{codim} \mathcal{R}(\mathcal{A}_{\gamma,m}) = 1$. Следовательно, $\operatorname{ind} \mathcal{A}_{\gamma,m} = 0$.

3. $\operatorname{rank} M = 0$. В этом случае $\dim \mathcal{N}(\mathcal{A}_{\gamma,m}) = 2$. Система (1.3.25) совместна тогда и только тогда, когда $F_1(f_0) = F_2(f_0) = 0$, т. е. $\operatorname{codim} \mathcal{R}(\mathcal{A}_{\gamma,m}) = 2$. Таким образом, $\operatorname{ind} \mathcal{A}_{\gamma,m} = 0$.

$\square$

Доказательство теоремы 1.3.2. 1. Вначале рассмотрим случай, когда оператор R_Q регулярный. По теореме 1.2.1 существуют числа γ_{ji} $(j = 1, 2,\ i = 1, \ldots, N)$ такие, что оператор R_Q отображает непрерывно и взаимно однозначно $\mathring{W}^1(0,d)$ на $W^1_\gamma(0,d)$. Здесь $W^1_\gamma(0,d)$ — пространство функций из $W^1(0,d)$, удовлетворяющих условиям

$$u(0) = \sum_{i=1}^{N} \gamma_{1i} u(i), \qquad u(d) = \sum_{i=1}^{N} \gamma_{2i} u(d-i). \tag{1.3.26}$$

Таким образом,

$$\mathcal{A}_R = \mathcal{A}_\gamma R_Q,$$

где $\mathcal{A}_\gamma : W^2(0,d) \cap W^1_\gamma(0,d) \to L_2(0,d)$ — ограниченный оператор, заданный по формуле

$$\mathcal{A}_\gamma u = -u'' + A_1 R_Q^{-1} u \quad \bigl(u \in W^2(0,d) \cap W^1_\gamma(0,d)\bigr).$$

В силу следствия 1.1.2 оператор $\mathcal{A}_\gamma$ фредгольмов и $\operatorname{ind} \mathcal{A}_\gamma = 0$. Следовательно, по теореме A.1 оператор $\mathcal{A}_R$ фредгольмов и $\operatorname{ind} \mathcal{A}_R = 0$.

2. Предположим теперь, что оператор R_Q нерегулярный. В силу теоремы 1.2.2 существует натуральное число m и вещественные числа γ_{1i} ($i = 1, \dots, N+1$, $i \neq m+1$, $\gamma_{11} \neq 0$) и γ_{2i} ($i = 1, \dots, N$, $i \neq m$) такие, что оператор R_Q отображает $\mathring{W}^1(0,d)$ на $W^1_{\gamma,m}(0,d)$ непрерывно и взаимно однозначно. Таким образом,

$$\mathcal{A}_R = \mathcal{A}_{\gamma,m} R_Q,$$

где $\mathcal{A}_{\gamma,m} : W^2(0,d) \cap W^1_{\gamma,m}(0,d) \to L_2(0,d)$ — ограниченный оператор, заданный формулой (1.3.19). По лемме 1.3.1 оператор $\mathcal{A}_{\gamma,m}$ фредгольмов и $\operatorname{ind} \mathcal{A}_{\gamma,m} = 0$. Следовательно, по теореме A.1 оператор $\mathcal{A}_R$ фредгольмов и $\operatorname{ind} \mathcal{A}_R = 0$. $\square$

Приведем примеры операторов $\mathcal{A}_R$, имеющих нетривиальное ядро.

Пример 1.3.4. Пусть $d = 2$, и пусть

$$(Rv)(t) = v(t) + 2v(t-1)$$

(см. пример 1.2.1). Определим дифференциально-разностный оператор

$$\mathcal{A}_R : \mathcal{D}(\mathcal{A}_R) \subset L_2(0,2) \to L_2(0,2)$$

по формуле

$$\mathcal{A}_R v = -(R_Q v)'' \qquad \bigl(v \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_R) = \{v \in \mathring{W}^1(0,2) : R_Q v \in W^2(0,2)\}\bigr).$$

Тогда

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = (1).$$

Таким образом, оператор R_Q регулярный. В силу теоремы 1.2.1 оператор R_Q является изморфизмом пространства $\mathring{W}^1(0,2)$ на пространство

$$W^1_\gamma(0,2) = \{u \in W^1(0,2) : u(0) = 0,\ u(2) = 2u(1)\}.$$

Поэтому

$$\mathcal{A}_R = \mathcal{A}_\gamma R_Q,$$

где

$$\mathcal{A}_\gamma : W^2(0,2) \cap W^1_\gamma(0,2) \to L_2(0,2)$$

есть ограниченный оператор вида

$$\mathcal{A}_\gamma u = -u''.$$

Очевидно, ядро $\mathcal{N}(\mathcal{A}_\gamma)$ состоит из функций $u(t) = c_1 + c_2 t$, удовлетворяющих нелокальным условиям

$$u(0) = 0, \quad u(2) = 2u(1),$$

т. е.

$$c_1 = 0, \quad c_1 + 2c_2 = 2(c_1 + c_2).$$

Следовательно, функция

$$u(t) = t \quad (t \in (0,2))$$

является базисом в $\mathcal{N}(\mathcal{A}_\gamma)$. Отсюда вытекает, что функция

$$v(t) = R_Q^{-1} t = 1 - |t-1| \quad (t \in (0,2))$$

является базисом в $\mathcal{N}(\mathcal{A}_R)$.

Пример 1.3.5. Пусть $d = 2$, и пусть

$$(Rv)(t) = v(t-1) - v(t+1).$$

Введем дифференциально-разностный оператор

$$\mathcal{A}_R : \mathcal{D}(\mathcal{A}_R) \subset L_2(0,2) \to L_2(0,2)$$

по формуле

$$\mathcal{A}_R v = -(R_Q v)'' \quad \Big(v \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_R) = \{v \in \mathring{W}^1(0,2) : R_Q v \in W^2(0,2)\}\Big).$$

Тогда

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = (0).$$

Таким образом, оператор R_Q нерегулярный. В силу теоремы 1.2.2 оператор R_Q — изоморфизм пространства $\mathring{W}^1(0,2)$ на пространство

$$W^1_{\gamma,1}(0,2) = \{u \in W^1(0,2) : u(1) = 0, u(2) = -u(0)\}.$$

Поэтому

$$\mathcal{A}_R = \mathcal{A}_{\gamma,1} R_Q,$$

где

$$\mathcal{A}_{\gamma,1} : W^2(0,2) \cap W^1_{\gamma,1}(0,2) \to L_2(0,2)$$

есть ограниченный оператор вида

$$\mathcal{A}_{\gamma,1} u = -u''.$$

Очевидно, ядро $\mathcal{N}(\mathcal{A}_{\gamma,1})$ состоит из функций

$$u(t) = c_1 + c_2 t,$$

удовлетворяющих нелокальным условиям

$$u(1) = 0, \quad u(2) = -u(0),$$

т. е.

$$c_1 + c_2 = 0, \quad c_1 + 2c_2 = -c_1.$$

Следовательно, функция

$$u(t) = t - 1 \quad (t \in (0,2))$$

образует базис в $\mathcal{N}(\mathcal{A}_{\gamma,1})$. Отсюда вытекает, что функция

$$v(t) = R_Q^{-1}(t-1) = 1 - |t-1| \quad (t \in (0,2))$$

образует базис в $\mathcal{N}(\mathcal{A}_R)$.

Замечание 1.3.1. Если оператор R_Q вырожден, то $\dim \mathcal{N}(R_Q) = \infty$ в силу леммы 1.2.6. При $A_1 = 0$ мы имеем $\mathcal{N}(R_Q) \subset \mathcal{N}(\mathcal{A}_R)$. Следовательно, $\mathcal{N}(\mathcal{A}_R) = \infty$. Таким образом, оператор $\mathcal{A}_R$ не является фредгольмовым.

Однозначная разрешимость и спектр. В этом пункте мы рассмотрим спектр оператора $\mathcal{A}_R$, предполагая, что матрица $R_1 + R_1^*$ положительно определенная. Из этого предположения следует, что $\det R_1 \neq 0$ и $\det R_2 \neq 0$, т. е. оператор R_Q регулярный.

Введем полуторалинейную форму $b_R[u,v]$ с областью определения $\mathcal{D}(b_R) = \mathring{W}^1(0,d)$ по формуле

$$b_R[u,v] = \int\limits_0^d (R_Q u)'(t)\overline{v'(t)} + (A_1 u)(t)\overline{v(t)}dt. \tag{1.3.27}$$

Лемма 1.3.2. *Пусть матрица $R_1 + R_1^*$ положительно определенная. Тогда существуют константы $c_1 > 0$ и $c_2 \geqslant 0$ такие, что*

$$\operatorname{Re} b_R[u] \geqslant c_1\|u\|^2_{\mathring{W}^1(0,d)} - c_2\|u\|^2_{L_2(0,d)} \quad \bigl(u \in \mathring{W}^1(0,d)\bigr). \tag{1.3.28}$$

Доказательство. Поскольку $A_1 : \mathring{W}^1(0,d) \to L_2(0,d)$ — ограниченный оператор, из лемм 1.2.5, 1.2.7 и неравенства Коши—Буняковского следует, что

$$\operatorname{Re} b_R[u] = \frac{1}{2}\bigl((R_Q + R_Q^*)u', u'\bigr)_{L_2(0,d)} + \operatorname{Re}\,(A_1 u, u)_{L_2(0,d)} \geqslant$$
$$\geqslant k_1\|u'\|^2_{L_2(0,d)} - k_2\|u\|_{\mathring{W}^1(0,d)}\|u\|_{L_2(0,d)}.$$

Следовательно, используя неравенство

$$ab \leqslant \varepsilon a^2 + \varepsilon^{-1} b^2 \qquad (a, b \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0)$$

и эквивалентную норму в $\mathring{W}^1(0,d)$, мы получим

$$\operatorname{Re} b_R[u] \geqslant (k_3 - k_2\varepsilon)\|u\|^2_{\mathring{W}^1(0,d)} - k_2\varepsilon^{-1}\|u\|^2_{L_2(0,d)}.$$

Выбирая теперь ε так, что $0 < \varepsilon < \dfrac{k_3}{2k_2}$, получаем (1.3.28). □

Теорема 1.3.3. *Пусть матрица $R_1 + R_1^*$ положительно определенная. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(a) *Оператор $\mathcal{A}_R : \mathcal{D}(\mathcal{A}_R) \subset L_2(0,d) \to L_2(0,d)$ является m-секториальным оператором, ассоциированным с формой b_R.*

(b) *Оператор $\mathcal{A}_R : \mathcal{D}(A_R) \subset L_2(0,d) \to L_2(0,d)$ фредгольмов, и* $\operatorname{ind} \mathcal{A}_R = 0$.

(c) *Спектр $\sigma(\mathcal{A}_R)$ дискретный, и $\sigma(\mathcal{A}_R) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda > -c_2\}$, где $c_2 \geqslant 0$ — константа из леммы* 1.3.2.

(d) *Если $\lambda \notin \sigma(\mathcal{A}_R)$, то резольвента $R(\lambda, \mathcal{A}_R) : L_2(0,d) \to L_2(0,d)$ — компактный оператор.*

Доказательство. В силу лемм 1.2.7 и 1.3.2 полуторалинейная форма b_R является ограниченной секториальной формой на $\mathring{W}^1(0,d)$ с вершиной $\gamma = -c_2$. Обозначим через B_{b_R} m-секториальный оператор, ассоциированный с формой b_R. Поскольку определения 1.3.1 и 1.3.2 эквивалентны, в силу теоремы A.13 мы имеем $\mathcal{A}_R = B_{b_R}$. Теперь утверждения теоремы 1.3.3 следуют из теорем A.17, A.1 и компактности оператора вложения $\mathring{W}^1(0,d)$ в $L_2(0,d)$. □

Следствие 1.3.1. *Пусть матрица $R_1 + R_1^*$ положительно определенная, и пусть*

$$\operatorname{Re}(A_1 u, u)_{L_2(0,d)} \geqslant 0 \qquad \big(u \in \mathring{W}^1(0,d)\big). \tag{1.3.29}$$

Тогда существует единственное обобщенное решение краевой задачи (1.3.1), (1.3.2).

Доказательство. В силу (1.3.29) мы можем положить $c_2 = 0$ в лемме 1.3.2. Таким образом, по теореме 1.3.3

$$\sigma(\mathcal{A}_R) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > 0\},$$

т. е. $0 \notin \sigma(\mathcal{A}_R)$. □

Пример 1.3.6. Рассмотрим краевую задачу

$$-(Rv)''(t) + (R_0 v)(t) = f_0(t) \qquad (t \in (0,2)), \tag{1.3.30}$$

$$v(t) = 0 \qquad (t \in [-1,0] \cup [2,3]), \tag{1.3.31}$$

где

$$(Rv)(t) = b_0 v(t) + b_1 v(t+1) + b_{-1} v(t-1),$$

$$(R_0 v)(t) = b_{00} v(t) + b_{01} v(t+1) + b_{0,-1} v(t-1),$$

$$b_i, b_{0i} \in \mathbb{R},\ i = 0, \pm 1.$$

Матрицы R_1 и R_{01} имеют вид

$$R_1 = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 \\ b_{-1} & b_0 \end{pmatrix}, \qquad R_{01} = \begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} \\ b_{0,-1} & b_{00} \end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$A_1 = R_{0Q} = P_Q R_0 I_Q.$$

Предположим, что $R_1 + R_1^* > 0$ и $R_{01} + R_{01}^* \geqslant 0$, т. е.

$$4b_0^2 - (b_1 + b_{-1})^2 > 0, \quad b_0 > 0, \quad 4b_{00}^2 - (b_{01} + b_{0,-1})^2 \geqslant 0, \quad b_{00} \geqslant 0.$$

Тогда выполняется неравенство (1.3.29). Поэтому в силу следствия 1.3.1 для любой $f_0 \in L_2(0,2)$ существует единственное обобщенное решение $u \in \mathring{W}^1(0,d)$ задачи (1.3.30), (1.3.31).

1.4. Нелокальные задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром

Постановка задачи. Мы будем изучать систему уравнений с параметром

$$\mathbf{A}u = \big(\mathbf{A}^0u\big)(t) + \big(\mathbf{A}^1u\big)(t) = f_0(t) \qquad (t \in (d_1,d_2)) \tag{1.4.1}$$

с нелокальными краевыми условиями

$$\mathbf{B}_\rho u = \big(\big(\mathbf{B}^0_\rho u\big)(t) + \big(\mathbf{B}^1_\rho u\big)(t)\big)|_{t=d_\rho} + \mathbf{B}^2_\rho u = f_\rho \qquad (\rho = 1,2) \tag{1.4.2}$$

относительно вектор-функции $u = (u_1, \dots, u_N)$. В этом параграфе и далее для упрощения используются одинаковые обозначения для векторов-столбцов и векторов-строк.

Здесь

$$f_0 = (f_{01}, \dots, f_{0N}) \in L_2^N(d_1,d_2)$$

есть комплекснозначная вектор-функция,

$$f_\rho = (f_{\rho 1}, \dots, f_{\rho,mN}) \in \mathbb{C}^{mN} \quad (\rho = 1,2)$$

суть вектора с комплексными координатами, $\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр, $\mathbf{A}^0 = \mathbf{A}^0(t, D_t, \lambda)$ и $\mathbf{B}^0_\rho = \mathbf{B}^0_\rho(t, D_t, \lambda)$ — матрицы порядков $N \times N$ и $mN \times N$, состоящие из элементов, которые являются дифференциальными операторами

$$A^0_{jk}(t, D_t, \lambda) = \sum_{\alpha+\beta=2m} a_{jk\alpha\beta}(t)\lambda^\beta D_t^\alpha \qquad (j,k = 1,\dots,N), \tag{1.4.3}$$

$$B^0_{\rho\mu k}(t,D_t,\lambda)=\sum_{\alpha+\beta=m_{\rho\mu}} b_{\rho\mu k\alpha\beta}(t)\lambda^\beta D_t^\alpha \tag{1.4.4}$$
$$(\rho=1,2,\ \mu=1,\dots,mN,\ k=1,\dots,N)$$

соответственно; $D_t=-i\dfrac{d}{dt}$, $a_{jk\alpha\beta}, b_{\rho\mu k\alpha\beta}\in C^\infty[d_1,d_2]$ — комплекснозначные функции.

Наряду с матрицами $\mathbf{A}^0(t,D_t,\lambda)$ и $\mathbf{B}^0_\rho(t,D_t,\lambda)$ мы рассмотрим матрицы $\mathbf{A}^0(t,\tau,\lambda)$ и $\mathbf{B}^0_\rho(t,\tau,\lambda)$ с элементами, которые являются полиномами $A^0_{jk}(t,\tau,\lambda)$ и $B^0_{\rho\mu k}(t,\tau,\lambda)$ соответственно.

Обозначим

$$\omega_\varepsilon=\{\lambda\in\mathbb{C}: |\arg\lambda|\leqslant\varepsilon \text{ или } |\arg\lambda-\pi|\leqslant\varepsilon\},$$

где $0<\varepsilon<\pi/2$. Пусть $l\geqslant\max\limits_{\rho,\mu}\{-2m+m_{\rho\mu}+1\}$ — неотрицательное целое число.

Предположим, что операторы $\mathbf{A}^0,\mathbf{A}^1,\mathbf{B}^0_\rho,\mathbf{B}^1_\rho$ и $\mathbf{B}^2_\rho$ удовлетворяют следующим условиям.

Условие 1.4.1. Существует число $0<\varepsilon<\pi/2$ такое, что полином $\det\mathbf{A}^0(t,\tau,\lambda)$ переменной τ имеет ровно mN корней

$$\tau_1^+(t,\lambda),\dots,\tau_{mN}^+(t,\lambda)$$

с положительными мнимыми частями и mN корней с отрицательными мнимыми частями для всех $t\in[d_1,d_2]$ и $0\neq\lambda\in\omega_\varepsilon$ (ср. условие C.7).

Условие 1.4.2. Строки матрицы $\mathbf{B}^0_\rho(t,\tau,\lambda)\mathbf{A}^0(t,\tau,\lambda)^{-1}\det\mathbf{A}^0(t,\tau,\lambda)$ линейно независимы по модулю полинома $\prod\limits_{\mu=1}^{mN}\bigl(\tau-\tau_\mu^+(d_\rho,\lambda)\bigr)$ для всех $\rho=1,2$ и $0\neq\lambda\in\omega_\varepsilon$ (ср. условие C.8).

Условие 1.4.3. $\mathbf{A}^1 = \mathbf{A}^1(\lambda)$ — матрицы порядка $N \times N$, состоящие из элементов

$$\sum_{p=0}^{2m-1} \lambda^p A^1_{pjk} \qquad (j, k = 1, \ldots, N)$$

таких, что операторы

$$A^1_{pjk} : W^{2m-p-r_p}(d_1, d_2) \to L_2(d_1, d_2)$$

и их сужения

$$A^1_{pjk} : W^{l+2m-p-r_p}(d_1, d_2) \to W^l(d_1, d_2)$$

являются линейными ограниченными операторами, где $r_p \in \mathbb{N}$, $r_p \leqslant 2m - p$ $(p = 0, \ldots, 2m-1)$.

Условие 1.4.4. $\mathbf{B}^1_\rho = \mathbf{B}^1_\rho(\lambda)$ $(\rho = 1, 2)$ — матрица порядка $mN \times N$ с элементами

$$\sum_{q=0}^{m_{\rho\mu}} \sum_{s=1}^{S_{\rho\mu k}} e^{i\lambda\varkappa_{\rho\mu ks}} \lambda^q B^1_{\rho q\mu ks} \qquad (\mu = 1, \ldots, mN,\ k = 1, \ldots, N),$$

где $B^1_{\rho q\mu ks}$ — линейные операторы такие, что для всех

$$u_k \in W^r(d_1, d_2) \qquad (k = 1, \ldots, N,\ r = m_{\rho\mu} - q,\ l + 2m - q)$$

выполнено неравенство

$$\|B^1_{\rho q\mu ks} u_k\|_{W^{r-m_{\rho\mu}+q}(d_1,d_2)} \leqslant c_1 \|u_k\|_{W^r(d_1+\sigma, d_2-\sigma)}, \tag{1.4.5}$$

где $B^1_{\rho q\mu ks}$ и $\varkappa_{\rho\mu ks} \in \mathbb{R}$ не зависят от λ, $0 < \sigma < (d_2 - d_1)/2$ не зависит от u.

Условие 1.4.5. $\mathbf{B}^2_\rho = \mathbf{B}^2_\rho(\lambda)$ $(\rho = 1, 2)$ — матрицы порядка $mN \times N$, состоящие из элементов

$$\sum_{q=0}^{m_{\rho\mu}} \sum_{s=0}^{S_{\rho\mu k}} e^{i\lambda\varkappa_{\rho\mu ks}} \lambda^q B^2_{\rho q\mu ks} \qquad (\mu = 1, \ldots, mN,\ k = 1, \ldots, N),$$

где $B^2_{\rho q\mu ks}$ — линейные функционалы такие, что

$$|B^2_{\rho q\mu ks}u_k| \leqslant c_2 \|u_k\|_{W^{m_{\rho\mu}-q}(d_1,d_2)} \tag{1.4.6}$$

для всех $u_k \in W^{m_{\rho\mu}-q}(d_1, d_2)$, $B^2_{\rho q\mu ks}$ не зависят от λ.

Изучим теперь пример такой нелокальной задачи.

Пример 1.4.1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с параметром

$$\sum_{k=1}^{N} A_{jk}(t, D_t, \lambda)u_k(t) = f_{0j}(t) \qquad (j = 1, \ldots, N,\ t \in (d_1, d_2)) \tag{1.4.7}$$

с нелокальными краевыми условиями

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=0}^{S_{\rho\mu k}} e^{i\lambda\varkappa_{\rho\mu ks}}(B_{\rho\mu ks}(t, D_t, \lambda)u_k(t))|_{t=d_\rho+\varphi_{\rho\mu ks}} = f_{\rho\mu} \tag{1.4.8}$$

$$(\rho = 1, 2,\ \mu = 1, \ldots, mN).$$

Здесь

$$f_0 = (f_{01}, \ldots, f_{0N}) \in L_2^N(d_1, d_2)$$

есть комплекснозначная функция;

$$f_\rho = (f_{\rho 1}, \ldots, f_{\rho, mN}) \in \mathbb{C}^{mN} \quad (\rho = 1, 2)$$

суть векторы с комплексными координатами, λ — спектральный параметр, $\varkappa_{\rho\mu ks} \in \mathbb{R}$; если $1 \leqslant s \leqslant S_{\rho\mu k}$, то $d_1 < d_\rho + \varphi_{\rho\mu ks} < d_2$, и $\varkappa_{\rho\mu k0} = \varphi_{\rho\mu k0} = 0$ $(\rho = 1, 2,\ \mu = 1, \ldots, mN,\ k = 1, \ldots, N)$;

$$A_{jk}(t, D_t, \lambda) = \sum_{\alpha+\beta\leqslant 2m} a_{jk\alpha\beta}(t)\lambda^\beta D_t^\alpha, \tag{1.4.9}$$

$$B_{\rho\mu ks}(t, D_t, \lambda) = \sum_{\alpha+\beta\leqslant m_{\rho\mu}} b_{\rho\mu ks\alpha\beta}(t)\lambda^\beta D_t^\alpha, \tag{1.4.10}$$

$a_{jk\alpha\beta}, b_{\rho\mu ks\alpha\beta} \in C^\infty[d_1, d_2]$.

Положим

$$b_{\rho\mu k\alpha\beta}(t) = b_{\rho\mu k0\alpha\beta}(t).$$

Предположим, что дифференциальные операторы A^0_{jk} и $B^0_{\rho\mu k}$, заданные формулами (1.4.3) и (1.4.4), удовлетворяют условиям 1.4.1 и 1.4.2 соответственно.

Докажем, что задача (1.4.7), (1.4.8) может быть представлена в виде (1.4.1), (1.4.2).

Пусть

$$\delta = \min_{\rho,\mu,k,s} \min\{d_\rho + \varphi_{\rho\mu ks} - d_1, d_2 - d_\rho - \varphi_{\rho\mu ks}\}$$

$(\rho = 1, 2,\ \mu = 1, \dots, mN,\ k = 1, \dots, N,\ s = 1, \dots, S_{\rho\mu k})$.

Введем матрицу $\mathbf{A}^1$ порядка $N \times N$, состоящую из элементов

$$\sum_{p=0}^{2m-1} \lambda^p A^1_{pjk} \qquad (j, k = 1, \dots, N),$$

где

$$\big(A^1_{pjk} u\big)(t) = \sum_{\alpha < 2m-p} a_{jk\alpha\beta}(t) D^\alpha_t u_k(t) \qquad (t \in (d_1, d_2)). \tag{1.4.11}$$

Мы введем также матрицы $\mathbf{B}^g_\rho = \mathbf{B}^g_\rho(\lambda)$ $(g, \rho = 1, 2)$ порядка $mN \times N$ с элементами

$$\sum_q \sum_s e^{i\lambda\varkappa_{\rho\mu ks}} \lambda^q B^g_{\rho q\mu ks} \qquad (\mu = 1, \dots, mN,\ k = 1, \dots, N)$$

так, что

$$\big(B^1_{\rho q\mu ks} u_k\big)(t) = \begin{cases} b_{\rho\mu ks\alpha q}(t + \varphi_{\rho\mu ks}) D^\alpha_t u_k(t + \varphi_{\rho\mu ks}) \eta(t - d_\rho) \\ \qquad\qquad \text{при } t \in (d_\rho - \delta/2, d_\rho + \delta/2), \\ 0 \qquad\qquad \text{при } t \in (0, d) \setminus (d_\rho - \delta/2, d_\rho + \delta/2) \end{cases} \tag{1.4.12}$$

для $\rho = 1, 2$, $\mu = 1, \dots, mN$, $\alpha = m_{\rho\mu} - q$, $q = 0, \dots, m_{\rho\mu}$, $s = 1, \dots, S_{\rho\mu k}$;

$$B^2_{\rho q\mu ks} u_k = \sum_{\alpha < m_{\rho\mu} - q} b_{\rho\mu ks\alpha q}(t) D^\alpha_t u_k(t)|_{t = d_\rho + \varphi_{\rho\mu ks}} \tag{1.4.13}$$

для $\rho = 1, 2$, $\mu = 1, \dots, mN$, $q = 0, \dots, m_{\rho\mu} - 1$, $s = 0, \dots, S_{\rho\mu k}$. Здесь $\eta \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R})$, $\eta(t) = 1$ $(|t| \leqslant \delta/4)$ и $\eta(t) = 0$ $(|t| \geqslant \delta/2)$.

Положим $r_p = 1$ $(p = 0, \dots, 2m-1)$ и $\sigma = \delta/2$. Из (1.4.11) и (1.4.12) следует, что операторы $\mathbf{A}^1$ и $\mathbf{B}^1_\rho$ удовлетворяют условиям 1.4.3 и 1.4.4 соответственно. В силу непрерывности оператора вложения $W^1(d_1, d_2)$ в $C[d_1, d_2]$ и формулы (1.4.13) операторы B^2_ρ удовлетворяют условию 1.4.5.

Априорные оценки решений нелокальных задач с параметром. Введем пространство вектор-функций

$$W^{k,N}(d_1, d_2) = \prod_{j=1}^{N} W^k(d_1, d_2)$$

с нормой

$$\|u\|_{W^{k,N}(d_1,d_2)} = \left(\sum_{j=1}^{N} \|u_j\|^2_{W^k(d_1,d_2)} \right)^{1/2}.$$

Положим

$$\mathcal{W}^{l,N}[d_1, d_2] = W^{l,N}(d_1, d_2) \times \mathbb{C}^{mN} \times \mathbb{C}^{mN}.$$

Введем оператор-функции

$$\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda), \widehat{\mathbf{L}}_0(\lambda), \widehat{\mathbf{L}}_\tau(\lambda) \in \mathcal{B}\big(W^{l+2m,N}(d_1, d_2), \mathcal{W}^{l,N}[d_1, d_2]\big)$$

по формулам

$$\widehat{\mathbf{L}}(\lambda)u = \{\mathbf{A}u, \mathbf{B}_\rho u\}, \qquad \widehat{\mathbf{L}}_0(\lambda)u = \{\mathbf{A}^0 u, \big(\mathbf{B}^0_\rho u\big)(t)|_{t=d_\rho}\},$$
$$\widehat{\mathbf{L}}_\tau(\lambda)u = \widehat{\mathbf{L}}_0(\lambda)u + \tau\Big(\widehat{\mathbf{L}}(\lambda) - \widehat{\mathbf{L}}_0(\lambda)\Big)u,$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$. Очевидно, $\widehat{\mathbf{L}}_\tau(\lambda) = \widehat{\mathbf{L}}_0(\lambda)$ при $\tau = 0$ и $\widehat{\mathbf{L}}_\tau(\lambda) = \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$ при $\tau = 1$. Заметим, что оператор $\widehat{\mathbf{L}}_0(\lambda)$ соответствует «локальной» краевой задаче.

Мы будем использовать нормы, зависящие от параметра λ ($|\lambda| \geqslant 1$)

$$|||u|||_{W^{l,N}(d_1,d_2)} = \left(\sum_k |||u_k|||^2_{W^l(d_1,d_2)} \right)^{1/2},$$

$$|||u_k|||_{W^l(d_1,d_2)} = \left(\|u_k\|^2_{W^l(d_1,d_2)} + |\lambda|^{2l} \|u_k\|^2_{L_2(d_1,d_2)} \right)^{1/2},$$

$$|||f|||_{\mathcal{W}^{l,N}[d_1,d_2]} = \left(|||f_0|||^2_{W^{l,N}(d_1,d_2)} + \sum_{\rho,\mu} |\lambda|^{2(l+2m-m_{\rho\mu}-1/2)} |f_{\rho\mu}|^2 \right)^{1/2}$$

(ср. (C.24)–(C.26)).

Здесь $u = (u_1, \dots, u_N)$, $f = \{f_{0j}, f_{\rho\mu}\}$. Для фиксированного $\lambda \neq 0$ эти нормы эквивалентны нормам $\|u\|_{W^{l,N}(d_1,d_2)}$, $\|u_k\|_{W^l(d_1,d_2)}$ и $\|f\|_{\mathcal{W}^{l,N}[d_1,d_2]}$ соответственно.

Определение 1.4.1. Вектор-функцию $u \in W^{l+2m,N}(d_1,d_2)$ мы назовем *сильным решением* задачи (1.4.1), (1.4.2), если

$$\widehat{\mathbf{L}}(\lambda)u = f. \tag{1.4.14}$$

Для доказательства того, что оператор

$$\widehat{\mathbf{L}}(\lambda) : W^{l+2m,N}(d_1,d_2) \mapsto \mathcal{W}^{l,N}[d_1,d_2]$$

фредгольмов и $\operatorname{ind} \widehat{\mathbf{L}}(\lambda) = 0$ ($\lambda \in \mathbb{C}$), мы вначале установим следующее утверждение (ср. лемму 1.1.2).

Лемма 1.4.1. *Пусть выполняются условия* 1.4.1–1.4.5. *Тогда для любых $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$, $h_2 < h_1$, существует $\lambda_1 > 1$ такое, что для всех*

$$\lambda \in G_{h,\lambda_1} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\lambda = h, |\operatorname{Re}\lambda| \geqslant \lambda_1\},$$

$h_2 \leqslant h \leqslant h_1$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ *и* $u \in W^{l+2m,N}(d_1,d_2)$ *мы имеем*

$$c_1 |||\widehat{\mathbf{L}}_\tau(\lambda)u|||_{\mathcal{W}^{l,N}[d_1,d_2]} \leqslant |||u|||_{W^{l+2m,N}(d_1,d_2)} \leqslant c_2 |||\widehat{\mathbf{L}}_\tau(\lambda)u|||_{\mathcal{W}^{l,N}[d_1,d_2]}, \tag{1.4.15}$$

где $c_1, c_2 > 0$ *не зависят от* λ, h, τ, u.

Доказательство. Обозначим $\widehat{\mathbf{L}}_\tau(\lambda)u = f$. Тогда

$$\widehat{\mathbf{L}}_0(\lambda)u = f + \Phi, \tag{1.4.16}$$

где $\Phi = \big\{ -\tau\mathbf{A}^1 u, -\tau\big(\mathbf{B}^1_\rho\big)|_{t=d_\rho} - \tau\mathbf{B}^2_\rho u\big\}$.

В силу замечания C.5 существует $\lambda_0 > 1$ такое, что для

$$\lambda \in \omega_{\varepsilon,\lambda_0} = \{\lambda \in \omega_\varepsilon : |\lambda| \geqslant \lambda_0\}$$

решение «локальной» задачи (1.4.16) оценивается следующим образом:

$$|||u|||_{W^{l+2m,N}(d_1,d_2)} \leqslant k_1 |||f+\Phi|||_{\mathcal{W}^{l,N}[d_1,d_2]}, \tag{1.4.17}$$

где $k_1 > 0$ не зависит от λ, τ и u.

Из условий 1.4.3, 1.4.5 и неравенства (B.25) получим

$$|||\tau\lambda^p A^1_{pjk}u_k|||_{W^l(d_1,d_2)} \leqslant k_2|\lambda|^{-r}|||u_k|||_{W^{l+2m}(d_1,d_2)}, \tag{1.4.18}$$

$$|\lambda|^{l+2m-m_{\rho\mu}-1/2}|\tau e^{i\lambda\varkappa_{\rho\mu ks}}\lambda^q B^2_{\rho q\mu ks}u_k| \leqslant k_3 e^{\varkappa|Im\lambda|}|\lambda|^{-1/2}|||u_k|||_{W^{l+2m}(d_1,d_2)}, \tag{1.4.19}$$

где $k_1, k_2, k_3 > 0$ не зависят от λ, τ и u,

$$r = \min_p \min\{r_p, 1\} \quad (p = 0, \ldots, 2m-1)$$

и $\varkappa = \max\limits_{\rho,\mu,k,s}|\varkappa_{\rho\mu ks}|$.

Из неравенств (B.26), (B.25) и условия 1.4.4 мы имеем

$$\begin{aligned}
I_{\rho q\mu ks} &= |\lambda|^{l+2m-m_{\rho\mu}-1/2}|\tau e^{i\lambda\varkappa_{\rho\mu ks}}\lambda^q\bigl(B^1_{\rho q\mu ks}u_k\bigr)|_{t=d_p}| \leqslant \\
&\leqslant k_4|\lambda|^{l+2m-m_{\rho\mu}+q-1}e^{\varkappa|\operatorname{Im}\lambda|}\bigl(\|B^1_{\rho q\mu ks}u_k\|_{W^1(d_1,d_2)}+ \\
&\quad + |\lambda|\|B^1_{\rho q\mu ks}u_k\|_{L_2(d_1,d_2)}\bigr) \leqslant \\
&\leqslant k_5|\lambda|^q e^{\varkappa|\operatorname{Im}\lambda|}\bigl(\|B^1_{\rho q\mu ks}u_k\|_{W^{l+2m-m_{\rho\mu}}(d_1,d_2)}+ \\
&\quad + |\lambda|^{l+2m-m_{\rho\mu}}\|B^1_{\rho q\mu ks}u_k\|_{L_2(d_1,d_2)}\bigr) \leqslant \\
&\leqslant k_6e^{\varkappa|Im\lambda|}|\lambda|^q|||u_k|||_{W^{l+2m-q}(d_1+\sigma,d_2-\sigma)} \leqslant \\
&\leqslant k_7e^{\varkappa|\operatorname{Im}\lambda|}|||u_k|||_{W^{l+2m}(d_1+\sigma,d_2-\sigma)},
\end{aligned} \tag{1.4.20}$$

где $k_4,\dots,k_7>0$ не зависят от λ, τ и u.

Введем функцию $\xi\in\dot{C}^\infty(\mathbb{R})$ так, что

$$\xi(t)=1 \quad (t\in[d_1+\sigma,d_2-\sigma]), \qquad \xi(t)=0 \quad (t\notin(d_1+\sigma/2,d_2-\sigma/2)).$$

Из неравенства (1.4.20), замечания C.5, формулы Лейбница и неравенств (B.25), (1.4.18) мы получим

$$\begin{aligned}
I_{\rho q\mu ks} &\leqslant k_7e^{\varkappa|\operatorname{Im}\lambda|}|||\xi u|||_{W^{l+2m,N}(d_1,d_2)} \leqslant k_8e^{\varkappa|Im\lambda|}|||\mathbf{A}^0(\xi u)|||_{W^{l,N}(d_1,d_2)} \leqslant \\
&\leqslant k_9e^{\varkappa|Im\lambda|}\bigl(|||\xi\mathbf{A}^0u|||_{W^{l,N}(d_1,d_2)}+|||u|||_{W^{l+2m-1,N}(d_1,d_2)}\bigr) \leqslant \\
&\leqslant k_{10}e^{\varkappa|Im\lambda|}\bigl(|||\mathbf{A}^0u+\tau\mathbf{A}^1u|||_{W^{l,N}(d_1,d_2)}+ \\
&\quad + \bigl(|\lambda|^{-1}+|\lambda|^{-r}\bigr)|||u|||_{W^{l+2m,N}(d_1,d_2)}\bigr).
\end{aligned} \tag{1.4.21}$$

Из неравенств (1.4.17)–(1.4.19) и (1.4.21) следует, что

$$\begin{aligned}
|||u|||_{W^{l+2m,N}(d_1,d_2)} &\leqslant k_{11}\Bigl(e^{\varkappa|\operatorname{Im}\lambda|}|||\widehat{\mathbf{L}}_\tau(\lambda)u|||_{\mathcal{W}^{l,N}[d_1,d_2]}+ \\
&\quad + \Bigl(|\lambda|^{-r}+|\lambda|^{-1/2}\Bigr)e^{\varkappa|\operatorname{Im}\lambda|}|||u|||_{W^{l+2m,N}(d_1,d_2)}\Bigr),
\end{aligned} \tag{1.4.22}$$

где $k_8,\dots,k_{11}>0$ не зависят от λ,τ и u.

Очевидно, для любых $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$, $h_2 < h_1$, существует $\lambda_2 \geqslant \lambda_0$ такое, что $G_{h,\lambda_2} \subset \omega_{\varepsilon,\lambda_0}$, если $h_2 \leqslant h \leqslant h_1$. Выбирая теперь $\lambda_1 > \lambda_2$ так, что

$$k_{11}\Big(\lambda_1^{-r} + \lambda_1^{-1/2}\Big)e^{\varkappa h_0} < 1/2,$$

получим правую часть неравенства (1.4.15) с константой $c_2 = 2k_{11}e^{\varkappa h_0}$, которая не зависит от λ, τ, h и u. Здесь $h_0 = \max\{|h_1, |h_2|\}$.

Левая часть неравенства (1.4.15) следует из (1.4.18)–(1.4.20). □

Разрешимость нелокальных задач с параметром.

Теорема 1.4.1. *Пусть выполняются условия* 1.4.1–1.4.5. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

(a) *Оператор* $\widehat{\mathbf{L}}(\lambda) : W^{l+2m,N}(d_1, d_2) \to \mathcal{W}^{l,N}[d_1, d_2]$ *фредгольмов и* $\operatorname{ind}\widehat{\mathbf{L}}(\lambda) = 0$ *для всех* $\lambda \in \mathbb{C}$.

(b) *Для любого* $h \in \mathbb{R}$ *существует* $\lambda_1 > 1$ *такое, что для* $\lambda \in G_{h,\lambda_1}$ *оператор* $\widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$ *имеет ограниченный обратный*

$$\widehat{\mathbf{R}}(\lambda) = \widehat{\mathbf{L}}^{-1}(\lambda) : \mathcal{W}^{l,N}[d_1, d_2] \to W^{l+2m,N}(d_1, d_2).$$

Доказательство. Утверждение (b) теоремы 1.4.1 вытекает из леммы 1.4.1, теоремы A.9 и замечания C.5.

Докажем теперь утверждение (a). Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ — произвольное число. Тогда для $\eta \in G_{h,\lambda_1}$ мы имеем

$$\widehat{\mathbf{L}}(\lambda) = \Big(I + \Big(\widehat{\mathbf{L}}(\lambda) - \widehat{\mathbf{L}}(\eta)\Big)\widehat{\mathbf{L}}^{-1}(\eta)\Big)\widehat{\mathbf{L}}(\eta),$$

где I — единичный оператор в $\mathcal{W}^{l,N}[d_1, d_2]$.

Очевидно,

$$\Big(\widehat{\mathbf{L}}(\lambda) - \widehat{\mathbf{L}}(\eta)\Big)u =$$
$$= ((\mathbf{A}(\lambda) - \mathbf{A}(\eta))u, (\mathbf{B}_1(\lambda) - \mathbf{B}_1(\eta))u, (\mathbf{B}_2(\lambda) - \mathbf{B}_2(\eta))u),$$

где

$$(\mathbf{A}(\lambda)-\mathbf{A}(\eta))u=$$

$$=\left\{\sum_k\left[\big(A^0_{jk}(\cdot,\cdot,\lambda)-A^0_{jk}(\cdot,\cdot,\eta)\big)u_k++\sum_{1\leqslant p}(\lambda^p-\lambda^q)A^1_{pjk}u_k\right]\right\},\tag{1.4.23}$$

$$(\mathbf{B}_\rho(\lambda)-\mathbf{B}_\rho(\eta))u=\left\{\sum_k\left[\big(B^0_{\rho\mu k}(\cdot,\cdot,\lambda)-B^0_{\rho\mu k}(\cdot,\cdot,\eta)\big)u_k\big|_{t=d_\rho}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sum_{0\leqslant q}\sum_{0\leqslant s}\big(e^{i\lambda\varkappa_{\rho\mu ks}}\lambda^p-e^{i\eta\varkappa_{\rho\mu ks}}\eta^q\big)\Big(\big(B^1_{\rho q\mu ks}u_k\big)\big|_{t=d_\rho}+B^2_{\rho q\mu ks}u_k\Big)\right]\right\}.\tag{1.4.24}$$

Из условия 1.4.3 и формулы (1.4.23) следует, что оператор

$$\mathbf{A}(\lambda)-\mathbf{A}(\eta):W^{l+2m-1,N}(d_1,d_2)\to W^{l,N}(d_1,d_2)$$

ограниченный. Так как оператор вложения пространства $W^{l+2m,N}(d_1,d_2)$ в пространство $W^{l+2m-1,N}(d_1,d_2)$ компактный, то оператор

$$\mathbf{A}(\lambda)-\mathbf{A}(\eta):W^{l+2m,N}(d_1,d_2)\to W^{l,N}(d_1,d_2)$$

также компактный. В силу условий 1.4.4, 1.4.5 и формулы (1.4.24) конечномерные операторы

$$\mathbf{B}_\rho(\lambda)-\mathbf{B}_\rho(\eta):W^{l+2m,N}(d_1,d_2)\to\mathbb{C}^{mN}$$

ограниченные. Поэтому эти операторы компактные. Следовательно, оператор

$$\Big(\widehat{\mathbf{L}}(\lambda)-\widehat{\mathbf{L}}(\eta)\Big)\widehat{\mathbf{L}}^{-1}(\eta):\mathcal{W}^{l,N}[d_1,d_2]\to\mathcal{W}^{l,N}[d_1,d_2]$$

компактный. Отсюда и из теоремы A.1 вытекает, что оператор

$$\widehat{\mathbf{L}}(\lambda):W^{l+2m,N}(d_1,d_2)\to\mathcal{W}^{l,N}[d_1,d_2]$$

фредгольмов и $\operatorname{ind}\widehat{\mathbf{L}}(\lambda)=0$. □

Изучим теперь некоторые спектральные свойства оператор-функции $\lambda\mapsto\widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$.

Теорема 1.4.2. *Пусть выполняются условия* 1.4.1–1.4.5. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

(a) *Оператор-функция*

$$\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{R}}(\lambda) \in \mathcal{B}\big(\mathcal{W}^{l,N}[d_1, d_2], W^{l+2m,N}(d_1, d_2)\big)$$

есть конечно-мероморфная фредгольмова оператор-функция в $\mathbb{C}$.

(b) *Для каждого* δ, $0 < \delta < \delta_0$, *существует* $\gamma_0 > 1$ *такое, что множество*

$$\tilde{\omega}_{\delta,\gamma_0} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}\lambda| \leqslant \delta \ln |\operatorname{Re}\lambda|, |\lambda| \geqslant \gamma_0\}$$

не содержит собственных значений оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$, *где* $\delta_0 = \dfrac{1}{\varkappa} \min\left\{r, \dfrac{1}{2}\right\}$.

(c) *Для каждого собственного значения* $\eta_0 = \mu_0 + i\nu_0$ *оператор-функции* $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$ *существует* $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что полосы* $\{\lambda \in \mathbb{C} : \nu_0 < \operatorname{Im}\ \lambda < \nu_0 + \varepsilon_0\}$ *и* $\{\lambda \in \mathbb{C} : \nu_0 - \varepsilon_0 < \operatorname{Im}\ \lambda < \nu_0\}$ *не содержат собственных значений оператор-функции* $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$.

Доказательство. Утверждение (a) следует из теорем 1.4.1 и A.10. Из частей (a) и (b) вытекает (c). Остается доказать утверждение (b).

Пусть $0 < \delta < \delta_0$. Можно найти $\gamma_1 > \lambda_1$ такое, что $\tilde{\omega}_{\delta,\gamma_1} \subset \omega_{\varepsilon,\lambda_1}$, где $\lambda_1 > 1$ было выбрано в доказательстве леммы 1.4.1. Тогда для $\lambda \in \tilde{\omega}_{\delta,\gamma_1}$ мы имеем

$$e^{\varkappa|\operatorname{Im}\ \lambda|} \leqslant e^{\varkappa\delta \ln|\operatorname{Re}\ \lambda|} \leqslant |\lambda|^{\varkappa(\delta-\delta_0)}|\lambda|^{\varkappa\delta_0}. \tag{1.4.25}$$

Из неравенств (1.4.22) для $\tau = 1$ и (1.4.25) мы выводим

$$|||u|||_{W^{l+2m,N}(d_1,d_2)} \leqslant k_{11}\Big(e^{\varkappa|\operatorname{Im}\lambda|}|||\widehat{\mathbf{L}}(\lambda)u|||_{\mathcal{W}^{l,N}[d_1,d_2]} + \\ + 2|\lambda|^{-\varkappa\delta_0}|\lambda|^{\varkappa\delta_0}|\lambda|^{\varkappa(\delta-\delta_0)}|||u|||_{W^{l+2m,N}(d_1,d_2)}\Big)$$

для всех $\lambda \in \tilde{\omega}_{\delta,\gamma_1}$ и $u \in W^{l+2m,N}(d_1, d_2)$.

Выбирая $\gamma_0 > \gamma_1$ так, что $k_{11}\gamma_0^{-(\delta_0-\delta)\varkappa} < 1/4$, мы получим

$$|||u|||_{W^{l+2m,N}(d_1,d_2)} \leqslant 2k_{11}e^{\varkappa|\operatorname{Im}\lambda|}|||\widehat{\mathbf{L}}(\lambda)u|||_{W^{l,N}[d_1,d_2]}$$

для $\lambda \in \tilde{\omega}_{\delta,\gamma_0}$. Следовательно, множество $\tilde{\omega}_{\delta,\gamma_0}$ не содержит собственных значений $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$. □

Из доказательств леммы 1.4.1 и теорем 1.4.1, 1.4.2 вытекает, что если $\varkappa = 0$, то эти утверждения примут следующий вид (ср. лемму 1.1.2 и теорему 1.1.1).

Следствие 1.4.1. *Пусть условия* 1.4.1–1.4.5 *выполняются при* $\varkappa = 0$. *Тогда существует* $\lambda_1 > 1$ *такое, что при* $\lambda \in \omega_{\varepsilon,\lambda_1}$ *и* $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ *для всех* $u \in W^{l+2m,N}(d_1,d_2)$ *мы имеем*

$$c_1|||\widehat{\mathbf{L}}_\tau(\lambda)u|||_{\mathcal{W}^{l,N}[d_1,d_2]} \leqslant |||u|||_{W^{l+2m,N}(d_1,d_2)} \leqslant c_2|||\widehat{\mathbf{L}}_\tau(\lambda)u|||_{\mathcal{W}^{l,N}[d_1,d_2]}, \tag{1.4.26}$$

где c_1, $c_2 > 0$ *не зависят от* λ, τ *и* u.

Следствие 1.4.2. *Пусть условия* 1.4.1–1.4.5 *выполняются при* $\varkappa = 0$. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

(a) *Оператор* $\widehat{\mathbf{L}}(\lambda) : W^{l+2m,N}(d_1,d_2) \to \mathcal{W}^{l,N}[d_1,d_2]$ *фредгольмов и* $\operatorname{ind}\widehat{\mathbf{L}}(\lambda) = 0$ *для всех* $\lambda \in \mathbb{C}$.

(b) *Существует* $\lambda_1 > 1$ *такое, что для* $\lambda \in \omega_{\varepsilon,\lambda_1}$*оператор* $\widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$ *имеет ограниченный обратный* $\widehat{\mathbf{R}}(\lambda) = \widehat{\mathbf{L}}^{-1}(\lambda) : \mathcal{W}^{l,N}[d_1,d_2] \to W^{l+2m,N}(d_1,d_2)$.

(c) *Оператор-функция* $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{R}}(\lambda) \in \mathcal{B}\big(\mathcal{W}^{l,N}[d_1,d_2], W^{l+2m,N}(d_1,d_2)\big)$ *является конечно-мероморфной фредгольмовой оператор-функцией в* $\mathbb{C}$.

(d) *Для каждого собственного значения* $\eta_0 = \mu_0 + i\nu_0$ *оператор-функции* $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$ *существует* $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что полосы*

$\{\lambda \in \mathbb{C} : \nu_0 < \mathrm{Im}\lambda < \nu_0 + \varepsilon_0\}$ и $\{\lambda \in \mathbb{C} : \nu_0 - \varepsilon_0 < \mathrm{Im}\lambda < \nu_0\}$ не содержат собственных значений оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$.

Таким образом, в случае $\varkappa = 0$ для достаточно больших $|\lambda|$ мы можем заменить область, ограниченную логарифмическими кривыми, на двойной угол, содержащий действительную ось (рис. 1.4.1 и 1.4.2).

Задача 1.4.1. Пусть $\varkappa > 0$. Существуют ли $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varkappa)$, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$, и $\lambda_1 = \lambda_1(\varkappa) > 0$ такие, что множество $\omega_{\varepsilon_1,\lambda_1}$ не содержит собственных значений оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$?

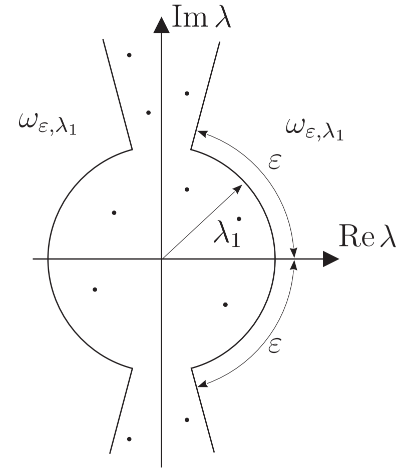

Рис. 1.4.1

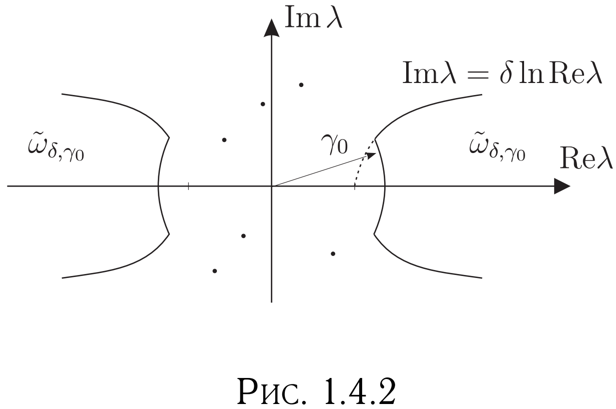

Рис. 1.4.2

Гладкость собственных и присоединенных функций. Рассмотрим еще одно условие.

