ПРИОРИТЕТНЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ПРОЕКТ «ОБРАЗОВАНИЕ»

РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

В.И. ТАГАСОВ

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ УСТОЙЧИВОГО РАЗВИТИЯ СЕЛЬСКОГО СОЦИУМА

Учебное пособие

Москва
2008

Инновационная образовательная программа
Российского университета дружбы народов

«Создание комплекса инновационных образовательных программ и формирование инновационной образовательной среды, позволяющих эффективно реализовывать государственные интересы РФ через систему экспорта образовательных услуг»

Экспертное заключение:

доктор физико-математических наук, профессор МГУ *А.А. Соловьев*

Тагасов В.И.

Экономико-математические модели устойчивого развития сельского социума: Учеб. пособие. – М.: РУДН, 2008. – 92 с.

Данное пособие предназначено не только для изучения основных экономико-математических моделей микроэкономики, но и их практического использования в области постановки и решения задач анализа и оптимального выбора в сфере потребительского спроса и управления предприятиями в рыночных условиях. В пособии последовательно и логично раскрываются эти задачи. Излагаются основные определения и типы моделей, приводятся математические модели сферы потребления, способы разработки функций, описывающих зависимость потребительского спроса от цен и доходов. Отдельные главы пособия посвящены вопросам разработки оптимальной стратегии поведения предприятия в рыночных условиях, способам построения функций предложения, характеризующих его зависимость от цен и располагаемых производственных ресурсов. Изложены также методы разработки оптимальной производственной программы и способы построения производственных функций, в том числе с учетом научно-технического прогресса. Представлены принципы математического анализа рынка, включая вопросы достижения равновесия и его устойчивости в случае наличия большого количества товаров и ресурсных ограничений.

Учебное пособие выполнено в рамках инновационной образовательной программы Российского университета дружбы народов, направление «Комплекс экспортоориентированных инновационных образовательных программ по приоритетным направлениям науки и технологий», и входит в состав учебно-методического комплекса, включающего описание курса, программу и электронный учебник.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ПРЕДМЕТ И СОДЕРЖАНИЕ КУРСА

1.1. Основные определения и типы моделей

Данный курс объединяет комплекс экономических и математических дисциплин, предназначенных для изучения проблем экономики в отраслях народного хозяйства. Экономико-математические модели имеют общий с другими дисциплинами объект исследования – экономику как социально-экономическую систему. Однако у этого научного направления есть и свой собственный предмет исследования. Оно изучает разные стороны своего объекта, и, прежде всего количественные взаимосвязи и закономерности. При этом используются особые научные методы, которые сами становятся объектом исследования.

Выявление количественных взаимосвязей и закономерностей в социально-экономической системе облегчается при использовании информационных технологий. При этом существенную роль играют различные модели.

В общем виде модель можно определить как условный образ (упрощенное изображение) реального объекта (процесса), который создается для более глубокого изучения действительности. Метод исследования, базирующийся на разработке и использовании моделей, называется моделированием. Необходимость моделирования обусловлена сложностью, а порой и невозможностью прямого изучения реального объекта (процесса). Значительно доступнее создавать и изучать прообразы реальных объектов (процессов), т.е. модели. Можно сказать, что теоретическое знание о чем либо, как правило, представляет собой совокупность различных моделей. Эти модели отражают существенные свойства реального объекта (процесса), хотя на самом деле действительность значительно содержательнее и богаче.

Подобие между моделируемым объектом и моделью может быть физическое, структурное, функциональное, динамическое, вероятностное и геометрическое. При физическом подобии объект и модель имеют одинаковую или сходную физическую природу. Структурное подобие предполагает наличие сходства между структурой объекта и структурой модели. При выполнении объектом и моделью под определенным воздействием сходных функций наблюдается функциональное подобие. При наблюдении за последовательно изменяющимися состояниями объекта и модели отмечается динамическое подобие. Вероятностное подобие проявляется при наличии сходства между процессами вероятностного характера в объекте и модели. Геометрическое подобие проявляется при сходстве пространственных характеристик объекта и модели.

Общепризнанной классификации моделей пока не существует. Однако из множества моделей можно выделить словесные, графические, физические, экономико-математические и некоторые другие типы.

Словесная (монографическая) модель представляет собой словесное описание объекта, явления или процесса. Она часто выражается в виде определения, правила, теоремы, закона или их совокупностью.

Графическая модель создается в виде рисунка, географической карты или чертежа. Например, зависимость между ценой и спросом может быть выражена в виде графика, на оси ординат которого отложен спрос (D), а на оси абсцисс – цена (P). Графическая кривая наглядно иллюстрирует, что с ростом цены спрос падает, и наоборот. Данную зависимость можно выразить словесно, но графически она намного нагляднее.

Физические или вещественные модели создаются для конструирования несуществующих объектов. Создать модель для проверки каких либо свойств натурального объекта значительно проще и экономически целесообразнее, чем изучать эти свойства на реальных объектах.

Экономико-математические модели отражают наиболее существенные свойства реального объекта или процесса с помощью системы уравнений. Единой классификации таких моделей также пока не существует. Однако можно выделить наиболее значимые их группы в зависимости от признака классификации. Так:

– *по степени агрегирования объектов моделирования различают модели:* микроэкономические; одно-, двухсекторные (одно-, двухпродуктовые); многосекторные (многопродуктовые); макроэкономические; глобальные. В статических моделях экономическая система описана в статике, применительно к одному определенному моменту времени. Это как бы снимок, срез, фрагмент динамической системы в какой-то момент времени;

– *по цели создания и применения различают модели:* балансовые; эконометрические; оптимизационные; сетевые; систем массового обслуживания; имитационные (экспертные). В балансовых моделях отражается требование соответствия наличия ресурсов и их использования. Параметры эконометрических моделей оцениваются с помощью методов математической статистики. Наиболее распространены эконометрические модели, представляющие собой системы регрессионных уравнений. В данных уравнениях отражается зависимость эндогенных (зависимых) переменных от экзогенных (независимых) переменных. Данная зависимость в основном выражается через тренд (длительную тенденцию) основных показателей моделируемой экономической системы. Эконометрические модели применяются для анализа и прогнозирования конкретных экономических процессов с использованием реальной статистической информации. Оптимизационные модели позволяют найти из множества возможных (альтернативных) вариантов наилучший вариант производства, распределения или потребления. Ограниченные ресурсы при этом будут использованы наиболее эффективным образом для достижения поставленной цели. Сетевые модели наиболее широко применяются в управлении проектами. Сетевая модель отражает комплекс работ (операций) и событий и их взаимосвязь во времени. Обычно сетевая модель предназначена для выполнения работ в такой последовательности, чтобы сроки выполнения проекта были минимальными. В этом случае ставится задача нахождения критического пути. Однако существуют и такие сетевые модели, которые ориентированы не на критерий времени, а, например, на минимизацию стоимости работ. Модели систем массового обслуживания создаются для минимизации затрат времени на ожидание в очереди и времени простоев каналов обслуживания. Имитационная модель, наряду с машинными решениями, содержит блоки, где решения принимаются человеком (экспертом). Вместо непосредственного участия человека в принятии решений может выступать база знаний. В этом случае ЭВМ, специализированное программное обеспечение, база данных и база знаний образуют экспертную систему. Экспертная система предназначена для решения одной или ряда задач методом имитации действий человека, эксперта в данной области;

– *по учету фактора неопределенности различают модели:* детерминированные (с однозначно определенными результатами); стохастические (с различными вероятностными результатами);

– *по типу математического аппарата различают модели:* линейного и нелинейного программирования; корреляционно-регрессионные; матричные; сетевые; теории игр; теории массового обслуживания и т.п.

2. ОСНОВЫ РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА

2.1. Понятие корреляционного и регрессионного анализа

Для решения задач экономического анализа и прогнозирования используются статистические, отчетные или наблюдаемые данные. При этом полагают, что эти данные являются значениями случайной величины. Случайной величиной называется переменная величина, которая в зависимости от случая принимает различные значения с некоторой вероятностью. Закон распределения случайной величины показывает частоту ее тех или иных значений в общей их совокупности. При исследовании взаимосвязей между экономическими показателями на основе статистических данных часто между ними наблюдается стохастическая зависимость. Она проявляется в том, что изменение закона распределения одной случайной величины происходит под влиянием изменения другой. Взаимосвязь между величинами может быть полной (функциональной) и неполной (искаженной другими факторами). Пример функциональной зависимости – выпуск продукции и ее потребление в условиях дефицита. Неполная зависимость наблюдается, например, между стажем рабочих и их производительностью труда. Обычно рабочие с большим стажем трудятся лучше молодых, но под влиянием дополнительных факторов – образование, здоровье и т.п. эта зависимость может быть искажена.

Раздел математической статистики, посвященный изучению взаимосвязей между случайными величинами, называется корреляционным анализом (от лат. correlation - соотношение, соответствие). Основная задача корреляционного анализа – установление характера и тесноты связи между результативными (зависимыми) и факторными (независимыми) показателями (признаками) в данном явлении или процессе. Корреляционную связь можно обнаружить только при массовом сопоставлении фактов.

Характер связи между показателями определяется по корреляционному полю. По расположению точек на графике с координатами «зависимый признак – независимый признак» можно судить о характере связи. При рассредоточенных данных переменные не коррелируют. При расположении точек близко друг к другу идущих вверх – положительная корреляция, а идущих вниз – отрицательная корреляция. Теснота связи определяется с помощью коэффициента корреляции, который рассчитывается специальным образом и лежит в интервалах от минус единицы до плюс единицы. Если значение коэффициента корреляции лежит в интервале от 1 до 0,9 по модулю, то отмечается очень сильная корреляционная зависимость. В случае если значение коэффициента корреляции лежит в интервале от 0,9 до 0,6 по модулю, то говорят, что имеет место слабая корреляционная зависимость. Наконец, если значение коэффициента корреляции находится в интервале от –0,6 до +0,6, то говорят об очень слабой корреляционной зависимости или полном ее отсутствии. Таким образом, корреляционный анализ применяется для нахождения характера и тесноты связи между случайными величинами.

Регрессионный анализ своей целью имеет вывод, определение (идентификацию) уравнения регрессии, включая статистическую оценку его параметров. Уравнение регрессии позволяет найти значение зависимой переменной, если величина независимой (независимых) переменной известна.

Практически, речь идет о том, чтобы, анализируя множество точек на графике (т.е. множество статистических данных), найти линию, точно (по возможности) отражающую заключенную в этом множестве закономерность (тренд, тенденцию), - линию регрессии.

По числу факторов различают одно-, двух- и многофакторные уравнения регрессии.

По характеру связи однофакторные уравнения регрессии подразделяются на:

– линейные $y = a + bx$,

где y – эндогенная (зависимая, результативная) переменная,

a, b – параметры, x - экзогенная (независимая) переменная;

– степенные $y = a\ x^b$,

– показательные $y = a\ b^x$,

– прочие.

2.2. Определение параметров линейного однофакторного уравнения регрессии

Пусть имеются данные о доходах (x) и спросе на некоторый товар (y) за ряд лет (n) (см. табл. 1.):

Таблица 1

Год i	Доход x	Спрос y
1	x_1	y_1
2	x_2	y_2
3	x_3	y_3
…	…	…
n	x_n	y_n

Предположим, что между x и y существует линейная взаимосвязь, т.е.

$$y = a + bx.$$

Для того чтобы найти уравнение регрессии, прежде всего, нужно исследовать тесноту связи между случайными величинами x и y, т.е. корреляционную зависимость.

Пусть

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ – совокупность значений независимого, факторного признака;

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ - совокупность соответствующих значений зависимого , результативного признака;

n – количество наблюдений.

Для нахождения уравнения регрессии вычисляются следующие величины:

1. Средние значения:

$$\bar{X} = \frac{x1 + x2 + ... + xn}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_I}{n}$$ – для экзогенной переменной;

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{I=1}^{n} Y_I}{n}$$ – для эндогенной переменной.

2. Отклонение от средних величин:

$\Delta x_i = x_i - \bar{X}$, $\Delta Y_I = Y_I - \bar{Y}$.

3. Величины дисперсии и среднего квадратичного отклонения:

$$D_x = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2}{n-1}, \quad D_y = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta y_i^2}{n-1};$$

$$\sigma_x = \sqrt{D}_x, \quad \sigma_y = \sqrt{D}_y.$$

Величины дисперсии и среднего квадратичного отклонения характеризуют разброс наблюдаемых значений вокруг среднего значения. Чем больше дисперсия, тем больше разброс.

4. Вычисление корреляционного момента (коэффициента ковариации):

$$К_{x,y} = \frac{\Delta x_1 \Delta y_1 + \Delta x_2 \Delta y_2 + ... + \Delta x_n \Delta y_n}{n-1} = \frac{\sum_{n-1}^{n} \Delta x_i \Delta y_i}{n-1}.$$

Корреляционный момент отражает характер взаимосвязи между x и y. Если $К_{x,y} > 0$, то взаимосвязь прямая. Если $К_{x,y} < 0$, то взаимосвязь обратная.

5. Коэффициент корреляции вычисляется по формуле:

$$R_{x,y} = \frac{K_{x,y}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Доказано, что коэффициент корреляции находится в интервале от минус единицы до плюс единицы. Коэффициент корреляции в квадрате называется коэффициентом детерминации.

Если $R_{x,y} \geq |0{,}8|$, то вычисления продолжаются.

6. Вычисления параметров регрессионного уравнения

Коэффициент b находится по формуле: $b = \dfrac{K_{x,y}}{D_x}$.

После чего можно легко найти параметр a: $a = \bar{Y} - b\bar{x}$.

Коэффициенты a и b находятся методом наименьших квадратов, основная идея которого состоит в том, что за меру суммарной погрешности принимается сумма квадратов разностей (остатков) между фактическими значениями результативного признака y_i и его расчетными значениями y_{ip}, полученными при помощи уравнения регрессии:

$Y_{ip} = a + bx_i$.

При этом величины остатков находятся по формуле:

$U_i = y_i - y_{ip}$,

где y_i – фактическое значение y; y_{ip} – расчетное значение y.

Приведем пример.

Пусть имеются статистические данные о доходах (x) и спросе (y). Необходимо найти корреляционную зависимость между ними и определить параметры уравнения регрессии. Данные приведены в таблице 2.

Таблица 2

Год i	Доход x	Спрос y
1	10	6
2	12	8
3	14	8
4	16	10,3
5	18	10,5
6	20	13

Предположим, что между нашими величинами существует линейная зависимость.

Тогда расчеты лучше всего выполнить в Excel, используя статистические функции:

СРЗНАЧ - для вычисления средних значений;

ДИСП - для нахождения дисперсии;

СТАНДОТКЛОН - для определения среднего квадратичного отклонения;

КОРЕЛЛ - для вычисления коэффициента корреляции.

Корреляционный момент можно вычислить, найдя отклонения от средних значений для ряда x и ряда y, затем при помощи функции СУММПРОИЗВ определить сумму их произведений, которую необходимо разделить на $n - 1$.

Результаты вычислений можно свести в таблицу (см. табл. 3).

Таблица 3

Показатели	x	Y
Среднее значение	15	9,3
Дисперсия	14	6,08
Среднее квадратичное отклонение	3,7417	2,4658
Корреляционный момент	8,96	
Коэффициент корреляции	0,9712	
Параметры	b = 0,64	a = - 0,3

В итоге наше уравнение будет иметь вид:

$y = -0{,}3 + 0{,}64x$.

Используя это уравнение, можно найти расчетные значения y и построить график. На этом графике получится ломаная линия, которая будет отражать фактические значения y. С помощью уравнения регрессии можно построить на этом же графике прямую линию, которая будет отражать тенденцию изменения спроса в зависимости от дохода.

Анализируя полученные данные, необходимо ответить на вопросы о том, насколько значимы параметры a и b и какова величина погрешности.

