

**ПРИОРИТЕТНЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ПРОЕКТ «ОБРАЗОВАНИЕ»
РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ**

**Л.А. СЕВАСТЬЯНОВ, К.П. ЛОВЕЦКИЙ, О.Н. БИКЕЕВ,
А.П. ГОРОБЕЦ, И.В. ХАВРУНЯК**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
И МЕТОДЫ РАСЧЕТА
ОПТИЧЕСКИХ НАНОСТРУКТУР**

Учебное пособие

Москва

2008

*Инновационная образовательная программа
Российского университета дружбы народов*

**«Создание комплекса инновационных образовательных программ
и формирование инновационной образовательной среды,
позволяющих эффективно реализовывать государственные интересы РФ
через систему экспорта образовательных услуг»**

Экспертное заключение –

доктор физико-математических наук, профессор *А.В. Крянев*

**Севастьянов Л.А., Ловецкий К.П., Бикеев О.Н.,
Горобец А.П., Хавруняк И.В.**

Математическое моделирование и методы расчета оптических наноструктур: Учеб. пособие. – М.: РУДН, 2008. – 159 с.

В пособии на основе методов и алгоритмов, развитых в предыдущих курсах магистерской программы, предлагаются схемы решения задач проектирования сложных периодических многослойных оптических покрытий для современных технологий солнечной энергетики, «умных» материалов, дисплейных покрытий с нетривиальными электромеханическими свойствами и т.п. Приводятся примеры решения актуальных научно-исследовательских и конструкторских разработок, пользующихся спросом, в том числе и у зарубежных производителей.

Для магистров и аспирантов, обучающихся по направлению «Прикладная математика и информатика».

Учебное пособие выполнено в рамках инновационной образовательной программы Российского университета дружбы народов, направление «Комплекс экспортноориентированных инновационных образовательных программ по приоритетным направлениям науки и технологий», и входит в состав учебно-методического комплекса, включающего описание курса, программу и электронный учебник.

© Севастьянов Л.А., Ловецкий К.П., Бикеев О.Н.,
Горобец А.П., Хавруняк И.В., 2008

Содержание

Общее описание курса	5
Иновационность курса	6
Тема 1. Уравнения Максвелла в диспергирующих средах	9
1.1. Уравнения поля в диэлектриках в отсутствие дисперсии	9
1.2. Дисперсия диэлектрической проницаемости	11
1.3. Диэлектрическая проницаемость при очень больших частотах	16
1.4. Энергия поля в диспергирующих средах	17
1.5. Аналитические свойства функции $\varepsilon(\omega)$	22
1.6. Плоская монохроматическая волна в среде с поглощением	28
1.7. Прозрачные среды	32
1.8. Пространственная дисперсия	35
Тема 2. Поляризация световых волн	41
2.1. Поляризация монохроматических плоских волн	42
2.2. Линейная и круговая поляризации	46
2.3. Представление комплексного параметра	47
2.4. Вектор Джонса	49
2.5. Оптическая матрица Джонса	53
Тема 3. Способы получения плоскополяризованного света	55
3.1. Поляризаторы	55
3.2. Принципы работы поляризационных оптических элементов	56
3.3. Контраст, эффективность и дихроичное отношение- характеристики поляризационных элементов	59
Тема 4. Методы расчета слоистых структур при известных оптических параметрах материалов	67
4.1. Обзор методов	67
4.2. Матричный метод Берремана	70
4.3. Расчет оптически толстых слоев	78
4.4. Изотропные пленки	78
4.5. Комбинированный метод	80
Тема 5. Расчет оптических элементов	82
5.1. Примеры оптических элементов	82
5.2. Примеры расчета оптических характеристик многослойных структур	86
Тема 6. Экспериментальные методы исследования оптических покрытий	89
6.1. Оптические приборы	90
6.2. Поляриметрия	91
6.3. Оптические характеристики материалов	95
6.4. Взаимодействие света с веществом	97
Приложение 1. Теория цветного зрения	104
Вычисление цветовых координат	106

Стандартные источники света CIE	110
Цветовые пространства	112
Пространство CIE LUV	113
Пространство CIE LU'V'	114
Пространство CIE LAB	114
Сравнение спектральных данных с трехкоординатными колориметрическими данными	115
Приложение 2. Решение оптической задачи для слоистых анизотропных сред	116
Теория и метод	118
Определение пропускания и отражения	122
Приложение 3. Электродинамика материалов с отрицательным коэффициентом преломления	124
Литература	136
Описание курса и программа	138

Общее описание курса

Курс «Математическое моделирование и методы расчета оптических наноструктур» является составной частью магистерской программы «Оптика наноструктур». Магистерская программа «Оптика наноструктур» реализуется в рамках направлений «Прикладная математика и информатика» и «Прикладная математика и физика», а возможно, и других направлений. В составе магистерской программы «Оптика наноструктур» курс «Математическое моделирование и методы расчета оптических наноструктур» является обязательным, привязанным к семестру. Для других магистерских программ этот курс может быть курсом по выбору без привязки к семестру или факультативным на усмотрение методической комиссии программы. Курс носит теоретический и практический характер.

Целью курса является подробное ознакомление студентов с устойчивыми современными методами численного решения математических задач, возникающих при изучении взаимодействия электромагнитного излучения в области светового диапазона с веществом, в особенности с наноструктурами. Эта область знаний особенно быстро развивается в последние годы в связи с широким применением наноэлементов и тонких (менее одного микрометра толщиной) пленок, используемых в производстве жидкокристаллических дисплеев, солнечных батарей на основе диэлектриков, фотоэмиссионных диодов, просветляющих покрытий, поляризаторов, миниатюрных лазеров, управляемых оптических элементов. Задачи оптики наноструктур практически не поддаются аналитическому решению, поэтому важным является не только освоение теоретического материала, но и изучение эффективных численных методов, используемых при решении данного класса задач, приобретение навыков создания программного обеспечения для численного моделирования различных оптических наноструктур.

Задачей курса «Математическое моделирование и методы расчета оптических наноструктур» является формирование у студентов навыков работы на современной измерительной аппаратуре, обучение использованию строгих методов связанных волн при решении задач моделирования современных оптических устройств на основе тонкопленочных покрытий и дифракционных оптических элементов. Это позволит учащимся при необходимости разрабатывать новое программное обеспечение. Безусловной задачей курса является также освоение существующего программного обеспечения, ориентированного на расчет и проектирование оптических покрытий. В результате обучения студенты получают умения и навыки правильно оценивать сложность научно-исследовательских и конструкторских заданий на разработку дифракционных оптических элементов и устройств, аргументированно выбирать метод решения конструкторской задачи, а затем экономично и эффективно выполнять компьютерный дизайн требуемого дифракционного оптического покрытия или устройства.

Инновационность курса

Курс является инновационным по содержанию и по литературе, он включает в себя последние научные достижения в области решения задач дифракционной оптики, когда характерные размеры исследуемых объектов не превышают либо сравнимы с длиной волны оптического излучения.

Для решения задач дифракции электромагнитной волны на микрообъектах применяются не только дифференциальные методы, которые были рассмотрены до этого, но и интегральные методы.

В ходе проведения занятий по этому курсу разработчики предполагают использование традиционных методик преподавания,

принятых в странах болонской системы образования, т.е. с использованием кредитной системы оценки знаний.

Наряду с традиционными элементами преподавания математических методов решения прикладных задач, разработчики курса предполагают воспользоваться хорошо зарекомендовавшим себя опытом МФТИ и подобных вузов. Для этого в рамках подпрограммы «Оптика наноструктур» осуществляется закупка уникального измерительного и аналитического оборудования для выполнения измерений разнообразных характеристик оптических наноустройств с целью использования этого оборудования в учебном процессе и для проведения научно-исследовательских работ преподавателями, аспирантами и студентами.

По окончании магистратуры по направлению «Оптика наноструктур» выпускники Российского университета дружбы народов станут конкурентоспособными специалистами в области проектирования современных оптических устройств, которые не будут испытывать затруднений при последующем трудоустройстве.

Направление научно-практических разработок в области численного моделирования оптических элементов сформировалось лишь в последние 10 – 15 лет. Поэтому наблюдается сильный дефицит учебно-методической литературы не только в России, но и во всем мире. Разрабатываемые в рамках инновационной программы «Оптика наноструктур» учебные пособия восполнят в некоторой степени этот пробел и составят основной список литературы для слушателей курсов. Вместе с ними следует использовать несколько учебников и монографий, вышедших в свет к настоящему времени и перечисленных в списке литературы. Курс базируется на публикациях научных статей мировых лидеров исследований в данной области в научной периодике, диссертационных работах их учеников, включающих работы по непосредственному

моделированию, дизайну и последующему изготовлению лабораторных образцов оптических элементов и устройств. В список дополнительной и рекомендуемой литературы включены все научно-исследовательские публикации, положенные в основу предлагаемого курса.

В качестве практических заданий, курсовых работ и тем рефератов слушателям магистерской программы будут предложены актуальные проблемы и задачи, решение которых востребовано современным уровнем развития высокотехнологичных отраслей промышленности и научно-исследовательских лабораторий.

Тема 1. Уравнения Максвелла в диспергирующих средах

1.1. Уравнения поля в диэлектриках в отсутствие дисперсии

Для достаточно низких частот связь между D и E , а также между B и H сводится к простой пропорциональности, так что можно полагать

$$D = \varepsilon E, \quad B = \mu H \quad (1.1)$$

со статическими значениями ε и μ , как в постоянном поле. Эти соотношения нарушаются (или, как говорят, появляется дисперсия ε и μ) при частотах, сравнимых с собственными частотами тех молекулярных или электронных колебаний, с которыми связано появление электрической или магнитной поляризации вещества. Порядок величины этих частот зависит от рода вещества и меняется в очень широких пределах [1]. Он может быть также совершенно различным для электрических и магнитных явлений.

Уравнения

$$\operatorname{div} B = 0, \quad (1.2)$$

$$\operatorname{rot} E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} \quad (1.3)$$

ни при каких условиях не нуждаются в изменении. Это же касается уравнения

$$\operatorname{div} D = 0. \quad (1.4)$$

Последнее уравнение можно записать (см. [1]) в виде:

$$\operatorname{rot} H = \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t}. \quad (1.5)$$

Это уравнение заменяет собой для диэлектриков первое из уравнений:

$$\operatorname{rot} H = \frac{4\pi}{c} E, \quad \operatorname{rot} E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}, \quad (1.6)$$

описывающих поле в металлах.

Уравнения (1.6) переменного электромагнитного поля в металлах справедливы при достаточно медленном изменении поля: частоты поля должны быть такими, чтобы оставались справедливыми зависимости j от E и B от H (если отличие E от H вообще существенно), относящиеся к стационарному случаю.

Есть, однако, особая категория тел (плохие проводники), для которых может иметь смысл уравнение (1.7):

$$\operatorname{rot} H = \frac{4\pi}{c} \sigma E + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E}{\partial t}. \quad (1.7)$$

В силу особых причин (малое число электронов проводимости в полупроводниках, малая подвижность ионов в растворах электролитов) проводимость этих веществ аномально мала, и потому второй член в правой стороне уравнения (1.7) может сравниться с первым или даже превзойти его уже при таких частотах, для которых можно еще считать σ и ε постоянными. В монохроматическом поле отношение второго члена к первому есть $\varepsilon\omega/4\pi\sigma$. Если это отношение мало, то тело ведет себя как обычный проводник с проводимостью σ (1.5). При частотах же $\omega \ll \pi\sigma/\varepsilon$ оно ведет себя как диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε [1].

В однородной среде с постоянными ε и μ уравнения (1.2) - (1.4) и (1.5) принимают вид

$$\operatorname{div} E = 0, \quad \operatorname{div} H = 0 \quad (1.8)$$

$$\operatorname{rot} E = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial H}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} H = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E}{\partial t} \quad (1.9)$$

Исключая из этих уравнений обычным образом E (или H), получим

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} H = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} E = -\frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}$$

и, поскольку $rot(rotH) = grad(divH) - \Delta H = -\Delta H$, то мы приходим к волновому уравнению:

$$\Delta H - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = 0.$$

Отсюда видно, что скорость распространения электромагнитных волн в однородной диэлектрической среде есть (см. также [2])

$$\frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (1.10)$$

Плотность потока энергии складывается из потока энергии электромагнитного поля и потока энергии, переносимой непосредственно движущимся веществом. В неподвижной среде (которую мы и рассматриваем) последняя часть отсутствует, и плотность потока энергии в диэлектрической среде дается той же формулой

$$S = \frac{c}{4\pi} [EH], \quad (1.11)$$

что и в металлах. В этом легко убедиться, вычислив $divS$. Используя уравнения (1.3) и (1.5), получим

$$divS = \frac{c}{4\pi} (H rot E - E rot H) = -\frac{1}{4\pi} \left(E \frac{\partial D}{\partial t} + H \frac{\partial B}{\partial t} \right). \quad (1.12)$$

1.2. Дисперсия диэлектрической проницаемости

Переменное во времени электромагнитное поле является переменным также и в пространстве. При частоте ω пространственная периодичность определяется длиной волны, порядок величины которой $\lambda \approx c/\omega$. При дальнейшем увеличении частоты λ становится в конце концов сравнимой с атомными размерами a . В таких условиях невозможно макроскопическое описание поля.

В связи с этим может возникнуть вопрос о том, существует ли вообще область значений частот, в которой, с одной стороны, уже

существенны дисперсионные явления, а с другой еще допустимо макроскопическое рассмотрение. *Такая область существует [1].*

*Предлагаемое рассмотрение в равной степени относится как к металлам, так и к диэлектрикам (см. [1]). При частотах же, соответствующих внутриатомным электронным движениям (оптические частоты), и более высоких фактически **исчезает даже количественное отличие в свойствах металлов и диэлектриков.***

Хотя формальный вид уравнений Максвелла остается таким же в произвольных переменных электромагнитных полях, эти уравнения

$$\operatorname{div} D = 0, \operatorname{div} B = 0 \quad (1.13)$$

$$\operatorname{rot} E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}, \operatorname{rot} H = \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t} \quad (1.14)$$

беспредметны до тех пор, пока не установлена связь между входящими в них величинами D , B и E , H . При больших частотах эта связь не имеет ничего общего с той, которая справедлива в статическом случае и которой мы пользовались [2] в переменных полях при отсутствии дисперсии.

Нарушается даже имевшееся ранее основное свойство этой связи — однозначная зависимость D и B от значений E и H в тот же момент времени. В общем случае произвольного переменного поля значения D и B в некоторый момент времени не определяются одними только значениями E и H в тот же момент времени. Но можно утверждать, что значения D и B в данный момент времени зависят от значений функций $E(t)$, $H(t)$ во все предыдущие моменты времени. Это обстоятельство является выражением того, что установление электрической или магнитной поляризации вещества не успевает следовать за изменением электромагнитного поля. (При этом частоты, при которых возникают дисперсионные явления в электрических и магнитных свойствах вещества, могут быть совершенно различными.)

Речь пойдет о зависимости D от E , специфические же особенности дисперсии магнитных свойств вещества не будут обсуждаться.

В любом переменном поле, в том числе при наличии дисперсии, вектор $P = (D - E)/4\pi$ имеет физический смысл электрического момента единицы объема вещества [1].

Вектор поляризации P может быть введен согласно определению $\rho = -\text{div}P$, где ρ — истинная (микроскопическая) плотность зарядов в веществе. Это равенство выражает собой электрическую нейтральность тела в целом, и его (вместе с условием $P = 0$ вне тела) достаточно для того, чтобы показать, что полный электрический момент тела равен интегралу $\int PdV$. Очевидно, что этот вывод относится к переменным полям в той же степени, что и к постоянным.

В быстропеременных полях обычно приходится иметь дело со сравнительно малыми напряженностями, тогда связь D с E можно считать линейной. Наиболее общий вид линейной зависимости между $D(t)$ и значениями функции $E(t)$ во все предыдущие моменты времени может быть написан в виде интегрального соотношения:

$$D(t) = E(t) + \int_0^{\infty} f(\tau) E(t - \tau) d\tau \quad (1.15)$$

(выделение члена $E(t)$ удобно для установления аналитичности $E(\omega)$ в верхней полуплоскости). Здесь $f(\tau)$ — функция времени, зависящая от свойств среды. По аналогии с формулой $D = \varepsilon E$ для электростатических и низкочастотных полей будем писать соотношение (1.15) в символической форме:

$$D = \hat{\varepsilon} E$$

где $\hat{\varepsilon}$ — линейный интегральный оператор, действие которого определяется согласно (1.15).

Переменное поле довольно общего вида [3] может быть сведено (путем разложения Фурье) к совокупности монохроматических компонент, в которых зависимость всех величин от времени дается множителем $e^{-i\omega t}$. Для таких полей связь (1.15) между D и E приобретает вид:

$$D = \varepsilon(\omega)E, \quad (1.16)$$

где функция $\varepsilon(\omega)$ определяется как

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \int_0^{\infty} f(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau. \quad (1.17)$$

Таким образом, для периодических полей может быть введено понятие о диэлектрической проницаемости как о коэффициенте пропорциональности между D и E , причем этот коэффициент зависит не только от свойств среды, но и от частоты поля. О функциональной зависимости ε от частоты говорят как о законе ее дисперсии.

Функция $\varepsilon(\omega)$, вообще говоря, комплексна. Будем обозначать ее вещественную и мнимую части как ε' и ε'' :

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega). \quad (1.18)$$

Из определения (1.17) непосредственно видно, что

$$\varepsilon(-\omega) = \varepsilon^*(\omega). \quad (1.19)$$

Отделяя в этом соотношении вещественную и мнимую части, получим

$$\varepsilon'(-\omega) = \varepsilon'(\omega), \quad \varepsilon''(-\omega) = -\varepsilon''(\omega). \quad (1.20)$$

Таким образом, $\varepsilon'(\omega)$ является четной, а $\varepsilon''(\omega)$ — нечетной функцией частоты.

При малых (по сравнению с границей начала дисперсии) частотах функцию $\varepsilon(\omega)$ можно разложить в ряд по степеням ω . Разложение четной функции $\varepsilon'(\omega)$ содержит члены лишь четных степеней, а разложение нечетной функции $\varepsilon''(\omega)$ — члены нечетных степеней. В пределе $\omega \rightarrow 0$ функция $\varepsilon(\omega)$ в диэлектриках стремится, разумеется, к электростатической диэлектрической проницаемости (которую обозначим

здесь как ε_0). Поэтому в диэлектриках разложение $\varepsilon'(\omega)$ начинается с постоянного члена ε_0 ; разложение же $\varepsilon''(\omega)$ начинается, вообще говоря, с члена, пропорционального ω .

Функцию $\varepsilon(\omega)$ при малых частотах можно рассматривать и в металлах, если условиться определять ее так, чтобы в пределе $\omega \rightarrow 0$ уравнение

$$\operatorname{rot} H = \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t}$$

переходило бы в уравнение

$$\operatorname{rot} H = \frac{4\pi}{c} \sigma E$$

для постоянного поля в проводниках. Сравнив оба уравнения, видим, что при $\omega \rightarrow 0$ производная $\partial D / \partial t$ должна переходить в $4\pi\sigma E$. Но в периодическом поле $\partial D / \partial t = -i\omega\varepsilon E$ (см. [1]), и мы приходим к следующему предельному выражению для $\varepsilon(\omega)$ при малых частотах:

$$\varepsilon(\omega) = i \frac{4\pi\sigma}{\omega}. \quad (1.21)$$

Таким образом, в проводниках разложение функции $\varepsilon(\omega)$ начинается с мнимого члена, пропорционального $1/\omega$, который выражается через обычную проводимость σ по отношению к постоянным токам. Следующий член разложения $\varepsilon(\omega)$ является вещественной постоянной. Эта постоянная, однако, не имеет у металлов того электростатического смысла, которым она обладает у диэлектриков. Кроме того, надо снова указать, что этот член разложения может оказаться не имеющим никакого вообще смысла, если эффекты пространственной неоднородности поля электромагнитной волны появляются раньше, чем эффекты его временной периодичности.

1.3. Диэлектрическая проницаемость при очень больших частотах

В пределе $\omega \rightarrow \infty$ функция $\varepsilon(\omega)$ стремится к единице. Это очевидно уже из простых физических соображений: при достаточно быстром изменении поля процессы поляризации, приводящие к установлению отличной от E индукции D , вообще не успевают происходить.

Оказывается возможным установить справедливый для любых тел (безразлично - металлов или диэлектриков) предельный вид функции $\varepsilon(\omega)$ при больших частотах. Именно частота поля должна быть велика по сравнению с частотами движения всех (или, по крайней мере, большинства) электронов в атомах данного вещества. При соблюдении этого условия можно при вычислении поляризации вещества рассматривать электроны как свободные, пренебрегая их взаимодействием друг с другом и с ядрами атомов.

Скорости v движения электронов в атомах малы по сравнению со скоростью света. Поэтому расстояния v/ω , проходимые ими в течение периода волны, малы по сравнению с длиной волны c/ω . Ввиду этого при определении скорости, приобретаемой электроном в поле электромагнитной волны, можно считать последнее однородным.

Уравнение движения гласит:

$$m \frac{dv'}{dt} = eE = eE_0 e^{-i\omega t}$$

(e , m — заряд и масса электрона, v' — дополнительная скорость, приобретаемая электроном в поле волны); отсюда $v' = ieE / m\omega$. Смещение же r электрона под влиянием поля связано с v' посредством $\dot{r} = v'$; поэтому $r = -eE / m\omega^2$. Поляризация P вещества есть дипольный момент единицы его объема. Суммируя по всем электронам, находим

$$P = \sum er = -\frac{e^2}{m\omega^2} NE,$$

где N — число электронов во всех атомах единицы объема вещества. С другой стороны, по определению электрической индукции, $D = \varepsilon E = E + 4\pi P$. Поэтому окончательно получаем следующую формулу:

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{4\pi Ne^2}{m\omega^2}. \quad (1.22)$$

Фактическая область применимости этой формулы начинается от далекого ультрафиолета у самых легких элементов или от рентгеновских частот у более тяжелых элементов.

Для сохранения у величины $\varepsilon(\omega)$ буквального смысла, с которым она входит в уравнения Максвелла, частота должна еще удовлетворять условию $\omega \ll c/a$. Однако выражению (1.22) может быть приписан определенный физический смысл и при больших частотах [1].

1.4. Энергия поля в диспергирующих средах

Формула

$$S = \frac{c}{4\pi} [EH] \quad (1.23)$$

для плотности потока энергии остается справедливой в любых переменных электромагнитных полях, в том числе и при наличии дисперсии. Это вытекает из *следующих* соображений: ввиду непрерывности тангенциальных составляющих E и H из условия непрерывности нормальной составляющей S на границе тела и из того, что она справедлива в пустоте вне тела однозначно следует формула (1.23).

Изменение в единицу времени энергии, сосредоточенной в единице объема тела, вычисляется как $div S$. С помощью уравнений Максвелла это выражение приводится к виду:

$$-div S = \frac{1}{4\pi} \left(E \frac{\partial D}{\partial t} + H \frac{\partial B}{\partial t} \right). \quad (1.24)$$

В диэлектрической среде в отсутствие дисперсии, когда ε и μ являются вещественными постоянными величинами, эту величину можно рассматривать как изменение электромагнитной энергии имеющей

$$U = \frac{1}{8\pi} (\varepsilon E^2 + \mu H^2) \quad (1.25)$$

термодинамический смысл [1]. При наличии дисперсии такое толкование уже невозможно.

Выражение для дисперсии энергии для монохроматического электромагнитного поля можно написать также в виде [1]:

$$Q = \frac{\omega}{4\pi} (\varepsilon'' \bar{E}^2 + \mu'' \bar{H}^2), \quad (1.26)$$

где E и H — вещественные напряженности поля, а черта означает усреднение по времени.

Можно получить также формулу, определяющую диссипацию энергии в немонохроматическом поле, достаточно быстро обращающемся в нуль при $t \rightarrow \pm\infty$. В этом случае имеет смысл рассматривать диссипацию не в единицу времени, а за все время существования поля.

А именно можно получить соотношение:

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q dt = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega [\varepsilon''(\omega) |E_\omega|^2 + \mu''(\omega) |H_\omega|^2] \frac{d\omega}{2\pi} \quad (1.27)$$

(интеграл от $-\infty$ до ∞ может быть заменен удвоенным интегралом от 0 до ∞).

Полученные формулы показывают, что поглощение (диссипация) энергии определяется мнимыми частями ε и μ ; о двух членах в (1.26) говорят соответственно как об электрических и магнитных потерях. В силу закона возрастания энтропии эти потери имеют вполне определенный знак: диссипация энергии сопровождается выделением тепла, т. е. всегда $Q > 0$. Отсюда следует, что мнимые части ε и μ всегда положительны:

$$\varepsilon'' > 0, \mu'' > 0 \quad (1.28)$$

для всех веществ и при всех (положительных) частотах. Знак же вещественных частей ε и μ (при $\omega=0$) не ограничен никакими физическими условиями, так что ε' и μ' могут быть как положительными, так и отрицательными.

Всякий нестационарный процесс в реальном веществе всегда в той или иной степени термодинамически необратим. Поэтому электрические и магнитные потери в переменном электромагнитном поле всегда имеются. Другими словами, функции $\varepsilon''(\omega)$ и $\mu''(\omega)$ не обращаются строго в нуль ни при каком отличном от нуля значении частоты. Это утверждение имеет принципиальное значение, хотя им ни в какой мере не исключается возможность существования таких областей частот, при которых потери становятся относительно весьма малыми.

Области частот, в которых ε'' и μ'' очень малы (по сравнению с ε' и μ'), называют областями прозрачности вещества. Пренебрегая поглощением, в этих областях оказывается возможным ввести понятие о внутренней энергии тела в электромагнитном поле в том же смысле, какой она имеет в постоянном поле.

Для определения этой величины недостаточно рассматривать чисто монохроматическое поле, так как благодаря его строгой периодичности в нем не происходит никакого систематического накопления электромагнитной энергии. Поэтому рассмотрим поле, представляющее собой совокупность монохроматических компонент с частотами в узком интервале вокруг некоторого среднего значения ω_0 . Напряженности такого поля можно написать в виде:

$$E = E_0(t)e^{-i\omega_0 t}, \quad H = H_0(t)e^{-i\omega_0 t}, \quad (1.29)$$

где $E_0(t)$, $H_0(t)$ — медленно (по сравнению с множителем $e^{-i\omega_0 t}$) меняющиеся функции времени. Вещественные части этих выражений должны быть подставлены в правую сторону (1.24), после чего произведем

усреднение по времени по периоду $2\pi/\omega_0$, малому по сравнению с временем изменения множителей E_0 и H_0 . Первый член в (1.24) после перехода к комплексному представлению E принимает вид:

$$\frac{1}{4\pi} \frac{E + E^*}{2} \frac{\dot{D} + \dot{D}^*}{2}$$

(и аналогично для второго члена). Произведения $E\dot{D}$ и $E^*\dot{D}^*$ исчезнут при указанном усреднении по времени, и потому их вообще не надо рассматривать. Таким образом, остается лишь

$$\frac{1}{16\pi} \left(E \frac{\partial D^*}{\partial t} + E^* \frac{\partial D}{\partial t} \right). \quad (1.30)$$

Напишем производную $\partial D/\partial t$ в виде $\hat{f}E$, где \hat{f} обозначает оператор:

$$\hat{f} = \frac{\partial}{\partial t} \hat{\epsilon}$$

и выясним, к какому результату приводит действие этого оператора на функцию вида (1.29). Если бы E_0 была постоянной, то мы имели бы просто

$$\hat{f}E = f(\omega), \quad f(\omega) = -i\omega\epsilon(\omega).$$

В нашем же случае произведем разложение Фурье функции $E_0(t)$, представив ее в виде наложения компонент вида $E_{0\alpha}e^{-i\alpha t}$ с постоянными $E_{0\alpha}$. Медленность изменения $E_0(t)$ означает, что в это разложение войдут лишь компоненты с $\alpha \ll \omega_0$. Имея это в виду, пишем:

$$\hat{f}E_{0\alpha}e^{-i(\omega_0+\alpha)t} = f(\alpha + \omega_0)E_{0\alpha}e^{-i(\omega_0+\alpha)t} \approx \left[f(\omega_0) + \alpha \frac{df(\omega_0)}{d\omega_0} \right] E_{0\alpha}e^{-i(\omega_0+\alpha)t}.$$

Произведя теперь обратное суммирование компонент Фурье, получим

$$\hat{f}E_0(t)e^{-i\omega_0 t} = f(\omega_0)E_0e^{-i\omega_0 t} + i\frac{df(\omega_0)}{d\omega_0}\frac{\partial E_0}{\partial t}e^{-i\omega_0 t}.$$

Опуская ниже индекс 0 у ω_0 , имеем таким образом:

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -i\omega\mathcal{E}(\omega)E + \frac{d(\omega\mathcal{E})}{d\omega}\frac{\partial E_0}{\partial t}e^{-i\omega t} \quad (1.31)$$

Подставив это выражение в (1.30) и помня, что мнимой частью функции $\mathcal{E}(\omega)$ мы пренебрегаем, получим

$$\frac{1}{16\pi}\frac{d(\omega\mathcal{E})}{d\omega}\left(E_0^*\frac{\partial E_0}{\partial t} + E_0\frac{\partial E_0^*}{\partial t}\right) = \frac{1}{16\pi}\frac{d(\omega\mathcal{E})}{d\omega}\frac{\partial}{\partial t}(EE^*)$$

(произведение $E_0E_0^*$ совпадает с EE^*). Прибавив аналогичное выражение с магнитным полем, приходим к выводу, что скорость систематического изменения энергии 1 см³ среды дается производной dU/dt , где

$$\bar{U} = \frac{1}{16\pi}\left[\frac{d(\omega\mathcal{E})}{d\omega}EE^* + \frac{d(\omega\mu)}{d\omega}HH^*\right]. \quad (1.32)$$

С помощью вещественных напряженностей E и H это выражение можно записать в виде:

$$\bar{U} = \frac{1}{8\pi}\left[\frac{d(\omega\mathcal{E})}{d\omega}\overline{E^2} + \frac{d(\omega\mu)}{d\omega}\overline{H^2}\right]. \quad (1.33)$$

Это и есть искомый результат: \bar{U} есть среднее значение электромагнитной части внутренней энергии единицы объема прозрачной среды. При отсутствии дисперсии ϵ и μ постоянны, и (1.33) переходит, как и должно быть, в среднее значение выражения (1.25).