Условие 1.4.6. Для каждого $s \in \mathbb{N}$, $s > l$, сужения

$$A^1_{pjk} : W^{s+2m-p-r_p}(d_1, d_2) \to W^s(d_1, d_2)$$

суть линейные ограниченные операторы.

Теорема 1.4.3. *Пусть выполняются условия* 1.4.1–1.4.6. *Пусть* ψ^0 — *собственная функция и* $\psi^1, \ldots, \psi^{p_0-1}$ — *присоединенные функции, соответствующие собственному значению* λ_0 *оператор-функции* $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda) \in \mathcal{B}\big(W^{l+2m,N}(d_1, d_2), \mathcal{W}^{l,N}[d_1, d_2]\big)$. *Тогда*

$$\psi^\nu \in C^{\infty,N}[d_1, d_2] \quad (\nu = 0, 1, \ldots, p_0 - 1),$$

где $C^{\infty,N}[d_1, d_2] = C^\infty[d_1, d_2] \times \cdots \times C^\infty[d_1, d_2]$.

Доказательство. В силу равенства (A.5) собственная функция ψ^0 и присоединенные функции ψ^ν $(\nu = 1, \ldots, p_0 - 1)$ удовлетворяют операторным уравнениям

$$\sum_{q=0}^{\nu} \frac{1}{q!} \partial^q_\lambda \widehat{\mathbf{L}}(\lambda_0) \psi^{\nu-q} = 0 \qquad (\nu = 0, \ldots, p_0 - 1). \tag{1.4.27}$$

Из (1.4.27) мы имеем

$$\mathbf{A}^0(t, D_t, \lambda_0)\psi^0(t) = -\mathbf{A}^1(\lambda_0)\psi^0(t) \qquad (t \in (d_1, d_2)), \tag{1.4.28}$$

$$\begin{gathered} \mathbf{A}^0(t, D_t, \lambda_0)\psi^\nu(t) = -\sum_{q=1}^{\nu} \frac{1}{q!} \partial^q_\lambda \mathbf{A}^0(t, D_t, \lambda_0)\psi^{\nu-q}(t) - \\ -\sum_{q=0}^{\nu} \frac{1}{q!} \partial^q_\lambda \mathbf{A}^1(\lambda_0)\psi^{\nu-q}(t) \qquad (t \in (d_1, d_2),\ \nu = 1, \ldots, p_0 - 1). \end{gathered} \tag{1.4.29}$$

Поскольку $\psi^0 \in W^{l+2m,N}(d_1, d_2)$, из условия 1.4.6 следует, что

$$\mathbf{A}^1(\lambda_0)\psi^0 \in W^{l+r,N}(d_1, d_2), \qquad r = \min_p \min\{r_p, 1\} > 0.$$

В силу условия 1.4.1 $\det \mathbf{A}^0(t,1,0) \neq 0$ $(t \in [d_1, d_2])$. Поэтому из равенства (1.4.28) мы получим $\psi^0 \in W^{l+2m+r,N}(d_1,d_2)$. Рассуждая так же, за конечное число шагов мы докажем, что $\psi^0 \in W^{s+2m,N}(d_1,d_2)$ для любого $s > l$. Следовательно, в силу теоремы вложения $\psi^0 \in C^{\infty,N}[d_1,d_2]$.

Пусть теперь $\psi^1 \dots, \psi^{\nu-1} \in C^{\infty,N}[d_1,d_2]$. Докажем, что

$$\psi^k \in C^{\infty,N}[d_1,d_2].$$

Из предположения и условия 1.4.6 следует, что правая часть равенства (1.4.29) принадлежит $W^{l+r,N}(d_1,d_2)$. Поскольку $\det \mathbf{A}^0(t,1,0) \neq 0$ $(t \in [d_1,d_2])$ и $\psi^\nu \in W^{l+2m,N}(d_1,d_2)$, из (1.4.29) мы получим

$$\psi^\nu \in W^{l+2m+r,N}(d_1,d_2).$$

Аналогично за конечное число шагов мы докажем, что

$$\psi^\nu \in W^{s+2m,N}(d_1,d_2)$$

для каждого $s > l$. Поэтому $\psi^\nu \in C^{\infty,N}[d_1,d_2]$. □

Примечания к главе 1

Обыкновенные дифференциальные уравнения с нелокальными краевыми условиями рассматривались М. Пиконе [49, 50], Я. Д. Тамаркиным [37] и многими другими. Наиболее полный обзор работ в этом направлении до 1975 г. имеется в статье А. М. Крола [47]. Основная цель этой главы — иллюстрация современных методов исследования нелокальных эллиптических краевых задач и краевых задач для дифференциально-разностных уравнений на простейшем примере в одномерном случае. Изложение результатов гл. 1 опирается на работу [33]. Там же имеется подробная библиография.

Упражнения к главе 1

1. Рассмотрим пример 1.1.1 и лемму 1.1.1.

a) Доказать, что оператор $A^1u = a_1(t)u'(t) + a_2(t)u(t)$ является линейным ограниченным оператором, действующим из $W^1(0,d)$ в $L_2(0,d)$.

b) Пояснить, почему операторы B^1_ρ удовлетворяют условию 1.1.2 с $\sigma_0 = d/6$.

c) Найти необходимое и достаточное условие того, что найдется такое $\sigma > 0$, для которого

$$\|B^1_\rho u\|_{W^s(0,d)} \leqslant c\|u\|_{W^s(\sigma,d-\sigma)} \qquad (u \in W^s(0,d),\ s \geqslant 0),$$

где $c > 0$ не зависит от u.

d) Доказать, что оператор $B^2_\rho u = \int\limits_0^d e_\rho(t)u(t)dt$ является линейным ограниченным функционалом, действующим из $L_2(0,d)$ в $\mathbb{C}$.

2. Рассмотрим пример 1.1.2.

a) Доказать, что оператор $A^1u = F^{-1}(\xi F(\eta u)\operatorname{arctg}\xi)$ является линейным ограниченным оператором, действующим из $W^1(0,d)$ в $L_2(0,d)$.

b) Будет ли A^1 линейным ограниченным оператором, действующим из $L_2(0,d)$ в $L_2(0,d)$?

3. Рассмотрим неограниченный оператор $\mathcal{A}_B : \mathcal{D}(\mathcal{A}_B) \subset L_2(0,d) \to L_2(0,d)$, заданный по формуле

$$\mathcal{A}_B u = u''(t),$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_B) = W^2_B(0,d) = \left\{u \in W^2(0,d) : B_\rho u = 0,\ \rho = 1,2\right\}.$$

Предположим, что операторы B_ρ имеют вид

$$B_\rho u = \int\limits_0^d e_\rho(t)u(t),$$

где $e_\rho \in L_2(0,d)$. Доказать, что область определения оператора $\mathcal{A}_B$ не плотна в $L_2(0,d)$.

4. Рассмотрим нелокальную краевую задачу

$$v''(t) - \lambda^2 v(t) = 0 \quad (t \in (0,\pi)),$$

$$v(0) - av(\pi/2) = 0, \quad v(\pi) = 0,$$

где a — фиксированный вещественный параметр.

a) Найти собственные значения λ нелокальной краевой задачи.

b) Определить, при каком значении параметра a число $\lambda = 0$ является собственным значением нелокальной краевой задачи, и найти соответствующие собственные и присоединенные векторы.

5. Рассмотрим нелокальную краевую задачу

$$v''(t) - \lambda^2 v(t) = 0 \quad (t \in (0,\pi)),$$

$$v(-\omega) = 0, v(\omega) + bv(0) = 0,$$

где $\omega \in (0,\pi)$ и $a \in \mathbb{R}$ — фиксированные параметры.

a) Найти собственные значения λ нелокальной краевой задачи.

b) При каких значениях параметров ω и b в полосе $0 < \operatorname{Im}\lambda \leqslant 1$ нет собственных значений нелокальной краевой задачи?

6. Рассмотрим нелокальную краевую задачу

$$v''(t) - \lambda^2 v(t) = 0 \quad (t \in (0,\pi)),$$

$$v(-\omega) + b_1 v(0) = 0, v(\omega) + b_2 v(0) = 0,$$

где $\omega \in (0,\pi)$ и $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ — фиксированные параметры.

a) Найти собственные значения λ нелокальной краевой задачи.

b) При каких значениях параметров ω, b_1 и b_2 число $\lambda = 0$ будет собственным значением нелокальной краевой задачи?

7. Рассмотрим нелокальную краевую задачу

$$v''(t) - \lambda^2 v(t) = 0 \quad (t \in (0, \pi)),$$
$$v(-\pi/2) + b_1 v(0) = 0, v(\pi/2) + b_2 v(0) = 0,$$

где $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ — фиксированные параметры. Найти собственные значения λ нелокальной краевой задачи и соответствующие им собственные и присоединенные функции.

8. Введем оператор $I_Q : L_2(0, d) \to L_2(\mathbb{R})$ по формуле

$$(I_Q v)(t) = v(t) \quad (t \in (0, d)), \qquad v(t) = 0 \quad (t \notin (0, d)).$$

Найти $(RI_Q v)(t)$, $t \in \mathbb{R}$, если

a) $d = 2$, $(Rv)(t) = v(t) + 3v(t-1)$, $v(t) = 1$ при $t \in (0, 2)$;

b) $d = 2$, $(Rv)(t) = v(t-1) + 2v(t+1)$, $v(t) = t^2$ при $t \in (0, 1)$ и $v(t) = 2 - t$ при $t \in (1, 2)$;

c) $d = 2$, $(Rv)(t) = v(t) + v(t-1) + v(t+1)$, $v(t) = 3t$ при $t \in (0, 1)$ и $v(t) = 4 - t^2$ при $t \in (1, 2)$;

d) $d = 1{,}3$, $(Rv)(t) = 2v(t+1) - v(t-1)$, $v(t) = t$ при $t \in (0, 1)$ и $v(t) = 2 - t$ при $t \in (1, 2)$.

9. Привести подробное доказательство лемм 1.2.1 и 1.2.2.

10. Найти спектры операторов $R_Q : L_2(0, d) \to L_2(0, d)$ и выяснить, являются ли они вырожденными (регулярными), если длина интервала $(0, d)$ и оператор R заданы формулами из упражнений 8a–8d.

11. Привести подробное доказательство леммы 1.2.8.

12. Для найденных в упражнении 10 регулярных разностных операторов найти образы $R_Q\big(\mathring{W}^1(0, d)\big)$.

13. Рассмотрим разностный оператор

$$(Rv)(t) = v(t) + av(t+1) + bv(t-1),$$

где a, b — фиксированные вещественные числа, причем $ab \neq 1$. Найти образ $R_Q\big(\mathring{W}^1(0,d)\big)$, где R_Q — соответствующий разностный оператор

a) на интервале $(0,2)$;

b) на интервале $(0,4/3)$.

14. Рассмотрим нерегулярный разностный оператор

$$(Rv)(t) = av(t+1) + bv(t-1),$$

где a, b — фиксированные вещественные числа, причем $ab \neq 0$. Найти образ $R_Q\big(\mathring{W}^1(0,2)\big)$ соответствующего оператора R_Q.

15. Рассмотрим пример 1.3.1. Привести подробное доказательство того, что оператор $A_1 : \mathring{W}^1(0,d) \to L_2(0,d)$ ограничен.

16. Решить краевую задачу

$$-(Rv)''(t) = 1 \qquad (t \in (0,2)),$$

$$v(t) = 0 \qquad (t \in [-1,0] \cup [2,3]),$$

сведя ее к обыкновенному дифференциальному уравнению с нелокальными краевыми условиями, если

a) $(Rv)(t) = v(t) + v(t+1) - 2v(t-1)$;

b) $(Rv)(t) = v(t+1) + v(t-1)$.

17. Решить краевую задачу

$$-(Rv)''(t) = \pi^2 \sin \pi t \qquad (t \in (0,2)),$$

$$v(t) = 0 \qquad (t \in [-1,0] \cup [2,3]),$$

сведя ее к обыкновенному дифференциальному уравнению с нелокальными краевыми условиями, если

a) $(Rv)(t) = v(t) + v(t+1) - 2v(t-1)$;

b) $(Rv)(t) = v(t+1) + v(t-1)$.

18. Решить краевую задачу из упражнения 16, сведя ее к системе обыкновенных дифференциальных уравнений на интервале $(0,1)$, для случая

a) $(Rv)(t) = v(t) + v(t+1) - 2v(t-1)$;

b) $(Rv)(t) = v(t+1) + v(t-1)$.

19. Решить краевую задачу из упражнения 17, сведя ее к системе обыкновенных дифференциальных уравнений на интервале $(0,1)$, для случая

a) $(Rv)(t) = v(t) + v(t+1) - 2v(t-1)$;

b) $(Rv)(t) = v(t+1) + v(t-1)$.

20. Рассмотрим оператор $(Rv)(t) = v(t) + av(t-1) + bv(t+1)$, где $a, b \in \mathbb{R}$ и $ab \neq 1$.

Пусть $R_Q : L_2(0,2) \to L_2(0,2)$ — соответствующий разностный оператор на интервале $(0,2)$. Определим дифференциально-разностный оператор

$$\mathcal{A}_R : \mathcal{D}(\mathcal{A}_R) \subset L_2(0,2) \to L_2(0,2)$$

по формуле

$$\mathcal{A}_R v = -(R_Q v)'' \qquad \bigl(v \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_R) = \{v \in \mathring{W}^1(0,2) : R_Q v \in W^2(0,2)\}\bigr).$$

При каких значениях параметров a и b ядро $\mathcal{N}(\mathcal{A}_R)$ оператора $\mathcal{A}_R$ нетривиально? Найти базис в $\mathcal{N}(\mathcal{A}_R)$.

21. Ответить на вопросы упражнения 20 в случае, когда

$$(Rv)(t) = av(t-1) + bv(t+1),$$

где $a, b \in \mathbb{R}$ и $ab \neq 0$.

Глава 2

Эллиптические задачи с нелокальными условиями внутри области

2.1. Нелокальные эллиптические задачи с параметром

Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$Au = A^0u + \sum_{j=0}^{2m-1} \lambda^j A_j^1 u = f_0(x) \qquad (x \in Q) \tag{2.1.1}$$

с нелокальными краевыми условиями

$$B_\mu u = \left(B_\mu^0 u + \sum_{k=0}^{m_\mu} \lambda^k B_{\mu k}^1 u \right)\Bigg|_{\partial Q} + \sum_{k=0}^{m_\mu} \lambda^k B_{\mu k}^2 u = f_\mu(x) \tag{2.1.2}$$

$$(x \in \partial Q,\ \mu = 1, \dots, m).$$

Здесь $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial Q \in C^\infty$, $n \geqslant 2$; λ — комплексный параметр; операторы A^0 и B_μ^0 заданы формулами

$$A^0 = A^0(x, D, \lambda) = \sum_{\beta+|\alpha|=2m} a_{\alpha\beta}(x) \lambda^\beta D^\alpha, \tag{2.1.3}$$

$$B_\mu^0 = B_\mu^0(x, D, \lambda) = \sum_{\beta+|\alpha|=m_\mu} b_{\mu 0 \alpha\beta}(x) \lambda^\beta D^\alpha; \tag{2.1.4}$$

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$, $D_j = -i\dfrac{\partial}{\partial x_j}$; $a_{\alpha\beta}, b_{\mu 0 \alpha\beta} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — комплекснозначные функции;

$$f_0 \in W^l(Q), \qquad f_\mu \in W^{l+2m-m_\mu-1/2}(\partial Q),$$

$l \geqslant \max\{0, m_\mu - 2m + 1\}$ — целое.

Рассмотрим также полиномы

$$A^0(x, \xi, \lambda) = \sum_{\beta+|\alpha|=2m} a_{\alpha\beta}(x) \lambda^\beta \xi^\alpha,$$

$$B^0_\mu(x,\xi,\lambda) = \sum_{\beta+|\alpha|=m_\mu} b_{\mu 0\alpha\beta}(x)\lambda^\beta \xi^\alpha,$$

где $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n}$.

Положим

$$\theta = \{\lambda \in \mathbb{C} : \varphi_1 \leqslant \arg q \leqslant \varphi_2\}.$$

Предположим, что выполнены следующие условия.

Условие 2.1.1. При $x \in \overline{Q}$ для всех $\lambda \in \theta$, $\nu \neq 0$ и ξ, ортогональных к ν в $\mathbb{R}^n$ и таких, что $|\lambda| + |\xi| \neq 0$, полином $A^0(x, \xi + \tau\nu, \lambda)$ переменной τ имеет m корней $\tau_1^+(x,\xi,\nu,\lambda), \ldots, \tau_m^+(x,\xi,\nu,\lambda)$ с положительными мнимыми частями и m корней с отрицательными мнимыми частями.

Условие 2.1.2. Полиномы $B^0_\mu(x, \xi + \tau\nu, \lambda)$ $(\mu = 1, \ldots, m)$ переменной τ линейно независимы по модулю полинома $\prod\limits_{j=1}^{m} \big(\tau - \tau_j^+(x,\xi,\nu,\lambda)\big)$ для всех $x \in \partial Q$, $\lambda \in \theta$ и ξ, ортогональных к ν и таких, что $|\xi| + |\nu| \neq 0$, где ν — единичный вектор внутренней нормали к ∂Q в точке x.

Очевидно, линейные операторы

$$A^0 : W^k(Q) \to W^{k-2m}(Q), \qquad B^0_\mu : W^s(Q) \to W^{s-m_\mu}(Q)$$

$(k = 2m, \ldots, l + 2m,\ s = m_\mu, \ldots, l + 2m,\ \mu = 1, \ldots, m)$ ограниченные.

Предположим, что операторы A^1_j, $B^1_{\mu k}$ и $B^2_{\mu k}$ удовлетворяют следующим условиям.

Условие 2.1.3. Операторы

$$A^1_j : W^{2m-j-r_j}(Q) \to L_2(Q)$$

и их сужения

$$A^1_j : W^{l+2m-j-r_j}(Q) \to W^l(Q)$$

суть линейные ограниченные операторы; здесь $0 < r_j \leqslant 2m - j$ $(j = 0, \ldots, 2m-1)$.

Условие 2.1.4. Существует $\sigma > 0$ такое, что для всех $u \in W^s(Q)$

$$\|B^1_{\mu k} u\|_{W^{s-m_\mu+k}(Q)} \leqslant c_1 \|u\|_{W^s(Q_\sigma)}, \tag{2.1.5}$$

где $Q_\sigma = \{x \in Q : \rho(x, \partial Q) > 0\}$, $s = m_\mu - k,\ l + 2m - k$, $k = 0, \dots, m_\mu$, $\mu = 1, \dots, m$ (рис. 2.1.1).

Условие 2.1.5. Операторы

$$B^2_{\mu k} : W^{m_\mu + 1/2 - k - p_k}(Q) \to L_2(\partial Q)$$

и их сужения

$$B^2_{\mu k} : W^{l+2m-k-p_k}(Q) \to W^{l+2m-m_\mu-1/2}(\partial Q)$$

суть линейные ограниченные операторы; здесь $0 < p_k \leqslant m_\mu + 1/2 - k$, $k = 0, \dots, m_\mu$, $\mu = 1, \dots, m$.

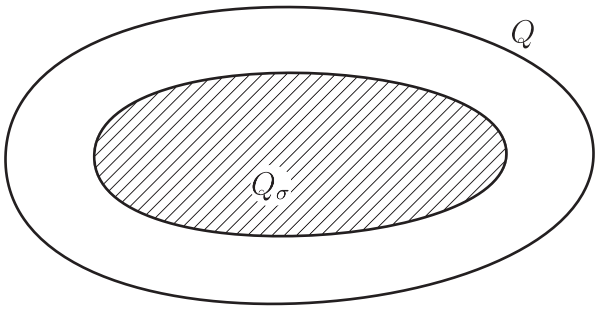

Рис. 2.1.1

Пусть $B : L_2(Q) \to L_2(Q)$ $(L_2(Q) \to L_2(\partial Q))$ — линейный ограниченный оператор. Обозначим

$$\mathcal{G}(B) = \bigcup_{V \in T} \{V : Bu = 0 \text{ для всех } u \in L_2(Q),\ \operatorname{supp} u \subset V\},$$

где T — множество всех открытых множеств в $\mathbb{R}^n$.

Определение 2.1.1. Замкнутое множество $\operatorname{supp} B = \overline{Q \setminus \mathcal{G}(B)}$ называется *носителем оператора* B.

Замечание 2.1.1. Условия 2.1.1 и 2.1.2 означают, что задача (2.1.1), (2.1.2) при $A^1_j = 0$, $B^1_{\mu k} = 0$, $B^2_{\mu k} = 0$ ($j = 0, \dots, 2m-1$, $\mu = 1, \dots, m$, $k = 0, \dots, m_\mu$) является эллиптической задачей с параметром в смысле Аграновича и Вишика (см. условия C.3, C.4 и замечание C.4). Из условия 2.1.4 следует, что соответствующие нелокальные операторы имеют носители внутри области Q. Условия 2.1.3 и 2.1.5 описывают нелокальные возмущения низших порядков.

Рассмотрим теперь пример такой нелокальной эллиптической краевой задачи.

Нелокальные эллиптические задачи с носителями нелокальных операторов на гладких многообразиях.

Пример 2.1.1. Будем изучать задачу (рис. 2.1.2)

$$Au = \sum_{\beta+|\alpha|\leqslant 2m} a_{\alpha\beta}(x)\lambda^\beta D^\alpha u(x) = f_0(x) \qquad (x \in Q), \tag{2.1.6}$$

$$B_\mu u = \sum_{s=0}^{S} \sum_{\beta+|\alpha|\leqslant m_\mu} b_{\mu s\alpha\beta}(x)\lambda^\beta (D^\alpha u)(\omega_s(x))|_{\partial Q} = f_\mu(x) \qquad (x \in \partial Q,\ \mu = 1, \dots, m). \tag{2.1.7}$$

Здесь $a_{\alpha\beta}, b_{\mu s\alpha\beta} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — комплекснозначные функции; ω_s — C^∞-диффеоморфизмы, отображающие некоторую окрестность Ω границы ∂Q на множество $\omega_s(\Omega)$ так, что $\omega_s(\Omega) \subset Q$, $s > 0$; $\omega_0(x) \equiv x$; $S \in \mathbb{N}$; $(D^\alpha u)(\omega_s(x)) = D^\alpha_y u(y)|_{y=\omega_s(x)}$; $f_0 \in W^l(Q)$, $f_\mu \in W^{l+2m-m_\mu-1/2}(\partial Q)$.

Предположим, что операторы A^0 и B^0_μ, заданные формулами (2.1.3), (2.1.4), удовлетворяют условиям 2.1.1, 2.1.2 соответственно.

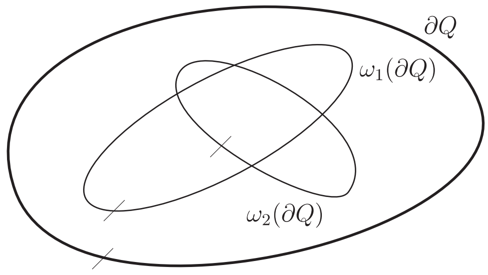

Рис. 2.1.2

Лемма 2.1.1. *Операторы A и B_μ могут быть представлены в виде*

$$Au = A^0 u + \sum_{j=0}^{2m-1} \lambda^j A_j^1 u, \tag{2.1.8}$$

$$B_\mu u = \left(B_\mu^0 u + \sum_{k=0}^{m_\mu} \lambda^k B_{\mu k}^1 u \right)\Bigg|_{\partial Q} + \sum_{k=0}^{m_\mu} \lambda^k B_{\mu k}^2 u, \tag{2.1.9}$$

где операторы A^0 и B_μ^0 заданы формулами (2.1.3), (2.1.4), *а операторы A_j^1, $B_{\mu k}^1$ и $B_{\mu k}^2$ удовлетворяют условиям* 2.1.3, 2.1.4 *и* 2.1.5 *соответственно.*

Доказательство. Обозначим

$$A_j^1 u = \sum_{|\alpha|<2m-j} a_{\alpha j}(x) D^\alpha u(x) \qquad (j = 0, \dots, 2m-1),$$

$$B_{\mu k}^2 u = \left(\sum_{|\alpha|<m_\mu - k} b_{\mu 0 \alpha k}(x) D^\alpha u(x) \right)\Bigg|_{\partial Q} \qquad (k = 0, \dots, m_\mu - 1),$$

$$B_{\mu, m_\mu}^2 u = 0.$$

Операторы A_j^1 и $B_{\mu k}^2$ удовлетворяют условиям 2.1.3 и 2.1.5 соответственно при $r_j = 1$ и $p_k = 1$ $(j = 0, \dots, 2m-1,\ k = 0, \dots, m_\mu)$.

Введем функции $\eta_s \in \dot C^\infty(\mathbb{R}^n)$ так, что $\eta_s(x) = 1$ при $x \in \omega_s(\Omega_1)$ и $\eta_s(x) = 0$ при $x \notin \omega_s(\Omega_2)$, где Ω_1 и Ω_2 — некоторые окрестности ∂Q, причем $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$, $\overline{\Omega}_2 \subset \Omega$. Пусть

$$\sigma = \min_{s>0} \rho(\omega_s(\Omega_2), \partial Q) > 0.$$

Определим операторы $B^1_{\mu k}$ по формуле

$$\big(B^1_{\mu k}u\big)(x) = \sum_{s>0}\sum_{|\alpha|\leqslant m_\mu - k} b_{\mu s\alpha k}(x)\eta_s(\omega_s(x))(D^\alpha u)(\omega_s(x)) \qquad (x\in\Omega\cap Q),$$

$$\big(B^1_{\mu k}u\big)(x) = 0 \qquad (x\in Q\setminus\Omega).$$

Тогда, заменяя переменные $y=\omega_s(x)$ и используя гладкость коэффициентов $b_{\mu s\alpha k}(x)$, для всех $u\in W^{s-m_\mu+k}(Q)$ мы имеем

$$\begin{aligned}
&\|B^1_{\mu k}u\|_{W^{s-m_\mu+k}(Q)}\leqslant\\
&\qquad\leqslant k_1\sum_{s>0}\sum_{|\alpha|\leqslant m_\mu-k}\|b_{\mu s\alpha k}\big(\omega_s^{-1}(y)\big)\eta_s(y)D^\alpha u(y)\|_{W^{s-m_\mu+k}(\omega_s(\Omega_2))}\leqslant\\
&\qquad\leqslant k_2\|u\|_{W^s(Q_\sigma)},
\end{aligned}$$

где $s=m_\mu-k,\dots,l+2m-k$, $k=0,\dots,m_\mu$, $\mu=1,\dots,m$. Таким образом, условие 2.1.4 выполняется. $\square$

Из леммы 2.1.1 вытекает, что задача (2.1.6), (2.1.7) может быть представлена в виде (2.1.1), (2.1.2) с носителями нелокальных операторов $B^1_{\mu k}$ на множестве $\bigcup\limits_{s>0}\omega_s(\partial Q)$.

Разрешимость нелокальных эллиптических задач с параметром. Введем ограниченные операторы

$$L(\lambda), L_0(\lambda): W^{l+2m}(Q)\to\mathcal{W}^l(Q,\partial Q)$$

по формулам

$$L(\lambda)u = (Au, B_1u,\dots,B_mu),$$
$$L_0(\lambda)u = \big(A^0u, \big(B^0_1u\big)|_{\partial Q},\dots,\big(B^0_mu\big)|_{\partial Q}\big),$$

где

$$\mathcal{W}^l(Q,\partial Q) = W^l(Q)\times\prod_{\mu=1}^m W^{l+2m-m_\mu-1/2}(\partial Q),$$

операторы A, B_μ, A^0 и B^0_μ заданы формулами (2.1.1), (2.1.2), (2.1.3) и (2.1.4) соответственно. Оператор $L(\lambda)$ соответствует нелокальной задаче (2.1.1), (2.1.2), в то время как оператор $L_0(\lambda)$ соответствует «локальной» краевой задаче.

Определим оператор $L_t(\lambda) = L_0(\lambda) + t(L(\lambda) - L_0(\lambda))$, где $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Пусть $f = (f_0, f_1, \dots, f_m) \in \mathcal{W}^l(Q, \partial Q)$.

Определение 2.1.2. Функцию $u \in W^{l+2m}(Q)$ мы назовем *сильным решением* задачи (2.1.1), (2.1.2) в $W^{l+2m}(Q)$, если $L(\lambda)u = f$.

Теперь мы установим основной результат этого параграфа.

Теорема 2.1.1. *Пусть выполняются условия* 2.1.1–2.1.5. *Тогда оператор-функция $\lambda \mapsto L(\lambda)$, соответствующая задаче* (2.1.1), (2.1.2), *обладает следующими свойствами.*

(a) *Оператор*

$$L(\lambda) : W^{l+2m}(Q) \to \mathcal{W}^l(Q, \partial Q)$$

фредгольмов и $\operatorname{ind} L(\lambda) = 0$ *для всех* $\lambda \in \mathbb{C}$.

(b) *Существует $\lambda_1 > 0$ такое, что для $\lambda \in \{\lambda \in \theta : |\lambda| \geqslant \lambda_1\}$ оператор $L(\lambda)$ имеет ограниченный обратный $L^{-1}(\lambda) : \mathcal{W}^l(Q, \partial Q) \to W^{l+2m}(Q)$ и для любой $u \in W^{l+2m}(Q)$ справедливо неравенство*

$$c_2|||L(\lambda)u|||_{\mathcal{W}^l(Q,\partial Q)} \leqslant |||u|||_{W^{l+2m}(Q)} \leqslant c_3|||L(\lambda)u|||_{\mathcal{W}^l(Q,\partial Q)}, \qquad (2.1.10)$$

где $c_2, c_3 > 0$ не зависят от λ и u, нормы в пространствах $W^{l+2m}(Q)$ и $\mathcal{W}^l(Q, \partial Q)$ определены по формулам (C.18) *и* (C.20) *соответственно.*

(c) *Оператор-функция $\lambda \mapsto L^{-1}(\lambda) \in \mathcal{B}\big(\mathcal{W}^l(Q, \partial Q), W^{l+2m}(Q)\big)$ есть конечно-мероморфная фредгольмова оператор-функция в $\mathbb{C}$.*

Из теоремы 2.1.1 и леммы 2.1.1 мы получаем следующее утверждение.

Следствие 2.1.1. *Пусть выполнены условия* 2.1.1 *и* 2.1.2. *Тогда оператор-функция* $\lambda \mapsto L(\lambda)$, *соответствующая задаче* (2.1.6), (2.1.7), *обладает свойствами* (a)–(c) *из теоремы* 2.1.1.

Доказательство теоремы 2.1.1 основано на следующем утверждении.

Лемма 2.1.2. *Пусть выполнены условия* 2.1.1–2.1.5. *Тогда существует* $\lambda_1 > 0$ *такое, что для* $\lambda \in \{\lambda \in \theta : |\lambda| \geqslant \lambda_1\}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ *и* $u \in W^{l+2m}(Q)$ *мы имеем оценку*

$$c_2 |||L_t(\lambda)u|||_{\mathcal{W}^l(Q,\partial Q)} \leqslant |||u|||_{W^{l+2m}(Q)} \leqslant c_3 |||L_t(\lambda)u|||_{\mathcal{W}^l(Q,\partial Q)}, \tag{2.1.11}$$

где $c_2, c_3 > 0$ *не зависят от* λ, t *и* u.

Доказательство. Докажем второе неравенство в (2.1.11). Положим $L_t(\lambda)u = f$. Тогда

$$L_0(\lambda)u = f + \Phi, \tag{2.1.12}$$

где

$$\Phi = \Bigg(- t \sum_{j=0}^{2m-1} \lambda^j A_j^1 u, - t \sum_{k=0}^{m_\mu} \lambda^k \left[\big(B_{1k}^1 u\big)|_{\partial Q} + B_{1k}^2 u \right], \dots, \\ - t \sum_{k=0}^{m_\mu} \lambda^k \left[\big(B_{mk}^1 u\big)|_{\partial Q} + B_{mk}^2 u \right] \Bigg).$$

В силу теоремы C.8 существует постоянная $\lambda_0 > 0$ такая, что для $\lambda \in \{\lambda \in \theta : |\lambda| \geqslant \lambda_0\}$ решение «локального» уравнения (2.1.12) удовлетворяет неравенству

$$|||u|||_{W^{l+2m}(Q)} \leqslant k_1 |||f + \Phi|||_{\mathcal{W}^l(Q,\partial Q)}. \tag{2.1.13}$$

Из условий 2.1.3 и 2.1.5 и неравенства (B.20) следует, что

$$|||t\lambda^j A_j^1 u|||_{W^l(Q)} \leqslant k_2|\lambda|^j\Big(\|u\|_{W^{l+2m-j-r_j}(Q)} + |\lambda|^l\|u\|_{W^{2m-j-r_j}(Q)}\Big) \leqslant$$
$$\leqslant k_3|\lambda|^{-r_j}|||u|||_{W^{l+2m}(Q)}, \tag{2.1.14}$$

$$|||t\lambda^k B_{\mu k}^2 u|||_{W^{l+2m-m_\mu-1/2}(Q)} \leqslant$$
$$\leqslant k_4|\lambda|^k\Big(\|u\|_{W^{l+2m-k-p_k}(Q)} + |\lambda|^{l+2m-m_\mu-1/2}\|u\|_{W^{m_\mu+1/2-k-p_k}(Q)}\Big) \leqslant$$
$$\leqslant k_5|\lambda|^{-p_k}|||u|||_{W^{l+2m}(Q)}, \tag{2.1.15}$$

где $k_1, \dots, k_5 > 0$ не зависят от λ, t и u.

Не ограничивая общности, мы можем предположить, что граница ∂Q_σ принадлежит классу C^∞. Используя условие 2.1.4 и неравенства (B.21), (B.20), мы получим

$$\begin{aligned}
&|||t\lambda^k \left(B_{\mu k}^1 u\right)|_{\partial Q}|||_{W^{l+2m-m_\mu-1/2}(\partial Q)} \leqslant k_6|\lambda|^k \left(\|u\|_{W^{l+2m-k}(Q_\sigma)}+\right.\\
&\quad \left.+|\lambda|^{l+2m-m_\mu-1}\left(\|tB_{\mu k}^1 u\|_{W^1(Q)} + |\lambda|\|tB_{\mu k}^1 u\|_{L_2(Q)}\right)\right) \leqslant\\
&\quad \leqslant k_7|\lambda|^k \left(\|u\|_{W^{l+2m-k}(Q_\sigma)}+\right.\\
&\qquad \left.+ \|tB_{\mu k}^1 u\|_{W^{l+2m-m_\mu}(Q)} + |\lambda|^{l+2m-m_\mu}\|tB_{\mu k}^1 u\|_{L_2(Q)}\right) \leqslant\\
&\quad \leqslant k_8|\lambda|^k \left(\|u\|_{W^{l+2m-k}(Q_\sigma)} + |\lambda|^{l+2m-m_\mu}\|u\|_{W^{m_\mu-k}(Q_\sigma)}\right) \leqslant\\
&\quad \leqslant k_9|||u|||_{W^{k+2m}(Q_\sigma)},
\end{aligned} \tag{2.1.16}$$

где $k_6, \dots, k_9 > 0$ не зависят λ, t и u.

Введем функцию $\xi \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ такую, что

$$\begin{gathered}
0 \leqslant \xi(x) \leqslant 1 \quad (x \in \mathbb{R}^n),\\
\xi(x) = 1 \quad (x \in Q_\sigma), \qquad \xi(x) = 0 \quad \big(x \notin Q_{\sigma/2}\big).
\end{gathered} \tag{2.1.17}$$

Из теоремы C.8, формулы Лейбница и неравенств (B.20), (2.1.14) следует, что

$$
\begin{gathered}
|||u|||_{W^{l+2m}(Q_\sigma)} \leqslant |||\xi u|||_{W^{l+2m}(Q)} \leqslant \\
\leqslant k_{11}|||A^0(\xi u)|||_{W^l(Q)} \leqslant k_{12}\Bigg(|||\xi A^0 u|||_{W^l(Q)} + \\
+ \sum_{j=0}^{2m-1} |\lambda|^j \sum_{|\alpha|=1}^{2m-j} \sum_{|\beta| \leqslant 2m-|\alpha|-j} \big(\|D^\alpha \xi D^\beta u\|_{W^l(Q)} + |\lambda|^l \|D^\alpha \xi D^\beta u\|_{L_2(Q)} \big) \Bigg) \leqslant \\
\leqslant k_{13}\Bigg(|||A^0 u|||_{W^l(Q)} + \sum_{j=0}^{2m-1} |\lambda|^j \big(\|u\|_{W^{l+2m-1-j}(Q)} + |\lambda|^l \|u\|_{W^{2m-1-j}(Q)} \big) \Bigg) \leqslant \\
\leqslant k_{14}\big(|||A^0 u|||_{W^l(Q)} + |\lambda|^{-1} |||u|||_{W^{l+2m}(Q)} \big) \leqslant \\
\leqslant k_{15}\Bigg(\Bigg|\Bigg|\Bigg| \Bigg(A^0 + t\sum_{j=0}^{2m-1} \lambda^j A^1_j \Bigg) u \Bigg|\Bigg|\Bigg|_{W^l(Q)} + \\
+ \Bigg(\sum_{j=0}^{2m-1} |\lambda|^{-r_j} + |\lambda|^{-1} \Bigg) |||u|||_{W^{l+2m}(Q)} \Bigg)
\end{gathered} \tag{2.1.18}
$$

для $\lambda \in \{\lambda \in \theta : |\lambda| \geqslant \lambda_0\}$. Здесь $k_{11}, \ldots, k_{16} > 0$ не зависят от λ, t и u.

Таким образом, из неравенств (2.1.13)–(2.1.16) и (2.1.18) мы получим

$$
\begin{gathered}
|||u|||_{W^{l+2m}(Q)} \leqslant k_1\Bigg((1 + mk_9k_{15}) |||L_t(\lambda)u|||_{\mathcal{W}^l(Q,\partial Q)} + \\
+ \Bigg[(k_3 + mk_9k_{15}) \sum_{j=0}^{2m-1} |\lambda|^{-r_j} + \\
+ mk_5 \sum_{k=0}^{m_\mu} |\lambda|^{-p_k} + mk_9k_{15}|\lambda|^{-1} \Bigg] |||u|||_{W^{l+2m}(Q)} \Bigg).
\end{gathered}
$$

Тогда, выбирая $\lambda_1 > \lambda_0$ так, что

$$
k_1\Bigg((k_3 + mk_9k_{15}) \sum_{j=0}^{2m-1} \lambda_1^{-r_j} + mk_5 \sum_{k=0}^{m_\mu} \lambda_1^{-p_k} + mk_9k_{15}\lambda_1^{-1} \Bigg) < \frac{1}{2},
$$

мы получаем второе неравенство (2.1.11) с константой

$$
c_3 = 2k_1(1 + mk_9k_{15})
$$

для $\lambda \in \{\lambda \in \theta : |\lambda| > \lambda_1\}$.

Первое неравенство в (2.1.11) следует из (2.1.14)–(2.1.16). $\square$

Доказательство теоремы 2.1.1. 1. Вначале мы докажем утверждение (b). В силу теоремы C.8 оператор $L_0(\lambda)$ имеет ограниченный обратный

$$L_0^{-1}(\lambda) : \mathcal{W}^l(Q, \partial Q) \to W^{l+2m}(Q)$$

для

$$\lambda \in \{\lambda \in \theta : |\lambda| \geqslant \lambda_0 > 0\}$$

в норме $|||\cdot|||$. Предположим, что

$$\lambda \in \{\lambda \in \theta : |\lambda| \geqslant \lambda_1\},$$

где $\lambda_1 > \lambda_0$ — число из леммы 2.1.2. Тогда из теоремы A.9 следует, что существует ограниченный обратный оператор

$$L^{-1}(\lambda) : \mathcal{W}^l(Q, \partial Q) \to W^{l+2m}(Q).$$

2. Докажем теперь утверждение (a). Пусть $\eta \in \{\lambda \in \theta : |\lambda| \geqslant \lambda_1\}$. Тогда для произвольного $\lambda \in \mathbb{C}$ мы имеем

$$L(\lambda) = \big(I + (L(\lambda) - L(\eta))L^{-1}(\eta)\big)L(\eta),$$

где I — единичный оператор в $\mathcal{W}^l(Q, \partial Q)$. Из условий 2.1.3–2.1.5 следует, что оператор

$$L(\lambda) - L(\eta) : W^{l+2m-1}(Q) \to \mathcal{W}^l(Q, \partial Q)$$

ограниченный. Поскольку оператор вложения $W^{l+2m}(Q)$ в $W^{l+2m-1}(Q)$ компактный, то же утверждение справедливо для оператора

$$(L(\lambda) - L(\eta))L^{-1}(\eta) : \mathcal{W}^l(Q, \partial Q) \to \mathcal{W}^l(Q, \partial Q).$$

Поэтому по теореме A.1 оператор $L(\lambda)$ фредгольмов и $\operatorname{ind} L(\lambda) = 0$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}$.

3. Утверждение (c) следует из утверждений (a) и (b) и теоремы A.10.

$\square$

Нелокальные возмущения задачи Дирихле. Пусть операторы A^0 и B^0_μ удовлетворяют следующим условиям.

Условие 2.1.6. Оператор $A^0 u = \sum\limits_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) + \lambda^{2m} u(x)$ — дифференциальный оператор с вещественнозначными коэффициентами $a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$; $\sum\limits_{|\lambda|=2m} a_\alpha(x)\xi^\alpha > 0$ для $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$ и $x \in \overline{Q}$.

Условие 2.1.7. Операторы $B^0_\mu u = \left(-i\dfrac{\partial}{\partial\nu}\right)^{\mu-1} u$ $(\mu = 1, \dots, m)$ — граничные операторы задачи Дирихле.

Очевидно, если условия 2.1.6 и 2.1.7 выполняются, то операторы A^0 и B^0_μ удовлетворяют условиям 2.1.1 и 2.1.2 для

$$\lambda \in \omega_\varepsilon = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg\lambda| \leqslant \varepsilon \text{ или } |\arg\lambda - \pi| \leqslant \varepsilon\},$$

где $0 < \varepsilon < \dfrac{\pi}{2m}$ произвольно. Поэтому теорема 2.1.1 примет следующий вид.

Теорема 2.1.2. *Пусть выполняются условия* 2.1.3–2.1.7. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

(a) *Оператор*

$$L(\lambda) : W^{l+2m}(Q) \to \mathcal{W}^l(Q, \partial Q)$$

фредгольмов и $\operatorname{ind} L(\lambda) = 0$ *для всех* $\lambda \in \mathbb{C}$.

(b) *Для любого* $0 < \varepsilon < \dfrac{\pi}{2m}$ *существует* $q = q(\varepsilon) > 0$ *такое, что для*

$$\lambda \in \omega_{\varepsilon,q} = \{\lambda \in \omega_\varepsilon : |\lambda| \geqslant q\}$$

оператор $L(\lambda)$ *имеет ограниченный обратный*

$$L^{-1}(\lambda) : \mathcal{W}^l(Q, \partial Q) \to W^{l+2m}(Q)$$

и для всех $u \in W^{l+2m}(Q)$ *справедлива априорная оценка* (2.1.11).

(c) *Оператор-функция* $\lambda \mapsto L^{-1}(\lambda) \in \mathcal{B}\big(\mathcal{W}^l(Q, \partial Q), W^{l+2m}(Q)\big)$ — *конечно-мероморфная фредгольмова оператор-функция в* $\mathbb{C}$.

Введем неограниченный оператор $\mathcal{A}_B : \mathcal{D}(\mathcal{A}_B) \subset W^l(Q) \to W^l(Q)$, заданный следующим образом:

$$\mathcal{A}_B u = Au \qquad (u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_B)),$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_B) = \{u \in W^{l+2m}(Q) : B_\mu u = 0,\ \mu = 1, \dots, m\}.$$

Здесь в операторах A, B_μ мы полагаем $\lambda = 0$.

Следствие 2.1.2. *Пусть выполнены условия* 2.1.3–2.1.7. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

(a) *Оператор* $\mathcal{A}_B : \mathcal{D}(\mathcal{A}_B) \subset W^l(Q) \to W^l(Q)$ *фредгольмов, и* $\operatorname{ind} \mathcal{A}_B = 0$.

(b) *Спектр* $\sigma(\mathcal{A}_B)$ *дискретный*; *для* $\eta \notin \sigma(\mathcal{A}_B)$ *резольвента*

$$R(\eta, \mathcal{A}_B) : W^l(Q) \to W^l(Q)$$

есть компактный оператор.

(c) *Для любого* $0 < \delta < \pi$ *все точки спектра* $\sigma(\mathcal{A}_B)$, *кроме, возможно, конечного числа точек, принадлежат углу комплексной плоскости* $|\arg \eta| < \delta$.

Доказательство следует из подстановки $\eta = -\lambda^{2m}$ и теорем 2.1.1, A.12 и A.1 (ср. доказательство следствия 1.1.2).

Пример 2.1.2. Рассмотрим нелокальную эллиптическую краевую задачу

$$-\triangle u+\lambda^2u=f_0(x)\qquad \bigl(x\in Q=B_1\subset\mathbb{R}^2\bigr), \tag{2.1.19}$$

$$u|_{r=1}-u|_{r=1/2}=0\qquad (0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi). \tag{2.1.20}$$

Здесь r,φ — полярные координаты точки $x\in\mathbb{R}^2$. Обозначим

$$B^1_{10}u=-\eta(r-1/2)u(r-1/2,\varphi),\qquad B^2_{10}u=0,$$

где $\eta\in\dot C^\infty(\mathbb{R})$, $\eta(r)=1$ для $r\in(3/8,5/8)$, $\eta(r)=0$ для $r\notin(1/4,3/4)$, $0\leqslant\eta(r)\leqslant 1$. Из примера 2.1.1 следует, что оператор B^1_{10} удовлетворяет условию 2.1.4 для $\sigma=1/4$, $m=1$ и $m_1=0$. Следовательно, теорема 2.1.2 остается справедливой для оператора $\mathcal{A}_B$, соответствующего нелокальной краевой задаче (2.1.19), (2.1.20). Однако в отличие от задачи Дирихле для уравнения (2.1.19) задача (2.1.19), (2.1.20) имеет нетривиальное решение $u(x)\equiv 1$ для $f_0(x)\equiv 0$ и $\lambda=0$, т. е. $0\in\sigma(\mathcal{A}_B)$.

Пример 2.1.3. Рассмотрим нелокальную эллиптическую краевую задачу

$$\triangle\triangle u+\lambda^4u=f_0(x)\qquad \bigl(x\in Q=B_1\subset\mathbb{R}^2\bigr), \tag{2.1.21}$$

$$u(r,\varphi)|_{r=1}-u(r,\varphi)|_{r=1/3}+2u(r,\varphi-1)|_{r=1/4}+\int\limits_0^1 ru(r,\varphi)dr=0$$
$$(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi),$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1}+\bigl(B^1_{20}u\bigr)|_{r=1}=0\qquad (0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi). \tag{2.1.22}$$

Здесь

$$B^1_{20}u=\bigl\{F^{-1}\bigl[\bigl(1+|\xi|^2\bigr)^{1/2}\operatorname{arctg}|\xi|F(\eta_0u)\bigr]\bigr\},$$

$\eta_0\in\dot C^\infty\bigl(\mathbb{R}^2\bigr)$, $\eta_0(r)=1$ при $r<1/2$ и $\eta_0(r)=0$ при $r\geqslant 2/3$; $F(v)=(Fv)(\xi)$ — преобразование Фурье по x, $F^{-1}(w)=\bigl(F^{-1}w\bigr)(x)$ —

обратное преобразование Фурье по $\xi, \xi \in \mathbb{R}^2$. Обозначим

$$B_{10}^1 u = -\eta_1(r-2/3,\varphi)u(r-2/3,\varphi) + 2\eta_1(r-3/4,\varphi)u(r-3/4,\varphi-1),$$

$$B_{10}^2 u = \int\limits_0^1 r u(r,\varphi)dr,$$

где $\eta_1 \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R})$, $0 \leqslant \eta_1(r) \leqslant 1$, $\eta_1(r) = 0$ при $r \notin (1/5, 2/3)$, $\eta_1(r) = 1$ при $1/4 \leqslant r \leqslant 1/2$. Из примера 2.1.1 следует, что оператор B_{10}^1 удовлетворяет условию 2.1.4 для $m = 2$, $m_1 = 0$ и $\sigma = 1/5$. Делая невырожденное гладкое преобразование переменных и используя неравенство Коши—Буняковского, мы видим, что оператор $B_{10}^2 : W^s(Q) \to W^s(\partial Q)$ ограничен для любого целого $s \geqslant 0$. В силу интерполяционной теоремы B.15 это утверждение также справедливо для $s = k - 1/2$ $(k = 1, 2, \dots)$. Поэтому оператор B_{10}^2 удовлетворяет условию 2.1.5 с $p_0 = 1/2$, $m = 2$ и $m_1 = 0$. Легко показать, что условие 2.1.4 выполняется для оператора B_{20}^1 с $m = 2$, $m_1 = 1$ и $\sigma = 1/5$.

2.2. Разрешимость и индекс нелокальных эллиптических задач

Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$Au = A^0 u + A^1 u = f_0(x) \qquad (x \in Q) \tag{2.2.1}$$

с нелокальными краевыми условиями

$$B_\mu u = \big(B_\mu^0 u\big)|_{\partial Q} + B_\mu^1 u + B_\mu^2 u = f_\mu(x) \qquad (x \in \partial Q;\ \mu = 1, \dots, m). \tag{2.2.2}$$

Здесь $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial Q \in C^\infty$, $n \geqslant 2$; операторы A^0 и B^0_μ заданы формулами

$$A^0 = A^0(x, D) = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x) D^\alpha, \tag{2.2.3}$$

$$B^0_\mu = B^0_\mu(x, D) = \sum_{|\alpha|=m_\mu} b_{\mu 0\alpha}(x) D^\alpha, \tag{2.2.4}$$

$a_\alpha, b_{\mu 0\alpha} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — комплекснозначные функции;

$$f_0 \in W^l(Q), \qquad f_\mu \in W^{l+2m-m_\mu-1/2}(\partial Q),$$

$l \geqslant \max\{0,\ m_\mu - 2m + 1\}$ — целое.

Наряду с операторами $A^0(x, D)$ и $B^0_\mu(x, D)$ введем полиномы

$$A^0(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x)\xi^\alpha, \qquad B^0_\mu(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m_\mu} b_{\mu 0\alpha}(x)\xi^\alpha.$$

Предположим, что операторы A и B_μ удовлетворяют следующим условиям.

Условие 2.2.1. При $x \in \overline{Q}$ для любого $\nu \neq 0$ и $\xi \neq 0$, ортогонального к ν в $\mathbb{R}^n$, полином $A^0(x, \xi + \tau\nu)$ переменной τ имеет ровно m корней $\tau_1^+(x, \xi, \nu), \dots, \tau_m^+(x, \xi, \nu)$ с положительной мнимой частью и m корней с отрицательной мнимой частью.