2.3. Оценка величины погрешности линейного однофакторного уравнения

1. Обозначим разность между фактическим значением результативного признака и его расчетным значением как u_i :

$u_i = y_i - y_{ip}$,

где y_i – фактическое значение y; y_{ip} – расчетное значение y; u_i – разность между ними.

2. В качестве меры суммарной погрешности выбрана величина

$$S = \frac{\sum_{n-2}^{n} u_i^2}{n-2}.$$

Для нашего примера S = 0,432.

Поскольку $\bar{u}$ (среднее значение остатков) равно нулю, то суммарная погрешность равна остаточной дисперсии.

3. Остаточная дисперсия находится по формуле:

$$Du = \frac{\sum (u_i - \bar{u})^2}{n-2} = \frac{\sum u_i^2}{n-2} = S.$$

Для нашего примера D_u = 0,432. Можно показать, что

$D_u = \left(1 - R_{x,y}^2\right) D_y$.

Если $R_{x,y}^2 = 1, mo D_u = 0;$

$R_{x,y}^2 = 0, mo D_u = D_y.$

Таким образом, $0 \le D_u \le D_y$.

Легко заметить, что если $R_{x,y} = 0,9$, то $D_u = (1 - 0,81)\ D_y = 0,91\ D_y$.

Это состояние показывает, что в экономических приложениях допустимая суммарная погрешность может составить не более 20% от дисперсии результативного признака D_y.

4. Стандартная ошибка уравнения находится по формуле:

$$\sigma_u = \sqrt{D_u},$$

где D_u - остаточная дисперсия. В нашем случае σ_u = 0,6572.

5. Относительная погрешность уравнения регрессии вычисляется как:

$$\vartheta = \frac{\sigma_u}{\bar{y}} 100\%,$$

где σ_u – стандартная ошибка; $\bar{y}$ – среднее значение результативного признака. В нашем случае ϑ = 7,07%.

Если величина ϑ мала и отсутствует автокорреляция остатков, то прогнозные качества оцененного регрессионного уравнения высоки.

6. Стандартная ошибка коэффициента b вычисляется по формуле:

$$S_b = \frac{\sigma_u}{\sqrt{nD_x}}.$$

В нашем случае она равна S_b = 0,07171.

Для вычисления стандартной ошибки коэффициента a используется формула:

$$S_a = \sigma_u \sqrt{\frac{D_x + \bar{x}^2}{nD_x}}.$$

В нашем примере S_a = 1,108.

Стандартные ошибки коэффициентов используются для оценивания параметров уравнения регрессии.

Коэффициенты считаются значимыми, если $\frac{S_a}{|a|} < 0{,}5; \frac{S_b}{|b|} < 0{,}5.$

В нашем примере эти величины соответственно равны: 3,69 и 0,112.

Коэффициент a незначим, так как указанное отношение больше 0,5 , а относительная погрешность уравнения регрессии слишком высока – 26,7%.

Стандартные ошибки коэффициентов используются также для оценки статистической значимости коэффициентов при помощи t-критерия

Стьюдента. Значения t критерия Стьюдента содержатся в справочниках. Некоторые значения приводим в таблице 4.

Таблица 4

Некоторые значения t-критерия Стьюдента

Степени свободы (n – 2)	Уровень доверия (c) 0,90	Уровень доверия (c) 0,95
1	6,31	12,71
2	2,92	4,30
3	2,35	3,18
4	2,13	2,78
5	2,02	2,57

Далее находятся максимальные и минимальные значения параметров (b^- , b^+) по формулам:

$b- = b - t_{Ст}\ S_b$,

$b^+ = b + t_{Ст}\ S_b$.

Для нашего примера находим:

$b- = 0,64 - 2,78\ 0,07171 = 0,44$,

$b^+ = 0,64 + 2,78\ 0,07171 = 0,839$.

Если интервал (b^- , b^+) достаточно мал и не содержит ноль, то коэффициент b является статистически значимым на c-процентном доверительном уровне.

Аналогично находятся максимальные и минимальные значения параметра a. Для нашего примера:

$a^- = -0,3 - 2,78\ 1,108 = -3,38$,

$a^+ = -0,3 - 2,78\ 1,108 = 2,78$.

Коэффициент a не является статистически значимым, так как интервал (a^-, a^+) велик и содержит ноль.

Вывод: полученные результаты не являются значимыми и не могут быть использованы для прогнозных расчетов. Ситуацию можно поправить следующими способами:

а) увеличить число n;

б) увеличить количество факторов;

в) изменить форму управления.

2.4. Проблема автокорреляции остатков. Критерий Дарбина-Уотсона

Часто для нахождения уравнений регрессии используются динамические ряды, т.е. последовательность экономических показателей за ряд лет (кварталов, месяцев), следующих друг за другом.

В этом случае имеется некоторая зависимость последующего значения показателя от его предыдущего значения, которое называется автокорреляцией. В некоторых случаях зависимость такого рода является весьма сильной и влияет на точность коэффициента регрессии.

Пусть уравнение регрессии построено и имеет вид:

$y_t = a + bx_t + u_t$, $t = 1, 2, \ldots, n$,

где u_t - погрешность уравнения регрессии в год t.

Явление автокорреляции остатков состоит в том, что в любой год t остаток u_t не является случайной величиной, а зависит от величины остатка предыдущего года u_{t-1}. В результате при использовании уравнения регрессии могут быть большие ошибки.

Для определения наличия или отсутствия автокорреляции применяется критерий Дарбина-Уотсона:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n}(u_t - u_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} u_t^2}.$$

Возможные значения критерия DW находятся в интервале от 0 до 4. Если автокорреляция остатков отсутствует, то $DW \sim 2$.

Построение уравнения степенной регрессии

Уравнение степенной регрессии имеет вид:

$y = a\,x^b$,

где a, b - параметры, которые определяются по данным таблицы наблюдений (табл. 5.). Эта таблица наблюдений имеет следующий вид:

Таблица 5.

x	x_1	x_2	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_n

Прологарифмируем исходное уравнение и в результате получим:

$\ln y = \ln a + b \ln x$.

Обозначим $\ln y$ через y', $\ln a$ как a', а $\ln x$ как x'.

В результате подстановки получим:

$y' = a' + bx'$.

Данное уравнение есть не что иное, как уравнение линейной регрессии, параметры которого мы умеем находить. Для этого прологарифмируем исходные данные. Получаем таблицу, подобную предыдущей, только вместо тех индексов будут входить их логарифмы.

Далее необходимо выполнить известные вычислительные процедуры по нахождению коэффициентов a и b , используя прологарифмированные исходные данные. В результате получим значения коэффициентов b' и a'. Параметр a можно найти по формуле $a = e^{a'}$.

В этих же целях можно воспользоваться функцией EXP в Excel.

2.5. Двухфакторные и многофакторные уравнения регрессии

Линейное двухфакторное уравнение регрессии имеет вид:

$y = a + b_1x_1 + b_2x_2$,

где a, b_1, b_2 – параметры; x_1, x_2 – экзогенные переменные; y – эндогенная переменная.

Идентификацию этого уравнения лучше всего производить с использованием функций Excel ЛИНЕЙН[2].

Степенное двухфакторное уравнение регрессии имеет вид:

$y = ax_1^{\alpha} x_2^{\beta}$,

где a, α, β - параметры; x_1, x_2 – экзогенные переменные; y – эндогенная переменная.

Для нахождения параметров этого уравнения его необходимо прологарифмировать. В результате получим: $\ln y = \ln a + \alpha \ln x_1 + \beta \ln x_2$.

Идентификацию этого уравнения также лучше всего производить с использованием функции Excel ЛИНЕЙН. Следует помнить, что при этом получают не параметр a, а его логарифм, который следует преобразовать в натуральное число.

Линейное многократное уравнение регрессии имеет вид:

$y = a + b_1x_1 + \ldots + b_nx_n$,

где a, b_1 , b_n - параметры; x_1 , x_n - экзогенные переменные; y - эндогенная переменная.

Идентификацию этого уравнения также лучше всего производить с использованием функции Excel ЛИНЕЙН.

3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПОТРЕБИТЕЛЬСКОГО ПОВЕДЕНИЯ И СПРОСА

3.1. Модели распределения доходов

Рыночный спрос определяется на базе решений, которые принимаются множеством отдельных лиц исходя из их потребностей и располагаемых доходов. Но чтобы распределить средства между разнообразными потребностями, необходимо их как-то сопоставить. В качестве основы для сопоставления в настоящее время принято понятие «полезность». Этот термин ученые экономисты считают руководящим психологическим принципом поведения людей. Считается, что при заданных ценах потребители стремятся так распределить свои средства на покупку различных благ, чтобы максимизировать ожидаемое удовлетворение или полезность от их потребления. При этом они руководствуются своими личными вкусами и представлениями. Существует два подхода к сравнению и соизмерению полезности различных благ: количественный и порядковый. Наиболее распространенной в настоящее время является порядковая теория полезности.

В основе моделей потребительского поведения и спроса находятся модели распределения доходов и теория полезности.

В основе построения моделей личного потребления лежит принцип распределения потребителей по группам, для формирования которых используются данные о социальном положении семей и сведения об их доходах.

Для характеристики равномерности распределения доходов в обществе часто используется так называемая кривая Лоренца. Она строится следующим образом: все множество потребителей данной страны или региона разбивается на некоторое количество групп, обычно равных по численности, но различных по доходам. Затем подсчитывается, какую долю национального дохода получает каждая такая группа, причем счет ведется начиная с группы с наименьшим доходом в сторону его увеличения.

Далее на диаграмме наносятся точки, соответствующие вычисленным долям в процентах. Очевидно, что полностью равномерному распределению доходов отвечает прямая линия (биссектриса угла на диаграмме), если же распределение неравномерное, то возникает кривая линия, причем ее кривизна и отклонение от биссектрисы будет тем более, чем менее равномерным оказывается распределение доходов.

Выбор конкретной модели распределения доходов, а следовательно, и способ формирования доходных групп определяются в результате анализа данных о доходах потребителей в рассматриваемом обществе или регионе.

3.2. Количественный подход к анализу полезности и спроса

Количественный подход к анализу полезности основан на представлении о возможности измерения полезности различных благ в гипотетических единицах – ютилах (utility – полезность). Это означает, что конкретный потребитель может сказать, что потребление одной чашки кофе приносит ему удовлетворение в 30 ютилов, двух чашек кофе – 56 ютилов, двух чашек кофе и одного пирожного – в 70 ютилов и т.д.

Следует иметь в виду, что количественные оценки полезности того или иного товара имеют исключительно индивидуальный, субъективный характер. Один и тот же товар может представлять большую ценность для одного потребителя и никакой ценности для другого. Для не пьющего кофе и не любящего пирожные человека их потребление не имеет никакой полезности, скорее наоборот, приносит вред. Следовательно, количественный подход не имеет возможности объективно измерить полезность того или иного товара в ютилах. Невозможно также сравнить размеры удовольствия, получаемые различными потребителями. Предполагается, что только конкретный потребитель может дать количественную оценку в ютилах полезности любого потребляемого им товарного набора.

Количественная функция общей полезности (TU), вначале возрастающая, имеет точку максимума (S), после которой она становится убывающей. Для конкретных потребителей очень важно почувствовать точку максимума полезности и прекратить избыточное потребление благ. Поэтому и говорят, что самое ценное чувство – это чувство меры.

Предельная полезность (MU) - это прирост общей полезности товарного набора при увеличении объема потребления данного товара на единицу:

$$MU\ (Q_A) = \frac{d(TU)}{d(Q_A)}.$$

Чаще всего предельная полезность падает и в точке максимума становится равной нулю, а далее отрицательной.

Однако возможности человека оценивать полезность того или иного товарного набора в определенном количестве единиц полезности подвергнуты сомнению. Более распространенной считается точка зрения, что человеку присущи отношения предпочтения при оценке или полезности тех или иных товаров.

3.3. Отношение предпочтения и функция полезности

Теория оптимального выбора потребителя исходит из того, что он осуществляет право сравнения и свободного выбора на некотором множестве X потребительских наборов, в каждый из которых включаются все виды продукции, являющиеся предметами потребления для данной группы семей. Не умаляя общности можно считать, что всякий такой набор состоит из фиксированного числа (n) элементов и имеет вид:

$X = (x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$,

где элементы $x_j \geq 0$, поскольку они выражают количество потребляемой продукции.

Далее предполагается, что сравнительная оценка различных наборов данным потребителем с точки зрения его вкусов, привычек, традиций и т.п. может быть выражена при помощи так называемого бинарного отношения слабого предпочтения.

Это отношение определено на множестве потребительских наборов X, выражается формулой «предпочтительнее, чем … или равноценен». Оно записывается при помощи знака $\wedge$, т.е. $x \wedge y$. Здесь x и y представляют собой потребительские наборы. Отношение безразличия (равноценности) определяется условием противоположности, т.е. x к y или наоборот y к x. Обычно факт равноценности двух наборов записывается как $y \sim x$.

В теории потребления обычно исходят из того, что отношение слабого предпочтения удовлетворяет важным предположениям, которые называются аксиомами теории потребления.

Первая аксиома гласит, что рассматриваемое отношение является совершенным, транзитивным и рефлексивным.

Совершенность отношения означает, что для любых двух наборов из множества обязательно имеют место различные два соотношения либо оба вместе. Это означает, что не существует таких наборов, которые потребитель не мог бы сравнить с другими.

Транзитивность отношения состоит в том, что если второе соотношение представляет собой как $y \wedge z$, то $x \wedge z$. Это требование отражает совместимость (непротиворечивость) оценок потребителей и вызывает обычно много дополнительных обсуждений.

Рефлексивность отношения, т.е. выполнение для любого набора соотношения $x \wedge x$, вытекает из его совершенства.

Следует заметить, что вследствие выполнения первой аксиомы соответствующее отношение безразличия оказывается так называемым отношением эквивалентности. Это означает, что все множество X потребительских наборов распадается на попарно непересекающиеся множества – классы эквивалентности, каждый из которых называется множеством безразличия.

Вторая аксиома теории потребления состоит в том, что для любого набора x оба множества являются замкнутыми подмножествами векторного пространства. Это означает, что оба множества содержат все свои предельные точки и множество безразличия, т.е. происходит как бы пересечение этих множеств. Отношение предпочтения, обладающее таким свойством, называется непрерывным.

Из выполнения этих двух основных аксиом вытекает, что существует непрерывная скалярная функция, определенная на связном множестве потребительских наборов и являющаяся индикатором предпочтения, поскольку она обладает характеристическим свойством.

Таким образом, если потребитель слабо предпочитает один набор другому, то значение функции в точке x будет иметь не меньшее значение, чем в точке y, и, наоборот, если значение индикатора для некоторого набора x не меньше, чем для набора y, то потребитель слабо предпочитает набор x набору y.

Индикатор предпочтения – функция $u(x)$ - обычно называется функцией полезности потребительских наборов. Очевидно, что любое монотонное преобразование этой функции может играть роль функции полезности, поскольку оно обладает указанным характеристическим свойством. Таким образом, функция полезности не является измерителем какой-то конкретной «полезности», но лишь дает представление о ранжировании (порядке) различных наборов, почему она и называется часто функцией порядковой, или ординальной, полезности.

Заметим, что каждому множеству C_x безразличия соответствует свое постоянное значение функции полезности $u(x) = \text{const}$.

Порядковый подход к анализу полезности является наиболее распространенным. От потребителя не требуется, чтобы он умел сопрягать блага в каких-то искусственных единицах измерения. Достаточно, чтобы потребитель был способен упорядочить все возможные товарные наборы по их «предпочтительности». В порядковой теории полезности понятие «полезность» означает не что иное, как порядок предпочтения. Утверждение «Набор A предпочтительнее для данного потребителя, чем набор B» - то же самое, что и утверждение «Набор A полезнее для данного потребителя, чем набор B». Вопрос, на сколько единиц полезнее набор A, чем набор B, не ставится. Потребитель выбирает предпочтительный набор товаров из всех доступных для него.