Если подвод электромагнитной энергии к телу извне прекращается, то фактически всегда имеющееся хотя бы очень малое поглощение приведет в конце концов к переходу всей энергии \bar{U} в тепло. Поскольку, согласно закону возрастания энтропии, это тепло должно именно выделяться, а не поглощаться, то должно быть $\bar{U} > 0$. Согласно формуле (1.32) для этого должны выполняться неравенства:

$$\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} > 0, \quad \frac{d(\omega\mu)}{d\omega} > 0. \quad (1.34)$$

В действительности эти условия автоматически выполняются как следствие более сильных неравенств, которым всегда удовлетворяют функции $\varepsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$ в областях прозрачности.

1.5. Аналитические свойства функции $\varepsilon(\omega)$

Функция $f(\tau)$ в (1.15) конечна при всех значениях своего аргумента, в том числе и при $\tau = 0$. У диэлектриков эта функция стремится при $\tau \rightarrow \infty$ к нулю. Это обстоятельство является следствием того факта, что на значение $D(t)$ в заданный момент времени не могут заметно влиять значения $E(t)$ в очень давние моменты. Физический механизм, лежащий в основе интегральной зависимости вида (1.15), заключается в процессах установления электрической поляризации. Поэтому интервал значений, в котором функция $f(\tau)$ заметно отличается от нуля,— порядка величины времени релаксации, характеризующего скорость этих процессов.

Сказанное относится и к металлам, с той лишь разницей, что стремится к нулю при $\tau \rightarrow \infty$ не сама функция $f(\tau)$, а разность $f(\tau) - 4\pi\sigma$ [1]. Это отличие связано с тем, что уже прохождение стационарного тока проводимости хотя и не приводит к какому-либо реальному изменению физического состояния металла, но в наших уравнениях формально означает появление индукции D согласно

$$\frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \sigma E,$$

или

$$D(t) = \int_{-\infty}^t 4\pi\sigma E(\tau) d\tau = 4\pi\sigma \int_0^{\infty} E(t-\tau) d\tau.$$

Функция $\varepsilon(\omega)$ была определена согласно (1.17):

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \int_0^{\infty} e^{i\omega\tau} f(\tau) d\tau. \quad (1.35)$$

Оказывается возможным выяснить некоторые весьма общие свойства этой функции, рассматривая ω как комплексную переменную $\omega = \omega' + i\omega''$.

Из определения (1.35) и из указанных выше свойств функции $f(\tau)$ следует, что во всей верхней полуплоскости $\varepsilon(\omega)$ является однозначной функцией, нигде не обращающейся в бесконечность, т. е. не имеющей никаких особых точек. Действительно, при $\omega'' > 0$ в подынтегральном выражении в формуле (1.35) имеется экспоненциально убывающий множитель $e^{-\omega''\tau}$, а поскольку и функция $f(\tau)$ конечна во всей области интегрирования, то интеграл сходится. Функция $\varepsilon(\omega)$ не имеет особенностей и на самой вещественной оси ($\omega'' = 0$), за исключением, возможно, лишь начала координат (у металлов $\varepsilon(\omega)$ имеет в этой точке простой полюс).

В нижней же полуплоскости определение (1.35) неприменимо, так как интеграл расходится. Поэтому функция $\varepsilon(\omega)$ в нижней полуплоскости может быть определена лишь как аналитическое продолжение формулы (1.35) из верхней полуплоскости. В этой области функция $\varepsilon(\omega)$ имеет, вообще говоря, особые точки. Функция $\varepsilon(\omega)$ в верхней полуплоскости имеет не только формальный математический, но и физический смысл: ею определяется связь между D и E для полей с возрастающей (как $e^{\omega''t}$) амплитудой. В нижней же полуплоскости такое физическое истолкование невозможно уже хотя бы потому, что наличие затухающего (как $\exp(-|\omega''|t)$) поля предполагает его бесконечную величину при $t \rightarrow -\infty$.

Обратим внимание на то, что вывод об отсутствии особых точек у функции $\varepsilon(\omega)$ в верхней полуплоскости является с физической точки

зрения следствием принципа причинности. Последний проявляется в том, что интегрирование в (1.15) производится лишь по времени, предшествующему данному моменту t , в результате чего в формуле (1.35) область интегрирования распространяется от 0 до ∞ (а не от $-\infty$ до $+\infty$).

Из определения (1.35) очевидно, далее, что

$$\varepsilon(-\omega^*) = \varepsilon^*(\omega). \quad (1.36)$$

Это обобщение соотношения (1.19), относящегося к вещественным значениям ω . В частности, для чисто мнимых значений ω имеем

$$\varepsilon(i\omega'') = \varepsilon^*(i\omega''). \quad (1.37)$$

Это значит, что на верхней мнимой полуоси функция $\varepsilon(\omega)$ вещественна.

Подчеркнем, что свойство (1.36) выражает собой просто тот факт, что операторная связь $D = \varepsilon E$ должна обеспечивать вещественность D при вещественном E . Если функция $E(t)$ дается вещественным выражением

$$E = E_0 e^{-i\omega t} + E_0^* e^{-i\omega^* t} \quad (1.38)$$

то, применяя оператор ε к каждому из двух членов, получим

$$D = \varepsilon(\omega) E_0 e^{-i\omega t} + \varepsilon(-\omega^*) E_0^* e^{-i\omega^* t};$$

условие вещественности этой величины совпадает с (1.36).

Согласно (1.28) мнимая часть $\varepsilon(\omega)$ положительна при положительных вещественных значениях $\omega = \omega'$, т. е. на правой части вещественной оси. Поскольку, согласно (1.36), $\text{Im} \varepsilon(-\omega') = -\text{Im} \varepsilon(\omega')$, то на левой части этой оси мнимая часть $\varepsilon(\omega)$ отрицательна. Таким образом,

$$\left. \begin{array}{l} \text{Im} \varepsilon > 0 \text{ при } \omega = \omega' > 0, \\ \text{Im} \varepsilon < 0 \text{ при } \omega = \omega' < 0. \end{array} \right\} \quad (1.39)$$

В точке же $\omega = 0$ функция $\text{Im} \varepsilon$ меняет знак, проходя через нуль (у диэлектриков) или через бесконечность (у металлов). Это — единственная точка на вещественной оси, в которой $\text{Im} \varepsilon(\omega)$ может обратиться в нуль.

При стремлении ω к бесконечности по любому пути (в верхней полуплоскости) функция $\varepsilon(\omega)$ стремится к единице. Это обстоятельство было указано в пункте 1.3 для случая, когда $\omega \rightarrow \infty$ вдоль вещественной оси. В общем случае это видно из той же формулы (1.35): если $\omega \rightarrow \infty$ так, что $\omega'' \rightarrow \infty$, то интеграл в (1.35) обращается в нуль благодаря наличию в подынтегральном выражении множителя $\exp(-\tau\omega'')$; если же ω'' остается конечным, а $|\omega'| \rightarrow \infty$, то обращение интеграла в нуль происходит благодаря наличию осциллирующего множителя $e^{i\omega'\tau}$.

Перечисленных свойств функции $\varepsilon(\omega)$ достаточно для того, чтобы доказать следующую теорему.

Теорема[1]. Функция $\varepsilon(\omega)$ не принимает вещественных значений ни в какой конечной точке верхней полуплоскости, за исключением лишь точек мнимой оси; на последней же $\varepsilon(\omega)$ монотонно убывает от значения $\varepsilon_0 > 1$ (у диэлектриков) или от $+\infty$ (у металлов) при $\omega = i0$ до 1 при $\omega = i\infty$. Отсюда следует, в частности, что функция $\varepsilon(\omega)$ не имеет нулей в верхней полуплоскости.

Выпишем формулы, связывающие друг с другом мнимую и вещественную части функции $\varepsilon(\omega)$.

Напишем функцию $\varepsilon(\omega)$ вещественной переменной ω в виде $\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega)$. Если функция $\varepsilon(\omega)$ относится к диэлектрику, указанные соотношения гласят:

$$\varepsilon'(\omega) - 1 = \frac{1}{\pi} V.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon''(x)}{x - \omega} dx, \quad (1.40)$$

$$\varepsilon''(\omega) = -\frac{1}{\pi} V.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon'(x)}{x - \omega} dx, \quad (1.41)$$

где $V.p.$ перед знаком интеграла означает, что интеграл понимается в смысле его главного значения. Эти выражения (1.40) - (1.41) обычно

называют соотношениями Крамерса — Кронига. Напомним, что единственным существенным свойством функции $\varepsilon(\omega)$, использованным при выводе этих формул, является отсутствие особых точек в верхней полуплоскости. Поэтому можно сказать, что формулы Крамерса—Кронига (как и указанное свойство функции $\varepsilon(\omega)$) являются прямым следствием физического принципа причинности. Воспользовавшись нечетностью функции $\varepsilon''(\omega)$, можно привести формулу (1.40) к виду

$$\varepsilon'(\omega) - 1 = \frac{2}{\pi} V.p. \int_0^{\infty} \frac{x \varepsilon''(x)}{x^2 - \omega^2} dx. \quad (1.42)$$

Если речь идет о проводнике, то в точке $\omega = 0$ функция $\varepsilon(\omega)$ имеет полюс, вблизи которого $\varepsilon = 4\pi\sigma i / \omega$ (1.21). Это приводит к появлению в формуле (1.41) дополнительного члена [1]:

$$\varepsilon''(\omega) = -\frac{1}{\pi} V.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon'(x)}{x - \omega} dx + \frac{4\pi\sigma}{\omega}, \quad (1.43)$$

формула же (1.40) или (1.42) остается неизменной. Кроме того, в случае металлов надо сделать еще следующее замечание.

В [1] показано, что у металлов могут существовать области частот, в которых функция $\varepsilon(\omega)$ теряет свой физический смысл в связи с эффектами пространственной неоднородности поля. Между тем, в рассматриваемых формулах интегрирование должно вестись по всем частотам. В таких случаях под $\varepsilon(\omega)$ в соответствующих областях частот надо понимать функцию, получающуюся в результате решения формальной задачи о поведении тела в фиктивном пространственно однородном периодическом электрическом поле (а не в неизбежно неоднородном поле электромагнитной волны).

Особенно существенна формула (1.42). Она дает возможность вычислить функцию $\varepsilon'(\omega)$, если известна хотя бы приближенным (например, эмпирическим) образом функция $\varepsilon''(\omega)$ для данного тела. При

этом существенно, что для любой функции $\varepsilon''(\omega)$, удовлетворяющей физически необходимому требованию $\varepsilon'' > 0$ при $\omega > 0$, формула (1.42) дает функцию $\varepsilon'(\omega)$, не противоречащую никаким необходимым физическим требованиям, т. е. принципиально возможную (знак и величина ε' не ограничиваются никакими общими физическими условиями). Это обстоятельство и дает возможность использовать формулу (1.42) даже по приближенной функции $\varepsilon''(\omega)$. Напротив, формула (1.41) не дает (в общем случае произвольной функции $\varepsilon'(\omega)$) физически возможной функции $\varepsilon''(\omega)$, так как не обеспечивает автоматическим образом положительность последней.

Можно получить формулу, выражающую значения $\varepsilon(\omega)$ на верхней мнимой полуоси через значения $\varepsilon''(\omega)$ на вещественной оси. Эта формула имеет вид:

$$\varepsilon(i\omega) - 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x\varepsilon''(x)}{x^2 + \omega^2} dx. \quad (1.44)$$

Если проинтегрировать это соотношение с обеих сторон по ω , то получается

$$\int_0^{\infty} [\varepsilon(i\omega) - 1] d\omega = \int_0^{\infty} \varepsilon''(\omega) d\omega. \quad (1.45)$$

Все изложенные результаты (с небольшим лишь видоизменением) относятся и к магнитной проницаемости $\mu(\omega)$. Отличие связано прежде всего с тем, что при увеличении частоты функция $\mu(\omega)$ сравнительно рано теряет физический смысл. Поэтому, например, применять формулы Крамерса — Кронига к $\mu(\omega)$ надо следующим образом. Вместо бесконечного рассматриваем конечный интервал значений ω (от 0 до ω_1), простирающийся до таких частот, при которых μ еще имеет смысл, но уже перестает меняться и ее мнимую часть можно считать равной нулю;

соответствующее вещественное значение μ обозначим как μ_1 . Тогда формулу (1.42) надо писать в виде:

$$\mu'(\omega) - \mu_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\omega} \frac{x\mu''(x)}{x^2 - \omega^2} dx. \quad (1.46)$$

В противоположность ε_0 , значение $\mu_0 = \mu(0)$ может быть как меньше, так и больше 1. Изменение же $\mu(\omega)$ вдоль мнимой оси по-прежнему является монотонным убыванием — на этот раз от μ_0 до $\mu_1 < \mu_0$.

Наконец, отметим, что аналитическими свойствами, установленными в этом параграфе для функции $\varepsilon(\omega)$, в равной степени обладает и функция $\eta(\omega) \equiv 1/\varepsilon(\omega)$. Так, аналитичность $\eta(\omega)$ в верхней полуплоскости следует из аналитичности и отсутствия нулей у функции $\varepsilon(\omega)$ в этой полуплоскости. Для функции $\eta(\omega)$ справедливы те же соотношения Крамерса—Кронига (1.40) - (1.41), что и для $\varepsilon(\omega)$.

1.6. Плоская монохроматическая волна в среде с поглощением

Уравнения Максвелла (77,2) для монохроматического поля гласят:

$$i\omega\mu(\omega)H = c \operatorname{rot} E, \quad i\omega\varepsilon(\omega)E = -c \operatorname{rot} H. \quad (1.47)$$

Эти уравнения сами по себе составляют полную систему, так как уравнения (1.13) следуют из них автоматически и потому не должны рассматриваться отдельно. Предполагая среду однородной и исключив из этих уравнений H (или E), получим уравнение второго порядка:

$$\Delta E + \varepsilon\mu \frac{\omega^2}{c^2} E = 0 \quad (1.48)$$

(и такое же уравнение для H).

Рассмотрим плоскую электромагнитную волну, распространяющуюся в неограниченной однородной среде. В плоской волне в пустоте зависимость поля от координат дается множителем вида

e^{ikr} с вещественным волновым вектором k . При рассмотрении же распространения волн в материальных средах в общем случае оказывается необходимым вводить также и комплексные значения:

$$k = k' + ik'',$$

где k' , k'' — вещественные векторы.

Положив E и H пропорциональными e^{ikr} и произведя в уравнениях (1.47) дифференцирование по координатам, получим

$$\omega\mu H = c[kE], \quad \omega\epsilon E = -c[kH]. \quad (1.49)$$

Исключив из этих двух соотношений E или H , найдем следующее выражение для квадрата волнового вектора:

$$k^2 \equiv k'^2 - k''^2 + 2ik'k'' = \epsilon\mu \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (1.50)$$

Мы видим, что k может быть вещественным, только если ϵ и μ вещественны и положительны. Но даже и в этом случае k может все же быть комплексным, причем только должно быть $k'k'' = 0$.

Следует иметь в виду, что в общем случае комплексных k волна может быть названа «плоской» лишь в условном смысле. Написав

$$e^{ikr} = e^{ik'r} e^{-k''r},$$

видим, что плоскости, перпендикулярные к вектору k' , являются плоскостями постоянной фазы. Плоскостями же постоянной амплитуды являются плоскости, перпендикулярные к вектору k'' , в направлении которого происходит затухание волны. *Что же касается поверхностей постоянного значения самого поля, то они в общем случае вообще не будут плоскими. Такие волны называют неоднородными плоскими волнами, в отличие от обычных однородных плоских волн.*

Связь между компонентами электрического и магнитного полей в общем случае дается формулами (1.49). В частности, умножив эти формулы скалярно на k , получим

$$kE = 0, \quad kH = 0, \quad (1.51)$$

а возводя какую-либо из них в квадрат и используя (1.50), найдем

$$E^2 = \frac{\mu}{\varepsilon} H^2. \quad (1.52)$$

Следует, однако, помнить, что ввиду комплексности всех трех векторов k , E , H эти соотношения в общем случае не имеют того наглядного смысла, который они имели бы для вещественных величин.

Не останавливаясь на громоздких соотношениях, получающихся в общем случае, рассмотрим наиболее важные частные случаи.

Особенно простые результаты получаются для волны, распространяющейся без затухания в непоглощающей (прозрачной) однородной среде. Волновой вектор в этом случае веществен и по величине равен:

$$k = \sqrt{\varepsilon\mu} \frac{\omega}{c} = n \frac{\omega}{c}, \quad (1.53)$$

где $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ называется показателем преломления среды. Как электрическое, так и магнитное поля лежат в плоскости, перпендикулярной к вектору k (чисто поперечная волна), причем перпендикулярны друг к другу и связаны соотношением

$$H = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} [1E] \quad (1.54)$$

(1 —единичный вектор в направлении k). Отсюда следует, что $\varepsilon EE^* = \mu HH^*$. Это, однако, не означает равенства электрической и магнитной энергий в волне (как в отсутствие дисперсии), поскольку последние даются другими выражениями (два члена в формуле (1.32)). Суммарную плотность электромагнитной энергии в этом случае можно привести к виду:

$$\bar{U} = \frac{1}{16\pi\mu\omega} \frac{d}{d\omega} (\omega^2 \varepsilon\mu) EE^* = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{dk}{d\omega} EE^*. \quad (1.55)$$

Скорость u распространения волны в среде определяется известным выражением групповой скорости:

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{d(n\omega)/d\omega} \quad (1.56)$$

При этом $u = \bar{S}/\bar{U}$, в соответствии с ее смыслом как скорости переноса энергии в волновом пакете; здесь \bar{U} — плотность энергии, даваемая формулой (1.55), а

$$\bar{S} = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} EE^* \quad (1.57)$$

— среднее значение вектора Пойнтинга. В отсутствие дисперсии, когда показатель преломления не зависит от частоты, выражение (1.56) сводится просто к c/n (сравни с выражением (1.10)).

Далее рассмотрим более общий случай распространения электромагнитной волны в поглощающей среде, причем *волновой вектор имеет определенное направление, т. е. k' и k'' параллельны друг другу.* Такая волна является плоской в буквальном смысле, так как поверхностями постоянных значений поля в ней являются плоскости, перпендикулярные к направлению распространения (однородная плоская волна).

В этом случае можно ввести комплексную «длину» k волнового вектора согласно $k = k \cdot 1$ (где 1-единичный вектор в направлении k' и k'') и из (1.50) имеем $k = \sqrt{\epsilon\mu}\omega/c$. Комплексную величину $\sqrt{\epsilon\mu}$ обычно пишут в виде $n + ix$ с вещественными n и x , так что

$$k = \sqrt{\epsilon\mu} \frac{\omega}{c} = (n + ik) \frac{\omega}{c}. \quad (1.58)$$

Величину n называют показателем преломления, а k -коэффициентом поглощения среды; последний определяет скорость затухания волны по мере ее распространения. Подчеркнем, однако, что затухание волны не обязательно связано с наличием истинного поглощения; диссипация энергии имеет место лишь при комплексных ϵ

или μ , а коэффициент κ может быть отличным от нуля и при вещественных (отрицательных) ε и μ .

Выразим величины n и κ через вещественную и мнимую части диэлектрической постоянной, предполагая при этом, что $\mu=1$. Из равенства $n^2 - \kappa^2 + 2in\kappa = \varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$ имеем

$$n^2 - \kappa^2 = \varepsilon', \quad 2n\kappa = \varepsilon''.$$

Решая эти уравнения относительно n и κ , получим

$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon' + \sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2}}{2}}, \quad \kappa = \sqrt{\frac{-\varepsilon' + \sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2}}{2}}. \quad (1.59)$$

В частности, для металлов в области частот, где справедлива формула (77,9), мнимая часть ε велика по сравнению с вещественной частью и связана с проводимостью посредством $\varepsilon'' = 4\pi\sigma/\omega$; пренебрегая ε' по сравнению с ε'' , найдем, что n и κ совпадают и равны:

$$n = \kappa = \sqrt{\frac{2\pi a}{\omega}}. \quad (1.60)$$

Для связи между полями E и H в рассматриваемой однородной плоской волне снова получаем формулу (1.54), но только с комплексными ε и μ . Она снова показывает, что оба поля перпендикулярны к направлению распространения волны и друг к другу. Если $\mu=1$, то, написав $\sqrt{\varepsilon}$ в виде

$$\sqrt{\varepsilon} = \sqrt{n^2 + \kappa^2} \exp[i \operatorname{arctg}(\kappa/n)],$$

видим, что магнитное поле по абсолютной величине превышает электрическое в $\sqrt{n^2 + \kappa^2}$ раз, а по фазе отстает от него на угол $\operatorname{arctg}(\kappa/n)$; в случае (1.60) сдвиг фаз равен $\pi/4$.

1.7. Прозрачные среды

Применим полученные выше общие формулы к слабопоглощающим (в данной области частот) средам, т. е. будем предполагать, что для этих

частот мнимой частью диэлектрической проницаемости можно пренебречь.

В таком случае в формуле (1.42) взятие главного значения становится излишним, так как точка $x = \omega$ фактически выпадает из области интегрирования. После этого интеграл можно дифференцировать по параметру ω , как обычный интеграл, не имеющий особенностей в подынтегральном выражении. Произведя такое дифференцирование, получим

$$\frac{d\varepsilon}{d\omega} = \frac{4\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x\varepsilon''(x)dx}{(\omega^2 - x^2)^2}.$$

Ввиду положительности подынтегрального выражения во всей области интегрирования приходим к выводу, что

$$\frac{d\varepsilon(\omega)}{d\omega} > 0, \quad (1.61)$$

т. е. в области отсутствия поглощения диэлектрическая проницаемость — монотонно возрастающая функция частоты.

Аналогичным образом, в той же области частот получается еще и другое неравенство:

$$\frac{d}{d\omega} [\omega^2(\varepsilon - 1)] = \frac{4\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x^3\varepsilon''(x)}{(x^2 - \omega^2)^2} dx > 0,$$

или

$$\frac{d\varepsilon}{d\omega} > \frac{2(1 - \varepsilon)}{\omega}. \quad (1.62)$$

Если $\varepsilon < 1$ или даже отрицательна, то это неравенство сильнее неравенства (1.61).

Отметим, что неравенства (1.61) и (1.62) (и аналогичные — для $\mu(\omega)$) автоматически гарантируют выполнение неравенства $u < c$ для скорости распространения волн. Так, при $\mu = 1$ имеем $n = \sqrt{\varepsilon}$ и, вводя n вместо ε в (1.61) и (1.62), получим

$$\frac{d(n\omega)}{d\omega} > n, \quad \frac{d(n\omega)}{d\omega} > \frac{1}{n}. \quad (1.63)$$

Поэтому для скорости u (1.56) получаются два неравенства; $u < c/n$ и $u < cn$, откуда видно, что $u < c$ как при $n > 1$, так и при $n < 1$. Эти неравенства показывают также, что $u > 0$, т.е. групповая скорость направлена в ту же сторону, что и волновой вектор. Это ее свойство вполне естественно, хотя с чисто логической точки зрения отнюдь не обязательно.

Предположим, что область слабого поглощения простирается в некотором широком интервале частот от ω_1 до ω_2 (причем $\omega_2 \gg \omega_1$), и рассмотрим частоты ω такие, что $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2$. Область интегрирования в (1.42) разбивается на две части: $x < \omega_1$ и $x > \omega_2$. В первой из них можно пренебречь в знаменателе подынтегрального выражения величиной x по сравнению с ω , а во второй — ω по сравнению с x :

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{2}{\pi} \int_{\omega_2}^{\infty} \varepsilon''(x) \frac{dx}{x} - \frac{2}{\pi\omega^2} \int_0^{\omega_1} x \varepsilon''(x) dx, \quad (1.64)$$

т. е. функция $\varepsilon(\omega)$ в рассматриваемой области имеет вид $a - b/\omega^2$, где a и b - положительные постоянные. Вторую из них можно выразить через силу осцилляторов $N_1 = \frac{m}{2\pi^2 e^2} \int_0^{\infty} \omega \varepsilon''(\omega) d\omega$, ответственных за поглощение в области от 0 до ω_1 , и тогда

$$\varepsilon(\omega) = a - \frac{4\pi N_1 e^2}{m\omega^2}. \quad (1.65)$$

Пусть, наконец, в широкой области прозрачности имеется узкая область («линия») поглощения вокруг некоторой частоты ω_0 . Рассмотрим окрестность этой частоты, удовлетворяющую условию:

$$\gamma \ll |\omega - \omega_0| \ll \omega_0, \quad (1.66)$$

где γ — ширина линии. В этой области в подынтегральном выражении в (82,6) можно заменить x на ω_0 везде, кроме быстроменяющейся функции $\varepsilon''(x)$. Тогда получим

$$\varepsilon(\omega) \approx \varepsilon'(\omega) \approx \frac{1}{\pi(\omega_0 - \omega)} \int \varepsilon''(x) dx, \quad (1.67)$$

где интегрирование производится по линии поглощения.

1.8. Пространственная дисперсия

До сих пор при обсуждении диэлектрических свойств вещества мы предполагали, что значение индукции $D(t, r)$ определяется значениями напряженности электрического поля $E(t', r)$ в той же точке пространства r , хотя (при наличии дисперсии) и не только в тот же, но и во все предшествующие моменты времени $t' \leq t$. Такое предположение справедливо не всегда. В общем случае значение $D(t, r)$ зависит от значений $E(t', r')$ в некоторой области пространства вокруг точки r . Линейная связь D с E записывается тогда в виде, обобщающем выражение (1.15):

$$D_i(t, r) = E_i(t, r) + \int_0^{\infty} \int f_{ik}(\tau; r, r') E_k(t - \tau, r') dV' d\tau. \quad (1.68)$$

Она представлена здесь сразу в форме, относящейся и к анизотропной среде. Такая нелокальная связь служит проявлением, как говорят, пространственной дисперсии (в этой связи обычную (рассмотренную в пункте 1.2) дисперсию называют временной или частотной). Для монохроматических компонент поля, зависимость которых от t дается множителями $e^{-i\omega t}$, эта связь принимает вид:

$$D_i(r) = E_i(r) + \int f_{ik}(\omega, r, r') E_k(r') dV'. \quad (1.69)$$

Отметим сразу, что в большинстве случаев пространственная дисперсия играет гораздо меньшую роль, чем временная. Дело в том, что

для обычных диэлектриков ядро f_{ik} интегрального оператора существенно убывает уже на расстояниях $|r-r'|$, больших только по сравнению с атомными размерами a . Между тем макроскопические поля, усредненные по физически бесконечно малым элементам объема, по определению должны мало меняться на расстояниях $\sim a$. В первом приближении можно тогда вынести $E(r') \approx E(r)$ из-под знака интеграла по dV' в (1.68), в результате чего вернемся к (1.15). В таких случаях пространственная дисперсия может проявиться только в качестве малых поправок. Но эти поправки, как увидим, могут приводить к качественно новым физическим явлениям и потому быть существенными.

При учете пространственной дисперсии представляется целесообразным, не умаляя степени общности теории, писать уравнения Максвелла в виде:

$$\operatorname{rot} E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}, \operatorname{div} B = 0 \quad (1.70)$$

$$\operatorname{rot} B = \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t}, \operatorname{div} D = 0, \quad (1.71)$$

не вводя величину H . Вместо этого все члены, возникающие в результате усреднения микроскопических токов, предполагаются включенными в определение D .

Компоненты тензора $f_{ik}(\omega, r, r')$ — ядра интегрального оператора в (1.69) — удовлетворяют соотношениям симметрии:

$$f_{ik}(\omega, r, r') = f_{ki}(\omega, r, r'). \quad (1.72)$$

Обычно рассматривают неограниченную макроскопически однородную среду. В таком случае ядро интегрального оператора в (1.68) или (1.69) зависит только от разности $\rho = r - r'$. Функции D и E целесообразно разложить тогда в интеграл Фурье не только по времени, но и по координатам, сведя их к совокупности плоских волн, зависимость

которых от r и t дается множителем $\exp[i(kr - \omega t)]$. Для таких волн связь D и E принимает вид

$$D_i = \varepsilon_{ik}(\omega, k) E_k, \quad (1.73)$$

где

$$\varepsilon_{ik}(\omega, k) = \delta_{ik} + \int_0^\infty \int f_{ik}(\tau, \rho) e^{i(\omega\tau - k\rho)} d^3\rho d\tau. \quad (1.74)$$

В таком описании пространственная дисперсия сводится к появлению зависимости тензора диэлектрической проницаемости от волнового вектора.

«Длина волны» $1/k$ определяет расстояния, на которых поле существенно меняется. Можно сказать поэтому, что пространственная дисперсия является выражением зависимости макроскопических свойств вещества от пространственной неоднородности электромагнитного поля, подобно тому, как частотная дисперсия выражает зависимость от временного изменения поля. При $k \rightarrow 0$ поле стремится к однородному, соответственно чему $\varepsilon_{ik}(\omega, k)$ стремится к обычной проницаемости $\varepsilon_{ik}(\omega)$.

Из определения (1.74) видно, что

$$\varepsilon_{ik}(-\omega, -k) = \varepsilon_{ik}^*(\omega, k) \quad (1.75)$$

— соотношение, обобщающее (1.19). Симметрия же (1.72), выраженная в терминах функций $\varepsilon_{ik}(\omega, k)$, дает теперь

$$\varepsilon_{ik}(\omega, k; \mathbf{H}) = \varepsilon_{ki}(\omega, -k; -\mathbf{H}), \quad (1.76)$$

где в явном виде выписан параметр \mathbf{H} — внешнее магнитное поле, если таковое имеется. Если среда обладает центром инверсии, компоненты ε_{ik} являются четными функциями вектора k ; аксиальный же вектор при инверсии не меняется, и потому равенство (103,10) сводится к

$$\varepsilon_{ik}(\omega, k; \mathbf{H}) = \varepsilon_{ki}(\omega, k; -\mathbf{H}). \quad (1.77)$$

Пространственная дисперсия не сказывается на выводе формулы для диссипации энергии. Поэтому условие отсутствия поглощения по-прежнему выражается эрмитовостью тензора $\varepsilon_{ik}(\omega, k)$.