Условие 2.2.2. Полиномы $B^0_\mu(x, \xi + \tau\nu)$ $(\mu = 1, \dots, m)$ переменной τ линейно независимы по модулю полинома $\prod_{j=1}^{m} \big(\tau - \tau_j^+(x, \xi, \nu)\big)$ для всех $x \in \partial Q$ и $\xi \neq 0$, ортогональных к ν, где ν — единичный вектор внутренней нормали к ∂Q в точке x.

Условие 2.2.3. Оператор $A^1 : W^{l+2m-r_0}(Q) \to W^l(Q)$ — линейный ограниченный оператор, $0 < r_0 \leqslant l + 2m$.

Условие 2.2.4. Существует $\sigma > 0$ такое, что для всех $u \in W^{l+2m}(Q)$

$$\|B_\mu^1 u\|_{W^{l+2m-m_\mu-1/2}(\partial Q)} \leqslant c_1 \|u\|_{W^{l+2m}(Q_\sigma)}, \tag{2.2.5}$$

где $Q_\sigma = \{x \in Q : \rho(x, \partial Q) > 0\}$, $\mu = 1, \dots, m$.

Условие 2.2.5. Операторы $B_\mu^2 : W^{l+2m-p_0}(Q) \to W^{l+2m-m_\mu-1/2}(\partial Q)$ линейные ограниченные, $0 < p_0 \leqslant l + 2m$, $\mu = 1, \dots, m$.

Замечание 2.2.1. Условия 2.2.1 и 2.2.2 означают, что задача (2.2.1), (2.2.2) является эллиптической, если $A^1 = 0$, $B_\mu^1 = 0$ и $B_\mu^2 = 0$ ($\mu = 1, \dots, m$), см. условия С.1, С.2 и замечание С.3. Условие 2.2.4 означает, что соответствующие нелокальные операторы имеют носители внутри области Q. Условия 2.2.3 и 2.2.5 описывают нелокальные возмущения низшего порядка.

Изучим пример такой нелокальной эллиптической краевой задачи.

Нелокальные эллиптические задачи с носителями нелокальных членов на гладких многообразиях внутри области.

Пример 2.2.1. Рассмотрим задачу

$$Au = \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) = f_0(x) \qquad (x \in Q), \tag{2.2.6}$$

$$B_\mu u = \sum_{s=0}^{S} \sum_{|\alpha| \leqslant m_\mu} b_{\mu s \alpha}(x) (D^\alpha u)(\omega_s(x))|_{\partial Q} = f_\mu(x) \\ (x \in \partial Q;\ \mu = 1, \dots, m). \tag{2.2.7}$$

Здесь $a_\alpha, b_{\mu s \alpha} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — комплекснозначные функции, ω_s — C^∞-диффеоморфизмы, отображающие некоторую окрестность Ω границы ∂Q на множество $\omega_s(\Omega)$ так, что $\omega_s(\Omega) \subset Q$, $s > 0$; $\omega_0(x) \equiv x$; $S \in \mathbb{N}$; $f_0 \in W^l(Q)$, $f_\mu \in W^{l+2m-m_\mu-1/2}(\partial Q)$.

Предположим, что операторы A^0 и B^0_μ, заданные формулами (2.2.3), (2.2.4), удовлетворяют условиям 2.2.1 и 2.2.2 соответственно.

Лемма 2.2.1. *Операторы A и B_μ можно представить в виде*

$$Au = A^0u + A^1u, \tag{2.2.8}$$

$$B_\mu u = \big(B^0_\mu u\big)|_{\partial Q} + B^1_\mu u + B^2_\mu u, \tag{2.2.9}$$

где операторы A^1, B^1_μ и B^2_μ удовлетворяют условиям 2.2.3, 2.2.4 *и* 2.2.5 *соответственно.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.1.1.

Разрешимость и индекс. Введем ограниченные операторы

$$L, L_0 : W^{l+2m}(Q) \to \mathcal{W}^l(Q, \partial Q)$$

по формулам

$$Lu = (Au, B_1u, \dots, B_mu), \qquad L_0u = \big(A^0u, \big(B^0_1u\big)|_{\partial Q}, \dots, \big(B^0_mu\big)|_{\partial Q}\big).$$

Оператор L соответствует нелокальной задаче (2.2.1), (2.2.2), в то время как оператор L_0 соответствует «локальной» краевой задаче.

Сильное решение задачи (2.2.1), (2.2.2) можно определить аналогично тому, как это сделано в § 2.1.

Основной результат этого параграфа может быть сформулирован следующим образом.

Теорема 2.2.1. *Пусть выполняются условия* 2.2.1–2.2.5. *Тогда соответствующий задаче* (2.2.1), (2.2.2) *оператор*

$$L : W^{l+2m}(Q) \to \mathcal{W}^l(Q, \partial Q)$$

фредгольмов и $\operatorname{ind} L = \operatorname{ind} L_0$.

Из теоремы 2.2.1 и леммы 2.2.1 мы получим следующий результат.

Следствие 2.2.1. *Пусть выполняются условия* 2.2.1 *и* 2.2.2. *Тогда соответствующий задаче* (2.2.6), (2.2.7) *оператор*

$$L : W^{l+2m}(Q) \to \mathcal{W}^l(Q, \partial Q)$$

фредгольмов и $\operatorname{ind} L = \operatorname{ind} L_0$.

Для доказательства теоремы 2.2.1 получим вначале некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 2.2.2. *Пусть выполняются условия* 2.2.1–2.2.5. *Тогда для всех* $u \in W^{l+2m}(Q)$ *мы имеем оценку*

$$\|u\|_{W^{l+2m}(Q)} \leqslant c_2\big(\|Lu\|_{\mathcal{W}^l(Q,\partial Q)} + \|u\|_{L_2(Q)}\big), \tag{2.2.10}$$

где оператор L *соответствует задаче* (2.2.1), (2.2.2).

В силу априорной оценки решений «локальной» задачи (см. лемму C.3) доказательство проводится так же, как в случае леммы 2.1.2.

Из леммы 2.2.2 и теоремы A.2 следует, что $\dim \mathcal{N}(L) < \infty$ и образ $\mathcal{R}(L)$ замкнут в $\mathcal{W}^l(Q, \partial Q)$. Для того чтобы показать справедливость соотношения $\operatorname{codim} \mathcal{R}(L) < \infty$, докажем следующий результат.

Лемма 2.2.3. *Пусть выполнены условия* 2.2.1–2.2.5. *Тогда оператор*

$$L : W^{l+2m}(Q) \to \mathcal{W}^l(Q, \partial Q),$$

соответствующий задаче (2.2.1), (2.2.2), *имеет правый регуляризатор*

$$R : \mathcal{W}^l(Q, \partial Q) \to W^{l+2m}(Q).$$

Доказательство. По лемме C.2 существует линейный ограниченный оператор

$$R_0 : \mathcal{W}^l(Q, \partial Q) \to W^{l+2m}(Q)$$

такой, что

$$L_0 R_0 = I + T_0,$$

где T_0 — компактный оператор в $\mathcal{W}^l(Q, \partial Q)$. Введем ограниченные операторы

$$R_1 : W^l(Q) \to W^{l+2m}(Q), \qquad R_2 : \mathcal{W}^l(\partial Q) \to W^{l+2m}(Q),$$

определенные по формулам

$$R_1 f_0 = R_0(f_0, 0), \qquad R_2 f' = R_0(0, f'),$$

где

$$\mathcal{W}^l(\partial Q) = \prod_{\mu=1}^{m} W^{l+2m-m_\mu-1/2}(\partial Q),$$

$f_0 \in W^l(Q)$, $f' = (f_1, \dots, f_m) \in \mathcal{W}^l(\partial Q)$.

Введем также ограниченные операторы

$$B, B^0, B^j : W^{l+2m}(Q) \to \mathcal{W}^l(\partial Q)$$

следующим образом:

$$B = B^0 + B^1 + B^2,$$

$$B^0 u = \big((B_1^0)|_{\partial Q}, \dots, (B_m^0)|_{\partial Q}\big), \qquad B^j u = \big(B_1^j u, \dots, B_m^j u\big) \quad (j = 1, 2).$$

Рассмотрим теперь оператор R, заданный формулой

$$Rf = R_1 f_0 + (1 - \xi) R_2 \big(f' - B^1 R_1 f_0\big). \tag{2.2.11}$$

Здесь $\xi \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ — функция вида (2.1.17). Из условия 2.2.4 следует, что оператор

$$R : \mathcal{W}^l(Q, \partial Q) \to W^{l+2m}(Q)$$

ограниченный. Введем операторы T_1 и T_2, действующие из $W^l(Q)$ в пространства $W^l(Q)$ и $\mathcal{W}^l(\partial Q)$ соответственно, а также T_3 и T_4, действующие из $\mathcal{W}^l(\partial Q)$ в пространства $\mathcal{W}^l(Q)$ и $\mathcal{W}^l(\partial Q)$ соответственно, следующим образом:

$$T_0(f_0,0)=(T_1f_0,T_2f_0),\qquad T_0(0,f')=(T_3f',T_4f').$$

По определению $T_1,\dots,T_4$ — компактные операторы в соответствующих пространствах и

$$A^0R_1f_0=f_0+T_1f_0,\qquad A^0R_2f'=T_3f', \tag{2.2.12}$$

$$B^0R_1f_0=T_2f_0,\qquad B^0R_2f'=f'+T_4f'. \tag{2.2.13}$$

Используя (2.2.12) и формулу Лейбница, мы получим

$$ARf=f_0+T'f,$$

где

$$T'f=A^1Rf+T_1f_0+\big((1-\xi)T_3+A^2R_2\big)\big(f'-B^1R_1f_0\big),$$
$$A^2u=\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant 2m}\ \sum_{|\beta|=2m-|\alpha|}a_{\alpha\beta}(x)D^\alpha(1-\xi)D^\beta u,$$

$a_{\alpha\beta}\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. В силу компактности операторов

$$T_1:W^l(Q)\to W^l(Q),\qquad T_3:\mathcal{W}^l(\partial Q)\to W^l(Q)$$

и компактности оператора вложения $W^{l+2m}(Q)$ в $W^{l+2m-r}(Q)$, где

$$r=\min\{r_0,p_0,1\},$$

а также условия 2.2.3 оператор $T':\mathcal{W}^l(Q,\partial Q)\to W^l(Q)$ компактный.

В силу (2.1.17) и условия 2.2.4

$$B^0((1-\xi)v)=B^0v,\qquad B^1((1-\xi)v)=0\quad\big(v\in W^{l+2m}(Q)\big).$$

Отсюда и из (2.2.13) мы получаем

$$\begin{aligned}BRf&=\big(B^0+B^1+B^2\big)\big(R_1f_0+(1-\xi)R_2\big(f'-B^1R_1f_0\big)\big)=\\&=T_2f_0+\big(f'-B^1R_1f_0\big)+T_4\big(f'-B^1R_1f_0\big)+B^1R_1f_0+B^2Rf=\\&=f'+T''f,\end{aligned}$$

где

$$T''f = T_2 f_0 + T_4\big(f' - B^1 R_1 f_0\big) + B^2 R f.$$

Поэтому в силу условия 2.2.5, компактности операторов

$$T_2 : W^l(Q) \to \mathcal{W}^l(\partial Q), \qquad T_4 : \mathcal{W}^l(\partial Q) \to \mathcal{W}^l(\partial Q)$$

и компактности оператора вложения $W^{l+2m}(Q)$ в $W^{l+2m-r}(Q)$ оператор

$$T'' : \mathcal{W}^l(Q, \partial Q) \to \mathcal{W}^l(\partial Q)$$

компактный. Таким образом,

$$LR = I + T,$$

где оператор $T : \mathcal{W}^l(Q, \partial Q) \to \mathcal{W}^l(Q, \partial Q)$, определенный по формуле $Tf = (T'f, T''f)$, компактный. Следовательно, оператор R — правый регуляризатор оператора L. $\square$

Доказательство теоремы 2.2.1. 1. Вначале мы докажем, что оператор $L : W^{l+2m} \to \mathcal{W}^l(Q, \partial Q)$ фредгольмов. Действительно, из леммы 2.2.2 и теоремы А.2 следует, что $\dim \mathcal{N}(L) < \infty$ и образ $\mathcal{R}(L)$ замкнут в $\mathcal{W}^l(Q, \partial Q)$. С другой стороны, в силу леммы 2.2.3 и теоремы А.4 $\operatorname{codim} \mathcal{R}(L) < \infty$.

2. Покажем теперь, что $\operatorname{ind} L = \operatorname{ind} L_0$. Обозначим

$$L_t = L_0 + t(L - L_0), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Очевидно, операторы tA^1, tB^1_μ и tB^2_μ $(\mu = 1, \dots, m)$ удовлетворяют условиям 2.2.3–2.2.5. Поэтому в силу теоремы А.8 об устойчивости индекса $\operatorname{ind} L = \operatorname{ind} L_0$. $\square$

Сведение к задаче с компактным возмущением. Покажем, что, вообще говоря, оператор B^1_μ не является компактным возмущением оператора L_0.

Пример 2.2.2. Рассмотрим нелокальную задачу

$$-\triangle u = f_0(x) \qquad \bigl(x \in Q = B_1 \subset \mathbb{R}^2\bigr), \tag{2.2.14}$$

$$u|_{r=1} - u|_{r=1/2} = 0 \qquad (0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi), \tag{2.2.15}$$

ср. пример 2.1.2.

Здесь r, φ — полярные координаты точки $x \in \mathbb{R}^2$. Обозначим

$$B_1^1 u = -\eta(r-1/2)u(r-1/2,\varphi)|_{r=1}, \qquad B_1^2 u = 0, \qquad A^1 u = 0,$$

где $\eta(r) \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R})$, $\eta(r) = 1$ при $r \in (3/8, 5/8)$, $\eta(r) = 0$ при $r \notin (1/4, 3/4)$ и $0 \leqslant \eta(r) \leqslant 1$. Очевидно, оператор B_1^1 удовлетворяет условию 2.2.4 при $\sigma = 1/4$, $m = 1$ и $m_1 = 0$.

Введем линейные ограниченные операторы

$$L_0, L : W^2(Q) \to \mathcal{W}^0(Q, \partial Q)$$

по формулам

$$L_0 u = (-\triangle u, u|_{r=1}), \qquad Lu = \bigl(-\triangle u, u|_{r=1} + B_1^1 u\bigr).$$

Обозначим

$$\mathcal{F} = \{\psi \in W^{3/2}(\partial Q) : \|\psi\|_{W^{3/2}(\partial Q)} = 1\},$$
$$\Omega_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : 3/4 < r < 5/4,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\},$$
$$\Omega_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1/4 < r < 3/4,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}.$$

Пусть

$$T : W^{3/2}(\partial Q) \to W^2(\Omega_1) -$$

линейный ограниченный оператор такой, что $T\psi = \psi$ для любой функции $\psi \in W^{3/2}(\partial Q)$. Введем линейный ограниченный оператор

$$V : W^{3/2}(\partial Q) \to W^2(Q)$$

по формуле

$$(V\psi)(\varphi, r) = \begin{cases} -\eta(r)(T\psi)(r+1/2, \varphi), & (r,\varphi) \in \Omega_2, \\ 0, & (r,\varphi) \in Q \setminus \Omega_2. \end{cases}$$

Очевидно, $V(\mathcal{F})$ — ограниченное множество в $W^2(Q)$. С другой стороны, $B_1^1 V\psi = \psi$ для любого $\psi \in \mathcal{K}$. Следовательно, $B_1^1(V(\mathcal{F})) = \mathcal{F}$, т. е. оператор B_1^1 отображает ограниченное множество $V(\mathcal{F})$ на единичную сферу, которая некомпактна.

Однако нелокальная эллиптическая задача (2.2.1), (2.2.2) может быть сведена к операторному уравнению с компактным возмущением, которое соответствует нелокальному члену. В то же время это сведение дает независимое доказательство теоремы 2.2.1. Для того чтобы сформулировать соответствующий результат, мы рассмотрим вспомогательное утверждение.

Пусть H, H_1 и H_2 — гильбертовы пространства, и пусть

$$\mathcal{H} = H_1 \times H_2.$$

Пусть $A : H \to H_1$ и $B^0, B^1 : H \to H_2$ — линейные ограниченные операторы. Введем операторы $L_0, L : H \to \mathcal{H}$ по формулам $L_0 = \{A, B^0\}$ и $L = \{A, B\}$, где $B = B^0 + B^1$. Обозначим через G_i и G сужения операторов B^i и B на $\mathcal{N}(A)$, $i = 0, 1$.

Лемма 2.2.4. *Пусть оператор $L_0 : H \to \mathcal{H}$ фредгольмов. Тогда оператор $G_0 : \mathcal{N}(A) \to H_2$ также фредгольмов. Если к тому же оператор $G : \mathcal{N}(A) \to H_2$ фредгольмов и* $\operatorname{ind} G = \operatorname{ind} G_0$, *то оператор $L : H \to \mathcal{H}$ фредгольмов и* $\operatorname{ind} L = \operatorname{ind} L_0$.

Доказательство. 1. Очевидно, $\mathcal{N}(L_0) = \mathcal{N}(G_0)$. Пусть множество функций

$$f_i = (\varphi_i, \psi_i), \quad i = 1, \dots, r,$$

составляет ортонормированный базис в $\mathcal{R}(L_0)^{\perp}$, где $\varphi_i \in H_1$, $\psi_i \in H_2$, $\mathcal{R}(L_0)^{\perp}$ — ортогональное дополнение к $\mathcal{R}(L_0)$ в $\mathcal{H}$. Тогда система уравнений

$$Au = 0, \qquad B^0 u = \psi \tag{2.2.16}$$

имеет решение в том и только в том случае, если

$$(\psi, \psi_i)_{H_2} = 0, \quad i = 1, \dots, r.$$

Следовательно, множество $\mathcal{R}(G_0)$ замкнуто в H_2 и $p = \operatorname{codim} \mathcal{R}(G_0) \leqslant r$. Таким образом, мы доказали, что оператор $G_0 : \mathcal{N}(A) \to H_2$ фредгольмов.

2. Докажем теперь, что если оператор $G : \mathcal{N}(A) \to H_2$ фредгольмов и $\operatorname{ind} G = \operatorname{ind} G_0$, то оператор $L : H \to \mathcal{H}$ — фредгольмов. Аналогично части 1 доказательства мы можем показать, что сужение A на $\mathcal{N}\big(B^0\big)$ — фредгольмов оператор и размерность его коядра меньше или равна r. Поэтому $\mathcal{R}(A)$ замкнуто в H_1 и $m = \operatorname{codim} \mathcal{R}(A) \leqslant r$. Обозначим через $\tilde{A}$ сужение A на $\mathcal{N}(A)^{\perp}$, отображающее $\mathcal{N}(A)^{\perp}$ на $\mathcal{R}(A)$. Оператор $\tilde{A}$ имеет ограниченный обратный

$$\tilde{A}^{-1} : \mathcal{R}(A) \to \mathcal{N}(A)^{\perp}.$$

Введем оператор $\tilde{L}_0 : H \to \mathcal{R}(A) \times H_2$ по формуле $\tilde{L}_0 u = \big(Au, B^0 u\big)$. Очевидно,

$$\operatorname{ind} L_0 = \operatorname{ind} \tilde{L}_0 - m. \tag{2.2.17}$$

Рассмотрим систему уравнений, соответствующую оператору $\tilde{L}_0$,

$$Au = \varphi, \qquad B^0 u = \psi, \tag{2.2.18}$$

где $\varphi \in \mathcal{R}(A)$, $\psi \in H_2$. Обозначим $w = u - \tilde{A}^{-1}\varphi$. Тогда задача (2.2.18) примет вид

$$Aw = 0, \qquad B^0 w = \eta_0, \tag{2.2.19}$$

где $\eta_0 = \psi - B^0\tilde{A}^{-1}\varphi$. Задача (2.2.19) и, следовательно, задача (2.2.18) имеет решение тогда и только тогда, когда

$$(\eta_0, \chi_j)_{H_2} = 0 \qquad (j = 1, \ldots, p_0), \tag{2.2.20}$$

где $\chi_1, \ldots, \chi_{p_0}$ — ортонормированный базис в $\mathcal{R}(G_0)^{\perp}$.

Из ограниченности операторов $B^0 : H \to H_2$ и $\tilde{A}^{-1} : \mathcal{R}(A) \to \mathcal{N}(A)^{\perp}$ и неравенства Коши—Буняковского следует, что

$$\left|\Big(B^0\tilde{A}^{-1}\varphi, \chi_j\Big)_{H_2}\right| \leqslant k_1\|\varphi\|_{H_1}\|\chi_j\|_{H_2}.$$

Таким образом, $\Big(B^0\tilde{A}^{-1}\varphi, \chi_j\Big)_{H_2}$ — линейный ограниченный функционал на $\mathcal{R}(A)$. В силу теоремы Рисса существуют элементы $\beta_j \in \mathcal{R}(A)$ такие, что

$$-\Big(B^0\tilde{A}^{-1}\varphi, \chi_j\Big)_{H_2} = (\varphi, \beta_j)_{H_1}, \qquad \|\beta_j\|_{H_1} \leqslant k_1\|\chi_j\|_{H_2}.$$

Поэтому условия (2.2.20) примут вид

$$(\varphi, \beta_j)_{H_1} + (\psi, \chi_j)_{H_2} = 0, \quad j = 1, \ldots, p_0.$$

Здесь $\Phi_j = (\beta_j, \chi_j) \in \mathcal{H}$ — линейно независимы. Таким образом,

$$\operatorname{codim}\mathcal{R}\Big(\tilde{L}_0\Big) = p_0 = \operatorname{codim}\mathcal{R}(G_0).$$

Поэтому из (2.2.17) мы имеем

$$\operatorname{ind} G_0 = \operatorname{ind}\tilde{L}_0 = \operatorname{ind} L_0 + m. \tag{2.2.21}$$

Аналогично мы можем определить оператор $\tilde{L} : H \to \mathcal{R}(A) \times H_2$ по формуле $\tilde{L}u = (Au, Bu)$.

Рассмотрим систему уравнений

$$Au = \varphi, \qquad Bu = \psi, \tag{2.2.22}$$

где $\varphi \in \mathcal{R}(A)$ и $\psi \in H_2$. Пусть $w = u - \tilde{A}^{-1}\varphi$.

Тогда задача (2.2.22) примет вид

$$Aw = 0, \qquad Bw = \eta, \tag{2.2.23}$$

где $\eta = \psi - B\tilde{A}^{-1}\varphi$.

Поскольку оператор $G : \mathcal{N}(A) \to H_2$ фредгольмов, повторяя упомянутые выше рассуждения для задач (2.2.22) и (2.2.23), мы убеждаемся в том, что образ $\mathcal{R}\big(\tilde{L}\big)$ замкнут в $\mathcal{R}(A) \times H_2$ и

$$\operatorname{codim} \mathcal{R}\big(\tilde{L}\big) = p = \operatorname{codim} R(G).$$

Следовательно, образ $\mathcal{R}(L)$ замкнут в $\mathcal{H}$ и $\operatorname{codim} \mathcal{R}(L) = m+p < \infty$. Напомним, что $\mathcal{N}(L) = \mathcal{N}(G)$ и $\dim \mathcal{N}(G) < \infty$. Таким образом, оператор $L : H \to \mathcal{H}$ фредгольмов.

Далее, аналогично (2.2.17) мы получаем

$$\operatorname{ind} L = \operatorname{ind} \tilde{L} - m. \tag{2.2.24}$$

Из (2.2.24) следует, что

$$\operatorname{ind} G = \operatorname{ind} \tilde{L} = \operatorname{ind} L + m. \tag{2.2.25}$$

Очевидно, из соотношения $\operatorname{ind} G = \operatorname{ind} G_0$ и равенств (2.2.21), (2.2.25) вытекает, что $\operatorname{ind} L = \operatorname{ind} L_0$. $\square$

Пусть теперь

$$L, L_0 : W^{l+2m}(Q) \to \mathcal{W}^l(Q, \partial Q)$$

суть ограниченные операторы, заданные формулами

$$L = \{A, B\}, \qquad L_0 = \{A, B^0\},$$

где A — оператор из (2.2.1),

$$B = B^0 + B^1 + B^2,$$

$$B^0 u = \big((B_1^0 u)|_{\partial Q}, \dots, (B_m^0 u)|_{\partial Q}\big), \qquad B^j u = \big(B_1^j u, \dots, B_m^j u\big) \quad (j = 1, 2),$$

а операторы B^0_μ и B^j_μ ($j = 1, 2,\ \mu = 1, \dots, m$) те же, что в нелокальных условиях (2.2.2). Обозначим через G_0, G_1 и G сужения операторов B^0, $B^1 + B^2$ и B соответственно на $\mathcal{N}(A)$.

Теорема 2.2.2. *Пусть выполняются условия* 2.2.1–2.2.5. *Тогда операторы* $G_0, G_1 : \mathcal{N}(A) \to \mathcal{W}^l(Q, \partial Q)$ *суть фредгольмов и компактный операторы соответственно и* $G = G_0 + G_1$. *При этом оператор* $L : W^{l+2m}(Q) \to \mathcal{W}^l(Q, \partial Q)$ *фредгольмов и* $\operatorname{ind} L = \operatorname{ind} L_0$.

Доказательство. Из теорем C.6 и A.7 следует, что оператор L_0 фредгольмов. Поэтому по лемме 2.2.4 оператор $G_0 : \mathcal{N}(A) \to \mathcal{W}^l(Q, \partial Q)$ фредгольмов. Введем функцию $\xi \in \dot{C}^\infty(Q)$ по формуле (2.1.17). Из условий 2.2.3 и 2.2.4, априорной оценки (C.15) и формулы Лейбница мы получаем

$$\begin{aligned}\|B^1 u\|_{\mathcal{W}^l(\partial Q)} &\leqslant k_1 \|u\|_{W^{l+2m}(Q_\sigma)} \leqslant k_1 \|\xi u\|_{W^{l+2m}(Q)} \leqslant \\ &\leqslant k_2 \big(\|A^0(\xi u)\|_{W^l(Q)} + \|\xi u\|_{L_2(Q)}\big) \leqslant \\ &\leqslant k_3 \big(\|\xi A u\|_{W^l(Q)} + \|u\|_{W^{l+2m-1}(Q)}\big) = k_3 \|u\|_{W^{l+2m-1}(Q)}\end{aligned}$$

для всех $u \in \mathcal{N}(A)$.

Таким образом, из компактности оператора вложения $W^{l+2m}(Q)$ в $W^{l+2m-p}(Q)$ и условия 2.2.5 вытекает компактность оператора

$$G_1 : \mathcal{N}(A) \to \mathcal{W}^l(\partial Q),$$

где $p = \min\{p_0, 1\}$. Поскольку оператор $G_0 : \mathcal{N}(A) \to \mathcal{W}^l(Q, \partial Q)$ фредгольмов, по теореме A.7 оператор G также фредгольмов и $\operatorname{ind} G = \operatorname{ind} G_0$. Тогда в силу леммы 2.2.4 оператор

$$L : W^{l+2m}(Q) \to \mathcal{W}^l(Q, \partial Q)$$

фредгольмов и $\operatorname{ind} L = \operatorname{ind} L_0$. □

Заметим, что оператор L_0 в теореме 2.2.1 отличается от такого же оператора в теореме 2.2.2 на компактный оператор A^1. Поэтому теорема 2.2.1 следует из теоремы 2.2.2.

2.3. Эллиптические уравнения второго порядка в цилиндре с нелокальными условиями

Постановка задачи. В этом параграфе мы рассмотрим нелокальную эллиптическую задачу в цилиндре, которая является обобщением задачи (3), (4). В данном случае присутствуют нелокальные члены вблизи границы. Тем не менее мы получим теорему о разрешимости в пространствах Соболева, аналогичную теореме 2.1.2.

Рассмотрим уравнение

$$Au = A^0u + A^1u = f_0(x) \qquad (x \in Q) \tag{2.3.1}$$

с нелокальными краевыми условиями

$$\begin{gathered} B_\rho u = \bigl(u + B_\rho^1 u\bigr)|_{x_1=t_\rho} + B_\rho^2 u = f_\rho(x') \qquad (x' \in G,\ \rho = 1, 2), \\ u|_{[0,d]\times\partial G} = 0. \end{gathered} \tag{2.3.2}$$

Здесь $Q = (0, d) \times G \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ — ограниченная область (с границей $\partial G \in C^\infty$, если $n \geqslant 3$); $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x' = (x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$;

$$A^0 = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}, \tag{2.3.3}$$

$a_{ij} = a_{ji} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — вещественнозначные функции; $f_0 \in L_2(Q)$ и $f_\rho \in W^{3/2}(G)$ — комплекснозначные функции; $t_1 = 0$, $t_2 = d$.

Обозначим через $W_0^k(Q)$, $W_0^k(\tilde{Q}_\sigma)$ и $W_0^k(G)$ подпространства функций в $W^k(Q)$, $W^k(\tilde{Q}_\sigma)$ и $W^k(G)$ соответственно, следы которых равны нулю на $[0,d]\times\partial G$, $[\sigma,d-\sigma]\times\partial G$ и ∂G соответственно; здесь $k\geqslant 1$ и $\tilde{Q}_\sigma=(\sigma,d-\sigma)\times G$.

Будем предполагать, что выполнены следующие условия.

Условие 2.3.1. $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j>0$ для $x\in\overline{Q}$ и $0\neq\xi\in\mathbb{R}^n$.

Условие 2.3.2. $A^1: W^{2-r_0}(Q)\to L_2(Q)$ — линейный ограниченный оператор, где $0<r_0\leqslant 2$.

Условие 2.3.3. Существует $\sigma>0$ такое, что для любого $u\in W_0^s(Q)$

$$\|B_\rho^1 u\|_{W^s(Q)}\leqslant c_1\|u\|_{W^s(\tilde{Q}_\sigma)}, \tag{2.3.4}$$

где $s=0,2$, $\rho=1,2$ (рис. 2.3.1).

Условие 2.3.4. $B_\rho^2: W^{1/2-p_0}(Q)\to L_2(G)$ — линейные ограниченные операторы такие, что их сужения $B_\rho^2: W_0^{2-p_0}(Q)\to W_0^{3/2}(G)$ — также ограниченные операторы, где $0<p_0\leqslant 1/2$, $\rho=1,2$.

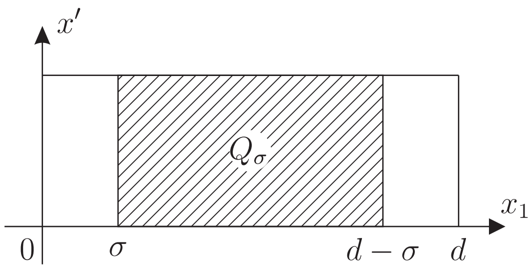

Рис. 2.3.1

Пример 2.3.1 (ср. пример 1.1.1)**.** Мы будем изучать задачу

$$Au=-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+a_0u=f_0(x)\qquad(x\in Q), \tag{2.3.5}$$

$$B_\rho u = u|_{x_1=t_\rho} + \sum_{j=1}^{k} b_{\rho j}(x')u|_{x_1=d_j} + \int_0^d e_\rho(x)u(x)dx_1 = f_\rho(x') \qquad (x' \in G,\ \rho = 1,2), \tag{2.3.6}$$

$$u|_{[0,d]\times\partial G} = 0.$$

Здесь $Q = (0,d) \times G \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ — ограниченная область (с границей $\partial G \in C^\infty$, если $n \geqslant 3$); $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x' = (x_2,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$; $a_{ij}, a_i, a_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — вещественнозначные функции; $a_{ij} = a_{ji}$ $(i,j = 1,\dots,n)$, $e_\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $b_{\rho j} \in C^\infty\big(\mathbb{R}^{n-1}\big)$ — комплекснозначные функции ($\rho = 1,2,\ j = 1,\dots,k$); $0 < d_j < d$, $t_1 = 0$, $t_2 = d$; $f_0 \in L_2(Q)$, $f_\rho \in W_0^{3/2}(G)$ (рис. 2.3.2).

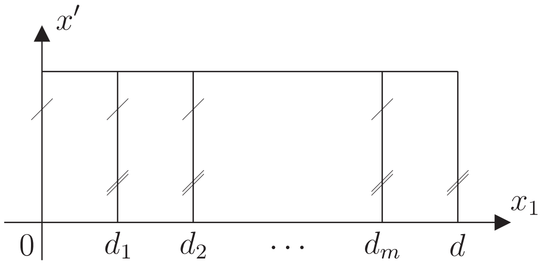

Рис. 2.3.2

Предположим, что оператор A^0, определенный формулой (2.3.3), удовлетворяет условию 2.3.1.

Лемма 2.3.1. *Операторы A и B_ρ можно представить в виде*

$$Au = A^0u + A^1u, \tag{2.3.7}$$

$$B_\rho u = \big(u + B_\rho^1 u\big)|_{x_1=t_\rho} + B_\rho^2 u, \tag{2.3.8}$$

где оператор A^0 задан формулой (2.3.3)*, а операторы A^1, B_ρ^1 и B_ρ^2 удовлетворяют условиям* 2.3.2, 2.3.3 *и* 2.3.4 *соответственно.*

Доказательство. Обозначим
$$A^1u = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + a_0(x)u(x).$$
Очевидно, оператор A^1 удовлетворяет условию 2.3.2 при $r_0 = 1$.

Введем функцию $\eta(x_1)$ такую, что $\eta \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R})$,
$$\begin{gathered} 0 \leqslant \eta(x_1) \leqslant 1 \text{ при } x_1 \in \mathbb{R}, \qquad \eta(x_1) = 1 \text{ при } x_1 \in (-\sigma, \sigma), \\ \eta(x_1) = 0 \text{ при } x_1 \notin (-2\sigma, 2\sigma), \end{gathered} \tag{2.3.9}$$
где $4\sigma = \min\limits_{\rho,j} |t_\rho - d_j|$. Положим
$$\big(B_1^1u\big)(x) = \begin{cases} \eta(x_1)\sum\limits_{j=1}^{k} b_{1j}(x')u(x_1 + d_j, x') & \\ & \text{при } (x \in (0, 4\sigma) \times G), \\ 0 & \text{при } x \in Q \setminus ((0, 4\sigma) \times G), \end{cases}$$
$$\big(B_2^1u\big)(x) = \begin{cases} \eta(x_1 - d)\sum\limits_{j=1}^{k} b_{2j}(x')u(x_1 - d + d_j, x') & \\ & \text{при } x \in (d - 4\sigma, d) \times G, \\ 0 & \text{при } x \in Q \setminus ((d - 4\sigma, d) \times G). \end{cases}$$
Аналогично доказательству леммы 2.1.1 мы можем показать, что операторы B_ρ^1 удовлетворяют условию 2.3.3. Из теорем B.5 и B.14 следует, что операторы B_ρ^2 удовлетворяют условию 2.3.4 при $p_0 = 1/2$. По построению операторы A и B_μ можно записать в виде (2.3.7) и (2.3.8) соответственно. $\square$

Разрешимость и спектр. Определим операторы
$$L = L(\lambda) : W_0^2(Q) \to \mathcal{W}^0(Q, G), \qquad L_0 = L_0(\lambda) : W_0^2(Q) \to \mathcal{W}^0(Q, G)$$
по формулам
$$Lu = \big(Au + \lambda^2u,\ B_1u,\ B_2u\big), \qquad L_0u = \big(A^0u + \lambda^2u,\ u|_{x_1=0},\ u|_{x_1=d}\big),$$

где $\mathcal{W}^0(Q,G) = L_2(Q) \times W_0^{3/2}(G) \times W_0^{3/2}(G)$.

Определение 2.3.1. Функцию $u \in W_0^2(Q)$ назовем *сильным решением* краевой задачи (2.3.1), (2.3.2) в $W_0^2(Q)$, если

$$L(\lambda)u = f,$$

где $f = (f_0, f_1, f_2) \in \mathcal{W}^0(Q,G)$.

Сформулируем основной результат этого параграфа.

Теорема 2.3.1. *Пусть выполняются условия* 2.3.1–2.3.4. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

(a) *Оператор* $L(\lambda) : W_0^2(Q) \to \mathcal{W}^0(Q,G)$, *соответствующий задаче* (2.3.1), (2.3.2), *фредгольмов и* $\operatorname{ind} L(\lambda) = 0$ *для всех* $\lambda \in \mathbb{C}$.

(b) *Для любого* $0 < \varepsilon < \pi/2$ *существует* $q = q(\varepsilon) > 0$ *такое, что для* $\lambda \in \omega_{\varepsilon,q}$ *оператор* $L(\lambda)$ *имеет ограниченный обратный* $L^{-1}(\lambda) : \mathcal{W}^0(Q,G) \to W_0^2(Q)$ *и для каждого* $u \in W_0^2(Q)$ *выполняется неравенство*

$$c_2 |||L(\lambda)u|||_{\mathcal{W}^0(Q,G)} \leqslant |||u|||_{W^2(Q)} \leqslant c_3 |||L(\lambda)u|||_{\mathcal{W}^0(Q,G)}, \qquad (2.3.10)$$

где $c_2, c_3 > 0$ *не зависят от* λ *и* u.

(c) *Оператор-функция*

$$\lambda \mapsto L^{-1}(\lambda) \in \mathcal{B}\big(\mathcal{W}^0(Q,G), W_0^2(Q)\big)$$

является конечно-мероморфной оператор-функцией в $\mathbb{C}$.

Из теоремы 2.3.1 и леммы 2.3.1 мы получаем следующее утверждение.

Следствие 2.3.1. *Пусть выполняется условие* 2.3.1. *Тогда оператор-функция* $\lambda \mapsto L(\lambda)$, *соответствующая задаче* (2.3.7), (2.3.8), *обладает свойствами* (a)–(c) *из теоремы* 2.3.1.

Введем неограниченный оператор

$$\mathcal{A}_B : \mathcal{D}(\mathcal{A}_B) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$$

с областью определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_B) = \big\{u \in W_0^2(Q) : B_\rho u = 0,\ \rho = 1, 2\big\}$$

по формуле $\mathcal{A}_B u = Au$.

Из теоремы 2.3.1 мы получим следующее утверждение (ср. доказательство следствия 1.1.1).

Следствие 2.3.2. *Пусть выполняются условия* 2.3.1–2.3.4. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

(a) *Оператор*

$$\mathcal{A}_B : \mathcal{D}(\mathcal{A}_B) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$$

фредгольмов, и $\operatorname{ind} \mathcal{A}_B = 0$.

(b) *Спектр* $\sigma(\mathcal{A}_B)$ *дискретный*; *для* $\eta \notin \sigma(\mathcal{A}_B)$ *резольвента*

$$R(\eta, \mathcal{A}_B) : L_2(Q) \to L_2(Q)$$

есть компактный оператор.

(c) *Для любого* $0 < \delta < \pi$ *все точки спектра* $\sigma(\mathcal{A}_B)$, *кроме, быть может, конечного их числа, принадлежат углу комплексной плоскости* $|\arg \lambda| < \delta$.

Пример 2.3.2 (ср. (3), (4))**.** Рассмотрим нелокальную краевую задачу

$$A^0 u = f_0(x) \qquad (x \in Q = (0,2) \times (0,1)), \tag{2.3.11}$$

$$\begin{gathered} u|_{x_1=0} = b_1 u|_{x_1=1},\ u|_{x_1=2} = b_2 u|_{x_1=1}, \\ u|_{x_2=0} = u|_{x_2=1} = 0, \end{gathered} \tag{2.3.12}$$

где $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, $f_0 \in L_2(Q)$, $a_{ij} = a_{ji} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, оператор A^0 вида (2.3.3) — сильно эллиптический в $\overline{Q}$ (рис. 2).

Из следствия 2.3.1 следует существование и единственность сильного решения $u \in W^2(Q)$ нелокальной задачи (2.3.11), (2.3.12) для

$$|b_1|, |b_2| \leqslant 1.$$

Действительно, пусть $u_0 \in W^2(Q)$ — сильное решение задачи (2.3.9), (2.3.10) при $f_0 = 0$. Тогда $u_0 \in W^k_{\mathrm{loc}}(Q)$ $(k = 4, 5, \dots)$. Отсюда и из теоремы вложения Соболева для $n = 2$ (см. теорему B.7) мы получим $u_0 \in C(\overline{Q}) \cap C^\infty(Q)$. Поэтому в силу принципа максимума $u_0 = 0$. Таким образом, из следствия 2.3.1 вытекает существование сильного решения задачи (2.3.9), (2.3.10).

Доказательство теоремы 2.3.1. Введем в пространствах

$$W^k(\Omega) \quad (\Omega = Q, G),$$

$$\mathcal{W}^0(Q, G) = L_2(Q) \times W_0^{3/2}(G) \times W_0^{3/2}(G)$$

эквивалентные нормы, зависящие от параметра λ,

$$|||u|||_{W^k(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{W^k(\Omega)} + |\lambda|^{2k}\|u\|^2_{L_2(\Omega)}\right)^{1/2},$$

$$|||f|||_{\mathcal{W}^0(Q,G)} = \left(\|f_0\|^2_{L_2(Q)} + \sum_{\rho=1,2} |||f_\rho|||^2_{W^{3/2}(G)}\right)^{1/2},$$

где $u \in W^k(\Omega)$, $f = (f_0, f_1, f_2) \in \mathcal{W}^0(Q, G)$.

Лемма 2.3.2. *Существует линейный оператор*

$$S : W_0^{3/2}(G) \times W_0^{3/2}(G) \to W_0^2(G)$$

такой, что $(Sw)|_{x_1 = t_\rho} = w_\rho$ $(\rho = 1, 2)$ *и*

$$|||Sw|||_{W^2(Q)} \leqslant c_4 \sum_{\rho=1,2} |||w_\rho|||_{W^{3/2}(G)}$$

для любого $w = (w_1, w_2) \in W_0^{3/2}(G) \times W_0^{3/2}(G)$ *и* $|\lambda| \geqslant 1 > 0$, *где* $c_4 > 0$ *не зависит от* w *и* λ.

Доказательство. Поскольку $\partial G \in C^\infty$, мы можем использовать разбиение единицы и распрямление границы ∂G. Таким образом, мы видим, что для доказательства леммы 2.3.2 достаточно построить линейный оператор $\hat{S} : W_0^{3/2}\big(\mathbb{R}_+^{n-1}\big) \to W_0^2(\mathbb{R}_+^n)$, ограниченный по норме $|||\cdot|||$ и такой, что $\big(\hat{S}u\big)|_{x_1=0,x_2>0} = u$ для всех $u \in W_0^{3/2}\big(\mathbb{R}_+^{n-1}\big)$. Здесь

$$\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1,\ldots,x_n) : x_1 > 0\}, \qquad R_+^{n-1} = \{x' = (x_2,\ldots,x_n) : x_2 > 0\},$$

$$W_0^k(\cdot) = \{u \in W^k(\cdot) : u|_{x_2=0} = 0\}.$$

Определим оператор $S_1 : L_2\big(\mathbb{R}_+^{n-1}\big) \to L_2\big(\mathbb{R}^{n-1}\big)$ по формуле

$$(S_1u)(x') = \begin{cases} u(x'), & x' \in \mathbb{R}_+^{n-1}, \\ -u(-x_2,x_3,\ldots,x_{n-1}), & x' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \mathbb{R}_+^{n-1}. \end{cases}$$

Очевидно, сужение оператора $S_1 : W_0^k\big(\mathbb{R}_+^{n-1}\big) \to W_0^k\big(\mathbb{R}^{n-1}\big)$ $(k = 1,2)$ является ограниченным оператором. Используя это свойство и интерполяционную теорему B.14, легко показать, что сужение оператора

$$S_1 : W_0^{3/2}\big(\mathbb{R}_+^{n-1}\big) \to W_0^{3/2}\big(\mathbb{R}^{n-1}\big)$$

является ограниченным оператором в норме $|||\cdot|||$.

Рассмотрим оператор $S_2 : W^{3/2}\big(\mathbb{R}^{n-1}\big) \to W^2(\mathbb{R}_+^n)$, определенный по формуле

$$S_2\varphi = F^{-1}(vF'\varphi).$$

Здесь $\varphi \in W^{3/2}\big(\mathbb{R}^{n-1}\big)$, $F'\varphi = (F'\varphi)(\xi')$ — преобразование Фурье функции $\varphi(x')$ по x'; $F'^{-1}\psi = \big(F'^{-1}\psi\big)(x')$ — обратное преобразование Фурье функции $\psi(\xi')$ по ξ',

$$v = \exp(-\omega x_1), \qquad \omega = \left(\sum_{j=2}^n \xi_j^2 + |\lambda|^2\right)^{1/2}, \quad \xi' = (\xi_2,\ldots,\xi_n) \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Легко увидеть, что

$$|||S_2\varphi|||_{W^2(\mathbb{R}_+^n)} \leqslant k_1|||\varphi|||_{W^{3/2}(\mathbb{R}^{n-1})}, \qquad (S_2\varphi)|_{x_1=0} = \varphi.$$

Поэтому оператор

$$\hat{S} = S_2 S_1 : W_0^{3/2}\big(\mathbb{R}_+^{n-1}\big) \to W^2(\mathbb{R}_+^n)$$

ограничен в норме $|||\cdot|||$. Преобразование Фурье (или обратное преобразование Фурье) по x' (или ξ') отображает нечетную по x_2 (или ξ_2) функцию в нечетную по ξ_2 (или x_2) функцию. Поэтому функция $S_2 S_1 u \in W^2(\mathbb{R}_+^n)$ нечетна по x_2. Следовательно, $(S_2 S_1 u)|_{x_2=0} = 0$. $\square$

Лемма 2.3.3. *Пусть выполняется условие* 2.3.1. *Тогда для любых* $0 < \varepsilon < \pi/2$ *и* $\lambda \in \omega_{\varepsilon,1}$ *существует единственное решение уравнения* $L_0(\lambda)u = f$ *при каждом* $f \in \mathcal{W}^0(Q, G)$ *и*

$$c_5 |||L_0(\lambda)u|||_{\mathcal{W}^0(Q,G)} \leqslant |||u|||_{W^2(Q)} \leqslant c_6 |||L_0(\lambda)u|||_{\mathcal{W}^0(Q,G)}, \qquad (2.3.13)$$

где $c_5 = c_5(\varepsilon) > 0$ *и* $c_6 = c_6(\varepsilon) > 0$ *не зависят от* λ *и* u.

Доказательство. 1. Докажем вначале это утверждение в случае

$$f_1 = f_2 = 0.$$

Введем неограниченный оператор

$$\mathcal{A}_0 : \mathcal{D}(\mathcal{A}_0) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$$

с областью определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_0) = W^2(Q) \cap \mathring{W}^1(Q)$$

по формуле $\mathcal{A}_0 u = A^0 u$ $(u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0))$.

В силу замечаний C.1, C.2 и теоремы Банаха об обратном операторе оператор $\mathcal{A}_0$ самосопряженный, $\sigma(\mathcal{A}_0) \subset (0, \infty)$ и

$$\|\mathcal{A}_0^{-1} f_0\|_{W^2(Q)} \leqslant k_1 \|f_0\|_{L_2(Q)} \qquad (2.3.14)$$

для всех $f_0 \in L_2(Q)$.

Рассмотрим уравнение

$$\mathcal{A}_0 u + \lambda^2 u = f_0, \tag{2.3.15}$$

где $\lambda \in \omega_{\varepsilon,1}$.

Из (2.3.14) следует, что

$$\|u\|_{W^2(Q)} \leqslant k_1\big(|\lambda|^2\|u\|_{L_2(Q)} + \|f_0\|_{L_2(Q)}\big). \tag{2.3.16}$$

С другой стороны, в силу теоремы С.4 множество собственных функций $\{v_s\}$ оператора $\mathcal{A}_0$ составляет ортонормированный базис в пространстве $L_2(Q)$, в то время как множество функций $\{v_s/\sqrt{\eta_s}\}$ является ортонормированным базисом в пространстве $\mathring{W}^1(Q)$ со скалярным произведением

$$(v, w)'_{\mathring{W}^1(Q)} = \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_Q a_{ij} v_{x_j} \overline{w}_{x_j} dx.$$

Здесь η_s — собственное значение оператора $\mathcal{A}_0$, соответствующее собственной функции v_s. Следовательно, для всех $f_0 \in L_2(Q)$ и $\lambda \in \omega_{\varepsilon,1}$

$$u = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(f_0, v_s)_{L_2(Q)}}{\eta_s + \lambda^2} v_s, \tag{2.3.17}$$

где ряд (2.3.17) сходится в пространстве $\mathring{W}^1(Q)$. Из (2.3.17) следует, что для всех $f_0 \in L_2(Q)$ и $\lambda \in \omega_{\varepsilon,1}$

$$|\lambda|^2\|u\|_{L_2(Q)} \leqslant k_2\|f_0\|_{L_2(Q)}, \tag{2.3.18}$$

где $k_2 = k_2(\varepsilon) > 0$ не зависит от λ и f_0.

Используя неравенства (2.3.16) и (2.3.18), мы получим

$$|||u|||_{W^2(Q)} \leqslant k_3\|f_0\|_{L_2(Q)} \tag{2.3.19}$$

для всех $f_0 \in L_2(Q)$ и $\lambda \in \omega_{\varepsilon,1}$, где $k_3 = k_3(\varepsilon) > 0$ не зависит от λ и f_0.

2. Из вышеупомянутых свойств оператора $\mathcal{A}_0$ и леммы 2.3.2 следует, что для всех $f \in \mathcal{W}^0(Q, G)$ и $\lambda \in \omega_{\varepsilon,1}$ существует единственное решение

уравнения $L_0 u = f$. Более того, это решение имеет вид

$$u = -R(\eta, \mathcal{A}_0)\left(f_0 - \left(A^0 - \eta I\right)Sf'\right) + Sf',$$

где $\eta = -\lambda^2$ и $f' = (f_1, f_2)$. Следовательно, в силу леммы 2.3.2 и неравенства (2.3.19) мы имеем

$$\begin{aligned} |||u|||_{W^2(Q)} &\leqslant k_4\bigl(\|f_0 - \left(A^0 - \eta I\right)Sf'\|_{L_2(Q)} + |||Sf'|||_{W^2(Q)}\bigr) \leqslant \\ &\leqslant k_5\bigl(\|f_0\|_{L_2(Q)} + |||Sf'|||_{W^2(Q)}\bigr) \leqslant k_6 |||f|||_{\mathcal{W}^0(Q,G)}, \end{aligned}$$

где $k_i = k_i(\varepsilon) > 0$ $(i = 4, 5, 6)$ не зависят от λ и f_0. Первое неравенство в (2.3.13) следует из теоремы B.6 и интерполяционных неравенств (B.20), (B.21). □

Обозначим $L_t = L_0 + t(L - L_0)$.

Лемма 2.3.4. *Пусть выполняются условия* 2.3.1–2.3.4. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $q = q(\varepsilon) > 0$ *такое, что если* $\lambda \in \omega_{\varepsilon,q}$ *и* $0 \leqslant t \leqslant 1$, *то для* $u \in W_0^2(Q)$ *мы имеем оценку*

$$c_7 |||L_t u|||_{\mathcal{W}^0(Q,G)} \leqslant |||u|||_{W^2(Q)} \leqslant c_8 |||L_t u|||_{\mathcal{W}^0(Q,G)}, \tag{2.3.20}$$

где $c_7 = c_7(\varepsilon) > 0$ *и* $c_8 = c_8(\varepsilon) > 0$ *не зависят от* λ, t *и* u.