Кривая безразличия отражает множество точек, каждая из которых представляет собой такой набор из двух товаров, что потребителю безразлично, какой из этих наборов выбирать. Эти наборы с точки зрения данного потребления равноценны и лежат на одной кривой безразличия. Кривые безразличия имеют три конкретных типа: линейные, неоклассические и с пересечением прямых линий под прямым углом.

Основным рабочим понятием порядковой теории полезности является предельная норма замещения (MRS – marginal rate of substitution).

Предельной нормой замещения блага x благом y называют количество блага y, которое должно быть сокращено «в обмен» на увеличение количества блага x на единицу, с тем чтобы уровень удовлетворения потребителя остался неизменным:

$$MRS_{xy} = -\frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{при условии, что } u = \text{const}.$$

3.4. Решение задачи об оптимальном выборе потребителя

Кривые безразличия графически отражают систему предпочтений потребителя. Естественно, потребитель стремится приобрести товарный набор, принадлежащий наиболее удаленной от начала координат кривой безразличия. Однако это не всегда возможно, так как потребительское поведение ограничивается средствами, которыми он располагает.

Если обозначить рыночные цены блага x через p_x, а блага y через p_y, а его доход через I, то бюджетное ограничение потребителя можно записать в виде уравнения:

$I = p_x x + p_y y.$

Доход потребителя равен сумме его доходов на покупку этих товаров.

Пусть заданы линия бюджетного ограничения и несколько кривых безразличия. Какой товарный набор выбирает потребитель?

В рамках бюджетного ограничения индивид постарается так распределить свой доход между различными благами, чтобы максимизировать полезность. Соответствующий набор благ называется оптимальным планом потребления и обычно обозначается точкой касания бюджетной линии и кривой безразличия.

В точке оптимума выполняется равенство:

$$\frac{p_x}{p_y} = MRS_{xy}.$$

Соотношение цены блага x к цене блага y равно предельной норме замещения блага x благом y.

Постановка задачи оптимального выбора потребителя может быть сформулирована двояко:

1. В терминах отношения предпочтения: наилучшим (оптимальным) считается набор, который является «наиболее предпочтительным»» среди всех неотрицательных векторов, удовлетворяющих бюджетному ограничению. Очевидно, что единственность такого набора не обеспечена.

2. В терминах функции полезности: оптимальный набор соответствует наибольшему значению $u(x)$, что является решением задачи.

При анализе задачи оптимального выбора обычно применяется еще одно важное предположение теории потребления, которое носит название гипотезы ненасыщения потребителя. Это означает, что для «ненасыщаемого» потребителя всякий набор x, который содержит любого продукта столько же либо (хотя бы по одной позиции) несколько больше, чем набор y, оказывается более предпочтительным.

Таким образом, функция полезности является монотонно возрастающей по каждому аргументу.

Если функция полезности имеет производные по своим аргументам, то из предположения о ненасыщаемости и монотонности следует, что все первые частные производные функции полезности являются положительными для любого набора потребительских благ. Величина частной производной имеет следующий экономический смысл: она показывает, на сколько увеличится полезность набора, если количество потребляемого блага увеличится на «малую единицу». В связи с этим указанная производная носит название предельной (маргинальной, дифференциальной) полезности.

В экономических исследованиях, как правило, используются некоторые конкретные виды выпуклых функций полезности, причем подбор вида функции и оценка числовых значений параметров производятся на основе наблюдений и анализа поведения потребителей. Чаще всего применяются линейная, квадратическая и логарифмическая функции.

В пространстве двухэлементных наборов поверхности безразличия обычно называются кривыми безразличия. Для логарифмической функции кривые безразличия имеют вид гипербол в положительном квадранте. Более высокая кривая безразличия соответствует большему уровню полезности тех наборов, которые составляют кривую безразличия.

Решение задачи об оптимальном наборе на условный экстремум находится при помощи метода множителей.

При заданной системе цен потребитель должен выбрать такой набор, в котором все предельные полезности пропорциональны ценам. При этом оптимальное значение множителя Лагранжа часто называют «предельной полезностью денег» и трактуют как прирост максимальной полезности при увеличении дохода на малую единицу.

В реалистичных вариантах постановки задачи оптимального выбора при помощи дополнительных условий могут быть учтены ограничения по ассортименту потребляемых товаров и услуг, возможность взаимной замены различных продуктов и т.п.

3.5. Функции спроса Коэффициент эластичности

В результате решения задач оптимального выбора оказывается возможным проследить связь между изменением систем цен и доходов группы потребителей, с одной стороны, и спросом этой группы на товары и услуги – с другой и построить, таким образом, функцию оптимального спроса.

В достаточно общей форме оптимальный спрос выражается при помощи функций вида:

$D_j = x_j\ (I;\ p_1;\ \ldots;\ p_j;\ \ldots;\ p_n)\quad (j = 1, \ldots, n).$

В ряде случаев функции оптимального спроса имеют особенно простой вид. Так, если функция полезности имеет логарифмический вид, то оптимальный спрос выражается формулой:

$$D_j = x_j^0 + \frac{c_j(I - I_0)}{p_j \sum_{j=1}^{n} cj} \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

где

$$I_0 = \sum p_j x_j^0.$$

Однако в подавляющем большинстве случаев, конкретная форма функции спроса определяется путем статистической обработки результатов специальных наблюдений за доходами и расходами представителей различных социальных групп. В результате изучения функции спроса обычно устанавливаются некоторые классификационные признаки товаров.

Если для некоего товара выполняется условие:

$$\frac{\partial D_j}{\partial p_j} < 0,$$

то товар называется нормальным, так как спрос на него снижается по мере увеличения его цены. Однако существуют товары, спрос на которые повышается, невзирая на повышение цены. Эта парадоксальная ситуация возникает тогда, когда при повышении цены на малоэффективный товар (например, картофель) группа потребителей с низким доходом просто не может приобретать более высококалорийный продукт (мясо) и вынуждена компенсировать нехватку калорий усиленной покупкой картофеля.

Товары, для которых имеет место неравенство:

$$\frac{\partial D_j}{\partial p_j} > 0,$$

называются аномальными, или товарами Гиффина.

При фиксированном доходе и в практических целях для нормальных товаров используются, как правило, функции спроса двух типов: линейная и степенная. Во многих прикладных исследованиях значительную роль играет коэффициент эластичности.

Мера реагирования эндогенной переменной на изменение экзогенной переменной называется эластичностью. Конкретнее эластичность можно определить как предел отношения между относительным приращением функции (зависимой переменной) и относительным приращением независимой переменной. Эластичность можно выразить формулой:

$$E_x(y) = \frac{x}{y}\frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0,$$

или в непрерывном случае:

$$E_x(y) = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx}.$$

Из практических соображений эластичность относят к проценту прироста независимой переменной. В этом случае эластичность показывает, на сколько процентов повышается или понижается эндогенная переменная y, если независимая переменная x изменяется на 1%.

Различают дуговую эластичность (средняя на каком-то отрезке кривой) и точечную эластичность (значение производной в заданной точке).

Коэффициент эластичности спроса по цене показывает, на сколько процентов уменьшится (увеличится) спрос, если цена товара увеличится (уменьшится) на 1%.

Различают дуговую эластичность, т.е. среднюю на каком-то отрезке кривой, и точечную эластичность – значение производной в данной точке.

Коэффициент эластичности спроса по цене показывает, на сколько процентов уменьшится (увеличится) спрос, если цена товара увеличится (уменьшится) на 1%.

Если коэффициент эластичности близок к нулю, то спрос на товар практически не зависит от его цены. В этом случае говорят, что спрос не эластичен по цене. Это относится в основном к предметам первой необходимости. Если он примерно равен единице, то спрос называется нормально эластичным. Это относится к товарам длительного пользования. Для предметов роскоши коэффициент эластичности больше единицы, т.е спрос является суперэластичным.

При постоянных ценах товары различаются по характеру изменения спроса в зависимости от величины дохода. Товар j называется ценным (или товаром высшего разряда), если $\frac{\partial D_j}{\partial I} > 0$, т.е. спрос на него возрастает по мере перехода от менее доходных групп потребителей к более доходным. Для малоценного товара имеет место противоположное неравенство, что означает вытеснение этого товара из потребительского набора группы потребителей по мере увеличения ее категории доходности.

На основе известной классификации товаров по трем группам (предметы первой необходимости, длительного пользования, роскоши) можно представить изменение спроса в зависимости от повышения дохода при помощи графика. В нем по горизонтали отложены относительные величины дохода, а по вертикали – доли расходов по указанным трем группам товаров.

Для изучения изменения спроса в зависимости от дохода различных потребительских групп применяются в основном модели двух типов:

1. Модели степенного вида (функции Энгеля):

$D = a I^{\gamma}$.

Здесь показатель γ имеет смысл коэффициента эластичности, который показывает, на сколько процентов увеличится спрос на товар, если доход увеличится на 1%. Коэффициент эластичности спроса от дохода находится как:

$$E_I(D) = \frac{I}{D}\frac{dD}{dI}.$$

Для предметов первой необходимости этот показатель меньше единицы, т.е. при увеличении дохода дополнительные затраты на эти товары этой категории составляют все убывающую долю. Для предметов длительного пользования показатель эластичности γ приблизительно равен единице, что означает примерное постоянство доли расходов на эти предметы в дополнительном доходе. Для предметов роскоши показатель эластичности больше единицы. Это означает, что при значительном увеличении дохода все большая часть его прироста тратится на товары этой группы.

2. Идея разделения потребляемых товаров и услуг на ряд различных групп развита далее при конструировании так называемых функций Торнквиста. Для товаров первой необходимости эта функция определяется в виде:

$$D_1 = \frac{a_1 I}{I + b_1},$$

где a_1, b_1 - параметры модели.

Заметим, что при очень большом доходе, условно представляемом как $I \to \infty$, величина спроса $D_1 \to a_1$, что выражает факт асимптотического насыщения потребителя предметами первой необходимости.

Функция спроса Торнквиста для товаров длительного пользования отражает тот факт, что спрос на эти товары возникает лишь с некоторого (достаточно высокого) уровня дохода.

Спрос на товары этой группы также имеет асимптотическую тенденцию к насыщению.

Для предметов роскоши используется формула, в которой отсутствует тенденция к насыщению, а спрос начинается с еще более высокого уровня дохода.

3.6. Изменение цен и компенсация

Проблема компенсации путем увеличения дохода потребителя возникает во всех тех случаях, когда происходит повышение цен на один или несколько потребляемых товаров. При этом возможны различные подходы к решению этой проблемы. Наиболее прямой из них использует понятие функции спроса в достаточно общей форме и опирается на понятие компенсации как на такое увеличение дохода, которое позволяет оставить спрос на товар на том уровне, который определялся прежней ценой. Таким образом, применяется функция спроса

$$D = D(I, p),$$

где I - исходный уровень дохода, p - исходный уровень цены.

Относительное увеличение дохода должно быть пропорционально относительному изменению цены с коэффициентом пропорциональности, равным отношению эластичностей этих факторов.

Повышение цены одного из товаров (например, с номером n) изменяет, вообще говоря, спрос на каждый товар. Если для некоторого товара j имеет место соотношение

$$\frac{\partial D_j}{\partial p_n} > 0,$$

т.е. повышение цены на товар n вызывает увеличение спроса на товар j, то они называются взаимозаменяемыми (масло и маргарин). Функция спроса обладает свойством сильной валовой заменимости, если все товары являются взаимозаменяемыми. Нетрудно видеть, что в этом случае повышение цены на один товар приводит к снижению спроса только на этот товар, но увеличивает спрос на все остальные. В этой ситуации для расчета необходимой компенсации можно использовать подход, рассмотренный выше для случая одного товара. Однако при этом получается слишком высокий уровень компенсации, поскольку повысится потребление практически всех товаров.

В связи с этим применяется более экономный способ оценки размера компенсации, основанный на использовании понятия функции полезности. При таком подходе объемы спроса на различные товары рассматриваются как решение задачи об оптимальном выборе потребителя в условиях ограниченности дохода.

Если цена второго товара возрастает, а цена первого товара остается неизменной, то спрос на второй товар упадет, а спрос на первый товар не изменится. Размер компенсации определяется в этом случае отношением:

$$dI = x_2 dp_2 .$$

Таким образом, достигнутый уровень удовлетворения будет сохранен, если доход будет увеличен ровно настолько, чтобы потребитель мог приобрести прежний объем второго товара. На самом деле потребитель использует компенсацию следующим образом: его спрос на товар с повышенной ценой (товар 2) уменьшится, но возрастет объем закупок первого товара. При этом уровень полезности останется тем же, каким он был до повышения цен и получения компенсации.

В общем случае, когда задача оптимального выбора имеет вид:

$$u(x_{1,} \ldots, x_n) = c_0 + \sum c_j \ln x_j \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \leq 1 \qquad x_j \geq 0 \ (j = 1, \ldots, n),$$

можно показать, что компенсационная доплата, сохраняющая прежний уровень максимальной полезности, связана с изменением цен соотношением:

$$dI = \sum_{j=1}^{n} x_j dp_j,$$

где x_j - оптимальный спрос на j-тый товар до изменения цен, а dp_j - изменение цены на этот товар.

4. ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИБЫЛИ ПРЕДПРИЯТИЯ

4.1. Понятие производства и производственных функций

Под производством понимается любая деятельность по использованию природных, материально-технических и интеллектуальных ресурсов для получения материальных или нематериальных благ.

Традиционно роль общей теории производства выполняет теория материального производства, понимаемая как процесс превращения производственных ресурсов в продукт. Основными производственными ресурсами являются труд (L) и капитал (K). Способы производства или существующие производственные технологии определяют, какой объем продукции производится при заданных количествах труда и капитала. Математически существующие технологии выражаются через производственную функцию. Если обозначить объем выпускаемой продукции через Y, то производственную функцию можно записать в виде:

$Y = f(K, L)$.

Это выражение означает, что объем выпуска является функцией количества капитала и количества труда. Производственная функция описывает множество существующих в данный момент технологий. Если изобретается лучшая технология, то при тех же затратах труда и капитала объем выпуска увеличивается. Следовательно, изменения в технологии изменяют и производственную функцию.

Методологически теория производства во многом симметрична теории потребления. Однако если в теории потребления основные категории измеряются лишь субъективно или вообще пока не подлежат измерению, то основные категории теории производства имеют объективную основу и могут быть измерены в определенных натуральных или стоимостных единицах.

Несмотря на то, что понятие «производство» может представиться очень широким, нечетко выраженным и даже расплывчатым, поскольку в реальной жизни под «производством» понимается и предприятие, и стройка, и сельскохозяйственная ферма, и транспортное предприятие, и очень крупная организация типа отрасли народного хозяйства, тем не менее экономико-математическое моделирование выделяет нечто общее, присущее всем этим объектам. Этим общим является процесс преобразования первичных ресурсов (производственных факторов) в конечные результаты процесса. Поэтому основным исходным понятием в описании экономического объекта становится «технологический способ», который представляется обычно как вектор v затрат-выпуска, включающий в себя перечисление объемов затрачиваемых ресурсов (вектор x) и сведения о результатах их преобразования в конечные продукты или другие характеристики (прибыль, рентабельность и т.п.) (вектор y):

$v = (x; y)$.

Размерность векторов x и y, а также способы их измерения (в натуральных или стоимостных единицах) существенно зависят от изучаемой проблемы, от уровней, на которых ставятся те или иные задачи экономического планирования и управления. Совокупность векторов – технологических способов, которые могут служить описанием (с доступной точки зрения исследователя точностью) производственного процесса, реально осуществимого на некотором объекте, называется технологическим множеством V данного объекта. Для определенности полагаем, что размерность вектора затрат x равна N, а вектора выпуска y - соответственно M. Таким образом, технологический способ v является вектором размерности $(M + N)$, а технологическое множество - $V \subset R_{+}^{M+N}$.