При наличии пространственной дисперсии диэлектрическая проницаемость является тензором (а не скаляром) даже в изотропной среде: выделенное направление создается волновым вектором. Если среда не только изотропна, но обладает также и центром инверсии, тензор ε_{ik} может быть составлен только из компонент вектора k и единичного тензора δ_{ik} (при отсутствии центра симметрии может стать возможным также и член с единичным антисимметричным тензором e_{ikl}). Общий вид такого тензора можно записать как

$$\varepsilon_{ik}(\omega, k) = \varepsilon_l(\omega, k) \left(\delta_{ik} - \frac{k_i k_k}{k^2} \right) + \varepsilon_l(\omega, k) \frac{k_i k_k}{k^2}, \quad (1.78)$$

где ε_l и ε_t зависят только от абсолютной величины волнового вектора (и от ω). Если напряженность E направлена по волновому вектору, то индукция $D = \varepsilon_l E$; если же $E \perp k$, то $D = \varepsilon_t E$.

Более точно: зависимость от k исчезает при $kr_0 \ll 1$, где r_0 — размеры области, в которой $f_{ik}(\omega, \rho)$ существенно отлично от нуля.

Соответственно величины ε_l и ε_t называют продольной и поперечной проницаемостями. При $k \rightarrow 0$ выражение (1.78) должно стремиться к значению $\varepsilon(\omega)\delta_{ik}$ не зависящему от направления k ; ясно поэтому, что

$$\varepsilon_l(\omega, 0) = \varepsilon_t(\omega, 0) = \varepsilon(\omega). \quad (1.79)$$

Описание электромагнитных свойств изотропной среды с помощью проницаемостей ε_l и ε_t отвечает уравнениям Максвелла, представленным в виде (1.70)-(1.71). С другой стороны, при $k \rightarrow 0$, когда пространственная дисперсия исчезает, можно вернуться к описанию с помощью проницаемостей ε и μ . Поэтому между теми и другими величинами существует определенная связь.

Аналогия между формулами (1.74) и (1.17) позволяет перенести на каждую из компонент $\varepsilon_{ik}(\omega, k)$ как функцию комплексной переменной ω

результаты исследования аналитических свойств, произведенного в разделе 5.2. Они являются аналитическими функциями, не имеющими особенностей в верхней полуплоскости ω , и удовлетворяют (при каждом фиксированном значении k) дисперсионным соотношениям Крамерса — Кронига. То же самое относится и к функциям $\varepsilon_l(\omega, k)$ и $\varepsilon_t(\omega, k)$ в (1.78). При этом надо иметь в виду, что функция ε_l при $k \neq 0$ не стремится при $\omega \rightarrow 0$ к бесконечности даже в проводящей среде, и потому вычитание (которое было необходимо при выводе (1.43)) здесь не требуется; обращение $\varepsilon(\omega)$ в проводнике в бесконечность при $\omega \rightarrow 0$ связано с однородностью ($k = 0$) статического поля.

Средняя по времени плотность энергии электромагнитного поля в прозрачной среде с пространственной дисперсией выражается прежней формулой; поскольку теперь $\mu \equiv 1$, то

$$\bar{U} = \frac{1}{16\pi} \left[\frac{\partial(\omega \varepsilon_{ik})}{\partial \omega} E_i E_k^* + |B|^2 \right] \quad (1.80)$$

(E и B предполагаются представленными в комплексном виде). В плотности же потока энергии в такой среде появляется дополнительный член:

$$\bar{S} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}[E \cdot B] - \frac{\omega}{16\pi} \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial k} E_i^* E_k. \quad (1.81)$$

Эта формула выводится путем обобщения вывода формулы (80,11): теперь надо рассматривать волну, размытую как по небольшому интервалу частот, так и по направлениям волнового вектора.

Представленная в данном разделе модель пространственной дисперсии может служить базой для изложения и понимания искусственной пространственной дисперсии композитных оптических материалов. Примером таких конструкций являются дифракционные решетки, простейший пример которой приведен в [2]. Многочисленные нетривиальные примеры многослойных одномерных дифракционных

решеток изучены в [4]. В конце данного учебного пособия приведена модель оптических метаматериалов с отрицательными диэлектрической и магнитной проницаемостями. Естественных примеров таких материалов нет, однако в нескольких научных лабораториях материалы с такими свойствами синтезированы искусственным способом. И, наконец, в [5] приведена математическая модель фотонных кристаллов, которые также относятся к искусственным оптическим композитным материалам.

Тема 2. Поляризация световых волн

Поля **E** и **H**, описывающие световые волны, являются векторными величинами. В [2] было показано, что при распространении плоской монохроматической волны в изотропной однородной среде вектор электрического поля лежит в плоскости, перпендикулярной направлению распространения. Во многих случаях характер распространения световых волн существенно зависит от направления колебаний электрического поля. Действительно, в данном учебном пособии мы будем изучать главным образом распространение поляризованного света и вопросы, связанные с его управлением. Вначале мы напомним различные характеристики поляризованного света и опишем ряд методов, применяемых при изучении его распространения.

Световые волны представляют собой электромагнитное поле, для полного описания которого требуются четыре основных векторных поля: **E, H, D** и **B**. Для определения состояния поляризации световых волн используется вектор электрического поля. Такой выбор связан с тем, что в большинстве оптических сред физические взаимодействия с волной осуществляются через электрическое поле. Основным интерес к изучению поляризации световых волн обусловлен тем, что во многих веществах (анизотропные среды) показатель преломления зависит от направления колебаний вектора электрического поля **E**. Это явление можно объяснить движением электронов, которые раскачиваются электрическим полем световых волн.

Для иллюстрации этого предположим, что анизотропное вещество состоит из несферических иглообразных молекул, причем все молекулы ориентированы таким образом, что их большие оси параллельны друг другу. Пусть в таком веществе распространяется электромагнитная волна.

Вследствие анизотропной структуры молекул электрическое поле, параллельное осям молекул, будет сильнее смещать электроны вещества относительно их равновесного положения, чем электрическое поле, перпендикулярное осям молекул. Поэтому в первом случае следует ожидать более сильной вынужденной поляризации электронов, чем во втором.

С поляризацией световых волн связано много других физических явлений. Прежде чем перейти к изучению этих оптических явлений, необходимо выяснить свойства поляризованных волн. Начнем рассмотрение с обзора состояний поляризации монохроматических плоских волн.

2.1. Поляризация монохроматических плоских волн

Поляризация световых волн определяется вектором электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ в фиксированной точке пространства \mathbf{r} в момент времени t . Поскольку вектор электрического поля монохроматической волны \mathbf{E} изменяется во времени по синусоидальному закону, колебания электрического поля должны происходить с определенной частотой. Если предположить, что свет распространяется в направлении оси z , то вектор электрического поля будет располагаться в плоскости xu . Поскольку x - и y -составляющая вектора поля могут колебаться независимо с определенной частотой, сначала следует рассмотреть эффекты, связанные с векторным сложением этих двух осциллирующих ортогональных составляющих.

Задача о сложении двух независимых ортогональных колебаний с некоторой частотой хорошо известна и полностью аналогична задаче о классическом движении двумерного гармонического осциллятора. В общем случае такой осциллятор движется по эллипсу, который отвечает

несфазированным колебаниям x - и y - составляющих. Существует, конечно, много частных случаев, имеющих большое значение в оптике. Начнем с рассмотрения общих свойств излучения с эллиптической поляризацией, а затем обсудим ряд частных случаев.

В представлении комплексных функций вектор электрического поля монохроматической плоской волны, распространяющейся в направлении оси z , дается выражением:

$$\mathbf{E}(z, t) = \operatorname{Re} \left[\mathbf{A} e^{i(\omega t - kz)} \right], \quad (2.1)$$

где \mathbf{A} — комплексный вектор в плоскости xu . Выясним теперь, что представляет собой кривая, которую описывает в некоторой точке пространства конец вектора электрического поля \mathbf{E} . Эта кривая дает эволюцию во времени положения точки с координатами (E_x, E_y) :

$$\begin{aligned} E_x &= A_x \cos(\omega t - kz + \delta_x) \\ E_y &= A_y \cos(\omega t - kz + \delta_y), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где комплексный вектор \mathbf{A} определен следующим образом:

$$\mathbf{A} = \hat{x} A_x e^{i\delta_x} + \hat{y} A_y e^{i\delta_y}; \quad (2.3)$$

здесь A_x и A_y — положительные числа, а \hat{x} и \hat{y} — единичные векторы. Кривую, описываемую концом вектора электрического поля во времени, можно получить, если из уравнения (2.2) исключить $(\omega t - kz)$. После простых алгебраических преобразований получаем

$$\left(\frac{E_x}{A_x} \right)^2 + \left(\frac{E_y}{A_y} \right)^2 - 2 \frac{\cos \delta}{A_x A_y} E_x E_y = \sin^2 \delta, \quad (2.4)$$

где

$$\delta = \delta_y - \delta_x. \quad (2.5)$$

Любой фазовый угол здесь удовлетворяет условию $-\pi < \delta \leq \pi$. Уравнение (2.4) описывает кривую второго порядка. Из выражений (2.2) очевидно, что эта кривая ограничена прямоугольной областью со

сторонами, параллельными координатным осям и имеющими размеры $2A_x$ и $2A_y$. Следовательно, такая кривая должна быть эллипсом. В этом случае говорят, что волна, определяемая выражением (2.1), является эллиптически поляризованной.

Для полного описания эллиптической поляризации требуется знать направление вращения вектора \mathbf{E} , ориентацию эллипса относительно осей координат и его форму. В общем случае направление главных осей эллипса не совпадает с направлениями осей x и y . Соответствующее преобразование системы координат (вращение) позволяет диагонализировать уравнение (2.4). Рассмотрим новую систему координат с осями x' и y' , направленными вдоль главных осей эллипса. В этой новой системе координат уравнение эллипса принимает вид:

$$\left(\frac{E_x}{a}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{b}\right)^2 = 1, \quad (2.6)$$

где a и b - главные оси эллипса, а E_x и E_y - составляющие вектора электрического поля в этих координатах.

Пусть $\psi (0 \leq \psi < \pi)$ - угол между направлением главной оси эллипса x' и осью x (рис.1). Тогда длины главных осей эллипса определяются выражениями:

$$\begin{aligned} a^2 &= A_x^2 \cos^2 \psi + A_y^2 \sin^2 \psi + 2A_x \cos \delta \cos \psi \sin \psi, \\ b^2 &= A_x^2 \sin^2 \psi + A_y^2 \cos^2 \psi - 2A_x \cos \delta \cos \psi \sin \psi. \end{aligned} \quad (2.7)$$

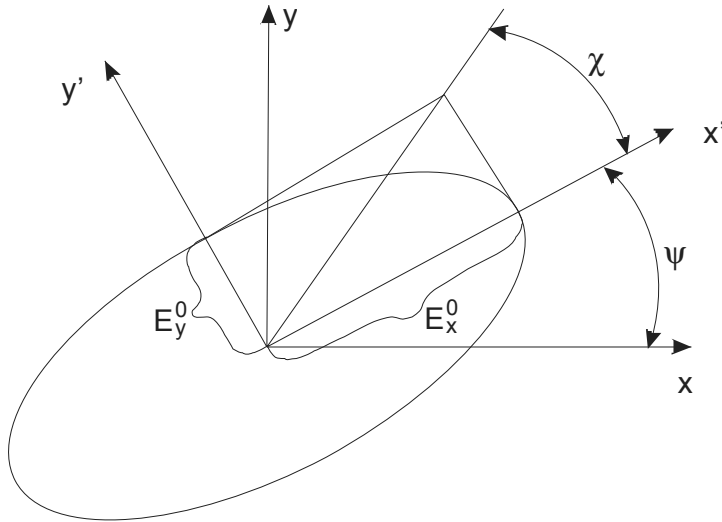


Рис.1. Эллипс поляризации

Угол ψ можно выразить через A_x, A_y и $\cos \delta$ следующим образом:

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{2A_x A_y}{A_x^2 - A_y^2} \cos \delta. \quad (2.8)$$

Направление вращения эллиптической поляризации определяется знаком $\sin \delta$. При $\sin \delta > 0$ конец вектора электрического поля будет вращаться по часовой стрелке, а при $\sin \delta < 0$ — против часовой стрелки. Рис. 2 иллюстрирует характер изменения эллипса поляризации в зависимости от разности фаз δ .

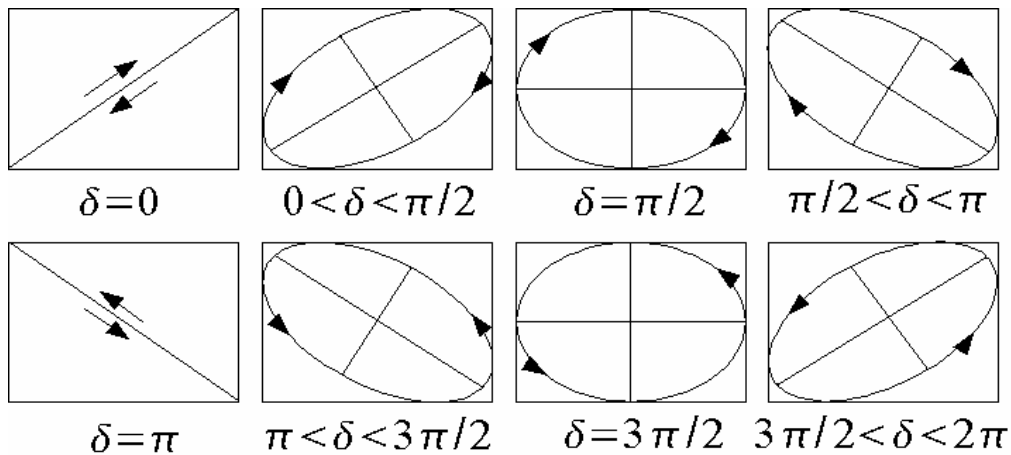


Рис.2. Эллипсы поляризации в зависимости от разности фаз

Прежде чем перейти к рассмотрению некоторых частных случаев поляризации, дадим ряд определений. Свет называется линейно-поляризованным, если конец вектора электрического поля \mathbf{E}

перемещается вдоль прямой линии. В случае, когда конец этого вектора описывает эллипс, свет называется эллиптически поляризованным, а в случае, когда он описывает окружность, — циркулярно поляризованным. Если конец электрического вектора перемещается против часовой стрелки для наблюдателя, расположенного перед волной, то поле обладает правой поляризацией. На рис. 2 показано также направление вращения эллипса поляризации. Наше определение правой и левой поляризации согласуется с терминологией современной физики, в которой фотон с правой круговой поляризацией имеет положительный момент импульса в направлении распространения. Однако в некоторых книгах по оптике используется противоположное соглашение.

2.2. Линейная и круговая поляризации

Особенно большое значение имеют два частных случая, когда эллипс поляризации вырождается либо в прямую линию, либо в окружность. В соответствии с выражениями (2.4) эллипс вырождается в прямую линию, когда

$$\delta = \delta_y - \delta_x = m\pi \quad (m = 0, 1). \quad (2.9)$$

Напомним, что все фазы по определению изменяются в интервале $-\pi < \delta \leq \pi$. В этом случае отношение составляющих вектора электрического поля остается постоянным:

$$\frac{E_y}{E_x} = (-1)^m \frac{A_y}{A_x}, \quad (2.10)$$

и свет является линейно-поляризованным.

Другой важный частный случай отвечает циркулярно-поляризованной волне или волне с круговой поляризацией. В соответствии с (2.4) и (2.7) эллипс вырождается в окружность, когда

$$\delta = \delta_y - \delta_x = \pm \frac{1}{2} \pi \quad (2.11)$$

и

$$A_y = A_x. \quad (2.12)$$

Согласно нашему определению, свет является правоциркулярно-поляризованным — при $\delta = -(1/2)\pi$, что соответствует вращению вектора электрического поля против часовой стрелки, и левоциркулярно-поляризованным при $\delta = (1/2)\pi$, что отвечает вращению вектора электрического поля по часовой стрелке. Эллиптичность эллипса поляризации характеризуется параметром

$$e = \pm \frac{b}{a}, \quad (2.13)$$

где a и b - длины главных осей. Эллиптичность считается положительной, если вращение вектора электрического поля является правосторонним, и отрицательной в противоположном случае.

2.3. Представление комплексного параметра

В предыдущем разделе было показано, как состояние поляризации световой волны можно описать с помощью амплитуд и фазовых углов для x - и y -составляющих вектора электрического поля. Оказывается, что вся информация о поляризации волны содержится в комплексной амплитуде \mathbf{A} плоской волны (2.1). Следовательно, для описания состояния поляризации достаточно использовать комплексный параметр χ , определяемый выражением:

$$\chi = e^{i\delta} \operatorname{tg} \psi = \frac{A_y}{A_x} e^{i(\delta_y - \delta_x)}, \quad (2.14)$$

где угол ψ по определению заключен в интервале от 0 до $\pi/2$. Параметры δ и ψ позволяют получить полное описание эллипса поляризации, для чего требуется задать его ориентацию, направление вращения и эллиптичность [см. (2.13)]. На рис. 3 изображены различные состояния поляризации в комплексной плоскости. Можно видеть, что все правые

эллиптические состояния поляризации расположены в нижней полуплоскости, а состояниям с левой эллиптической поляризацией отвечает верхняя полуплоскость. Начало координат отвечает состоянию с линейной поляризацией, параллельной оси x .

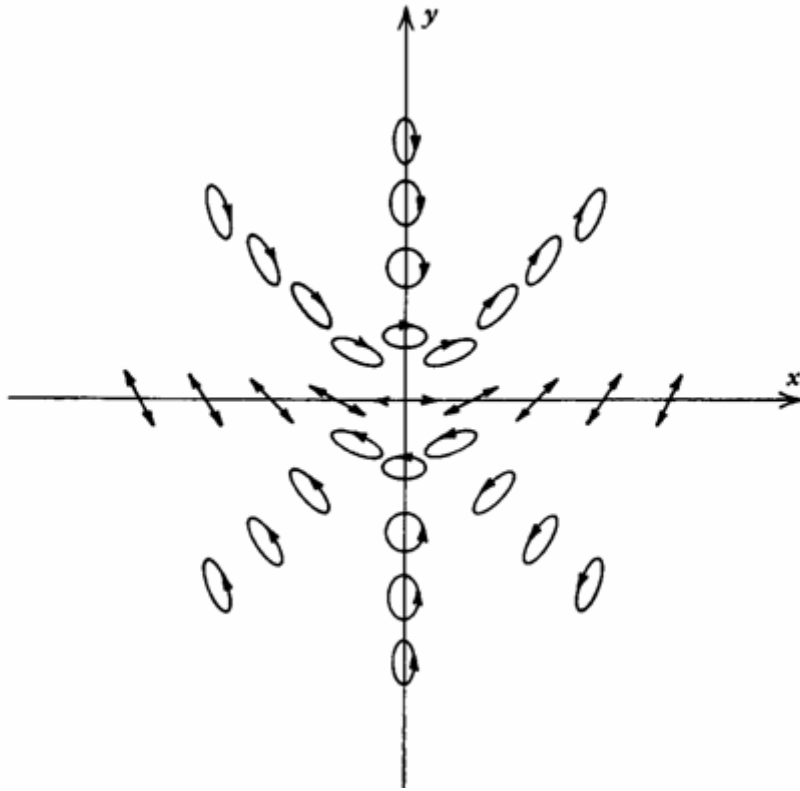


Рис. 3. Представление состояний поляризации на комплексной плоскости

Таким образом, любая точка комплексной плоскости соответствует одному состоянию поляризации. Каждая точка на оси x отвечает состояниям с линейной поляризацией, но с различными азимутальными углами колебаний. Круговой поляризации отвечают только две точки с координатами $(0,+1)$ и $(0,-1)$. Все остальные точки комплексной плоскости соответствуют состояниям с определенной эллиптической поляризацией. Угол наклона ϕ и угол эллиптичности θ ($\theta = \arctg e$), отвечающие данному эллипсу поляризации, связаны с комплексным параметром χ следующим образом:

$$\operatorname{tg} 2\phi = \frac{2 \operatorname{Re}[\chi]}{1 - |\chi|^2} \quad (2.15)$$

и

$$\sin 2\theta = -\frac{2 \operatorname{Im}[\chi]}{1 + |\chi|^2}. \quad (2.16)$$

2.4. Вектор Джонса

Поляризацию плоской волны можно достаточно хорошо представить с помощью вектора Джонса, введенного в 1941 г. Р. Джонсом [6]. В этом представлении плоская волна (2.1) описывается вектор-столбцом, составленным из ее комплексных амплитуд:

$$J = \begin{pmatrix} A_x e^{i\delta_x} \\ A_y e^{i\delta_y} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что вектор Джонса является комплексным, т. е. его элементы задаются комплексными числами. Кроме того, J не является вектором в реальном физическом пространстве. Он представляет собой вектор в абстрактном математическом пространстве. Например, для получения вещественной величины x -составляющей электрического поля необходимо выполнить операцию $\operatorname{Re}[J_x e^{i\omega t}] = \operatorname{Re}[A_x e^{i(\omega t + \delta_x)}]$.

Вектор Джонса содержит полную информацию об амплитудах и фазах составляющих вектора электрического поля. Если нас интересует только состояние поляризации волны, то удобно пользоваться нормированным вектором Джонса, который удовлетворяет условию:

$$J^* \square J = 1, \quad (2.17)$$

звездочка (*) означает комплексное сопряжение. Таким образом, линейно-поляризованная световая волна с данным направлением вектора электрического поля может быть представлена вектором Джонса

$$\begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

где ψ — азимутальный угол между направлением поляризации и осью x . Состояние поляризации, которое ортогонально состоянию поляризации, описываемому вектором (2.18), можно получить заменой ψ на $\psi + \pi/2$, что приводит к вектору Джонса:

$$\begin{pmatrix} -\sin \psi \\ \cos \psi \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Частный случай $\psi = 0$ соответствует линейно-поляризованным волнам, вектор электрического поля которых колеблется вдоль осей координат. Векторы Джонса при этом имеют вид:

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Световые волны с правой и левой круговой поляризацией описываются векторами Джонса

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

$$\hat{\mathbf{L}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Эти две круговые поляризации являются взаимно ортогональными в том смысле, что

$$\hat{\mathbf{R}}^* \hat{\mathbf{L}} = 0. \quad (2.23)$$

Поскольку вектор Джонса представляет собой столбец из двух элементов, любую пару ортогональных векторов Джонса можно выбрать в качестве базиса в пространстве всех векторов Джонса. Любая поляризация при этом может быть представлена как суперпозиция двух взаимно ортогональных поляризаций $\hat{\mathbf{x}}$ и $\hat{\mathbf{y}}$, или $\hat{\mathbf{R}}$ и $\hat{\mathbf{L}}$. В частности, базисные

линейные поляризации \hat{x} и \hat{y} можно разложить на две круговые поляризации \hat{R} и \hat{L} , и наоборот. Эти разложения имеют вид

$$\hat{R} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} - i\hat{y}), \quad (2.24)$$

$$\hat{L} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + i\hat{y}), \quad (2.25)$$

$$\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{R} + \hat{L}), \quad (2.26)$$

$$\hat{y} = \frac{i}{\sqrt{2}}(\hat{R} - \hat{L}). \quad (2.27)$$

Вектора Джонса для характерных поляризаций

Таблица 1

Поляризация	Вектор Джонса
Линейная поляризация в x -направлении	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
Линейная поляризация в y -направлении	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
Линейная поляризация под углом в 45° по отношению к оси x	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
Правая круговая поляризация	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$
Левая круговая поляризация	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

Как видно, круговая поляризация представляет собой суперпозицию двух линейных поляризаций вдоль осей x и y с равными амплитудами $1/\sqrt{2}$, но с разностью фаз $(1/2)\pi$. Аналогично линейную поляризацию

можно рассматривать как суперпозицию двух противоположно направленных круговых поляризаций.

Примеры различных матриц Джонса

Таблица 2

Оптический элемент	Соответствующая матрица Джонса
Линейный поляризатор с горизонтальной осью пропускания	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Линейный поляризатор с вертикальной осью пропускания	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Линейный поляризатор с осью пропускания под углом в 45°	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
Линейный поляризатор с осью пропускания под углом в -45°	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
Линейный поляризатор с осью пропускания, повернутой на угол φ	$\begin{pmatrix} \cos^2 \varphi & \cos \varphi \sin \varphi \\ \sin \varphi \cos \varphi & \sin^2 \varphi \end{pmatrix}$
Левовращающий поляризатор	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$
Правовращающий поляризатор	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$
Полуволновая пластинка с быстрой осью, направленной вдоль оси x	$\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$
Четвертьволновая пластинка с быстрой осью, направленной вдоль оси x .	$\begin{pmatrix} (1-i)/2 & 0 \\ 0 & (1+i)/2 \end{pmatrix}$ или $e^{i\pi/4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$

Эти матрицы имеют разные фазы

До сих пор рассматривались векторы Джонса для некоторых простых частных случаев поляризации. Нетрудно показать, что в общем случае эллиптическую поляризацию можно представить следующим вектором Джонса:

$$\mathbf{J}(\psi, \delta) = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ e^{i\delta} \sin \psi \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

Этот вектор Джонса отвечает некоторому состоянию поляризации, описываемому комплексным параметром $\chi = e^{i\delta} \operatorname{tg} \psi$. В табл. 1 приведены векторы Джонса для некоторых типичных состояний поляризации.

Наиболее важное применение векторы Джонса находят при вычислениях состояния поляризации. Это мощный метод, используемый при исследовании распространения плоских волн с произвольным состоянием поляризации через произвольную последовательность двулучепреломляющих элементов и поляризаторов.

2.5. Оптическая матрица Джонса

Поляризация – это общее свойство всех пространственных волн. Зависимость от времени положения одного из волновых векторов в пространстве может быть описана движением точки в пространстве. Чаще всего в качестве вектора поляризации рассматривается вектор электрического поля \mathbf{E} монохроматической электромагнитной плоской волны. Предположим, что однородная плоская волна движется в положительном направлении вдоль оси z ортогональной правосторонней декартовой системы координат. Тогда вектор поляризации может быть записан в виде:

$$\vec{E}(z, t) = \left[\tilde{E}_x \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} z + \delta_x \right) \right] \vec{x} + \left[\tilde{E}_y \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} z + \delta_y \right) \right] \vec{y}, \quad (2.29)$$

где E_x и E_y представляют собой амплитуды линейных гармонических колебаний компонент электрического поля вдоль осей x и y ; δ_x и δ_y - соответствующие замедления (задержки, сдвиги по фазе).

Более краткое математическое описание может быть получено при исключении зависимости от времени. Вектор-столбец размерности 2 позволяет сгруппировать скалярные компоненты последнего уравнения

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{E}_x \exp\left\{-i\frac{2\pi}{\lambda}z\right\} \exp\{i\delta_x\} \\ \hat{E}_y \exp\left\{-i\frac{2\pi}{\lambda}z\right\} \exp\{i\delta_y\} \end{pmatrix}, \quad \tilde{E}_{x,y} = \text{Re}[\hat{E}_{x,y}]. \quad (2.30)$$

Рассматривая поле на плоскости $z=0$, мы можем избавиться от пространственной информации. Оставшийся вектор и есть так называемый вектор Джонса. Он содержит полную информацию об амплитуде и фазе волновых компонент. Координаты вектора Джонса зависят от введенной системы декартовых координат и от плоскости наблюдения. Важно отметить, что вектор Джонса описывает плоскую волну, но не представляет ее. Как результат отказа от учета временной зависимости вектор E , введенный формулой (2.30), позволяет описывать свойства лишь полностью поляризованных волн. Феномен частично или полностью деполаризованных волн может быть объяснен только при возврате временной информации комплексных амплитуд \tilde{E}_x и \tilde{E}_y , что ведет к концепции матриц Мюллера—Джонса.

Тема 3. Способы получения плоскополяризованного света

3.1. Поляризаторы

Поляризатор является элементом, пропускающим только одно состояние поляризации. Поляризаторы бывают линейными, круговыми, эллиптическими в зависимости от состояния света, который они пропускают. Линейные поляризаторы используются наиболее часто и характеризуются осью пропускания. После прохождения естественного (неполяризованного) света через такой поляризатор (рис. 4) он становится линейно поляризованным. Для линейно поляризованного света, падающего на линейный поляризатор, интенсивность прошедшего света определяется законом Малюса

$$T = I_0 \cos^2 \theta, \quad (3.1)$$

где θ – угол между азимутом текущей поляризации и направлением оси пропускания.

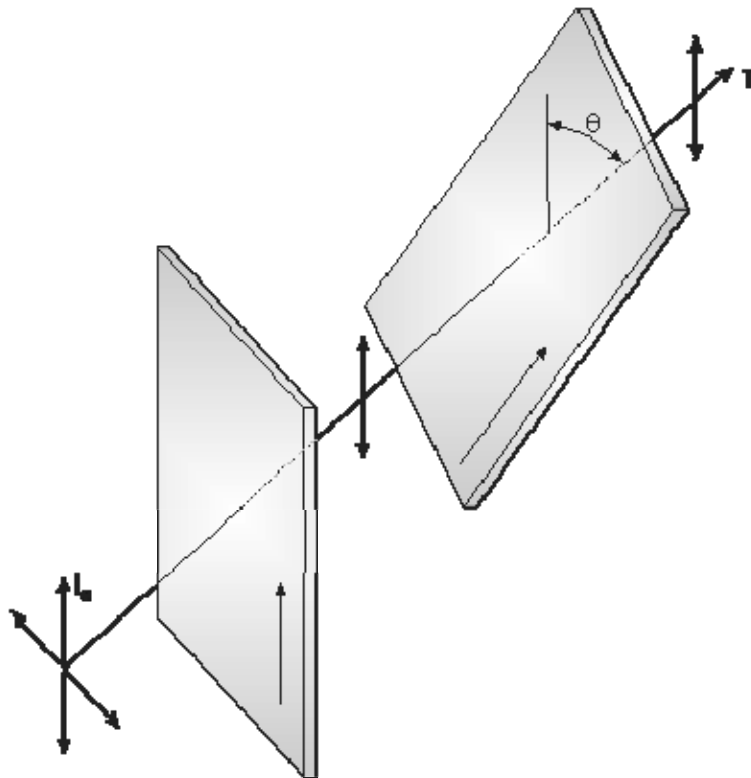


Рис. 4. Прохождение света через два поляризатора.