Доказательство. Обозначим $L_t u = f$. В силу леммы 2.3.3 для любого $\varepsilon > 0$ и $\lambda \in \omega_{\varepsilon,1}$

$$\begin{aligned} |||u|||_{W^2(Q)} \leqslant c_6 \Biggl(& \|f_0 - tA^1 u\|_{L_2(Q)} + \\ & + \sum_{\rho=1,2} \Bigl|\Bigl|\Bigl| f_\rho - t\bigl(B_\rho^1 u\bigr)|_{x_1 = t_\rho} - tB_\rho^2 u \Bigr|\Bigr|\Bigr|_{W^{3/2}(G)} \Biggr). \end{aligned}$$

Из условий 2.3.2, 2.3.4 и неравенства (B.20) мы получим

$$\|tA^1 u\|_{L_2(Q)} \leqslant k_1 |\lambda|^{-r_0} |||u|||_{W^2(Q)}, \tag{2.3.21}$$

$$|||tB_\rho^2 u|||_{W^{3/2}(G)} \leqslant k_2 |\lambda|^{-p_0} |||u|||_{W^2(Q)}, \tag{2.3.22}$$

где $k_1,\ k_2 > 0$ не зависят от u, t и λ.

Введем функцию $\xi \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}^1)$ такую, что

$$0 \leqslant \xi(x_1) \leqslant 1 \quad (x_1 \in \mathbb{R}^1), \qquad \xi(x_1) = 1 \quad (x_1 \in (\sigma, d-\sigma)),$$
$$\xi(x_1) = 0 \quad (x_1 \notin (\sigma/2, d-\sigma/2)). \tag{2.3.23}$$

В силу условия 2.3.3 и неравенств (B.20), (B.21) мы имеем

$$|||t(B_\rho^1 u)|_{x_1=t_\rho}|||_{W^{3/2}(G)} \leqslant k_4 |||u|||_{W^2(\tilde{Q}_\sigma)}, \tag{2.3.24}$$

где $k_4 > 0$ не зависит от u, t и λ.

Из формулы (2.3.23), леммы 2.3.3, формулы Лейбница и неравенств (2.3.21), (B.20) мы получим

$$\begin{aligned} |||u|||_{W^2(\tilde{Q}_\sigma)} &\leqslant |||\xi u|||_{W^2(Q)} \leqslant k_5 \|A^0(\xi u)\|_{L_2(Q)} \leqslant \\ &\leqslant k_6 \left(\|\xi A^0 u\|_{L_2(Q)} + \sum_{|\alpha|=1,2} \sum_{|\beta| \leqslant 2-|\alpha|} \|D^\alpha \xi D^\beta u\|_{L_2(Q)} \right) \leqslant \\ &\leqslant k_7 \Big(\big\|(A^0 + tA^1)u\big\|_{L_2(Q)} + \big(|\lambda|^{-r_0} + |\lambda|^{-1}\big) |||u|||_{W^2(Q)} \Big), \end{aligned} \tag{2.3.25}$$

где $k_5 = k_5(\varepsilon) > 0$, $k_6 = k_6(\varepsilon) > 0$ и $k_7 = k_7(\varepsilon) > 0$ не зависят от u, t и λ. Тогда, выбирая $q > 1$ так, что

$$c_6\big((k_1 + 2k_4k_7)q^{-r_0} + 2k_2 q^{-p_0} + 2k_4k_7 q^{-1}\big) < \frac{1}{2},$$

мы получим второе неравенство (2.3.20) для $\lambda \in \omega_{\varepsilon,q}$. Первое неравенство в (2.3.20) очевидно. □

Доказательство теоремы 2.3.1. Из лемм 2.3.3, 2.3.4 и теоремы A.9 мы получим утверждение (b). Используя теоремы B.8, A.1 и A.10, аналогично доказательству теоремы 2.1.1 мы докажем утверждения (a) и (c). □

Гладкость обобщенных решений. В этом параграфе мы рассмотрим частный случай задачи (2.3.5), (2.3.6), имеющий важное приложение к теории эллиптических дифференциально-разностных уравнений (см. [54, гл. 5, § 23]). Мы докажем, что обобщенное решение $u \in W^1(Q)$ такой задачи (в смысле интегрального тождества) сохраняет гладкость, т. е. $u \in W^2(Q)$. Поэтому обобщенное решение этой задачи является сильным решением.

Мы будем изучать уравнение (2.3.5) с нелокальными краевыми условиями

$$u|_{x_1=0} = \sum_{j=1}^{k} b_{1j} u|_{x_1=d_j}, \qquad u|_{x_1=d} = \sum_{j=1}^{k} b_{2j} u|_{x_1=d_j}, \qquad u|_{[0,d]\times\partial G} = 0. \tag{2.3.26}$$

Здесь $b_{\rho j} \in \mathbb{C}$ ($\rho = 1, 2,\ j = 1, \dots, k$), $0 = d_0 < d_1 < \dots < d_k < d_{k+1} = d$.

Определим неограниченный линейный оператор

$$\mathcal{A}_B : \mathcal{D}(\mathcal{A}_B) \subset L_2(Q) \to L_2(Q),$$

действующий в пространстве распределений $\mathcal{D}'(Q)$ по формуле

$$\mathcal{A}_B u = Au \qquad \big(u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_B) = \{u \in W_B^1(Q) : \mathcal{A}_B u \in L_2(Q)\}\big).$$

Здесь $W_B^1(Q)$ — подпространство функций в $W^1(Q)$, удовлетворяющих нелокальным условиям (2.3.26), $B = \{b_{\rho j}\}$.

Определение 2.3.2. Функция $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_B)$ называется *обобщенным решением* задачи (2.3.5), (2.3.26), если

$$\mathcal{A}_B u = f_0. \tag{2.3.27}$$

Это определение эквивалентно следующему.

Определение 2.3.3. Функция $u \in W_B^1(Q)$ называется *обобщенным решением* задачи (2.3.5), (2.3.26), если для всех $\psi \in \mathring{W}^1(Q)$

$$\int\limits_Q \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_j} \overline{\psi}_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} \overline{\psi} + a_0 u \overline{\psi} \right) dx = \int\limits_Q f_0 \overline{\psi} dx, \tag{2.3.28}$$

где $f_0 \in L_2(Q)$.

Лемма 2.3.5. *Предположим, что выполняется условие* 2.3.1. *Тогда* $\mathcal{D}(\mathcal{A}_B) = W_B^1(Q) \cap W^2(Q)$.

Доказательство. Достаточно доказать, что если $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_B)$ — обобщенное решение задачи (2.3.5), (2.3.26), то $u \in W^2(Q)$.

Введем функцию w по формуле

$$w(x) = \eta(x_1) \sum_{j=1}^{k} b_{1j} u(x_1 + d_j, x') + \eta(x_1 - d) \sum_{j=1}^{k} b_{2j} u(x_1 + d_j - d, x'), \tag{2.3.29}$$

где функция $\eta \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R})$ задана формулой (2.3.9).

Поскольку $\partial G \in C^\infty$ и $u|_{[0,d]\times\partial G} = 0$, в силу теоремы C.5 и леммы C.1 о гладкости обобщенных решений эллиптических уравнений

$$u \in W^2((\varepsilon, d - \varepsilon) \times G)$$

для любого $\varepsilon > 0$. Следовательно, $w \in W^2(Q)$. Таким образом,

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij} \frac{\partial (u - w)}{\partial x_j} \in L_2(Q),$$

и в силу (2.3.26), (2.3.29) $u - w \in \mathring{W}^1(Q)$. Применяя теорему C.6 и замечание C.2, мы получим $u - w \in W^2(Q)$, т. е. $u \in W^2(Q)$. $\square$

Нелокальные условия, связывающие различные части границы. В этом пункте мы покажем, что обобщение нелокальных краевых условий (1.3.17), (1.3.18) на многомерный случай приводит к некорректно поставленной задаче, а именно гладкость обобщенных решений таких задач может нарушаться вблизи множеств $\{0\} \times G$ и $\{d\} \times G$. Более того, спектр соответствующего оператора может совпадать со всей комплексной плоскостью $\mathbb{C}$.

Рассмотрим уравнение (2.3.5) с нелокальными краевыми условиями

$$u|_{x_1=d} = \sum_{0\leqslant j\leqslant k,\, j\neq m} b_{1j} u|_{x_1=d_j}, \qquad u|_{x_1=d_m} = \sum_{1\leqslant j\leqslant k,\, j\neq m} b_{2j} u|_{x_1=d_j},$$
$$u|_{[0,d]\times\partial G} = 0. \tag{2.3.30}$$

Здесь $m \in \mathbb{N}$ — фиксированное число такое, что $1 \leqslant m \leqslant k$, $b_{\rho j} \in \mathbb{C}$ ($j = 0, \dots, k$, $j \neq m$, если $\rho = 1$, и $j = 1, \dots, k$, $j \neq m$, если $\rho = 2$), $0 = d_0 < d_1 < \dots < d_k < d_{k+1} = d$.

Определим неограниченный линейный оператор

$$\mathcal{A}_{B,m} : \mathcal{D}(\mathcal{A}_{B,m}) \subset L_2(Q) \to L_2(Q),$$

действующий в пространстве обобщенных функций $\mathcal{D}'(Q)$ по формуле

$$\mathcal{A}_{B,m} u = Au \quad \bigl(u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{B,m}) = \{u \in W^1_{B,m}(Q) : \mathcal{A}_{B,m} u \in L_2(Q)\}\bigr).$$

Здесь $W^1_{B,m}(Q)$ — подпространство функций в $W^1(Q)$, удовлетворяющих нелокальным условиям (2.3.30), $B = \{b_{\rho j}\}$.

Определение 2.3.4. Функция $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{B,m})$ называется *обобщенным решением* задачи (2.3.5), (2.3.30) если

$$\mathcal{A}_{B,m} u = f_0. \tag{2.3.31}$$

Это определение эквивалентно следующему.

Определение 2.3.5. Функция $u \in W^1_{B,m}(Q)$ называется *обобщенным решением* задачи (2.3.5), (2.3.30), если для всех $\psi \in \mathring{W}^1(Q)$ справедливо интегральное тождество (2.3.28).

Лемма 2.3.6. *Пусть выполняется условие* 2.3.1. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

(a) $\mathcal{D}(\mathcal{A}_{B,m}) \subset \{u \in W^1_{B,m}(Q) : u \in W^2(\tilde{Q}_\sigma)\}$ *для любого* $0 < \sigma$;

(b) *существует* $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{B,m})$ *такое, что* $u \notin W^2(Q)$.

Доказательство. Утверждение (a) следует из теоремы C.5 и леммы C.1. Для доказательства утверждения (b) введем функцию

$$\psi \in W^{1/2}(G) \setminus W^{3/2}(G)$$

так, что $\operatorname{supp}\psi \subset G$. Очевидно, существует единственное обобщенное решение $w \in W^1(Q)$ задачи

$$A^0 w = 0 \qquad (x \in Q), \tag{2.3.32}$$

$$w|_{x_1=0} = \psi, \qquad w|_{x_1=d} = b_{10}\psi, \qquad w|_{[0,d]\times\partial G} = 0 \tag{2.3.33}$$

в смысле интегрального тождества. Поскольку $\psi \notin W^{3/2}(G)$, мы имеем $w \notin W^2(Q)$. Положим $u(x) = (\eta(x_1) + \eta(x_1 - d))w(x)$, где η задано формулой (2.3.9). Очевидно, $u \in W^1_{B,m}(Q)$ и $\mathcal{A}_{B,m}u \in L_2(Q)$. Поэтому $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{B,m})$. С другой стороны, по построению $u \notin W^2(Q)$. $\square$

Следующий пример показывает, что спектр $\sigma(\mathcal{A}_{B,m})$ может занимать всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$.

Пример 2.3.3. Рассмотрим нелокальную краевую задачу (ср. пример 2.3.2)

$$-\triangle u = f_0(x) \qquad (x \in Q = (0,2) \times (0,1)), \tag{2.3.34}$$

$$u|_{x_1=0} = u|_{x_1=2}, \qquad u|_{x_1=1} = 0, \qquad u|_{x_2=0} = u|_{x_2=1} = 0, \tag{2.3.35}$$

где $f_0 \in L_2(Q)$ (рис. 2.3.3).

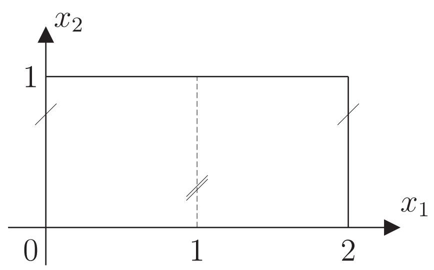

Рис. 2.3.3

Введем неограниченный линейный оператор

$$\mathcal{A}_{B,1} : \mathcal{D}(\mathcal{A}_{B,1}) \subset L_2(Q) \to L_2(Q),$$

действующий в пространстве обобщенных функций $\mathcal{D}'(Q)$ по формуле

$$\mathcal{A}_{B,1}u = -\triangle u \qquad \big(u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{B,1}) = \{u \in W^1_{B,1}(Q) : \mathcal{A}_{B,1}u \in L_2(Q)\}\big). \tag{2.3.36}$$

Здесь $W^1_{B,1}(Q)$ — подпространство функций в $W^1(Q)$, удовлетворяющих условиям (2.3.35).

Изучим спектр $\sigma(\mathcal{A}_{B,1})$. Очевидно, числа $\pi^2\big(m^2+l^2\big)$ являются собственными значениями оператора $\mathcal{A}_{B,1}$; им соответствуют собственные функции $\sin \pi m x_1 \sin \pi l x_2$ $(m, l = 1, 2, \dots)$.

Предположим, что $\lambda \neq \pi^2\big(m^2+l^2\big)$. Используя метод разделения переменных, можно показать, что уравнение

$$(\mathcal{A}_{B,1} - \lambda I)u = f_0$$

имеет единственное решение для любой $f_0 \in \mathcal{P}$, где $\mathcal{P}$ — множество линейных комбинаций функций

$$e^{i\pi k x_1} \sin \pi s x_2 \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,\ s = 1, 2, \dots).$$

Для достаточно больших s решение уравнения

$$(\mathcal{A}_{B,1} - \lambda I)u_s = f_s \qquad (f_s = \sin \pi s x_2)$$

имеет вид $u_s = 2^{-1}\omega_s^{-2}\big(2 - e^{\omega_s(x_1-1)} - e^{-\omega_s(x_1-1)}\big)\sin \pi s x_2$, где

$$\omega_s = \sqrt{\pi^2 s^2 - \lambda}, \quad r_s = \operatorname{Re}\omega_s > 0.$$

В частности, отсюда следует, что образ $\mathcal{R}(\mathcal{A}_{B,1} - \lambda I)$ плотен в $L_2(Q)$.

Легко показать, что

$$\|u_s\|^2_{L_2(Q)} = 2^{-2}|\omega_s|^{-4} r_s^{-1}\big(e^{2r_s} + o\big(e^{2r_s}\big)\big) \to +\infty \quad \text{при} \quad s \to \infty$$

и $\|f_s\|_{L_2(Q)} = 1$. Значит, $\lambda \in \sigma(\mathcal{A}_{B,1})$. Таким образом, $\sigma(\mathcal{A}_{B,1}) = \mathbb{C}$. Очевидно, если оператор $\mathcal{A}_1$ есть некоторое расширение оператора $A_{B,1}$, то $\sigma(\mathcal{A}_1) = \mathbb{C}$.

Примечания к главе 2

Эллиптические уравнения с нелокальными краевыми условиями, связывающими значения функции на границе со значением на некотором многообразии внутри области (см. (1), (2)), впервые рассматривались А. В. Бицадзе и А. А. Самарским [4]. Для уравнения Пуассона (3) в прямоугольнике с краевыми условиями (4) при $\gamma_1 = 0$ и $\gamma_2 = 1$ в этой статье было доказано существование и единственность классического решения. Вопрос о разрешимости нелокальных эллиптических задач в общем случае был сформулирован как нерешенная проблема [27, 47].

В случае когда многообразия $\omega_s(\partial Q)$, являющиеся носителем нелокальных членов, лежат строго внутри области и не пересекаются, нелокальные задачи рассматривались в [26]. В случае пересекающихся многообразий этот метод неприменим из-за возникновения угловых точек и ребер при пересечении многообразий $\omega_s(\partial Q)$.

Единый метод исследования нелокальных эллиптических задач с носителем нелокальных членов внутри области был разработан в [28, 53]. Изложение гл. 2 основано на этих работах, а также результатах монографии [33]. Там же имеется подробный обзор литературы.

Упражнения к главе 2

1. Пусть Q — круг единичного радиуса с центром в начале координат. Рассмотрим нелокальную эллиптическую задачу

$$\Delta u(x) = f(x) \quad (x \in Q),$$
$$u(x)|_{\partial Q} - b(x)u(x_1/2, x_2/3)|_{\partial Q} = u_0(x) \quad (x \in \partial Q),$$

где $b \in C^\infty(\overline{Q})$.

a) Построить линейный оператор B, действующий ограниченным образом из $L_2(Q)$ в $L_2(Q)$ и из $W^2(Q)$ в $W^2(Q)$, такой, что

$$Bu|_{\partial Q} = \big(b(x)u(x_1/2, x_2/3)\big)\big|_{\partial Q}$$

и

$$\|Bu\|_{W^s(Q)} \leqslant c\|u\|_{W^s(Q_\sigma)}, \quad s = 0, 2,$$

где $Q_\sigma = \{x \in Q : \rho(x, \partial Q) > \sigma\}$, $\sigma, c > 0$ не зависят от u. Обосновать выбор σ.

b) Найти носитель нелокального оператора B.

2. Рассмотрим неограниченный оператор $\mathcal{A}_B : \mathcal{D}(\mathcal{A}_B) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$, заданный следующим образом:

$$\mathcal{A}_B u = \Delta u \qquad (u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_B)),$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_B) = \{u \in W^2(Q) : u|_{\partial Q} - Bu = 0\},$$

где B — оператор, построенный в упражнении 1. Является ли оператор $\mathcal{A}_B$ фредгольмовым? Если да, чему равен его индекс? Будет ли спектр оператора $\mathcal{A}_B$ дискретным? Содержит ли спектр точку 0?

3. Пусть Q — круг единичного радиуса с центром в начале координат. Рассмотрим нелокальную эллиптическую задачу

$$\Delta u(x) = f(x) \quad (x \in Q),$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(x) + b_1(x)\frac{\partial u}{\partial r}(x/2) - b_2(x)u(x_1/2, x_2/5 + 1/4) = u_0(x) \quad (x \in Q),$$

где $b_1, b_2 \in C^\infty(\overline{Q})$, r, φ — полярные координаты точки x.

a) Построить линейный оператор B, действующий ограниченным образом из $W^1(Q)$ в $L_2(Q)$ и из $W^2(Q)$ в $W^1(Q)$, такой, что

$$Bu|_{\partial Q} = \left(b_1(x)\frac{\partial u}{\partial r}(x/2) - b_2(x)u(x_1/2, x_2/5 + 1/4)\right)\Bigg|_{\partial Q}$$

и

$$\|Bu\|_{W^{s-1}(\partial Q)} \leqslant c\|u\|_{W^s(Q_\sigma)}, \quad s = 1, 2,$$

где $Q_\sigma = \{x \in Q : \rho(x, \partial Q) > \sigma\}$, $\sigma, c > 0$ не зависят от u. Обосновать выбор σ.

b) Найти носитель нелокального оператора B.

4. Рассмотрим неограниченный оператор $\mathcal{A}_B : \mathcal{D}(\mathcal{A}_B) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$, заданный следующим образом:

$$\mathcal{A}_B u = \Delta u \qquad (u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_B)),$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_B) = \left\{u \in W^2(Q) : \frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{\partial Q} + Bu = 0\right\},$$

где B — оператор, построенный в упражнении 3. Является ли оператор $\mathcal{A}_B$ фредгольмовым? Если да, чему равен его индекс? Будет ли спектр оператора $\mathcal{A}_B$ дискретным? Содержит ли спектр точку 0?

5. Методом Фурье решить нелокальную эллиптическую краевую задачу в круге

$$\Delta u(x) = 0 \quad (|x| < 2),$$

$$u(x) - au(x/2) = u_0(\varphi) \quad (|x| = 2),$$

где a — вещественный параметр, r, φ — полярные координаты точки x, $u_0(\varphi) = 1 + \cos\varphi$. При каких значениях параметра a задача с однородным краевым условием ($u_0(\varphi) \equiv 0$) имеет нетривиальное решение? При каких значениях параметра a задача разрешима для любой гладкой 2π-периодической функции $u_0(\varphi)$?

6. Доказать, что для операторов A^0 и B_μ^0 ($\mu = 1, \dots, m$), удовлетворяющих условиям 2.1.6 и 2.1.7, выполнены также условия 2.1.1 и 2.1.2 при

$$\lambda \in \omega_\varepsilon = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg\lambda| \leqslant \varepsilon \text{ или } |\arg\lambda - \pi| \leqslant \varepsilon\},$$

где $0 < \varepsilon < \dfrac{\pi}{2m}$ произвольно.

7. Привести подробное доказательство следствия 2.1.2.

8. Привести подробное доказательство леммы 2.2.2.

9. Доказать следующие неравенства:

a) первое из неравенств (2.3.13);

b) неравенство (2.3.18).

10. Доказать первое неравенство в (2.3.20).

11. Привести пример нелокальной краевой задачи в цилиндре, удовлетворяющей условиям 2.3.1–2.3.4 и такой, что точка 0 принадлежит спектру задачи. Рассмотреть следующие два случая:

a) краевые условия не содержат интеграл от неизвестной функции;

b) краевые условия содержат интеграл от неизвестной функции.

12. Доказать эквивалентность определений 2.3.2 и 2.3.3.

13. Доказать эквивалентность определений 2.3.4 и 2.3.5.

Глава 3

Нелокальные проблемы процессов распределения тепла

3.1. Постановка задачи

В этой главе мы рассмотрим приложения нелокальных задач, возникающие при моделировании процессов распределения тепла в химических реакторах и системах климат-контроля. Будут изучены вопросы разрешимости и периодичности решений задачи. Задача будет заключаться в регулировании температуры внутри области (например химического реактора) посредством термоэлементов, установленных на границе области. При этом обратная связь осуществляется на основании показателей температурных датчиков, расположенных внутри области (рис. 6).

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$ — ограниченная область с границей Γ класса C^∞. Обозначим через $w(x,t)$ температуру в точке $x \in Q$ в момент времени $t \geqslant 0$. Предположим, что функция $w(x,t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$w_t(x,t) = \Delta w(x,t) - p(x)w(x,t) \quad ((x,t) \in Q_T) \tag{3.1.1}$$

с начальным условием

$$w(x,0) = \varphi(x) \quad (x \in Q), \tag{3.1.2}$$

где $Q_T = Q \times (0,T)$, $T > 0$, $p \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $p(x) \geqslant 0$ и $\varphi \in L_2(Q)$ — заданная вещественнозначная функция (рис. 3.1.1).

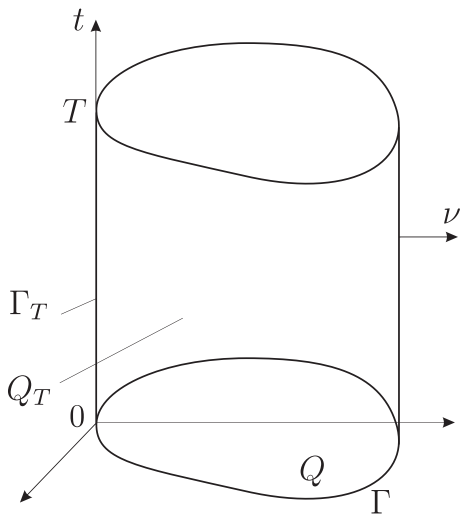

Рис. 3.1.1. Области Q и Q_T

Краевое условие содержит вещественнозначную функцию управления $u(t)$ (ее мы определим ниже), которая регулирует соответственно температуру на границе, поток через границу или температуру окружающей среды:

$$-\gamma\frac{\partial w}{\partial \nu} = \sigma(x)(w(x,t) - w_e(x)) - K(x)(u(t) - u_c) \quad ((x,t) \in \Gamma_T), \tag{3.1.3}$$

где $\Gamma_T = \Gamma \times (0,T)$, ν — внешняя нормаль к Γ_T в точке (x,t), $\gamma \geqslant 0$, $\sigma, w_e, K \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — вещественнозначные функции, $\sigma(x) \geqslant 0$, $\sigma(x) \geqslant \sigma_0 > 0$ при $\gamma = 0$, $u_c > 0$.

Для любой функции $v(x,t)$ введем обозначение

$$v_m(t) = \int\limits_Q m(x)v(x,t)\,dx,$$

где $m \in L_\infty(Q)$. Если $w(x,t)$ соответствует температуре в области Q, то $w_m(t)$ — «средняя» температура по области (с весом $m(x)$). В конкретных приложениях свойства функции $m(x)$ определяются свойствами температурных датчиков, расположенных внутри области.

Пусть функция управления $u(t)$ удовлетворяет задаче Коши

$$u'(t) + au(t) = H(w_m, t) \quad (t \in (0, T)), \tag{3.1.4}$$

$$u(0) = u_0, \tag{3.1.5}$$

где $a > 0$, $u_0 \in \mathbb{R}$ и w удовлетворяет соотношениям (3.1.1)–(3.1.3). Функционал $H(g, t)$ ($g \in C[0, T]$) определен при $t \geqslant 0$ следующим образом (ср. [19, гл. 5, § 28]):

$$H(g,t) = \begin{cases} 1, & \text{если } g(t) \leqslant w_1, \\ 1, & \text{если } g(\tau) \in (w_1, w_2) \text{ при } \tau \in [0, t], \\ 1, & \text{если } g(t) \in (w_1, w_2) \text{ и } \exists t_1 \in [0, t) : \\ & g(t_1) = w_1 \text{ и } g(t) \in (w_1, w_2) \ \text{ при } t \in (t_1, t], \\ 0, & \text{если } g(t) \in (w_1, w_2) \text{ и } \exists t_1 \in [0, t) : \\ & g(t_1) = w_2 \text{ и } g(t) \in (w_1, w_2) \ \text{ при } t \in (t_1, t], \\ 0, & \text{если } g(t) \geqslant w_2, \end{cases} \tag{3.1.6}$$

где w_1 и w_2 ($w_1 < w_2$) фиксированы.

Таким образом, если $g(t) \in (w_1, w_2)$, то значение функционала H в момент t такое же, как и в момент, «предшествующий» t. Если $g(t)$ достигает нижнего порогового значения w_1 в момент t и значение функционала H равнялось 0 в момент, «предшествующий» t, то функционал «переключается» на значение, равное 1 (в противном случае переключения не происходит и значение функционала остается равным 1). Если $g(t)$ достигает верхнего порогового значения w_2 в момент t и значение функционала H равнялось 1 в момент, «предшествующий» t, то функционал переключается на значение, равное 0 (в противном случае переключения не происходит и значение функционала остается равным 0). Зависимость функционала H от средней температуры w_m изображена на рис. 3.1.2.

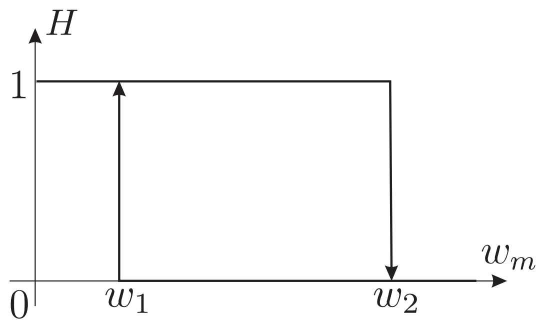

Рис. 3.1.2. Зависимость функционала H от средней температуры w_m

Для определенности будем считать, что

$$w_1 \leqslant \int\limits_Q m(x)\varphi(x)\,dx < w_2, \tag{3.1.7}$$

т. е. в начальный момент времени значение средней температуры лежит в интервале $[w_1, w_2)$.

Через $W^1_\infty(0,T)$ мы обозначим пространство абсолютно непрерывных функций, имеющих обобщенную производную из $L_\infty(a,b)$, с нормой

$$\|u\|_{W^1_\infty(a,b)} = \max_{t\in[a,b]} |u(t)| + \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in(a,b)} |u'(t)|. \tag{3.1.8}$$

Обозначим через $W^{2,1}(Q_T)$ анизотропное пространство Соболева с нормой

$$\|w\|_{W^{2,1}(Q_T)} = \left(\int\limits_0^T \|w(\cdot,t)\|^2_{W^2(Q)}\,dt + \int\limits_0^T \|w_t(\cdot,t)\|^2_{L_2(Q)}\,dt\right)^{1/2}.$$

Положим

$$\mathcal{W}(Q_T) = W^{2,1}(Q_T) \times W^1_\infty(0,T).$$

Определение 3.1.1. Пара функций $(w,u) \in \mathcal{W}(Q_T)$ называется *сильным решением* задачи (3.1.1)–(3.1.5) в Q_T, если функция w удовлетворяет уравнению (3.1.1) п. в. в Q_T и условиям (3.1.2), (3.1.3) в смысле следов, а функция u удовлетворяет уравнению (3.1.4) п. в. на интервале $(0,T)$ и условию (3.1.5).

Определение 3.1.2. Пусть пара $(w, u) \in \mathcal{W}(Q_T)$ есть сильное решение задачи (3.1.1)–(3.1.5) в Q_T. Момент $t_1 \in (0, T)$ называется *моментом переключения*, если либо

$$\exists \delta = \delta(t_1) : H(w_m, \tau) = 1 \text{ при } t_1 - \delta < \tau < t_1 \text{ и } w_m(t_1) = w_2,$$

либо

$$\exists \delta = \delta(t_1) : H(w_m, \tau) = 0 \text{ при } t_1 - \delta < \tau < t_1 \text{ и } w_m(t_1) = w_1.$$

Таким образом, в момент переключения функционал H меняет свое значение («переключается»).

3.2. Существование и единственность сильного решения

Докажем существование и единственность сильного решения задачи (3.1.1)–(3.1.5) в смысле определения 3.1.1.

Обозначим через $\mathcal{V}$ замкнутое аффинное многообразие в $W^1(Q) \times \mathbb{R}$ вида

$$\mathcal{V} = W^1(Q) \times \mathbb{R},$$

если $\gamma > 0$, и

$$\mathcal{V} = \{(\varphi, u_0) \in W^1(Q) \times \mathbb{R} : \\ \sigma(x)(\varphi(x) - w_e(x)) - K(x)(u_0 - u_c) = 0 \ (x \in \Gamma)\},$$

если $\gamma = 0$.

Теорема 3.2.1. *Пусть* $(\varphi, u_0) \in \mathcal{V}$ *и выполнено условие* (3.1.7). *Тогда существует единственное сильное решение* $(w, u) \in \mathcal{W}(Q_T)$ *задачи* (3.1.1)–(3.1.5) *в* Q_T. *При этом множество моментов переключения на интервале* $(0, T)$ *конечно или пусто.*

Вначале мы докажем некоторые вспомогательные результаты. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$w_{0t}(x,t) = \Delta w_0(x,t) - p(x)w_0(w,t) \quad ((x,t) \in Q_T), \tag{3.2.1}$$

$$w_0(x,0) = \varphi(x) \quad (x \in Q), \tag{3.2.2}$$

$$-\gamma \frac{\partial w_0}{\partial \nu} = \sigma(x)w_0(x,t) + k_0(x)\psi(t) + k_1(x) \quad ((x,t) \in \Gamma_T), \tag{3.2.3}$$

где $\varphi \in W^1(Q)$, $k_0, k_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in W^1_\infty(0,T)$ — вещественнозначные функции.

При $\gamma = 0$ рассмотрим замкнутое аффинное многообразие в $W^1(Q)$, зависящее от функции $\psi \in W^1_\infty(0,T)$, вида

$$W^1_\psi(Q) = \{\varphi \in W^1(Q) : \sigma(x)\varphi(x) + k_0(x)\psi(0) + k_1(x) = 0 \ (x \in \Gamma)\}.$$

Определение 3.2.1. Функция $w \in W^{2,1}(Q_T)$ называется *сильным решением* задачи (3.2.1)–(3.2.3) в Q_T, если функция w удовлетворяет уравнению (3.2.1) п. в. в Q_T и условиям (3.2.2), (3.2.3) в смысле следов.

Лемма 3.2.1. *Для любых функций $\psi \in W^1_\infty(0,T)$ и*

$$\varphi \in \begin{cases} W^1(Q), & \text{если } \gamma > 0, \\ W^1_\psi(Q), & \text{если } \gamma = 0, \end{cases}$$

существует единственное сильное решение $w_0 \in W^{2,1}(Q_T)$ задачи (3.2.1)–(3.2.3) *в Q_T. При этом*

$$\|w_0\|_{W^{2,1}(Q_T)} \leqslant c_1(\|\varphi\|_{W^1(Q)} + \|k_0\|_{W^2(Q)}\|\psi\|_{W^1_\infty(0,T)} + \|k_1\|_{W^2(Q)}), \tag{3.2.4}$$

где $c_1 > 0$ не зависит от φ, ψ, k_0, k_1.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную краевую задачу

$$\Delta U(x) - p(x)U(x) = \varkappa|\Gamma|/|Q| \quad (x \in Q), \tag{3.2.5}$$

$$-\gamma \frac{\partial U}{\partial \nu} = \sigma(x)U(x) + 1 \quad (x \in \Gamma), \tag{3.2.6}$$

где $\varkappa = -1/\gamma$, если $p(x) \equiv 0$ и $\sigma(x) \equiv 0$, и $\varkappa = 0$ в противном случае; $|Q|$ — n-мерная мера Лебега области Q, $|\Gamma|$ — $(n-1)$-мерная мера Лебега границы Γ. Известно [24, гл. 4, § 1], что задача (3.2.5), (3.2.6) при сделанных предположениях имеет решение $U \in W^2(Q)$.

Так как краевое условие (3.1.3) содержит только следы функций $k_0(x)$ и $k_1(x)$ на Γ, то без ограничения общности мы можем предположить, что

$$\left.\frac{\partial\sigma}{\partial\nu}\right|_\Gamma = \left.\frac{\partial k_0}{\partial\nu}\right|_\Gamma = \left.\frac{\partial k_1}{\partial\nu}\right|_\Gamma = 0.$$

Положим $v_0(x,t) = [k_0(x)\psi(t) + k_1(x)]U(x)$. Поскольку $\psi \in W^1_\infty(0,T)$, то $v_0 \in W^{2,1}(Q_T)$.

Функция

$$v = w - v_0$$

удовлетворяет соотношениям

$$v_t(x,t) = \Delta v(x,t) - p(x)v(w,t) + f_0(x,t) \quad ((x,t) \in Q_T), \tag{3.2.7}$$

$$v(x,0) = \varphi(x) + \varphi_0(x) \quad (x \in Q), \tag{3.2.8}$$

$$-\gamma\frac{\partial v}{\partial\nu} = \sigma(x)v(x,t) \quad ((x,t) \in \Gamma_T), \tag{3.2.9}$$

где

$$\begin{aligned} f_0(x,t) = \Delta[k_0(x)\psi(t) + k_1(x)]U(x) + [k_0(x)\psi(t) + k_1(x)]\varkappa|\Gamma|/|Q| - \\ - k_0(x)\psi'(t)U(x), \end{aligned}$$

$$\varphi_0(x) = [-k_0(x)\psi(0) - k_1(x)]U(x).$$

Применяя теорему 5.3 из [48] к задаче (3.2.7)–(3.2.9), получаем утверждение теоремы. $\square$

Следующий результат вытекает из леммы 3.2.1 и теоремы вложения (см. теорему 2.1 в [48]).

Следствие 3.2.1. *Для любых функций* $\psi \in W^1_\infty(0,T)$ *и*

$$\varphi \in \begin{cases} W^1(Q), & \text{если } \gamma > 0, \\ W^1_\psi(Q), & \text{если } \gamma = 0, \end{cases}$$

след сильного решения $w_0 \in W^{2,1}(Q_T)$ *задачи* (3.2.1)–(3.2.3) *на сечении* $t = \tau$, $0 \leqslant \tau \leqslant T$, *удовлетворяет неравенству*

$$\|w_0(\cdot,\tau)\|_{W^1(Q)} \leqslant c_2(\|\varphi\|_{W^1(Q)} + \|k_0\|_{W^2(Q)}\|\psi\|_{W^1_\infty(0,T)} + \|k_1\|_{W^2(Q)}), \tag{3.2.10}$$

где $c_2 > 0$ *не зависит от* $\varphi, \psi, k_0, k_1, \tau$.

Лемма 3.2.2. *Пусть* $\psi \in W^1_\infty(0,T)$ *и*

$$\varphi \in \begin{cases} W^1(Q), & \text{если } \gamma > 0, \\ W^1_\psi(Q), & \text{если } \gamma = 0. \end{cases}$$

Пусть $w_0 \in W^{2,1}(Q_T)$ — *сильное решение задачи* (3.2.1)–(3.2.3) *в* Q_T. *Тогда*

$$\frac{(w_{0m}(t'') - w_{0m}(t'))^2}{c_3\|m\|_{L_\infty(Q)}(\|\varphi\|_{W^1(Q)} + \|\psi\|_{W^1_\infty(0,T)} + 1)^2} \leqslant t'' - t' \tag{3.2.11}$$

для любых t', t'', $0 \leqslant t' < t'' \leqslant T$, *где* $c_3 > 0$ *не зависит от* φ, ψ, t', t''.

Доказательство. Используя неравенство Коши—Буняковского и лемму 3.2.1, мы получим

$$\begin{aligned} |w_{0m}(t'') - w_{0m}(t')| &= \left| \int\limits_Q m(x)\,dx \int\limits_{t'}^{t''} w_{0t}(x,t)\,dt \right| \leqslant \\ &\leqslant \|m\|_{L_\infty(Q)}(t''-t')^{1/2}|Q|^{1/2}\|w_{0t}\|_{L_2(Q_T)} \leqslant \\ &\leqslant \|m\|_{L_\infty(Q)}(t''-t')^{1/2}|Q|^{1/2}\|w_0\|_{W^{2,1}(Q_T)} \leqslant \\ &\leqslant c_3^{1/2}\|m\|_{L_\infty(Q)}(t''-t')^{1/2}(\|\varphi\|_{W^1(Q)} + \|\psi\|_{W^1_\infty(0,T)} + 1), \end{aligned}$$

где $|Q|$ — n-мерная мера Лебега области Q, а $c_3 > 0$ не зависит от φ, ψ, t', t''. Отсюда вытекает (3.2.11). □

Теперь мы можем доказать теорему 3.2.1.

Доказательство теоремы 3.2.1. Доказательство будем проводить по индукции.

1. Рассмотрим следующую задачу Коши для функции управления $u(t)$:

$$u'(t) + au(t) = H(w_m, t) \quad (t > t_*), \tag{3.2.12}$$

$$u(t_*) = u_*. \tag{3.2.13}$$

До тех пор пока $H = \mathrm{const}$, решение задачи (3.2.12), (3.2.13) имеет вид

$$u(t) = \left(u_* - \frac{H}{a}\right) e^{-a(t-t_*)} + \frac{H}{a} \quad (t > t_*). \tag{3.2.14}$$

Заметим, что

$$|u(t)| \leqslant \max(1/a, |u_*|), \quad |u'(t)| \leqslant 1+a|u(t)| \leqslant \max(2, 1+a|u_*|) \quad (t \geqslant t_*). \tag{3.2.15}$$

2. Обозначим $u_1(t) = u(t)$ $(t \in [0, T])$, где функция $u(t)$ задана формулой (3.2.14) с $H = 1$, $t_* = 0$ и $u_* = u_0$. В силу (3.2.15) имеем

$$|u_1(t)| \leqslant \max(1/a, |u_0|) = a_1, \quad |u_1'(t)| \leqslant \max(2, 1 + a|u_0|) = a_2 \quad (t \geqslant 0), \tag{3.2.16}$$

где $a_1, a_2 > 0$ могут зависеть от u_0, но не зависят от t.

Рассмотрим задачу (3.2.1)–(3.2.3) с $\psi(t) = u_1(t) - u_c$ $(t \in [0, T])$, $k_0(x) = -K(x)$ и $k_1(x) = -\sigma(x)w_e(x)$. В силу леммы 3.2.1 существует единственное сильное решение w_0 задачи (3.2.1)–(3.2.3) в Q_T.

Определим множество

$$S_1 = \{t \in (0, T) : w_{0m}(t) = w_2\}.$$

Если $S_1 = \varnothing$, то согласно условию (3.1.7) (w_0, u_1) — единственное сильное решение задачи (3.1.1)–(3.1.5) в Q_T.

3. Пусть $S_1 \neq \varnothing$. Обозначим $t_1 = \inf\limits_{t \in (0,T)} S_1$ (т. е. t_1 — это первый момент переключения, так как в начальный момент времени $H = 0$ в

силу определения H и условия (3.1.7)). Очевидно, $t_1 < T$. Из леммы 3.2.2 и соотношений (3.2.16) вытекает, что $w_{0m} \in C^{1/2}[0,T]$ и

$$t_1 \geqslant \frac{\left(w_2 - \int\limits_Q m(x)\varphi(x)\,dx\right)^2}{c_3\|m\|_{L_\infty(Q)}(\|\varphi\|_{W^1(Q)} + a_1 + a_2 + u_c + 1)^2} = \delta.$$

Таким образом, (w_0, u_1) — единственное сильное решение задачи (3.1.1)–(3.1.5) в Q_{t_1}, где $0 < \delta \leqslant t_1 < T$.

Обозначим

$$u_2(t) = \begin{cases} u_1(t), & t \in [0, t_1], \\ u(t), & t \in [t_1, T], \end{cases}$$

где $u(t)$ задана формулой (3.2.14) с $H = 0$, $t_* = t_1$ и $u_* = u_1(t_1)$. Используя (3.2.15), мы имеем

$$\begin{aligned} &|u_2(t)| \leqslant \max(1/a, |u_1(t_1)|) \leqslant \max(1/a, |u_0|) = a_1 && (t \geqslant t_1), \\ &|u_2'(t)| \leqslant \max(2, 1 + a|u_1(t_1)|) \leqslant \\ &\qquad \leqslant \max(2, 1 + a\max(1/a, |u_0|)) = \max(2, 1 + a|u_0|) = a_2 && (t \geqslant t_1). \end{aligned} \tag{3.2.17}$$

Рассмотрим задачу (3.2.1)–(3.2.3) с $\psi(t) = u_2(t) - u_c$ $(t \in [0,T])$, $k_0(x) = -K(x)$ и $k_1(x) = -\sigma(x)w_e(x)$. В силу леммы 3.2.1 существует единственное сильное решение w_0 задачи (3.2.1)–(3.2.3) в Q_T.

Определим множество

$$S_2 = \{t \in (t_1, T) : w_{0m}(t) = w_1\},$$

Если $S_2 = \varnothing$, то (w_0, u_2) — единственное сильное решение задачи (3.1.1)–(3.1.5) в Q_T.

4. Пусть $S_2 \neq \varnothing$. Обозначим $t_2 = \inf\limits_{t\in(t_1,T)} S_2$ (т. е. t_2 — это второй момент переключения). Очевидно, $t_2 < T$. Из леммы 3.2.2 и соотношений (3.2.16), (3.2.17) и (3.1.7) следует, что $w_{0m} \in C^{1/2}[0,T]$ и

$$t_2 - t_1 \geqslant \frac{(w_2 - w_1)^2}{c_3\|m\|_{L_\infty(Q)}(\|\varphi\|_{W^1(Q)} + a_1 + a_2 + u_c + 1)^2} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\left(w_2 - \int\limits_Q m(x)\varphi(x)\,dx\right)^2}{c_3\|m\|_{L_\infty(Q)}(\|\varphi\|_{W^1(Q)} + a_1 + a_2 + u_c + 1)^2} = \delta.$$

Таким образом, (w_0, u_2) — единственное сильное решение задачи (3.1.1)–(3.1.5) в Q_{t_2}, где $2\delta \leqslant t_2 < T$. Повторяя описанную выше процедуру конечное число раз и учитывая, что $\delta > 0$, мы убеждаемся в существовании и единственности сильного решения задачи (3.1.1)–(3.1.5) в Q_T. Очевидно, множество переключений при этом конечно или пусто. $\square$

3.3. Условное существование сильных периодических решений

В этом параграфе мы докажем существование сильного T-периодического решения (w, u) задачи (3.1.1), (3.1.3), (3.1.4) при условии, что для некоторых начальных данных $(\varphi, u_0) \in \mathcal{V}$ существует сильное решение $(\tilde{w}, \tilde{u}) \in \mathcal{W}(Q_T)$ задачи (3.1.1)–(3.1.5) в Q_T такое, что $\tilde{w}_m(0) = \tilde{w}_m(T)$, $\tilde{u}(0) = \tilde{u}(T)$ и $H(\tilde{w}_m, T) = 1$.

Определение 3.3.1. Пара (w, u) называется *сильным T-периодическим решением задачи* (3.1.1), (3.1.3), (3.1.4), если для любого $T_0 \geqslant T$:

(a) $(w, u) \in \mathcal{W}(Q_{T_0})$,

(b) функция w удовлетворяет уравнению (3.1.1) п. в. в Q_{T_0} и равенству (3.1.3) на Γ_{T_0},

(c) функция u удовлетворяет уравнению (3.1.4) п. в. в $(0, T_0)$,

(d) $w(\cdot,t) = w(\cdot,t+T)$, $u(t) = u(t+T)$ и $H(w_m,t) = H(w_m,t+T)$ при $t \in [0, T_0 - T]$.

В определенном смысле определение 3.3.1 эквивалентно следующему.

Определение 3.3.2. Пара (w,u) называется *сильным T-периодическим решением задачи* (3.1.1)*,* (3.1.3)*,* (3.1.4)*,* если

(a) $(w,u) \in \mathcal{W}(Q_T)$,

(b) функция w удовлетворяет уравнению (3.1.1) п. в. в Q_T и условию (3.1.3) в смысле следов,

(c) функция u удовлетворяет уравнению (3.1.4) п. в. в $(0,T)$,

(d) $w(\cdot,0) = w(\cdot,T)$, $u(0) = u(T)$ и $H(w_m,T) = 1$.

Действительно, если пара (w,u) — сильное T-периодическое решение задачи (3.1.1), (3.1.3), (3.1.4) в смысле определения 3.3.1, то сужение этого решения на Q_T есть сильное T-периодическое решение задачи (3.1.1), (3.1.3), (3.1.4) в смысле определения 3.3.2. Если же (w,u) — сильное T-периодическое решение задачи (3.1.1), (3.1.3), (3.1.4) в смысле определения 3.3.2, то мы можем продолжить (w,u) на Q_{T_0} для любого $T_0 > T$ таким образом, что $w(\cdot,t) = w(\cdot,t+T)$ и $u(t) = u(t+T)$ при $t \in [0, T_0 - T]$. В силу теоремы 3.2.1 это продолжение будет сильным T-периодическим решением задачи (3.1.1), (3.1.3), (3.1.4) в смысле определения 3.3.1.

Определение 3.3.3. Будем говорить, что задача (3.1.1), (3.1.3), (3.1.4) обладает *свойством периодичности в среднем,* если найдется такая пара $(\varphi, u_0) \in \mathcal{V}$ и такое число $T > 0$, что для любого $T_0 \geqslant T$ сильное решение $(\tilde{w}, \tilde{u}) \in \mathcal{W}(Q_{T_0})$ задачи (3.1.1)–(3.1.5) в Q_{T_0} с начальными данными $(\varphi, u_0) \in \mathcal{V}$ удовлетворяет равенствам

$$\tilde{w}_m(t) = \tilde{w}_m(t+T), \quad \tilde{u}(t) = \tilde{u}(t+T),$$

$$H(\tilde{w}_m, t) = H(\tilde{w}_m, t+T), \quad t \in [0, T_0 - T].$$

Сильное решение $(\tilde{w}, \tilde{u})$ будем называть *T-периодическим в среднем.*

Очевидно, всякое периодическое решение периодично в среднем. Обратное, вообще говоря, неверно.

Замечание 3.3.1. В отличие от T-периодического решения, в случае периодического в среднем решения условие

$$\tilde{w}_m(0) = \tilde{w}_m(T), \quad \tilde{u}(0) = \tilde{u}(T), \quad H(w_m, T) = 1,$$

вообще говоря, не влечет равенств

$$\tilde{w}_m(t) = \tilde{w}_m(t+T), \quad \tilde{u}(t) = \tilde{u}(t+T),$$

$$H(w_m, t) = H(w_m, t+T), \quad t > 0.$$

Теорема 3.3.1. *Пусть задача* (3.1.1), (3.1.3), (3.1.4) *обладает свойством периодичности в среднем, и пусть* $(\tilde{w}, \tilde{u})$ — *T-периодическое в среднем решение, причем*

$$w_1 \leqslant \tilde{w}_m(0) < w_2. \tag{3.3.1}$$

Если $p(x) \equiv 0$ *и* $\sigma(x) \equiv 0$, *мы предположим также, что* $m(x) \equiv m_0$, *где* $m_0 \neq 0$ — *константа.*

Тогда существует единственное сильное T-периодическое решение $(w, \tilde{u})$ *задачи* (3.1.1), (3.1.3), (3.1.4) *такое, что*

$$w_m(t) = \tilde{w}_m(t) \quad (t \geqslant 0). \tag{3.3.2}$$

Доказательство. 1. По предположению пара функций

$$(\tilde{w}_m, \tilde{u}) \in C^{1/2}[0, \infty) \times W^1_\infty(0, \infty)$$

периодична с периодом T.

Согласно теореме 3.2.1 для любой пары $(\varphi, u_0) \in \mathcal{V}$, где φ удовлетворяет условию (3.1.7), и любого $T_0 > 0$ существует единственное сильное решение $(w, u) \in \mathcal{W}(Q_{T_0})$ задачи (3.1.1)–(3.1.5) в Q_{T_0}. По лемме 3.2.2 $w_m \in C^{1/2}[0, T_0]$. Обозначим

$$\tilde{\mathcal{V}} = \{(\varphi, u_0) \in \mathcal{V} : w_m(t) = \tilde{w}_m(t),\ u(t) = \tilde{u}(t),\ t \geqslant 0\}. \tag{3.3.3}$$

Заметим, что если $(\varphi, u_0) \in \tilde{\mathcal{V}}$ и $(\tilde{\varphi}, \tilde{u}_0) \in \tilde{\mathcal{V}}$, то $u_0 = \tilde{u}_0 = \tilde{u}(0)$. Ясно также, что множество $\tilde{\mathcal{V}}$ непусто, так как оно содержит пару $(\tilde{w}(x,0), \tilde{u}(0))$.

2. Докажем, что множество $\tilde{\mathcal{V}}$ замкнуто в $\mathcal{V}$. Пусть $(\varphi^k, u_0^k) \in \tilde{\mathcal{V}}$ $(k = 1, 2, \dots)$ и $(\varphi^k, u_0^k) = (\varphi^k, \tilde{u}(0)) \to (\varphi^0, \tilde{u}(0))$ в $\mathcal{V}$ при $k \to \infty$. Обозначим через $(w^k, \tilde{u}) \in \mathcal{W}(Q_{T_0})$ и $(w^0, u^0) \in \mathcal{W}(Q_{T_0})$ соответствующие сильные решения задачи (3.1.1)–(3.1.5) в Q_{T_0} для любого $T_0 > 0$.

Нужно доказать, что

$$w_m^0(t) = \tilde{w}_m(t), \quad u^0(t) = \tilde{u}(t) \quad (t \geqslant 0). \tag{3.3.4}$$

Так как $w_m^k(t) = \tilde{w}_m(t)$ $(t \in [0, T])$ при всех k, то для всех сильных решений $(w^k, \tilde{u})$ первый момент переключения (т. е. первый момент достижения средней температурой значения w_2) будет одним и тем же. Обозначим этот момент через τ. Пусть τ_0 — первый момент переключения, соответствующий сильному решению (w^0, u^0).