Среди всех технологических способов, осуществимых на объекте, особое место занимают способы, которые выгодно отличаются от всех прочих тем, что они требуют либо меньших затрат при одинаковом выпуске, либо соответствуют большему выпуску при одинаковых затратах. Те из них, которые занимают в определенном смысле предельное положение в множестве V, представляют особый интерес, поскольку они являются описанием допустимого и предельно выгодного реального производственного процесса.

Технологический способ $(\tilde{v})$ называется эффективным, если он принадлежит технологическому множеству (V) и не существует другого вектора ($v \in V$), который был бы предпочтительнее $(\tilde{v})$. Приведенное определение означает, что эффективными считаются те способы, которые не могут быть улучшены ни по одной затратной компоненте, ни по одной позиции выпускаемой продукции и без того, чтобы не перестать быть допустимыми. Множество всех технологически эффективных способов обозначим через V^*. Оно является подмножеством технологического множества V или совпадает с ним. По существу задача планирования хозяйственной деятельности производственного объекта может быть интерпретирована как задача выбора эффективного технологического способа, наилучшим образом соответствующего некоторым внешним условиям. При решении такой задачи выбора достаточно существенным оказывается представление о самом характере технологического множества V, а также его эффективного подмножества V^*.

В ряде случаев оказывается возможным допустить в рамках фиксированного производства возможность взаимозаменяемости некоторых ресурсов (различных видов топлива, машин, работников и т.п.). При этом математический анализ подобных производств основывается на предпосылке о континуальном характере множества V, а следовательно, на принципиальной возможности представления вариантов взаимной замены при помощи непрерывных и даже дифференцируемых функций, определенных на V. Указанный подход получил свое наибольшее развитие в теории производственных функций.

С помощью понятия эффективного технологического множества производственную функцию (ПФ) можно определить как отображение:

$y = f(x)$,

где $v = (x; y) \in V^*$.

Указанное отображение, вообще говоря, является многозначным, т.е. множество $f(x)$ содержит более чем одну точку. Однако для многих реалистичных ситуаций производственные функции оказываются однозначными и даже, как было сказано выше, дифференцируемыми. В наиболее простом случае производственная функция есть скалярная функция N аргументов: $y = f(x_1, \ldots, x_N)$.

Здесь величина y имеет, как правило , стоимостной характер, выражая объем производимой продукции в денежном выражении. В качестве аргументов выступают объемы затрачиваемых ресурсов при реализации соответствующего эффективного технологического способа. Таким образом, приведенное соотношение описывает границу технологического множества V, поскольку при данном векторе затрат $(x_1, \ldots, x_N)$ производить продукции в количестве меньшем, чем указанное, соответствует неэффективному технологическому способу. Выражение для производственной функции оказывается возможным использовать для оценки эффективности принятого на данном предприятии методе хозяйствования. В самом деле, для заданного набора ресурсов можно определить фактический выпуск продукции и сравнить его с рассчитанным по производственной функции. Полученная разница дает полезный материал для оценки эффективности в абсолютном и относительном измерении.

Производственная функция представляет собой очень полезный аппарат плановых расчетов, и поэтому в настоящее время развит статистический подход построению производственных функций для конкретных хозяйственных единиц. При этом обычно используется некоторый стандартный набор алгебраических выражений, параметры которых находятся при помощи методов математической статистики. Такой подход означает, в сущности, оценку производственной функции на основе неявного предположения о том, что наблюдаемые производственные процессы являются эффективными. Среди разнообразных типов производственных функций наиболее часто применяются линейные функции, поскольку для них легко решается задача оценивания коэффициентов по статистическим данным, а также степенные функции, для которых задача нахождения параметров сводится к оцениванию линейной формы путем перехода к логарифмам.

В предположении о дифференцируемости производственной функции в каждой точке множества X возможных комбинаций затрачиваемых ресурсов полезно рассмотреть некоторые связанные с ПФ величины.

В частности, дифференциал $dy = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j$ представляет собой изменение стоимости выпускаемой продукции при переходе от затрат набора ресурсов $x = (x_1, \ldots, x_N)$ к набору $x + dx = (x_1 + dx_1, \ldots, x_N + dx_N)$ при условии сохранения свойства эффективности соответствующих технологических способов. Тогда величину частной производной $q_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}$ можно трактовать как предельную (дифференциальную) ресурсоотдачу или, иными словами, коэффициент предельной продуктивности, который показывает, на сколько увеличится выпуск продукции в связи с увеличением затрат ресурса с номером j на «малую» единицу. Величина предельной продуктивности ресурса допускает истолкование как верхний предел цены p_j , которую производственный объект может уплатить за дополнительную единицу j-того ресурса с тем, чтобы не оказаться в убытке после ее приобретения и использования. Ожидаемый прирост продукции в этом случае составит:

$$\Delta_j f = q_j$$

и, следовательно, соотношение $p_j \le q_j$ позволит получить дополнительную прибыль.

В коротком периоде, когда один ресурс рассматривается как постоянный, а другой как переменный, большинство производственных функций обладают свойством убывающего предельного продукта. Предельным продуктом переменного ресурса называют прирост общего продукта в связи с увеличением применения данного переменного ресурса на единицу.

Предельный продукт труда можно записать как разность:

MPL = F(K,L + 1) - F(K, L),

где MPL - предельный продукт труда.

Предельный продукт капитала можно также записать как разность:

MPK = F(K + 1, L) - F(K, L),

где MPK - предельный продукт капитала.

Характеристикой производственного объекта является также величина средней ресурсоотдачи (продуктивности производственного фактора)

$m_j = \frac{y}{x_j}$, имеющего явный экономический смысл количества выпускаемой продукции в расчете на единицу используемого ресурса (производственного фактора). Величина, обратная ресурсоотдаче $d_j = \frac{1}{m_j}$, обычно называется ресурсоемкостью, поскольку она выражает количество ресурса j, необходимое для производства одной единицы продукции в стоимостном выражении. Весьма употребительны и понятны такие термины, как фондоемкость, материалоемкость, энергоемкость, трудоемкость, рост которых обычно связывают с ухудшением состояния экономики, а их снижение рассматривается как благоприятный результат.

Частное от деления дифференциальной продуктивности на среднюю

$$E_j = \frac{q_j}{m_j} = \frac{x_j}{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial \ln y}{\partial \ln x_j}$$

называется коэффициентом эластичности продукции по производственному фактору j и дает выражение относительного прироста продукции (в процентах) при относительном приросте затрат фактора на 1%. Если $E_j \le 0$, то происходит абсолютное снижение выпуска продукции при увеличении потребления фактора j. Такая ситуация может иметь место при использовании технологически неподходящих продуктов или режимов. Например, излишнее потребление топлива приведет к излишнему повышению температуры и необходимая для производства продукта химическая реакция не пойдет. Если $0 < E_j \le 1$, то каждая последующая дополнительная единица затрачиваемого ресурса вызывает меньший дополнительный прирост продукции, чем предыдущая.

Если $E_j > 1$, то величина приростной (дифференциальной) продуктивности превосходит среднюю продуктивность. Таким образом, дополнительная единица ресурса увеличивает не только объем выпускаемой продукции, но и среднюю характеристику ресурсоотдачи. Так, процесс повышения фондоотдачи происходит, когда вводятся в действие весьма прогрессивные, эффективные машины и приборы. Для линейной производственной функции коэффициент a_j численно равен величине дифференциальной продуктивности j-того фактора, а для степенной функции показатель степени a_j имеет смысл коэффициента эластичности по j-тому ресурсу.

4.2. Изокванта и ее типы

При моделировании потребительского спроса один и тот же уровень полезности различных комбинаций потребительских благ графически отображается с помощью кривой безразличия.

В экономико-математических моделях производства каждая технология графически может быть представлена точкой, координаты которой отражают минимально необходимые затраты ресурсов K и L для производства данного объема выпуска. Множество таких точек образуют линию равного выпуска или изокванту. Таким образом, производственная функция графически представляется семейством изоквант. Чем дальше от начала координат расположена изокванта, тем больший объем производства она отражает. В отличие от кривой безразличия, каждая изокванта характеризует количественно определенный объем выпуска.

В общем случае в множестве X допустимых наборов производственных факторов выделяется подмножество X_c, называемое изоквантой производственной функции, которое характеризуется тем, что для всякого вектора $x \in X_c$ справедливо равенство $f(x) = c$.

Таким образом, для всех наборов ресурсов, соответствующих изокванте, оказываются равными объемы выпускаемой продукции. По существу, изокванта представляет собой описание возможности взаимной замены факторов в процессе производства продукции, обеспечивающей неизменный объем производства. В связи с этим оказывается возможным определить коэффициент взаимной замены ресурсов, используя дифференциальное соотношение вдоль любой изокванты:

$$dy = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j = 0.$$

Отсюда коэффициент эквивалентной замены пары факторов j и k равен:

$$\gamma_{jk} = -\frac{dx_k}{dx_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} / \frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{q_j}{q_k}.$$

Полученное соотношение показывает, что если производственные ресурсы замещаются в отношении, равном отношению приростных продуктивностей, то количество производимой продукции остается неизменным. Нужно сказать, что знание производственной функции позволяет охарактеризовать масштабы возможности осуществить взаимную замену ресурсов в эффективных технологических способах.

Для достижения этой цели служит коэффициент эластичности замены ресурсов по продукции:

$$\sigma_{jk} = -\frac{d\ln\left(\frac{x_j}{x_k}\right)}{d\ln\left(\frac{q_j}{q_k}\right)},$$

который вычисляется вдоль изокванты при неизменном уровне затрат прочих производственных факторов. Величина σ_{jk} представляет собой характеристику относительного изменения коэффициента взаимной замены ресурсов при изменении соотношения между ними. Если отношение взаимозаменяемых ресурсов изменится на σ_{jk} процентов, то коэффициент взаимной замены γ_{jk} изменится на один процент. В случае линейной производственной функции коэффициент взаимной замены остается неизменным при любом соотношении используемых ресурсов. Поэтому можно считать, что эластичность $\sigma_{jk} = \infty$. Соответственно большие значения эластичности свидетельствуют о том, что возможна большая свобода в замене производственных факторов вдоль изокванты и при этом основные характеристики производственной функции (продуктивности, коэффициент взаимозамены) будут меняться очень слабо.

Для степенных производственных функций для любой пары взаимозаменяемых ресурсов справедливо равенство $\sigma_{jk} = 1$. В практике прогнозирования и предплановых расчетов часто используются функции постоянной эластичности замены (CES).

Для такой функции коэффициент эластичности замены ресурсов не меняется в зависимости от объема и отношения затрачиваемых ресурсов. При малых значениях этого коэффициента ресурсы могут заменять друг друга лишь в незначительных размерах, а в пределе при его равенстве нулю они теряют свойство взаимозаменяемости и выступают в процессе производства лишь в постоянном отношении, т.е. являются взаимодополняющими. Примером производственной функции, описывающей производство в условиях использования взаимодополняющих ресурсов, является функция «выпуск-затраты», которая имеет вид:

$$y = \min\{a_j x_j\} (j = 1,..., N),$$

где a_j - постоянный коэффициент ресурсоотдачи j-того производственного фактора. Производственная функция такого типа определяет выпуск по «узкому месту» на множестве используемых производственных факторов.

Важное понятие предельной (дифференциальной) продуктивности вводится соотношением:

$$q_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \qquad (i = 1, \ldots, M;\ j = 1, \ldots, N).$$

Аналогичное обобщение допускают все остальные главные характеристики ПФ.

Подобно кривым безразличия, изокванты также подразделяются на различные типы: линейные, степенной производственной функции, при жесткой дополняемости ресурсов.

Ломаная изокванта предполагает наличие ограниченного количества технологий. Изокванты подобной конфигурации используются в линейном программировании для обоснования теории оптимального распределения ресурсов. Ломаные изокванты наиболее реалистично представляют технологические возможности многих производственных объектов. Однако в экономической теории традиционно используют главным образом кривые изокванты, которые получаются из ломаных при увеличении числа технологий и увеличении соответственно точек излома.

4.3. Оптимальная комбинация ресурсов

Использование аппарата производственных функций дает возможность решения задач об оптимальном использовании средств, предназначенных для приобретения производственных факторов.

Если предположить, что факторы $(x_1, \ldots, x_N)$ могут быть закуплены по ценам $(p_1, \ldots, p_N)$, а объем имеющихся средств для приобретения составляет b (руб.), то соотношение, описывающее множество допустимых наборов факторов будет иметь вид:

$$\sum_{j=1}^{N} p_j x_j \le b.$$

Граничная линия этого множества, соответствующая полному использованию имеющихся средств, т.е. когда множитель равен b, называется изокостной, поскольку ей соответствуют наборы, имеющие одинаковую стоимость. Задача об оптимальном использовании средств формулируется так: требуется найти набор факторов, который дает наибольший выпуск продукции при ограниченных финансовых средствах.

Если число факторов равно двум, то задача допускает наглядную геометрическую интерпретацию. На графике изображается кривая (изокванта), а касательная линия к этой кривой в рамках осей координат и есть изокоста.

4.4. Функции предложения и их свойства

Функция предложения описывает зависимость между рыночной ценой товара и его предложением на изолированном рынке этого товара. В общем случае следует исходить из того, что рассматриваемый продукт производится на достаточно большом количестве конкурирующих между собой предприятий. В такой ситуации естественно считать, что каждый производитель стремится к наибольшей прибыли, и его индивидуальный выпуск продукта увеличивается по мере роста цены на этот продукт. Но тогда и общее предложение товара на рынке как сумма индивидуальных выпусков и является возрастающей функцией цены.

В более специфических ситуациях (олигополия, монополия) поведение предприятия необязательно определяется стремлением к максимальной прибыли, поскольку при повышении цены производитель может обеспечить себе заметный прирост прибыли и без увеличения объема выпуска. Таким образом, строго говоря, должны быть исследованы случаи, когда общее предложение товара на рынке равно константе или даже если оно меньше нуля.

В дальнейшем анализе в качестве основного рассматривается состояние совершенной конкуренции и рост предложения в зависимости от роста цен. Для практических расчетов применяются функции предложения двух основных видов, параметры которых определяются путем обработки статистических данных (линейная или степенная функция). Коэффициент эластичности предложения по цене показывает, на сколько процентов увеличится предложение товара, если его цена вырастет на 1%.

В общем случае объем предложения j-того товара рассматривается не только в зависимости от его цены, но и от цен на другие товары.

4.5. Моделирование издержек и прибыли предприятия (фирмы)

В основе построения моделей поведения производителя (отдельного предприятия или фирмы, объединения или отрасли) лежит представление о том, что производитель стремится к достижению такого состояния, при котором ему была бы обеспечена наибольшая прибыль при сложившихся рыночных условиях, т.е. прежде всего при имеющейся системе цен.

Наиболее простая модель оптимального поведения производителя в условиях совершенной конкуренции имеет следующий вид:

пусть предприятие (фирма) производит один продукт в количестве y физических единиц. Если p – экзогенно заданная цена этого продукта и фирма реализует свой выпуск полностью, то она получает валовой доход (выручку) в размере:

$$R(y) = py.$$

В процессе создания этого количества продукта фирма несет производственные издержки в размере $C(y)$. При этом естественно считать, что $C'(y) > 0$, т.е. издержки возрастают с увеличением объема производства. Также обычно полагают, что $C''(y) > 0$. Это означает, что дополнительные (маргинальные) издержки на производство каждой дополнительной единицы продукции возрастают по мере увеличения объема производства. Это предположение связано с тем, что при рационально организованном производстве, при малых объемах могут быть использованы лучшие машины и высококвалифицированные работники, которых уже не окажется в распоряжении фирмы, когда объем производства вырастет.