Как отмечалось, линейно-поляризованный свет получают из естественного света с помощью поляризатора. Поставим на выходе первого поляризатора второй (анализатор) с осью пропускания под углом θ к оси первого.

Интенсивность прошедшего света в такой системе определяется соотношением:

$$T = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 \theta. \quad (3.2)$$

Следовательно, при $\theta = 90^\circ$ интенсивность прошедшего света равна нулю.

Заметим, что соотношения (3.1) и (3.2) справедливы для идеального поляризатора. На самом деле, поляризатор характеризуется значениями максимального пропускания T_{\max} и минимального - T_{\min} .

Основными характеристиками поляризаторов являются:

отношение затухания

$$\frac{T_{\min}}{T_{\max}} \approx 0;$$

эффективность поляризации

$$\frac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\max} + T_{\min}} \approx 1.$$

3.2. Принципы работы поляризационных оптических элементов

При рассмотрении явления отражения плоской электромагнитной волны от границы раздела двух диэлектриков [2] было показано, что существует некий угол падения волны на границу раздела, при котором коэффициент отражения для волны с определенной поляризацией равен нулю. Напомним, что этот угол носит название угла Брюстера. Если же под этим углом на поверхность раздела диэлектриков направить электромагнитную волну, не обладающую поляризацией (естественный свет), то отраженная волна будет уже линейно поляризованной. Что же касается направления поляризации отраженной волны, то, как было

показано в [2], вектор напряженности электрического поля этой волны будет колебаться в плоскости, перпендикулярной плоскости падения. Проанализировав поляризацию прошедшей волны, можно убедиться, что она тоже стала частично поляризованной, причем в плоскости падения.

Оценивая степень поляризации преломленной волны, легко заметить, что при падении под углом Брюстера она имеет максимальное значение, но весьма незначительное (для обычного стекла эта величина порядка 15%). Если же преломленную и, следовательно, частично поляризованную волну подвергнуть второму, третьему и т.д. преломлениям на аналогичных границах раздела сред, то, конечно, степень поляризации преломленной волны будет возрастать.

Если имеется 8 -10 стеклянных пластинок (так называемая стопа Столетова), то при падении волны под углом Брюстера на такую структуру и прошедшая и отраженная волны окажутся практически полностью поляризованными. Интенсивности отраженной и прошедшей волн будут равны между собой и составят каждая половину от интенсивности падающей, неполяризованной волны (если не учитывать поглощение в стекле). Направления же колебания векторов напряженности электрического поля отраженной и прошедшей волн будут взаимно перпендикулярны.

Таким образом, группа стеклянных пластинок (стопа) может выполнять функции простейшего поляризатора как в отраженном, так и в прошедшем свете.

К настоящему времени разработано множество методов получения плоскополяризованного света при помощи двойного лучепреломления в анизотропных средах [2]. Простейший метод состоит в использовании различия в диэлектрических проницаемостях обыкновенной и необыкновенной волн, что позволяет в определенных условиях полностью разделить их. Для этого обычно используется в качестве анизотропной

среды естественный кристалл исландского шпата (CaCO_3). Два специальным образом вырезанных куска этого кристалла склеивают друг с другом при помощи оптического клея (канадский бальзам), при этом одна из собственных волн анизотропной среды испытывает полное внутреннее отражение на этой склейке, а вторая проходит через нее (рис. 5).

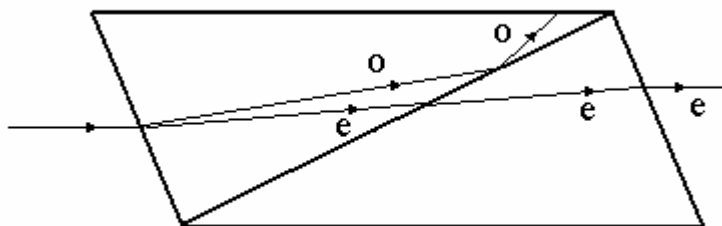


Рис. 5. Поляризационная призма Николя

Аналогичным образом устроены и другие типы поляризационных призм, например призмы Глана—Томпсона и др.

Дихроичные поляризаторы построены на применении явления дихроичного поглощения света в некоторых анизотропных кристаллах, например в турмалине. Турмалин представляет собой двоякопреломляющий кристалл, в котором один из лучей (обыкновенный) поглощается значительно сильнее, чем другой. Поэтому из пластинки турмалина оба луча, поляризованные во взаимно перпендикулярных плоскостях, выходят с весьма различной интенсивностью, и прошедший через нее свет оказывается частично поляризованным. Если взять достаточно толстую пластинку турмалина (около 1 мм), то в случае видимого света обыкновенный луч практически целиком поглотится и вышедший свет будет плоскополяризованным.

Особое значение дихроичные вещества приобрели в последнее время благодаря изобретению поляроидов. Поляроид представляет собой пленку очень сильно дихроичного кристалла – герпатита. Слой герпатита

толщиной около 0,1 мм практически полностью поглощает один из лучей, являясь уже в таком тонком слое совершенным линейным поляризатором.

Разработано несколько способов получения таких поляризаторов, позволяющих изготавливать пленочные поляризаторы довольно большой площади.

Среди пленочных поляризаторов различают:

- поляризаторы обыкновенного типа (ordinary), которые имеют *одну* поглощающую ось, лежащую в плоскости пленки, и *две* пропускающие оси, одна из которых лежит в плоскости пленки, а другая перпендикулярна ей;
- поляризаторы необыкновенного типа (extraordinary), имеющие *две* поглощающих оси, одна из которых лежит в плоскости пленки, а другая перпендикулярна ей, и *одну* пропускающую ось, лежащую в плоскости пленки.

В дальнейшем при расчетах будут рассматриваться только однородные пленочные поляризаторы со взаимно ортогональными направлениями пропускания (ordinary) и поглощения (extraordinary).

3.3. Контраст, эффективность и дихроичное отношение-характеристики поляризационных элементов

В производстве жидкокристаллических дисплеев (ЖКД) контраст дисплея обычно определяется параметром контрастного отношения и является отношением максимальной яркости экрана к минимальной. Для высококонтрастных мониторов данный параметр имеет значение 400:1 и выше.

Для тонких пленок контрастное отношение может быть рассчитано по следующей формуле: $C = t_1/t_2$, где t_1 - максимальное пропускание поляризатора, а t_2 - минимальное, когда поляризатор повернут к пучку света.

Для более точного определения характеристик тонких пленок необходимо ввести определения двух типов пропускания T_{par} и T_{per} , которыми в большинстве случаев принято характеризовать экспериментальные образцы:

T_{par} - пропускание одиночного поляризатора в поляризованном свете, когда ось пропускания поляризатора параллельна направлению поляризации падающего света;

T_{per} - пропускание одиночного поляризатора в поляризованном свете, когда ось пропускания поляризатора перпендикулярна направлению поляризации падающего света.

Также можно определить параметр T как усредненное пропускание поляризатора в неполяризованном свете:

$$T = (T_{par} + T_{per}) / 2. \quad (3.3)$$

Пропускание двух поляризаторов с параллельными осями пропускания в неполяризованном свете имеет вид

$$H_0 \% = \frac{1}{2}(T_{par}^2 + T_{per}^2) / 100\%, \quad (3.4)$$

а пропускание двух поляризаторов с перпендикулярными осями пропускания в неполяризованном свете можно записать в виде:

$$H_{90} \% = (T_{par} \cdot T_{per}) / 100\%. \quad (3.5)$$

Для определения свойств образцов используются эффективность поляризации:

$$E_p \% = \frac{T_{par} - T_{per}}{T_{par} + T_{per}} \cdot 100\% \quad (3.6)$$

и дихроичное отношение или контраст оптической чувствительности

$$K_d = \frac{D_{par}}{D_{per}} = \frac{\log_{10}(T_{per}/100)}{\log_{10}(T_{par}/100)}. \quad (3.7)$$

Контрастное отношение поляризатора можно рассчитать по формуле:

$$CR = H_0 / H_{90}. \quad (3.8)$$

Ретардеры (волновые пластинки) представляют собой устройства, которые вносят фазовую задержку между двумя ортогональными световыми поляризациями. Прежде всего, ретардеры служат для изменения состояния поляризации световой волны.

Линейный ретардер характеризуется вносимой фазовой задержкой между ортогональными поляризациями света $\Delta\varphi = \varphi_p - \varphi_s$.

Ретардеры изготавливаются, как правило, из двулучепреломляющего материала, имеющего главные значения показателей преломления равные n_o и n_e (рис. 6). Такие ретардеры называются волновыми пластинками.

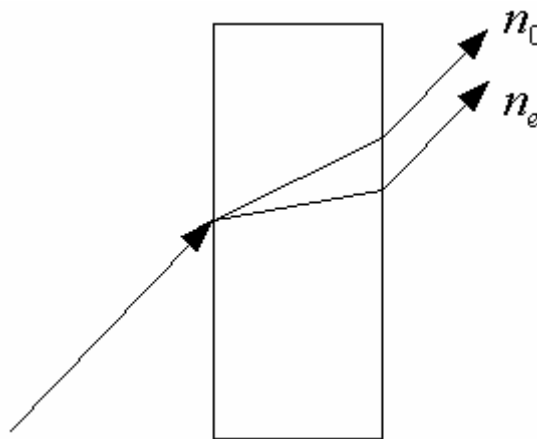


Рис. 6. Прохождение света через ретардер

Фазовая задержка $\Delta\varphi$ волновых пластинок может измеряться:

- в длинах волн $\Delta\varphi_{WL} = |n_e - n_o|d$;
- в градусах (радианах)

$$\Delta\varphi_{deg} = 360|n_e - n_o|d / \lambda = 360 \cdot \Delta\varphi_{WL} / \lambda.$$

В частности, для полуволновой пластинки имеем

$$|n_e - n_o|d = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}, \text{ где } m - \text{ целое число.}$$

В зависимости от коэффициента преломления материала вдоль вертикальной оси различают:

- ретардер обыкновенного типа (ordinary) $n_z = n_o$;
- ретардер необыкновенного типа (extraordinary) $n_z = n_e$.

Математическое моделирование прохождения света через многослойные структуры опирается на знание оптических свойств тонких кристаллических пленок, которые определяются, главным образом, тензором диэлектрической проницаемости материала ϵ . Для решения прямой задачи с помощью матричного метода Берремана особенности материала (изотропность, анизотропность) не играют принципиальной роли. Однако знание особенностей материала (структуры тензора диэлектрической проницаемости) существенно упрощает решение обратной задачи за счет уменьшения количества искомых параметров или использования упрощенных моделей расчета. В этой связи приведем классификацию рассматриваемых материалов в зависимости от структуры тензора диэлектрической проницаемости материалов. Классификация тесно связана с относительной величиной главных осей диэлектрического эллипсоида и их ориентацией (рис. 7).

На рис. 7 изображен эллипсоид диэлектрической проницаемости, его главные оси A, B и C ориентированы произвольным образом по отношению к локальной системе координат X_n, Y_n, Z_n . Главные значения $\epsilon_A, \epsilon_B, \epsilon_C$ различны по величине; θ - угол нутации (отклонение, отсчитываемое от оси Z); φ - (иногда его обозначают буквой ψ) угол прецессии (вращение вокруг оси Z при фиксированном θ); ψ - угол вращения (иногда его обозначают буквой ϕ) эллипсоида вокруг оси C против часовой стрелки; α - угол падения света; $OX_n Z_n$ - плоскость падения света.

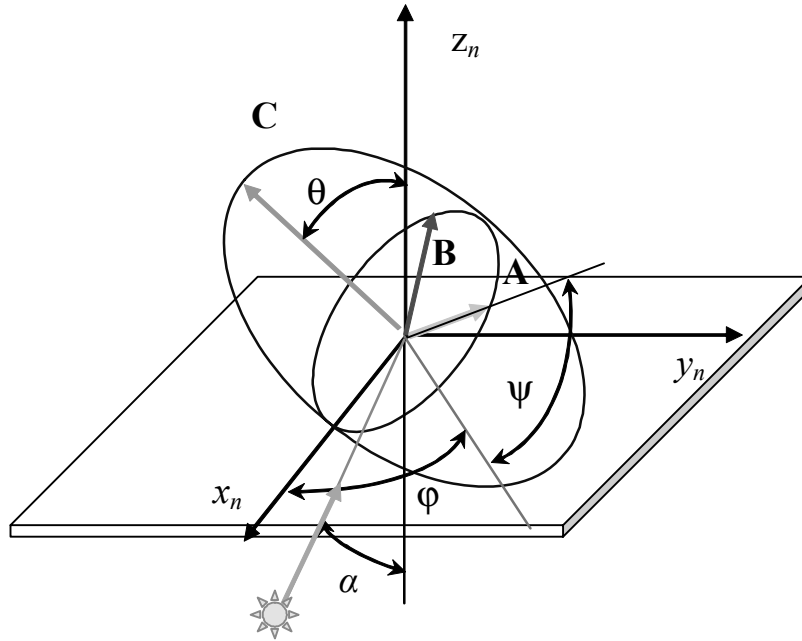


Рис. 7. Общее положение эллипсоида диэлектрической проницаемости

Существуют следующие классификации по величине главных значений тензора диэлектрической проницаемости:

- *двухосный анизотропный материал.* Все главные оси диэлектрического эллипсоида не равны между собой, например $\epsilon_A < \epsilon_B < \epsilon_C$. Материал имеет две оптические оси [7];
- *одноосный анизотропный материал.* Две из трех оптических осей равны между собой, например $\epsilon_A = \epsilon_B \neq \epsilon_C$. Материал имеет одну оптическую ось, совпадающую с направлением C ;
- *изотропный материал.* Все главные оси диэлектрического эллипсоида равны между собой: $\epsilon_A = \epsilon_B = \epsilon_C$.

Ниже представлены классификации одноосных материалов по ориентации главных осей диэлектрического эллипсоида.

В одноосных материалах направления, соответствующие равным между собой главным осям диэлектрических проницаемостей (или показателям преломления), обозначают словом ordinary ($\epsilon_o = \epsilon_A = \epsilon_B$ или n_o), а оставшееся направление – extraordinary ($\epsilon_e = \epsilon_C$ или n_e). Напомним, что $\epsilon_\sigma = n_\sigma^2$, где $\epsilon_\sigma, n_\sigma$ – комплексные числа; n_σ – показатель

преломления. Характеристикой таких материалов часто выступает понятие «двулучепреломление», определяемое соотношением

$$\Delta n = n_e - n_o .$$

При $n_e > n_o$ имеет место положительное двулучепреломление, а при $n_e < n_o$ - отрицательное двулучепреломление.

Ниже (рис. 8-11) приведена общепринятая классификация одноосных анизотропных материалов в зависимости от соотношения между значениями ϵ_o и ϵ_e и направлением выделенной оси [8]. При этом угол нутации θ является основным при определении типа материала. Для различных стандартных положений диэлектрического эллипсоида приводятся также значения углов Эйлера.

Двухосная пластинка соответствует общему положению одноосного диэлектрического эллипсоида со значением угла нутации $0 < \theta < \pi/2$, (рис.7). Отметим, что в том случае, когда главные оси эллипсоида совпадают с осями лабораторной системы координат, вместо $\epsilon_A, \epsilon_B, \epsilon_C$ используются обозначения $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$.

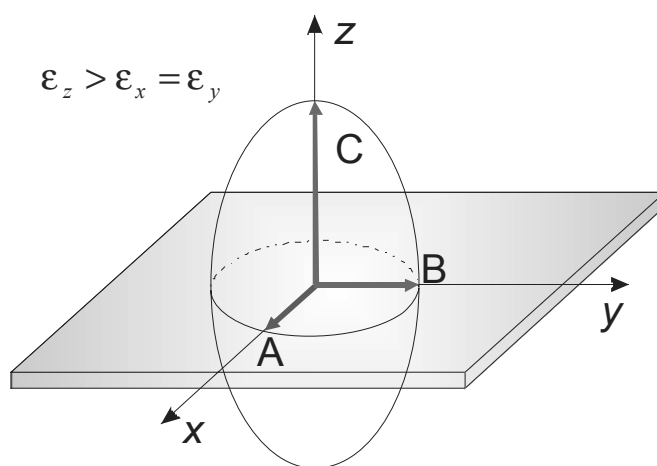


Рис. 8. Положительная С-пластинка

В случае *одноосной С-пластинки* ось С является оптической осью и расположена перпендикулярно к плоскости пластинки (рис. 8, 9). При

$\epsilon_z > \epsilon_x = \epsilon_y$ ретардер называется *положительной С-пластинкой*, а в случае $\epsilon_x = \epsilon_y > \epsilon_z$ — *отрицательной С-пластинкой*.

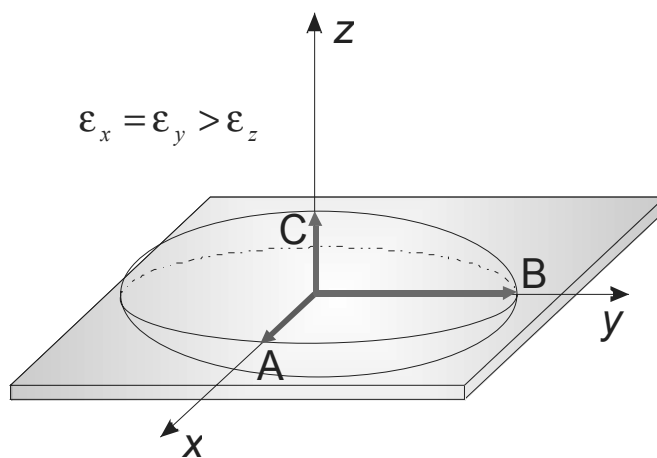


Рис.9. Отрицательная С-пластинка

Одноосная А-пластинка определяется как пластинка с оптической осью, лежащей в плоскости пластинки (рис. 10, 11). Ретардер с $\epsilon_x > \epsilon_y = \epsilon_z$ называют *положительной А-пластинкой*, а ретардер с $\epsilon_z = \epsilon_x > \epsilon_y$ — *отрицательной А-пластинкой*.

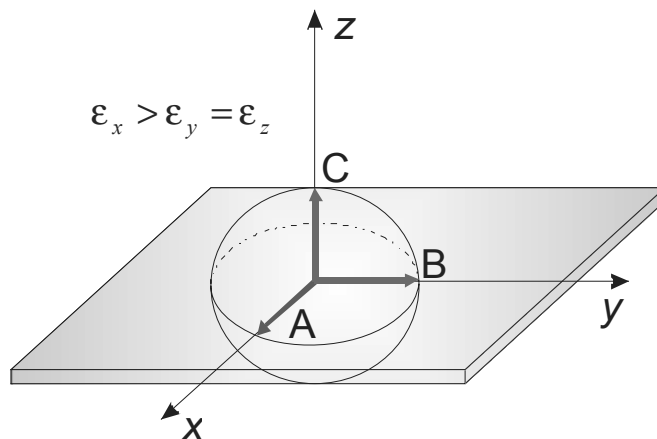


Рис. 10. Положительная А-пластинка

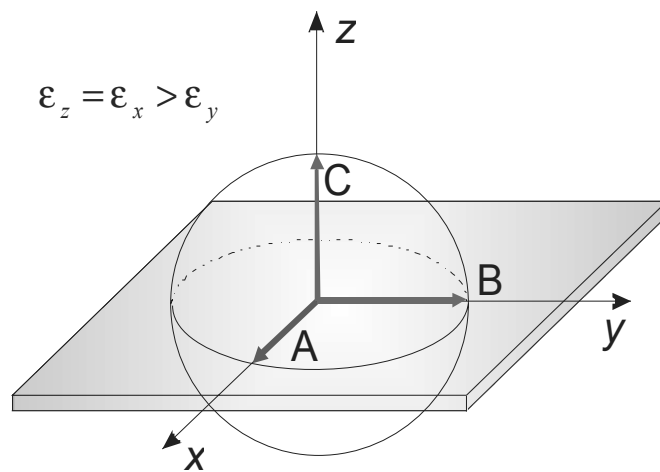


Рис. 11. Отрицательная А-пластинка

Тема 4. Методы расчета слоистых структур при известных оптических параметрах материалов

4.1. Обзор методов

Задача об определении свойств оптической системы при известных оптических (диэлектрическая проницаемость) и геометрических (задающих форму объекта) параметрах является прямой задачей. Для решения задачи о прохождении света через слоистую (в общем случае анизотропную) среду в настоящее время применяются различные методы и алгоритмы: классические модели, рассмотренные в работах Борна и Вольфа [9], Аззама и Башара [10], классический метод матриц Джонса [7, 10], расширенный матричный метод Джонса [7], матричный метод Берремана [11]. Использование конкретного метода определяется условиями его применимости, при этом расширенный матричный 4x4 метод Джонса и матричный метод Берремана считаются универсальными. Для решения задачи о прохождении света сквозь многослойную структуру используются матричный 4x4 метод Берремана, основанный на уравнениях Максвелла. Соотношение Крамерса—Кронига, связывающее действительную и мнимую части диэлектрического тензора, позволяет устойчиво находить решение обратной задачи об определении индексов диэлектрической проницаемости в классе аналитических функций.

В качестве основных элементов математических моделей используются волновая теория света и уравнения Максвелла. Ключевыми входными параметрами световой волны являются ее поляризация и угол падения, а основными оптическими параметрами материалов, используемыми как в прямой, так и в обратной задаче, служат тензор диэлектрической проницаемости ϵ и толщина материала d .

Основными выходными оптическими свойствами в задаче моделирования являются интенсивности пропускания и отражения под

разными углами падения. Эти же характеристики обычно выступают как входные параметры в обратной задаче. Кроме того, в качестве дополнительных выходных параметров (рассчитываемых на основе пропускания и отражения) в прямой задаче могут также служить векторы Стокса прошедшего и отраженного света, степень поляризации, фазовые задержки, контраст, эффективность, цветовые координаты в различных цветовых пространствах, цветопередача и многое другое.

Заметим, что эффективное решение прямой задачи играет ключевую роль во всем программном обеспечении, поскольку задача расчета параметров материала по измеренным данным (обратная задача) частично использует алгоритмы прямой задачи.

Основными критериями применимости того или иного метода является возможность учета заданных параметров световой волны (поляризация, угол падения) и многократных отражений, возникающих между слоями оптической системы.

В нашей задаче возможно применение расширенного матричного 4x4 метода Джонса и матричного метод Берремана. Однако учет изотропности позволяет использовать более простые и быстрые классические методы расчета [12], что особенно важно при решении обратной задачи. В этой связи в методиках расчета используются, где возможно:

- *матричный метод Берремана* для материалов любого типа с любой структурой оптической системы (в дальнейшем будем просто называть матричным методом);
- *классический метод* только для изотропных материалов при наличии не более двух слоев;
- *комбинированный метод* для двухслойных оптических систем с толстой изотропной подложкой.

Основные соотношения классического метода для произвольной падающей волны, учитывающего многократные отражения для одного и

двух слоев, были рассмотрены выше. Ниже остановимся на матричном методе.

Заметим, что для расчетов, выполняемых в прямой задаче моделирования многослойных структур и устройств, можно использовать матричный метод даже для простых изотропных материалов. Это связано с тем, что матричный метод позволяет рассчитывать более широкий круг параметров прошедшего/отраженного света, чем классический.

Материальные уравнения электромагнитной индукции в декартовой системе координат могут быть записаны как:

$$D(r, \omega) = \varepsilon_0 [\varepsilon(r, \omega) E(r, \omega) + \delta(r, \omega) H(r, \omega)], \quad (4.1)$$

$$B(r, \omega) = \mu_0 [\mu(r, \omega) H(r, \omega) + \gamma(r, \omega) E(r, \omega)], \quad (4.2)$$

где ε_0 и μ_0 - диэлектрическая и магнитная проницаемости в вакууме; ε и μ - тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости материала. Перекрестно-связанные тензоры δ и γ являются магнитоэлектрическим двухэлементным тензором. Материал оптически анизотропен, если, по крайней мере, один из тензоров ε или μ много отличается от его главных элементов, тогда как δ и γ могут быть равны нулю. В общем случае все четыре тензора имеют комплексные, несимметричные и не обращающиеся в нуль элементы, представляя собой анизотропную среду. Для однородной среды четыре тензора не зависят от пространственного положения r .

Рассматриваемый материал может быть определен как изотропный, одноосный или двуосный, а его оптические свойства могут быть описаны при помощи диэлектрического тензора (табл. 3).

Тензор диэлектрической проницаемости и свойства симметрии кристаллов

Таблица 3

Оптическая симметрия	Кристаллическая система	Диэлектрический тензор
Изотропная	Кубическая	$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z$
Одноосная	Тетрагональная Гексагональная Тригональная	$\epsilon_x = \epsilon_y \neq \epsilon_z$
Двуосная	Триклинная Моноклинная Ромбическая	$\epsilon_x \neq \epsilon_y \neq \epsilon_z$

Оптические параметры большинства твердых тел и жидкостей могут быть определены в понятиях главных элементов тензора ϵ и углов вращения. Классы кристаллов можно условно поделить на среды с одной или двумя оптическими осями. Магнитооптические эффекты в материале могут быть причиной антисимметрии диэлектрических свойств, тогда ϵ становится несимметричным в целом. Несимметричный тензор содержит симметричную и антисимметричную части, и обе могут иметь три главных комплексных элемента.

4.2. Матричный метод Берремана

Рассмотрим метод расчета отраженной и прошедшей световых волн, основанный на матричном подходе, разработанном и развитом в работах [13, 14, 15]. Основные идеи алгоритма, часто называемым матричным 4x4 методом Берремана, основаны на точных преобразованиях уравнений Максвелла к матричной форме при условии однородности оптической среды (слоя) в направлении оси z .

Матрица Берремана, являясь переходной матрицей линейного дифференциального уравнения, позволяет учесть интерференционные

эффекты многократного отражения, возникающего между слоями. В конечном итоге она определяет линейное преобразование между тангенциальными компонентами электрического и магнитного полей на входе оптической системы и соответствующими компонентами отражения и пропускания на выходе(рис. 12).

В алгоритме рассматривается общий случай размера и положения диэлектрического эллипсоида (рис. 7).

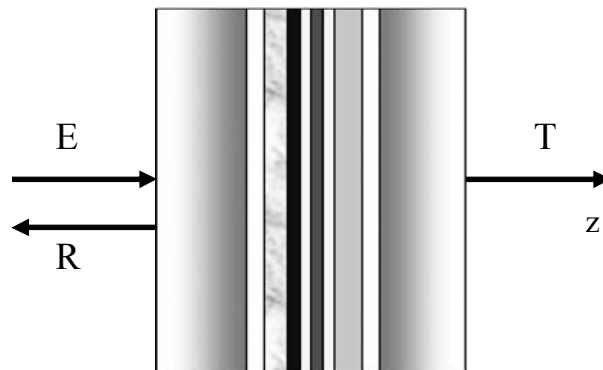


Рис. 12. Прохождение света через многослойную оптическую среду:

E, R, T – падение, отражение и пропускание света соответственно

Согласно такому подходу одномерная неоднородная среда может быть полностью описана большим числом плоскопараллельных слоев, каждый из которых считается однородным [14]. Для каждого из слоев могут быть достаточно просто решены волновые уравнения. Решения для смежных слоев могут быть совмещены при помощи граничных условий для тангенциальных компонент электромагнитного поля. Обычно ось Z выбирается так, чтобы быть перпендикулярной плоскости слоев, и в рамках метода Берремана четыре тангенциальных компоненты электромагнитного поля рассматриваются как четыре вектора Ψ , которые определяются следующим образом

$$\Psi^T = (aE_x, bH_y, aE_y, -bH_x), \quad (4.3)$$

где $a^2 = \epsilon_0$ и $b^2 = \mu_0$ являются диэлектрической и магнитной проницаемостями. Граничные условия требуют, чтобы этот вектор с

выходной стороны n -го слоя совпадал со входным вектором слоя $n+1$.
Иными словами, необходимо различать эти два вектора. Связь между входным и выходным векторами n -го слоя может быть записана как

$$\Psi_n = P_n \Psi_{n-1}, \quad (4.4)$$

где P - функция распространения. Это решение уравнения (4.5), предложенного Берреманом:

$$\frac{\partial}{\partial z} \Psi = i \frac{\omega}{c} \Delta \Psi, \quad (4.5)$$

где

$$\Delta = \begin{bmatrix} -k_x \frac{\epsilon_{zx}}{\epsilon_{zz}} & 1 - \frac{k_x^2}{\epsilon_{zz}} & -k_x \frac{\epsilon_{zy}}{\epsilon_{zz}} & -\frac{k_x k_y}{\epsilon_{zz}} \\ \epsilon_{xx} - \frac{\epsilon_{yz} \epsilon_{zx}}{\epsilon_{zz}} - k_y^2 & -k_x \frac{\epsilon_{xz}}{\epsilon_{zz}} & \epsilon_{xy} - \frac{\epsilon_{yz} \epsilon_{zy} + k_x k_y}{\epsilon_{zz}} & -k_y \frac{\epsilon_{xz}}{\epsilon_{zz}} \\ -k_y \frac{\epsilon_{zx}}{\epsilon_{zz}} & -\frac{k_y k_x}{\epsilon_{zz}} & -k_y \frac{\epsilon_{zy}}{\epsilon_{zz}} & 1 - \frac{k_y^2}{\epsilon_{zz}} \\ \epsilon_{yx} - \frac{\epsilon_{yx} \epsilon_{zx} + k_y k_x}{\epsilon_{zz}} & -k_x \frac{\epsilon_{yz}}{\epsilon_{zz}} & \epsilon_{yy} - \frac{\epsilon_{yz} \epsilon_{zy}}{\epsilon_{zz}} - k_x^2 & -k_y \frac{\epsilon_{yz}}{\epsilon_{zz}} \end{bmatrix},$$

$P = \exp(i\omega d \Delta / c)$; d - толщина слоя, $k = (k_x, k_y, k_z)$ - волновой вектор, ω - круговая частота; c - скорость света в вакууме.