Обозначим $t_1 = \min(\tau, \tau_0)$. Очевидно, для решений $(w^k, \tilde{u})$ и (w^0, u^0) на интервале $(0, t_1)$ «переключений» не происходит. Так как, кроме того, $u^0(0) = \tilde{u}(0)$, то $u^0(t) = \tilde{u}(t)$ $(t \in [0, t_1])$. Таким образом, функция

$$v^k = w^k - w^0$$

есть сильное решение следующей задачи в Q_{t_1}:

$$v_t^k(x,t) = \Delta v^k(x,t) - p(x) v^k(w,t) \quad ((x,t) \in Q_{t_1}),$$

$$v^k(x,0) = \varphi^k(x) - \varphi^0(x) \quad (x \in Q),$$
$$-\gamma\frac{\partial v^k}{\partial \nu} = \sigma(x)v^k(x,t) \quad ((x,t) \in \Gamma_{t_1}).$$

Используя неравенство Коши—Буняковского и следствие 3.2.1, мы получим

$$|\tilde{w}_m(t) - w_m^0(t)| = |w_m^k(t) - w_m^0(t)| \leqslant$$
$$\leqslant c_4\|v^k(\cdot,t)\|_{W^1(Q)} \leqslant c_4c_2\|\varphi^k - \varphi^0\|_{W^1(Q)} \to 0, \quad k \to \infty,$$

для любого $t \in [0,t_1]$, т. е. $\tilde{w}_m(t) = w_m^0(t)$ $(t \in [0,t_1])$. Значит, функции $\tilde{w}_m(t)$ и $w_m^0(t)$ одновременно достигают верхнего порогового значения w_2. Следовательно,

$$\tau = \tau_0 = t_1, \quad w_m^0(t) = \tilde{w}_m(t), \quad u^0(t) = \tilde{u}(t) \quad (t \in [0,t_1]).$$

Для любого фиксированного $T_0 > 0$, повторяя приведенные выше рассуждения конечное число раз, мы убеждаемся в том, что равенства (3.3.4) справедливы на интервале $[0,T_0]$. Это, в свою очередь, означает, что множество $\tilde{\mathcal{V}}$ замкнуто в $\mathcal{V}$.

3. Рассмотрим нелинейный оператор $G : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, заданный формулой

$$G(\varphi, u_0) = (w(x,T), u(T)) \quad ((\varphi, u_0) \in \mathcal{V}).$$

Из периодичности пары функций $(\tilde{w}_m, \tilde{u})$, определения множества $\tilde{\mathcal{V}}$ и теоремы 3.2.1 (части, касающейся единственности сильного решения) вытекает, что $G(\varphi, \tilde{u}(0)) \in \tilde{\mathcal{V}}$, если $(\varphi, \tilde{u}(0)) \in \tilde{\mathcal{V}}$. Докажем, что оператор

$$G : \tilde{\mathcal{V}} \to \tilde{\mathcal{V}}$$

есть сжимающее отображение.

3.a. Рассмотрим две произвольные пары $(\varphi_j, \tilde{u}(0)) \in \tilde{\mathcal{V}}$, $j = 1, 2$. Пусть $(w_j, \tilde{u}) \in \mathcal{W}(Q_T)$ — сильное решение задачи (3.1.1)–(3.1.5) в Q_T с начальными данными $(\varphi_j, \tilde{u}(0))$. Очевидно, функция $w = w_1 - w_2 \in W^{2,1}(Q_T)$

удовлетворяет соотношениям

$$w_t(x,t) = \Delta w(x,t) - p(x)w(x,t) \quad ((x,t) \in Q_T),$$

$$w(x,0) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x) \quad (x \in Q),$$

$$-\gamma \frac{\partial w}{\partial \nu} = \sigma(x)w(x,t) \quad ((x,t) \in \Gamma_T),$$

где

$$\varphi_1(x) - \varphi_2(x) \in \begin{cases} W^1(Q), & \text{если } \gamma > 0, \\ \mathring{W}^1(Q), & \text{если } \gamma = 0, \end{cases}.$$

Обозначим через $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ последовательность собственных значений и соответствующую ей систему вещественнозначных собственных функций (ортонормированную в $L_2(Q)$) задачи

$$-\Delta e(x) + p(x)e(x) = \lambda e(x) \quad (x \in Q), \tag{3.3.5}$$

$$-\gamma \frac{\partial e}{\partial \nu} = \sigma(x)e(x) \quad (x \in \Gamma). \tag{3.3.6}$$

Положим $p_0 = \inf\limits_{x \in Q} p(x)$. По предположению $p_0 \geqslant 0$.

Известно [24, гл. 4, § 1], что $p_0 \leqslant \lambda_0 < \lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k \leqslant \ldots$ и система собственных функций $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ образует ортонормированный базис в $L_2(Q)$. Если $p(x) \not\equiv 0$ или $\sigma(x) \not\equiv 0$, то $\lambda_0 > 0$. Если $p(x) \equiv 0$ и $\sigma(x) \equiv 0$, то $\lambda_0 = 0$ — простое собственное значение, которому соответствует собственная функция $e_0(x) \equiv 1/\sqrt{|Q|}$, и $\lambda_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots$.

Более того, можно задать такую эквивалентную норму $|||\cdot|||_{W^1(Q)}$, относительно которой функции $e_k/\sqrt{\lambda_k - p_0 + 1}$ образуют ортонормированный базис в $W^1(Q)$ при $\gamma > 0$ и в $\mathring{W}^1(Q)$ при $\gamma = 0$.

Зададим в пространстве $\mathcal{V}$ норму

$$|||(\varphi, u_0)|||_{\mathcal{V}} = \left(|||\varphi|||^2_{W^1(Q)} + |u_0|^2 \right)^{1/2}, \qquad (\varphi, u_0) \in \mathcal{V}.$$

3.b. Функция $\varphi_1 - \varphi_2$ разлагается в ряд Фурье

$$\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (\varphi_{1k} - \varphi_{2k}) e_k(x),$$

где

$$\varphi_{jk} = \int\limits_Q \varphi_j(x) e_k(x)\, dx \qquad (j = 1, 2), \tag{3.3.7}$$

сходящийся в $W^1(Q)$.

Далее, функция $w(x, T)$ имеет вид

$$w(x,T) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda_k T} (\varphi_{1k} - \varphi_{2k}) e_k(x), \tag{3.3.8}$$

причем ряд в (3.3.8) сходится по норме пространства $W^1(Q)$.

(a) Предположим, что $p(x) \not\equiv 0$ или $\sigma(x) \not\equiv 0$. Используя (3.3.8), для любых $(\varphi_j, \tilde{u}(0)) \in \tilde{\mathcal{V}}$, $j = 1, 2$, мы получим

$$\begin{aligned} |||G(\varphi_1, \tilde{u}(0)) - G(\varphi_2, \tilde{u}(0))|||_{\mathcal{V}}^2 = |||w(\cdot, T)|||_{W^1(Q)}^2 \leqslant \\ \leqslant e^{-2\lambda_0 T} \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_k - p_0 + 1)(\varphi_{1k} - \varphi_{2k})^2 = \\ = e^{-2\lambda_0 T} |||\varphi_1 - \varphi_2|||_{W^1(Q)}^2 = e^{-2\lambda_0 T} |||(\varphi_1, \tilde{u}(0)) - (\varphi_2, \tilde{u}(0))|||_{\mathcal{V}}. \end{aligned}$$

Так как $e^{-2\lambda_0 T} < 1$, то G — сжимающее отображение на $\tilde{\mathcal{V}}$.

(b) Теперь предположим, что $p(x) \equiv 0$ и $\sigma(x) \equiv 0$. Тогда $\lambda_0 = 0$. По предположению в этом случае $m(x) \equiv m_0 = \mathrm{const}$. Следовательно, учитывая (3.3.7), мы имеем

$$\varphi_{j0} = \frac{1}{\sqrt{|Q|}} \int\limits_Q \varphi_j(x)\, dx = \frac{\tilde{w}_m(0)}{m_0 \sqrt{|Q|}},$$

т. е. $\varphi_{10} - \varphi_{20} = 0$.

Используя (3.3.8), для любых $(\varphi_j, \tilde{u}(0)) \in \tilde{\mathcal{V}}$, $j = 1, 2$, мы получим

$$
\begin{aligned}
|||G(\varphi_1, \tilde{u}(0)) - G(\varphi_2, \tilde{u}(0))|||^2_{\mathcal{V}} = |||w(\cdot, T)|||^2_{W^1(Q)} \leqslant \\
\leqslant e^{-2\lambda_1 T} \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_k - p_0 + 1)(\varphi_{1k} - \varphi_{2k})^2 = \\
= e^{-2\lambda_1 T} |||\varphi_1 - \varphi_2|||^2_{W^1(Q)} = e^{-2\lambda_1 T} |||(\varphi_1, \tilde{u}(0)) - (\varphi_2, \tilde{u}(0))|||_{\mathcal{V}}.
\end{aligned}
$$

Так как $e^{-2\lambda_1 T} < 1$, то G — сжимающее отображение на $\tilde{\mathcal{V}}$.

Поскольку оператор G отображает непустое замкнутое множество $\tilde{\mathcal{V}}$ в себя и является сжимающим отображением, то по теореме Банаха о неподвижной точке (см. теорему А.20) он имеет единственную неподвижную точку. □

Следствие 3.3.1. *Пусть выполнены предположения теоремы* 3.3.1. *Если* $(w, \tilde{u})$ — *сильное* T*-периодическое решение задачи* (3.1.1)*,* (3.1.3)*,* (3.1.4) *такое, что*

$$w_m(t) = \tilde{w}_m(t) \quad (t \in [0, T]),$$

то

$$\|\tilde{w}(\cdot, t) - w(\cdot, t)\|_{W^1(Q)} \to 0 \quad \textit{при} \quad t \to \infty. \tag{3.3.9}$$

Доказательство. Пусть $\tilde{\mathcal{V}}$ и G имеют тот же смысл, что в доказательстве теоремы 3.3.1. Тогда

$$(\tilde{w}(\cdot, kT), \tilde{u}(kT)) = G^k(\tilde{w}(\cdot, 0), \tilde{u}(0)) \in \tilde{\mathcal{V}} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

С другой стороны,

$$(w(\cdot, kT), \tilde{u}(kT)) = (w(\cdot, 0), \tilde{u}(0)) \in \tilde{\mathcal{V}}$$

есть неподвижная точка оператора G. Следовательно,

$$\|\tilde{w}(\cdot, kT) - w(\cdot, kT)\|_{W^1(Q)} \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{3.3.10}$$

Теперь мы можем доказать (3.3.9). В силу (3.3.10) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$, что

$$\|\tilde{w}(\cdot, kT) - w(\cdot, kT)\|_{W^1(Q)} \leqslant \varepsilon/c_2 \quad (k \geqslant k_\varepsilon), \tag{3.3.11}$$

где c_2 — константа из оценки (3.2.10). Для любого $\tau \geqslant k_\varepsilon T$ обозначим $k = [\tau/T]$ $(k \geqslant k_\varepsilon)$, где $[\,\cdot\,]$ обозначает целую часть числа. Положим

$$w_k(x,t) = w(x, t + kT), \quad \tilde{w}_k(x,t) = \tilde{w}(x, t + kT).$$

Очевидно, функция $v_k = \tilde{w}_k - w_k$ есть сильное решение задачи

$$v_{kt}(x,t) = \Delta v_k(x,t) - p(x) v_k(w,t) \quad ((x,t) \in Q_T),$$

$$v_k(x,0) = \tilde{w}_k(x,0) - w_k(x,0) \quad (x \in Q),$$
$$-\gamma \frac{\partial v_k}{\partial \nu} = \sigma(x) v_k(x,t) \quad ((x,t) \in \Gamma_T).$$

Используя соотношение $0 \leqslant \tau - kT < T$, следствие 3.2.1 и неравенство (3.3.11), мы получим

$$\|\tilde{w}(\cdot,\tau) - w(\cdot,\tau)\|_{W^1(Q)} = \|v_k(\cdot, \tau - kT)\|_{W^1(Q)} \leqslant$$
$$\leqslant c_2 \|\tilde{w}_k(\cdot,0) - w_k(\cdot,0)\|_{W^1(Q)} =$$
$$= c_2 \|\tilde{w}(\cdot,kT) - w(\cdot,kT)\|_{W^1(Q)} \leqslant \varepsilon,$$

что и требовалось доказать. □

Следствие 3.3.2. *Пусть выполнены предположения теоремы* 3.3.1*, и пусть* $\tilde{u}(t) \not\equiv \mathrm{const}$. *Тогда для любого* $\varphi_0 \in [w_1, w_2)$ *существует такое сильное* T*-периодическое решение* (w_0, u) *задачи* (3.1.1)*,* (3.1.3)*,* (3.1.4)*, что*

$$w_{0m}(0) = \varphi_0.$$

Доказательство. 1. Пусть $(w, \tilde{u})$ — сильное T-периодическое решение задачи (3.1.1), (3.1.3), (3.1.4), построенное в доказательстве теоремы 3.3.1. Покажем, что найдется момент τ, для которого $w_m(\tau) = \varphi_0$.

1.a. Вначале предположим, что $\tilde{u}(0) \neq 1/a$. Очевидно, существует момент переключения t_1 такой, что $w_m(t_1) = w_2$. Действительно, в противном случае функция $\tilde{u}(t)$ строго монотонна при $t > 0$ (см. (3.2.14) с $t_* = 0$, $H = 1$ и $u_* = \tilde{u}(0) \neq 1/a$) и не может быть периодической.

Аналогично существует второй момент переключения t_2 такой, что $w_m(t_2) = w_1$. Действительно, в противном случае функция $\tilde{u}(t)$ либо постоянна, либо строго монотонна при $t > t_1$. Учитывая, что $u(t)$ не есть константа на интервале $(0, t_1)$, видим, что в обоих случаях $u(t)$ не может быть периодической при $t > 0$.

1.b. Теперь предположим, что $\tilde{u}(0) = 1/a$. Очевидно, существует момент переключения t_1 такой, что $w_m(t_1) = w_2$. Действительно, в противном случае $H(w_m, t) \equiv 1$ и, следовательно, $\tilde{u}(t) \equiv 1/a$ (см. (3.2.14) с $t_* = 0$, $H = 1$ и $u_* = \tilde{u}(0) = 1/a$).

Существует второй момент переключения t_2 такой, что $w_m(t_2) = w_1$. Действительно, в противном случае функция $\tilde{u}(t)$ строго убывает при $t > t_1$ (см. (3.2.14) с $t_* = t_1$, $H = 0$ и $u_* = \tilde{u}(t_1) = 1/a$) и не может быть периодической.

2. Так как функция $w_m(t)$ непрерывна в силу леммы 3.2.2, то в обоих случаях 1.a и 1.b найдется такой момент времени $\tau \in (t_1, t_2]$, что $w_m(\tau) = \varphi_0$. Тогда $(w_0(x,t), u(x,t)) = (w(x, t+\tau), \tilde{u}(t+\tau))$ есть искомое решение. $\square$

3.4. Измерение температуры равномерно распределенными по области датчиками

В этом параграфе мы рассмотрим задачу термоконтроля, обладающую свойством периодичности в среднем. Тогда в силу теоремы 3.3.1 она имеет сильное периодическое решение.

Рассмотрим задачу (3.1.1)–(3.1.5), полагая $p(x) \equiv 0$, $\sigma(x) \equiv 0$, $\gamma = 1$ и $m(x) \equiv m_0 \neq 0$:

$$w_t(x,t) = \Delta w(x,t) \quad ((x,t) \in Q_T), \tag{3.4.1}$$

$$w(x,0) = \varphi(x) \quad (x \in Q), \tag{3.4.2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = K(x)(u(t) - u_c) \quad ((x,t) \in \Gamma_T), \tag{3.4.3}$$

функция управления $u(t)$ удовлетворяет задаче Коши

$$u'(t) + au(t) = H(w_m, t) \quad (t > 0), \tag{3.4.4}$$

$$u(0) = u_0, \tag{3.4.5}$$

где $u_c, a > 0$, функционал $H(w_m, t)$ $(t \geqslant 0)$ задан формулой (3.1.6), а средняя температура определяется по формуле

$$w_m(t) = m_0 \int\limits_Q w(x,t)\,dx.$$

Для доказательства свойства периодичности в среднем мы покажем, что средняя температура $w_m(t)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению. Интегрируя уравнение (3.4.1) по области Q, получим

$$w_m'(t) = m_0 \int\limits_Q \Delta w\,dx = m_0 \int\limits_\Gamma \frac{\partial w}{\partial \nu}\,d\Gamma.$$

Отсюда, учитывая краевое условие (3.4.3), получаем дифференциальное уравнение

$$w_m'(t) = k(u(t) - u_c) \quad (t > t_*), \tag{3.4.6}$$

где $k = m_0 \int\limits_\Gamma K(x)\,dx$, $t_* \geqslant 0$ произвольно. Далее будем считать, что $k > 0$.

Начальное условие для функции $w_m(t)$ имеет вид

$$w_m(t_*) = \varphi_* = m_0 \int\limits_Q w(x, t_*)\,dx. \tag{3.4.7}$$

При $t_* = 0$ обозначим

$$\varphi_0 = \varphi_* = m_0 \int\limits_Q \varphi(x)\,dx$$

и предположим (ср. (3.1.7)), что

$$w_1 \leqslant w_m(0) = \varphi_0 < w_2.$$

Очевидно, функция $w_m(t)$ возрастает, если $u(t) > u_c$, и убывает, если $u(t) < u_c$. Если $u(t) = u_c$ в некоторый момент времени t, то это критическая точка функции $w_m(t)$. Используя (3.2.14), запишем решение задачи (3.4.6), (3.4.7) в виде

$$w_m(t) = \frac{k}{a}\left(u_* - \frac{H}{a}\right)\left(1 - e^{-a(t-t_*)}\right) + k\left(\frac{H}{a} - u_c\right)(t - t_*) + \varphi_*, \tag{3.4.8}$$

где $u_* = u(t_*)$.

Рассмотрим случай $u_c < 1/a$. Пусть начальное значение управления u_0 таково, что (рис. 3.4.1)

$$u_c \leqslant u_0 \leqslant 1/a.$$

Начиная с нулевого момента времени и до момента переключения (если оно произойдет) мы имеем (см. (3.2.14) и (3.4.8))

$$u(t) = \left(u_0 - \frac{1}{a}\right)e^{-at} + \frac{1}{a} \qquad (t > 0), \tag{3.4.9}$$

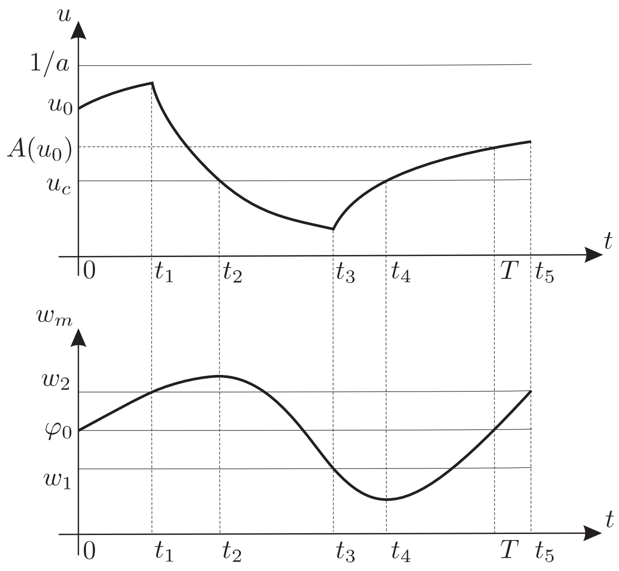

Рис. 3.4.1. Поведение функций $u(t)$ и $w_m(t)$

$$w_m(t) = \frac{k}{a}\left(u_0 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - e^{-at}\right) + k\left(\frac{1}{a} - u_c\right)t + \varphi_0 \qquad (t > 0),$$

т. е. $u(t) \equiv 1/a$ (если $u_0 = 1/a$) или $u(t)$ возрастает (если $u_0 < 1/a$). В обоих случаях $u(t) - u_c > 0$; следовательно, функция $w_m(t)$ возрастает в силу (3.4.6). Так как $\lim\limits_{t\to\infty} w(t) = +\infty$, то найдется такое $t_1 > 0$, что $w_m(t_1) = w_2$. В момент времени t_1 функционал H «переключится», т. е. $H = 0$ при $t \geqslant t_1$.

Положим

$$u_* = u(t_1), \qquad \varphi_* = w_m(t_1) = w_2.$$

Используя (3.2.14) и (3.4.8), получим

$$u(t) = u_* e^{-a(t-t_1)} \quad (t > t_1),$$

$$w_m(t) = \frac{k}{a}u_*\left(1 - e^{-a(t-t_1)}\right) - ku_c(t - t_1) + w_2 \quad (t > t_1).$$

Так как $u(t)$ убывает, $\lim\limits_{t\to\infty} u(t) = 0$ и $u(t_1) = u_* > u_c$, то найдется такое $t_2 > t_1$, что $u(t_2) = u_c$. Следовательно, учитывая (3.4.6), мы видим, что $w_m(t)$ продолжает возрастать при $t_1 < t < t_2$ и убывает при $t > t_2$.

Так как $\lim\limits_{t\to\infty} w_m(t) = -\infty$, то найдется такое $t_3 > t_2$, что $w_m(t_3) = w_1$. В момент времени t_3 функционал H «переключится», т. е. $H = 1$ при $t > t_3$. Кроме того, очевидно, $u(t_3) < u_c$. Положим

$$t_* = t_3, \quad u_* = u(t_*) < u_c < 1/a, \quad \varphi_* = w_m(t_*) = w_1.$$

Используя (3.2.14) и (3.4.8), получим

$$u(t) = \left(u_* - \frac{1}{a}\right) e^{-a(t-t_3)} + \frac{1}{a} \quad (t > t_3),$$

$$w_m(t) = \frac{k}{a}\left(u_* - \frac{1}{a}\right)\left(1 - e^{-a(t-t_3)}\right) + k\left(\frac{1}{a} - u_c\right)(t - t_3) + w_1 \quad (t > t_3).$$

Так как $u(t)$ возрастает, $\lim\limits_{t\to\infty} u(t) = 1/a > u_c$ и $u(t_3) = u_* < u_c$, то найдется такое $t_4 > t_3$, что $u(t_4) = u_c$. Следовательно, учитывая (3.4.6), мы видим, что $w_m(t)$ продолжает убывать при $t_3 < t < t_4$ и возрастает при $t > t_4$.

Так как $\lim\limits_{t\to\infty} w_m(t) = +\infty$, то найдется такое $t_5 > t_4$, что $w_m(t_5) = w_2$. В момент времени t_5 функционал H «переключится», т. е. $H = 0$ при $t > t_5$. При этом $u_c < u(t_5) < 1/a$. Таким образом, мы снова находимся в ситуации, которая имела место при $t = t_1$. Повторяя описанные выше шаги, мы можем продолжать процесс, получая точки $t_6, \ldots, t_{10}$, $t_{11}, \ldots, t_{15}$ и так далее.

Из теоремы 3.2.1 вытекает, что разности $t_{j+2} - t_j$ ($j = 1, 3, 5$) равномерно ограничены снизу. Используя формулы (3.2.14) и (3.4.8) для функций $w_m(t)$ и $u(t)$, можно показать, что эти разности также равномерно ограничены сверху, причем для $j = 1, 5, 9, \ldots$

$$\frac{1}{ku_c}(w_2 - w_1) \leqslant t_{j+2} - t_j \leqslant \frac{1}{ku_c}\left(w_2 - w_1 + \frac{k}{a^2}\right) \tag{3.4.10}$$

и для $j = 3, 7, 11, \ldots$

$$\frac{1}{\frac{1}{u_c a} - 1}\frac{1}{ku_c}(w_2 - w_1) \leqslant t_{j+2} - t_j \leqslant \frac{1}{\frac{1}{u_c a} - 1}\frac{1}{ku_c}\left(w_2 - w_1 + \frac{k}{a^2}\right). \tag{3.4.11}$$

Отсюда и из (3.4.6) следует, что $w_m \in C^1([0,+\infty))$ и w_m бесконечно дифференцируема на интервалах $[0,t_1],[t_1,t_3],[t_3,t_5],\ldots$.

Теперь докажем, что если $w_1 \leqslant \varphi_0 < w_2$, то можно выбрать такое начальное значение управления $\hat{u}_0$ (зависящее от начального значения средней температуры φ_0), что функции $u(t)$ и $w_m(t)$ будут периодичны.

Теорема 3.4.1. *Пусть* $m_0 \int\limits_{\Gamma} K(x)\,d\Gamma > 0$, $u_c < 1/a$ *и* $w_1 \leqslant \varphi_0 < w_2$. *Тогда на интервале* $[u_c, 1/a]$ *существует единственное начальное значение управления* $\hat{u}_0$ *такое, что решения* $u(t)$ *и* $w_m(t)$ *задач* (3.4.4), (3.4.5) *и* (3.4.6), (3.4.7) *с* $t_* = 0$ *соответственно периодичны с одним и тем же периодом. Более того, начальное значение управления удовлетворяет неравенствам* $u_c < \hat{u}_0 < 1/a$. *Непрерывно дифференцируемая функция* $w_m(t)$ *представляет собой устойчивый цикл на фазовой плоскости* (w_m, w_m').

Доказательство. 1. Рассмотрим произвольное начальное значение управления $u_0 \in [u_c, 1/a]$. В начальный момент времени $t = 0$ мы имеем $u_c \leqslant u(0) \leqslant 1/a$, $w_1 \leqslant w_m(0) < w_2$ и $H = 1$ (по предположению).

Далее, по построению найдется такой момент времени $T \in (t_4, t_5)$, что $u_c < u(T) < 1/a$, $w_m(T) = \varphi_0$ и $H(w_m, T) = 1$ (рис. 3.4.1). Если окажется, что $u(T) = u(0) = u_0$, то функции $u(t)$ и $w_m(t)$ будут периодичны с периодом T.

Введем функцию $A : [u_c, 1/a] \to (u_c, 1/a)$, ставящую в соответствие каждому начальному значению управления $u_0 \in [u_c, 1/a]$ точку $u(T)$, где $T = T(u_0, \varphi_0)$ — указанный выше момент времени.

Докажем, что функция A бесконечно дифференцируема на $[u_c, 1/a]$. Зафиксируем произвольное $u_0 \in [u_c, 1/a]$ и рассмотрим моменты времени $t_1, \ldots, t_4, T$ (см. выше).

Нахождение значения $A(u_0) = u(T)$ разобьем на три этапа.

2.a. Запишем уравнение

$$w_m(t_1, u_0) = w_2$$

и найдем момент времени $t_1 = t_1(u_0)$. Так как функция $w_m(t_1, u_0)$ бесконечно дифференцируема по переменным t_1 и u_0 и

$$\frac{\partial w_m}{\partial t_1} = k(u(t_1) - u_c) > 0,$$

то функция $t_1 = t_1(u_0)$ также бесконечно дифференцируема по переменной u_0. Более того, если $u_0 \neq 1/a$, то, используя уравнение (3.4.6) и соотношения (3.4.9), получим

$$\frac{dt_1}{du_0} = -\frac{\partial w_m/\partial u_0}{\partial w_m/\partial t_1} = -\frac{ka^{-1}(1-e^{-at_1})}{k(u_1 - u_c)} = -\frac{a^{-1}\frac{u_1-u_0}{a^{-1}-u_0}}{u_1 - u_c}, \tag{3.4.12}$$

где $u_1 = u(t_1)$.

Подставляя в функцию $u(t) = u(t, u_0)$ (см. (3.4.9)) вместо переменной t бесконечно дифференцируемую функцию $t_1 = t_1(u_0)$, мы видим, что u_1 есть функция, зависящая от t_1 и u_0, т. е. $u_1 = u_1(t_1, u_0)$. Так как функция u бесконечно дифференцируема по t и $u_0 \in [u_c, 1/a]$, а функция $t_1(u_0)$ бесконечно дифференцируема по переменной $u_0 \in [u_c, 1/a]$, то функция u_1 бесконечно дифференцируема по переменной $u_0 \in [u_c, 1/a]$. Более того, если $u_0 \neq 1/a$, то, используя равенство (3.4.12) и соотношение (3.4.9), мы получим

$$\begin{aligned}\frac{du_1}{du_0} &= \frac{\partial u_1}{\partial t_1}\frac{dt_1}{du_0} + \frac{\partial u_1}{\partial u_0} = \\ &= -(1 - au_1)\frac{a^{-1}\frac{u_1-u_0}{a^{-1}-u_0}}{u_1 - u_c} + \frac{u_1 - a^{-1}}{u_0 - a^{-1}} = \frac{a^{-1} - u_1}{a^{-1} - u_0}\frac{u_0 - u_c}{u_1 - u_c}.\end{aligned} \tag{3.4.13}$$

2.b. Теперь рассмотрим отрезок $[t_1, t_3]$ (на котором $H = 0$). Мы можем считать, что процесс начался заново, т. е. начальное значение управления равно u_1, начальное значение средней температуры равно w_2

и $H = 0$. Аналогично этапу 2.a можно показать, что t_3 есть бесконечно дифференцируемая функция переменной u_1 (т. е. $t_3 = t_3(u_1)$), а u_3 есть бесконечно дифференцируемая функция переменных t_3 и u_1 (т. е. $u_3 = u_3(t_3, u_1)$). Следовательно, u_3 (как функция переменной u_1) бесконечно дифференцируема по переменной u_1. Аналогично (3.4.13) мы получаем

$$\frac{du_3}{du_1} = \frac{\partial u_3}{\partial t_3}\frac{dt_3}{du_1} + \frac{\partial u_3}{\partial u_1} = \frac{u_3}{u_1}\frac{u_1 - u_c}{u_3 - u_c}. \qquad (3.4.14)$$

2.c. Наконец рассмотрим интервал $[t_3, T]$ (на котором снова $H = 1$). Как и выше, можем считать, что процесс начался заново, т. е. начальное значение управления равно u_3, начальное значение средней температуры равно w_1 и $H = 1$. Как и в случае 2.a, из равенства

$$w_m(T, u_3) = \varphi_0$$

вытекает, что функция $T = T(u_3)$ бесконечно дифференцируема по переменной u_3. Так как $u_3 < 1/a$, мы имеем

$$\frac{dT}{du_3} = -\frac{a^{-1}\frac{u - u_3}{a^{-1} - u_3}}{u - u_c},$$

где $u = u(T, u_3)$ (достаточно в (3.4.12) заменить u_0 и u_1 на u и u_3 соответственно). Следовательно, как и в случае 2.a, мы видим, что функция $u(T(u_3), u_3)$ бесконечно дифференцируема по переменной u_3 и

$$\frac{du}{du_3} = \frac{\partial u}{\partial T}\frac{dT}{du_3} + \frac{\partial u}{\partial u_3} = \frac{a^{-1} - u}{a^{-1} - u_3}\frac{u_3 - u_c}{u - u_c}. \qquad (3.4.15)$$

2. В силу результатов, полученных на этапах 2.a–2.c, функция u бесконечно дифференцируема по переменной $u_0 \in [u_c, 1/a]$. Из (3.4.12)–(3.4.15) вытекает, что если $u_0 < 1/a$, то

$$\frac{dA(u_0)}{du_0} = \frac{du}{du_0} = \frac{du}{du_3}\frac{du_3}{du_1}\frac{du_1}{du_0} = \frac{a^{-1} - u_1}{a^{-1} - u_0}\frac{u_3}{u_1}\frac{a^{-1} - u}{a^{-1} - u_3}\frac{u_0 - u_c}{u - u_c}. \qquad (3.4.16)$$

Следовательно,
$$\begin{aligned} &\frac{dA}{du_0} = 0 \qquad \text{при } u_0 = u_c, \\ &\frac{dA}{du_0} > 0 \qquad \text{при } u_c < u_0 < 1/a. \end{aligned} \tag{3.4.17}$$
Таким образом, функция $A(u_0)$ бесконечно дифференцируема на отрезке $[u_c, 1/a]$, возрастает на интервале $(u_c, 1/a)$ и отображает $[u_c, 1/a]$ в $(u_c, 1/a)$. Следовательно, график функции $A(u_0)$ пересекает диагональ с концами (u_c, u_c) и $(1/a, 1/a)$ квадрата $[u_c, 1/a] \times [u_c, 1/a]$ по крайней мере в одной точке $(\hat{u}_0, \hat{u}_0) = (\hat{u}_0, A(\hat{u}_0))$.

Очевидно, решение $u(t), w_m(t)$ с начальными значениями $\hat{u}_0, \varphi_0$ соответственно периодично с периодом T. При этом $u(T) = u(0) = \hat{u}_0$, и из соотношения (3.4.16) получаем
$$\left.\frac{dA}{du_0}\right|_{u_0=\hat{u}_0} = \frac{a^{-1} - u_1}{a^{-1} - u_3} \frac{u_3}{u_1} < 1. \tag{3.4.18}$$
Следовательно, график функции $A(u_0)$ пересекает указанную диагональ только в одной точке, т. е. на интервале $[u_c, 1/a]$ существует единственное значение $\hat{u}_0$, порождающее периодическое решение $u(t), w_m(t)$. Очевидно, при этом $u_c < u_0 < 1/a$.

Из (3.4.17) и (3.4.18) вытекает, что в случае $u_0 < \hat{u}_0$ последовательность
$$u_0, A(u_0), A(A(u_0)), \ldots$$
возрастает и сходится к $\hat{u}_0$, а в случае $u_0 > \hat{u}_0$ последовательность
$$u_0, A(u_0), A(A(u_0)), \ldots$$
убывает и также сходится к $\hat{u}_0$. Это означает, что любая траектория
$$(w_m(t), w_m'(t)) = (w_m(t), k(u(t) - u_c))$$
стремится к траектории предельного цикла, порожденного начальными значениями $\hat{u}_0, \varphi_0$ (рис. 3.4.2). $\square$

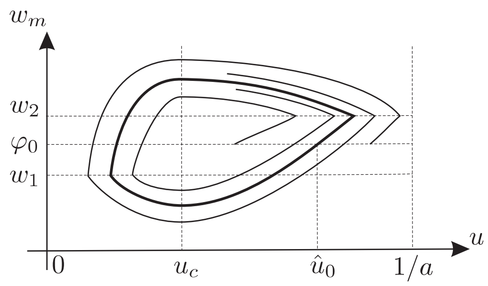

Рис. 3.4.2. Траектория предельного цикла $(w_m(t), u(t))$

Теорема 3.4.2. (a) *Пусть* $m_0 \int\limits_\Gamma K(x)\, d\Gamma > 0$, $u_c < 1/a$ *и* $w_1 \leqslant \varphi_0 < w_2$. *Тогда в классе решений, удовлетворяющих условиям*

$$u(0) \in [u_c, 1/a], \qquad w_m(0) = \varphi_0,$$

найдется единственное сильное периодическое решение (w, u) *задачи* (3.4.1), (3.4.3), (3.4.4). *При этом начальное значение управления* $u(0)$ *удовлетворяет неравенствам* $u_c < u(0) < 1/a$.

(b) *Если* $(\tilde{w}, \tilde{u})$ — *такое периодическое в среднем решение задачи* (3.4.1), (3.4.3), (3.4.4), *что*

$$\tilde{u}(0) \in [u_c, 1/a], \qquad \tilde{w}_m(0) = \varphi_0,$$

то

$$\tilde{u}(t) \equiv u(t), \qquad \tilde{w}_m(t) \equiv w_m(t),$$

$$\|\tilde{w}(\cdot, t) - w(\cdot, t)\|_{W^1(Q)} \to 0 \quad \textit{при} \quad t \to \infty;$$

здесь (w, u) — *сильное периодическое решение из утверждения* (a).

Доказательство. 1. Существование сильного периодического решения (w, u) задачи (3.4.1), (3.4.3), (3.4.4) и неравенства $u_c < u(0) < 1/a$ вытекают из теорем 3.4.1 и 3.3.1. Прежде чем мы докажем единственность сильного периодического решения (см. часть 3 ниже), докажем утверждение (b).

2. Пусть $(\tilde{w}, \tilde{u})$ — периодическое в среднем решение задачи (3.4.1), (3.4.3), (3.4.4), и пусть

$$\tilde{u}(0) \in [u_c, 1/a], \qquad \tilde{w}_m(0) = \varphi_0.$$

Тогда $\tilde{u}(0) = u(0)$ в силу теоремы 3.4.1. Из (3.2.14) и (3.4.8) вытекает, что средняя температура $w_m(t)$ и функция управления $u(t)$ зависят только от значений φ_0 и u_0. Следовательно,

$$(\tilde{w}_m(t), \tilde{u}(t)) \equiv (w_m(t), u(t)). \tag{3.4.19}$$

Из соотношения (3.4.19) и следствия 3.3.1 вытекает, что

$$\|\tilde{w}(\cdot, t) - w(\cdot, t)\|_{W^1(Q)} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Утверждение (b) доказано.

3. Для доказательства утверждения (a) осталось показать, что если $(\hat{w}, \hat{u})$ — сильное периодическое решение задачи (3.4.1), (3.4.3), (3.4.4) и

$$\hat{u}(0) \in [u_c, 1/a], \qquad \hat{w}_m(0) = \varphi_0,$$

то $(\hat{w}, \hat{u}) = (w, u)$.

Очевидно, $(\hat{w}, \hat{u})$ — периодическое в среднем решение задачи (3.4.1), (3.4.3), (3.4.4). Следовательно, согласно части 2 доказательства теоремы (ср. (3.4.19)), имеем

$$(\hat{w}(\cdot, 0), \hat{u}(0)) \in \tilde{\mathcal{V}}, \qquad (w(\cdot, 0), u(0)) \in \tilde{\mathcal{V}},$$

где $\tilde{\mathcal{V}}$ — множество, определенное в доказательстве теоремы 3.3.1. При этом каждая из пар

$$(\hat{w}(\cdot, 0), \hat{u}(0)) \in \tilde{\mathcal{V}}, \quad (w(\cdot, 0), u(0)) \in \tilde{\mathcal{V}}$$

есть неподвижная точка оператора G из доказательства теоремы 3.3.1. Таким образом,

$$(\hat{w}(\cdot, 0), \hat{u}(0)) = (w(\cdot, 0), u(0)).$$

Из теоремы 3.2.1 теперь получаем $(\hat{w}, \hat{u}) = (w, u)$. $\square$

Примечания к главе 3

Модели управления распределением тепла, близкие к рассматриваемым в данном пособии, были впервые предложены К. Гласхофом и Дж. Шпрекельсом [45]. Сводя задачу к эквивалентному интегро-дифференциальному уравнению для многозначных функций, они доказали существование решений задачи термоконтроля с начальными данными. Периодичность решений в одномерном случае доказана в работах [43,51]. Вопрос о существовании периодических решений в многомерном случае оставался до последнего времени открытым. Результаты гл. 3 были опубликованы без доказательств в заметке [9].

Упражнения к главе 3

1. Рассмотрим следующую начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности в ограниченной области Q с гладкой границей:

$$v_t(x,t) - \Delta v(x,t) = 0 \quad (x \in Q,\ t \in [0,T]),$$

$$v(x) = 0 \quad (x \in \partial Q),$$

$$v(0,x) = \varphi(x) \quad (x \in Q),$$

где $\varphi \in \mathring{W}^1(Q)$. Используя метод разделения переменных, доказать, что существует $\omega > 0$ такое, что

$$\int\limits_Q |\nabla v(x,T)|^2\,dx \leqslant e^{-\omega T} \int\limits_Q |\nabla \varphi(x)|^2\,dx.$$

2. Рассмотрим следующую начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности в ограниченной области Q с гладкой границей:

$$v_t(x,t) - \Delta v(x,t) = 0 \quad (x \in Q,\ t \in [0,T]),$$
$$v(x) = 0 \quad (x \in \partial Q),$$
$$\frac{\partial v}{\partial \nu}(0,x) = \varphi(x) \quad (x \in Q),$$

где ν — внешняя нормаль к границе области и $\varphi \in W^1(Q)$. Используя метод разделения переменных, доказать, что существует $\omega > 0$ такое, что

$$\|v(\cdot,T)\|_{W^1(Q)} \leqslant e^{-\omega T}\|\varphi\|_{W^1(Q)}.$$

3. Дать определение оператора гистерезиса, удовлетворяющего следующему свойству: если $w_1 < g(0) < w_2$, то $H(g,0) = 0$.

4. Доказать неравенства (3.4.10) и (3.4.11).

5. Пусть Q — ограниченная область единичного объема с гладкой границей. Рассмотрим задачу автоматической терморегуляции

$$w_t(x,t) - \Delta w(x,t) = 0 \quad (x \in Q,\ t \geqslant 0),$$
$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = u(t) - 1 \quad (x \in \partial Q),$$
$$w(0,x) = \varphi(x) \quad (x \in Q),$$

где $w(x,t)$ — температура области в точке x в момент времени t, ν — внешняя нормаль к границе области, $u(t)$ — функция управления и $\varphi \in W^1(Q)$. Функция управления удовлетворяет соотношениям

$$u'(t) + u(t) = H(w_m)(t) \quad (t > 0),$$
$$u(0) = u_0,$$

где $w_m(t)$ — средняя по области температура, $H(w_m)$ — оператор гистерезиса с пороговыми значениями w_1, w_2 и u_0 — вещественный параметр.

Пусть $w_m(0) < w_1$. Найти $\lim\limits_{t\to+\infty} w_m(t)$ и $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)$, если

a) $u_0 = 1$, b) $u_0 < 1$, c) $u_0 > 1$.

6. Пусть (w, u) — сильное решение задачи термоконтроля из упражнения 5. Выяснить, существуют ли пределы $\lim\limits_{t\to+\infty} w_m(t)$ и $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)$, если $w_m(0) \geqslant w_1$.

7. Пусть Q — ограниченная область единичного объема с гладкой границей. Рассмотрим задачу автоматической терморегуляции

$$w_t(x,t) - \Delta w(x,t) = 0 \quad (x \in Q,\ t \geqslant 0),$$
$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = u(t) \quad (x \in \partial Q),$$
$$w(0,x) = \varphi(x) \quad (x \in Q),$$

где $w(x,t)$ — температура области в точке x в момент времени t, ν — внешняя нормаль к границе области, $u(t)$ — функция управления и $\varphi \in W^1(Q)$. Функция управления удовлетворяет соотношениям

$$u'(t) + 2u(t) = H(w_m)(t) \quad (t > 0),$$
$$u(0) = u_0,$$

где $w_m(t)$ — средняя по области температура, $H(w_m)$ — оператор гистерезиса с пороговыми значениями w_1, w_2 и u_0 — вещественный параметр.

Пусть $w_m(0) < w_1$. Доказать, что функции $w_m(t)$ и $u(t)$ не имеют пределов при $t \to +\infty$. Рассмотреть следующие случаи:

a) $0 \leqslant u_0 \leqslant 1/2$, b) $u_0 < 0$, c) $u_0 > 1/2$.

8. Пусть (w, u) — сильное решение задачи термоконтроля из упражнения 7. Оценить сверху и снизу разности между моментами переключений.

9. Пусть (w, u) — сильное решение задачи термоконтроля из упражнения 7. Выяснить, существуют ли пределы $\lim\limits_{t\to+\infty} w_m(t)$ и $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)$, если $w_m(0) \geqslant w_1$.

Приложения

Эти приложения являются кратким изложением основных определений и результатов для линейных и нелинейных операторов, функциональных пространств и эллиптических дифференциальных уравнений.

Материал в приложениях дается для того, чтобы минимизировать необходимость обращения ко многим дополнительным ссылкам.

Приложение A. Элементы теории операторов

Фредгольмовы операторы. Пусть B_1 и B_2 — банаховы пространства. Замкнутый линейный оператор $A : \mathcal{D}(A) \subset B_1 \to B_2$ называется *фредгольмовым*, если $\mathcal{R}(A)$ замкнут в B_2 и

$$\dim \mathcal{N}(A) < \infty, \qquad \operatorname{codim} \mathcal{R}(A) < \infty,$$

где $\mathcal{N}(A)$ и $\mathcal{R}(A)$ соответственно ядро и образ оператора A. *Индекс фредгольмова оператора* A определяется по формуле

$$\operatorname{ind} A = \dim \mathcal{N}(A) - \operatorname{codim} \mathcal{R}(A).$$

Теорема A.1. *Пусть $A : \mathcal{D}(A) \subset B_1 \to B_2$ и $B : \mathcal{D}(B) \subset B_2 \to B_3$ — фредгольмовы операторы, где B_3 — банахово пространство и $\mathcal{D}(B)$ плотно в B_2. Тогда $BA : \mathcal{D}(BA) \subset B_1 \to B_3$ является фредгольмовым оператором и* $\operatorname{ind}(BA) = \operatorname{ind} A + \operatorname{ind} B$.

Доказательство см. в [20], теорема 12.2.

Теорема A.2. *Пусть B_1, B_2 и B — банаховы пространства, и пусть пространство B_1 компактно вложено в B. Предположим, что*

$$A : B_1 \to B_2$$

есть линейный ограниченный оператор. Тогда следующие условия эквивалентны.

(a) *Образ $\mathcal{R}(A)$ замкнут в B_2 и $\dim \mathcal{N}(A) < \infty$.*

(b) *Существует константа $c > 0$ такая, что*

$$\|u\|_{B_1} \leqslant c(\|Au\|_{B_2} + \|u\|_B) \qquad (u \in B_1). \tag{A.1}$$

Теорема A.2 следует из теоремы 7.1 в [20].

Пусть $A : B_1 \to B_2$ — линейный ограниченный оператор. Линейный ограниченный оператор $\mathcal{R}_1 : B_2 \to B_1$ называется *левым регуляризатором* оператора A, если $\mathcal{R}_1 A = I_1 + T_1$, где $T_1 : B_1 \to B_1$ — компактный оператор, $I_1 : B_1 \to B_1$ — единичный оператор. Линейный ограниченный оператор $\mathcal{R}_2 : B_2 \to B_1$ называется *правым регуляризатором* оператора A, если $A\mathcal{R}_2 = I_2 + T_2$, где $T_2 : B_2 \to B_2$ — компактный оператор, $I_2 : B_2 \to B_2$ — единичный оператор.

Теорема A.3. *Пусть $A : B_1 \to B_2$ — линейный ограниченный оператор, где B_1 и B_2 — банаховы пространства. Если оператор A имеет левый регуляризатор, то образ $\mathcal{R}(A)$ замкнут в B_2 и $\dim \mathcal{N}(A) < \infty$. Обратно, если образ $\mathcal{R}(A)$ замкнут в B_2, $\dim \mathcal{N}(A) < \infty$ и $\mathcal{R}(A)$ имеет замкнутое прямое дополнение в B_2, то оператор A имеет левый регуляризатор.*

Доказательство см. в [20], теорема 14.3.

Теорема A.4. *Пусть $A : B_1 \to B_2$ — линейный ограниченный оператор. Если оператор A имеет правый регуляризатор, то образ $\mathcal{R}(A)$*

замкнут в B_2 *и* $\operatorname{codim}\mathcal{R}(A) < \infty$*. Обратно, если* $\mathcal{R}(A)$ *замкнут в* B_2*,* $\operatorname{codim}\mathcal{R}(A) < \infty$ *и* $\mathcal{N}(A)$ *имеет замкнутое прямое дополнение в* B_1*, то оператор* A *имеет правый регуляризатор.*

Доказательство см. в [20], теорема 15.2.

Из теорем A.2, A.3 и A.4 мы получаем следующий результат.

Теорема A.5. *Пусть* B_1, B_2 *и* B — *банаховы пространства, и пусть пространство* B_1 *компактно вложено в* B*. Предположим, что*

$$A : B_1 \to B_2$$

есть линейный ограниченный оператор. Тогда следующие условия эквивалентны.

(a) *Оператор* $A : B_1 \to B_2$ — *фредгольмов.*

(b) *Оператор* A *имеет как правый, так и левый регуляризаторы.*

(c) *Выполняется априорная оценка* (A.1)*, и оператор* A *имеет правый регуляризатор.*

Устойчивость свойств операторов.

Теорема A.6. *Пусть* $T : B \to B$ — *линейный ограниченный оператор в банаховом пространстве* B*. Предположим, что оператор* $T^m : B \to B$ *компактный при некотором* $m \in \mathbb{N}$*. Тогда оператор* $I + T$ *фредгольмов и* $\operatorname{ind}(I+T) = 0$*, где* I — *единичный оператор в* B*.*

Доказательство см. в [20], теорема 15.4.

Теорема A.7. *Пусть* $A : B_1 \to B_2$ — *ограниченный фредгольмов оператор. Предположим, что* $T : B_1 \to B_2$ — *компактный оператор или ограниченный оператор с достаточно малой нормой. Тогда оператор* $A + T : B_1 \to B_2$ *фредгольмов и* $\operatorname{ind}(A+T) = \operatorname{ind} A$*.*

Теорема А.7 вытекает из теорем 15.2 и 16.4 в [20].

Пусть $L, L_0 : B_1 \to B_2$ — линейные ограниченные операторы. Обозначим

$$L_\tau = L_0 + \tau(L - L_0) \qquad (0 \leqslant \tau \leqslant 1).$$

Сформулируем теперь теорему о гомотопической устойчивости индекса.

Теорема А.8. *Предположим, что операторы $L_\tau : B_1 \to B_2$ фредгольмовы при $0 \leqslant \tau \leqslant 1$. Тогда $\operatorname{ind} L = \operatorname{ind} L_0$.*

Доказательство. В силу теоремы А.7 для доказательства достаточно покрыть отрезок $[0,1]$ множеством интервалов (a_i, b_i) $(i \in I_0)$ так, что на каждом интервале $(a_i, b_i) \cap [0,1]$ индекс L_τ сохраняется, где I_0 — множество индексов. Затем мы можем выбрать конечное подпокрытие отрезка $[0,1]$. □

Теорема А.9. *Пусть $L, L_0 : B_1 \to B_2$ — линейные ограниченные операторы. Предположим, что оператор L_0 имеет ограниченный обратный $L_0^{-1} : B_2 \to B_1$ и для любого $0 \leqslant \tau \leqslant 1$*

$$c_1 \|L_\tau u\|_{B_2} \leqslant \|u\|_{B_1} \leqslant c_2 \|L_\tau u\|_{B_2} \qquad (u \in B_1), \tag{A.2}$$

где c_1, $c_2 > 0$ не зависят от τ, u. Тогда оператор L имеет ограниченный обратный $L^{-1} : B_2 \to B_1$.

Эта теорема представляет собой хорошо известный метод продолжения по параметру (см., например, лемму 1.1 в [22, гл. 3, § 1]).

Операторы, мероморфно зависящие от параметра. Пусть B_1 и B_2 — комплексные банаховы пространства. Обозначим через $\mathcal{B}(B_1, B_2)$ пространство линейных ограниченных операторов, отображающих B_1

в B_2. Рассмотрим оператор-функцию $\lambda \mapsto A(\lambda) \in \mathcal{B}(B_1, B_2)$ для $\lambda \in \Lambda$, где $\Lambda \in \mathbb{C}$ — связное открытое множество.

Оператор-функция $\lambda \mapsto A(\lambda) \in \mathcal{B}(B_1, B_2)$ называется *аналитической в точке* $\lambda_0 \in \Lambda$, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что оператор-функцию $\lambda \mapsto A(\lambda)$ можно разложить в ряд Тейлора

$$A(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j(\lambda - \lambda_0)^j \qquad (\lambda \in B_\varepsilon(\lambda_0)), \tag{A.3}$$

сходящийся по операторной норме, где $A_j \in \mathcal{B}(B_1, B_2)$ и

$$B_\varepsilon(\lambda_0) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon\} \subset \Lambda.$$

Мы будем говорить, что оператор–функция *аналитическая* в Λ, если она аналитическая в любой точке Λ.