Производственные издержки состоят из следующих основных частей:

1. Материальные затраты C_m, в число которых входят расходы на сырье, материалы, полуфабрикаты и т.п. Разность между валовым доходом и материальными затратами называется добавленной стоимостью (условно чистой продукцией): $VA = Z = R - C_m$;
2. Расходы на оплату труда C_L.
3. Расходы, связанные с использованием, ремонтом машин и оборудования, амортизация, так называемая оплата «услуг капитала» $C_к$;
4. Дополнительные расходы Cr, связанные с расширением производства, строительством новых зданий, подъездных путей, линий связи и т.д.

Совокупные производственные издержки:

$C = C_m + C_L + C_k + C_r$.

Как уже было отмечено $C = C(y)$, однако эта зависимость от объема выпуска (y) для разных видов издержек различна. А именно имеют место:

– постоянные расходы C_0, которое практически не зависит от y, в том числе оплата административного персонала, аренда и содержание зданий и помещений, амортизационные отчисления, проценты за кредит, услуги связи и т.п.;

– пропорциональные объему выпуска (линейные) затраты C_1, сюда входят материальные затраты C_m, оплата труда производственного персонала (часть C_L), расходы по содержанию действующего оборудования и машин (часть $C_к$) и т.п. $C_1 = ay$, где a - обобщенный показатель затрат указанных видов в расчете на одно изделие;

– «сверхпропорциональные» (нелинейные) затраты C_2, в составе которых выступают приобретение новых машин и технологий (т.е. затраты типа $C_г$), оплата сверхурочного труда и т.п. Для математического описания этого вида затрат обычно используется степенная зависимость: $C_2 = by^h$ $(h > 1)$.

Таким образом, для представления совокупных издержек можно использовать модель:

$C(y) = C_0 + C_1 + C_2 = C_0 + ay + by^h$.

Рассмотрим возможные варианты поведения предприятия (фирмы) для двух случаев:

1. Предприятие имеет достаточно большой резерв производственных мощностей и не стремится к расширению производства, поэтому можно полагать, что $C_2 = 0$ и совокупные издержки являются линейной функцией выпуска: $C(y) = C_0 + ay$. Прибыль составит: $\Pi(y) = R - C = py - (C_0 + ay)$. Очевидно, что при малых объемах выпуска $0 \le y \le y_W$ фирма несет убытки, так как $\Pi < 0$. Здесь y_W – точка безубыточности (порог рентабельности), определяемая соотношением: $\Pi(y_W) = 0$. Если $y > y_W$, то фирма получает прибыль, и окончательное решение об объеме выпуска зависит от состояния рынка сбыта производимой продукции;

2. В более общем случае, когда $C_2 \neq 0$, имеются две точки безубыточности $y_e^{(1)}$ и $y_e^{(2)}$, причем положительную прибыль фирма получит, если объем выпуска y удовлетворяет условию: $y_e^{(1)} < y < y_e^{(2)}$. На этом отрезке в точке $y = \bar{y}$ достигается наибольшее значение прибыли.

Таким образом, существует оптимальное решение задачи о максимизации прибыли.

Следует заметить, что окончательное решение фирмы также зависит от состояния рынка, но с точки зрения соблюдения экономических интересов ей следует рекомендовать оптимизирующее значение выпуска.

В общем случае, когда $C(y)$ является нелинейной возрастающей и выпуклой вниз функцией объема выпуска, ситуация полностью аналогична той, которая рассмотрена в пункте 2.

Таким образом, оптимальный объем производства характеризуется тем, что в этом состоянии маргинальный валовой доход в точности равен маргинальным издержкам.

Отметим, что при увеличении цены оптимальный выпуск, а также прибыль увеличивается. Это верно также и в общем случае.

В случае несовершенной конкуренции производитель может оказывать непосредственное влияние на цену. В особенности это относится к монопольному производителю товара, который формирует цену из соображения разумной рентабельности.

Более реалистичная (но также простая) модель фирмы используется для того, чтобы учесть ресурсные ограничения, которые играют очень большую роль в хозяйственной деятельности производителей. В модели выделяется один наиболее дефицитный ресурс (рабочая сила, основные фонды, редкий металл, энергия и т.п.) и предполагается, что фирма может его использовать не более чем в каком-то количестве Q. Фирма может производить n различных продуктов. Пусть $y_1, \ldots, y_j, \ldots, y_n$ - искомые объемы производства этих продуктов; $p_1, \ldots, p_j, \ldots, p_n$ - их цены. Пусть также q – цена единицы дефицитного ресурса. Тогда валовой доход фирмы равен:

$$R(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{j=1}^{n} p_j y_j,$$

а прибыль составит

$\Pi(y_1, \ldots, y_n) = R(y_1, \ldots, y_n) - qQ.$

При фиксированных q и Q задача о максимизации прибыли преобразуется в задачу максимизации валового дохода.

Заметим, что оптимальный выбор фирмы зависит от всей совокупности цен на продукты, причем этот выбор является однородной функцией системы цен, т.е. при одновременном изменении цен в одинаковое число раз оптимальные выпуски не изменяются. При увеличении цены на продукт (при неизменных ценах на другие продукты) его выпуск следует увеличить с целью получения максимальной прибыли, а производство остальных товаров уменьшится. Заметим также, что при повышении цен на рынке фирма может получить значительное увеличение прибыли без изменения плана выпуска.

4.6. Методы учета научно-технического прогресса

Общепризнанным следует считать тот факт, что с течением времени на предприятии, сохраняющем фиксированную численность работников и постоянный объем основных фондов, выпуск продукции увеличивается. Это означает, что помимо обычных производственных факторов, связанных с затратами ресурсов, существует фактор, который обычно называют научно-техническим прогрессом (НТП). Этот фактор можно рассматривать как синтетическую характеристику, отражающую совместное влияние на экономический рост многих существенных явлений, среди которых нужно отметить следующие:

– улучшение со временем качества рабочей силы вследствие повышения квалификации работников и освоения ими методов использования более совершенной техники;

– улучшение качества машин и оборудования приводит к тому, что определенная сумма капитальных вложений (в неизменных ценах) позволяет по прошествии времени приобрести более эффективную машину;

– улучшение многих сторон организации производства, в том числе снабжения и сбыта, банковских операций и других взаимных расчетов, развитие информационной базы, образование различного рода объединений, развитие международной специализации и торговли и т.п.

В связи с этим термин «научно-технический прогресс» можно интерпретировать как совокупность всех явлений, которые при фиксированных количествах затрачиваемых производственных факторов дают возможность увеличить выпуск качественной, конкурентно способной продукции. Весьма расплывчатый характер такого определения приводит к тому, что исследование влияния НТП проводится лишь как анализ того дополнительного увеличения продукции, которое не может быть объяснено чисто количественным ростом производственных факторов. Главный подход к учету НТП сводится к тому, что в совокупность характеристик выпуска или затрат вводится время как независимый производственный фактор и рассматривается преобразование во времени либо производственной функции, либо технологического множества.

Рассмотрим способы учета НТП на основе преобразования производственной функции (ПФ), причем за основу примем двухфакторную ПФ:

$y = f\,(K, L)$,

где в качестве производственных факторов выступает капитал (К) и труд (L). Модифицированная ПФ в общем случае имеет вид: $y = f\,(K, L, t)$, причем выполняется условие $\frac{\partial f}{\partial t} > 0$, которое и отражает факт роста производства во времени при фиксированных затратах капитала и труда. Геометрическая иллюстрация показывает, что изокванта, соответствующая выпуску продукции в объеме Q, смещается с течением времени ($t_2 > t_1$) вниз и налево.

При разработке конкретных модифицированных ПФ обычно стремятся отразить характер НТП в наблюдаемой ситуации. При этом различают четыре случая:

1. Существенное улучшение со временем качества рабочей силы позволяет добиться прежних результатов с меньшим количеством занятых. Подобный вид НТП часто называют трудосберегающим. Модифицированная ПФ имеет вид: $y = f(K, I(t)\,L)$, где монотонная функция $l(t)$ характеризует рост производительности труда;

2. Преимущественное улучшение качества машин и оборудования повышает фондоотдачу, имеет место капиталосберегающий НТП и соответствующая ПФ: $y = f(k(t)\,K, L)$, где возрастающая функция $к(t)$ отражает изменение фондоотдачи;

3. Если имеет место значительное влияние обоих упомянутых явлений, то используется ПФ в форме: $y = f(k(t)\,K, I(t)\,L)$;

4. Если же нет возможности выявить влияние НТП на производственные факторы, применяется ПФ в виде: $y = a(t)\, f(K, L)$, где $a(t)$ – возрастающая функция, выражающая рост продукции при неизменных значениях затрат факторов.

Для исследования свойств и особенностей НТП используются некоторые соотношения между результатами производства и затратами факторов. К их числу относятся:

– средняя производительность труда: $I = \dfrac{y}{L}$,

– средняя фондоотдача: $K = \dfrac{y}{K}$,

– коэффициент фондовооруженности работника: $x = \dfrac{K}{L}$,

– равенство между уровнем оплаты труда и предельной (маргинальной) производительностью труда: $w = \dfrac{\partial y}{\partial L}$,

– равенство между предельной фондоотдачей и нормой банковского процента: $\dfrac{\partial y}{\partial K} = r.$

Говоря, что НТП является нейтральным, если он не изменяется с течением времени определенных связей между приведенными величинами.

Рассмотрим далее три случая:

1. Прогресс называется нейтральным по Хиксу, если в течение времени остается неизменным соотношение между фондовооруженностью (x) и предельной нормой замены (w/r). В частности, если $w/r = const$, то замена труда на капитал и наоборот, не принесет никакой выгоды и фондовооруженность $x = K/L$ также останется постоянной. Можно показать, что в этом случае модифицированная ПФ имеет вид: $y = a(t)\ f(K, L)$ и нейтральность по Хиксу эквивалентна рассмотренному выше влиянию НТП непосредственно на выпуск продукции. В рассматриваемой ситуации изокванта с течением времени смещается налево вниз путем преобразования подобия, т.е. остается в точности той же формы, что и в исходном положении;

2. Прогресс называется нейтральным по Харроду, если в течение рассматриваемого периода времени норма банковского процента (r) зависит лишь от фондоотдачи (к), т.е. на нее не влияет НТП. Это означает, что предельная фондоотдача установлена на уровне нормы процента и дальнейшее увеличение капитала нецелесообразно. Можно показать, что такой тип НТП соответствует производственной функции: $y = f(K, I(t)L)$, т.е. технический прогресс является трудосберегающим;

3. Прогресс является нейтральным по Солоу, если сохраняется неизменным равенство между уровнем оплаты труда (w) и предельной производительностью труда и дальнейшее увеличение затрат труда невыгодно. Можно показать, что в этом случае ПФ имеет вид: $y = f(k(t)K, L)$, т.е. НТП оказывается фондосберегающим.

При построении моделей производства с учетом НТП в основном используются следующие подходы:

- представление об экзогенном (автономном) техническом прогрессе, который существует также в том случае, когда основные производственные факторы не изменяются. Частным случаем такого НТП является нейтральный прогресс по Хиксу, который обычно учитывается с помощью экспоненциального множителя, например:

$$y = ae^{\lambda t} f(K,L).$$

Здесь $\lambda > 0$, что характеризует темп НТП. Нетрудно заметить, что время здесь выступает как независимый фактор роста производства, однако при этом создается впечатление, что НТП происходит сам по себе, не требуя дополнительных затрат труда и капиталовложений;

- представление о техническом прогрессе, овеществленном в капитале, связывает рост влияний НТП с ростом капитальных вложений. Для формализации этого подхода за основу берется модель прогресса, нейтральная по Солоу: $y = f(k(t)\,K, L)$, которая записывается в виде:

$$y = f(K_0 + k(t)\,\Delta K, L),$$

где K_0 - основные фонды на начало периода, ΔK - накопление капитала в течение периода, равное сумме инвестиций.

Очевидно, что если инвестирование не производится, то $\Delta K = 0$ и увеличение выпуска продукции за счет РТП не происходит;

- рассмотренные выше подходы к моделированию НТП обладают общей чертой: прогресс выступает как эндогенно заданная величина, которая влияет на производительность труда или фондоотдачу и посредством этого сказывается на экономическом росте.

Однако в долгосрочном плане НТП является и результатом развития, и, в значительной мере, его причиной. Поскольку именно экономическое развитие позволяет развитым обществам финансировать создание новых образцов техники, а затем уже пожинать плоды научно-технической революции. Поэтому вполне правомерен подход к НТП как эндогенному явлению, вызванному (индуцированному) экономическим ростом.

Выделяются два основных направления моделирования НТП:

1. Модель индуцированного прогресса основана на формуле:

$$y = f(k(t)\,K, I(t)\,L),$$

причем предполагается, что общество может распределять предназначенные для НТП инвестиции между ростом фондоотдачи и ростом производительности труда или выбором наилучшего (оптимального) направления технического развития при данном объеме выделенных капитальных вложений;

2. Модель процесса обучения в ходе производства, предложенная К.Эрроу. Она основана на наблюдаемом факте взаимного влияния роста производительности труда и количества новых изобретений. В ходе производства работники приобретают опыт, и время на изготовление изделия уменьшается, т.е. производительность труда и сам трудовой вклад зависит от объема производства $L = \varphi(y)$.

В свою очередь, рост трудового фактора, согласно производственной функции: $y = f(K, L)$, приводит к росту производства.

5. ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ

5.1. Понятие оптимизационных задач и оптимизационных моделей

Экономико-математические задачи, цель которых состоит в нахождении наилучшего (оптимального) некоторого критерия или критериев варианта использования имеющихся ресурсов (труда, капитала и пр.), называются оптимизационными.

Оптимизационные задачи (ОЗ) решаются с помощью оптимизационных моделей (ОМ) методами математического программирования.

Структура оптимизационной модели состоит из целевой функции, области допустимых решений и системы ограничений, определяющих эту область. Целевая функция в самом общем виде, в свою очередь, также состоит из трех элементов:

– управляемых переменных;
– неуправляемых элементов;
– формы функции (вида зависимости между ними).

Область допустимых решений – это область, в пределах которой осуществляется выбор решений. В экономических задачах она ограничена наличными ресурсами, условиями, которые записываются в виде системы ограничений, состоящей из уравнений и неравенств.

Если система ограничений несовместима с областью допустимых решений, то эта область является пустой. Ограничения подразделяются на:

– линейные и нелинейные,
– детерминированные и стохастические.

Стохастические ограничения являются возможными, вероятностными и случайными.

Оптимизационные задачи (ОЗ) решаются методами математического программирования, которые подразделяются на:

– линейное программирование,

– нелинейное программирование,

– динамическое программирование,

– целочисленное программирование,

– выпуклое программирование,

– исследование операций,

– геометрическое программирование и др.

Главная задача математического программирования – это нахождение экстремума функций при ограничениях в форме уравнений и неравенств.

5.2. Оптимизационные задачи с линейной зависимостью между переменными

Пусть:

b_i - количество ресурса вида i (i = 1, 2, …, m),

$a_{i,j}$ - норма расхода i – того ресурса на единицу j – того вида продукции,

x_j - количество продукции вида j (j = 1, 21, …, n),

c_j - прибыль (доход) от единицы этой продукции (в задачах на минимум – себестоимость продукции).

В ОЗ линейного программирования (ЛП) в общем виде может быть сформулирована и записана следующим образом:

найти переменные x_j (j = 1, 2, …, n), при которых целевая функция:

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} cjxj \to \max(\min),$$

была бы максимальной (минимальной), не нарушая следующих ограничений:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \ i = 1, 2, \dots, m_i,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = m_1 + 1, \ m_1 + 2, \dots, m_2,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = m_2 + 1, m_2 + 2, \ldots, m.$$

Все три случая можно привести к так называемой канонической форме, введя дополнительные переменные:

$$\sum_{j=1}^{n+k} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

где к - количество дополнительных переменных в тог же время и условие неотрицательности искомых переменных: $x_j \geq 0$.