Уравнение (4.5) является прямым следствием уравнений Максвелла и определяет метод Берремана решения прямой задачи о прохождении света сквозь однородную среду. Уравнение (4.4) вместе с граничными условиями предоставляет общее решение:

$$\Psi_N = \left(\prod_{n=N}^1 P_n \right) \Psi_0, \quad (4.6)$$

которое формально может быть записано как

$$\Psi_N = R e^{i \frac{\omega}{c} \int_{z_0}^{z_N} D(z) dz} \Psi_0, \quad (4.7)$$

где R - пространственный оператор.

Выполнение законов поглощения и отражения обуславливает то, что тангенциальные компоненты волновых векторов $k_\alpha = \frac{\omega}{c}(k_x, k_y, k_{z\alpha})$ совпадают на границах разделов слоев, и, таким образом, можно положить $k_y = 0$. Рассмотрим этот случай более подробно [15].

Главные диэлектрические функции $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ и ε_z связаны с главными осями эллипсоида диэлектрической проницаемости анизотропного материала. Для моноклинных и триклинных систем можно всегда найти главные значения в декартовой системе координат. Тем не менее такое преобразование будет зависеть от ω , а основные оси кристалла в общем случае могут быть отличны от лабораторной системы координат. Углы Эйлера φ, ψ и θ используются для вращения декартовой системы координат с помощью выражения:

$$\varepsilon = A \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix} A^{-1}, \quad (4.8)$$

где матрица A является ортогональной матрицей вращения:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi \sin \psi & -\sin \psi \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi \cos \psi & \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \psi \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi \sin \psi & -\sin \psi \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi \cos \psi & -\sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Углы Эйлера описывают переход от лабораторной системы координат к локальной системе координат кристалла. Заметим при этом, что ε симметричен, т.е. $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$. Матрица коэффициентов Δ зависит от диэлектрического тензора ε и компоненты k_x волнового вектора k_α (1 = "x", 2 = "y", 3 = "z"):

$$\Delta = \begin{pmatrix} -k_x \frac{\epsilon_{31}}{\epsilon_{33}} & -k_x \frac{\epsilon_{32}}{\epsilon_{33}} & 0 & 1 - \frac{k_x^2}{\epsilon_{33}} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \epsilon_{23} \frac{\epsilon_{31}}{\epsilon_{33}} - \epsilon_{21} & k_x^2 - \epsilon_{22} + \epsilon_{23} \frac{\epsilon_{32}}{\epsilon_{33}} & 0 & k_x \frac{\epsilon_{23}}{\epsilon_{33}} \\ \epsilon_{11} - \epsilon_{13} \frac{\epsilon_{31}}{\epsilon_{33}} & \epsilon_{12} - \epsilon_{13} \frac{\epsilon_{32}}{\epsilon_{33}} & 0 & -k_x \frac{\epsilon_{13}}{\epsilon_{33}} \end{pmatrix}, k_x = n_a \sin \Phi_a. \quad (4.10)$$

Матрица Δ не зависит от z в том случае, если среда однородна. Решением уравнения (4.5) для слоя толщиной d является матрица преобразования T_p :

$$\Psi(z+d) = e^{ik_0 \Delta d} \Psi(z) = T_p \Psi(z), T_p \equiv e^{ik_0 \Delta d}. \quad (4.11)$$

Матрица T_p связывает компоненты электрического и магнитного полей на границах слоя толщиной d . Переходная матрица T_p полностью описывает прохождение света сквозь однородную плоскопараллельную структуру и включает эффекты всех множественных отражений, в том числе и при наличии поглощения. Матрица T_p зависит от толщины слоя d и еще от девяти неизвестных параметров (при фиксированной длине волны) - трех пар комплексных значений тензора диэлектрической проницаемости и трех углов Эйлера. При этом матрица Δ является входным параметром для вычисления матрицы T_p . Достаточно малое значение d , требуемое для быстрой сходимости экспоненциальной функции (3.26), может быть получено за счет разложения в ряд Тэйлора с фактором, зависящим от длины волны $dk_0 = 2\pi d/\lambda$. В работах [12, 16] приведены способы быстрого расчета матрицы преобразования, основанные на теореме Сильвестра—Лагранжа:

$$T_p \equiv e^{ik_0 \Delta d} = \beta_0 E + \beta_1 \Delta + \beta_2 \Delta^2 + \beta_3 \Delta^3. \quad (4.12)$$

Для вычисления переходной матрицы малое значение толщины не требуется. При этом заметим, что $[T_p(d)]^{-1} = T_p(-d)$. Скалярные величины β_i получаются из линейных соотношений:

$$e^{ik_0 q_k d} = \sum_{j=0}^3 \beta_j q_k^j, k = 1, \dots, 4, \quad (4.13)$$

где $q_k, k = 1, \dots, 4$ - собственные значения матрицы Δ . Два решения имеют положительные действительные части и отвечают за прохождение плоских волн сквозь плоскопараллельную пластину. Решения с отрицательными действительными частями соответствуют отраженным компонентам волны. Выражения для собственных значений можно записать в аналитическом виде:

$$\begin{aligned} q_{1/2}^+ &= \frac{1}{2} \left\{ -k_x \frac{\epsilon_{13}}{\epsilon_{33}} - \sqrt{\Omega + \Sigma} \pm \sqrt{\Xi - \frac{s_3}{4\sqrt{\Omega + \Sigma}}} \right\} \\ q_{1/2}^- &= \frac{1}{2} \left\{ -k_x \frac{\epsilon_{13}}{\epsilon_{33}} + \sqrt{\Omega + \Sigma} \pm \sqrt{\Xi + \frac{s_3}{4\sqrt{\Omega + \Sigma}}} \right\}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega &= -\frac{2}{3}t_1 + \left(k_x \frac{\epsilon_{13}}{\epsilon_{33}} \right)^2, \\ \Xi &= -\frac{4}{3}t_1 + 2 \left(k_x \frac{\epsilon_{13}}{\epsilon_{33}} \right)^2 - \Sigma, \\ \Sigma &= \frac{1}{2} \left\{ s_1 \left(\frac{1}{2} [s_2 + \sqrt{s_2^2 - 4s_1^3}] \right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{1}{2} [s_2 + \sqrt{s_2^2 - 4s_1^3}] \right)^{\frac{1}{3}} \right\}, \\ s_1 &= t_1^2 + 12 \left(k_x \frac{\epsilon_{13}}{\epsilon_{33}} t_2 + t_3 \right), \\ s_2 &= 2t_1^3 + 36k_x \frac{\epsilon_{13}}{\epsilon_{33}} t_1 t_2 + 108 \left(t_2^2 + \left[k_x \frac{\epsilon_{13}}{\epsilon_{33}} \right]^2 t_3 \right) - 72t_1 t_3, \end{aligned}$$

$$s_3 = -8k_x \frac{\epsilon_{13}}{\epsilon_{33}} \left(\left[k_x \frac{\epsilon_{13}}{\epsilon_{33}} \right]^2 - t_1 \right) + 16t_2,$$

и

$$t_1 = \frac{1}{\epsilon_{33}} \left\{ \epsilon_{13}^2 + \epsilon_{23}^2 - \epsilon_{33} \left[\epsilon_{11} + \epsilon_{22} - k_x^2 \left(1 + \frac{\epsilon_{11}}{\epsilon_{33}} \right) \right] \right\},$$

$$t_2 = \frac{k_x}{\epsilon_{33}} (\epsilon_{13}\epsilon_{22} - \epsilon_{12}\epsilon_{23} - \epsilon_{13}k_x^2),$$

$$t_3 = \frac{1}{\epsilon_{33}} \left\{ -\epsilon_{11}\epsilon_{23}^2 - \epsilon_{22}\epsilon_{13}^2 - \epsilon_{33}\epsilon_{12}^2 + 2[\epsilon_{12}\epsilon_{13}\epsilon_{23}] + \right. \\ \left. + k_x^2 \left[\epsilon_{12}^2 + \epsilon_{13}^2 - \epsilon_{11}(\epsilon_{22} + \epsilon_{33} - k_x^2) + \epsilon_{11}\epsilon_{22}\epsilon_{33} \right] \right\}. \quad (4.15)$$

Здесь $q_{1/2}^+$ ($q_{1/2}^-$) описывают прошедшую/отраженную волны соответственно. Система (4.11) может быть теперь решена с использованием коэффициентов β_i , полученных по формулам (4.13).

Элементы матрицы Δ являются комплексными числами и выражаются по известным формулам через компоненты диэлектрического тензора с учетом параметров падающей волны [11]. При этом, если элементы матрицы Δ не зависят от z , то решение данной линейной системы может быть выражено через экспоненту от этой матрицы в виде:

$$\chi(z) = \exp\left(\frac{i\omega z}{c} \Delta\right) \chi(0) \equiv P(z) \chi(0), \quad (4.16)$$

где $\chi(z) = (E_x, H_y, E_y, -H_x)^T$, $P(z)$ – 4x4 матрица Берремана для однородной оптической среды.

Амплитуды отраженной и прошедшей волн могут быть получены как решение системы линейных алгебраических уравнений:

$$\chi_T = P(z)(\chi_I + \chi_R), \quad (4.17)$$

где

$\chi_I = (E_x, r_x E_x, E_y, r_y E_y)^T$ – вектор падающей волны,

$\chi_R = (R_x, -r_x R_x, R_y, -r_y R_y)^T$ – вектор отраженной волны,

$\chi_T = (T_x, r_x^* T_x, T_y, r_y^* T_y)^T$ – вектор прошедшей волны,

$$r_x = \frac{n_1}{\cos \alpha_1}, \quad r_y = n_1 \cos \alpha_1, \quad r_x^* = \frac{n_2}{\cos \alpha_2}, \quad r_y^* = n_2 \cos \alpha_2.$$

Здесь n_1 и n_2 – действительные коэффициенты преломления изотропных входной и выходной сред; α_1 и α_2 – углы светового луча во входной и выходной средах. Между параметрами n_i и α_i выполняется соотношение (закон Снеллиуса) $n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$.

Заметим, что приведенное выше представление векторов χ_I, χ_T, χ_R справедливо только для *изотропных* сред, где имеет место однозначная связь между компонентами напряженностей электрического и магнитного полей. Поэтому далее считаем, что входная и выходная среды изотропны.

Решение системы (4.17) сводится к решению линейной алгебраической системы уравнений 2x2, которая, к сожалению, может быть вырождена. Для решения данной системы применяется регуляризованный устойчивый метод, работающий при любых входных данных.

Найденные комплексные значения амплитуд T_x, T_y, R_x, R_y служат основой для вычисления основных параметров для отраженного и прошедшего лучей: коэффициентов отражения и пропускания, векторов Стокса, степени деполяризации и многих других параметров. В частности, коэффициенты отражения и пропускания окончательно вычисляются по формулам:

$$T = \frac{n_2 \cos \alpha_2}{n_1 \cos \alpha_1} \frac{|T_x / \cos \alpha_2|^2 + |T_y|^2}{|E_x / \cos \alpha_1|^2 + |E_y|^2}, \quad R = \frac{|R_x / \cos \alpha_1|^2 + |R_y|^2}{|E_x / \cos \alpha_1|^2 + |E_y|^2}.$$

4.3. Расчет оптически толстых слоев

Изложенная методика имеет определенные сложности при работе с толстыми слоями. При прохождении волны через толстый слой в последнем возникают многократные отражения света, что приводит к набегу фаз большему, чем длина когерентности света Δl . Такие колебания в реальной оптической системе не наблюдаются, что связано со смазыванием интерференционной картины. Можно считать также, что точность измерительного прибора (например, спектрофотометра) ниже периода этих колебаний и поэтому при измерениях эти колебания усредняются.

Значительная толщина подложки (по сравнению с длиной волны), вызывает существенные колебания выходного рассчитанного спектра (отражения и пропускания). Для приведения в соответствие измеряемых данных и расчетов необходимо внести усреднение в расчет результирующих спектров.

Подобное усреднение выполняется на случайной сетке по диапазону $\Delta\lambda$, определяемому обычно используемой для спектрофотометров длиной когерентности света:

$$\Delta l = \lambda^2 / \Delta\lambda.$$

4.4. Изотропные пленки

Для изотропных материалов пропускание и отражение могут быть описаны более простыми уравнениями по сравнению с приближением 4x4. Несмотря на это, решение в рамках общего алгоритма бывает полезно и часто продиктовано необходимостью единого подхода к решению задачи о пропускании и/или отражении света при наличии в многослойной

структуре изотропных и анизотропных слоев. Собственные значения матрицы Δ для изотропных материалов могут быть получены по формуле:

$$q_1 = q_2 = -q_3 = -q_4 \equiv q = \sqrt{\varepsilon - k_x^2} = \sqrt{n^2 - n_a^2 \sin^2 \Phi_a}, \quad (4.18)$$

где ε - функция диэлектрической проницаемости изотропного материала. В этом случае матрица системы (4.11) становится вырожденной, и амплитуды прошедшей и отраженной волн не могут быть однозначно определены. Тем не менее разложение в ряд Фурье (4.11) и разделение соответствующих сумм для синуса и косинуса приводит к следующему результату:

$$T_p = E \left\{ 1 + \frac{(ik_0 dq)^2}{2!} + \frac{(ik_0 dq)^4}{4!} + \dots \right\} + i \frac{\Delta}{q} \left\{ \frac{ik_0 dq}{1!} + \frac{(ik_0 dq)^3}{3!} + \dots \right\} \quad (4.19)$$

$$T_p = E \cos(k_0 dq) + i \frac{\Delta}{q} \sin(k_0 dq) \quad (4.20)$$

$$T_p = \begin{pmatrix} \cos k_0 dq & 0 & 0 & i \frac{q}{\varepsilon} \sin k_0 dq \\ 0 & \cos k_0 dq & -\frac{i}{q} \sin k_0 dq & 0 \\ 0 & -iq \sin k_0 dq & \cos k_0 dq & 0 \\ i \frac{\varepsilon}{q} \sin k_0 dq & 0 & 0 & \cos k_0 dq \end{pmatrix}, \quad (4.21)$$

где учтены равенства $\Delta^2 = q^2 E$ и $\Delta^3 = q^2 \Delta$.

Выражение (4.21) рекомендуется использовать в случае, когда величина $k_0 d \|q_1^\pm - q_2^\pm\|$ мала и обратить матрицу (4.12) численно невозможно. Заметим, что значение определителя правой части (4.12) (или близость/кратность ее собственных значений) может служить тестом на проверку анизотропности или изотропности материала.

4.5. Комбинированный метод

При решении обратной задачи о вычислении параметров анизотропного слоя, расположенного на толстой изотропной подложке, по измеренным пропусканию и отражению для ускорения расчетов бывает удобнее использовать комбинированную методику: прохождение светом анизотропного слоя рассчитывать матричным методом, а для толстой подложки использовать методику классических расчетов. Данный подход применим только для расчета интенсивностей прошедшего и отраженного света. Однако именно эти величины и измеряются спектрофотометром и являются входными данными для обратной задачи в нашей постановке.

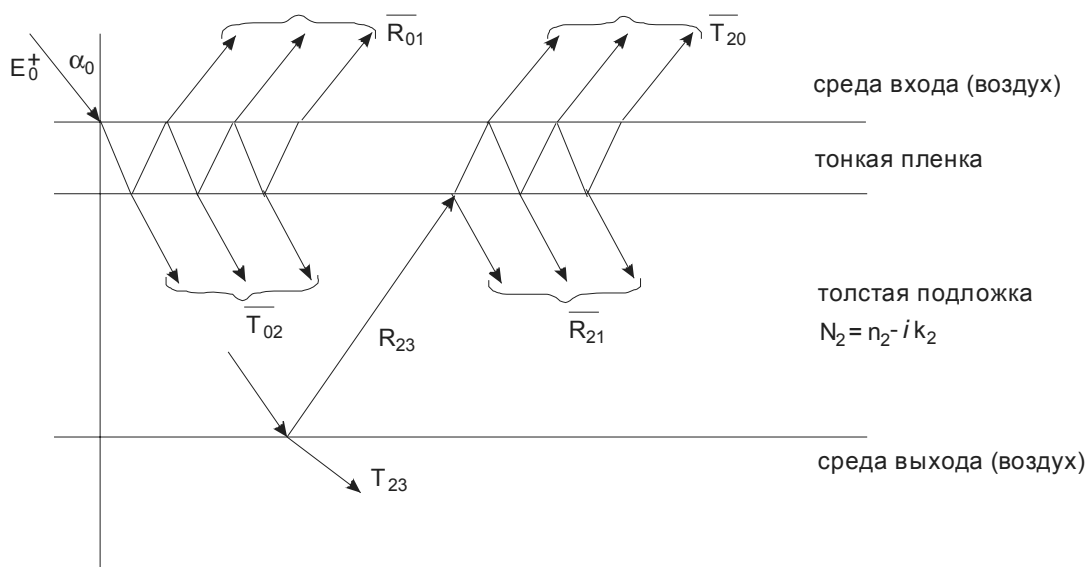


Рис. 13. Распространение электромагнитной волны в двухслойной системе

На рис. 13 представлена схема расчета комбинированного метода. Здесь $\overline{T_{02}}$ - общая энергия первичной волны, прошедшей из 0 во 2 среду, $\overline{R_{01}}$ - общая энергия первичной волны, отраженной от 0 границы, $\overline{T_{20}}$ - энергия волны, отраженной от нижней границы и прошедшей из 2 в 0 среду, $\overline{R_{21}}$ - общая энергия волны, отраженной на границе 2 – 1, с учетом многократного отражения в тонкой пленке.

Применение комбинированной методики в дальнейшем позволяет значительно сократить время решения обратной задачи. На основе приведенных методик проводится расчет пропускания и отражения в прямой и обратной задачах.

В расширенной постановке прямая задача используется для моделирования оптических систем, состоящих из совокупности всевозможных оптических элементов. Процесс моделирования таких систем очень важен для приложений, связанных с проектированием различных оптических конструкций и, в частности, ЖКД. Ниже приведена постановка прямой задачи, решение которой реализовано в программном обеспечении.

Для оптических систем, состоящих из тонких пленок произвольной природы, подложек, различных оптических элементов (поляризаторы, ретардеры, воздушные прослойки и т.п.), для произвольных поляризаций падающего света требуется вычислить все основные параметры прошедшего и отраженного света в заданном диапазоне длин волн $[\lambda_{beg}, \lambda_{end}]$ и/или в диапазоне углов падения $[\alpha_{beg}, \alpha_{end}]$.

В дальнейшем под многослойной системой будем понимать произвольный набор оптических элементов, через который проходит (или от которых отражается) луч света. Можно считать, что на пути светового луча стоит неоднородная оптическая среда. Следовательно, для многослойной системы образуется зависимость параметров среды (матрицы Δ из формулы (4.5)) от оси z , а итоговая матрица Берремана находится как произведение матриц отдельных слоев [11,16]:

$$P(z) = \prod_{i=1}^n P(z_i). \quad (4.22)$$

Заметим, что данное соотношение справедливо для оптических систем любой сложности, в частности, для систем с дискретными элементами типа поляридов, фазовых пластинок и т.п. В силу

непрерывности тангенциальных компонент электрического и магнитного полей никаких дополнительных граничных условий в случае многослойной системы не требуется.

Из соотношения (4.17) вытекает, что вычислительные затраты, необходимые для расчета матрицы $P(z)$, зависят от вычислительных затрат на расчет экспоненты от матрицы Δ_i для каждого однородного слоя.

Состояние векторного поля на выходе такой системы с матрицей $P(z)$, рассчитанной в соответствии с формулой (4.22), снова определяется по формуле (4.16).

Напомним, что дополнительных вычислительных затрат требуют расчеты прохождения света сквозь многослойную структуру при наличии толстых слоев. Как отмечалось выше, в этом случае при вычислении по формуле (4.16) с матрицей (4.22) следует выполнять усреднение результатов по диапазону, определяемому длиной когерентности Δl .

Тема 5. Расчет оптических элементов

5.1. Примеры оптических элементов

Перечислим оптические элементы, которые могут быть использованы при моделировании оптических систем с помощью специального программного обеспечения.

Толстый изотропный слой. Используется для задания оптических параметров изотропных пленок, в частности, покрытий из лака.

Для изотропного слоя задаются толщина и оптические параметры материала:

- показатель преломления n ;
- коэффициент поглощения k .

Параметры материала могут быть заданы как постоянными во всем диапазоне длин волн $[\lambda_{beg}, \lambda_{end}]$, так и зависящими от λ : $n(\lambda), k(\lambda)$.

Тонкий анизотропный слой. Используется для задания оптических параметров анизотропных пленок.

Для анизотропного слоя задаются толщина и диэлектрические параметры материала:

- показатели преломления для всех трех главных компонент диэлектрического тензора n_a, n_b, n_c ;
- коэффициенты поглощения для всех главных компонент диэлектрического тензора k_a, k_b, k_c ;
- углы Эйлера θ, φ, ψ .

Все параметры материала, кроме углов Эйлера, могут быть заданы как постоянными во всем диапазоне длин волн $[\lambda_{beg}, \lambda_{end}]$, так и зависящими от λ : $n(\lambda), k(\lambda)$.

Толстая изотропная подложка. Используется для задания оптических параметров изотропных подложек, к которым относятся стекло и различные полимерные пленки.

Для изотропной подложки задаются толщина, которая, как правило, имеет большое значение (порядка 1 мм), и параметры материала:

- показатель преломления n ;
- коэффициент поглощения k .

Параметры подложки могут быть заданы как постоянными во всем диапазоне длин волн $[\lambda_{beg}, \lambda_{end}]$, так и зависящими от λ : $n(\lambda), k(\lambda)$.

Толстая анизотропная подложка. Используется для задания оптических параметров анизотропных подложек, к которым относятся некоторые полимерные пленки.

Для анизотропной подложки задаются толщина и параметры материала:

- показатели преломления для всех трех главных компонент диэлектрического тензора n_a, n_b, n_c ;
- коэффициенты поглощения для всех трех главных компонент диэлектрического тензора k_a, k_b, k_c ;
- углы Эйлера θ, φ, ψ .

Все параметры материала, кроме углов Эйлера, могут быть заданы как постоянными во всем диапазоне длин волн $[\lambda_{beg}, \lambda_{end}]$, так и зависящими от λ : $n(\lambda), k(\lambda)$.

Поляризатор. Задается как толстый анизотропный материал с постоянным значением показателя преломления для всех осей диэлектрического тензора. Значения коэффициента поглощения выбираются относительно небольшими вдоль пропускающей оси поляризатора и значительными, обеспечивающими практически полное поглощение, вдоль второй оси.

Если в качестве поляризатора выступает тонкопленочный материал, то его параметры можно также задать, определив их для тонкой анизотропной пленки.

Для поляризатора задаются толщина и следующие параметры:

- один показатель преломления для всех трех составляющих диэлектрического тензора $n_a = n_b = n_c$;
- коэффициенты поглощения для пропускающей оси поляризатора k_{\min} и для поглощающей оси k_{\max} ;
- тип поляризатора, определяющий значение коэффициента поглощения в вертикальном направлении: o -поляризатор ($k_z = k_{\min}$) или e -поляризатор ($k_z = k_{\max}$);
- углы Эйлера устанавливаются равными 0.

Параметры поляризатора могут задаваться либо постоянными значениями на всем рассчитываемом диапазоне, что достаточно для моделирования поляризующего эффекта, либо зависимостью, вытекающей из дисперсионных соотношений. Второй способ предпочтительнее при проектировании реальных поляризаторов.

Фазовая пластинка. Задается как толстый анизотропный материал с постоянным значением коэффициента поглощения и показателя преломления для всех осей диэлектрического тензора. Значения показателя преломления выбираются только одного направления (*o*-направление) в плоскости пластинки. Значения показателя преломления в перпендикулярном направлении (*e*-направление) на плоскости рассчитывается автоматически по заданной фазовой задержке для каждой длины волны в диапазоне $[\lambda_{beg}, \lambda_{end}]$.

Для фазовой пластинки задаются толщина и следующие параметры:

- показатель преломления для одного направления в плоскости пластинки n_0 ;
- одно значение коэффициента поглощения для всех трех составляющих диэлектрического тензора $k_a = k_b = k_c$;
- тип фазовой пластинки, определяющий значение показателя преломления в вертикальном направлении: *o*-фазовая пластинка ($n_z = n_o$) или *e*-фазовая пластинка ($n_z = n_e$);
- углы Эйлера устанавливаются равными 0.

Параметры фазовой пластинки могут быть заданы только в виде постоянных значений, что достаточно для моделирования эффекта фазовой задержки.

Слой воздуха. Используется для моделирования воздушных прослоек, которые могут присутствовать в оптических системах. Задается

как изотропный материал любой толщины с постоянными показателем преломления и коэффициентом поглощения.

Для воздушной прослойки задается толщина и следующие параметры:

- показатель преломления n , по умолчанию $n = 1.00027$;
- коэффициент поглощения k , по умолчанию $k = 0$;
- толщина слоя по умолчанию задается равной 10 нм, хотя для моделирования реального воздушного слоя можно задать любое значение, в том числе и гораздо большее.

Численные модели позволяют правильно определять множество выходных параметров: волновые и цветовые параметры волновых пластинок, а также их спектральные характеристики и т.п.

5.2. Примеры расчета оптических характеристик многослойных структур

Приведем примеры моделирования многослойной структуры, состоящей из основных оптических элементов. Ядром оптической системы будет служить структура, представленная на рис. 14:

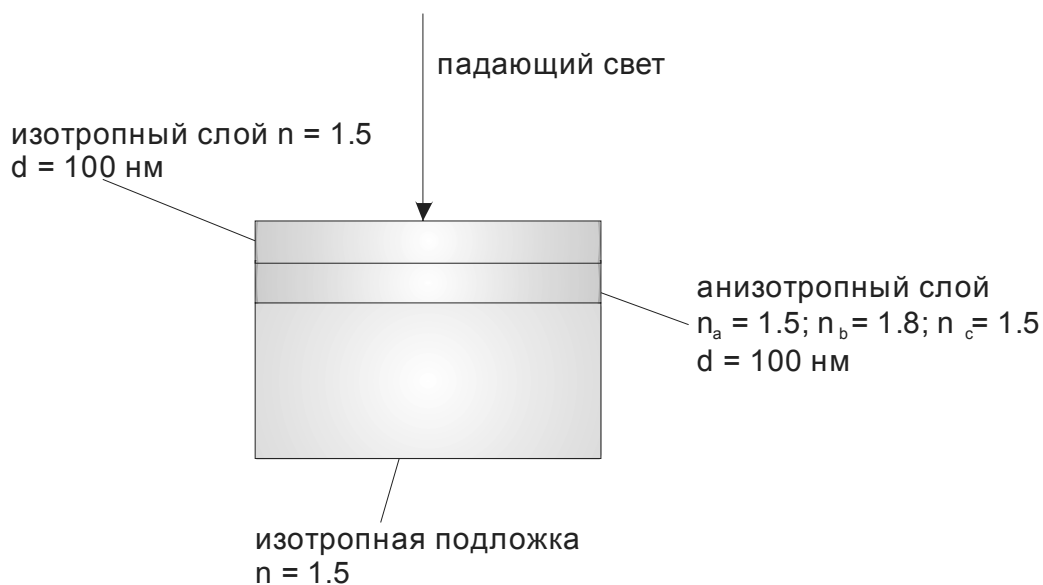


Рис. 14. Многослойная структура

Рассмотрим различные варианты падения света для приведенной структуры. Для наглядности приведем результирующие спектры интенсивностей отражения и пропускания (см. рис.15 - 20).

1. *Линейная поляризация.* $|E_s|=1$; $|E_p|=0$; фазовая задержка = 0; вектор Стокса = (1, 1, 0, 0).

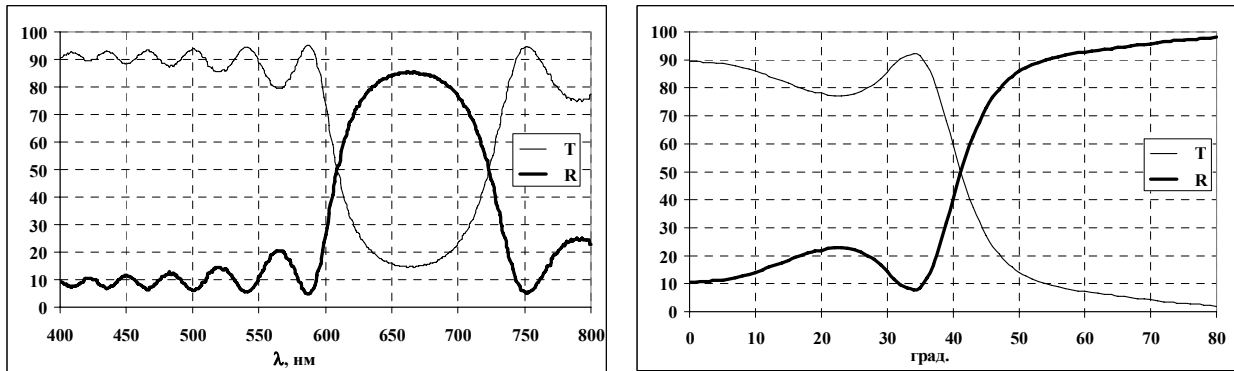


Рис. 15. Линейная поляризация. Интенсивности пропускания и отражения.