Аналогично оператор-функция $\lambda \mapsto A(\lambda) \in \mathcal{B}(B_1, B_2)$ называется *мероморфной в точке* $\lambda_0 \in \Lambda$, если для некоторого $\varepsilon > 0$ ее можно разложить в ряд Лорана

$$A(\lambda) = \sum_{j=-r}^{\infty} A_j(\lambda - \lambda_0)^j \qquad (\lambda \in B_\varepsilon(\lambda_0) \setminus \{\lambda_0\}), \tag{A.4}$$

сходящийся по операторной норме, где $A_j \in \mathcal{B}(B_1, B_2)$ и $B_\varepsilon(\lambda_0) \subset \Lambda$. Точка λ_0 называется *полюсом* оператор-функции $\lambda \mapsto A(\lambda)$, если найдется $r_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $r_0 \leqslant r$ и $A_{-r_0} \neq 0$. Наибольшее число r_0 такое, что $A_{-r_0} \neq 0$, называется *порядком полюса*.

Оператор-функция $\lambda \mapsto A(\lambda) \in \mathcal{B}(B_1, B_2)$, мероморфная в точке $\lambda_0 \in \Lambda$, называется *конечно-мероморфной* в точке λ_0, если операторы A_j $(-r \leqslant j < 0)$ конечномерны. Будем говорить, что мероморфная в точке $\lambda_0 \in \Lambda$ оператор-функция $\lambda \mapsto A(\lambda) \in \mathcal{B}(B_1, B_2)$ *фредгольмова в точке* λ_0, если оператор A_0 в разложении (A.4) является фредгольмовым.

По определению оператор-функция $\lambda \mapsto A(\lambda) \in \mathcal{B}(B_1, B_2)$ мероморфна в Λ, если она мероморфна в каждой точке множества Λ. Аналогично мы можем определить конечно-мероморфную и фредгольмову оператор-функции в Λ.

Теорема А.10. *Предположим, что $\lambda \mapsto A(\lambda) \in \mathcal{B}(B_1, B_2)$ — аналитическая фредгольмова оператор-функция в Λ и в некоторой точке $\lambda_0 \in \Lambda$ оператор $A(\lambda_0)$ имеет ограниченный обратный*

$$A^{-1}(\lambda_0) : B_2 \to B_1.$$

Тогда оператор-функция

$$\lambda \mapsto A^{-1}(\lambda) \in \mathcal{B}(B_2, B_1)$$

есть конечно-мероморфная фредгольмова оператор-функция в Λ.

Теорема А.10 следует из леммы 2.1 и следствия 3.3 в [8].

Пусть оператор-функция $\lambda \mapsto A(\lambda) \in \mathcal{B}(B_1, B_2)$ аналитична в точке $\lambda_0 \in \Lambda$. Точка λ_0 называется *собственным значением оператор-функции* $\lambda \mapsto A(\lambda)$, если существует аналитическая в точке λ_0 функция $\lambda \mapsto \psi(\lambda) \in B_1$ такая, что $A(\lambda_0)\psi(\lambda_0) = 0$ и $\psi(\lambda_0) \neq 0$. Функция ψ называется *корневой функцией* для оператор-функции $\lambda \mapsto A(\lambda)$ в точке $\lambda = \lambda_0$. Порядок нуля $\lambda = \lambda_0$ функции $\lambda \mapsto A(\lambda)\psi(\lambda)$ называется *кратностью корневой функции* ψ, а вектор $\psi^0 = \psi(\lambda_0)$ называется *собственным вектором* (*собственной функцией*) *оператор-функции* $\lambda \mapsto A(\lambda)$, соответствующим собственному значению λ_0. Пусть $\lambda \mapsto \psi(\lambda)$ — корневая функция для оператор-функции $\lambda \mapsto A(\lambda)$ в точке λ_0, имеющая кратность p_0, и пусть

$$\psi(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi^j (\lambda - \lambda_0)^j,$$

где $\psi^j \in B_1$. Тогда векторы $\psi^1, \ldots, \psi^{p_0-1}$ называются *присоединенными векторами* (*присоединенными функциями*) к собственному вектору ψ^0. Упорядоченная система $\psi^0, \psi^1, \ldots, \psi^{p_0-1}$ называется *жордановой цепочкой*, соответствующей λ_0. Назовем подсистему $\psi^0, \psi^1, \ldots, \psi^M$ $(M \leqslant p_0 - 1)$ *жордановой подпоследовательностью*, соответствующей собственному значению λ_0.

Легко доказать, что система $\psi^0, \psi^1, \ldots, \psi^{p_0-1}$ образует жорданову цепочку, соответствующую λ_0, тогда и только тогда, когда

$$\sum_{q=0}^{p} \frac{1}{q!} \partial_\lambda^q A(\lambda_0) \psi^{p-q} = 0 \qquad (p = 0, \ldots, p_0 - 1). \tag{A.5}$$

Собственные векторы, соответствующие собственному значению λ_0 оператор-функции $\lambda \mapsto A(\lambda)$, образуют линейное подпространство в B_1. Это подпространство называется *ядром* оператора $A(\lambda_0)$ и обозначается через $\mathcal{N}(A(\lambda_0))$. Наибольшая кратность всех корневых функций $\psi(\lambda)$ таких, что $\psi(\lambda_0) = \psi_0$, называется *рангом собственного вектора* ψ^0 $\big(\operatorname{rank} \psi^0\big)$, если множество таких кратностей ограничено.

Пусть λ_0 — собственное значение оператор-функции $\lambda \mapsto A(\lambda)$ и

$$q_0 = \dim \mathcal{N}(A(\lambda_0)) < \infty.$$

Число q_0 называется *геометрической кратностью* λ_0. Обозначим через $\psi^{0,1}, \ldots, \psi^{0,q_0}$ линейно независимую систему собственных векторов таких, что $\operatorname{rank} \psi^{0,1}$ является наибольшим рангом из всех собственных векторов, соответствующих λ_0, а $\operatorname{rank} \psi^{0,q}$ $(q = 2, \ldots, q_0)$ является наибольшим рангом собственных векторов из некоторого прямого дополнения к линейной оболочке $\mathcal{L}\big(\psi^{0,1}, \ldots, \psi^{0,q-1}\big)$ в $\mathcal{N}(A(\lambda_0))$. Числа $p_q = \operatorname{rank} \psi^{0,q}$ $(q = 1, \ldots, q_0)$ называются *частными кратностями* собственного значения λ_0. Частные кратности p_q собственного значения λ_0 однозначно определены оператор-функцией $\lambda \mapsto A(\lambda)$. Сумма $M = M(A(\lambda_0)) = p_1 + \cdots + p_{q_0}$ называется *полной кратностью* λ_0. Собственное значение λ_0 называется *простым*, если его полная кратность равна 1. Пусть $\psi^{0,q}, \ldots, \psi^{p_q-1,q}$ $(q = 1, \ldots, q_0)$ образуют жордановы цепочки. Тогда совокупность векторов $\{\psi^{0,q}, \ldots, \psi^{p_q-1,q},\ q = 1, \ldots, q_0\}$ называется *канонической системой жордановых цепочек*, соответствующей λ_0.

Точка $\lambda_0 \in \Lambda$ называется *нормальной точкой аналитической оператор-функции* $\lambda \mapsto A(\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$, если $\lambda \mapsto A(\lambda)$ фредгольмова в точке λ_0 и для всех точек λ из некоторого проколотого круга $B_\varepsilon(\lambda_0) \setminus \{\lambda_0\} \subset \Lambda$ существует обратный оператор $A^{-1}(\lambda) \in \mathcal{B}(B_2, B_1)$. В силу леммы 2.1 и следствия 3.2 из [8] нормальная точка $\lambda_0 \in \Lambda$ является собственным значением оператор-функции $\lambda \mapsto A(\lambda)$ тогда и только тогда, когда она полюс оператор-функции $\lambda \mapsto A^{-1}(\lambda)$. Более того, наибольший ранг всех собственных векторов, соответствующих собственному значению λ_0 оператор-функции $\lambda \mapsto A(\lambda)$, равен порядку полюса λ_0 оператор-функции $\lambda \mapsto A^{-1}(\lambda)$.

Пусть $\lambda \mapsto A(\lambda)$ аналитическая оператор-функция в Λ. Обозначим через $\lambda \mapsto A^*(\lambda)$ оператор-функцию $\lambda \mapsto [A(\bar{\lambda})]^* \in \mathcal{B}(B_2^*, B_1^*)$, которая является аналитической в Λ^*. Здесь область Λ^* симметрична с Λ относительно действительной оси. Если λ_0 — нормальная точка оператор-функции $\lambda \mapsto A(\lambda)$, то $\overline{\lambda}_0$ — нормальная точка оператор-функции $\lambda \mapsto A^*(\lambda)$ и частные кратности $p_1, \ldots, p_{q_0}$ собственного значения λ_0 оператор-функции $\lambda \mapsto A(\lambda)$ равны частным кратностям собственного значения $\overline{\lambda}_0$ оператор-функции $\lambda \mapsto A^*(\lambda)$ (см. теорему 5.3 в [8]).

Теорема A.11. *Пусть* $\lambda_0 \in \Lambda$ — *собственное значение и нормальная точка оператор-функции* $\lambda \mapsto A(\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$. *Тогда существует каноническая система жордановых цепочек*

$$\{\psi^{0,q}, \psi^{1,q}, \ldots, \psi^{p_q-1,q},\ q = 1, \ldots, q_0\}$$

для оператор-функции $\lambda \mapsto A(\lambda)$, *соответствующая* λ_0, *и каноническая система жордановых цепочек*

$$\{\xi^{0,q}, \xi^{1,q}, \ldots, \xi^{p_q-1,q},\ q = 1, \ldots, q_0\}$$

для оператор-функции $\lambda \mapsto A^*(\lambda)$, *соответствующая* $\overline{\lambda}_0$, *такие, что*

$$\Xi[A^{-1}(\lambda)] = \sum_{q=1}^{q_0} \sum_{k=1}^{p_q} (\lambda - \lambda_0)^{-k} \sum_{p=0}^{p_q-k} \xi^{p,q}(\cdot)\psi^{p_q-k-p,q}, \tag{A.6}$$

где $\Xi[A^{-1}(\lambda)]$ — *главная часть разложения в ряд Лорана для* $A^{-1}(\lambda)$.

Доказательство см. в [8], теорема 7.1.

Заметим, что, вообще говоря, вектора в жордановой цепочке не являются линейно независимыми.

Спектральные свойства линейных операторов. Пусть $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset B \to B$ — линейный оператор в комплексном банаховом пространстве B. *Резольвентное множество* оператора $\mathcal{A}$ — множество чисел $\eta \in \mathbb{C}$ таких, что оператор $\eta I - \mathcal{A}$ имеет ограниченный обратный $(\eta I - \mathcal{A})^{-1} : B \to B$. Обозначим через $\rho(\mathcal{A})$ резольвентное множество оператора $\mathcal{A}$. Оператор

$$(\eta I - \mathcal{A})^{-1} = R(\eta, \mathcal{A}) \qquad (\eta \in \rho(\mathcal{A}))$$

называется *резольвентой* $\mathcal{A}$. Дополнение к $\rho(\mathcal{A})$ обозначается через $\sigma(\mathcal{A})$ и называется *спектром* оператора $\mathcal{A}$. Число $\eta \in \mathbb{C}$ называется *собственным значением оператора* $\mathcal{A}$, а $x \neq 0$ — *собственным вектором* (*собственной функцией*) оператора $\mathcal{A}$, соответствующим η, если

$(\eta I - \mathcal{A})x = 0$. Число $q_0 = \dim \mathcal{N}(\eta I - \mathcal{A})$ называется *геометрической кратностью* η.

Пусть оператор-функция $\eta \mapsto R(\eta, \mathcal{A})$ конечно-мероморфна в точке $\eta = \eta_0$, которая является собственным значением $\mathcal{A}$. Тогда разложение (A.4) примет вид

$$R(\eta, \mathcal{A}) = \sum_{j=-r}^{\infty} A_j (\eta - \eta_0)^j \qquad (\eta \in B_\varepsilon(\eta_0) \setminus \{\eta_0\}),$$

где $A_j \in \mathcal{B}(B, B)$ и $\dim \mathcal{R}(A_j) < \infty$ для $-r \leqslant j < 0$. Оператор $-A_{-1}$ — проектор, т. е. $A_{-1}^2 = -A_{-1}$. Число $m_0 = \dim \mathcal{R}(A_{-1})$ называется *алгебраической кратностью* η_0.

Спектр замкнутого линейного оператора $\mathcal{A}$ можно разделить на три непересекающихся подмножества.

Точечный спектр $\sigma_p(\mathcal{A})$ состоит из собственных значений $\mathcal{A}$.

Непрерывный спектр $\sigma_c(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{A}) \setminus \sigma_p(\mathcal{A})$ состоит из всех $\eta \in \mathbb{C}$ таких, что образ $\mathcal{R}(\eta I - \mathcal{A})$ плотный в B и $\mathcal{R}(\eta I - \mathcal{A}) \neq B$.

Остаточный спектр $\sigma_r(\mathcal{A})$ задается формулой

$$\sigma_r(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A}) \setminus (\sigma_p(\mathcal{A}) \cup \sigma_c(\mathcal{A})).$$

Далее будем считать, что оператор $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset B \to B$ замкнут.

Через B_1 обозначим линейное пространство $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ с нормой графика

$$\|u\|_{B_1} = \|u\|_B + \|\mathcal{A}u\|_B.$$

Поскольку $\mathcal{A}$ — замкнутый оператор, то пространство B_1 является банаховым. Положим $B_2 = B$. Рассмотрим аналитическую оператор-функцию $\eta \mapsto A(\eta) = \eta I - \mathcal{A} \in \mathcal{B}(B_1, B_2)$.

Спектр $\sigma(\mathcal{A})$ называется *дискретным*, если он состоит из изолированных собственных значений конечной алгебраической кратности.

Следующее утверждение приведено в [17, гл. 3, § 6].

Теорема A.12. *Пусть* $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset B \to B$ *— замкнутый линейный оператор. Предположим, что для некоторого* $\eta = \eta_0$ *существует компактная резольвента* $R(\eta_0, \mathcal{A}) : B \to B$. *Тогда спектр* $\sigma(\mathcal{A})$ *дискретный и резольвента* $R(\eta, \mathcal{A}) : B \to B$ *компактна для каждого* $\eta \in \rho(\mathcal{A})$.

Доказательство. Очевидно,

$$\eta I - \mathcal{A} = ((\eta - \eta_0)R(\eta_0, \mathcal{A}) + I)(\eta_0 I - \mathcal{A})$$

для каждого $\eta \in \mathbb{C}$. Поэтому из компактности резольвенты $R(\eta_0, \mathcal{A}) : B \to B$ и теоремы A.1 следует, что оператор $\eta I - \mathcal{A}$ фредгольмов. Тогда в силу теоремы A.10 все точки комплексной плоскости $\mathbb{C}$ нормальные для оператор-функции $\eta \mapsto A(\eta) = \eta I - \mathcal{A}$, а спектр $\sigma(\mathcal{A})$ состоит из изолированных собственных значений. Следовательно, из теоремы A.11 мы выводим, что каждое собственное значение оператора $\mathcal{A}$ имеет конечную алгебраическую кратность.

Компактность резольвенты $R(\eta, \mathcal{A}) : B \to B$ $(\eta \in \rho(\mathcal{A}))$ следует из резольвентного тождества и компактности $R(\eta_0, \mathcal{A})$. $\square$

Секториальные операторы. Изложенные в этом пункте свойства секториальных операторов взяты из [17, гл. 5, § 3, и гл. 6, § 2].

Пусть H — гильбертово пространство. Линейный оператор

$$B : \mathcal{D}(B) \subset H \to H$$

называется *m-аккретивным*, если для любого $\operatorname{Re} \lambda > 0$ существует ограниченный обратный оператор $(B + \lambda I)^{-1} : H \to H$ и

$$\|(B + \lambda I)^{-1}\| \leqslant (\operatorname{Re} \lambda)^{-1}. \tag{A.7}$$

Обозначим

$$\Theta(B) = \{(Bu, u) : u \in \mathcal{D}(B),\ \|u\| = 1\}.$$

Если $B : \mathcal{D}(B) \subset H \to H$ — m-аккретивный оператор, то B замкнут, $\mathcal{D}(B)$ всюду плотно в H, и $\Theta(B) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0\}$.

Мы будем говорить, что линейный оператор $B : \mathcal{D}(B) \subset H \to H$ *квази-m-аккретивный*, если оператор $B + \alpha I$ m-аккретивный для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$. Оператор B называется *секториальным*, если существуют $\theta < \pi/2$ и $\gamma \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\Theta(B) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - \gamma)| \leqslant \theta\}.$$

Число γ называется *вершиной секториального оператора B*. Оператор $B : \mathcal{D}(B) \subset H \to H$ называется *m-секториальным*, если он секториальный и квази-m-аккретивный.

Рассмотрим теперь полуторалинейную форму $b[u, v]$ с областью определения $\mathcal{D}(b) \subset H$. Форма b называется *симметрической*, если $b[u, v] = \overline{b[v, u]}$ для $u, v \in \mathcal{D}(b)$. Определим *сопряженную форму b^** формулой

$$b^*[u, v] = \overline{b[v, u]}, \qquad \mathcal{D}(b^*) = \mathcal{D}(b). \tag{A.8}$$

Очевидно, формы

$$p = \frac{1}{2}(b + b^*), \qquad q = \frac{1}{2i}(b - b^*) \tag{A.9}$$

симметрические и

$$a = p + iq. \tag{A.10}$$

Обозначим $\Theta(b) = \{b[u] : u \in \mathcal{D}(b),\ \|u\| = 1\}$, где $b[u] = b[u, u]$. Форма b называется *секториальной*, если существуют $\theta < \pi/2$ и $\gamma \in \mathbb{R}$ такие, что $\Theta(b) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - \gamma)| \leqslant \theta\}$. Число γ называется *вершиной секториальной формы b*. Секториальная форма b называется *замкнутой*, если из условий $u_n \in \mathcal{D}(b)$, $\|u_n - u\| \to 0$ и $b[u_n - u_m] \to 0$ при $n, m \to \infty$ следует, что $u \in \mathcal{D}(b)$ и $b[u_n - u] \to 0$ при $n \to \infty$.

Пусть b — секториальная форма. Введем скалярное произведение в $H_p = \mathcal{D}(b)$ по формуле

$$(u,v)_p = p[u,v] + (\varkappa - \gamma)(u,v) \qquad ((u,v) \in \mathcal{D}(b)), \tag{A.11}$$

где γ — вершина формы b, $\varkappa > 0$ — некоторая константа. Секториальная форма b замкнута в H тогда и только тогда, когда предгильбертово пространство H_p полно (см. теорему 1.11 в [17, гл. 4, § 1]).

Линейное подпространство $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}(b)$ называется *ядром формы* b, если сужение b на $\mathcal{D}'$ имеет замыкание, равное b.

Теорема A.13. *Пусть $b[u,v]$ $(u,v \in \mathcal{D}(b))$ — плотно определенная замкнутая секториальная полуторалинейная форма в H, и пусть γ — вершина b. Тогда существует m-секториальный оператор $B : D(B) \subset H \to H$ такой, что*

(a) $\mathcal{D}(B) \subset \mathcal{D}(b)$ *и*

$$b[u,v] = (Bu,v) \qquad (u \in \mathcal{D}(B),\ v \in \mathcal{D}(b)); \tag{A.12}$$

(b) *оператор* $B + (\varkappa - \gamma)I : \mathcal{D}(B) \subset H \to H$ *имеет ограниченный обратный* $(B + (\varkappa - \gamma)I)^{-1} : H \to H_p$;

(c) $\mathcal{D}(B)$ — *ядро* b;

(d) если $u \in \mathcal{D}(b)$, $f \in H$ и равенство

$$b[u,v] = (f,v) \tag{A.13}$$

выполняется для каждого v, принадлежащего ядру b, то $u \in \mathcal{D}(B)$ и $Bu = f$.

Оператор B однозначно определен условием (a).

Доказательство см. в [17, гл. 6, § 2], теорема 2.1.

Мы будем говорить, что B является m-секториальным оператором, ассоциированным с формой b. Обозначим $B = B_b$.

Следующие два утверждения следуют из теоремы A.13 (см. теоремы 2.5 и 2.6 в [17, гл. 6, § 2]).

Теорема A.14. *Пусть выполнены условия теоремы* A.13*, и пусть* $B = B_b$*. Тогда* $B_b^* = B_{b^*}$*.*

Теорема A.15. *Пусть* b — *плотно определенная симметрическая замкнутая форма, ограниченная снизу. Тогда оператор* $B = B_b$*, ассоциированный с формой* b*, является самосопряженным и ограниченным снизу. Кроме того, оператор* B *и форма* b *имеют одну и ту же нижнюю грань.*

Обозначим через G плотно определенный секториальный оператор. Рассмотрим форму

$$g[u, v] = (Gu, v)$$

с областью определения $\mathcal{D}(g) = \mathcal{D}(G)$. В силу теоремы 1.27 из [17, гл. 6, § 5] форма g замыкаема. Пусть b — замыкание формы g, и пусть $B = B_b$ — m-секториальный оператор, ассоциированный с b. Поскольку $\mathcal{D}(G)$ — ядро b, то $G \subset B$ по теореме A.13. Оператор B называется *фридрихсовым расширением* G.

Используя теорему A.15, мы получим следующий результат.

Теорема A.16. *Пусть* G — *плотно определенный симметрический оператор, ограниченный снизу. Тогда фридрихсово расширение*

$$B : H \to H$$

оператора G — *самосопряженный оператор. Кроме того, операторы* B *и* G *имеют одинаковую нижнюю грань.*

Доказательство теоремы A.16 можно найти также в [10, гл. 12, § 5].

Установим теперь некоторые вспомогательные результаты, касающиеся m-секториальных операторов.

Теорема A.17. *Пусть гильбертово пространство* H_1 *всюду плотно в* H, *и пусть оператор вложения* H_1 *в* H *компактный. Предположим, что* b *— полуторалинейная форма в* H *с областью определения* $\mathcal{D}(b) = H_1$ *и*

$$|b[u,v]| \leqslant c_0 \|u\|_{H_1} \|v\|_{H_1} \qquad (u, v \in H_1), \tag{A.14}$$

$$\operatorname{Re} b[u] \geqslant c_1 \|u\|_{H_1}^2 - c_2 \|u\|^2 \qquad (u \in H_1), \tag{A.15}$$

где $c_0, c_1 > 0$, $c_2 \geqslant 0$ *— константы. Тогда* b *— замкнутая секториальная форма в* H *с вершиной* $\gamma = -c_2$. *При этом* m*-секториальный оператор* $B = B_b : \mathcal{D}(B_b) \subset H \to H$, *ассоциированный с* b, *имеет дискретный спектр* $\sigma(B_b)$ *и* $\sigma(B_b) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > -c_2\}$. *Если* $\lambda \notin \sigma(B_b)$, *то резольвента* $R(\lambda, B_b) : H \to H$ *— компактный оператор. Кроме того,* $B_b^* = B_{b^*}$.

Для доказательства заметим, что из неравенств (A.14) и (A.15) следует, что форма b замкнута и секториальна с вершиной $\gamma = -c_2$. Остальные утверждения теоремы A.17 следуют из теорем A.13, A.12 и A.14.

Теорема A.18. *Пусть выполняются условия теоремы* A.17. *Тогда оператор* $B_b : H \to H$ *фредгольмов и* $\operatorname{ind} B_b = 0$.

Доказательство следует из компактности резольвенты $R(\lambda, B_b) : H \to H$ $(\lambda \notin \sigma(B_b))$, равенства $B_b = (I - \lambda R(\lambda, B_b))(B_b - \lambda I)$ и теоремы A.1.

Теорема A.19. *Пусть выполнены условия теоремы* A.17, *и пусть* $b = b^*$. *Тогда оператор* $B_b : \mathcal{D}(B_b) \subset H \to H$ *самосопряженный.*

Спектр $\sigma(B_b)$ состоит из вещественных изолированных собственных значений $\lambda_s > -c_2$ конечной кратности. Последовательность собственных функций $\{v_s\}$ оператора B_b образует ортонормированный базис в H. Более того, последовательность функций $\left\{\dfrac{v_s}{\sqrt{\lambda_s + c_2}}\right\}$ образует ортонормированный базис в H_1 со скалярным произведением

$$(u, v)'_{H_1} = b[u, v] + c_2(u, v). \tag{A.16}$$

Доказательство. В силу теоремы A.17 оператор $B_b : H \to H$ самосопряженный, а спектр $\sigma(B_b)$ состоит из изолированных собственных значений $\lambda_s > -c_2$ конечной кратности.

Задача на собственные функции

$$B_b v = \lambda v$$

эквивалентна задаче

$$v = (\lambda + c_2)(B_b + c_2 I)^{-1} v.$$

Из теоремы A.13 (b) и резольвентного тождества следует, что сужение оператора $(B_b + c_2 I)^{-1}$ на H_1 — компактный оператор. Далее, по теореме A.13 (a) мы имеем

$$\begin{aligned}\Big((B_b + c_2 I)^{-1} u, w\Big)'_{H_1} &= b[(B_b + c_2 I)^{-1} u, w] + c_2\Big((B_b + c_2 I)^{-1} u, w\Big) = \\ &= (u, w) = \overline{(w, u)} = \\ &= \overline{b[(B_b + c_2 I)^{-1} w, u]} + c_2\overline{\Big((B_b + c_2 I)^{-1} w, u\Big)} = \\ &= \Big(u, (B_b + c_2 I)^{-1} w\Big)'_{H_1}\end{aligned}$$

для всех $u, w \in H_1$. Следовательно, оператор $(B_b + c_2 I)^{-1} : H_1 \to H_1$ самосопряженный. По теореме Гильберта—Шмидта в H_1 существует ортонормированный базис, состоящий из собственных функций v_s оператора $(B_b + c_2 I)^{-1}$, соответствующих собственным значениям $(\lambda_s + c_2)^{-1}$. Предположим, что $\|v_s\| = 1$. В силу (A.12) и (A.16) мы имеем

$$(v_s, v_r) = \frac{(v_s, v_r)'_{H_1}}{\lambda_s + c_2} = 0 \qquad (s \neq r),$$

$$\left(\frac{v_s}{\sqrt{\lambda_s + c_2}}, \frac{v_s}{\sqrt{\lambda_s + c_2}}\right)'_{H_1} = (v_s, v_s) = 1 \qquad (s = 1, 2, \dots).$$

Следовательно, последовательность функций $\left\{\dfrac{v_s}{\sqrt{\lambda_s + c_2}}\right\}$ образует ортонормированный базис в H_1. Поскольку H_1 всюду плотно в H, последовательность функций $\{v_s\}$ образует ортонормированный базис H. $\square$

Нелинейные операторы. Теорема Банаха о неподвижной точке. Пусть B — банахово пространство и $G : \mathcal{D}(G) \subset B \to B$ — некоторый, вообще говоря, нелинейный оператор в пространстве B. Элемент $u \in \mathcal{D}(G)$ называется неподвижной точкой оператора G, если выполнено равенство

$$G(u) = u.$$

Пусть $\mathcal{V}$ — непустое замкнутое подмножество банахова пространства B. Предположим, что оператор G отображает множество $\mathcal{V}$ в себя. Оператор G называется *сжимающим отображением* на множестве $\mathcal{V}$, если существует такая константа q $(0 \leqslant q < 1)$, что

$$\|G(u) - G(v)\| \leqslant q\|u - v\| \tag{A.17}$$

для любых $u, v \in \mathcal{V}$.

Для сжимающих отображений имеет место следующая теорема Банаха о неподвижной точке.

Теорема A.20. *Пусть оператор $G : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ является сжимающим отображением. Тогда он имеет, и при том единственную, неподвижную точку на множестве $\mathcal{V}$.*

Пусть $u \in \mathcal{V}$ — неподвижная точка оператора G. Рассмотрим произвольный элемент $u_0 \in \mathcal{V}$ и зададим последовательность $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ по рекурсивной формуле

$$u_k = G(u_{k-1}) \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Нетрудно показать, что последовательность $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ сходится к неподвижной точке u. Более того, имеет место оценка

$$\|u - u_k\| \leqslant \frac{q^k}{1-q}\|u_1 - u_0\|,$$

где q — константа из формулы (A.17).

Приложение B. Функциональные пространства

Пространства L_p. Открытое связное подмножество Ω в $\mathbb{R}^n$ называется *областью*. Рассмотрим пространства функций f, измеримых по Лебегу в области Ω и таких, что $|f|^p$ интегрируема по Ω $(1 \leqslant p < \infty)$. Это пространство обозначается через $L_p(\Omega)$. Пространство $L_p(\Omega)$ — банахово пространство с нормой

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Если $p = 2$, то мы получим гильбертово пространство $L_2(\Omega)$ со скалярным произведением

$$(f, g)_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} f(x)\overline{g(x)} \, dx.$$

Пусть $L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$ — пространство измеримых по Лебегу в Ω функций f таких, что $f \in L_p(K)$ для любого компакта $K \subset \Omega$.

Пространства Гельдера. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область. Обозначим через $C(\Omega)$ (или $C(\overline{\Omega})$) пространство непрерывных в Ω (или в $\overline{\Omega}$) функций.

Пусть $C^k(\Omega)$ — пространство функций в $C(\Omega)$, имеющих непрерывные производные порядка не выше k в Ω, где $k \in \mathbb{N}$. Пусть $C^k(\overline{\Omega})$ — пространство функций в $C^k(\Omega)$, все производные которых порядка не выше k имеют непрерывные продолжения на $\overline{\Omega}$.

Обозначим

$$C^0(\Omega) = C(\Omega), \qquad C^0(\overline{\Omega}) = C(\overline{\Omega}),$$

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\Omega), \qquad C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\overline{\Omega}).$$

Для ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ мы введем пространства Гельдера $C^k(\overline{\Omega})$ и $C^{k+\sigma}(\overline{\Omega})$, где $k \geqslant 0$ — целое и $0 < \sigma < 1$.

Пространство $C^k(\overline{\Omega})$ с нормой

$$\|\varphi\|_{C^k(\overline{\Omega})} = \max_{|\alpha| \leqslant k} \sup_{x \in \overline{\Omega}} |\mathcal{D}^\alpha \varphi(x)|$$

называется *пространством Гельдера*. Здесь

$$\mathcal{D}^\alpha = \mathcal{D}_1^{\alpha_1} \cdots \mathcal{D}_n^{\alpha_n}, \qquad \mathcal{D}_j = -i(\partial/\partial x_j),$$

$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $\alpha_j \geqslant 0$ — целые числа. Вектор α с неотрицательными целыми координатами называется *мультииндексом*.

Очевидно, $C^k(\overline{\Omega})$ — сепарабельное банахово пространство.

Пространство Гельдера $C^{k+\sigma}(\overline{\Omega})$ — пространство функций из $C^k(\overline{\Omega})$, имеющих конечную норму

$$\|u\|_{C^{k+\sigma}(\overline{\Omega})} = \max_{|\alpha| \leqslant k} \sup_{x \in Q} |D^\alpha u(x)| + \max_{|\beta| = k} \sup_{x, y \in \overline{Q},\, x \neq y} \frac{|D^\beta u(x) - D^\beta u(y)|}{|x - y|^\sigma}.$$

Известно, что пространство Гельдера $C^{k+\sigma}(\overline{\Omega})$ — банахово пространство. Однако оно не сепарабельно (см. [38, гл. 4, § 4.5.1]).

Пусть φ — непрерывная функция в Ω. Замыкание множества

$$\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}$$

в Ω называется *носителем* φ. Обозначим через $\operatorname{supp}\varphi$ носитель φ.

Пусть $\dot{C}^{\infty}(\Omega)$ — множество функций из $C^{\infty}(\Omega)$ с компактными носителями в Ω.

Лемма B.1. *Пусть K — компакт в $\mathbb{R}^n$ и $\{S_\alpha\}$ — покрытие K открытыми множествами. Тогда существует конечное подпокрытие $\{S_{\alpha_j}\}$ и неотрицательные функции $\varphi_j \in \dot{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ $(j = 1, \dots, q)$ такие, что*

(a) $\sum\limits_{j=1}^{q} \varphi_j(x) \leqslant 1$ $(x \in \mathbb{R}^n)$,

(b) $\sum\limits_{j=1}^{q} \varphi_j(x) = 1$ $(x \in K)$,

(c) $\operatorname{supp}\varphi_j \subset S_{\alpha_j}$ $(j = 1, \dots, q)$.

Доказательство см. в [10, гл. 14, § 2], лемма 4.

Семейство функций $\{\varphi_j\}$ называется *разбиением единицы*.

Обобщенные функции. Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$. Определим сходимость в пространстве $\dot{C}^{\infty}(\Omega)$ следующим образом: последовательность $\{\varphi_s\} \subset \dot{C}^{\infty}(\Omega)$ сходится к элементу $\varphi \in \dot{C}^{\infty}(\Omega)$, если существует компакт $K \subset \Omega$ такой, что $\operatorname{supp}\varphi_s \subset K$ и

$$\lim_{s \to \infty} \|\varphi - \varphi_s\|_{C^k(\overline{\Omega})} = 0$$

для любого $k = 0, 1, 2, \dots$. Обозначим через $\mathcal{D}(\Omega)$ линейное пространство $\dot{C}^{\infty}(\Omega)$ с такой сходимостью. Можно дать эквивалентное определение сходимости в $\mathcal{D}(\Omega)$, рассматривая $\mathcal{D}(\Omega)$ как локально выпуклое линейное топологическое пространство (см. [13, гл. 1, § 1]).

Линейный функционал f на $\mathcal{D}(\Omega)$ называется *обобщенной функцией* или *распределением* в Ω, если из сходимости $\varphi_s \to \varphi$ в $\mathcal{D}(\Omega)$ вытекает сходимость $\langle f, \varphi_s\rangle \to \langle f, \varphi\rangle$. Обозначим через $\mathcal{D}'(\Omega)$ пространство обобщенных функций (распределений) со слабой сходимостью.

В силу неравенства Шварца каждая функция $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ определяет обобщенную функцию F в Ω по формуле

$$\langle F, \varphi\rangle = \int\limits_{\Omega} f(x)\varphi(x)\,dx \qquad (\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)). \tag{B.1}$$

Будем говорить, что обобщенная функция, определенная формулой (B.1), является функцией. В этом случае мы отождествляем обобщенную функцию F с функцией f.

Определим некоторые операции над обобщенными функциями.

(a) Производная $\mathcal{D}^\alpha f$ обобщенной функции $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ является обобщенной функцией в Ω, заданной формулой

$$\langle \mathcal{D}^\alpha f, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle f, \mathcal{D}^\alpha \varphi\rangle \qquad (\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)).$$

(b) Произведение af функции $a \in C^\infty(\Omega)$ на обобщенную функцию $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ есть обобщенная функция в Ω, заданная формулой

$$\langle af, \varphi\rangle = \langle f, a\varphi\rangle \qquad (\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)).$$

(c) Пусть $Q \subset \Omega$ — открытое множество. Сужение $f|_Q$ обобщенной функции f на Q есть обобщенная функция в Ω, заданная формулой

$$\langle f|_Q, \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle \qquad (\varphi \in \mathcal{D}(Q)).$$

Линейное отображение A из $\mathcal{D}(\Omega)$ (или $\mathcal{D}'(\Omega)$) в себя называется непрерывным, если из сходимости $\varphi_s \to 0$ в $\mathcal{D}(\Omega)$ (или $\mathcal{D}'(\Omega)$) следует, что $A\varphi_s \to 0$ в $\mathcal{D}(\Omega)$ (или $\mathcal{D}'(\Omega)$).

Очевидно, обобщенные функции бесконечно дифференцируемы. Операторы дифференцирования $\mathcal{D}^\alpha$ и умножения на функцию $a \in C^\infty(\Omega)$ непрерывны в пространстве $\mathcal{D}(\Omega)$ (или $\mathcal{D}'(\Omega)$).

Будем говорить, что обобщенная функция f равна нулю на открытом множестве $Q \subset \Omega$, если $\langle f, \varphi \rangle = 0$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Две обобщенные функции f_1 и f_2 на Ω равны в Q, если $f_1 - f_2 = 0$ в Q.

По определению *носитель обобщенной функции* — наименьшее замкнутое подмножество Ω, вне которого f равна нулю.

Медленно растущие обобщенные функции. Через $S(\mathbb{R}^n)$ обозначим линейное пространство функций $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ таких, что

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta \mathcal{D}^\alpha \varphi(x)| = C_{\alpha\beta} < \infty$$

для всех мультииндексов α и β, где $x^\beta = x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n}$.

Определим сходимость в пространстве $S(\mathbb{R}^n)$ следующим образом: последовательность $\{\varphi_s\} \subset S(\mathbb{R}^n)$ сходится к элементу $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, если

$$\lim_{s \to \infty} \|x^\beta \mathcal{D}^\alpha \varphi - x^\beta \mathcal{D}^\alpha \varphi_s\|_{C(\mathbb{R}^n)} = 0$$

для всех α, β.

Линейный функционал f на $S(\mathbb{R}^n)$ называется *медленно растущей обобщенной функцией* в $\mathbb{R}^n$, если из сходимости $\varphi_s \to \varphi$ в $S(\mathbb{R}^n)$ следует, что $\langle f, \varphi_s \rangle \to \langle f, \varphi \rangle$. Обозначим через $S'(\mathbb{R}^n)$ пространство медленно растущих обобщенных функций со слабой сходимостью. Аналогично пространству $\mathcal{D}'(\Omega)$ мы можем определить операции дифференцирования и сужения.

Предположим, что $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и для каждого α существуют целое m_α и положительное число c_α такие, что

$$|\mathcal{D}^\alpha a(x)| \leqslant c_\alpha (1 + |x|)^{m_\alpha}.$$

Определим произведение функции a и медленно растущей обобщенной функции $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ по формуле

$$\langle af, \varphi \rangle = \langle f, a\varphi \rangle \qquad (\varphi \in S(\mathbb{R}^n)).$$

Очевидно, $S'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Определим δ-функцию Дирака следующим образом:

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) \qquad (\varphi \in S(\mathbb{R}^n)).$$

Преобразование Фурье. Определим *преобразование Фурье* $\widehat{f}$ функции $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ по формуле

$$\widehat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) \exp\left(-i(x,\xi)\right) dx \qquad (\xi \in \mathbb{R}^n), \tag{B.2}$$

где $(x, \xi) = x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n$.

Если $g \in L_1(\mathbb{R}^n)$, мы определим *обратное преобразование Фурье* функции g по формуле

$$\check{g}(x) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(\xi) \exp\left(i(x,\xi)\right) d\xi \qquad (x \in \mathbb{R}^n). \tag{B.3}$$

Обозначим $\widehat{f}$ через Ff и $\check{g}$ через $F^{-1}g$.

Теорема B.1. (a) *Преобразования F и F^{-1} отображают $S(\mathbb{R}^n)$ непрерывно и взаимно однозначно на себя, и $FF^{-1} = F^{-1}F = I$ на $S(\mathbb{R}^n)$.*

(b) *Если $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, то*

$$\left(\widehat{\mathcal{D}^\alpha \varphi}\right)(\xi) = \xi^\alpha \widehat{\varphi}(\xi), \qquad \mathcal{D}^\beta \widehat{\varphi}(\xi) = \Big(\widehat{(-x)^\beta \varphi}\Big)(\xi)$$

для всех мультииндексов α и β.

(c) *Если* $\varphi, \psi \in S(\mathbb{R}^n)$, *то*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\overline{\psi}(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi)\overline{\hat{\psi}}(\xi)\,d\xi, \tag{B.4}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\hat{\psi}(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi)\psi(\xi)\,d\xi. \tag{B.5}$$

Определим преобразование Фурье Fu для $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ по формуле

$$\langle Fu, \varphi\rangle = \langle u, F\varphi\rangle \qquad (\varphi \in S(\mathbb{R}^n)). \tag{B.6}$$

В силу (B.5) сформулированное выше определение (B.6) согласуется с определением (B.2), если $u \in S(\mathbb{R}^n)$. Мы обозначим также Fu через $\widehat{u}$.

Аналогично мы определим обратное преобразование Фурье $F^{-1}v$ для $v \in S'(\mathbb{R}^n)$ по формуле

$$\langle F^{-1}v, \psi\rangle = \langle v, F^{-1}\psi\rangle \qquad (\psi \in S(\mathbb{R}^n)). \tag{B.7}$$

Обозначим $F^{-1}v$ через $\check{v}$.

Теорема B.2. (a) *Преобразования F и F^{-1} отображают $S'(\mathbb{R}^n)$ непрерывно и взаимно однозначно на себя, и $FF^{-1} = F^{-1}F = I$ на $S'(\mathbb{R}^n)$.*

(b) *Если* $u \in S'(\mathbb{R}^n)$, *то*

$$\widehat{\mathcal{D}^\alpha u} = \xi^\alpha \widehat{u}, \qquad \mathcal{D}^\beta \widehat{u} = \widehat{(-x)^\beta u}.$$

Теорема B.3 (теорема Планшереля). *Пусть $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$. Тогда преобразование Фурье Ff в смысле обобщенных функций определяет функцию $\widehat{f} \in L_2(\mathbb{R}^n)$. Эта функция имеет вид*

$$\widehat{f}(\xi) = \lim_{R\to\infty} (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{|x|\leqslant R} f(x)\exp\left(-i(x,\xi)\right)dx \qquad (\text{в } L_2(\mathbb{R}^n)). \tag{B.8}$$

При этом

$$\|\widehat{f}\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}, \tag{B.9}$$

$$f(x) = \lim_{R\to\infty} (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{|\xi|\leqslant R} \widehat{f}(\xi) \exp\left(i(x,\xi)\right) d\xi \qquad (\textit{в}\ \ L_2(\mathbb{R}^n)). \tag{B.10}$$

Из этой теоремы вытекает следующий результат.

Теорема B.4. *Преобразование Фурье отображает* $L_2(\mathbb{R}^n)$ *на себя взаимно однозначно, и*

$$(f,g)_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \left(\widehat{f},\widehat{g}\right)_{L_2(\mathbb{R}^n)} \tag{B.11}$$

для всех $f,g\in L_2(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство теорем B.1–B.3 читатель может найти в [13, гл. 6, §§ 1 и 2].

Пространства Соболева. *Пространство Соболева* $W^s(\mathbb{R}^n)$ $(s\in\mathbb{R})$ определим как пространство обобщенных функций $u\in S'(\mathbb{R}^n)$ таких, что $\left(1+|\xi|^2\right)^{s/2}\widehat{u}\in L_2(\mathbb{R}^n)$, с нормой

$$\|u\|_{W^s(\mathbb{R}^n)} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^s |\widehat{u}(\xi)|^2\, d\xi\right)^{1/2}, \tag{B.12}$$

см. [23, 35, 38].

Предположим, что $\Omega=\mathbb{R}^n$ или $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ — область, удовлетворяющая одному из следующих условий.

Условие B.1. $\Omega = R^n_+$.

Условие B.2. Ω — ограниченная область с границей $\partial\Omega\in C^\infty$.

Условие B.3. $\Omega=(0,d)\times G$, где $G\subset\mathbb{R}^{n-1}$ — ограниченная область (с границей $\partial G\in C^\infty$, если $n\geqslant 3$), где $\mathbb{R}^n_+ = \{x\in\mathbb{R}^n : x_n>0\}$ и $\mathbb{R}^n_- = \{x\in\mathbb{R}^n : x_n<0\}$.

Пусть m — неотрицательное целое число. *Пространство Соболева* $W^m(\Omega)$ определим как пространство обобщенных функций $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ таких, что $\mathcal{D}^\alpha u \in L_2(\Omega)$ $(|\alpha| \leqslant m)$, с нормой

$$\|u\|_{W^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Omega |\mathcal{D}^\alpha u(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}. \tag{B.13}$$

Здесь мы полагаем $W^0(\Omega) = L_2(\Omega)$.

Пусть $s = m + \sigma$, где m — неотрицательное целое и $0 < \sigma < 1$. *Пространство Соболева* $W^s(\Omega)$ — пространство функций $u \in W^m(\Omega)$ с конечной нормой

$$\|u\|_{W^s(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{W^m(\Omega)} + \sum_{|\alpha| = m} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|\mathcal{D}^\alpha u(x) - \mathcal{D}^\alpha u(y)|^2}{|x-y|^{n+2\sigma}} \, dx \, dy \right)^{1/2}. \tag{B.14}$$

Пространства Соболева $W^s(\Omega)$ $(s \geqslant 0)$ гильбертовы. Формулы (B.12) и (B.13), (B.14) с $\Omega = \mathbb{R}^n$ задают эквивалентные нормы в $W^s(\mathbb{R}^n)$ для $s \geqslant 0$ (см. лемму 3 в [34, гл. 2, § 2] и [38, гл. 4, § 4.4.1]).

Через $W^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ $(s \geqslant 0)$ мы обозначим пространство, состоящее из распределений $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ таких, что $u \in W^s(K)$ для каждой ограниченной области K, $\overline{K} \subset \Omega$.

Рассмотрим теорему о продолжении функций.

Теорема B.5. *Пусть $s \geqslant 0$. Предположим, что $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область, удовлетворяющая одному из условий* B.1, B.2 *или* B.3. *Тогда для любой $u \in W^s(\Omega)$ существует $U \in W^s(\mathbb{R}^n)$ такая, что $u(x) = U(x)$ $(x \in \Omega)$ и*

$$\|U\|_{W^s(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|u\|_{W^s(\Omega)}. \tag{B.15}$$

Доказательство см. в [23, гл. 1, § 8], теорема 8.1, а также [34, гл. 2].

Таким образом, если Ω удовлетворяет условиям теоремы B.5, то пространство $W^s(\Omega)$ $(s \geqslant 0)$ есть пространство сужений $U|_\Omega$ $(U \in W^s(\mathbb{R}^n))$ с эквивалентной нормой

$$\|u\|_{W^s(\Omega)} = \inf \|U\|_{W^s(\mathbb{R}^n)} \qquad (U \in W^s(\mathbb{R}^n) : U|_\Omega = u). \tag{B.16}$$

Замечание B.1. Теорему B.5 можно обобщить на случай ограниченных областей, удовлетворяющих сильному условию конуса (см. теорему 9.6 в [3, гл. 3, § 9] и теорему в [38, гл. 4, § 4.2.3]). Результаты для пространств Соболева, основанные на теореме продолжения, можно обобщить на случай вышеуказанных областей.

Пусть $m \in \mathbb{N}$. Обозначим через $W^{-m}(\Omega)$ пространство обобщенных функций $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ таких, что

$$\|u\|_{W^{-m}(\Omega)} = \sup_{\varphi \in \dot{C}^\infty(\Omega)} \frac{|\langle u, \varphi \rangle|}{\|\varphi\|_{W^m(\Omega)}} < \infty. \tag{B.17}$$

Пространство $W^{-m}(\Omega)$ — гильбертово пространство, сопряженное к пространству $\mathring{W}^m(\Omega)$, где $\mathring{W}^m(\Omega)$ — замыкание множества $\dot{C}^\infty(\Omega)$ в $W^m(\Omega)$ (см. [13, гл. 3, § 10]).

Теорема о следах. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область Q с границей $\partial Q \in C^\infty$ или $\Omega = (0, d) \times G$, где $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ — ограниченная область (с границей $\partial G \in C^\infty$, если $n \geqslant 3$). Пусть M — граница $\partial Q \in C^\infty$ ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^n$ или $(n-1)$-мерное многообразие $\Gamma \subset \overline{\Omega}$ класса C^∞ с границей $\partial\Gamma \in C^\infty$. Для каждого конечного покрытия $\{U_j\}$ многообразия $\overline{M}$ открытыми множествами существует разбиение единицы $\{\varphi_j\}$ такое, что

$$\sum_{j=1}^N \varphi_j(x) = 1 \quad \big(x \in \overline{M}\big), \qquad \varphi_j \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}^n), \qquad \operatorname{supp} \varphi_j \subset U_j.$$

Пусть $x \to \omega_j(x) = y$ — диффеоморфизм класса C^∞, отображающий U_j на V_j так, что

1) $\omega_j(U_j \cap M) \subset \{y : y_n = 0\}$, если $M = \partial Q$ или если $M = \Gamma$, $U_j \cap \partial\Gamma = \varnothing$,

2) $\omega_j(U_j \cap M) \subset \{y : y_{n-1} > 0,\ y_n = 0\}$, $\omega_j(U_j \cap \partial M) \subset \{y : y_{n-1} = 0,$ $y_n = 0\}$, если $M = \Gamma$, $U_j \cap \partial\Gamma \neq \varnothing$.

Пусть $W^s(M)$ — *пространство Соболева* функций u таких, что в локальных координатах $y = y^j$ мы имеем $\varphi_j u \in W^s(\omega_s(U_j \cap M))$. Норма в $W^s(M)$ вводится следующим образом:

$$\|u\|_{W^s(M)} = \left(\sum_{j=1}^{M} \|\varphi_j u\|^2_{W^s(\omega_j(U_j \cap M))}\right)^{1/2}, \tag{B.18}$$

где нормы $\|\varphi_j u\|_{W^s(\omega_j(U_j \cap M))}$ вычисляются в координатах $y = y^j$, $s \geqslant 0$.

Очевидно, что определение пространства $W^s(M)$ не зависит от покрытия $\{U_j\}$ и выбора преобразований ω_j, а различные нормы (B.18) эквивалентны.

Пространство $W^s(M)$ гильбертово.

Обозначим через $C^\infty(\overline{M})$ пространство функций $u \in C(\overline{M})$ таких, что в локальных координатах $y = y^j$ мы имеем $u \in C^\infty\big(\omega_j\big(U_j \cap \overline{M}\big)\big)$.

Определим отображение

$$\gamma_\mu : C^\infty(\overline{\Omega}) \to C^\infty(\overline{M})$$

по формуле

$$\gamma_\mu u = \mathcal{D}^\mu_\nu u|_{\overline{M}},$$

где μ — неотрицательное целое число, ν — единичный вектор нормали к $\overline{M}$ в точке $x \in \overline{M}$.

Теорема В.6. *Пусть $s > 0$, и пусть $m < s+1/2$, — неотрицательное целое число. Тогда отображение*

$$\gamma = \{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{m-1}\} : C^\infty(\overline{\Omega}) \to \prod_{\mu=0}^{m-1} C^\infty(\overline{M})$$

однозначно продолжается до непрерывного линейного отображения

$$\gamma : W^s(\Omega) \to \prod_{\mu=0}^{m-1} W^{s-\mu-1/2}(M).$$

Более того, это отображение сюръективно и существует линейный непрерывный оператор

$$S : \prod_{\mu=0}^{m-1} W^{s-\mu-1/2}(M) \to W^s(\Omega)$$

такой, что $\gamma S g = g$ для всех $g = (g_0, g_1, \dots, g_{m-1}) \in \prod_{\mu=0}^{m-1} W^{s-\mu-1/2}(M)$.

Доказательство основано на аналогичном результате для $\Omega = \mathbb{R}^n_+$, $M = \mathbb{R}^{n-1}$ и разбиении единицы (см. теорему 7 в [34, гл. 2, § 4], теорему 10 в [34, гл. 2, § 5], теорему 8.3 в [23, гл. 1, § 8] и теорему в [38, гл. 4, § 4.7.2]).

Обозначим $\gamma_0 u = u|_M$ для $u \in W^s(\Omega)$, где $s > 1/2$. Функция $u|_M$ называется *следом функции u*.