В результате решения задачи находится некий план (программа) работы некоторого предприятия. Отсюда и появилось слово «программирование». Слово «линейное» указывает на линейный характер зависимости и в целевой функции, и в системе ограничений. Следует подчеркнуть, что задача обязательно носит экстремальный характер, т.е. состоит в отыскании максимума или минимума (экстремума) целевой функции.

5.3. Геометрическая интерпретация ОЗЛП

Пусть необходимо найти оптимальный план производства двух видов продукции (x_1 и x_2), т.е. такой план, при котором целевая функция (общая прибыль) была бы максимальной, а имеющиеся ресурсы использовались бы наилучшим образом. Условия задачи приведены в таблице 6.

Таблица 6

Данные о запасе и нормах расходов ресурсов

Вид продукции	Норм. расх. на ед. прод. А	Норм. расх. на ед. прод. В	Норм. расх. на ед. прод. С	Прибыль на ед. изделия
1	2	0,1	3,5	4
2	1	0,5	1	5
Объем рес.	12	4	18	-

Оптимизационная модель задачи записывается следующим образом:

– целевая функция: $4x_1 + 5x_2 \rightarrow max$, – ограничения:

$2x_1 + x_2 \leq 12$ (ограничение по ресурсу A),

$0{,}1x_1 + 0{,}5x_2 \leq 4$ (ограничение по ресурсу B),

$3{,}5x_1 + x_2 \leq 18$ (ограничение по ресурсу C),

– условие не отрицательности переменных: $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$.

Подобные оптимизационные модели удобно продемонстрировать графически.

Преобразуя нашу систему ограничений, найдя в каждом из уравнений x_2, откладываем их на графике. Любая точка на данном графике с координатами x_1 и x_2 представляет вариант искомого плана. Однако ограничение по ресурсу A сужает область допустимых решений. Ими могут быть все точки, ограниченные осями координат и полученной прямой, так как не может быть израсходовано ресурса A больше, чем его на предприятии имеется. Если точки находятся на самой прямой, то ресурс используется полностью.

Аналогичные рассуждения можно привести и для ресурсов B и C.

В результате условиям задачи будет удовлетворять любая точка, лежащая в пределах полученного многоугольника. Данный многоугольник называется областью допустимых решений.

Однако нам необходимо найти такую точку, в которой достигался бы максимум целевой функции. Для этого нужно построить произвольную прямую $4x_1 + 5x_2 = 20$, как $x_2 = 4 - 4/5x_1$ (число 20 произвольное). Нужно обозначить как-то эту линию (например PP). В каждой точке этой линии прибыль одинакова. Перемещая эту линию параллельно ее исходному положению, находим точку, которая удалена от начала координат в наибольшей мере, однако не выходит за пределы области допустимых решений. Такая точка лежит на вершине многоугольника. В нашем случае координаты такой точки будут соответственно равны: $x_1 = 3{,}03$ и $x_2 = 7{,}4$, и они будут искомым оптимальным планом.

5.4. Симплексный метод решения ОЗЛП

Симплексный метод – это вычислительная процедура, основанная на принципе последовательного улучшения решений при переходе от одной базисной точки (базисного решения) к другой. При этом значение целевой функции улучшается.

Базисным решением является одно из допустимых решений, находящихся в вершинах области допустимых значений. Проверяя на оптимальность вершину за вершиной, приходят к искомому оптимуму. На этом принципе основан симплекс-метод.

Симплекс – это выпуклый многоугольник в n-мерном пространстве с n + 1 вершинами, не лежащими в одной гиперплоскости (гиперплоскость делит пространство на два полупространства).

Например, линия бюджетных ограничений делит блага на допустимые и недопустимые.

Доказано, что если оптимальное решение существует, то оно обязательно будет найдено через конечное число итераций (шагов), кроме случаев «зацикливания».

Алгоритм симплексного метода состоит из ряда этапов.

Первый этап:

Строится исходная ОМ. Далее исходная матрица условий преобразуется в приведенную каноническую форму, которая среди всех других канонических форм выделяется тем, что :

– правые части условий (свободные члены bi) являются величинами неотрицательными,

– сами условия являются равенствами,

– матрица условий содержит полную единичную подматрицу.

Если свободные члены отрицательные, то обе части неравенства умножаются на -1, а знак неравенства меняется на противоположный. Для преобразования неравенств в равенства вводят дополнительные переменные, которые не имеют никакого экономического смысла. Они вводятся исключительно для того, чтобы получить единичную подматрицу и начать процесс решения задачи при помощи симплексного метода.

В оптимальном решении задачи все искусственные переменные (ИП) должны быть равны нулю. Для этого вводят ИП в целевую функцию задачи с большими отрицательными коэффициентами (-М) при решении задачи на max и с большими положительными коэффициентами (+М), когда задача решается на min. В этом случае даже небольшое ненулевое значение ИП будет резко уменьшать (увеличивать) значение целевой функции. Обычно М в тысячу раз должно быть больше, чем значения коэффициентов при основных переменных.

Второй этап:

Строится исходная симплекс-таблица и отыскивается некоторое начальное базисное решение. Множество переменных, образующих единичную подматрицу, принимается за начальное базисное решение. Значения этих переменных равны свободным членам. Все остальные внебазисные переменные равны нулю.

Третий этап:

Проверка базисного решения на оптимальность осуществляется при помощи специальных оценок коэффициентов целевой функции. Если все оценки коэффициентов целевой функции отрицательны или равны нулю, то имеющееся базисное решение - оптимальное. Если хотя бы одна оценка коэффициента целевой функции больше нуля, то имеющееся базисное решение не является оптимальным и должно быть улучшено.

Четвертый этап:

Переход к новому базисному решению. Очевидно, что в оптимальный план должна быть введена переменная, которая в наибольшей степени увеличивает целевую функцию. При решении задач на максимум прибыли в оптимальный план вводится продукция, производство которой наиболее выгодно. Это определяется по положительному максимальному значению оценки коэффициента целевой функции.

Столбец симплексной таблицы с этим номером на данной итерации называется генеральным столбцом.

Далее, если хотя бы один элемент генерального столбца строго положителен, то отыскивается генеральная строка (в противном случае задача не имеет оптимального решения).

Для отыскания генеральной строки все свободные члены (ресурсы) делятся на соответствующие элементы генерального столбца (норма расхода ресурса на единицу изделия). Из полученных результатов выбирается наименьший. Соответствующая ему строка на данной итерации называется генеральной. Она соответствует ресурсу, который лимитирует производство на данной итерации.

Элемент симплексной таблицы, находящийся на пересечении генерального столбца и строки, называется генеральным элементом.

Затем все элементы генеральной строки (включая свободный член) делятся на генеральный элемент. В результате этой операции генеральный элемент становится равным единице. Далее необходимо, чтобы все другие элементы генерального столбца стали бы равны нулю, т.е. генеральный столбец должен стать единичным. Все строки (кроме генеральной) преобразуются следующим образом. Полученные элементы новой строки умножаются на соответствующий элемент генерального столбца, и полученное произведение вычитается из элементов старой строки.

Значения новых базисных переменных получим в соответствующих ячейках столбца свободных членов.

Пятый этап:

Полученное базисное решение проверяется на оптимальность (см. третий этап). Если оно оптимально, то вычисления прекращаются. В противном случае необходимо найти новое базисное решение (четвертый этап) и т.д.

Двойственная задача ЛП

Двойственная задача ЛП может быть сформулирована следующим образом:

найти переменные y_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$, при которых целевая функция была бы минимальной и не нарушала соответствующих ограничений.

Данная задача называется двойственной (симплексной)по отношению к прямой задаче, сформулированной в параграфе «Оптимизационные задачи с линейной зависимостью между переменными». Однако правильным будет и обратное утверждение, так как обе задачи равноправны. Компоненты решения двойственной задачи называются объективно обусловленными оценками.

Прямая и обратная задачи ЛП связаны между собой теоремами двойственности. Их две:

1. Если обе задачи имеют допустимые значения, то они имеют и оптимальное решение, причем значение целевых функций у них будет одинаково. Если же хотя бы одна из них не имеет допустимого решения, то ни одна из них не имеет оптимального решения.

2. Теорема о дополняющей нежесткости. Здесь требуется выполнение некоторых условий для того, чтобы векторы X и У были оптимальными решениями соответственно прямой и двойственной задачи.

В этой теореме имеются два следствия. В первом следствии, когда оптимальное значение некоторой переменной двойственной задачи строго положительно, тогда решение в интерпретации экономического смысла имеет следующее объяснение. Если объективно обусловленная оценка некоторого ресурса больше нуля (строго положительная), то этот ресурс полностью (без остатка) расходуется в процессе выполнения оптимального плана.

Во втором следствии, если для оптимального значения некоторой переменной прямой задачи выполняется условие строгого неравенства, тогда решение в интерпретации экономического смысла имеет следующее объяснение. Если в оптимальном плане какой-то ресурс используется не полностью, то его объективно обусловленная оценка обязательно равна нулю.

5.5. Свойства объективно обусловленных оценок и их анализ

Анализ задачи с использованием объективно обусловленных оценок показывает, что первый ресурс (древесина) расходуется неполностью. Изменение ограничения по древесине не повлияет на оптимальный план. Следовательно, объективно обусловленные оценки являются устойчивыми в некоторых пределах изменения исходных условий задачи.

Объективно обусловленные оценки выступают как мера дефицитности ресурсов. Древесина, объективно обусловленная оценка которой у нас равна нулю, не дефицитна, а трудовые ресурсы с объективно обусловленной оценкой дефицитны и используются полностью.

Объективно обусловленные оценки выступают как мера влияния ограничений на целевую функцию при приращении данного ресурса на единицу.

Они выступают так же, как мера взаимозаменяемости резервов (ограничений).

Следует иметь в виду, что при существенном изменении исходных условий задачи обычно используется уже другая система оценок. Следовательно, объективно обусловленные оценки обладают свойством конкретности, так как определяются совокупностью условий данной задачи. Для другой задачи и других условий их значения будут совершенно иными.

5.6. Разработка производственной программы фирмы

Разработку производственной программы фирмы можно выполнить, используя метод производственных функций, который дает возможность получить описание эффективного технологического множества в терминах связи между «входом» (затратами производственных факторов) и «выходом» (результатами производственной деятельности) объекта. Однако во многих случаях необходимо иметь сведения о структуре того или иного эффективного технологического способа, т.е., комбинацией каких более простых процессов он является. В качестве основной модели, позволяющей дать описание не только связей «вход – выход», но и параметров внутреннего состояния производственной системы, применяется линейная модель производства. Эта модель строится исходя из предположения, что всякий допустимый технологический способ (в том числе эффективный) может быть представлен в виде линейной комбинации с положительными коэффициентами так называемых базисных производственных способов. Наиболее распространенное истолкование такого представления основывается на том, что производственное предприятие рассматривается как объединение параллельно работающих взаимосвязанных цехов, участков и т.п., причем в каждом из них используется некая определенная технология. Тогда описание такой технологии (т.е. производство продукции и соответствующие затраты) можно считать базисным производственным способом. Время работы цеха по этой технологии обычно называют интенсивностью базисного способа. В рассматриваемом примере все основные показатели затрат и выпуска для производственного объекта в целом оказываются суммой подобных же величин по отдельным цехам.

В конкретной задаче планирования производства обычно используется подмножество некоего множества, определяемое системой ограничений двух видов.

Условия первого вида предназначены для характеристики ограниченности запасов ресурсов, которые необходимы для осуществления производственного процесса.

Группу условий второго вида образуют плановые задания по отдельным видам продукции, комплектам или стоимостным показателям.

Ограничивающие условия обоих видов записываются обычно в терминах интенсивности базисных технологий. В некоторых случаях различные виды компонент в записанной формуле отличаются знаками (например, положительные числа относятся к продуктам, а отрицательные представляют объемы затрачиваемых ресурсов), но в большинстве случаев смысл каждой компоненты специально оговаривается.

Линейная модель производства позволяет представить взаимозаменяемость и комбинирование фиксированных технологических способов, считающихся основными, в некоторых пределах, обозначенных ресурсами и плановыми ограничениями. Рассматривая производственный объект как кибернетическую систему, можно сказать, что характеристики основных производственных способов (их коэффициенты затрат и выпуска) являются основными параметрами системы, а обусловленные плановым решением значения интенсивностей представляют собой описание состояния системы. Плановое решение определяется на множестве возможных состояний при помощи некоторого правила выбора «наилучшего» состояния. По существу, формирование такого правила выбора отражает представление об интересах производственного объекта и связанного с этим выделением множества эффективных технологических способов. Указанное правило выбора может быть сформулировано при помощи некоторого формализованного критерия (скалярная оптимизация) или набора ряда оценочных показателей (многокритериальная оптимизация). Оно может быть по существу неформальным правилом, если окончательный выбор решения зависит от условий среды, окружающей данный производственный объект, от предыдущих решений и, наконец, от субъективных оценок руководителей.

В рассматриваемой модели очень часто используется скалярное правило выбора наилучшего состояния, базирующееся на нахождении оптимального значения некоторой целевой функции. Эта функция обычно имеет смысл выпуска возможного наибольшего количества продукции либо в стоимостном выражении, либо заданном комплекте.

Если целевая функция является линейной относительно искомых интенсивностей основных технологических способов, то возникает линейная оптимизационная модель производства, которая, с одной стороны, благодаря своей относительной простоте доступна для достаточно детального математического анализа. С другой стороны, она имеет самостоятельное значение как инструмент принятия и поддержки решения в достаточно несложных ситуациях, а также как элемент сложных конструкций решающих систем.

Для создания более полной картины распределения затрат по элементам необходимо использовать более детальные модели производства. Если в число ограничений включаются трудовые ресурсы, многие виды материальных ресурсов, лимиты капитальных вложений, то цена продукции представляется как сумма расчетной заработной платы, материальных затрат и затрат на пополнение и создание новых производственных фондов.

Некоторым недостатком приведенного представления является отсутствие в нем выражений для прибавочного продукта и полезного дополнительного эффекта у потребителя, которые присутствуют в большинстве концепций формирования цены.

В связи с этим данное соотношение следует рассматривать лишь в контексте приведенной модели производства как средство анализа внутренних свойств исследуемого производственного объекта. Эти соотношения удобно использовать для оценки экономической эффективности новых предлагаемых базисных производственных способов. Из соотношений второй группы вытекает, что если для некоторого базисного технологического способа выполняется неравенство, которое означает, что затраты ресурсов, исчисленные с помощью оптимальных оценок как внутренних цен, превосходят ожидаемую выручку от продажи какого либо изделия, то необходимо условие, чтобы интенсивность была равна нулю. Это означает, что такой «нерентабельный» базисный способ не рекомендуется для использования в оптимальном плане производства.

5.7. Обобщения и приложения модели производства

1. В тех случаях, когда самостоятельное предприятие функционирует в рыночных условиях, возникает вопрос о наилучшем использовании собственных и заемных финансовых средств для приобретения дополнительных количеств ресурсов, которые могут применяться наряду с некоторыми фиксированными факторами (например зданиями, сооружениями, машинами и т.п.). Математическая формулировка такой задачи основана на разделении всех ресурсов на постоянные ресурсы, запасы которых считаются заданными, и нанимаемые (арендуемые) ресурсы, запасы которых определяются косвенным образом через сумму собственных средств и кредита.

2. Большой интерес представляют производственные объекты, деятельность которых основана на самофинансировании. Это означает, что возможность приобретения производственных ресурсов в основном зависит от того, насколько успешной была хозяйственная деятельность предприятия в предыдущие периоды. Таким образом, модель, представляющая поведение предприятия, должна быть динамической.

Поскольку величины оптимальных оценок обусловливаются в основном технологическими коэффициентами и ценами на продукцию, определение наилучшего темпа роста может быть сделано путем рационального выбора параметров, которыми в значительной мере может распоряжаться само предприятие. Если эффективность, характеризуемая оптимальными оценками, велика, то высокий темп развития производства обеспечивается и при малых значениях коэффициентов.