2. *Круговая поляризация.* $|E_s|=1$; $|E_p|=1$; фазовая задержка = 90; вектор Стокса = (1, 0, 0, 1)

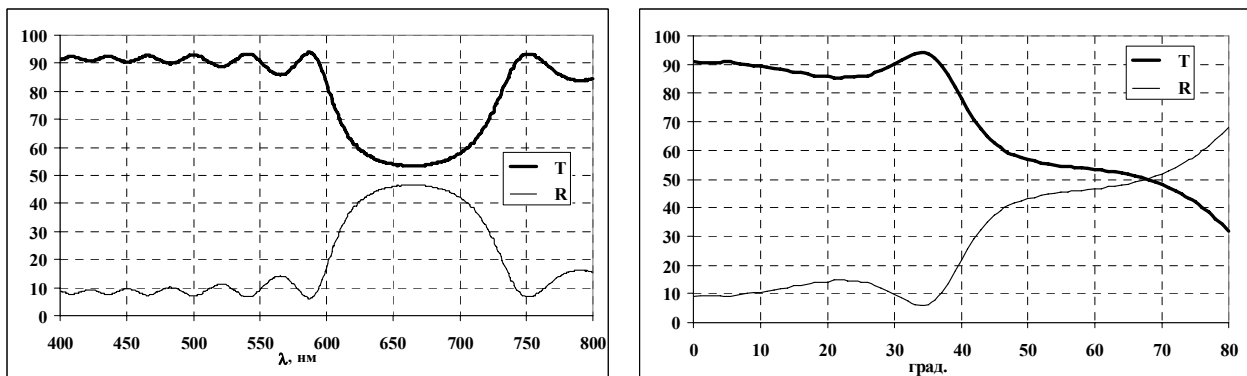


Рис. 16. Круговая поляризация - вектор Стокса = (1, 0, 0, 1)

Рис. 17. Неполаризованный свет - вектор Стокса = (1, 0, 0, 0)

Установим на пути неполяризованного света поляризатор. Интенсивность дошедшего до многослойной структуры света практически снижается вдвое, и он становится линейно поляризованным.

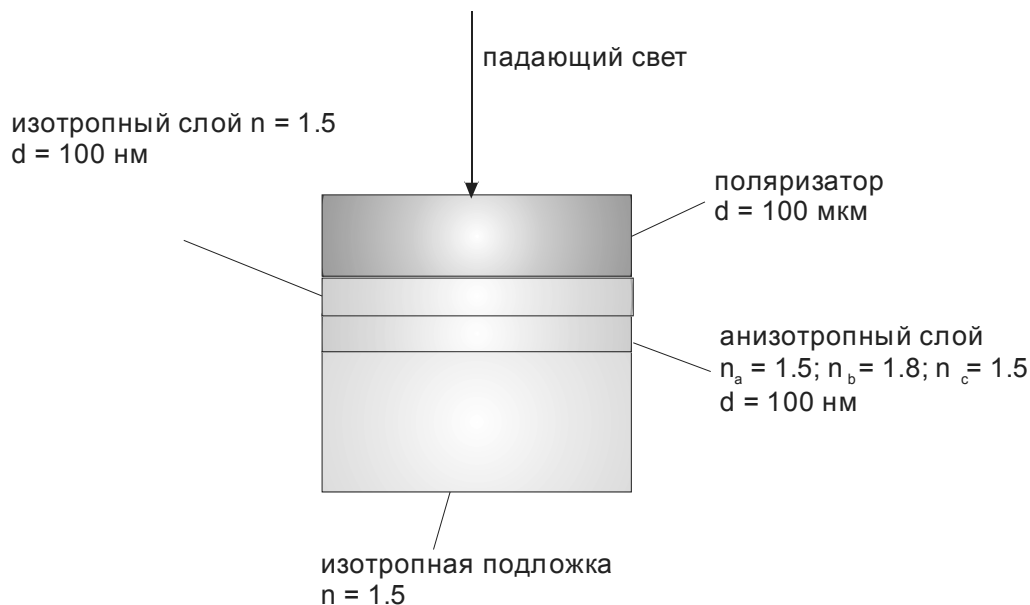


Рис. 18. Многослойная структура с поляризатором

Приведем спектры пропускания и отражения (рис. 19, 20) при падении неполяризованного света на многослойную структуру с поляризатором (рис. 18).

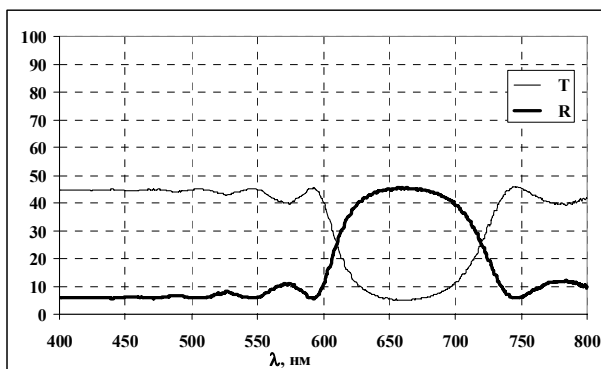


Рис. 19. Неполяризованный свет.

Моделирование многослойной структуры с поляризатором. Интенсивности пропускания и отражения

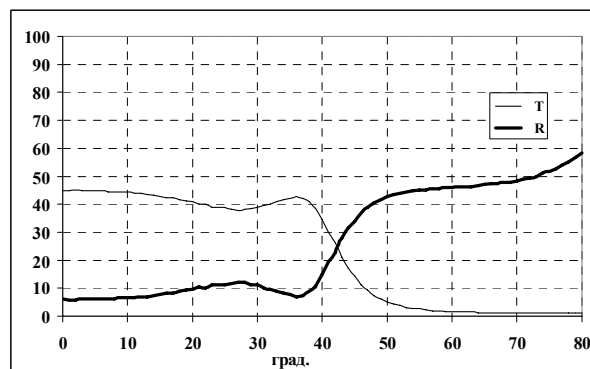


Рис. 20. Неполяризованный свет.

Моделирование многослойной структуры с e-поляризатором. Интенсивности пропускания и отражения

Тема 6. Экспериментальные методы исследования оптических покрытий

Спектроскопические измерения являются в настоящий момент стандартными методами изучения оптических свойств как твердых, так и жидких материалов. Однако большинство развитых методик ограничивается лишь определением оптических параметров изотропных материалов. Изучение систем, состоящих из большого количества анизотропных слоев материалов или же имеющих сложную геометрическую структуру, ограничено сбором и качественной интерпретацией экспериментальных данных. Это происходит по нескольким причинам, и главным образом из-за сложности математического аппарата, применяемого для описания и моделирования таких систем.

Лишь в последние годы (в конце XX в.) был разработан и обоснован [11, 17], а затем развит [12], [16] и улучшен [15] достаточно удобный математический аппарат для численного моделирования взаимодействия света с анизотропными материалами. Этот аппарат базируется на теории Максвелла. Для практического же применения, кроме точного математического описания процесса взаимодействия света с веществом на наноуровне, необходимо также иметь возможность точного измерения оптических параметров всего анизотропного образца. Для дизайна реальных оптических устройств требуется современное высокоточное оборудование – спектрофотометры, поляриметры, эллипсометры и профилометры, которые обеспечивали бы необходимую и достаточную экспериментальную информацию. Владение уникальными методами математического исследования анизотропных наноструктур и соответствующими экспериментальными установками позволяет по-новому рассмотреть физический феномен тонкопленочных покрытий,

дифракционных оптических элементов, фотонных кристаллов и устройств на их основе.

6.1. Оптические приборы

Рассмотрим различные типы спектрофотометрического оборудования, которое может использоваться для исследования оптических устройств. В настоящее время появились эллипсометры, спектрофотометры и поляриметры очень высокого качества. Широко известны такие фирмы, как «J. A. Woollam Co. , Inc» - специализируется на разработке эллипсометров, «PerkinElmer Inc» - выпускает широкий спектр фотометрического оборудования, в частности, высококачественные спектрометры, «Varian, Inc» - специализируется в области хроматографического и спектрофотометрического оборудования, «Axometrics, Inc» - небольшая фирма, выпускающая поляриметры (ее оборудование в свое время было установлено на космической станции «Мир»), и многие другие.

Например, фирма «PerkinElmer Inc» выпускает прецизионный УФ/Вид/БЛИК спектрометр Lambda 950 с двумя детекторами: фотоумножителем и стабилизированным по температуре PbS-детектором для обширного круга задач. Такой спектрометр обеспечивает широкий выбор методов измерения: сканирование по длине волны, сканирование по времени (кинетические исследования) и количественный анализ (фотометрия). Возможность подключения специализированных модулей для автоматического измерения интенсивностей пропускания и отражения от образцов под различными углами падения света позволяет быстро и точно получать разнообразные оптические характеристики материалов.

Фирма «J.A. Woollam Co., Inc» специализируется на производстве спектральных эллипсометров для неразрушающего контроля и получения оптических характеристик тонких пленок и объемных материалов. На

основе измерения тех же интенсивностей пропускания и отражения вычисляется (измеряется) изменение поляризации света после взаимодействия с веществом. На основании этих измерений так же, как и в случае спектрометрических измерений, становится возможным оценить как оптические параметры материала, например, его диэлектрическую проницаемость, так и его геометрические характеристики, в частности, толщину тонкой пленки.

Спектрофотометрическое измерительное оборудование может применяться для характеристики всех типов материалов: диэлектриков, полупроводников, органических материалов и многих других.

6.2. Поляриметрия

Поляриметрия [18] объединяет методы исследования излучения, основанные на измерении поляризации излучения. Поляриметр – это научный инструмент, прибор, используемый для измерения поляризации света или изменения поляризации света при взаимодействии с образцом. В зависимости от конструктивных особенностей и сложности решаемых задач поляриметры подразделяются на одноволновые и проводящие измерения в широком диапазоне длин волн.

Поляриметрия тонкопленочных покрытий и поверхностей более известна под названием *эллипсометрии*.

С помощью оптических поляриметров определяют величину вращения плоскости поляризации света при прохождении его через оптическиактивные среды (твёрдые вещества или растворы). Простейшие поляриметры, предназначенные для решения какой-нибудь одной задачи, могут измерять поляризацию лишь на одной длине волны. Например, поляриметрия широко применяется в аналитической химии для быстрого измерения концентрации оптическиактивных веществ (сахариметрия), для

идентификации эфирных масел и в других исследованиях. В инновационных научных исследованиях и современном производстве оптических компонент используются автоматизированные поляриметры, работающие в широком диапазоне длин волн. Обычно это компьютеризированный комплекс, который позволяет решать широкий круг задач по определению оптических параметров образцов, а часто и параметры его геометрической структуры.

Поляриметрия позволяет измерить элементы матрицы Мюллера исследуемого образца [13].

Эллипсометрия

Эллипсометрия является универсальным и мощным оптическим инструментом исследования оптических свойств (комплексного показателя преломления или же функции диэлектрической проницаемости) тонких пленок и поверхностей. Эта методика находит применение в различных областях науки и техники: от физики полупроводников и фотонных кристаллов до микроэлектроники, биологии и медицины, от фундаментальных исследований до практических промышленных применений. Эллипсометрия - это высокочувствительная измерительная технология, обеспечивающая широкие возможности характеристики тонкопленочных покрытий. Кроме всего прочего, поскольку измерения проводятся в оптическом диапазоне, эта технология является бесконтактной и неразрушающей.

Анализируя изменение поляризации света, отраженного от образца, эллипсометрия позволяет получать информацию о слоях, толщина которых меньше длины волны падающего света, вплоть до толщины атомарного слоя. С помощью эллипсометрических измерений возможно вычисление комплекснозначного показателя преломления или тензора диэлектрической проницаемости материала. С ее помощью можно оценить физические постоянные и множество свойств образца, включающих

морфологию, качество кристаллов, химический состав, электрическую проводимость. Она широко применяется для определения толщин однослойных и многослойных тонкопленочных покрытий толщиной от нескольких ангстрем до нескольких микрон с очень высокой точностью.

Название «эллипсометрия» эта методика получила потому, что наиболее распространенное состояние поляризации света является эллиптическим. Эллипсометрия известна более века (возникла в конце позапрошлого века, связана с именами Друде и Рэлея) и активно используется по сей день. Она становится все более популярным инструментом исследований в биологии и медицине. И именно в этих областях знаний появляются новые оптические задачи, такие, как исследование нестабильных поверхностей жидкости, требующие дальнейшего развития поляриметрии и эллипсометрии.

Эллипсометрия позволяет измерить изменение поляризации света при отражении от образца или при прохождении сквозь тестируемый образец. Это изменение характеризуется двумя параметрами – отношением амплитуд ψ и разностью фаз Δ . Измеренные параметры зависят от оптических свойств плоскопараллельного слоя и его толщины. Таким образом, эллипсометрия в первую очередь нацелена на определение толщины тонкой пленки и ее оптических свойств. Однако эллипсометрические измерения позволяют также описывать структуру, шероховатость поверхности, наличие инородных вкраплений и других параметров материала, которые влияют на его оптические свойства.

Свет представляет собой распространяющуюся в пространстве электромагнитную волну. С точки зрения эллипсометрии естественным является изучение поляризации света – его поведения в зависимости от пространственных и временных координат. Вектор электрического поля волны света всегда ортогонально направлению распространения. Следовательно, свет, распространяющийся вдоль оси z , может быть

описан своими x - и y - компонентами. В том случае, когда вектор электрического поля изменяет направление (в плоскости, ортогональной оси распространения) и фазу случайным образом, говорят, что свет деполаризован. В случае спектрофотометрических измерений надежнее изучать поведение таких волн, которые распространяются по известному, заранее заданному закону. В этом случае говорят, что свет поляризован. Если фазы двух ортогональных световых волн совпадают, то результирующая волна будет *линейно-поляризованной* (рис. 21.а).

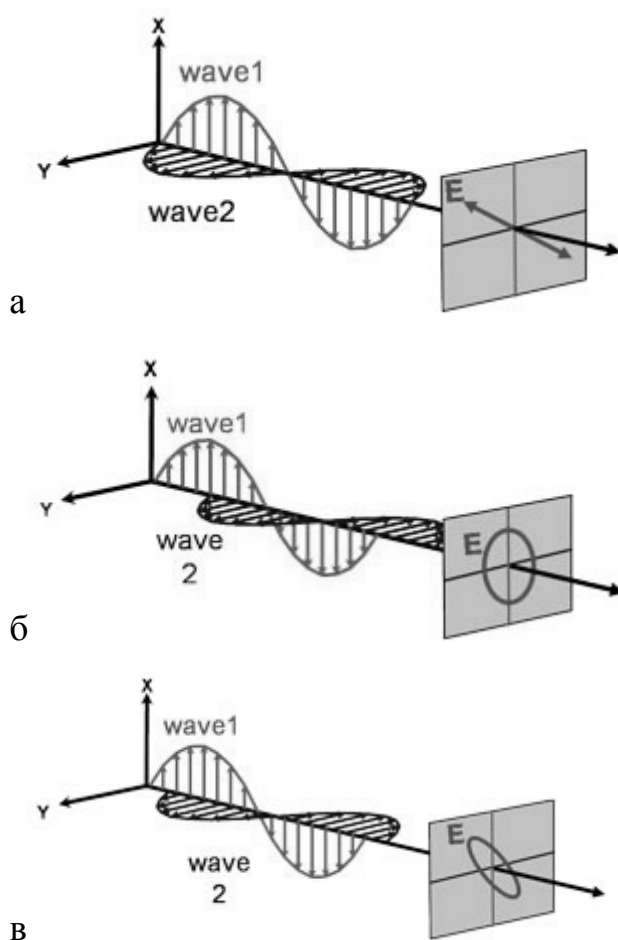


Рис. 21. Комбинации ортогональных волн, демонстрирующие разные типы поляризации: линейную (а), круговую (б), эллиптическую (в)

Отношение амплитуд определяет результирующую поляризацию. Если сдвиг фаз составляет 90° и амплитуды волн равны по величине, то результирующая волна будет обладать *круговой поляризацией* (рис. 21.б). Наиболее общим видом поляризации является *эллиптическая*

поляризация (рис. 21.в), которая является комбинацией ортогональных волн с произвольными амплитудами и сдвигами фаз. Именно это свойство и определило название «**эллипсометрия**».

Спектроскопия

Спектроскопия позволяет измерить интенсивность отраженного или прошедшего лучей света после взаимодействия с образцом. Спектрометр - прибор, позволяющий измерять распределение энергии источника света по частотам излучения.

6.3. Оптические характеристики материалов

В общем случае оптические характеристики, т.е. то, каким образом электромагнитное излучение взаимодействует с материалом, выражаются через компоненты тензоров диэлектрической и магнитной проницаемости, а также тензора оптической активности. Во многих практически важных случаях магнитной анизотропией и оптической активностью можно пренебречь, поэтому далее ограничимся рассмотрением случая, когда оптические свойства могут быть описаны лишь с помощью диэлектрической проницаемости. В случае изотропных материалов для описания оптических свойств достаточно одного комплексного числа $\tilde{n} = n + ik$, состоящего из показателя преломления n и коэффициента поглощения k . Тензор диэлектрической проницаемости имеет вид $\tilde{\epsilon} = \epsilon_1 + i\epsilon_2$, при этом подразумевается следующая связь между диэлектрической проницаемостью и показателем преломления: $\tilde{\epsilon} = \tilde{n}^2$. Показатель преломления описывает фазовую скорость света в веществе по сравнению с фазовой скоростью света c в вакууме, $v = c/n$. Свет замедляет скорость при входе в материал с большим показателем преломления. Поскольку частота остается постоянной, то изменяется (становится меньше) длина волны. Коэффициент затухания k описывает потери волновой энергии в веществе. Его связь с коэффициентом

поглощения α описывается формулой $\alpha = \frac{4\pi k}{\lambda}$, и свет теряет энергию в поглощающем материале в соответствии с законом Бэра $I(z) = I(0)e^{-\alpha z}$. Таким образом, коэффициент затухания позволяет оценить, насколько быстро световая волна затухает в веществе. Это свойство проиллюстрировано на рис. 22, где волна проходит через два слоя оптически различных материалов. Волна из воздуха проникает в сначала поглощающую среду (слой 1) и затем в прозрачную среду (слой 2). Фазовая скорость и длина волны изменяются в каждом слое в соответствии с показателем преломления ($n=4$ в первом слое и $n=2$ во втором).

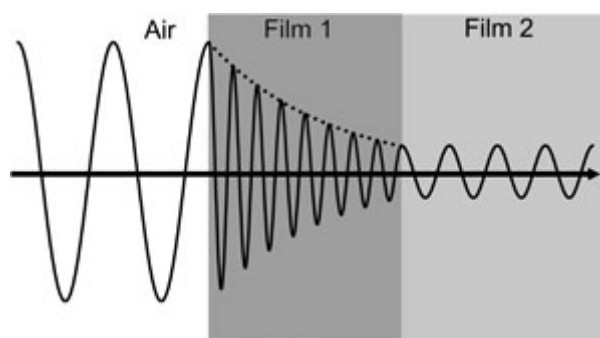


Рис . 22. Прохождение света сквозь поглощающую и прозрачную среды

На рис. 23 [19] показаны константы диэлектрической проницаемости серебра в диапазоне от инфракрасного до ультрафиолетового излучения. Величина диэлектрической проницаемости зависит от длины волны. Поглощение ($k > 0$) имеет место как в инфракрасном, так и в ультрафиолетовом диапазоне, однако механизмы поглощения при этом различны. Поглощение в инфракрасном диапазоне (IR) чаще всего происходит вследствие движения (колебаний) молекул, или на свободных носителях. В ультрафиолетовой области поглощение осуществляется в основном благодаря перемещению электронов в зону проводимости.

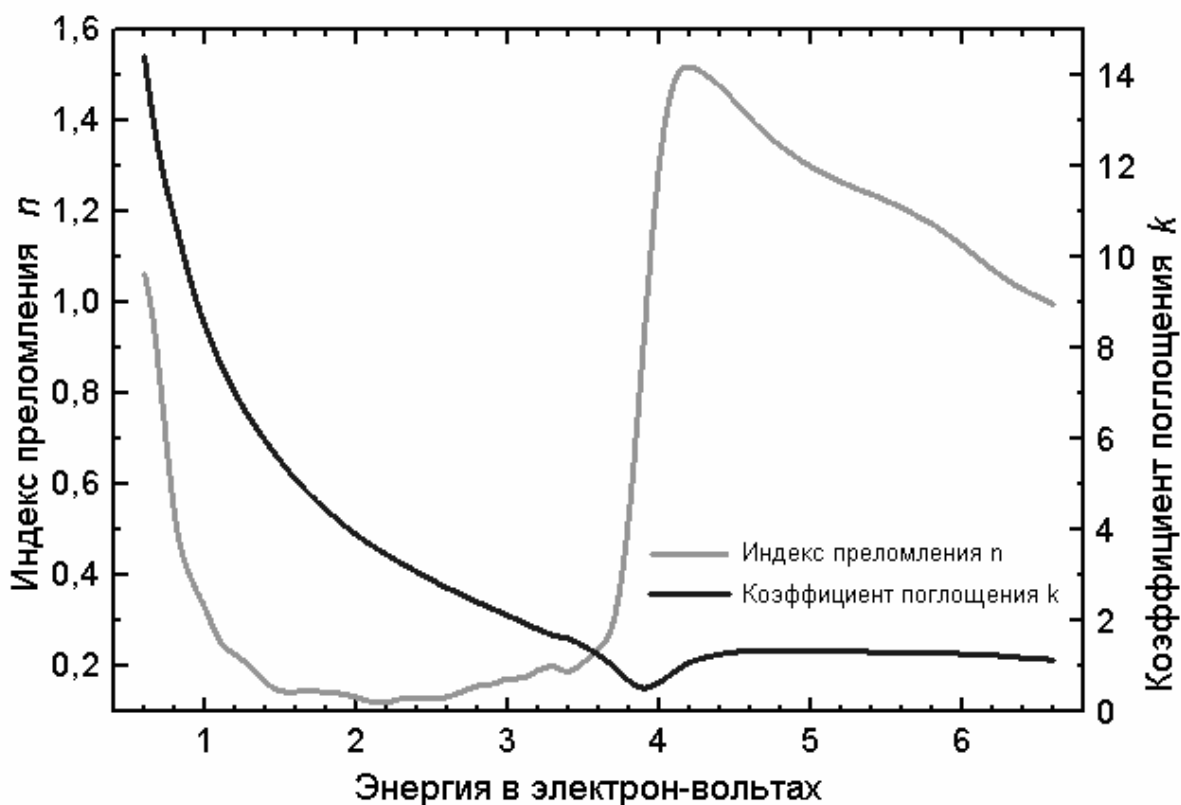


Рис. 23. Комплексная диэлектрическая функция серебра в диапазоне от инфракрасного (0 eV) до ультрафиолетового (7 eV) излучения

Можно также отметить, что действительная и мнимая части индекса диэлектрической проницаемости не являются независимыми друг от друга величинами. Эти кривые связаны между собой – действительная и мнимая части удовлетворяют соотношению Крамерса—Кронига, поскольку функция диэлектрической проницаемости является аналитической.

6.4. Взаимодействие света с веществом

Уравнения Максвелла, с помощью которых описывается взаимодействие света с веществом, должны выполняться и на границе раздела двух сред. Падающий луч отражается и преломляется на границе, как показано на рис. 24.

Угол между падающим лучом и нормалью к плоскости падения ($\phi_{incident}$) равен углу отражения ($\phi_{reflected}$), а вот преломленный луч уходит внутрь материала под углом $\phi_{transmitted}$, который может быть определен из соотношения $n_0 \sin \phi_i = n_i \sin \phi_t$.

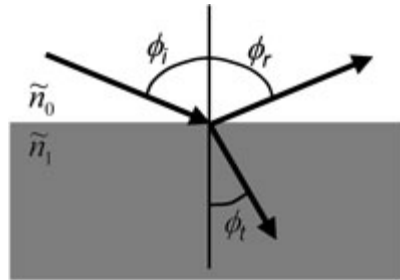


Рис. 24. Преломление и отражение света на границе раздела двух сред

В многослойной структуре такое отражение и преломление происходят на каждой плоскости раздела сред, при этом часть света отражается, а часть преломляется (см. рис. 24). Непрерывность тангенциальных составляющих электромагнитного поля на границе раздела диктует при этом различное поведение для волн, поляризованных параллельно или перпендикулярно плоскости падения. Таким образом, световой луч может быть разделен на две ортогональные компоненты по отношению к плоскости падения. Если вектор электрического поля параллелен плоскости падения, то такая волна называется ТМ-волной или р-поляризованной волной. Если же вектор электрического поля перпендикулярен плоскости падения, то такая волна называется ТЕ-волной или s-поляризованной волной. Для изотропных материалов эти две компоненты независимы и могут быть рассчитаны по отдельности. Френель вывел уравнения, связывающие интенсивности отраженного и прошедшего света на границе раздела между различными материалами (эти формулы выведены в [2]):

$$r_s = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_s = \frac{n_i \cos \theta_i - n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t},$$

$$r_p = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_p = \frac{n_t \cos \theta_i - n_i \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t},$$

$$t_s = \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)_p = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t},$$

$$t_p = \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)_p = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t}.$$

Многочисленные границы раздела поверхностей образуются при нанесении на подложку тонких пленок, при изготовлении многослойных зеркал и других оптических устройств. На каждой из этих границ свет претерпевает неоднократные отражения и преломления. И все они описываются с помощью соотношений Френеля. Очень важно учитывать все возможные изменения направления распространения светового луча, чтобы точно определить интенсивности отраженного и прошедшего пучков. С этой целью вводится понятие фазовой толщины тонкопленочного покрытия, которая определяется следующим образом:

$$\beta = 2\pi \left(\frac{t_1}{\lambda} \right) n_1 \cos \theta_1.$$

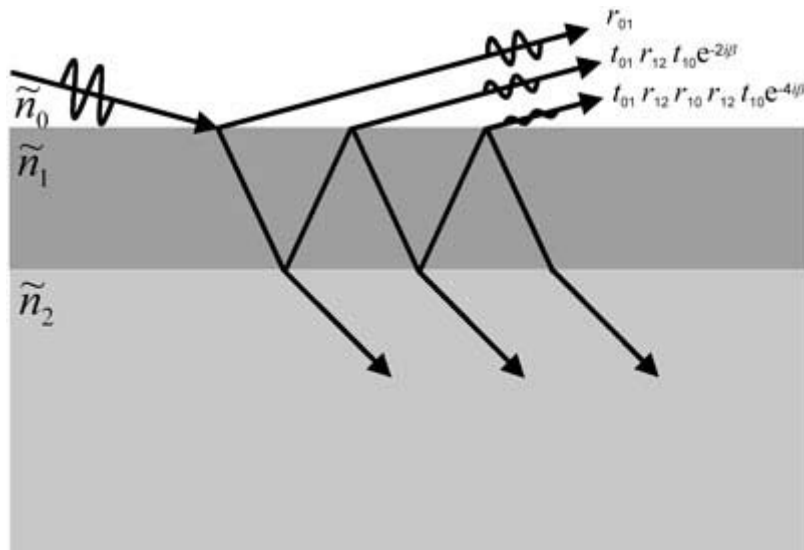


Рис. 25. Отражение и преломление света на границах раздела сред

Суперпозиция всех волн дает интерференционную картину, зависящую от фазы каждой учитываемой волны. На рис. 25 изображена схема отражения отдельных волн от тонкой пленки, нанесенной на полубесконечную подложку, и даны соответствующие формулы Френеля для вычисления интенсивностей отраженного луча.

Многочисленное отражение и преломление света на границе сред приводит к образованию множества (бесконечного) лучей внутри тонкопленочного покрытия. Интерференция между разными лучами зависит от относительного сдвига фаз и амплитуды электромагнитного поля. Для расчета вклада каждого луча в общую интенсивность можно воспользоваться соотношениями Френеля.

С точки зрения эллипсометрии особый интерес представляет вопрос о том, как в процессе отражения и преломления изменяются р- и s-компоненты электромагнитного излучения по отношению друг к другу. В этом смысле опорный луч является частью эксперимента. Луч с известной поляризацией отражается от образца или проходит сквозь образец и на выходе измеряется полученная поляризация. Это изменение поляризации и является целью эллипсометрических измерений. Результат обычно записывается в форме относительного коэффициента отражения $\rho = r_p / r_s$ и представляет собой как раз ту величину, которая описывает изменение состояния поляризации света в результате отражения. В общем случае эта величина комплексная. Записывая относительный коэффициент отражения

в виде $\frac{r_p}{r_s} = \text{tg}\psi e^{i\Delta}$, где $\text{tg}\psi = \frac{|r_p|}{|r_s|}$, $\Delta = \arg \frac{r_p}{r_s} = \arg r_p - \arg r_s \equiv \delta_p - \delta_s$,

получим выражения для вычисления эллипсометрических углов ψ и Δ .

Замечание. При малых значениях параметра r_s возможна большая ошибка в определении угла ψ (с тангенциальным ускорением). При близких значениях r_p и r_s возможна большая ошибка в определении угла

Δ , ведь при вычислении разности почти одинаковых чисел число правильных значащих цифр катастрофически уменьшается.

Углы ψ и Δ , характеризующие относительный коэффициент отражения, обычно называют поляризационными углами отражающей системы. Находя величины r_p и r_s для конкретной отражающей системы, при помощи основного уравнения эллипсометрии можно установить связь между поляризационными углами ψ , Δ и оптическими постоянными и толщинами плоскопараллельных слоев этой системы. Эта зависимость также должна учитывать угол падения света на образец φ_0 и длину волны света λ .

Пример эллипсометрических измерений представлен на рис. 26. Падающий свет линейно поляризован, с заданными p - и s -компонентами. На выходе, после отражения от образца, измеряются изменившиеся амплитуда и фаза электромагнитной волны.