Замечание В.2. Из теоремы В.6 следует, что мы можем ввести эквивалентную норму в пространстве $W^{s-1/2}(M)$ по формуле

$$\|\psi\|'_{W^{s-1/2}(M)} = \inf_u \|u\|_{W^s(\Omega)} \qquad (u \in W^s(\Omega) : u|_M = \psi).$$

Теоремы вложения. Следующая теорема вложения устанавливает, что элементы пространства Соболева $W^s(Q)$ дифференцируемы в классическом смысле для достаточно больших $s > 0$.

Теорема B.7 (теорема Соболева). *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *— ограниченная область* Q *с границей* $\partial Q \in C^\infty$ *или* $\Omega = (0, d) \times G$, *где* $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ *— ограниченная область (с границей* $\partial G \in C^\infty$, *если* $n \geqslant 3$). *Пусть* $k > n/2 + s$, *где* $s \geqslant 0$ *— целое. Тогда имеет место вложение* $W^k(\Omega) \subset C^s(\overline{\Omega})$, *причем оператор вложения непрерывный.*

Доказательство см. в теореме из [38, гл. 4, § 4.6.2] и теореме 9.8 из [23, гл. 1, § 9].

Следующие две теоремы о компактности вложения позволяют сводить краевые задачи для эллиптических уравнений к фредгольмовым уравнениям.

Теорема B.8. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *— ограниченная область, удовлетворяющая условиям теоремы* B.7, *и пусть* $k > s \geqslant 0$. *Тогда оператор вложения* $W^k(\Omega)$ *в* $W^s(\Omega)$ *компактный.*

Доказательство следует из теоремы 16.1 в [23, гл. 1, § 16] и теоремы B.5.

Используя теорему B.8, мы получаем следующий результат.

Теорема B.9. *Пусть* M *— граница* $\partial Q \in C^\infty$ *ограниченной области* $Q \subset \mathbb{R}^n$ *или* $(n-1)$*-мерное ограниченное многообразие* Γ *класса* C^∞ *с границей* $\partial\Gamma \in C^\infty$. *Пусть* $k > s \geqslant 0$. *Тогда оператор вложения* $W^k(M)$ *в* $W^s(M)$ *компактный.*

Пространства $\mathring{W}^s(Q)$**.** Следующая теорема дает явное описание пространства $\mathring{W}^m(Q)$.

Теорема B.10. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *— ограниченная область, удовлетворяющая условиям теоремы* B.7, *и пусть* $m \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\mathring{W}^m(\Omega) = \{u \in W^m(\Omega) : \mathcal{D}_\nu^{\mu-1} u|_{\partial Q \setminus K} = 0,\ \mu = 1, \ldots, m\},$$

где $K = \varnothing$, *если* $\Omega = Q$, *и* $K = (\{0\} \times \partial G) \cup (\{d\} \times \partial G)$, *если* $\Omega = (0, d) \times G$.

Доказательство см. в [23, гл. 1, § 11], теорема 11.5.

Следующая теорема об эквивалентных нормах в пространстве $\mathring{W}^m(\Omega)$ полезна для изучения задачи Дирихле для эллиптических уравнений.

Теорема B.11. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — *ограниченная область, удовлетворяющая условиям теоремы* B.7, *и пусть* $m \in \mathbb{N}$. *Тогда норма* (B.13) *в пространстве* $\mathring{W}^m(\Omega)$ *эквивалентна норме*

$$\left(\sum_{j=0}^{n} \int\limits_{\Omega} |\mathcal{D}_j^m u(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}. \tag{B.19}$$

Доказательство следует из теорем B.2, B.3, B.8 и B.10.

Интерполяция. Следующие две теоремы применяются для получения априорных оценок решений эллиптических задач.

Теорема B.12. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — *ограниченная область, удовлетворяющая условиям теоремы* B.7, *или* $\Omega = R^n_+$. *Тогда для всех* $u \in W^k(\Omega)$ *и* $q \in \mathbb{C}$

$$|q|^{k-s} \|u\|_{W^s(\Omega)} \leqslant c\big(\|u\|_{W^k(\Omega)} + |q|^k \|u\|_{L_2(\Omega)}\big), \tag{B.20}$$

где $0 < s < k$ *и* $c > 0$ *не зависит от* u *и* q.

Теорема B.13. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — *ограниченная область, удовлетворяющая условиям теоремы* B.7. *Если* $\Omega = Q$ *и* $\partial Q \in C^\infty$, *мы положим* $M = \partial Q$. *Если* $\Omega = (0, d) \times G$, *мы положим* $M = \{b\} \times G$, *где* $0 \leqslant b \leqslant d$. *Тогда для любых* $u \in W^1(\Omega)$ *и* $q \in \mathbb{C}$

$$|q|^{1/2} \|u|_M\|_{L_2(M)} \leqslant c_1\big(\|u\|_{W^1(\Omega)} + |q| \|u\|_{L_2(\Omega)}\big), \tag{B.21}$$

где $c_1 > 0$ *не зависит от* u *и* q.

Теоремы В.12 и В.13 взяты из [1, гл. 1, § 1].

Имея некоторые свойства линейных операторов в пространствах Соболева, мы можем распространить их на промежуточные пространства.

Теорема В.14. *Пусть* $\Omega_j = \mathbb{R}^{n_j}$ *или* $\Omega_j \subset \mathbb{R}^{n_j}$ *— ограниченная область с границей* $\partial\Omega_j \in C^\infty$, $n_j \in \mathbb{N}$ $(j = 1, 2)$. *Пусть*

$$A \in \bigcap_{i=1,2} \mathcal{B}\big(W^{p_i}(\Omega_1), W^{q_i}(\Omega_2)\big),$$

где $0 \leqslant p_1 < p_2$, $0 \leqslant q_1 < q_2$. *Тогда*

$$A \in \mathcal{B}\big(W^{(1-\theta)p_1+\theta p_2}(\Omega_1), W^{(1-\theta)q_1+\theta q_2}(\Omega_2)\big)$$

для любого $0 < \theta < 1$.

Теорема В.15. *Пусть* $Q \subset \mathbb{R}^n$ *— ограниченная область с границей* $\partial Q \in C^\infty$. *Пусть*

$$A \in \bigcap_{i=1,2} \mathcal{B}\big(W^{s_i}(Q), W^{s_i}(\partial Q)\big),$$

где $0 \leqslant s_1 < s_2$. *Тогда*

$$A \in \mathcal{B}\big(W^{(1-\theta)s_1+\theta s_2}(Q), W^{(1-\theta)s_1+\theta s_2}(\partial Q)\big)$$

для любого $0 < \theta < 1$.

Теоремы В.14 и В.15 следуют из теорем 5.1, 7.7 и 9.6 и замечания 7.4 в [23, гл. 1].

Одномерный случай. Сделаем теперь несколько замечаний о функциональных пространствах в одномерном случае.

Обозначим через $L_p(a, b)$ пространство Лебега измеримых на (a, b) функций f $(1 \leqslant p < \infty)$. Это пространство имеет норму

$$\|f\|_{L_p(a,b)} = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Обозначим через $C(a,b)$ (или $C[a,b]$) пространство непрерывных функций на (a,b) (или $[a,b]$). Пусть $C^k(a,b)$ (или $C^k[a,b]$) — подпространство функций из $C(a,b)$ (или $C[a,b]$), имеющих непрерывные производные порядка не выше k на (a,b) (или $[a,b]$). Норма в пространстве $C^k[a,b]$ определяется формулой

$$\|\varphi\|_{C^k[a,b]} = \max_{i \leqslant k} \sup_{x \in [a,b]} |\varphi^{(i)}(x)|.$$

Аналогично многомерному случаю мы можем также ввести пространства $C^\infty(a,b)$, $C^\infty[a,b]$ и $\dot{C}^\infty(a,b)$.

Обозначим через $\mathcal{D}(a,b)$ пространство $\dot{C}^\infty(a,b)$, а через $\mathcal{D}'(a,b)$ пространство обобщенных функций на $\mathcal{D}(a,b)$.

Для $k \in \mathbb{N}$ пространство $W^k(a,b)$ есть пространство абсолютно непрерывных на $[a,b]$ функций $u(x)$, имеющих абсолютно непрерывные на $[a,b]$ производные $u^{(i)}(x)$ для $i \leqslant k-1$ таких, что $u^{(k)}(x) \in L_2(a,b)$. Норма в $W^k(a,b)$ будет иметь вид

$$\|u\|_{W^k(a,b)} = \left(\sum_{i \leqslant k} \int_a^b |u^{(i)}(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}. \tag{B.22}$$

Таким образом, теорема B.6 о следах становится тривиальной для $n = 1$.

Пусть k, s — целые, и пусть $0 \leqslant s < k$. Тогда в силу теоремы B.7 для любого $u \in W^k(a,b)$

$$\|u\|_{C^s[a,b]} \leqslant c\|u\|_{W^k(a,b)}. \tag{B.23}$$

Из теоремы B.8 следует, что оператор вложения $W^k(a,b)$ в $W^s(a,b)$ компактный.

Заметим, что

$$\mathring{W}^k(a,b) = \{u \in W^k(a,b) : u^{(i)}(a) = u^{(i)}(b) = 0,\ 0 \leqslant i \leqslant k-1\},$$

где $k \in \mathbb{N}$.

В силу теоремы B.11 мы можем ввести в пространстве $\mathring{W}^k(a,b)$ эквивалентную норму по формуле

$$\|u\|'_{\mathring{W}^k(a,b)} = \left(\int\limits_a^b |u^{(k)}(x)|^2\,dx \right)^{1/2}. \tag{B.24}$$

Из теорем B.12 и B.13 следует, что для любых $u \in W^k(a,b)$ и $q \in \mathbb{C}$

$$|q|^{k-s}\|u\|_{W^s(a,b)} \leqslant c\big(\|u\|_{W^k(a,b)} + |q|^k\|u\|_{L_2(a,b)}\big), \tag{B.25}$$

где $k, s \in \mathbb{N}$, $0 < s < k$ и $c > 0$ не зависит от u и q; для любых $u \in W^1(a,b)$ и $q \in \mathbb{C}$

$$|q|^{1/2}|u(d)| \leqslant c_1\big(\|u\|_{W^1(a,b)} + |q|\cdot\|u\|_{L_2(a,b)}\big), \tag{B.26}$$

где $a \leqslant d \leqslant b$ и $c_1 > 0$ не зависит от u и q.

Приложение C. Обобщенные решения эллиптических задач

Задача Дирихле. Рассмотрим уравнение

$$A(x,D)u = \sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m} \mathcal{D}^\alpha a_{\alpha\beta}(x)\mathcal{D}^\beta u(x) = f_0(x) \qquad (x \in Q) \tag{C.1}$$

с краевыми условиями Дирихле

$$\mathcal{D}_\nu^{\mu-1}u|_{\partial Q} = 0 \qquad (x \in \partial Q,\ \mu = 1,\dots,m), \tag{C.2}$$

где $a_{\alpha\beta} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $f_0 \in L_2(Q)$ — комплекснозначные функции, Q — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей $\partial Q \in C^\infty$, ν — единичный вектор внутренней нормали к ∂Q в точке $x \in \partial Q$, $n \geqslant 2$.

Уравнение (C.1) называется *сильно эллиптическим* в $\overline{Q}$, если

$$\operatorname{Re} \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x)\xi^{\alpha+\beta} > 0 \quad \text{для всех } x \in \overline{Q},\ 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{C.3}$$

В этом пункте мы предполагаем, что уравнение (C.1) сильно эллиптическое в $\overline{Q}$. Тогда мы говорим, что дифференциальный оператор $A(x, D)$ сильно эллиптический в $\overline{Q}$.

Определим неограниченный оператор $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$ с областью определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{u \in \mathring{W}^m(Q) : \mathcal{A}u \in L_2(Q)\}$, действующий в пространстве обобщенных функций $\mathcal{D}'(Q)$ по формуле

$$\mathcal{A}u = A(x, D)u(x). \tag{C.4}$$

Функция u называется *обобщенным решением краевой задачи* (C.1), (C.2), если $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ и

$$\mathcal{A}u = f_0. \tag{C.5}$$

Можно дать также следующее эквивалентное определение обобщенного решения.

Функция u называется *обобщенным решением краевой задачи* (C.1), (C.2), если $u \in \mathring{W}^m(Q)$ и для всех $v \in \mathring{W}^m(Q)$ мы имеем

$$\sum_{|\alpha|,|\beta| \leqslant m} \left(a_{\alpha\beta}\mathcal{D}^\beta u, \mathcal{D}^\alpha v\right)_{L_2(Q)} = (f_0, v)_{L_2(Q)}. \tag{C.6}$$

Введем неограниченный оператор $\mathcal{A}^+ : \mathcal{D}(\mathcal{A}^+) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$ с областью определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}^+) = \{u \in \mathring{W}^m(Q) : \mathcal{A}^+u \in L_2(Q)\}$, действующий в пространстве обобщенных функций $\mathcal{D}'(Q)$ по формуле

$$\mathcal{A}^+u = \sum_{|\alpha|,|\beta| \leqslant m} \mathcal{D}^\alpha \overline{a_{\beta\alpha}(x)} \mathcal{D}^\beta u.$$

Операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^+$ формально сопряженные, т. е.

$$(\mathcal{A}u, v)_{L_2(Q)} = \left(u, \mathcal{A}^+v\right)_{L_2(Q)}$$

для всех $u, v \in \dot{C}^\infty(Q)$.

Теорема C.1. *Уравнение* (C.1) *сильно эллиптическое в* $\overline{Q}$ *тогда и только тогда, когда существуют постоянные* $c_1 > 0$, $c_2 \geqslant 0$ *такие,* *что*

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}u, u)_{L_2(Q)} \geqslant c_1 \|u\|^2_{W^m(Q)} - c_2 \|u\|^2_{L_2(Q)} \tag{C.7}$$

для всех $u \in \dot{C}^\infty(Q)$.

Теорема C.1 принадлежит М. И. Вишику [5] и Л. Гордингу [44].

Неравенство (C.7) называется *неравенством Гординга*. Задача (C.1), (C.2) называется *коэрцитивной*, если она удовлетворяет неравенству Гординга. В силу теоремы C.1 задача (C.1), (C.2) коэрцитивна тогда и только тогда, когда уравнение (C.1) сильно эллиптическое в $\overline{Q}$. Таким образом, можно определить сильную эллиптичность с помощью неравенства Гординга (C.7).

Теорема C.2. *Пусть оператор* $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$ *сильно эллиптический. Тогда спектр* $\sigma(\mathcal{A})$ *дискретный и* $\sigma(\mathcal{A}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > -c_2\}$, *где* $c_2 \geqslant 0$ *— константа из неравенства* (C.7). *Если* $\lambda \notin \sigma(\mathcal{A})$, *то резольвента* $R(\lambda, \mathcal{A}) : L_2(Q) \to L_2(Q)$ *— компактный оператор. Кроме того,* $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^+$ *и* $(\mathcal{A}^+)^* = \mathcal{A}$.

Теорема C.3. *Сильно эллиптический оператор* $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$ *фредгольмов, и* $\operatorname{ind}\mathcal{A} = 0$.

Теорема C.4. *Пусть сильно эллиптический оператор* $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$ *симметрический, т. е.*

$$(\mathcal{A}u, v)_{L_2(Q)} = (u, \mathcal{A}v)_{L_2(Q)} \tag{C.8}$$

для всех $u, v \in \dot{C}^\infty(Q)$. *Тогда оператор* $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$ *самосопряженный, спектр* $\sigma(\mathcal{A})$ *состоит из вещественных изолированных собственных значений* $\lambda_s > -c_2$ *конечной кратности. Множество собственных функций* $\{v_s\}$ *оператора* $\mathcal{A}$ *образует ортонормированный базис в пространстве* $L_2(Q)$, *в то время как множество* *функций* $\left\{\dfrac{v_s}{\sqrt{\lambda_s + c_2}}\right\}$ *является ортонормированным базисом в пространстве* $\mathring{W}^m(Q)$ *со скалярным произведением*

$$(u, v)'_{\mathring{W}^m(Q)} = \frac{1}{2} \sum_{|\alpha|,|\beta| \leqslant m} \Bigl(\bigl(a_{\alpha\beta(x)} + \overline{a_{\beta\alpha}(x)}\bigr) D^\beta u, D^\alpha v\Bigr)_{L_2(Q)} + c_2(u, v)_{L_2(Q)}. \tag{C.9}$$

Теоремы C.2–C.4 вытекают из следствий 11 и 14 и теоремы 25 в [10, гл. 14, § 6]. Заметим, что теоремы C.2–C.4 следуют из теорем A.17–A.19 о секториальных операторах и теорем B.8 и C.1.

Рассмотрим теперь уравнение

$$\begin{aligned} \mathcal{A}u = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\, a_{ij}(x)\, \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + a_0(x)u(x) = \\ = f_0(x) \qquad (x \in Q) \end{aligned} \tag{C.10}$$

с краевым условием

$$u|_{\partial Q} = 0, \tag{C.11}$$

где $Q = (0, d) \times G$ — цилиндр, $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ — ограниченная область, граница ∂G класса $\in C^\infty$, если $n \geqslant 3$; $a_{ij}, a_i, a_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — вещественнозначные функции и $a_{ij} = a_{ji}$; $f_0 \in L_2(Q)$ — комплекснозначная функция.

Замечание C.1. Пусть уравнение (C.10) сильно эллиптическое в $\overline{Q}$, и пусть $m = 1$. Тогда теоремы C.1–C.3 справедливы для оператора $\mathcal{A}$, соответствующего краевой задаче (C.10), (C.11). Более того, если $a_i = 0$ $(i = 1, \dots, n)$, то заключение теоремы C.4 также верно.

Гладкость решений. Мы рассмотрим сильно эллиптическое уравнение (C.1) с коэффициентами $a_{\alpha\beta} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Предположим, что $Q \subset \mathbb{R}^n$ — произвольная ограниченная область.

Одним из наиболее важных свойств эллиптических дифференциальных уравнений является гладкость решений на компактных подмножествах области Q. Это свойство не зависит от гладкости границы ∂Q.

Теорема C.5. *Пусть уравнение* (C.1) *сильно эллиптическое в* $\overline{Q}$. *Предположим, что* $f_0 \in W^k_{\mathrm{loc}}(Q)$ *и* u *— решение уравнения* (C.1) *в смысле теории обобщенных функций, где* $k \in \mathbb{Z}$. *Тогда* $u \in W^{k+2m}_{\mathrm{loc}}(Q)$.

Доказательство см. в теореме 3.2 из [23, гл. 2, § 3].

Лемма C.1. *Пусть уравнение* (C.1) *сильно эллиптическое в* $\overline{Q}$, *и пусть* $\partial Q \cap B_{2\delta}\big(x^0\big) \in C^\infty$ *— открытое связное множество* (*в индуцированной топологии*). *Предположим, что* $f_0 \in W^k(Q)$ *и* $u \in W^m(Q)$ *— решение уравнения* (C.1) *в смысле теории обобщенных функций, удовлетворяющее краевым условиям*

$$\mathcal{D}_\nu^{\mu-1} u|_{\partial Q \cap B_{2\delta}(x^0)} = 0 \qquad (\mu = 1, \dots, m),$$

где $x^0 \in \partial Q$, $k \geqslant 0$ *— целое. Тогда* $u \in W^{k+2m}\big(Q \cap B_\delta\big(x^0\big)\big)$.

Используя разбиение единицы и лемму C.1, мы получим следующее утверждение.

Теорема C.6. *Пусть уравнение* (C.1) *сильно эллиптическое в* $\overline{Q}$, *и пусть* $\partial Q \in C^\infty$. *Предположим, что* $f_0 \in W^k(Q)$ ($k \geqslant 0$ *— целое*) *и* u *— обобщенное решение краевой задачи* (C.1), (C.2). *Тогда* $u \in W^{k+2m}(Q)$.

Лемма C.1 и теорема C.6 вытекают из леммы 19 и теоремы 23 в [10, гл. 14, § 6].

Замечание C.2. Заключение теоремы C.6 верно также для краевой задачи (C.10), (C.11) с $k = 0$ и $m = 1$ (см. [22, гл. 3, § 10], теорема 10.1).

Эллиптические задачи с общими краевыми условиями. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\mathbf{A}(x, D)u(x) = f_0(x) \qquad (x \in Q) \tag{C.12}$$

с краевыми условиями

$$\mathbf{B}(x, D)u(x)|_{\partial Q} = f_1(x) \qquad (x \in \partial Q) \tag{C.13}$$

относительно вектор-функции $u = (u_1, \ldots, u_N)$. Здесь $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial Q \in C^\infty$, $n \geqslant 2$; $\mathbf{A}(x, D)$ и $\mathbf{B}(x, D)$ — матрицы порядков $N \times N$ и $mN \times N$ соответственно с элементами

$$A_{jk}(x, D)u_k(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} a_{jk\alpha}(x) D^\alpha u_k(x) \qquad (j, k = 1, \ldots, N),$$

$$B_{\mu k}(x, D)u_k(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant m_\mu} b_{\mu k\alpha}(x) D^\alpha u_k(x)$$

$$(\mu = 1, \ldots, mN,\ k = 1, \ldots, N),$$

$a_{jk\alpha}, b_{\mu k\alpha} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — комплекснозначные функции; $f_0 = (f_{01}, \ldots, f_{0N})$, $f_1 = (f_{11}, \ldots, f_{1,mN})$; m, и m_μ — целые, $m \geqslant 1$, $m_\mu \geqslant 0$; $f_{0j} \in W^l(Q)$ $(j = 1, \ldots, N)$ и $f_{1\mu} \in W^{l+2m-m_\mu-1/2}(\partial Q)$ $(\mu = 1, \ldots, mN)$ — комплекснозначные функции; $l \geqslant \max\{0, m_\mu - 2m + 1\}$ — целое.

Обозначим через $A^0_{jk}(x, D)$ и $B^0_{\mu k}(x, D)$ главные однородные части операторов $A_{jk}(x, D)$ и $B_{\mu k}(x, D)$ соответственно, т. е.

$$A^0_{jk}(x, D) = \sum_{|\alpha| = 2m} a_{jk\alpha}(x) D^\alpha, \qquad B^0_{\mu k}(x, D) = \sum_{|\alpha| = m_\mu} b_{\mu k\alpha}(x) D^\alpha.$$

Наряду с операторами $A^0_{jk}(x, D)$ и $B^0_{\mu k}(x, D)$ мы рассмотрим соответствующие полиномы

$$A^0_{jk}(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = 2m} a_{jk\alpha}(x) \xi^\alpha, \qquad B^0_{\mu k}(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = m_\mu} b_{\mu k\alpha}(x) \xi^\alpha,$$

где $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \times \cdots \times \xi_n^{\alpha_n}$.

Обозначим через $\mathbf{A}^0(x,\xi)$ и $\mathbf{B}^0(x,\xi)$ матрицы порядка $N\times N$ и $mN\times N$ с элементами $A^0_{jk}(x,\xi)$ $(j,k=1,\dots,N)$ и $B^0_{\mu k}(x,\xi)$ $(\mu=1,\dots,mN$, $k=1,\dots,N)$.

Предположим, что операторы $\mathbf{A}(x,D)$ и $\mathbf{B}(x,D)$ удовлетворяют следующим условиям.

Условие C.1. Оператор $\mathbf{A}(x,D)$ *правильно эллиптический* в $\overline{Q}$, т. е. полином $\det\mathbf{A}^0(x,\xi+\tau\nu)$ переменной τ имеет ровно mN корней

$$\tau_1^+(x,\xi,\nu),\dots,\tau_{mN}^+(x,\xi,\nu)$$

с положительными мнимыми частями и mN корней с отрицательными мнимыми частями для всех $x\in\overline{Q}$, $\nu\neq 0$ и $\xi\neq 0$, ортогональных к ν в $\mathbb{R}^n$.

Условие C.2. Оператор $\mathbf{B}(x,D)$ удовлетворяет *условию Лопатинского* по отношению к оператору $\mathbf{A}(x,D)$ на ∂Q, т. е. строки матрицы

$$\mathbf{B}^0(x,\xi+\tau\nu)\mathbf{A}^0(x,\xi+\tau\nu)^{-1}\det\mathbf{A}^0(x,\xi+\tau\nu)$$

линейно независимы по модулю полинома $\prod\limits_{\mu=1}^{mN}\bigl(\tau-\tau_\mu^+(x,\xi,\nu)\bigr)$ для всех $x\in\partial Q$ и $\xi\neq 0$, ортогональных к ν, где ν — единичный вектор внутренней нормали к ∂Q в точке x.

Будем говорить, что задача (C.12), (C.13) *эллиптическая*, если выполнены условия C.1 и C.2.

Если оператор $\mathbf{A}(x,D)$ правильно эллиптический в $\overline{Q}$, то существует постоянная $a>0$ такая, что для всех $x\in\overline{Q}$ и $0\neq\xi\in\mathbb{R}^n$

$$a^{-1}|\xi|^{2mN}\leqslant|\det\mathbf{A}^0(x,\xi)|\leqslant a|\xi|^{2mN}.$$

Константа a называется *константой эллиптичности*.

Замечание C.3. Если $N=1$, то матрица $\mathbf{A}(x,D)$ состоит из одного элемента $A(x,D)$, а матрица $\mathbf{B}(x,D)$ — из одного столбца

$$(B_1(x,D),\dots,B_m(x,D))^T.$$

Обозначим через $A^0(x,D)$ и $B^0_\mu(x,D)$ главные однородные части операторов $A(x,D)$ и $B_\mu(x,D)$ соответственно. Тогда условие C.1 принимает вид: полином $A^0(x,\xi+\tau\nu)$ переменной τ имеет ровно m корней $\tau_1^+(x,\xi,\nu),\dots,\tau_m^+(x,\xi,\nu)$ с положительными мнимыми частями и m корней с отрицательными мнимыми частями для всех $x\in\overline{Q}$, $\nu\neq 0$ и $\xi\neq 0$, ортогональных к ν в $\mathbb{R}^n$. Условие C.2 имеет следующий вид: многочлены $B^0_1(x,\xi+\tau\nu),\dots,B^0_m(x,\xi+\tau\nu)$ линейно независимы по модулю полинома $\prod\limits_{\mu=1}^{m}\bigl(\tau-\tau_\mu^+(x,\xi,\nu)\bigr)$ для всех $x\in\partial Q$ и $\xi\neq 0$, ортогональных к ν, где ν — единичный вектор внутренней нормали к ∂Q в точке x. Если оператор $A(x,D)$ сильно эллиптический в $\overline{Q}$ и либо $n\geqslant 3$, либо коэффициенты $A(x,D)$ вещественные, то этот оператор правильно эллиптический в $\overline{Q}$.

Введем гильбертовы пространства вектор-функций

$$L_2^N(Q)=\prod_{i=1}^{N}L_2(Q),\qquad W^{l,N}(Q)=\prod_{i=1}^{N}W^l(Q),$$

$$\mathcal{W}^{l,N}(Q,\partial Q)=W^{l,N}(Q)\times\prod_{\mu=1}^{mN}W^{l+2m-m_\mu-1/2}(\partial Q)$$

с нормами

$$\|v\|_{L_2^N(Q)}=\left(\sum_{i=1}^{N}\|v_i\|^2_{L_2(Q)}\right)^{1/2},\qquad \|u\|_{W^{l,N}(Q)}=\left(\sum_{i=1}^{N}\|u_i\|^2_{W^l(Q)}\right)^{1/2},$$

$$\|f\|_{\mathcal{W}^{l,N}(Q)}=\left(\|f_0\|^2_{W^{l,N}(Q)}+\sum_{\mu=1}^{mN}\|f_{1\mu}\|^2_{W^{l+2m-m_\mu-1/2}(\partial Q)}\right)^{1/2},\tag{C.14}$$

где $u=(u_1,\dots,u_N)$, $v=(v_1,\dots,v_N)$, $f=(f_0,f_1)$, $f_0=(f_{01},\dots,f_{0N})$ и $f_1=(f_{11},\dots,f_{1,mN})$, $l\geqslant\max\{0,m_\mu-2m+1\}$ — целое.

Определим линейный ограниченный оператор

$$\mathbf{L}:W^{l+2m,N}(Q)\to\mathcal{W}^{l,N}(Q,\partial Q)$$

по формуле

$$\mathbf{L}u=(\mathbf{A}(x,D)u,\ \mathbf{B}(x,D)u|_{\partial Q}).$$

Функцию $u\in W^{l+2m,N}(Q)$ назовем *сильным решением* задачи (C.12), (C.13) в $W^{l+2m,N}(Q)$, если $\mathbf{L}u=f$.

Лемма C.2. *Пусть выполняются условия* C.1 *и* C.2. *Тогда существует линейный ограниченный оператор*

$$\mathbf{R}:\mathcal{W}^{l,N}(Q,\partial Q)\to W^{l+2m,N}(Q),$$

который является правым и левым регуляризатором оператора

$$\mathbf{L}:W^{l+2m,N}(Q)\to\mathcal{W}^{l,N}(Q,\partial Q).$$

Доказательство см. в [36], теоремы 2.5 и 2.6, и [7, §§ 2 и 4].

Из теорем A.5, B.8 и леммы C.2 мы получим следующие утверждения.

Лемма C.3. *Пусть выполнены условия* C.1 *и* C.2. *Тогда для всех* $u\in W^{l+2m,N}(Q)$

$$\|u\|_{W^{l+2m,N}(Q)}\leqslant c_1\big(\|\mathbf{L}u\|_{\mathcal{W}^{l,N}(Q,\partial Q)}+\|u\|_{L_2^N(Q)}\big). \tag{C.15}$$

Теорема C.7. *Пусть выполнены условия* C.1 *и* C.2. *Тогда оператор* $\mathbf{L}:W^{l+2m,N}(Q)\to\mathcal{W}^{l,N}(Q,\partial Q)$ *фредгольмов.*

Эллиптические задачи с параметром. Мы будем изучать систему дифференциальных уравнений

$$\mathbf{A}(x,D,\lambda)u(x)=f_0(x)\qquad(x\in Q) \tag{C.16}$$

с краевыми условиями

$$\mathbf{B}(x, D, \lambda)u(x)|_{\partial Q} = f_1(x) \qquad (x \in \partial Q) \tag{C.17}$$

относительно вектор-функции $u = (u_1, \ldots, u_N)$. Здесь $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial Q \in C^\infty$, $n \geqslant 2$; $\mathbf{A}(x, D, \lambda)$ и $\mathbf{B}(x, D, \lambda)$ — матрицы порядков $N \times N$ и $mN \times N$ соответственно с элементами вида

$$A_{jk}(x, D, \lambda)u_k(x) = \sum_{\beta+|\alpha|\leqslant 2m} a_{jk\alpha\beta}(x)\lambda^\beta D^\alpha u_k(x) \qquad (j, k = 1, \ldots, N),$$

$$B_{\mu k}(x, D, \lambda)u_k(x) = \sum_{\beta+|\alpha|\leqslant m_\mu} b_{\mu k\alpha\beta}(x)\lambda^\beta D^\alpha u_k(x)$$

$$(\mu = 1, \ldots, mN,\ k = 1, \ldots, N),$$

$a_{jk\alpha\beta}, b_{\mu k\alpha\beta} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — комплекснозначные функции; $f_0 = (f_{01}, \ldots, f_{0N})$ и $f_1 = (f_{11}, \ldots, f_{1,mN})$; m, m_μ — целые числа, $m \geqslant 1$, $m_\mu \geqslant 0$.

Обозначим через $A^0_{jk}(x, D, \lambda)$ и $B^0_{\mu k}(x, D, \lambda)$ главные однородные части операторов $A_{jk}(x, D, \lambda)$ и $B_{\mu k}(x, D, \lambda)$ соответственно, т. е.

$$A^0_{jk}(x, D, \lambda) = \sum_{\beta+|\alpha|=2m} a_{jk\alpha\beta}(x)\lambda^\beta D^\alpha,$$

$$B^0_{\mu k}(x, D, \lambda) = \sum_{\beta+|\alpha|=m_\mu} b_{\mu k\alpha\beta}(x)\lambda^\beta D^\alpha.$$

Рассмотрим соответствующие полиномы

$$A^0_{jk}(x, \xi, \lambda) = \sum_{\beta+|\alpha|=2m} a_{jk\alpha\beta}(x)\lambda^\beta \xi^\alpha,$$

$$B^0_{\mu k}(x, \xi, \lambda) = \sum_{\beta+|\alpha|=m_\mu} b_{\mu k\alpha\beta}(x)\lambda^\beta \xi^\alpha.$$

Пусть $\mathbf{A}^0(x, \xi, \lambda)$ и $\mathbf{B}^0(x, \xi, \lambda)$ — матрицы порядков $N \times N$ и $mN \times N$ с элементами

$$A^0_{jk}(x, \xi, \lambda) \quad (j, k = 1, \ldots, N),$$

$$B^0_{\mu k}(x, \xi, \lambda) \quad (\mu = 1, \ldots, mN,\ k = 1, \ldots, N).$$

Обозначим через θ замкнутый угол в $\mathbb{C}$ вида $\theta = \{\lambda \in \mathbb{C} : \varphi_1 \leqslant \arg\lambda \leqslant \varphi_2\}$.

Предположим, что операторы $\mathbf{A}(x, D, \lambda)$ и $\mathbf{B}(x, D, \lambda)$ удовлетворяют следующим условиям.

Условие C.3. Полином $\det \mathbf{A}^0(x, \xi + \tau\nu, \lambda)$ переменной τ имеет ровно mN корней

$$\tau_1^+(x, \xi, \nu, \lambda), \dots, \tau_{mN}^+(x, \xi, \nu, \lambda)$$

с положительными мнимыми частями и mN с отрицательными мнимыми частями для любых $x \in \overline{Q}$, $\lambda \in \theta$ и ξ, ортогональных к ν в $\mathbb{R}^n$, таких, что $|\xi| + |\lambda| \neq 0$, $\nu \neq 0$.

Условие C.4. Строки матрицы

$$\mathbf{B}^0(x, \xi + \tau\nu, \lambda)\mathbf{A}^0(x, \xi + \tau\nu, \lambda)^{-1} \det \mathbf{A}^0(x, \xi + \tau\nu, \lambda)$$

линейно независимы по модулю полинома $\prod\limits_{\mu=1}^{mN} \big(\tau - \tau_\mu^+(x, \xi, \nu, \lambda)\big)$ для всех $x \in \partial Q$, $\lambda \in \theta$ и ξ, ортогональных к ν, таких, что $|\xi| + |\lambda| \neq 0$, где ν — единичный вектор внутренней нормали к ∂Q в точке x.

Будем говорить, что задача (C.16), (C.17) *эллиптическая задача с параметром в смысле Аграновича и Вишика*, если выполняются условия C.3 и C.4 (см. [1]).

Замечание C.4. Если $N = 1$, то матрица $\mathbf{A}(x, D, \lambda)$ состоит из одного элемента $A(x, D, \lambda)$, а матрица $\mathbf{B}(x, D, \lambda)$ является столбцом

$$(B_1(x, D, \lambda), \dots, B_m(x, D, \lambda))^T,$$

где

$$A(x,D,\lambda) = \sum_{\beta+|\alpha|\leqslant 2m} a_{\alpha\beta}(x)\lambda^\beta D^\alpha,$$

$$B_\mu(x,D,\lambda) = \sum_{\beta+|\alpha|\leqslant 2m} b_{\mu\alpha\beta}(x)\lambda^\beta D^\alpha \qquad (\mu = 1,\dots,m),$$

$a_{\alpha\beta}, b_{\mu\alpha\beta} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Пусть $A^0(x,D,\lambda)$ и $B^0_\mu(x,D,\lambda)$ — главные однородные части $A(x,D,\lambda)$ и $B_\mu(x,D,\lambda)$ соответственно. Тогда условие C.3 принимает вид: полином $A^0(x,\xi+\tau\nu,\lambda)$ переменной τ имеет ровно m корней $\tau_1^+(x,\xi,\nu,\lambda),\dots,\tau_m^+(x,\xi,\nu,\lambda)$ с положительными мнимыми частями и m корней с отрицательными мнимыми частями для всех $x \in \overline{Q}$, $\lambda \in \theta$ и ξ, ортогональных к ν в $\mathbb{R}^n$, таких, что $|\xi| + |\lambda| \neq 0$, $\nu \neq 0$. Условие C.4 имеет следующий вид: полиномы

$$B^0_1(x,\xi+\tau\nu,\lambda),\dots,B^0_m(x,\xi+\tau\nu,\lambda)$$

линейно независимы по модулю полинома $\prod\limits_{\mu=1}^{m}\big(\tau - \tau_\mu^+(x,\xi,\nu,\lambda)\big)$ для всех $x \in \partial Q$, $\lambda \in \theta$ и ξ, ортогональных к ν, таких, что $|\xi| + |\nu| \neq 0$, где ν — единичный вектор внутренней нормали к ∂Q в точке x.

В гильбертовых пространствах $W^s(\Omega)$ ($s \geqslant 0$; $\Omega = Q, \partial Q$), $W^{s,N}(Q)$ и

$$\mathcal{W}^{l,N}(Q,\partial Q) = W^{l,N}(Q) \times \prod_{\mu=1}^{mN} W^{l+2m-m_\mu-1/2}(\partial Q)$$

мы введем эквивалентные нормы, зависящие от λ, следующим образом:

$$|||v|||_{W^s(\Omega)} = \Big(\|v\|^2_{W^s(\Omega)} + |\lambda|^{2s}\|v\|^2_{L_2(\Omega)}\Big)^{1/2}, \tag{C.18}$$

$$|||u|||_{W^{s,N}(Q)} = \Big(\|u\|^2_{W^{s,N}(Q)} + |\lambda|^{2s}\|u\|^2_{L_2^N(Q)}\Big)^{1/2}, \tag{C.19}$$

$$|||f|||_{\mathcal{W}^{l,N}(Q,\partial Q)} = \left(|||f_0|||^2_{W^{l,N}(Q)} + \sum_{\mu=1}^{mN} |||f_{1\mu}|||^2_{W^{l+2m-m_\mu-1/2}(\partial Q)}\right)^{1/2}, \tag{C.20}$$

где

$$u = (u_1, \dots, u_N), \qquad f = (f_0, f_1),$$

$$f_0 = (f_{01}, \dots, f_{0N}), \qquad f_1 = (f_{11}, \dots, f_{1,mN}),$$

$l \geqslant \max\{0, m_\mu - 2m + 1\}$ — целое число.

Введем линейный ограниченный оператор

$$\mathbf{L}(\lambda) : W^{l+2m,N}(Q) \to \mathcal{W}^{l,N}(Q, \partial Q)$$

по формуле

$$\mathbf{L}(\lambda)u = (\mathbf{A}(x, D, \lambda)u, \mathbf{B}(x, D, \lambda)u|_{\partial Q}).$$

Теорема C.8. *Пусть выполняются условия* C.3 *и* C.4. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

(a) *Оператор*

$$\mathbf{L}(\lambda) : W^{l+2m,N}(Q) \to \mathcal{W}^{l,N}(Q, \partial Q)$$

фредгольмов и $\operatorname{ind} \mathbf{L}(\lambda) = 0$ *для всех* $\lambda \in \mathbb{C}$.

(b) *Существует* $\lambda_0 > 0$ *такое, что для* $\lambda \in \{\lambda \in \theta : |\lambda| \geqslant \lambda_0\}$ *оператор* $\mathbf{L}(\lambda)$ *имеет ограниченный обратный*

$$\mathbf{L}^{-1}(\lambda) : \mathcal{W}^{l,N}(Q, \partial Q) \to W^{l+2m,N}(Q).$$

(c) *Для любых* $u \in W^{l+2m,N}(Q)$ *и* $\lambda \in \{\lambda \in \theta : |\lambda| \geqslant \lambda_0\}$

$$c_1 |||\mathbf{L}(\lambda)u|||_{\mathcal{W}^{l,N}(Q,\partial Q)} \leqslant |||u|||_{W^{l+2m,N}(Q)} \leqslant c_2 |||\mathbf{L}(\lambda)u|||_{\mathcal{W}^{l,N}(Q,\partial Q)}, \tag{C.21}$$

где $c_1, c_2 > 0$ *не зависят от* λ *и* u.

Изучим задачу Дирихле, предполагая, что $N = 1$. На операторы $A^0(x, D, \lambda)$ и $B^0_\mu(x, D, \lambda)$ накладываются следующие условия.

Условие C.5. Оператор

$$A^0(x, D, \lambda)u(x) = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) + \lambda^{2m} u(x)$$

есть дифференциальный оператор с вещественнозначными коэффициентами $a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ такими, что $\sum\limits_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x)\xi^\alpha > 0$ для $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$ и $x \in \overline{Q}$.

Условие C.6. Операторы

$$B^0_\mu(x, D, \lambda)u(x) = (-i\partial/\partial\nu)^{\mu-1}u(x) \qquad (\mu = 1, \dots, m)$$

суть граничные операторы задачи Дирихле.

Очевидно, при выполнении условий C.5 и C.6 для любых

$$0 < \varepsilon < \pi/2m,$$

$$\lambda \in \omega_\varepsilon = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg\lambda| \leqslant \varepsilon\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg\lambda - \pi| \leqslant \varepsilon\}$$

операторы $A^0(x, D, \lambda)$ и $B^0_\mu(x, D, \lambda)$ удовлетворяют условиям C.3 и C.4. Поэтому имеет место следствие.

Следствие C.1. *Пусть выполнены условия* C.5 *и* C.6. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

(a) *Оператор*

$$\mathbf{L}(\lambda) : W^{l+2m}(Q) \to \mathcal{W}^l(Q, \partial Q)$$

фредгольмов и $\operatorname{ind}\mathbf{L}(\lambda) = 0$ *для всех* $\lambda \in \mathbb{C}$.

(b) *Для любого* $0 < \varepsilon < \pi/2m$ *существует* $q = q(\varepsilon) > 0$ *такое, что для всех*

$$\lambda \in \omega_{\varepsilon,q} = \{\lambda \in \omega_\varepsilon : |\lambda| > q_\varepsilon\}$$

оператор $\mathbf{L}(\lambda)$ *имеет ограниченный обратный*

$$\mathbf{L}^{-1}(\lambda) : \mathcal{W}^l(Q, \partial Q) \to W^{l+2m}(Q).$$

(c) *Для всех* $u \in W^{l+2m}(Q)$ *и* $\lambda \in \omega_{\varepsilon,q}$ *справедлива априорная оценка* (C.21).

Теорема C.8 и следствие C.1 вытекают из теорем 4.1, 5.1 и 5.2 в [1, гл. 1].

Введем неограниченный оператор $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset W^l(Q) \to W^l(Q)$ по формуле

$$\mathcal{A}u = \sum_{|\alpha|\leqslant 2m} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) \qquad (u \in \mathcal{D}(\mathcal{A})),$$

$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{u \in W^{l+2m}(Q) : B_\mu^0 u|_{\partial Q} = 0,\ \mu = 1, \dots, m\}$, где $a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — вещественнозначные функции, а операторы A^0 и B_μ^0 удовлетворяют условиям C.5 и C.6.

Из следствия C.1 и теорем A.12 и A.1 мы получаем следствие.

Следствие C.2. *Пусть выполняются условия* C.5 *и* C.6. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

(a) *Оператор*

$$\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset W^l(Q) \to W^l(Q)$$

фредгольмов, и $\operatorname{ind} \mathcal{A} = 0$.

(b) *Спектр $\sigma(\mathcal{A})$ дискретный, и для $\eta \notin \sigma(\mathcal{A})$ резольвента $R(\eta, \mathcal{A}) : W^l(Q) \to W^l(Q)$ — компактный оператор.*

(c) *Для любого $0 < \delta < \pi$ все точки спектра $\sigma(\mathcal{A})$, за исключением, быть может, конечного их числа, принадлежат углу комплексной плоскости $|\arg \eta| < \delta$.*

Следствие C.2 вытекает из теоремы 23 и следствия 27 в [10, гл. 14, § 6].

Одномерный случай. Изучим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром

$$\mathbf{A}(t, D_t, \lambda)u(t) = f_0(t) \qquad (t \in (d_1, d_2)) \tag{C.22}$$

с краевыми условиями

$$\mathbf{B}_\rho(t, D_t, \lambda)u(t)|_{t=d_\rho} = f_\rho \qquad (\rho = 1, 2) \tag{C.23}$$

относительно вектор-функции $u = (u_1, \ldots, u_N)$.

Здесь $\mathbf{A}(t, D_t, \lambda)$ и $\mathbf{B}_\rho(t, D_t, \lambda)$ — матрицы порядков $N \times N$ и $mN \times N$ соответственно с элементами

$$A_{jk}(t, D_t, \lambda)u_k(t) = \sum_{\alpha+\beta\leqslant 2m} a_{jk\alpha\beta}(t)\lambda^\beta D_t^\alpha u_k(t) \qquad (j, k = 1, \ldots, N),$$

$$B_{\rho\mu k}(t, D_t, \lambda)u_k(t) = \sum_{\alpha+\beta\leqslant m_{\rho\mu}} b_{\rho\mu k\alpha\beta}(t)\lambda^\beta D_t^\alpha u_k(t)$$

$$(\rho = 1, 2,\ \mu = 1, \ldots, mN,\ k = 1, \ldots, N),$$

$a_{jk\alpha\beta}$, $b_{\rho\mu k\alpha\beta} \in C^\infty(\mathbb{R})$ — комплекснозначные функции; $D_t = -i\dfrac{d}{dt}$;

$$f_0 = (f_{01}, \ldots, f_{0N}), \qquad f_\rho = (f_{\rho 1}, \ldots, f_{\rho, mN});$$

$m, m_{\rho\mu}$ — целые, $m \geqslant 1$, $m_\mu \geqslant 0$.

Пусть $A^0_{jk}(t, D_t, \lambda)$ и $B^0_{\rho\mu k}(t, D_t, \lambda)$ — главные однородные части операторов $A_{jk}(t, D_t, \lambda)$ и $B_{\rho\mu k}(t, D_t, \lambda)$ соответственно. Обозначим через $\mathbf{A}^0(t, \tau, \lambda)$ и $\mathbf{B}^0_\rho(t, \tau, \lambda)$ матрицы порядков $N \times N$ и $mN \times N$ с элементами

$$A^0_{jk}(t, \tau, \lambda) \quad (j, k = 1, \ldots, N),$$

$$B^0_{\rho\mu k}(t, \tau, \lambda) \quad (\rho = 1, 2,\ \mu = 1, \ldots, mN,\ k = 1, \ldots, N).$$

Предположим, что операторы $\mathbf{A}(t, D_t, \lambda)$ и $\mathbf{B}_\rho(t, D_t, \lambda)$ удовлетворяют следующим условиям.

Условие C.7. Существует ε, $0 < \varepsilon < \pi/2$, такое, что полином

$$\det \mathbf{A}^0(t, \tau, \lambda)$$

переменной τ имеет ровно mN корней $\tau_1^+(t,\lambda),\dots,\tau_{mN}^+(t,\lambda)$ с положительными мнимыми частями и mN корней с отрицательными мнимыми частями для всех $t\in[d_1,d_2]$ и $0\ne\lambda\in\omega_\varepsilon$.

Условие C.8. Строки матрицы

$$\mathbf{B}_\rho^0(t,\tau,\lambda)\mathbf{A}^0(t,\tau,\lambda)^{-1}\det\mathbf{A}^0(t,\tau,\lambda)$$

линейно независимы по модулю полинома $\prod\limits_{\mu=1}^{mN}\big(\tau-\tau_\mu^+(d_\rho,\lambda)\big)$ для всех $\rho=1,2$ и $0\ne\lambda\in\omega_\varepsilon$.

Определим пространство вектор-функций

$$W^{k,N}(d_1,d_2)=\prod_{j=1}^N W^k(d_1,d_2)$$

с нормой

$$\|u\|_{W^{k,N}(d_1,d_2)}=\left(\sum_{j=1}^N\|u_j\|^2_{W^k(d_1,d_2)}\right)^{1/2},$$

где $k\geqslant 0$ — целое. Положим

$$\mathcal{W}^{l,N}[d_1,d_2]=W^{l,N}(d_1,d_2)\times\mathbb{C}^{mN}\times\mathbb{C}^{mN},$$

где $l\geqslant\max\{0,-2m+m_{\rho\mu}+1\}$.

Для каждого $\lambda\in\mathbb{C}$ определим линейный ограниченный оператор

$$\mathbf{L}(\lambda):W^{l+2m,N}(d_1,d_2)\to\mathcal{W}^{l,N}[d_1,d_2]$$

по формуле

$$\mathbf{L}(\lambda)u=\{\mathbf{A}(t,D_t,\lambda)u,\mathbf{B}_\rho(t,D_t,\lambda)u|_{t=d_\rho}\}.$$

Мы будем использовать нормы, зависящие от параметра $\lambda \neq 0$,

$$|||u|||_{W^{l,N}(d_1,d_2)} = \left(\sum_j |||u_j|||^2_{W^l(d_1,d_2)} \right)^{1/2}, \tag{C.24}$$

$$|||u_j|||_{W^l(d_1,d_2)} = \left(\|u_j\|^2_{W^l(d_1,d_2)} + |\lambda|^{2l} \|u_j\|^2_{L_2(d_1,d_2)} \right)^{1/2}, \tag{C.25}$$

$$|||f|||_{\mathcal{W}^{l,N}[d_1,d_2]} = \left(|||f_0|||^2_{W^{l,N}(d_1,d_2)} + \sum_{\rho,\mu} |\lambda|^{2(l+2m-m_{\rho\mu}-1/2)} |f_{\rho\mu}|^2 \right)^{1/2}, \tag{C.26}$$

где $u = (u_1, \dots, u_N)$, $f = \{f_{0j}, f_{\rho\mu}\}$. Для фиксированного $\lambda \neq 0$ эти нормы эквивалентны нормам $\|u\|_{W^{l,N}(d_1,d_2)}$, $\|u_j\|_{W^l(d_1,d_2)}$ и $\|f\|_{\mathcal{W}^{l,N}[d_1,d_2]}$ соответственно.

Замечание C.5. Пусть выполняются условия C.7 и C.8. Тогда аналогично теореме C.8 оператор $\mathbf{L}(\lambda)$ обладает следующими свойствами.

(a) Оператор $\mathbf{L}(\lambda) : W^{l+2m,N}(d_1,d_2) \to \mathcal{W}^{l,N}[d_1,d_2]$ фредгольмов и $\operatorname{ind} \mathbf{L}(\lambda) = 0$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$.

(b) Существует $\lambda_0 > 0$ такое, что для $\lambda \in \omega_{\varepsilon,\lambda_0}$ оператор $\mathbf{L}(\lambda)$ имеет ограниченный обратный $\mathbf{L}^{-1}(\lambda) : \mathcal{W}^{l,N}[d_1,d_2] \to W^{l+2m,N}(d_1,d_2)$.

(c) Для любых $u \in W^{l+2m,N}(d_1,d_2)$ и $\lambda \in \omega_{\varepsilon,\lambda_0}$

$$c_1 |||\mathbf{L}(\lambda)u|||_{\mathcal{W}^{l,N}[d_1,d_2]} \leqslant |||u|||_{W^{l+2m,N}(d_1,d_2)} \leqslant c_2 |||\mathbf{L}(\lambda)u|||_{\mathcal{W}^{l,N}[d_1,d_2]}, \tag{C.27}$$

где c_1, $c_2 > 0$ не зависят от λ и u.

Сделаем некоторые замечания, касающиеся обыкновенного дифференциального уравнения с граничными условиями Дирихле.