3. Описанные выше модели могут служить основой расчетов оптимальной производственной программы для производственных предприятий (фирм). Однако во многих случаях объект такого типа следует рассматривать как составную часть более сложной отраслевой, региональной или народнохозяйственной системы. В такой обстановке представленные автономные модели не отражают многих требований, которые сложная система (ее регулирующий центр) предъявляют к предприятию как элементу своей подсистемы. Наиболее распространенным способом выражения такой «вертикальной» связи оказывается формулировка специальных заданий по отдельным видам или группам изделий в форме заказа (контракта), обязательного для выполнения на данном предприятии. Разрабатывая математическую модель поведения предприятия в этих условиях, по-прежнему исходят из предположения о существовании некоторой целевой функции, максимизация которой соответствует хозяйственным интересам рассматриваемого объекта. Группа ограничений, в условиях которых происходит оптимизация, состоит из четырех главных подгрупп, отражающих:

– ограниченность трудовых, материальных и энергетических ресурсов,

– необходимость выполнения контрактов центром по группам взаимозаменяемых изделий,

– условия, выражающие ограниченность производственной мощности по выпуску изделия определенного вида, т.е. «локальные» ограничения,

– условия, определяемые заказом на конкретные, строго указанные виды продукции (изделия).

Количество номеров и сами номера определяются спецификой заказа (контракта) центра.

Путем соединения перечисленных соотношений и требований максимизации целевой функции получается линейно-программная модель для определения оптимального плана производства предприятия, действующего в условиях обязательного выполнения заказа. Вообще говоря, ограничения этой модели являются противоречивыми, и система условий может оказаться несовместимой. Возникающая в этом случае задача максимизации целевой функции называется несобственной. Решение несобственных задач линейного программирования осуществляется специальными методами, основанными либо на коррекции системы ограничений, либо на применении методов регуляризации. Причиной возникновения несовместимости может служить либо несогласованность заказа, с одной стороны, и ресурсных и мощностных ограничений - с другой; либо определенные неточности в задании основных технологических способов и ограничительных условий. Нужно исходить из того, что эти недостатки устранены специальными приемами. В дальнейшем изложении изучается случай, когда система ограничений совместна и поставленная задача имеет оптимальное решение. В целях проведения дальнейшего экономико-математического анализа нужно обозначить двойственные переменные, соответствующие ограничениям подгруппы (а) через u_i $(i = 1, \ldots, m_1)$; ограничениям подгруппы (б) через v_i $(i = m_1 + 1, \ldots, m)$; ограничениям подгруппы (в) через u_j', для подгруппы (г) через v_j'.

В указанных обозначениях функционал двойственной задачи имеет вид:

$$g = \sum_{i=1}^{m_1} b_i y_i - \sum_{i=m_1+1}^{m} s_i v_i + \sum_{j \in N_1} d_j u_j' - \sum_{j \in N_2} I_j v_j'.$$

В силу равенства оптимальных значений прямой и двойственной задачи методом прямой и двойственной задачи имеем, что максимальная величина целевой функции может быть представлена при помощи соотношения:

$$f = \sum_{i=1}^{m_1} b_i u_i - \sum_{i=m_1+1}^{m} s_i v_1 + \sum_{j \in N_1} d_j u_j - \sum_{j \in N_2} I_j v_j'.$$

Здесь через u_i, v_i, $u_j^{'}$, $v_j^{'}$ обозначены компоненты оптимального решения двойственной задачи.

Из приведенного соотношения видно, что каждая оптимальная оценка сохраняет свой смысл приростной продуктивности ресурса. Величина такой оценки показывает, что при увеличении ресурса (мощности) на дополнительную «малую единицу» максимальное значение целевой функции увеличится.

Из той же формулы вытекает, что оптимальная оценка может быть интерпретирована как мера потери в целевой функции, которая возникает, если заказ по i-той группе изделий будет увеличен. Аналогичный смысл следует придать оптимальной оценке второго типа относительно «индивидуального» заказа изделия. Таким образом, если среди указанных оптимальных оценок имеются отличные от нуля, то возникает возможность количественного измерения несоответствия между заданиями центра и хозяйственными интересами производственной единицы. Полученная информация может быть использована для согласования интересов верхнего и нижнего звеньев при помощи специальных мер, включающих в себя измерения цен изделий, подбор уточненных значений экономических нормативов, компенсационных платежей.

4. Если в ходе производственного процесса становятся возможными значительные изменения интенсивности технологических способов, то предположение о пропорциональности затрат ресурсов и результатов хозяйственной деятельности является, вообще говоря, неверным. Тем самым нарушается одна из важнейших предпосылок построения линейной модели и становится необходимым использовать более сложные, нелинейные модели производства. При этом учитывается ее содержательная интерпретация, что позволяет использовать ее в качестве промежуточного аргумента в зависимости между затратами и результатами.

Наиболее естественным обобщением линейной модели является выпуклая модель производства, в которой множество Z допустимых интенсивностей описано при помощи ограничений вида:

$$g_i\,(z_i, \ldots, z_n) \le b_i \quad (i = 1, \ldots, m)$$

с вогнутыми (выпуклыми вниз) функциями.

Применяется следующее скалярное правило выбора наилучшего решения:

$$f(z) = f(z_1, \ldots, z_n) \to \max,$$

где f - выпуклая вверх функция соответствующих аргументов, которая обычно имеет смысл выпуска товарной продукции. Свойство выпуклости функции $f(z)$, а также вогнутости функции $g(z)$ связано с представлением об убывающей эффективности производства. Напомним, что в линейных моделях производства эти нормы считаются постоянными, т.е. не зависящими от масштабов производства. Аналогом двойственных оценок линейной модели в рассматриваемом случае служат оптимальные значения множителей Лагранжа в задаче нахождения седловой точки функции. Иными словами в этой точке достигается максимальное значение функции Лагранжа по группе переменных интенсивностей и минимальное по множителям Лагранжа. Для выпуклой задачи оптимизации, дополненной условием телесности, седловая точка функции Лагранжа всегда существует. При этом ее первая компонента является решением задачи оптимизации, а вторая компонента дает оптимальный набор множителей Лагранжа, которые используются для параметрического анализа оптимальных планов.

5. В рассмотренных выше моделях оптимизации правило выбора наилучшего решения (оптимального плана) представлено при помощи требования максимизации скалярной функции, которая таким образом отражает степень достижения целей объекта и поэтому часто называется целевой функцией.

Однако построение такой целевой функции для реального экономического объекта представляет собой, как правило, очень трудную задачу. Причины этого связаны с многообразным характером целей развития, влиянием не только экономических, но и социальных факторов, сложностью оценки полезности конечных результатов хозяйственной деятельности и т.п. Поэтому некая синтезированная общая цель производственного объекта часто может быть выражена лишь в словесной форме, но практически не поддается формулировке при помощи четко выраженной скалярной целевой функции. В связи с этим оказывается перспективным считать, что объект ставит перед собой задачу достижения не одной цели, но имеет в виду систему целей, каждой из которой отвечает частная целевая функция. Такой подход позволяет поставить задачу выбора наилучшего решения как проблему многокритериальной оптимизации на множестве допустимых наборов интенсивностей технологических способов.

6. ОСНОВЫ МИКРОЭКОНОМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА РЫНКА

6.1. Рыночное равновесие. Сравнительная статистика

В общем случае согласование экономических интересов между участниками сложного процесса производства, распределения и потребления наиболее эффективно осуществляется с помощью рыночного механизма, который выступает в роли регулятора взаимосвязей между хозяйственными субъектами. В основном варианте рынка, в условиях свободной конкуренции производитель и потребитель выступают как независимые агенты, что позволяет свободно принимать компромиссные решения по заключению сделок и вырабатывать взаимовыгодные условия покупки и продажи тех или иных товаров. В ситуации, когда сделки совершаются большим числом участников, можно считать, что цены складываются как результат массового взаимодействия продавцов и покупателей, а каждый отдельный участник практически не влияет на их формирование. В связи с этим применяемые термины «продавец» и «покупатель» следует понимать как описание агрегированных множеств реальных продавцов и покупателей, каждое из которых обладает своими специфическими интересами. Сам процесс достижения равновесия как согласованного решения представляется как последовательность действий, каждое из которых может быть интерпретировано либо как реальная сделка по некоторой промежуточной цене, либо как переговорный акт между продавцом и покупателем с целью выяснения возможной цены, объема спроса и предложения.

Наиболее простые модели равновесия относятся к случаю, когда предметом сделок является один товар, а в качестве участников выступают независимые продавец (производитель) и покупатель (потребитель).

Фактическое значение цены равновесия определяется как факторами производства, так и потребления.

При этом со стороны производителя на цену равновесия влияют удельные издержки на производство продукции так, что их увеличение приводит к повышению цены равновесия, а уменьшение – к ее понижению. Со стороны потребителя существенное влияние оказывают его доход (увеличение дохода вызывает повышение цены равновесия) и относительная полезность данного товара для потребителя (ее увеличение также приводит к росту цены равновесия).

Цена равновесия выступает как показатель, сочетающий в себе в результате компромисса разнохарактерные интересы производителя и потребителя. Она, как правило, очень чутко реагирует на изменение внешних условий или экзогенных факторов.

В качестве таких факторов со стороны спроса выступает изменение уровня дохода потребителей, приобретающих данный товар, а также влияние моды и появление новых товаров аналогичного назначения. В случае увеличения дохода кривая спроса занимает более высокое положение, и новая цена оказывается большей, чем прежняя. При этом объем продаж товара в денежном выражении увеличивается.

Если же на рынке появляется более эффективный или более дешевый заменитель рассматриваемого нами товара, то покупатели уменьшают ту долю дохода, которую они предназначали ранее для его покупки, и спрос на этот товар падает. В результате кривая спроса сдвигается вниз и налево, и новая цена равновесия становится более низкой, нежели прежняя. Объем продаж также уменьшается.

Изменение условий со стороны предложения может происходить вследствие различных обстоятельств. Например, снижение уровня предложения товара может быть вызвано уменьшением производства из-за разрыва ранее существовавших хозяйственных связей; плохим урожаем сельскохозяйственных продуктов; уменьшением импорта и т. п. Во всех этих случаях кривая предложения смещается вниз направо и новая цена равновесия оказывается больше старой.

При этом объем продаж в натуральном выражении снижается, но в денежном выражении может и увеличиться.

Разработка новых экономических технологий, специальные государственные или коммерческие дотации могут служить причиной того, что производство товара в прежних объемах осуществляется с меньшими издержками. В этой обстановке кривая предложения смещается налево вверх и цена равновесия уменьшается.

Особым является случай монопольного рынка, когда предложение либо практически не зависит от цены (является неэластичным), либо даже уменьшается по мере увеличения цены. В этой ситуации изменение цены равновесия определяется изменением спроса.

Изложенный выше анализ позволяет изучить и более общий случай, когда имеет место одновременное влияние нескольких различных факторов на цену равновесия. Например, увеличиваются доходы потребителей и осуществляются дополнительные дотации или льготы производству. В такой обстановке противоположные тенденции (к росту и к снижению цены) могут быть взаимно погашены и стабильный уровень цен сохранится.

Если же имеет место рост доходов потребителей, но не улучшаются условия производства, то появляются условия для неконтролируемого роста цен, который обычно называется инфляцией спроса (demand-pull inflation).

В ситуации, когда доходы потребителей практически не возрастают, но увеличиваются издержки производителей, появляется другой вид инфляции – инфляция издержек (cost-push inflation).

В реальной обстановке различные причины инфляции переплетаются между собой, и классификация инфляционных явлений становится весьма затруднительной.

Количественное исследование изменения положения равновесия вследствие вариации внешних условий и соответствующих им параметров называется сравнительной статистикой.

Методы сравнительной статистики используются и в более сложной ситуации, когда речь идет о равновесии на рынках многих товаров. Они дают возможность оценить действенность и эффективность многих мероприятий государственного управления экономикой.

6.2. Моделирование процесса достижения равновесия

Цена равновесия может быть интерпретирована как «справедливая» цена обмена, которая устанавливается в результате многочисленных парных сделок между продавцами и покупателями. Это состояние равновесия замечательно тем, что в нем полностью удовлетворен спрос, а также отсутствует излишнее производство товара, т.е. нет перепроизводства продукта и нерационального расходования производственных ресурсов. Таким образом, с производственной точки зрения состояние равновесия соответствует наибольшей экономии ресурсов. В связи с этим состояние равновесия является приемлемым и подходящим для обеих групп участников рыночного обмена – производителей и потребителей и поэтому может выступить как конечная цель процесса регулирования при помощи цен.

Как правило, в конкурентной экономике без сговора (коалиции) достижение равновесия есть стихийный процесс, основанный на том, что при любой цене, превышающей равновесную, количество товара, которое стремятся предложить продавцы (производители), будет превосходить то количество, на которое покупатели (потребители) намерены предъявить спрос. Возникает давление на цену в сторону ее понижения, причем деятельность некоторых продавцов, желающих избавиться от товара, будет направлена против существующего (слишком высокого) уровня цены. Подобным же образом можно показать, что цена, находящаяся ниже уровня равновесия, испытывает давление в сторону повышения.

При возникновении и оформлении устойчивого спроса на товар в зависимости от цены, т.е. при наличии не меняющейся во времени функции спроса, различают три основных вида рыночного равновесия:

1. Мгновенное равновесие. Оно достигается в обстановке, когда предложение фиксировано, т.е. производители товара не готовы к расширению производства или не в состоянии это сделать. Равновесие такого рода обычно достигается при достаточно высокой цене, что и является стимулом для последующих действий производителей;

2. Кратковременное равновесие. Оно возникает тогда, когда в действие вводятся наличные резервы (свободные производственные мощности) и предложение несколько увеличивается, причем равновесная цена в этой ситуации оказывается ниже, но и остается еще довольно высокой;

3. Нормальное длительное равновесие. Оно устанавливается в ситуации, когда в деле принимают участие практически все производители, способные производить данный товар без резкой перестройки своей хозяйственной деятельности. В этом случае функция предложения также возрастает, и равновесная цена соответствует нормальным издержкам производства.

Процесс приближения к нормальному равновесию во времени можно представить при помощи последовательности малых дискретных шагов, используя представления о функциях спроса и предложения, которые сами могут изменяться в ходе рыночного процесса вследствие изменения условий производства и потребления.

Одна из основных моделей процесса достижения равновесия использует его дискретное представление с помощью так называемых «торговых» дней с номерами $t = t_0,\ t_0 + 1,\ t_0 + 2. \ldots$.

Предполагается, что к началу торгового дня t известна начальная цена товара p_t , которая полностью определяет объем предложения:

$S_t = S(p_t)$.

Далее считается, что в течение дня предложенный товар полностью реализуется по цене p_{t+1}, которая определяется из условия временного равновесия

$D(p_{t+1}) = S_t$,

и является исходной ценой для следующего торгового дня и т.д.

Геометрическая иллюстрация этого процесса приближается к равновесию и напоминает паутину. Поэтому сама модель часто называется паутинообразной. Считается, что для сходимости указанного рыночного процесса достаточно, чтобы маргинальное предложение не превосходило бы маргинального спроса или S (положительная реакция производителя на повышение цены не была бы столь же значительной, как отрицательная реакция потребителя, т.е. это процесс в обстановке относительно неактивных производителей).

В случае если наклон линии спроса круче наклона линии предложения, спираль будет раскручиваться в обратном порядке. Если наклоны линии спроса и предложения одинаковы, то паутина закольцуется.

Вторая модель процесса достижения равновесия, напротив, может быть использована для описания ситуации активных производителей, готовых сразу же откликнуться на возникающий спрос. Подобный процесс задается при помощи следующей системы соотношений: в торговый день t задано предложение S_t, и оно определяет цену p_t как решение уравнения:

$S(p_t) = S_t$.