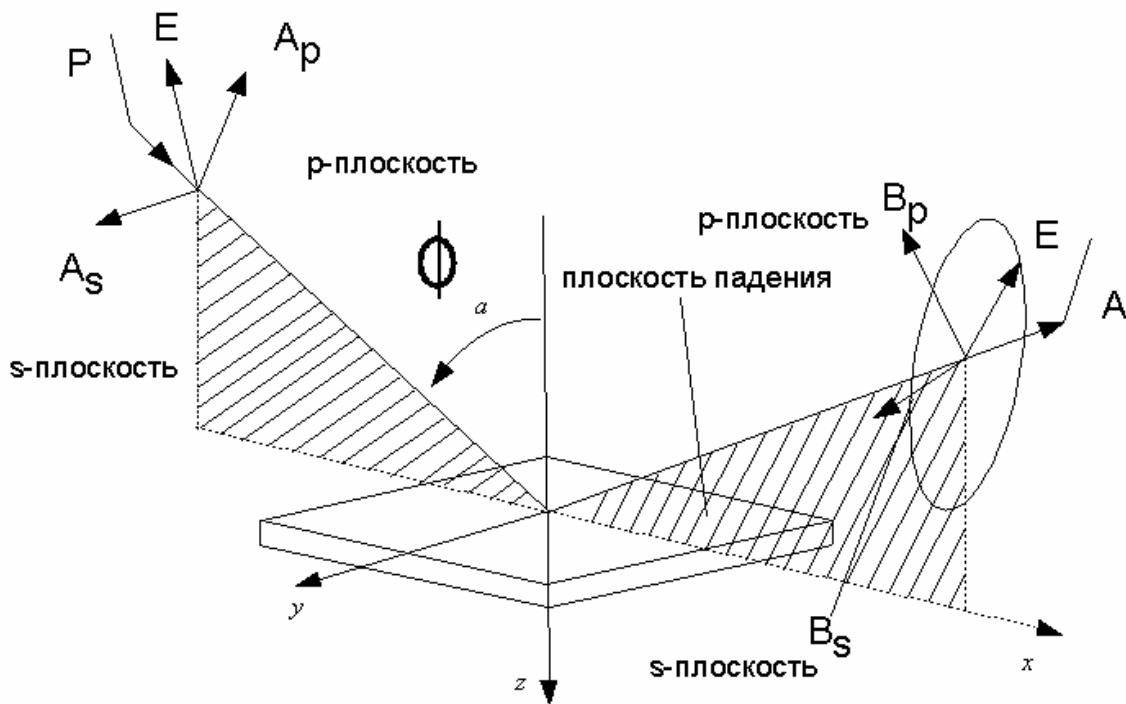


Рис. 26. Типичная конфигурация эллипсометрических измерений

Типичная схема эллипсометра изображена на рис. 27. Схематично здесь представлены: источник монохроматического света, поляризатор, измеряемый образец, поляризационный анализатор и детектор. Поляризационные генератор и анализатор сконструированы из оптических компонент, регулирующих поляризационные свойства пучка света, – это поляризаторы, компенсаторы и фазовые модуляторы. Обычно все конфигурации эллипсометров включают в себя вращающиеся анализаторы (rotating analyzer - RAE), вращающиеся поляризаторы (rotating polarizer - RPE), вращающиеся компенсаторы (rotating compensator - RCE) и фазовые модуляторы (phase modulation - PME).



Рис. 27. Эллипсометр с вращающимся анализатором

Типичный эллипсометр с вращающимся анализатором (RAE - Rotating Analyzer Ellipsometer) представленный на рис. 27, работает следующим образом. Источник света испускает деполяризованный свет в направлении поляризатора. Поляризатор пропускает лишь линейно-поляризованный свет с заданными p - и s -компонентами. Ось поляризатора сориентирована таким образом, что на образец падают обе компоненты линейно-поляризованного луча света. Этот луч отражается от образца, становится эллиптически поляризованным и следует в направлении постоянно вращающегося поляризатора (который в данном случае служит анализатором). Количество (интенсивность) прошедшего сквозь анализатор света зависит от ориентации анализатора относительно «эллиптической» электромагнитной волны, отраженной от образца. Детектор преобразует энергию световой волны в электрический сигнал для

определения отраженной поляризации. Эта информация, совместно с информацией о поляризации входного сигнала, используется для вычисления изменения поляризации, произошедшей вследствие взаимодействия света с образцом. Это и позволяет получить эллипсометрические параметры ψ и Δ . С помощью эллипсометра измеряют изменения поляризации. Однако с их помощью можно изучать интересные исследователя свойства материалов, такие, как толщина тонкопленочных покрытий, параметры тензора диэлектрической проницаемости, цветовые характеристики и многое другое. В случае достаточно больших монокристаллических образцов выведены простые уравнения для определения «псевдо» оптических констант по измерению эллипсометрических параметров при единственном отражении. Например:

$$\langle \tilde{\epsilon} \rangle = \sin^2 \phi \left[1 + \tan^2 \phi \left(\frac{1 - \rho}{1 + \rho} \right) \right].$$

Но такой подход не совсем верен даже для изотропных материалов, Ведь монокристаллический материал содержит на поверхности слои окислов, и прямое вычисление оптических констант включает в себя и влияние этих слоев на вычисляемые оптические константы чистого материала. Поэтому исследователи гораздо чаще прибегают к более сложной, но и более надежной процедуре вычисления оптических параметров образцов с помощью эллипсометрических измерений. Схема такого общепринятого вычислительного эксперимента рассмотрена в [20]. Необходимо создание адекватной математической модели, методов ее верификации, алгоритмов и программ для проведения возможно более точных численных расчетов с привлечением информации о достоверности тех либо иных данных и т.д.

Приложение 1. Теория цветного зрения

Для правильного измерения и воспроизведения цветовых характеристик с помощью различных устройств необходимо использовать стандартные модели описания источников света и восприятия цвета наблюдателем. Общепринятой моделью цветового восприятия в настоящее время является трехцветная RGB-модель, основанная на предположении, что человеческий глаз воспринимает лишь три основных цвета – красный, зеленый и синий, а все остальные цвета получаются из них аддитивно при обработке полученной информации человеческим мозгом.

В настоящее время все большее признание среди производителей дисплеев завоевывает sRGB-модель, которая была разработана с учетом характеристик имеющихся мониторов. Например, фотография, полученная в этой цветовой модели, будет выглядеть примерно одинаково на любом мониторе, поскольку ее гамма цветов определяется цветами, воспроизводимыми монитором. Кроме того, эта модель позволяет добиться достаточно хорошей цветопередачи практически без особых усилий.

Задача корректного измерения цветовых координат, несмотря на обширные исследования, до сих пор является весьма сложной и далекой от совершенства, хотя имеются разработанные CIE (Commission Internationale de l'Éclairage) и повсеместно применяемые фотометрические процедуры измерений. Объясняется это сложностью и недостаточной изученностью нелинейных соотношений между цветовыми пространствами, спектральными характеристиками источников и приемников света и восприятием света наблюдателем.

Спектральная чувствительность человеческого глаза в численном выражении для различных методов расчета была впервые определена CIE

в 1924 г. и была названа функцией светоотдачи $V(\lambda)$ или стандартной люминесцентной эффективностью статистически нормального наблюдателя (в экспериментах принимали участие 12 человек), определенной на волновом диапазоне [360 нм, 830 нм] (рис. 28). Функция $V(\lambda)$ получила широкое распространение, и в фотометрии заменила роль человеческого глаза.

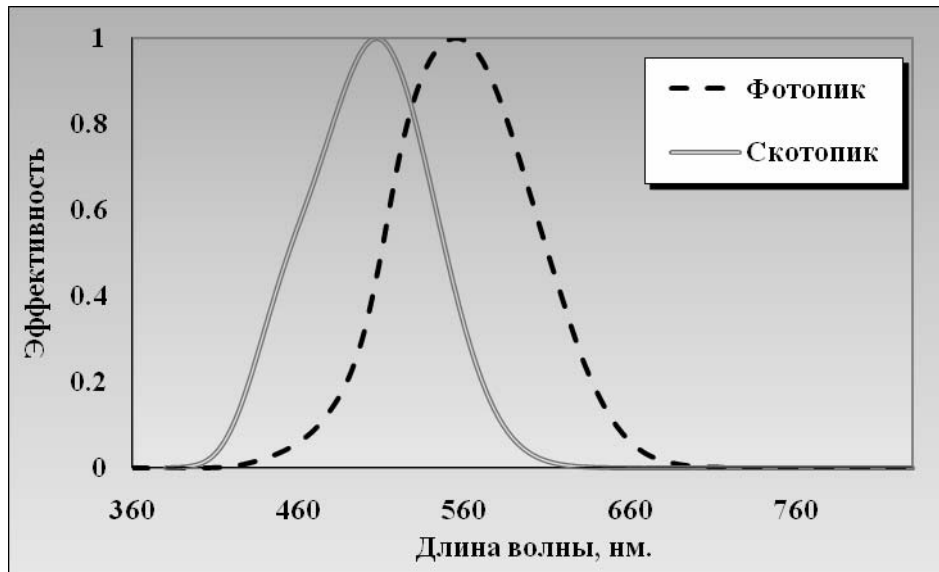


Рис. 28. Стандартная люминесцентная эффективность зрения статистически нормального наблюдателя

Следует заметить, что функция $V(\lambda)$ определена для яркого света (более чем $1 \text{ кд} / \text{м}^2$ с максимально допустимым углом просмотра цвета не более 2°). Это связано с тем, что человеческий глаз имеет два класса клеток рецептора: палочки и колбочки. При низких световых интенсивностях, когда глаз адаптирован к темноте, активны только палочки. Это называется ночной системой зрения, при которой палочки чувствительны в зеленой области (510 нм). В более ярком свете палочки не работают и становятся активны колбочки. Максимальная люминесцентная эффективность для дневной системы зрения сдвигается в желто-зеленую область (≈ 555 нм).

Вычисление цветковых координат

Используя спектрометр, любой источник света можно экспериментально представить его спектральным распределением.

Физической основой цветосприятия является наличие специфических светочувствительных клеток в центральном участке сетчатки глаза (так называемых палочек и колбочек) с максимумами спектральной чувствительности в трех разных спектральных участках: красном, зелёном и синем. Огромную роль в цветосприятии играет переработка сигнала, поступающего на сетчатку глаза, в коре головного мозга, в его затылочных долях. Суть этих процессов, несмотря на наличие большого количества разнообразных теорий, непонятна, а сколько-нибудь серьезные, инструментальные измерения в коре головного мозга невозможны. Поэтому к человеческому цветосприятию стоит относиться как к «черному ящику»: на входе имеем свет определенного спектрального состава, на выходе — некое цветковое ощущение.

Предполагается, что глаз содержит три различных пигмента (R,G,B) которые воспринимают свет с различными спектрами поглощения. Так, R-пигменты поглощают только красный диапазон, G-пигменты - зелёный, а B-пигменты - синий. Следовательно, когда пучок света попадает в глаз, мы воспринимаем цвет как результат смешения различных пигментов, т.е. любой цвет может быть получен из трех различных базовых цветов (красного, зелёного и синего). Это свойство может быть описано математически.

В большинстве цветов жидкокристаллических дисплеев (ЖКД) каждый информационный пиксель содержит три подпикселя с цветковыми фильтрами. Цвет, воспринимаемый человеческим глазом, является суммой трех цветов в каждом пикселе. Пусть t_1, t_2, t_3 - интенсивности пропускания для каждого подпикселя, а $f_1(\lambda), f_2(\lambda), f_3(\lambda)$ - спектры пропускания трех

цветовых фильтров. Тогда спектр эффективного пропускания может быть записан следующим образом:

$$T(\lambda) = t_1 f_1(\lambda) + t_2 f_2(\lambda) + t_3 f_3(\lambda), \quad (5.1)$$

откуда следует, что t_1, t_2, t_3 нечувствительны к изменениям длины волны; спектральная зависимость $T(\lambda)$ зависит от пропускания цветных фильтров $f_1(\lambda), f_2(\lambda)$ и $f_3(\lambda)$. В цветных ЖКД t_1, t_2, t_3 могут независимо контролироваться различными напряжениями каждого подпикселя. Располагая рассчитанной $T(\lambda)$, можно вычислить цветовые координаты света, проходящего через пиксель.

Рассчитаем трехцветное цветовое соответствие (X, Y, Z) , используя следующие выражения:

$$X = k \int S(\lambda) T(\lambda) \bar{x}(\lambda) d\lambda \quad (5.2)$$

$$Y = k \int S(\lambda) T(\lambda) \bar{y}(\lambda) d\lambda \quad (5.3)$$

$$Z = k \int S(\lambda) T(\lambda) \bar{z}(\lambda) d\lambda, \quad (5.4)$$

где $\bar{x}(\lambda), \bar{y}(\lambda)$ и $\bar{z}(\lambda)$ являются функциями цветового соответствия; $S(\lambda)$ — спектр источника; $T(\lambda)$ - спектр пропускания информационного пикселя; а k - нормализующий коэффициент, вычисляемый как

$$k = \frac{100}{\int S(\lambda) \bar{y}(\lambda) d\lambda}.$$

Функции цветового соответствия CIE 1931 обозначаются $\bar{x}(\lambda), \bar{y}(\lambda), \bar{z}(\lambda)$ для 1-4° углов обзора. Графики зависимостей согласующих функций (5.2) - (5.4) от длины волны показаны на рис. 29.

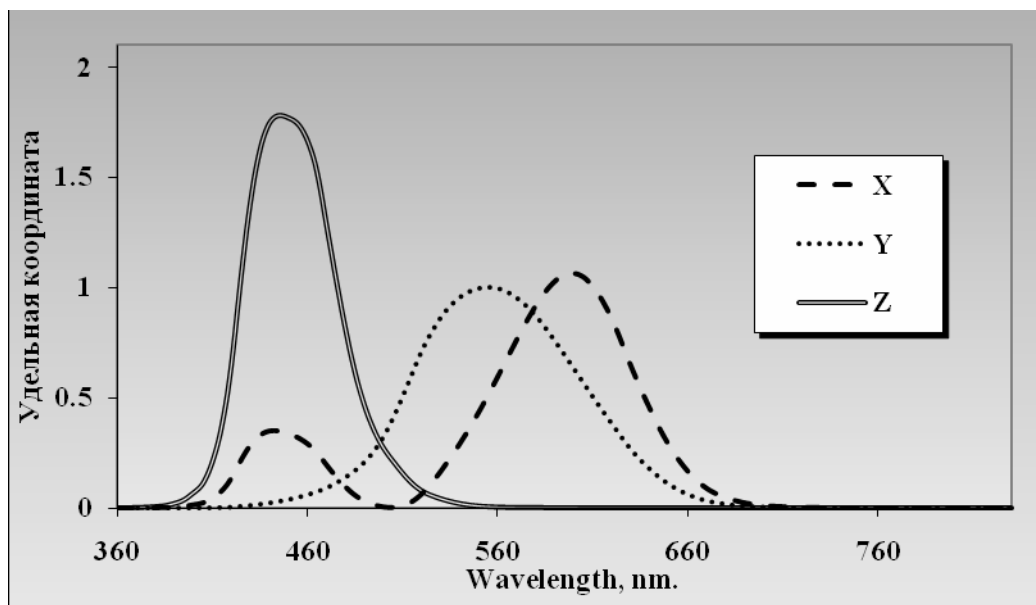


Рис. 29. CIE 20 функции цветового соответствия $\bar{x}(\lambda)$, $\bar{y}(\lambda)$, $\bar{z}(\lambda)$.

Любой цвет может быть представлен как точка (x, y) в системе цветовых координат. На рис. 30 изображена кривая в диапазоне [360 нм, 830 нм], соединяющая все точки цветовых координат монохромного света.

Вычисление цветовых координат источника света включает умножение излучаемого спектра выборки со спектрами трех согласующих функций стандартного наблюдателя. Для отражающего света данная процедура такая же, за исключением того, что излучаемый спектр источника света сначала умножается на процент отражательной способности выборки (образцов) для каждого интервала длин волн, что преобразовывает спектр падающего света к спектру отраженного света. По этой причине описание цвета отражающего объекта координатами цвета бессмысленно без определения того, какой источник света использовался для измерения.

Видимый внешний вид белой поверхности, например, листа бумаги, слегка меняется при наблюдении под различными потоками света, но по-прежнему выглядит белым. Напротив, измеряемый спектр и координаты цвета изменятся значительно. Такое явление названо цветовым постоянством и объясняется механизмом комплексной оптической

обработки в мозге, который пробует исправлять цветовосприятие при медленных изменениях в общей световой интенсивности и чистоте тона, и зависит от приспособляемости индивидуума. Например, белый лист бумаги будет выглядеть белым под оранжевым свечением вольфрамового светового излучения лампы накаливания или под голубоватым яркого света флуоресцентным узкополосным освещением.

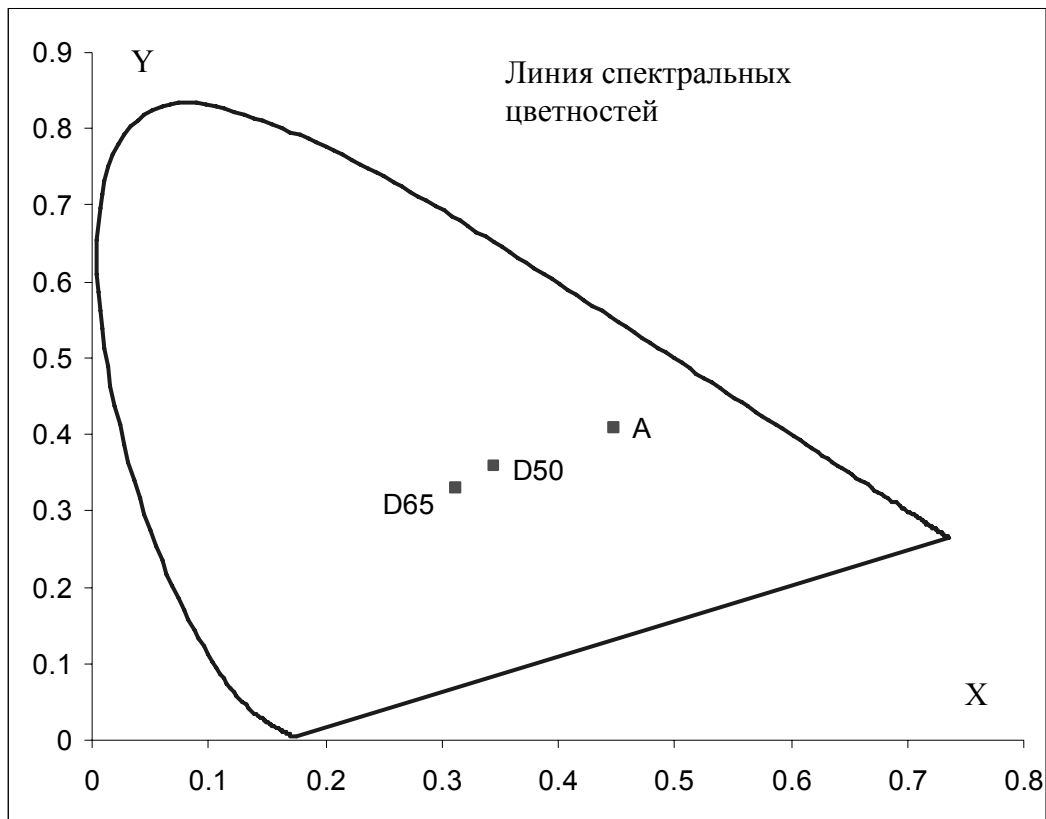


Рис. 30. Цветовая диаграмма CIE 1931 (x,y) 2° и белые точки некоторых источников света

Чтобы объяснить это явление, достаточно определить координаты «белой точки» в цветовом пространстве, которая условно задает белый цвет. Для излучающего цвета это один из стандартных (эталонных) «белых» источников света. Чтобы стать белой точкой для отражающего цвета, теоретический объект, называемый точным рассеянным отражателем, определяется наличием свойства 100% отражательной способности во всех длинах волн, испускаемых источником белого света.

Координаты цвета отражающей выборки также могут измеряться спектрофотометром, который калиброван простым измерением чистой белой поверхности, отражающей излучение источника света и направляющей это излучение на детектор.

Стандартные источники света CIE

Точное определение характеристик источника света является важной частью описания цвета во многих приложениях. Стандарты CIE создают универсальную систему предопределенных спектральных данных для нескольких широко применяемых *типов источников света*.

Стандартные источники света CIE впервые были учреждены в 1931 г. и обозначены буквами А, В и С. В табл. 4 приведены некоторые стандартные источники и соответствующие им координаты белых точек.

Координаты некоторых белых точек различных источников света для диапазона 360-830 нм

Таблица 4

Источник света	Соответствие	X_n	Y_n
Источник типа А	Лампа накаливания с цветовой температурой примерно 2856°К	0.4476	0.4074
Источник типа В	Прямой солнечный свет с цветовой температурой примерно 4874°К	0.3484	0.3516
Источник типа С	Непрямой солнечный свет с цветовой температурой примерно 6774°К	0.3101	0.3162
Источник типа D50	Источник дневного освещения с цветовой температурой 5000°К	0.3457	0.3585
Источник типа D55	Облачность	0.3324	0.3474
Источник типа D65	Дневной свет 6500°К	0.312713	0.329016

Впоследствии CIE добавил к этому набору типов дополнительный тип D и гипотетический тип E, а также тип F. Типу D соответствуют различные условия дневного освещения с определенной цветовой температурой. Два таких источника — D50 и D65 — это стандартные источники, широко применяемые для освещения специальных кабин с целью просмотра полиграфических оттисков.

При вычислении цветовых координат учитываются также спектральные данные источников света. Хотя источники света, по сути, являются *эмиссионными (излучающими)* объектами, их спектральные данные практически ничем не отличаются от спектральных данных отражающих цветных объектов. Соотношение определенных цветов в различных типах источников света можно выяснить путем исследования относительного распределения мощности световых волн с разной длиной волны, представленного в виде спектральных кривых.

На рис. 31 представлены спектры двух стандартных источников CIE: A и D65.

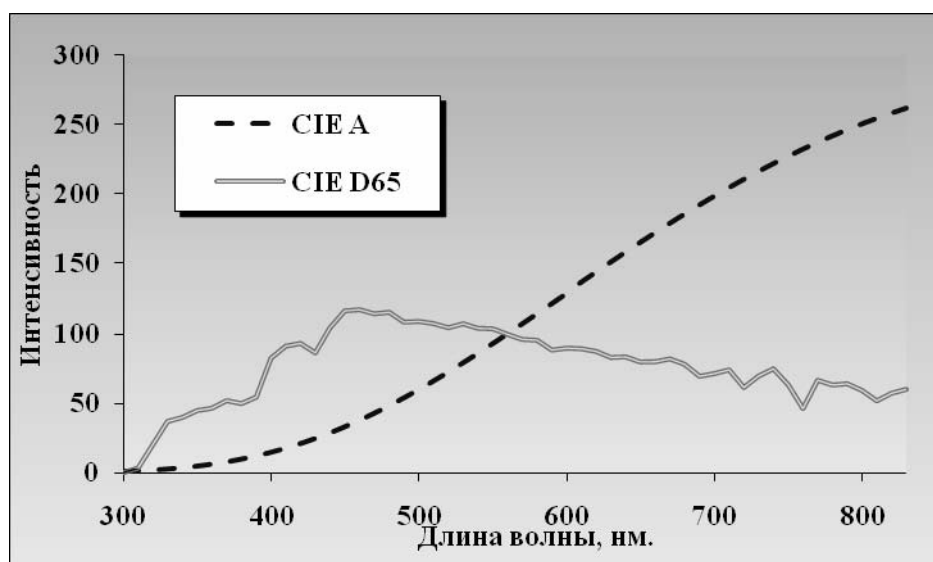


Рис. 31. Спектры стандартных источников CIE A и D65

Таким образом, описания цвета, составленные по трем координатам, сильно зависят от стандартных цветовых систем CIE и от источников света. В свою очередь, спектральное описание цвета напрямую не

использует эту дополнительную информацию. Тем не менее стандарты CIE играют важную роль в процессе преобразования цветовой информации из трехкоординатных данных в спектральные.

Цветовые пространства

Неопределенность и неоднозначность цветового восприятия не исключает наличия упрощенного, абстрактного метода, кратко описывающего свойства цвета малым числом параметров. Чаще всего цветовые модели определяют в терминах трех основных цветов, из которых все другие получаются смешиванием. Иногда среди параметров используются такие атрибуты, как светлота или насыщенность.

Рассмотрение трех параметров в качестве ортогональных осей позволяет ввести в рассмотрение геометрическое пространство цвета. Геометрическое положение точки - конкретного цвета - в этом пространстве может быть использовано для наблюдения его связи с другими цветами.

Пространство CIE XYZ

Это цветовое пространство (рис. 32) является основным цветовым пространством для колориметрического измерения и базисом для других цветовых пространств CIE. Оно имеет преимущество строго определенного международного эталона. Являясь удобным для описания известных измеряемых цветов, его не особенно легко использовать для определения новых цветов, поскольку основные цвета являются невидимыми.

Если увеличивается яркость цвета, то количество света, требуемого от каждого основного цвета, возрастает. В этом случае увеличения будут пропорциональны, поэтому соотношение $X:Y:Z$ будет постоянным. Обычно полезно исследовать цвет образца независимо от его яркости. Чтобы сделать это, координаты цвета нормализуются:

$$x = \frac{X}{X+Y+Z}, y = \frac{Y}{X+Y+Z}.$$

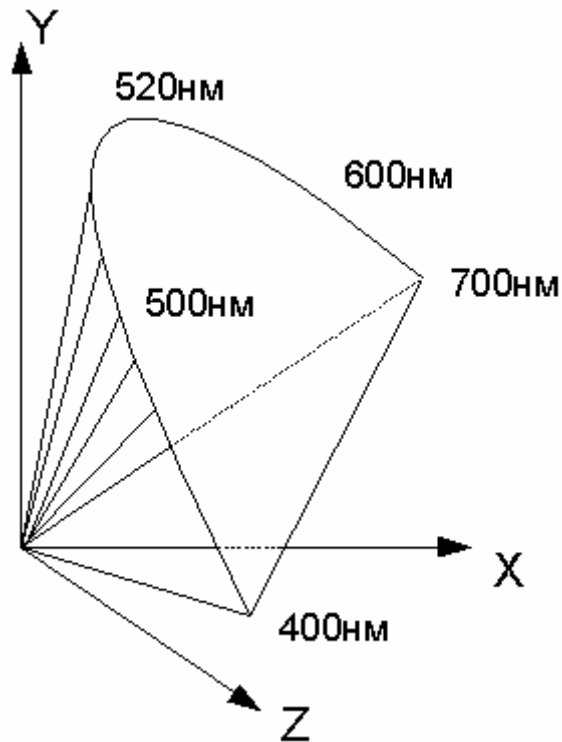


Рис. 32. CIE XYZ цветное пространство

Пространство CIE LUV

Когда яркость цвета проградуирована относительно некоторого белого цвета, получается относительная шкала яркости от 0 до 100 % (от черного к белому). Однако измеряемая яркость не соответствует полностью воспринимаемой светлоте: шкала выглядит заметно неоднородной. Цветовое пространство CIE LUV получается линейным преобразованием CIE XYZ, и координаты u и v могут быть получены следующим образом:

$$u = \frac{2x}{6y - x + 1.5}, \quad v = \frac{3y}{6y - x + 1.5}.$$

Рекомендованное CIE, LUV пространство включает однородную шкалу яркости и параметр светлоты.

Модель CIE LUV используется в телевизионной и кинопромышленности из-за большей воспринимаемой однородности, чем другие модели, и находит широкое применение в компьютерной графике.

Пространство CIE LU'V'

Еще одним линейным преобразованием пространства XYZ является пространство LU'V', цветовые координаты в котором определены с помощью выражений:

$$u' = u = \frac{2x}{6y - x + 1.5}, \quad v' = 1.5v = \frac{4.5y}{6y - x + 1.5}.$$

Пространство CIE LAB

Альтернативная цветовая модель рекомендуется CIE для отражающих цветов, таких, например, как сами краски или окрашенные с их помощью ткани. Она оптимизирована для определения количества цветового различия между двумя образцами почти идентичных цветов, например, между двумя пакетами красителя.

Связь между CIE XYZ и CIE LAB определяется выражениями:

$$L = 10\sqrt{Y}, \quad a = \frac{17.5 \cdot (1.02X - Y)}{\sqrt{Y}}, \quad b = \frac{7 \cdot (Y - 0.847Z)}{\sqrt{Y}}.$$

Шкала цветности в CIE LAB более равномерна, чем в CIE XYZ. Разница между точками на шкале соответствует разнице между изображенными цветами.

Начиная с 1976 г. в высокоточных индустриальных технологиях используются более сложные формулы для цветового различия в CIE LAB, которые дополняют изменяющиеся веса светлоты, угла оттенка и цветности в зависимости от области цветового пространства.

CIE LAB также активно применяется для спецификации цветовых принтеров. Используя эталонный источник света, можно достаточно просто пересчитать значения координат цвета CIELAB в координаты в пространствах XYZ или LUV.

Сравнение спектральных данных с трехкоординатными колориметрическими данными

Принципиальные методы описания цвета можно разделить на две категории. Спектральные данные фактически описывают свойства поверхности цветного объекта, показывая, как эта поверхность воздействует на свет (отражает его, пропускает или излучает). На эти поверхностные свойства не влияют условия внешней среды, такие как освещение, индивидуальность восприятия каждого из зрителей и различия в методах трактовки цвета.

Трехкоординатные данные в терминах трех координат (или величин) описывают восприятие цвета объекта зрителем или сенсорным устройством, или воспроизведение на каком-либо устройстве (например, на мониторе или принтере). Цветовые системы CIE, такие как XYZ и LAB, задают положение цвета в цветовом пространстве посредством трехмерных координат, в то время как системы воспроизведения цвета, такие как RGB и CMYK (4 цвета), описывают цвет в терминах трех и четырех величин, которые при смешивании дают тот или иной цвет.

Спектральные данные, как стандарт для спецификации цветов и передачи информации о цвете, имеют неоспоримые преимущества перед такими форматами, как RGB и CMYK. Прежде всего, спектральные данные являются единственным объективным описанием реального объекта, окрашенного в тот или иной цвет. В отличие от них, описания в терминах RGB и CMYK зависят от условий осмотра объекта — от типа устройства, воспроизводящего цвет, и типа освещения, при котором этот цвет рассматривается.