Введем линейный ограниченный оператор $L(\lambda) : W^2(0,d) \to \mathcal{W}[0,d] = L_2(0,d) \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ по формуле $L(\lambda)u = \big(Au + \lambda^2 u, u(0), u(d)\big)$, где

$$Au = -a_0(t)u''(t) + a_1(t)u'(t) + a_2(t)u(t),$$

$a_i \in C[0,d]$ — вещественнозначные функции $(i = 0, 1, 2)$, $a_0(t) \geqslant k > 0$ $(t \in [0,d])$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Мы будем использовать нормы, зависящие от параметра λ,

$$|||u|||_{W^2(0,d)} = \Big(\|u\|^2_{W^2(0,d)} + |\lambda|^4 \|u\|^2_{L_2(0,d)}\Big)^{1/2},$$

$$|||f|||_{\mathcal{W}[0,d]} = \Big(\|f_0\|^2_{L_2(0,d)} + |\lambda|^3 \big(|f_1|^2 + |f_2|^2\big)\Big)^{1/2},$$

где $f = (f_0, f_1, f_2)$, $\lambda \neq 0$.

Замечание С.6. Замечание С.5 остается в силе для оператора $L(\lambda) : W^2(0,d) \to \mathcal{W}[0,d]$ с пространствами $W^2(0,d)$ и $\mathcal{W}[0,d]$ вместо пространств $W^{l+2m,N}(d_1,d_2)$ и $\mathcal{W}^{l,N}[d_1,d_2]$ соответственно.

Введем теперь неограниченный линейный оператор

$$\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset L_2(0,d) \to L_2(0,d)$$

по формуле

$$\mathcal{A}u = Au \qquad (u \in \mathcal{D}(\mathcal{A})),$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{u \in W^2(0,d) : u(0) = u(d) = 0\}.$$

Замечание С.7. Следствие С.2 остается справедливым для оператора

$$\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset L_2(0,d) \to L_2(0,d)$$

с пространством $L_2(0,d)$ вместо $W^l(Q)$.

Литература

[1]* *Агранович М. С.*, *Вишик М. И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Успехи мат. наук. — 1964. — *19*, № 3. — С. 53–161.

[2] *Безяев В. И.* Общие краевые задачи для эллиптических и параболических уравнений. — М.: РУДН, 2008.

[3] *Бесов О. В.*, *Ильин В. П.*, *Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. — М.: Наука, 1975.

[4] *Бицадзе А. В.*, *Самарский А. А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических задач // Докл. АН СССР. — 1969. — *185*, № 4. — С. 739–740.

[5] *Вишик М. И.* О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений // Мат. сб. — 1951. — *29* (*71*), № 3. — С. 615–676.

[6] *Вишик М. И.* Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1952. — *1*. — С. 187–264.

[7]* *Волевич Л. Р.* Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем // Мат. сб. — 1965. — *68*, № 3. — С. 373–416.

[8]* *Гохберг И. Ц.*, *Сигал Е. И.* Операторное обобщение теоремы о логарифмическом вычете и теоремы Руше // Мат. сб. — 1971. — *84* (*126*), № 4. — С. 607–629.

[9] *Гуревич П. Л., Егер В., Скубачевский А. Л.* О существовании периодических решений некоторых нелинейных задач термоконтроля // Докл. АН. — 2007. — *418*, № 2 (2007). — С. 151–154.

[10]* *Данфорд Н.*, *Шварц Дж.* Линейные операторы. Т. 2 — М.: Мир, 1966.

[11] *Ильин В. А.* Необходимые и достаточные условия базисности Рисса корневых векторов разрывных операторов второго порядка // Дифф. уравн. — 1986. — *22*, № 12. — С. 2059–2071.

[12] *Ильин В. А.*, *Моисеев Е. И.* Априорная оценка решений задачи, сопряженной к нелокальной краевой задаче первого рода // Дифф. уравн. — 1988. — *24*, № 5. — С. 795–804.

[13]* *Иосида К.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967.

[14] *Каменский А. Г.* Краевые задачи для уравнений с формально симметричными дифференциально-разностными операторами // Дифф. уравн. — 1976. — *12*, № 5. — С. 815–824.

[15] *Каменский Г. А.*, *Мышкис А. Д.* К постановке краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом и несколькими старшими членами // Дифф. уравн. — 1974. — *10*, № 3. — С. 409–418.

[16] *Каменский Г. А.*, *Мышкис А. Д.*, *Скубачевский А. Л.* О гладких решениях краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения // Укр. мат. журн. — 1985. — *37*, № 5. — С. 581–589.

[17]* *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.

[18] *Кишкис К. Ю.* Об одной нелокальной задаче для гармонических в многосвязной области функций // Дифф. уравн. — 1987. — *23*, № 1. — С. 174–177.

[19] *Красносельский М. А., Покровский А. В.* Системы с гистерезисом. — М.: Наука, 1983.

[20]* *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1971.

[21] *Кук К.*, *Россовский Л. Е.*, *Скубачевский А. Л.* Краевая задача для функционально-дифференциальных уравнений с линейно преобразованным аргументом // Дифф. уравн. — 1995. — *31*, № 8. — С. 1366–1370.

[22]* *Ладыженская О. А.*, *Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. — М.: Наука, 1973.

[23]* *Лионс Ж. Л.*, *Madженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.

[24]* *Михайлов В. П.*, Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1976.

[25] *Моисеев Е. И.* О базисности собственных функций одной нелокальной краевой задачи // Докл. АН СССР. — 1990. — *313*, № 3. — С. 556–559.

[26] *Ройтберг Я. А.*, *Шефтель З. Г.* Нелокальные задачи для эллиптических уравнений и систем // Сиб. мат. журн. — 1972. — *13*, № 1. — С. 165–181.

[27] *Самарский А. А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифф. уравн. — 1980. — *16*, № 11. — С. 1925–1935.

[28] *Скубачевский А. Л.* Нелокальные эллиптические задачи с параметром // Мат. сб. — 1983. — *121* (*163*), № 6. — С. 201–210.

[29] *Скубачевский А. Л.* Эллиптические задачи с нелокальными условиями вблизи границы // Мат. сб. — 1986. — *129* (*171*), № 2. — С. 279–302.

[30] *Скубачевский А. Л.* Разрешимость элиптических задач с нелокальными условиями // Докл. АН СССР. — 1986. — *291*, № 3. — С. 551–555.

[31] *Скубачевский А. Л.* Краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами // Докл. АН. — 1992. — *324*, № 6. — С. 1155–1158.

[32] *Скубачевский А. Л.* Неклассические краевые задачи. I // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2007. — *26*. — С. 3–132.

[33] *Скубачевский А. Л.* Нелокальные краевые задачи и их приложения к исследованию многомерных диффузионных процессов и процессов терморегуляции живых клеток. — М.: РУДН, 2008.

[34] *Слободецкий Л. Н.* Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их приложение к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных // Уч. зап. Ленинград. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена. — 1958. — *197*. — С. 54–112.

[35] *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1950.

[36] *Солонников В. А.* Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле Даглиса—Ниренберга // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. — 1966. — *92*. — С. 233–297.

[37] *Тамаркин Я. Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. — Петроград, 1917.

[38]* *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. — М.: Мир, 1980.

[39] *Шкаликов А. А.* О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями // Вестн. Моск. ун-та, сер. 1. Мат., мех. — 1982. — № 6. — С. 12–21.

[40] *Bensoussan A.*, *Lions J. L.* Impulse control and quasi-variational inequalities. — Bordas, Paris: Gauthier-Villars, 1984.

[41] *Browder F.* Non-local elliptic boundary value problems // Amer. J. Math. — 1964. — *86*, № 4. — P. 735–750.

[42] *Carleman T.* Sur la theorie des equations integrales et ses applications // Verhandlungen des Internat. Math. Kongr., Zürich. — 1932. — *1*. — S. 138–151.

[43] *Friedman A., Jiang L.-S.* Periodic solutions for a thermostat control problem // Commun. Partial Differential Equations. — 1988. — *13 (5)*. — C. 515–550 (1988).

[44] *Gårding L.* Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations // Math. Scand. — 1953. — *1*. — P. 55–72.

[45] *Glashoff K., Sprekels J.* The regulation of temperature by thermostats and set-valued integral equations // J. Integral Equ. — 1982. — *4*. — C. 95–112.

[46] *Gurevich P. L.* Solvability of the boundary value problem for some differential-difference equations // Funct. Differ. Equ. — 1998. — *5*, № 1-2. — P. 139–157.

[47] *Krall A. M.* The development of general differential and general boundary systems // Rocky Mountain J. Math. — 1975. — *5*, № 4. — P. 493–542.

[48] *Lions J. L., Magenes E.* Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications. II. — Berlin–Heidelberg–New York, Springer, 1972.

[49] *Picone M.* I teoremi d'esistenza per gl'integrale di una equazione differenziale lineare ordinaria soddisfacenti ad una nuova classe di condizioni // Rend. Accad. Lincei. — 1908. — *17.* — P. 340–347.

[50] *Picone M.* Equazione integrale traducente il piu generale problema lineare per le equation differentiali lineari ordinarie di qualsivoglia ordine // Accad. Naz. Lincei. Atti Convegni. Roma. — 1932. — *15*, № 6. — P. 942–948.

[51] *Prüss J.* Periodic solutions of the thermostat problem // Proc. Conf. Differential Equations in Banach Spaces, Bologna, July 1985. Lecture Notes Math. — 1986. — *1223.* P. 216–226.

[52] *Rossovskii L. E.* On boundary value problems for a class of functional differential equations // Nonlinear Anal. — 2002. — *49.* — P. 799–816.

[53] *Skubachevskii A. L.* On the stability of index of nonlocal elliptic problems // J. Math. Anal. Appl. — 1991. — *160*, № 2. — P. 323–341.

[54] *Skubachevskii A. L.* Elliptic functional differential equations and applications. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 1997.

[55] *Sommerfeld A.* Ein Beitrag zur hydrodynamischen Erklärung der turbulenten Flussigkeitsbewegungen // Atti IV Congr. Intern. Matem. Rome. — 1909. — *3.* — P. 116–124.

Цели и задачи курса

– представленный в курсе материал относится к дифференциальным уравнениям (математика);

– цели курса: (1) знакомство с современной теорией нелокальных задач для дифференциальных уравнений в частных производных, (2) освоение методов нелинейного функционального анализа применительно к решению нелинейных уравнений в частных производных, (3) изучение приложений общей теории к описанию нелокальных процессов распределения тепла;

– курс предназначен для бакалаврской программы обучения;

– рекомендуется в качестве спецкурса по выбору для студентов физико-математических факультетов университетов и вузов, обучающихся по направлению «Математика»;

– курс рассчитан на 144 часа нагрузки (один семестр, 4 кредита), из которых 36 часов отводится на лекции, 36 часов на практические занятия и 72 часа – на самостоятельную работу студентов.

Инновационность курса

1. По содержанию

Представленный в курсе материал содержит основы новой теории нелокальных эллиптических краевых задач и нелинейных нелокальных параболических задач с оператором гистерезиса в краевом условии. Большинство результатов, представленных в курсе, принадлежат авторам.

2. По методике преподавания

Лекции и практические занятия по данному курсу будут проводиться в мультимедийном классе, что позволяет сочетать изложение новых математических результатов и современных вычислительных средств и средств визуализации для лучшего усвоения знаний студентами.

3. По литературе

В учебном пособии и соответствующем курсе впервые излагается материал, который раньше можно было найти лишь в научных статьях. Поэтому список обязательной литературы содержит 8 статей и лишь две монографии. Таким образом, знакомство с современной теорией нелокальных краевых задач до публикации данного учебного пособия было весьма затруднительным.

4. По сочетанию теории и приложений

В курсе излагаются актуальные вопросы, возникающие при моделировании процессов автоматической терморегуляции в химических реакторах и различных системах климат-контроля.

5. По организации учебного процесса

Реализация курса будет проходить в рамках кредитно-модульной системы.

Структура курса

Введение (лекции – 2 часа, практические занятия – 4 часа; самостоятельная работа – 4 часа).

Раздел 1. Нелокальные краевые задачи на конечном интервале (лекции – 12 часов, практические занятия – 12 часов; самостоятельная работа – 20 часов; трудоемкость введения и раздела 1 – 1 кредит).

Рассматриваются два взаимосвязанных типа нелокальных краевых задач: обыкновенные дифференциальные уравнения с нелокальными краевыми условиями и краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений.

Доказывается однозначная и фредгольмова разрешимость нелокальных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром. Эти результаты используются при исследовании дифференциально-разностных уравнений. Кроме того, знакомство с используемыми здесь методами облегчает восприятие соответствующих результатов в многомерном случае (см. раздел 2, где применяются аналогичные методы).

Далее, в разделе 1 изучаются свойства разностных операторов на конечном интервале и исследуются краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений. Доказывается фредгольмова и однозначная разрешимость. Исследуются свойства спектра.

Раздел 2. Нелокальные эллиптические задачи в многомерных областях (лекции – 8 часов, практические занятия – 6 часов, самостоятельная работа – 20 часов, трудоемкость – 1 кредит).

Рассматриваются нелокальные эллиптические задачи в многомерных областях. Исследуется случай, когда носитель нелокальных членов лежит строго внутри области, причем нелокальные условия могут быть заданы как на некоторых многообразиях, так и посредством абстрактного нелокального оператора.

Изучается фредгольмова разрешимость нелокальных эллиптических задач и однозначная разрешимость задач с параметром. Получены априорные оценки решений и построен правый регуляризатор. Методы, применяемые в разделе 2, являются обобщением методов раздела 1.

Раздел 3. Применение методов нелинейного функционального анализа к решению уравнений в частных производных. Нелокальные проблемы процессов распределения тепла (лекции – 14 часов, практические занятия – 14 часов, самостоятельна работа – 28 часов, трудоемкость – 2 кредита).

Изучаются методы нелинейного функционального анализа, имеющие приложения в теории уравнений с частными производными: нелинейные операторы в банаховых пространствах, теоремы о неподвижных точках. В качестве приложения исследуется нелинейная задача автоматической терморегуляции с гистерезисным переключением нагревательного элемента, возникающая при описании процессов в химических реакторах и различных системах климат-контроля. Наличие температурных датчиков, распределенных внутри области и обеспечивающих обратную связь, обуславливает нелокальный характер задачи.

Доказывается существование и единственность сильного решения соответствующей начально-краевой задачи. Исследуется вопрос о существовании периодических и периодических в среднем решений задачи.

Система контроля знаний

включает:

– промежуточный контроль в форме письменной контрольной работы,

– выполнение курсовой работы,

– итоговый контроль в форме письменной контрольной работы.

На письменную контрольную работу отводится одно практическое занятие на 8-ой неделе семестра. Целью работы является проверка усвоения материала первой части курса, охватывающего основные свойства пространств Соболева, метод Фурье решения краевой задачи для уравнения Пуассона в прямоугольнике и круге и начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности (введение, лекция 1, практические занятия 1, 2), обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка с нелокальными условиями и краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений на конечном интервале (раздел 1, лекции 2-7, практические занятия 3-7). Контрольная работа состоит из трех задач. Оценивается как ход решения (достаточная аргументация, строгость рассуждений), так и правильность полученного ответа. Точное содержание контрольной работы студентам заранее не известно. Примерные варианты приведены ниже.

Вариант 1

1. При каком значении вещественного параметра функция принадлежит пространству Соболева $H^1(Q)$? Здесь $Q = \{x \in \mathrm{R}^2 : |x| < 1\}$

   r, φ - полярные координаты точки x.

2. Рассмотрим разностный оператор

   $(Rv)(t) = v(t) + av(t+1) + bv(t-1)$,

   где a, b – фиксированные вещественные числа, $ab \neq 1$. Пусть R_Q оответствующий разностный оператор на интервале (0,2). Доказать, что оператор R_Q взаимно однозначно отображает $\mathrm{H}_0^2(0,2)$ на множество $\{v \in H^1(0,2) : v(0) = av(1), \quad v(2) = bv(1)\}$.

2. Найти собственные значения нелокальной краевой задачи

   $v''(t) - \lambda^2 v(t) = 0 \ \left(t \in (0,\pi)\right)$,

   $v(0) - av(\pi/2) = 0, \quad v(\pi) = 0$,

   где a– фиксированный вещественный параметр.

Вариант 2

1. Методом Фурье решить эллиптическую краевую задачу в круге

   $\Delta u(x) = \sin 2\varphi \quad (|x| < 1)$,

   $u(x) = 1 + 3\cos\varphi \quad (|x| = 1)$,

   где r, φ - полярные координаты точки x.

2. Рассмотрим краевую задачу для дифференциально-разностного уравнения

   $(Rv)''(t) = 1 \ \left(t \in (0,2)\right)$,

   $v(t) = 0 \ \left(t \in [-1,0] \cup [2,3]\right)$,

   где

   $(Rv)(t) = v(t) + 2v(t+1) + 2v(t-1)$.

Найти решение задачи, сведя ее к обыкновенному дифференциальному уравнению с нелокальными краевыми условиями.

3. Рассмотрим нелокальную краевую задачу

$$v''(t) - \lambda^2 v(t) = 0 \ \left(t \in (0,\pi)\right),$$

$$v(0) - a v(\pi/2) = 0, \qquad v(\pi) = 0,$$

где a – фиксированный вещественный параметр. Определить, при каком значении параметра a число $\lambda=0$ является собственным значением нелокальной задачи, и найти соответствующие собственные и присоединенные векторы.

Написание курсовой работы является самостоятельной внеаудиторной формой работы студентов. Распределение тем курсовых работ происходит в течение первой недели, а представление и защита курсовых работ – не позднее, чем за неделю до проведения итогового контроля. Целью написания курсовой работы является более глубокое самостоятельное освоение студентом изучаемого предмета, включая элементы научно-исследовательской работы. При этом студент может сам выбирать либо более техническую тему, либо более творческую и более сложную. При оценке курсовой работы учитывается уровень самостоятельности студента, сложность темы, а также строгость изложения полученных им результатов.

При написании курсовой работы недопустимо включать в свою работу выдержки из других авторов без указания на это, пересказывать чужую работу близко к тексту без ссылок на нее, использовать чужие идеи без указания первоисточников (это касается и источников, найденных в Интернете). Все случаи плагиата должны быть исключены. В конце работы дается исчерпывающий список всех используемых источников. Те же правила академической этики и соблюдения авторских прав относятся и к учебному пособию по данному курсу.

В конце обучения проводится итоговая письменная работа, охватывающая весь материал курса.

Задание к итоговой работе включает в себя три задачи по темам из разделов 2 и 3. Однако в первых двух задачах могут использоваться также материалы раздела 1.

Время на выполнение итоговой работы – 2 академических часа. Ниже приведены возможные варианты заданий к итоговой работе.

<u>Вариант 1</u>

1. Методом Фурье решить нелокальную эллиптическую краевую задачу в круге

   $\Delta u(x) = 0 \quad (|x| < 2),$

   $u(x) - au(x/2) = u_0(\varphi) \;\; (|x| = 2),$

   где a– фиксированный вещественный параметр, r, φ - полярные координаты точки x,

   $u_0(\varphi) = 1 + \cos\varphi.$

   При каких значениях параметра задача с однородным краевым условием имеет нетривиальное решение? При каких значениях параметра задача разрешима для любой гладкой 2π-периодической функции u_0.

2. Рассмотрим следующую начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности в ограниченной области Q с гладкой границей:

   $u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = 0 \; (x \in Q, t \in [0,T]),$

   $u(x) = 0 \; (x \in \partial Q),$

   $u(0,x) = \phi(x) \; (x \in Q),$

   где

$\phi \in H_0^1(Q).$

Доказать, что существует $\omega>0$ такое, что

$$\|u(\cdot,T)\|_{H_0^1(Q)} \le e^{-\omega T}\|\phi\|_{H_0^1(Q)},$$

где

$$\|\phi\|_{H_0^1(Q)} = \int_Q |\nabla\phi(x)|^2\,dx.$$

3. Пусть Q – ограниченная область единичного объема с гладкой границей. Рассмотрим задачу автоматической терморегуляции

$$w_t(x, t) - \Delta w(x,t) = 0 \ (x \in Q, t \ge 0),$$

$$\frac{\partial w}{\partial n} = u(t) - 1 \ (x \in \partial Q),$$

$$w(0,x) = \phi(x) \ \ (x \in Q),$$

где $w(x,t)$ - температура области в точке x в момент времени t, n – внешняя нормаль к границе области, $u(t)$ - функция управления Функция управления удовлетворяет соотношениям

$$u'(t) + u(t) = H(w_m)(t) \ \ (t > 0),$$

$$u(0) = u_0,$$

Где $w_m(t)$ – средняя по области температура, $H(w_m)(t)$– оператор гистерезиса с пороговыми значениями w_1, w_2, а u_0 – вещественный параметр.

Предполагая, что

$$w_m(0) < w_1, \qquad u_0 \le 1,$$

найти пределы

$$\lim_{t\to+\infty} w_m(t), \qquad \lim_{t\to+\infty} u(t).$$

Вариант 2

1. Пусть Q – круг единичного радиуса с центром в начале координат. Рассмотрим нелокальную эллиптическую задачу

$$\Delta u(x) = f(x) \quad (x \in Q),$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(x) - b(x)\frac{\partial u}{\partial r}(x/2) = u_0(x) \; (x \in \partial Q),$$

где b – гладкая функция, r, φ - полярные координаты точки x.

Построить линейный оператор

$$B: H^2(Q) \to H^{1/2}(\partial Q)$$

такой, что

$$Bu(x) = b(x)\frac{\partial u}{\partial n_1}(x/2), \qquad x \in \partial Q,$$

и

$$\|Bu\|_{H^{1/2}(\partial Q)} \leq const\, \|u\|_{H^2(Q_\sigma)} \;\; \forall u \in H^2(Q),$$

где

$$Q_\sigma = \{x \in Q : dist(x, \partial Q) > \sigma\}.$$

Обосновать выбор

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности в ограниченной области Q с гладкой границей:

$$u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = 0 \; (x \in Q, t \in [0,T]),$$

$$u(x) = 0 \; (x \in \partial Q),$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(0,x) = \phi(x) \; (x \in Q),$$

Доказать, что существует ω>0 такое, что

$$\|u(\cdot,T)\|_{H^1(Q)} \leq e^{-\omega T}\|\phi\|_{H^1(Q)}.$$

Пусть Q – ограниченная область единичного объема с гладкой границей. Рассмотрим задачу автоматической терморегуляции

$$w_t(x,t) - \Delta w(x,t) = 0 \; (x \in Q, t \geq 0),$$

$$\frac{\partial w}{\partial n} = u(t)\ (x \in \partial Q),$$

$$w(0,x) = 0\ \ (x \in Q),$$

где $w(x,t)$ - температура области в точке x в момент времени t, n – внешняя нормаль к границе области, $u(t)$ - функция управления Функция управления удовлетворяет соотношениям

$$u'(t) + u(t) = H(w_m)(t)\ \ (t > 0),$$

$$u(0) = u_0,$$

где $w_m(t)$ – средняя по области температура, $H(w_m)(t)$– оператор гистерезиса с пороговыми значениями w_1, w_2, а u_0 – вещественный параметр.

Дать определение сильного решения задачи автоматической терморегуляции. Предполагая, что

$$w_m(0) < w_1,$$

доказать существование и единственность сильного решения.

Для оценки работы студента применяется балльная система. Наилучшему результату соответствуют 100 баллов, которые распределяются по видам контроля следующим образом:

– промежуточная контрольная работа – от 0 до 15 баллов,

– курсовая работа – от 0 до 20 баллов,

– итоговая письменная контрольная работа – от 0 до 25 баллов,

– устный экзамен – от 0 до 40 баллов.

На экзамене билет состоит из двух теоретических вопросов и одной задачи. Каждый теоретический вопрос посвящен одной из лекций курса. Задача имеет уровень сложности одной из контрольных работ.

Соответствие суммарного количества набранных баллов итоговой оценке (по пятибалльной шкале и европейскому стандарту) показано в таблицах.

Баллы	0-50	51-68	69-85	86-100
Оценка	неуд.	удовл.	хорошо	отлично

Баллы	0-30	31-50	51-62	63-73	74-83	84-92	93-100
Оценка	F	FX	E	D	B	C	A

Методика выставления и шкала итоговых оценок отвечают принятым в РУДН для теоретических дисциплин.

Программа курса

Аннотированное содержание курса

Введение

(лекция 1; 2 часа лекций, 4 часа практических занятий,
4 часа самостоятельной работы)

Лекции

1. Рассматриваются постановки нелокальных эллиптических и параболических задач. Описываются математические модели процессов терморегуляции в химических реакторах и различных системах климат-контроля, приводящие к линейным и нелинейным нелокальным эллиптическим и параболическим задачам. Излагаются без доказательств новые свойства рассматриваемых нелокальных задач. Так, наличие нелокального слагаемого со сколь угодно малым коэффициентом в краевом условии эллиптической задачи приводит к тому, что задача становится несамосопряженной, спектр задачи содержит невещественные собственные значения, а помимо собственных векторов появляются присоединенные. Наличие нелинейности (в частности, гистерезисного типа) в математических моделях процессов терморегуляции приводит к появлению периодических решений даже в случае нулевой правой части.

Практические занятия

1. Пространства $L_2(Q)$ и пространства Соболева. Эквивалентные нормы в пространствах Соболева. Теорема Реллиха-Гординга. Теорема Соболева о вложении пространств Соболева в пространства непрерывных функций.

При исследовании дифференциальных уравнений в частных производных пространства Соболева играют фундаментальную роль. В частности, теория нелокальных задач и приложения к моделям терморегуляции, изучаемые в настоящем курсе, существенно опираются на теорию пространств Соболева. Первое практическое занятие посвящено повторению основных свойств пространств Соболева, а также изучению некоторых новых для студентов свойств (эквивалентные нормы, зависящие от параметра и их свойства).

2. Метод Фурье решения краевых задач для уравнения Пуассона в прямоугольнике и круге и начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности.

Метод Фурье и его модификации позволяют доказывать существование решений, а также получать сами решения (в виде ряда) для весьма широкого круга задач. Это занятие посвящено решению простейших задач математической физики методом Фурье. Далее в курсе метод Фурье будет использован как для нахождения явного решения нелокальных эллиптических задач в многомерных областях, так и для исследования нелинейной задачи автоматической терморегуляции.

Раздел 1

Нелокальные краевые задачи на конечном интервале

(лекции – 12 часов, практические занятия – 12 часов; самостоятельная работа – 20 часов; трудоемкость введения и раздела 1 – 1 кредит).

Лекции

2. Обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка с нелокальными краевыми условиями. Постановка задачи. Априорная оценка решений.

Рассматриваются нелокальные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с параметром. Доказывается априорная оценка решений. Полученные результаты применяются для доказательства фредгольмовой и однозначной разрешимости и исследования спектра нелокальной задачи в лекции 3.

3. Обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка с нелокальными краевыми условиями. Разрешимость и спектр.

Продолжается изучение обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с нелокальными краевыми условиями. При помощи результатов лекции 2 доказывается фредгольмова и однозначная разрешимость нелокальной краевой задачи. Полученные результаты используются в лекциях 6 и 7 при сведении краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения к нелокальной краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения. Кроме того, методы, описанные в лекциях 2 и 3, обобщаются в лекциях 9-11 при исследовании нелокальных эллиптических задач в многомерных областях.

4. Разностные операторы в одномерном случае. Свойства разностных операторов в функциональных пространствах.

Нелокальные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений тесно связаны с краевыми задачами для дифференциально-разностных уравнений. В этой лекции вводятся разностные операторы на всей числовой оси и на конечном интервале. Изучаются их свойства в функциональных пространствах (пространствах Соболева). Результаты применяются в лекциях 5-7, посвященных фредгольмовой и однозначной разрешимости краевых задач для дифференциально-разностных уравнений.

5. Теорема об изоморфизме в пространствах Соболева.

При помощи теорем из лекции 6 доказывается, что разностных оператор отображает непрерывно и взаимно однозначно пространства Соболева функций, заданных на конечном интервале, с нулевым следом на концах интервала на подпространство пространства Соболева, состоящее из функций, удовлетворяющих нелокальным краевым условиям. Эти результаты используются в лекции 6 при сведении краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения к обыкновенному дифференциальному уравнению с нелокальными краевыми условиями (см. лекции 2 и 3).

6. Краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений второго порядка. Гладкость обобщенных решений. Фредгольмова разрешимость.

Рассматриваются краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений второго порядка. Доказывается, что гладкость обобщенных решений таких задач может, вообще говоря, нарушаться внутри интервала и сохраняется лишь на некоторых подынтервалах. Доказывается фредгольмова разрешимость краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения путем сведения ее к обыкновенному дифференциальному уравнению с нелокальными краевыми условиями. Здесь используются результаты лекций 2-5.

7. Однозначная разрешимость и спектр краевых задач для дифференциально-разностных уравнений второго порядка.

При помощи результатов из лекций 4 и 6 получены достаточные условия однозначной разрешимости краевых задач для дифференциально-разностных уравнений второго порядка, дискретности спектра и компактности резольвенты оператора задачи в точках резольвентного множества. На этом завершается изучение линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с нелокальными краевыми условиями.

Практические занятия

3. Нелокальные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Разрешимость и спектр.

Примеры посвящены решению обыкновенных дифференциальных уравнений с нелокальными краевыми условиями, связывающими значения неизвестной функции на концах интервала со значениями в конечном числе точек внутри интервала, и нахождению спектра соответствующих нелокальных краевых задач.

4. Обыкновенные дифференциальные уравнения с интегральными краевыми условиями. Разрешимость и спектр (формулировка результата без доказательства). Пример оператора с интегральными краевыми условиями, спектр которого занимает всю комплексную плоскость.

Примеры посвящены обыкновенным дифференциальным уравнениям с интегральными краевыми условиями.

5. Разностные операторы в одномерном случае. Регулярные и нерегулярные разностные операторы. Структура образа разностного оператора.

Примеры посвящены разностным операторам на всей числовой оси и на конечном интервале. Строятся теплицевы матрицы, соответствующие разностным операторам. В зависимости от структуры матрицы определяется принадлежность разностного оператора к классу регулярных или нерегулярных разностных операторов. Решаются примеры, в которых требуется описать образ разностного оператора.

6. Краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений второго порядка.

Различными методами решаются краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений второго порядка.

7. Спектр краевых задач для дифференциально-разностных уравнений второго порядка.

Решаются примеры, связанные с изучением спектра краевых задач для дифференциально-разностных уравнений второго порядка.

8. Контрольная работа.

Раздел 2

Нелокальные эллиптические задачи в многомерных областях

(лекции – 8 часов, практические занятия – 6 часов, самостоятельная работа – 20 часов, трудоемкость – 1 кредит).

Лекции

8. Нелокальные эллиптические задачи в многомерном случае. Постановка нелокальной задачи с параметром. Априорная оценка решений.

Рассматриваются нелокальные эллиптические задачи с параметром в многомерном случае. Рассматриваются как нелокальные слагаемые, заданные на многообразиях, так и абстрактные нелокальные операторы с носителем внутри области. Обобщаются методы из лекции 3. Доказывается априорная оценка решений. Полученные результаты используются в лекции 9 при доказательстве однозначной разрешимости задачи и исследовании спектра.

9. Однозначная разрешимость нелокальных эллиптических задач с параметром.

Доказывается однозначная разрешимость нелокальной эллиптической задачи с параметром и дискретность спектра. Используются методы лекции 3 и результаты лекции 8.

10. Фредгольмова разрешимость и индекс нелокальных эллиптических задач. Априорная оценка решений.

Рассматривается нелокальная эллиптическая задача без параметра. Вообще говоря, эллиптическая задача без параметра не есть частный случай эллиптической задачи с параметром, поэтому вопрос о разрешимости задачи без параметра требует отдельного изучения. В данной лекции доказывается априорная оценка решений. При доказательстве используются видоизмененные методы лекций 2 и 8. Полученные результаты используются в лекции 11 при доказательстве фредгольмовой разрешимости нелокальной задачи.

11. Фредгольмова разрешимость и индекс нелокальных эллиптических задач. Построение правого регуляризатора.

Строится правый регуляризатор для нелокальной эллиптической задачи. Наряду с априорной оценкой (см. лекцию 10), это позволяет доказать фредгольмову разрешимость нелокальной задачи. Устанавливается гомотопическая устойчивость индекса нелокальных эллиптических задач. На этом завершается изучение линейных нелокальных эллиптических задач.

Практические занятия

9. Нелокальные эллиптические задачи в многомерном случае. Связь между абстрактными нелокальными условиями и нелокальными условиями, заданными на многообразиях.

Решаются примеры на сведение нелокальных условий, заданных на многообразиях, к нелокальным условиям с абстрактным нелокальным оператором, носитель которого содержится внутри области.

10. Решение нелокальных эллиптических задач в круге и прямоугольнике методом Фурье. Сравнение с методом Фурье для «локальных» краевых задач.

Методом Фурье решаются нелокальные эллиптические задачи в простейших областях: прямоугольнике и круге. Проводится сравнение свойств решений нелокальных и локальных краевых задач. Последние решались методом Фурье на занятии 2.

11. Эквивалентность наличия априорной оценки и существования правого регуляризатора и фредгольмовой разрешимости задачи.

Обосновывается эквивалентность наличия априорной оценки и существования правого регуляризатора и фредгольмовой разрешимости задачи. Ряд утверждений студентам предлагается доказать самостоятельно. Данное практическое занятие дополняет лекцию 11.

Раздел 3

Применение методов нелинейного функционального анализа к решению уравнений в частных производных. Нелокальные проблемы процессов распределения тепла

(лекции – 14 часов, практические занятия – 14 часов, самостоятельна работа – 28 часов, трудоемкость – 2 кредита).

Лекции

12. Применение методов нелинейного функционального анализа к решению уравнений в частных производных. Теоремы о неподвижных точках.

Рассматриваются нелинейные операторы в банаховых пространствах, определяются понятия непрерывности, ограниченности, компактности нелинейных операторов. Формулируются теоремы о неподвижных точках: принцип сжимающих отображений (теорема Банаха о неподвижной точке), теоремы Брауэра и Шаудэра о неподвижных точках. Эти теоремы используются при изучении периодических решений нелинейных задач терморегуляции (лекции 15-17), а также при решении нелинейных эллиптических и параболических уравнений в частных производных (практические занятия 13-15).

13. Начально-краевая задача для уравнения теплопроводности с неоднородными краевыми условиями. Постановка задачи. Существование и единственность сильного решения.

Рассматривается начально-краевая задача для уравнения теплопроводности с неоднородными краевыми условиями. Определяется слабое и сильное решения задачи. Устанавливается существование и единственность слабого и сильного решения методом теории полугрупп и методом Фурье. Результаты применяются в лекциях 15-17 при исследовании периодических решений нелинейной задачи терморегуляции.

14. Нелинейная задача автоматической терморегуляции в ограниченной области с гистерезисным переключением нагревательного элемента. Математическая модель. Существование и единственность сильного решения.

Рассматривается нелинейная задача автоматической терморегуляции в ограниченной области с гистерезисным переключением нагревательного элемента. Определяется сильное решение задачи. При помощи результатов лекции 13 и метода шагов доказывается существование и единственность сильного решения задачи. Полученные результаты используются в лекциях 15-17 при исследовании периодических решений нелинейной задачи терморегуляции.

15. Периодические и периодические в среднем решения нелинейной задачи автоматической терморегуляции. Теорема об условном существовании периодического решения.

Вводится понятие периодического и периодического в среднем решения нелинейной задачи автоматической терморегуляции. Доказывается, что если нелинейная задача автоматической терморегуляции имеет периодическое в среднем решение, то она имеет также периодическое решение с тем же периодом. Результат используется в лекции 17 для доказательства существования периодического решения в случае краевых условий Неймана и равномерного по области распределения температурных датчиков.

16. Получение системы обыкновенных дифференциальных уравнений для функции управления и средней температуры в случае равномерного по области распределением температурных датчиков. Анализ полученной системы.

Рассматривается частный случай нелинейной задачи терморегуляции, когда заданы краевые условия Неймана и равномерного по области распределения температурных датчиков. Выводится система двух обыкновенных дифференциальных уравнений для функции управления и средней температуры. Исследуется поведение решений этой системы при различных значениях параметров (начальное распределение температуры, начальное значение функции управление, «критическое» значение параметра управления).

17. Существование периодических решений нелинейной задачи автоматической терморегуляции с равномерным по области распределением температурных датчиков.

Полученная в лекции 16 система обыкновенных дифференциальных уравнений исследуется на предмет существования периодического решений. При определенном выборе параметров системы доказывается существование, единственность и устойчивость периодического решения. В силу результатов лекции 15 (об условном существовании периодического решения) отсюда следует существование периодического решения исходной нелинейной задачи автоматической терморегуляции.

18. Обзорная лекция.

Дается обзор результатов курса. Подчеркивается взаимосвязь различных разделов курса и общность методов исследования.

Практические занятия

12. Нелинейные операторы. Теоремы о неподвижных точках.

Решаются примеры, связанные с нелинейными операторами в банаховых пространствах. Рассматриваются примеры нахождения неподвижных точек нелинейных операторов.

13. Применение теоремы Шаудера о неподвижной точке к решению нелинейных эллиптических задач.

При помощи теоремы Шаудера решаются нелинейные эллиптические задачи вида

$\Delta u(x) = g\big(x, u(x), \nabla u(x)\big)\ (x \in Q),$

$u(x) = 0\ (x \in \partial Q).$

14-15. Применение принципа сжимающих отображений к решению нелинейных параболических задач.

При помощи теоремы Шаудера решаются нелинейные параболические задачи вида

$u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = f\big(x,t,u(x,t)\big)\ (x \in Q, t \in [0,T]),$

$u(x) = 0\ (x \in \partial Q),$

$u(0,x) = \phi(x)\ (x \in Q).$

16-17. Нелинейная задача автоматической терморегуляции с гистерезисным переключением нагревательного элемента. Периодические и периодические в среднем решения.

Решаются примеры, связанные с нелинейной задачей автоматической терморегуляции. Исследуется поведение решений при различных значениях параметров системы.

18. Итоговая контрольная работа.

Список обязательной литературы

1. Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач. – ДАН СССР, 1969, т. 185, № 4, с. 734-740 (с. 739-740 – лекция 1).
2. Гуревич П.Л, Егер В., Скубачевский А.Л. О существовании периодических решений некоторых нелинейных задач термоконтроля. – Доклады АН. 2008 (лекции 14-17; практическое занятие 16, 17).
3. Каменский А.Г. Краевые задачи для уравнений с формально симметрическими дифференциально-разностными операторами - Дифференц. уравн., 1976, т. 12, с. 815-824 (лекции 4, 6, 7, практические занятия 5,6,7).
4. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976 (гл. 3, параграфы 4-6, глава 4, параграф 1, глава 6, параграф 2; лекция 1, 13; практические занятия 1, 2).
5. Ниренберг Л. Лекции по нелинейному функциональному анализу. М.: Мир, 1977 (параграфы 2.1, 2.5, 2.6; лекция 12; практические занятия 12, 13).

6. Скубачевский А.Л. Нелокальные эллиптические задачи с параметром. – Матем. сб., 1983, т.121(163), № 6, с. 201-210 (лекции 2, 3, 8, 9; практические занятия 3, 9).

7. Скубачевский А.Л. О спектре некоторых нелокальных эллиптических краевых задач - Матем. сб.", 1982, т. 117 (159), № 4, с. 548-558 (лекция 5; практическое занятие 5).

8. Gurevich P.L. Solvability of the boundary value problem for some differential-difference equations. Functional Differential Equations, 1998, v. 5, p. 139-157 (лекция 5; практическое занятие 5).

9. Skubachevskii A.L. The first boundary value problem for strongly elliptic differential-difference equations. - J. of Differential Equations, 1986, v.63, № 3, p. 332-361 (лекции 4, 6, 7, практические занятия 5, 6, 7).

10. Skubachevskii A.L. On the stability of index of nonlocal elliptic problems. - J. of Mathematical Analysis and Appl.", 1991, v.160, № 2, c. 323-341 (лекции 10, 11; практическое занятие 9).

Список дополнительной литературы

11. Гущин А.К., Михайлов В.П. О разрешимости нелокальных задач для эллиптического уравнения второго порядка. – Матем. сб., 1994, т. 185, №1, с. 121-160. (лекции 10, 11).

12. Кишкис К.Ю. Об индексе задачи А.В. Бицадзе, А.А. Самарского для гармонических функций. – Дифференц. уравнения, 1988, т. 24, №1, с. 105-110. (лекции 10, 11).

13. Кишкис К.Ю. К теории нелокальных задач для уравнения Лапласа. – Дифференц. уравнения, 1989, т. 25, №1, с 59-64. (лекции 10, 11).

14. Красносельский М.А., Покровский А.В. Системы с гистерезисом. М.: Наука, 1983 (лекции 1, 14).

15. Ройтберг Я. А., Шефтель З. Г. Нелокальные задачи для эллиптических уравнений и систем. - Сиб. матем. журн., 1972., т. 13, № 1, с. 165-181. (лекции 8-11)

16. Самарский А.А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений. – Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, №11, с. 1925-1935. (лекция 1).

17. Скубачевский А.Л. Вторая краевая задача для эллиптических дифференциально-разностных уравнений. - Дифференц. уравн., 1989, т. 25, № 10, с. 1766-1776 (лекции 6, 7)

18. Солдатов А.П. Задачи Блицадзе-Самарского для функций, аналитических по Дуглису. – Дифференц. уравнения, 2005, т. 41, №3, с. 396-407. (с. 396-407 – лекции 10, 11).

19. Browder F. Non-local elliptic boundary value problems. – Amer. Y. Math., 1964, v. 86, №4, p. 735-750. (лекция 1).

20. Carleman T. Sur la theoric des equations integrals et ses applications. – Verhandlungen des Internationalen Math. Kongr. Zurich, 1932, Bd. 1, p. 138-151. (p. 138-151 – лекции 1).

21. Pazy A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1983 (лекция 13).

22. Skubachevskii A.L. Elliptic functional differential equations and applications. – Birkhäuser. Basel – Boston – Berlin, 1997 (лекции 2-9).

23. Visintin A. Differential Models of Hysteresis. Berlin, Heidelberg: Springeg-Verlag, 1994 (лекции 1, 14).

Темы курсовых работ

I. Типовые темы:

1. Исследовать задачу на собственные функции и собственные значения оператора, соответствующего нелокальной краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения на конечном интервале.

2. Исследовать задачу на собственные функции и собственные значения оператора, соответствующего краевой задаче для дифференциально-разностного уравнения второго порядка.

3. Получить достаточные условия однозначной разрешимости в пространствах Соболева нелокальной эллиптической задачи с носителем нелокальных членов внутри области.

4. Построить левый регуляризатор оператора, соответствующего нелокальной эллиптической задаче с носителем нелокальных членов внутри области.

5. Исследовать гладкость решений нелокальной эллиптической задачи с носителем нелокальных членов внутри области. Доказать бесконечную дифференцируемость собственных и присоединенных векторов задачи.

6. Используя теорему Шаудера о неподвижной точке, доказать существование решений краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений вида

$$Pu(x) = g\left(x, D^{\beta}u(x)\right),$$

где P - линейный эллиптический оператор порядка $2m$, а $|\beta|<2m$.

7. Используя принцип сжимающих отображений, доказать существование и единственность слабого решения задачи Коши для абстрактного параболического уравнения (в банаховом пространстве) вида

$$u_t(t) - Au(t) = f\big(t, u(t)\big) \quad (t \in [0,T]),$$

8. Исследовать вопрос о существовании полугруппы Феллера для оператора Лапласа с атомарной мерой в нелокальных членах при заданных коэффициентах и носителе меры.

9. Решить численно (без обоснования) нелокальную эллиптическую краевую задачу в случае, когда носителя нелокальных членов лежит строго внутри области.

10. Решить численно (без обоснования) краевую задачу для дифференциально-разностного уравнения второго порядка.

11. Решить численно (без обоснования) задачу об автоматической терморегуляции с гистерезисным переключением нагревательного элемента.

12. Решить численно (без обоснования) задачу об автоматической терморегуляции в случае, когда нагревательные элементы занимают лишь часть границы области.

13. Найти численно (без обоснования) периодические по времени температурные режимы в задаче об автоматической терморегуляции.

II. Темы повышенной сложности, дальнейшее развитие которых может привести к написанию кандидатских и докторских диссертаций

14. Исследовать структуру спектра нелокальных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Получить достаточные условия отсутствия собственных значений в заданной полосе на комплексной плоскости.

15. Исследовать размерность ядра краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения второго порядка.

16. Исследовать разрешимость нелокальных эллиптических задач в многомерных областях с носителем нелокальных членов внутри области в пространствах Гельдера.

17. Создать численные методы (с обоснованием сходимости, устойчивости и т.д.) решения нелокальных эллиптических задач в многомерных областях с носителем нелокальных членов внутри области.

18. Исследовать существование и единственность сильных решений задач автоматической терморегуляции в случае нелинейной правой части в уравнении теплопроводности.

19. Исследовать периодичность и структуру аттракторов сильных решений задач автоматической терморегуляции в случае нелинейной правой части в уравнении теплопроводности.

20. Создать численные методы (с обоснованием сходимости, устойчивости и т.д.) исследования математической модели автоматической терморегуляции в случае, когда явление гистерезиса описано оператором Прейсаха.

III. Комментарии к темам курсовых работ

Типовые темы курсовых работ составлены так, что каждая тема допускает формулировку нескольких курсовых работ. Содержание этих работ требует знания материала курса, но не допускает механического копирования других, даже однотипных, заданий. Например, в первой курсовой работе, варьируя параметры в нелокальном условии, можно добиться того, что спектр задачи будет содержать только вещественные собственные значения, хотя известно, что, вообще говоря, собственные значения нелокальной задачи комплексны. Это связано с тем, что рассматриваемая задача может быть сведена к самосопряженному положительно определенному дифференциально-разностному оператору (см. [22]).

Для студентов с глубокой подготовкой, желающих продолжить занятия научной работой (в том числе в прикладной области) предусмотрены темы повышенной сложности, которые могут перерасти в кандидатские, а затем в докторские диссертации. В качестве курсовых работ предлагаются решения некоторых частных случаев сформулированных проблем. Среди этих работ предусмотрены как теоретические, так и прикладные задачи. Укажем на некоторые трудности в решении сформулированных задач.

14. Данная задача исследована лишь в некоторых частных случаях. В общем случае трудности в ее исследовании связаны с тем, что решение нелокальной задачи не выписывается в явном виде. С другой стороны, даже для классических оператор-функций обычно изучается лишь асимптотика собственных значений на бесконечности.

15. Трудности в исследовании связаны с тем, что решение дифференциально-разностного уравнения с младшими членами не выписывается в явном виде. Один из возможных подходов – исследование задачи без младших членов и применение теорем о возмущении линейных операторов.

16. По-видимому, трудности будут в основном технического характера. Однако возможны принципиальные затруднения, связанные с тем, что пространства Гельдера не являются гильбертовыми.

17. Насколько известно авторам, до сих пор численные методы для решения нелокальных эллиптических задач в многомерных областях созданы не были. Возможен ряд принципиальных трудностей, связанных с несамосопряженностью нелокальной эллиптической задачи.

18. Ранее задача терморегуляции с гистерезисным переключением нагревательного элемента и нелинейно зависящей от температуры правой частью не рассматривалась. Для ее решения естественно применить результаты о разрешимости задачи с линейной правой частью в комбинации с абстрактными методами нелинейного функционального анализа, рассматриваемыми в данном курсе.

19. Для этой задачи также справедливы замечания к работе 18.

20. Трудности в исследовании указанной задачи связаны с тем, что оператор Прейсаха, моделирующий явление гистерезиса, существенным образом зависит от решения не только в текущий момент, но на протяжении всего процесса терморегуляции.

Учебный тематический план курса

(календарный план)

Объем аудиторной работы: – 72 часа:

лекций – 36 часов

практических занятий – 36 часов

№ недели	Темы лекций
1.	Введение. Пространства Соболева. Нелокальные эллиптические и параболические задачи. Математические модели терморегуляции.
2.	Обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка с нелокальными краевыми условиями. Постановка задачи. Априорная оценка решений.
3	Обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка с нелокальными краевыми условиями. Разрешимость и спектр.
4.	Разностные операторы в одномерном случае. Свойства разностных операторов в функциональных пространствах.
5.	Теорема об изоморфизме в пространствах Соболева.
6.	Краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений второго порядка. Гладкость обобщенных решений. Фредгольмова разрешимость.
7.	Однозначная разрешимость и спектр краевых задач для дифференциально-разностных уравнений второго порядка.
8.	Нелокальные эллиптические задачи в многомерном случае. Постановка нелокальной задачи с параметром. Априорная оценка решений.
9.	Однозначная разрешимость нелокальных эллиптических задач с параметром.

№ недели	Темы лекций
10.	Фредгольмова разрешимость и индекс нелокальных эллиптических задач. Априорная оценка решений.
11.	Фредгольмова разрешимость и индекс нелокальных эллиптических задач. Построение правого регуляризатора.
12.	Применение методов нелинейного функционального анализа к решению уравнений в частных производных. Теоремы о неподвижных точках.
13.	Начально-краевая задача для уравнения теплопроводности с неоднородными краевыми условиями. Постановка задачи. Существование и единственность сильного решения.
14.	Нелинейная задача автоматической терморегуляции в ограниченной области с гистерезисным переключением нагревательного элемента. Математическая модель. Существование и единственность сильного решения.
15.	Периодические и периодические в среднем решения нелинейной задачи автоматической терморегуляции. Теорема об условном существовании периодического решения.
16.	Получение системы обыкновенных дифференциальных уравнений для функции управления и средней температуры в случае равномерного по области распределением температурных датчиков. Анализ полученной системы.
17.	Существование периодических решений нелинейной задачи автоматической терморегуляции с равномерным по области распределением температурных датчиков.
18.	Обзорная лекция.

№ недели	**Темы практических занятий**
1.	Пространства $L_2(Q)$ и пространства Соболева. Эквивалентные нормы в пространствах Соболева. Теорема Реллиха-Гординга. Теорема Соболева о вложении пространств Соболева в пространства непрерывных функций.
2.	Метод Фурье решения краевых задач для уравнения Пуассона в прямоугольнике и круге и начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности.
3.	Нелокальные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Разрешимость и спектр.
4.	Обыкновенные дифференциальные уравнения с интегральными краевыми условиями. Разрешимость и спектр (формулировка результата без доказательства). Пример оператора с интегральными краевыми условиями, спектр которого занимает всю комплексную плоскость.
5.	Разностные операторы в одномерном случае. Регулярные и нерегулярные разностные операторы. Структура образа разностного оператора.
6.	Краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений второго порядка.
7.	Спектр краевых задач для дифференциально-разностных уравнений второго порядка.
8.	Контрольная работа.
9.	Нелокальные эллиптические задачи в многомерном случае. Связь между абстрактными нелокальными условиями и нелокальными условиями, заданными на многообразиях.

№ недели	Темы практических занятий
10.	Решение нелокальных эллиптических задач в круге и прямоугольнике методом Фурье. Сравнение с методом Фурье для «локальных» краевых задач.
11.	Эквивалентность наличия априорной оценки и существования правого регуляризатора и фредгольмовой разрешимости задачи.
12.	Нелинейные операторы. Теоремы о неподвижных точках.
13.	Применение теоремы Шаудера о неподвижной точке к решению нелинейных эллиптических задач.
14-15.	Применение принципа сжимающих отображений к решению нелинейных параболических задач.
16-17.	Нелинейная задача автоматической терморегуляции с гистерезисным переключением нагревательного элемента. Периодические и периодические в среднем решения.
18.	Итоговая контрольная работа.