Эта цена характеризуется объемом спроса:

$D_t = D(p_t)$,

а предложение на следующий торговый день прямо ориентируется на спрос предыдущего дня:

$S_{t+1} = D_t$.

Описанный процесс может быть представлен при помощи паутинообразной модели, причем достаточное условие сходимости имеет вид:

$$S'(p) > |D'(p)|,$$

что соответствует более сильной реакции производителей по сравнению с потребителями.

Заметим, что промежуточные значения цены попеременно становятся то больше, то меньше, т.е. процесс имеет колебательный характер с уменьшающейся амплитудой. Это и есть процесс сходимости цены к равновесной.

Строго монотонный характер имеет процесс достижения, известный под названием «нащупывание», в котором важную роль играет внешнее (централизованное) регулирование.

Состояние равновесия на сложном рынке многих товаров может быть определено с помощью функций спроса и предложения.

Свойства состояния равновесия на рынке многих товаров в большинстве случаев подобны такому же состоянию на рынке одного товара. Однако для более тщательного его изучения полезно рассматривать отдельно рынки взаимозаменяемых и взаимодополняющих товаров. Процесс достижения равновесия в этом случае может быть представлен при помощи изучения последовательности «торговых дней». При этом считается, что к началу торгового дня известна такая система цен, которая была сформирована ранее и послужила ориентиром для производителей, поставляющих на рынок товары в определенных количествах.

В течение торгового дня происходит полная распродажа товаров, и новая система цен определяется в соответствии с функциями спроса. Иначе говоря, новая система цен находится как решение системы уравнений:

$$D_I(p_{t+1}) = S_{ti} \quad (I = 1, \dots, L).$$

В ходе последовательных обменов могут применяться различные способы регулирования, которые позволяют осуществить достижение равновесия, если сходимость не имеет места, или ускорить процесс достижения равновесия. В большинстве случаев причиной несходимости процесса оказывается слишком высокая эластичность предложения по цене, которая обусловливает нарушения достаточного условия. Для того чтобы уменьшить эту эластичность, применяется «поощрение за недопроизводство» производства либо резкое повышение налогов при больших объемах производства.

Для описания процесса достижения равновесия с централизованным регулированием («нащупывание») применяется упомянутая выше схема.

В случае взаимодополняющих (комплиментарных) товаров их рынки можно рассматривать независимо друг от друга. При этом состояние равновесия со стороны спроса в значительной мере определяется тем, какую долю своего дохода потребительский сектор выделяет на приобретение данного товара, а со стороны предложения оно зависит от тех объемов ресурсов, которые могут быть выделены на производство этого продукта.

Регулирование объема спроса осуществляется путем изменения указанной доли потребительского дохода.

Таким образом, при увеличении объема ресурсов со стороны производства цена равновесия при неизменном спросе уменьшается (кривая предложения соответствует фиксированному объему ресурса, а вторая кривая соответствует другому увеличенному объему ресурса).

Подобным же образом при неизменном предложении и увеличении доходов потребителей кривая спроса сдвигается вправо, и равновесная цена увеличивается.

Такие результаты можно использовать для разработки методов внерыночного регулирования, основанных на субсидиях и дотациях. В некоторых случаях существование равновесия не является само собой разумеющимся, и его реализация требует дополнительных усилий:

• ситуация, в которой производитель несет большие издержки в процессе производства и поэтому не может начать поставлять продукцию по цене, ниже обусловленной границы рентабельности. Однако эта цена оказывается весьма высокой для потребителей, и спрос оказывается меньше объемов производства, при которых оно рентабельно. В этой обстановке равновесия в узком смысле не существует, но есть равновесие в широком смысле (предложение больше спроса).

Положение может быть исправлено путем дотирования производителя, после чего кривая предложения перемещается налево, и может быть достигнута точка равновесия;

• случай дефицита, когда производство товара невелико и слабо реагирует на повышение цены, т.е. почти или полностью неэластично, а потребители готовы приобрести большое количество товара практически по любой цене. В области «разумных цен» нет равновесия ни в узком, ни в широком смысле. Напротив, имеет место дефицит товара. Равновесие может быть достигнуто либо путем резкого подъема производства, либо посредством резкого ограничения (рестрикции) доходов потребителей, например денежной реформой.

Свойства экономического равновесия на рынках многих товаров могут быть изучены с помощью модели замкнутой экономики.

6.3. Моделирование рыночных механизмов в условиях ограниченности ресурсов

Развитием модели «нащупывания» состояния равновесия является модель функционирования рынка, построенная на базе итерационного метода решения задач выпуклого программирования, суть которого состоит в следующем: рассматривается задача максимизации выпуклой вверх функции и n переменных

$$F(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) \to \max$$

при условиях

$$g_i(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m),$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n),$$

где функции $g_i(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ также выпуклые.

Решение задачи максимизации сводится к нахождению седловой точки функции Лагранжа, которое, в свою очередь, осуществляется путем применения итерационного процесса.

Итерационный процесс показывает, что он достаточно точно имитирует рыночный механизм достижения состояния равновесия при помощи изменения объемов спроса на блага и ресурсы, а также путем варьирования соответствующими ценами. Спрос потребителя на некоторое благо возрастает до тех пор, пока предельная полезность его превышает цену этого блага, которая, в свою очередь, возрастает, если спрос оказывается больше предложения блага со стороны производственного сектора.

Подобным же образом регулируется спрос производства на ресурсы: он возрастает, пока предельная эффективность ресурса больше его цены, т.е. предприятие имеет дополнительную прибыль от приобретения ресурса, и рост прекращается, когда эта прибыль становится нулевой. Цена ресурса также увеличивается, если спрос на него превышает предложение со стороны ресурсного сектора, а при достижении равенства спроса и предложения цена становится неизменной.

ОПИСАНИЕ КУРСА И ПРОГРАММА

1.1. ОПИСАНИЕ КУРСА

Название курса: **«Экономико-математические модели устойчивого развития сельского социума».**

Цели и задачи курса:

Курс предназначен для студентов, аспирантов аграрного факультета, а также практических работников в структурах агропромышленного комплекса.

Уровень обучения – дополнительное образование для слушателей, имеющих разные уровни обучения в направлениях и специальностях, желающих получить дополнительное образование.

Курс рассчитан на теоретическое и практическое обучение.

Инновационность курса:

Курс вводится впервые, поэтому предстоит работать над содержанием, методикой преподавания, подбором литературных источников, организацией учебного процесса и др.

Структура курса:

Темы лекций (аудиторных – 18 часов, самостоятельных – 18 часов):

1. Введение. Основные определения и типы моделей. Связь дисциплины с дисциплинами учебного плана.

2. Основные понятия корреляционного и регрессионного анализа. Параметры линейного однофакторного уравнения. Двухфакторные и многофакторные уравнения регрессии.

3. Модели распределения доходов. Отношение предпочтения и функция полезности. Функции спроса. Коэффициент эластичности.

4. Понятие производства и производственных функций. Изокванта и ее типы. Функции предложения и их свойства.

5. Оптимизационные задачи и оптимизационные модели. Оптимизационные задачи с линейной зависимостью между переменными.

6. Двойственная задача линейного программирования.

7. Свойства объективно обусловленных оценок и их анализ.

8. Обобщения и приложения модели производства.

9. Основы микроэкономического анализа рынка. Рыночное равновесие. Сравнительная статистика.

Темы практических занятий (аудиторных – 18 часов, самостоятельных – 18 часов):

1. Оценка величины погрешности линейного однофакторного уравнения.

2. Автокорреляция остатков. Критерий Дарбина-Уотсона.

3. Построение уравнения степенной регрессии.

4. Количественный подход к анализу полезности и спроса.

5. Решение задачи об оптимальном выборе потребителя.

6. Изменение цен и компенсация.

7. Оптимальная комбинация ресурсов.

8. Моделирование издержек и прибыли предприятия (фирмы).

9. Рассмотрение методов учета научно-технического прогресса.

10. Геометрическая интерпретация оптимизационных задач линейного программирования.

11. Симплексный метод решения оптимизационных задач линейного программирования. Пример их решения.

12. Решение оптимизационной задачи линейного программирования.

13. Решение двойственной задачи линейного программирования.

14. Разработка производственной программы предприятия (фирмы).

15. Транспортная задача.

16. Задачи оптимального смешения.

17. Моделирование процесса достижения равновесия. Моделирование рыночных механизмов в условиях ограниченности ресурсов.

18. Зачетное занятие.

Описание системы контроля знаний:

- *общие правила выполнения контрольных заданий:* слушатели выполняют не менее трех контрольных работ, за которые проставляются баллы в соответствии с принятой бально-рейтинговой или кредитно-модульной системами. Сдают на проверку рефераты, написанные в качестве самостоятельной работы по выбранной теме, отвечают устно на заданные вопросы;
- *примерные типы письменных работ и форм устного контроля:* темы контрольных работ и вопросы устного контроля соответствуют разделам изученного материала в период до проведения текущей аттестации слушателей;
- *шкала оценок, итоговые оценки:* бально-рейтинговая система предусматривает выставление оценки по сто бальному расчету, кредитно-модульная система предусматривает выставление баллов из расчета – один кредит – 36 баллов;
- *академическая этика, соблюдение авторских прав:* все ссылки в изучаемом материале снабжаются «адресами», в рассматриваемом материале указываются работы авторов, все случаи плагиата исключены.

ПРОГРАММА КУРСА

1. Цель и задачи дисциплины.

Вооружить будущих специалистов теоретическими знаниями и практическими навыками, необходимыми для:

- понимания методологии и закономерностей экономико-математического моделирования технологических процессов, которые необходимы для изучения разных сторон своего объекта, а также корреляционного и регрессионного анализа;
- знания производства и производственных функций, методик определения параметров линейного программирования, рыночного равновесия, сравнительной статики, а также оптимизационных задач с линейной зависимостью между переменными, математических моделей потребительского поведения и спроса, принципов моделирования прибыли предприятия (фирмы), оптимизационных задач и основ микроэкономического анализа рынка, методов учета научно-технического прогресса;
- умения проводить оценку величины погрешности линейного однофакторного уравнения, строить уравнение степенной регрессии, проводить количественный анализ полезности и спроса, решать задачи об оптимальном выборе потребителя, а также транспортные и оптимального смешения, моделировать издержки и прибыль предприятия (фирмы), процесс достижения равновесия, рыночных механизмов в условии ограниченности ресурсов.

2. Требования к уровню освоения содержания дисциплины.

Квалификационная характеристика специалиста предусматривает методологические требования к уровню освоения содержания всех дисциплин учебного плана. Они касаются трех аспектов: понимание, знание и умение.

Данная дисциплина в единой комплексной системе всех дисциплин должна изучаться слушателями в методическом аспекте таким образом, чтобы методологические требования были выполнены в соответствии с ее содержанием.

3. Объем дисциплины и виды учебной нагрузки.

Вид нагрузки	Всего часов	Период изучения
Лекции	18 ч.	В соотв. с расписанием
Практические занятия	18 ч.	
Семинары		
Лабораторные занятия		
Самостоятельная раб.	36 ч.	
Курсовая работа		
Реферат		
Расчетно-граф. раб.		
Другие виды работы		
Вид итогового контроля (зачет, экзамен)	Экзамен – 0,5 часа/чел. Группа 16 человек 8 ч.	
Итого	80 ч.	

4. Содержание разделов дисциплины.

4.1. Предмет и содержание курса.

Основные определения и типы моделей. Классификационные признаки.

Краткая историческая справка о создании основ дисциплины математической экономики и эконометрии, а также и об ее авторах.

4.2. Основы регрессионного анализа.

Понятие корреляционного и регрессионного анализа. Определение параметров линейного однофакторного уравнения регрессии. Оценка величины погрешности линейного однофакторного уравнения. Построение уравнения степенной регрессии. Двухфакторные и многофакторные уравнения регрессии.

4.3. Математические модели потребительского поведения и спроса.

Модели распределения доходов. Количественный подход к анализу полезности и спроса. Отношение предпочтения и функция полезности. Решение задач об оптимальном выборе потребителя. Функции спроса. Коэффициент эластичности. Изменение цен и компенсация.

4.4. Производственные функции.

Моделирование прибыли предприятия.

Понятие производства и производственных функций. Изокванта и ее типы. Функции предложения и их свойства. Моделирование издержек и прибыли предприятия (фирмы). Методы учета научно-технического прогресса.

4.5. Оптимизационные модели.

Понятие оптимизационных задач и оптимизационных моделей. Оптимизационные задачи с линейной зависимостью между переменными. Геометрическая интерпретация оптимизационных задач с линейной зависимостью между переменными. Симплексный метод решения таких задач. Двойственная задача линейного программирования. Решение такой задачи. Свойства объективно обусловленных оценок и их анализ. Разработка производственной программы предприятия (фирмы). Обобщения и приложения модели производства. Задачи оптимального раскроя материалов. Задачи оптимального смешения. Транспортная задача.

4.6. Основы микроэкономического анализа рынка.

Рыночное равновесие. Сравнительная статистика. Моделирование процесса достижения равновесия. Моделирование рыночных механизмов в условиях ограниченности ресурсов.

5. Рекомендованная литература.

Основная:

1. Калберг К. Бизнес анализ с помощью Excel /Пер. с англ.- Киев: Диалектика, 1997.

2. Лебедев В.В. Математическое моделирование социально-экономических процессов. – М.: Изограф, 1997.

3. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. – М.: Изд-во МГУ, 2004.

4. К.А.Багриновский, В.М.Матюшок. Экономико-математические методы и модели (микро экономика). – М.: Изд-во РУДН, 2006.

Дополнительная:

1. Матюшок В.М. Excel 7.0. Решение общих и экономических задач. – М.: Изд-во РУДН, 1997.

2. Экономико-математические методы и прикладные модели: Учеб. пособие. /Под ред. В.В.Федосеева. – М.: ЮНИТИ. – 2002.

3. Лопатников Л.И. Экономико-математический словарь. – М.: Дело, 2003.

4. Математические методы и модели в экономике: Учеб. пособие для вузов. /Под ред. проф. Орехова Н.А. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004.

УЧЕБНЫЙ ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН КУРСА

(календарный план, структурированный по видам учебных занятий)

Дни	**Лекции**	**Часов**	**Практические занятия**	**Часов**
1	Введение. Основные опред. и типы моделей.	1,5	Линейные однофакторные уравнения.	1,5
2	Понятие корреляционного и регрессионного анализа	1,5	Проблема автокорреляции остатков. Построение уравнения степенной регрессии.	1,5
3	Модели распределения доходов. Отношение предпочтения и функция полезности.	1,5	Количественный подход к анализу полезности и спроса.	1,5
4	Функции спроса. Коэффициент эластичности.	1,5	Решение задачи об оптимальном выборе потребителя.	1,5
5	Понятие производства и производственных функций.	1,5	Изменение цен и компенсация. Оптимальная комбинация ресурсов.	1,5

6	Изокванта и ее типы.	1,5	Моделирование издержек и прибыли предприятия. Методы учета научно-технического прогресса.	1,5
7	Функции предложения и их свойства.	1,5	Геометрическая интерпретация ОЗЛП. Симплексный метод решения ОЗЛП.	1,5
8	Понятие оптимизационных задач и оптимизационных моделей.	1,5	Пример решения ОЗЛП симплексным методом. Решение ОЗЛП в Excel.	1,5
9	Двойственная задача линейного программирования.	1,5	Решение двойственной задачи. Разработка производственной программы фирмы.	1,5
10	Свойства объективно обусловленных оценок и их анализ.	1,5	Задачи оптимального раскроя материалов. Транспортная задача.	1,5
11	Обобщения и приложения модели производства.	1,5	Моделирование процесса достижения равновесия.	1,5
12	Рыночное равновесие. Сравнительная статика.	1,5	Моделирование рыночных механизмов в условиях ограниченности ресурсов.	1,5
	ИТОГО	18	ИТОГО	18