Приложение 2. Решение оптической задачи для слоистых анизотропных сред

Рассматривается алгоритм решения уравнений Максвелла для распространения света через анизотропные слоистые среды, использующий матрицы Берремана размером 4×4 . В отличие от численных методов, предложенных Берреманом, данный метод является точным. Теорема Сильвестра для вычисления функции от матрицы и метод Лагерра для нахождения собственных значений позволяют предложить алгоритм, эффективность которого сравнима с эффективностью алгоритмов, использующих аналитические решения, которые, однако, существуют лишь в частном случае одноосной оптической среды. Предлагаемый метод позволяет рассчитывать сложные оптические системы, в которых важную роль играют эффекты двуосности, магнитной анизотропии или оптической активности.

Метод вычисления пропускания и отражения в слоистых анизотропных средах был практически одновременно предложен Тейтлером, Хенвисом и Берреманом. Математически предложенные методы эквивалентны, хотя в подходе авторов имеются различия. Берреман рассматривает оптическую среду с непрерывно меняющимися параметрами, что позволило сформулировать уравнения Максвелла в дифференциальной матричной форме. В отличие от широко применяемого приближенного метода матриц Джонса размером 2×2 , в методе Берремана матрицы имеют размер 4×4 . Это увеличение в размере является платой за точность и универсальность. Матрица Берремана определяет линейное преобразование между четырьмя тангенсальными компонентами электрического и магнитного полей на входе оптической системы с соответствующими компонентами на выходе и позволяет с учетом

интерференционных эффектов многократного отражения одновременно находить как пропускание, так и отражение при произвольном угле падения световой волны на планарную оптическую среду.

С момента упомянутых публикаций метод Берремана получил всеобщее признание и нашел широкое применение, особенно для расчета оптики жидких кристаллов, где учет отражения является необходимым условием. Развитие метода привело к тому, что для одноосной оптической среды были получены аналитические решения для нахождения матриц Берремана. Тем не менее в случае двуосной оптической среды аналитическое решение в общем случае отсутствуют, что оставляет в качестве наиболее эффективных методов нахождения матрицы приближенные алгоритмы. Эти методы основаны на разложении экспоненты от матриц в конечный ряд Тейлора. Таким образом, даже однородная анизотропная среда должна быть разделена на очень тонкие подслои, для которых ряд Тейлора дает приемлемую точность. По-видимому, именно дополнительная сложность и емкость алгоритмов вычисления матриц Берремана обуславливают постоянное развитие альтернативного метода матриц Джонса, хотя последний в своей основе является приближенным.

В настоящей работе предлагается точный и эффективный алгоритм нахождения матриц Берремана. В его основе лежит теорема Сильвестра о представлении функции от матрицы в форме конечного ряда, а также метод Лагерра для нахождения комплексного корня полинома произвольной степени. Алгоритм был апробирован автором работы [11] при решении задачи моделирования электрооптики жидких кристаллов в оптических схемах, реально применяющихся при создании жидкокристаллических дисплеев. Метод является общим в том смысле, что не ограничивает возможности численного моделирования одноосной оптической средой. Он одинаково эффективен в ситуациях, когда

требуется учесть двуосность, магнитную анизотропию или оптическую активность среды.

Теория и метод

Напомним основные результаты, полученные Берреманом на основании точных преобразований уравнений Максвелла для линейной среды к матричной форме.

Пусть плоская монохроматическая волна падает в плоскости xz на плоскопараллельную анизотропную пластину под произвольным углом α по отношению к нормали. Оптические параметры пластины в общем случае считаются плавно зависящими от z , что позволило Берреману использовать дифференциальный формализм. Согласно [6] для тангенциальных компонент электрического и магнитного полей световой волны имеет место следующее матричное соотношение:

$$\frac{\partial \chi}{\partial z} = \frac{i\omega}{c} \Delta \chi, \quad (6.1)$$

где

$$\chi = \begin{pmatrix} E_x \\ H_y \\ E_y \\ -H_x \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} & \Delta_{14} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} & \Delta_{24} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} & \Delta_{34} \\ \Delta_{41} & \Delta_{42} & \Delta_{43} & \Delta_{44} \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

E_x , E_y , H_x , H_y - тангенциальные x - и y -компоненты соответственно электрического и магнитного полей. В общем случае компоненты матрицы Δ выражаются через компоненты диэлектрического и магнитного тензоров и тензора оптических вращений [6].

Во многих практически важных случаях магнитной анизотропией и оптической активностью можно пренебречь, тогда число ненулевых компонент матрицы Δ сокращается до 10 [11].

Значения компонент диэлектрической проницаемости предполагаются комплексными. Таким образом, принимается во внимание и анизотропия поглощения.

В этом случае, когда параметры оптической пластины толщиной h не зависят от z , интегрирование (6.2) дает

$$\chi(h) = \exp(i\omega h \Delta / c) \equiv P(h)\chi(0), \quad (6.3)$$

где $P(h)$ соответствует матрице Берремана для однородной среды.

Таким образом, в случае однородной оптической среды нахождение матрицы Берремана сводится к вычислению экспоненты от матрицы Δ . В общем случае, когда оптические параметры среды зависят от z , среду разбивают на n слоев, в пределах которых оптические параметры рассматриваются постоянными, и интегрирование уравнения (6.1) сводится к перемножению соответствующих матриц для индивидуальных слоев:

$$\chi(h) = \prod_{i=1}^n P(h_i)\chi(0). \quad (6.4)$$

Соотношение (6.4) справедливо и для случая сложной оптической системы, состоящей из дискретных оптических элементов (поляриды, фазовые пластинки и т.д.). Физические основы полноты выражения (6.4) заключаются в непрерывности тангенциальных компонент электрического и магнитного полей. Поэтому даже в случае слоистой системы разнородных оптических сред не требуются дополнительные граничные условия. Таким образом, в самом общем случае задача численного интегрирования сводится к нахождению функции (экспоненты) от матрицы Δ .

Хорошо известный точный алгоритм нахождения функции от матрицы заключается в применении преобразования подобия:

$$\Delta = S^{-1}DS \quad (6.5)$$

и вычислении функции от элементов диагональной матрицы D . Это, однако, требует определения собственных значений матрицы Δ , матрицы характеристических векторов S , а также вычислений обратной матрицы S^{-1} . Хотя экспонента от (6.5) имеет «прозрачный» физический смысл, так как отражает распространение четырех характеристических волн в прямом и обратном направлениях, метод требует значительных вычислительных затрат. Эффективность метода увеличивается лишь в случае одноосной оптической среды, для которой имеются аналитические выражения для собственных значений и характеристических векторов [6]. По-видимому, только сложность и неэффективность (с точки зрения вычислительных ресурсов) применяющихся алгоритмов вычисления матриц для преобразования подобия обусловили развитие приближенных методов. Например, еще один из методов, предложенных Берремманом, заключается в том, что экспонента может быть представлена в виде разложения в ряд Тейлора:

$$P(h) = \exp(i\omega h \Delta / c) \approx I + \frac{i\omega h}{c} \Delta - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega h}{c} \right)^2 \Delta^2, \quad (6.6)$$

где I – единичная матрица.

Берремман показал, что получение сходящегося решения возможно при учете члена второго порядка в разложении. Но, так как (6.6) является приближенным, его применение даже для однородных участков среды требовало разбиения последней на тонкие подслои толщиной много меньше длины волны. Процедура становится неэффективной для расчета оптики толстых (сотни микрон) однородных оптических элементов, таких, например, как поляроиды и фазовые пластинки. Развитию численного метода интегрирования и его применению для расчета оптики жидкокристаллической «твист-ячейки» посвящена более поздняя работа Берреммана, где видоизмененная процедура позволяла выбор больших

значений h , однако принципиально метод оставался приближенным и требовал осторожности в выборе шага дискретизации h .

В данной работе предлагается точная процедура. Первый важный момент состоит в том, что существует теорема Сильвестра, которая в случае различных собственных значений дает исчерпывающее выражение для функции от матрицы A размером $n \times n$:

$$f(A) = \sum_{k=1}^n f(\lambda_k) \frac{\prod_{i \neq k} (A - \lambda_i I)}{\prod_{i \neq k} (\lambda_k - \lambda_i)}, \quad (6.7)$$

где λ_k - собственные значения матрицы A .

Применительно к нашему случаю (6.7) дает четыре слагаемых:

$$P(h) = \exp(i\omega h \Delta / c) \equiv \sum_{k=1}^4 \left(\exp(i\omega h \lambda_k / c) \frac{\prod_{i \neq k} (\Delta - \lambda_i I)}{\prod_{i \neq k} (\lambda_k - \lambda_i)} \right), \quad (6.8)$$

что практически эквивалентно по вычислительным затратам выражению (6.6), если известны собственные значения матрицы Δ . Так как (6.8) является точным представлением функции, исключается необходимость разбиения однородной оптической среды на систему подслоев. В отличие от точного метода, основанного на преобразовании подобия (6.5), здесь не требуется вычисления матрицы характеристических векторов и соответствующей обратной матрицы, что значительно увеличивает эффективность.

Последнее обстоятельство, которое хотелось бы подчеркнуть, заключается в том, что формула (6.8) требует различных собственных значений. В ряде случаев симметрии среды (например, оптическая изотропная среда) или геометрии (строго нормальное падение) обуславливает вырождение собственных значений. В этом случае в (6.8) возникает неопределенность типа $0/0$. Разрешение этой неопределенности возможно, если, например, применить известное правило Лопиталья. Это,

однако, может несколько усложнить общую процедуру и снизить ее эффективность. Альтернативный вариант заключается в искусственном введении погрешности, которая заведомо не может сказаться на результате вычислений. Например, в случае изотропной среды показатели преломления можно задать не строго одинаковыми, а различающимися, например, в седьмом десятичном разряде. Даже при толщине элементов в сотни микрон это не может заметно повлиять на результат вычислений (в предположении, что вычисления выполняются с двойной точностью). В случае нормального падения достаточно просто задать очень малое отклонение, например, точность отсчета угла 10^{-6} рад вряд ли возможна в эксперименте.

Определение пропускания и отражения

Ниже будут представлены выражения для определения поля в отраженной и прошедшей волнах. Хотя эта задача была рассмотрена Берремано, в его оригинальной работе в выражениях для поля прошедшей и отраженной волн имеется неточность.

Будем полагать, что анизотропная пластина или оптическая система из дискретных элементов, пропускание и отражение для которой нам требуется найти, заключена между двумя непоглощающими изотропными средами с коэффициентами преломления соответственно n_1 и n_2 . Световая волна падает со стороны среды с коэффициентом n_1 под углом α_1 по отношению к нормали поверхности пластины и выходит во вторую среду под углом α_2 . Поле на входе системы определяется суперпозицией падающей и отраженной волн, в то время как на выходе имеется только прошедшая волна:

$$\chi_T = P(h)(\chi_I + \chi_R). \quad (6.9)$$

Здесь $P(h)$ – матрица Берремана, которая в случае неоднородной среды или системы оптических элементов определяется произведением

(6.4); χ_I , χ_T , χ_R – векторы, соответственно, падающей, прошедшей и отраженной волн.

В изотропной среде имеет место однозначная связь между компонентами электрического и магнитного полей, поэтому

$$\chi_I = \begin{pmatrix} E_x \\ r_x E_x \\ E_y \\ r_y E_y \end{pmatrix}, \quad \chi_R = \begin{pmatrix} R_x \\ -r_x R_x \\ R_y \\ -r_y R_y \end{pmatrix}, \quad \chi_T = \begin{pmatrix} T_x \\ r_x^* T_x \\ T_y \\ r_y^* T_y \end{pmatrix}, \quad (6.10)$$

где

$$\begin{aligned} r_x &= \frac{n_1}{\cos \alpha_1}, & r_y &= n_1 \cos \alpha_1, \\ r_x^* &= \frac{n_2}{\cos \alpha_2}, & r_y^* &= n_2 \cos \alpha_2, \\ \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} &= \frac{n_1}{n_2}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Коэффициенты пропускания T и отражения R вычисляются как отношение потоков энергии в прошедшей и отраженной волнах к потоку в падающей волне соответственно. На практике распространенным является простейший случай, когда в качестве первой и второй сред выступает воздух ($n_1 = n_2 \approx 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$), тогда при $n_1 \neq n_2$

$$\begin{aligned} R &= \frac{|R_x / \cos \alpha_1|^2 + |R_y|^2}{|E_x / \cos \alpha_1|^2 + |E_y|^2}, \\ T &= \frac{n_2 \cos \alpha_2}{n_1 \cos \alpha_1} \cdot \frac{|T_x / \cos \alpha_2|^2 + |T_y|^2}{|E_x / \cos \alpha_1|^2 + |E_y|^2}. \end{aligned}$$

Подчеркнем, что все арифметические операции в данной работе выполняются с комплексными числами, и вычисление квадрата модуля подразумевает соответствующую процедуру.

Приложение 3. Электродинамика материалов с отрицательным коэффициентом преломления

Содержание этого раздела следует работам В.Г. Веселаго и обсуждает, казалось бы, очень простую формулу для величины коэффициента преломления n . Эта формула записывается в виде, который всем хорошо известен:

$$n = \sqrt{\epsilon\mu}. \quad (7.1)$$

Всегда принималось, что значение n , определяемое этой формулой, есть заведомо положительное число, хотя с чисто математической точки зрения оно может быть и положительным и отрицательным. Более того, значения ϵ и μ , стоящие под корнем, также всегда принимались положительными, хотя, вообще говоря, уже давно известно, что, например, величина диэлектрической проницаемости для плазмы $\epsilon = 1 - \omega_p^2 / \omega^2$ может быть и отрицательной, точно так же, как может быть отрицательным значение магнитной проницаемости μ , например у ферритов. Всегда было ясно, что если под корнем в (7.1) один из сомножителей станет отрицательным, то величина n окажется мнимой, и распространение волн в среде с мнимым n заменится отражением. Именно отрицательному значению ϵ в плазме ионосферы, и соответственно мнимому значению n человечество обязано возможностью сверхдальнего распространения радиоволн.

До некоторого времени никто не задавался вопросом, что будет, если под корнем в (7.1) окажутся одновременно отрицательные величины ϵ и μ . В. Г. Веселаго задал себе этот вопрос и показал, что при отрицательных значениях ϵ и μ нужно брать и для n отрицательное значение. Были сразу же сформулированы весьма интересные и необычные электродинамические свойства веществ, обладающих отрицательным коэффициентом преломления. Однако всё это первоначально оставалось

только теоретической разработкой, не имевшей первоначально практической реализации.

Всё изменилось, когда группой физиков из университета Сан-Диего (США) были сделаны первые эксперименты в этой области [21], [21]. В этих работах были продемонстрированы необычные электродинамические свойства некоторых композитных материалов. Эти свойства чисто формально могут быть объяснены, если принять, что данные материалы обладают отрицательным коэффициентом преломления n . Сами по себе эти композитные материалы представляют собой совокупность небольших металлических элементов, расположенных в пространстве в строгом геометрическом порядке, образуя структуру, напоминающую своего рода кристалл. Такого рода структуру можно рассматривать как сплошную для длин волн, заметно превосходящих размер составляющих её элементов и расстояние между ними. Эксперименты, проведенные авторами указанных работ, были сделаны в сантиметровом диапазоне длин волн, а сами элементы исследованных композитов и расстояние между ними имели характерный размер порядка 7-10 мм. Однако уже сейчас наблюдается стремление к продвижению в область более коротких волн.

Так, на прошедшем в Арлингтоне (США) семинаре по материалам с отрицательным преломлением было доложено о получении композитных материалов, способных работать на частотах до 300 ГГц. Там же был представлен доклад о первых опытах по созданию композитного материала с размером отдельного элемента порядка 35 мкм.

Ключевым экспериментальным результатом явилась демонстрация для таких материалов довольно необычной реализации закона преломления Снеллиуса. На рис. 33 изображён переход луча света через плоскую границу раздела двух сред с коэффициентами преломления n_1 и n_2 соответственно. Если, без нарушения общности, положить $n_1 = 1$, то привычный ход луча при преломлении соответствует пути 1-4. В экспе-

риментах, проведенных в Сан-Диего, луч шёл по пути 1-3. Такой путь преломлённого луча будет удовлетворять закону Снеллиуса, если положить, что $n_2 < 0$. При этом сам закон Снеллиуса

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21} \quad (7.2)$$

не испытывает изменений.

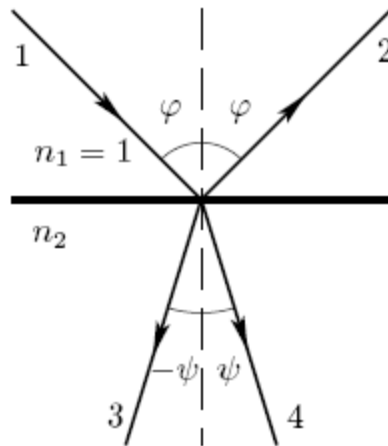


Рис. 33. Преломление света на границе двух сред

Для материалов с $n < 0$ характерна необычная реализация не только закона Снеллиуса, но и ряда других явлений электродинамики и оптики, в частности, эффектов Доплера и Черенкова, формул Френеля, принципа Ферма. Основы электродинамики материалов с отрицательным коэффициентом преломления достаточно полно изложены в работах [23-25]. В этих работах было показано, что вещества с отрицательным коэффициентом преломления характеризуются также отрицательными значениями диэлектрической ϵ и магнитной проницаемости μ . Существенно, что все эти утверждения относятся к изотропным материалам, для которых величины n , ϵ и μ — скаляры.

Отрицательное значение n соответствует также тому факту, что в таких материалах направление волнового вектора \vec{k} и вектора Пойнтинга \vec{S} антипараллельны, или, что тоже самое, антипараллельны направления фазовой и групповой скоростей.

Чтобы убедиться в этом, достаточно записать уравнения Максвелла и выражение для вектора Пойнтинга для случая однородных плоских волн в изотропной среде:

$$\begin{aligned}\vec{k} \times \vec{E} &= \frac{\omega}{c} \mu \vec{H} \\ \vec{k} \times \vec{H} &= -\frac{\omega}{c} \varepsilon \vec{E} \\ \vec{S} &= \vec{E} \times \vec{H}.\end{aligned}\tag{7.3}$$

Легко видеть, что одновременная смена знака ε и μ переводит правую тройку векторов \vec{k}, \vec{E} и \vec{H} левую. Именно поэтому в англоязычной литературе такие материалы называются Left-Handed Materials, сокращённо LHM.

Таким образом можно утверждать, что изотропные среды, у которых значения ε и μ оба являются отрицательными, обладают отрицательным преломлением, или, что то же самое, отрицательным значением n , и у них фазовая и групповая скорости направлены антипараллельно. Правильно и обратное утверждение — если изотропный материал обладает отрицательным значением показателя преломления n , то он должен быть охарактеризован одновременно отрицательными значениями ε и μ , а фазовая и групповая скорости для него имеют противоположную направленность.

Следует заметить, что сам факт противоположной направленности фазовой и групповой скорости не является чем-то новым. Он, в частности, обсуждался ещё в работе Л.И. Мандельштама [26]. Кроме того, давно известны электронные устройства (например, лампы обратной волны, ЛОВ), в которых фазовая скорость противоположна направлению потока энергии. В последнее время очень интенсивно обсуждаются свойства так называемых фотонных кристаллов [27], в которых так же может быть реализована противоположная направленность векторов \vec{k} и \vec{S} . Однако

фотонные кристаллы в общем случае являются существенно анизотропными материалами и не могут быть охарактеризованы скалярным коэффициентом преломления n . Это же относится и к устройствам типа ЛОВ.

Появление веществ с отрицательным значением n ставит очень важный вопрос: — в какой мере для случая $n < 0$ справедливы все те законы и формулы электродинамики, оптики и смежных технических наук, в которые входит величина коэффициента преломления n ? Можем ли мы всегда рассчитывать на правильный результат при прямой замене $n \rightarrow -n$, как это имеет место в случае закона Снеллиуса?

В общем случае ответ на этот вопрос отрицательный.

Это обусловлено тем, что большинство законов и формул электродинамики и оптики соответствуют случаю, когда тот или иной материал заведомо немагнитен и характеризуется магнитной проницаемостью $\mu = 1$. Применение такого «немагнитного приближения» ведет к тому, что многие формулы, в которые изначально входит μ , при подстановке $\mu = 1$ кардинально меняются, и оказываются верными только в этом немагнитном приближении (табл. 5).

Из табл. 5 видно, что существует три группы физических законов и эффектов, формулировки которых по-разному меняются при переходе от формул немагнитного приближения к точным выражениям.

К первой группе законов относятся закон Снеллиуса и эффекты Доплера и Черенкова. В соответствующих формулах обычно применяемое в немагнитном приближении выражение $n = \sqrt{\varepsilon}$ просто должно быть заменено на $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$, причём если и ε и μ оба отрицательны, то перед n тоже должен быть знак «минус».

**Распространенные приближенные и точные формулы некоторых
оптических законов**

Таблица 5

Физический закон	Немагнитное приближение	Точная формула
Снеллиус, Доплер, Черенков $n = \sqrt{\varepsilon} \rightarrow n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ если $\varepsilon, \mu < 0$, то $n < 0$	$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = n_{21} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$	$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = n_{21} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1}}$
Френель $n = \sqrt{\varepsilon} \rightarrow \frac{1}{z} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$	$r_{\perp} = \frac{n_1 \cos \varphi - n_2 \cos \psi}{n_1 \cos \varphi + n_2 \cos \psi}$	$r_{\perp} = \frac{z_2 \cos \varphi - z_1 \cos \psi}{z_2 \cos \varphi + z_1 \cos \psi}$
Коэффициент отображения при нормальном падении света на границу раздела	$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$	$r = \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1}$
Условие отсутствия отражения	$n_1 = n_2$	$z_1 = z_2$
Брюстер	$\operatorname{tg} \varphi = n$	$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cdot \frac{\varepsilon_2 \mu_1 - \varepsilon_1 \mu_2}{\varepsilon_2 \mu_2 - \varepsilon_1 \mu_1}}$

Ко второй группе относятся законы отражения и преломления света, и, в частности, формулы Френеля. В этих формулах при переходе от немагнитного приближения к точным формулам величину $n = \sqrt{\varepsilon}$ следует заменять не на $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$, а на $\sqrt{\varepsilon/\mu} = 1/z$, где величина z является величиной волнового сопротивления среды $z = \sqrt{\mu/\varepsilon}$. Волновое сопротивление имеет размерность *ома* и является уникальной характеристикой каждой среды, наряду со скоростью света в ней. Из табл. 5 видно, что при отходе от немагнитного приближения существенно меняется, в частности, условие отсутствия отражения света на плоской границе

раздела двух сред. Это условие состоит не в равенстве показателей преломления двух сред, а в равенстве их волновых сопротивлений. Важно подчеркнуть, что при отрицательных значениях ε и μ волновое сопротивление z , в отличие от величины n , остаётся положительным.

И, наконец к третьей группе соотношений, зависящих от n и существенно меняющихся при переходе от немагнитного приближения к точным формулам, относится, в частности, формула для угла Брюстера $\operatorname{tg} \varphi = n$. Точное выражение для угла Брюстера приведено в последней строке табл. 5. Важно отметить, что подкоренное выражение в этой точной формуле не меняется при одновременной смене знаков ε и μ одной из сред. Необходимо помнить, что приведённая в таблице формула для угла Брюстера соответствует одной определённой поляризации света. Для другой, перпендикулярной к ней поляризации, формула получается из приведённой в таблице путём замены $\varepsilon \rightarrow \mu$ и $\mu \rightarrow \varepsilon$ в подкоренном выражении. Таким образом, отражение под углом Брюстера имеет место всегда, при любых значениях проницаемостей, но только для одной из двух возможных поляризаций падающего света.

Введение в научный оборот понятия «отрицательный коэффициент преломления» уточняет также формулировку такого фундаментального принципа, как принцип Ферма. Этот вопрос подробно рассмотрен в недавней публикации [28], где показано, что правильной формулировкой принципа Ферма, пригодной для распространения электромагнитной волны сквозь материалы с показателем преломления n любого знака, является требование экстремальности суммарной длины оптического пути:

$$\delta L = \delta \int n dl = 0. \quad (7.4)$$

Интегрирование в этом выражении (которое является, по сути дела, эйконалом) производится по реальному пути распространения луча света. Такой подход предусматривает, что длина оптического пути, проходимая

электромагнитной волной в среде с отрицательным значением n , также является отрицательной. Из этого, в частности, следует, что в некоторых случаях полная суммарная длина оптического пути может быть отрицательной и даже нулевой, хотя, конечно, геометрическая длина пути, по которому распространяется свет, и само время распространения света отнюдь не равны нулю.

Именно такая ситуация имеет место при распространении света сквозь плоскопараллельную пластину, выполненную из материала с $\varepsilon = \mu = n = -1$. Такая пластина, как это видно из рис. 34, способна фокусировать в точку излучение, выходящее из точечного источника, расположенного по другую сторону пластины.

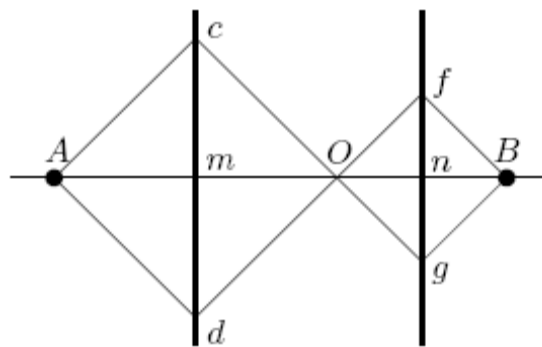


Рис. 34. Распространение света от объекта A к изображению B через плоскопараллельный слой вещества с $\varepsilon = \mu = n = -1$, расположенный в вакууме

Из рис. 34 видно, что путь Am , проходимый светом от источника до пластины, и путь nB от пластины до изображения в сумме равны пути mn , который свет проходит внутри пластины:

$$Am + nB = mn. \quad (7.5)$$

Подобного рода соотношение действительно и для любого другого возможного пути распространения света, например $AsgB$ или $AdfB$. Но так как внутри пластины коэффициент преломления $n = -1$, а снаружи $n = +1$, то суммарная оптическая длина для света, идущего из точки A в точку B будет, в соответствии с выражением (7.4) равна нулю для любого

возможного пути распространения. В то же время, как уже говорилось, само время распространения света из точки A в точку B существенно отличается от нуля.

Факт фокусировки точечного источника света также в точку, расположенную по другую сторону пластины, не означает, что эта пластина является линзой. Такая пластина служит идеальным оптическим прибором, который переносит изображение предмета из пространства объектов в пространство изображений без всяких искажений. Но такой перенос возможен только для предметов, отнесённых от пластины на расстояние, не большее, чем толщина пластины. Пластина заведомо не может сфокусировать в точку параллельный пучок лучей, приходящий из бесконечности. Тем не менее свойства такой пластины бесспорно интересны и могут иметь практическую значимость.

При общей оценке свойств материалов с отрицательным коэффициентом преломления нужно иметь в виду, что эти материалы с неизбежностью должны обладать частотной дисперсией. Действительно, если ε и μ оба отрицательны, то при отсутствии дисперсии полная энергия вещества, равная

$$W = \frac{1}{8\pi} (\varepsilon E^2 + \mu H^2), \quad (7.6)$$

будет отрицательной. Однако при наличии частотной дисперсии выражение (6) записывается несколько иначе:

$$W = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\partial(\varepsilon\omega)}{\partial\omega} E^2 + \frac{\partial(\mu\omega)}{\partial\omega} H^2 \right). \quad (7.7)$$

Нетрудно убедиться, что производные $\frac{\partial(\mu\omega)}{\partial\omega}$ и $\frac{\partial(\varepsilon\omega)}{\partial\omega}$ будут положительны, если выбрать закон частотной дисперсии для ε и μ в достаточно общем виде:

$$\mu = 1 - \frac{A_m^2}{\omega^2}, \quad (7.8)$$

$$\varepsilon = 1 - \frac{A_e^2}{\omega^2}. \quad (7.9)$$

Если положить

$$A_e^2 = A_m^2 = A^2 > \omega^2, \quad (7.10)$$

то показатель преломления будет отрицательным, а фазовая

$$v_\phi = \frac{c}{1 - \frac{A^2}{\omega^2}}$$

и групповая

$$v_{\text{гр}} = \frac{c}{1 + \frac{A^2}{\omega^2}}$$

скорости будут связаны соотношением

$$\frac{c}{v_\phi} + \frac{c}{v_{\text{гр}}} = 2. \quad (7.11)$$

При распространении волн в среде с отрицательной дисперсией мы должны выбрать перед волновым вектором \mathbf{k} знак минус. Однако в средах с поглощением вектор \mathbf{k} имеет не только действительную, но и мнимую часть. Появление этой мнимости обусловлено наличием мнимости в выражениях для ε и μ . Возникает вопрос: следует ли изменять знак перед мнимой частью волнового вектора при изменении знака перед его действительной частью?

Запишем выражения для ε и μ в виде:

$$\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon'', \quad \mu = \mu' + i\mu''. \quad (7.12)$$

Нетрудно видеть, что при малом затухании выражение для \mathbf{k} будет иметь вид:

$$k = k' + ik'' = \sqrt{(\varepsilon' + i\varepsilon'')(\mu' + i\mu'')} = \sqrt{\varepsilon'\mu'} \left[1 + \frac{i}{2} \left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} + \frac{\mu''}{\mu'} \right) \right]. \quad (7.13)$$

Из (13) легко видеть, что сама по себе смена знака у действительных частей ε и μ не влечет за собой автоматической смены знака у мнимой части волнового вектора. Для смены знака мнимой части волнового вектора необходимо сменить знак у мнимых частей ε и μ , что соответствует переходу от вещества с положительным поглощением к веществу с отрицательным поглощением, как это имеет место, например, в квантовых усилителях. Такой переход в общем случае никак не связан с возможным переходом от обычных веществ с положительным преломлением к веществам с отрицательным преломлением.

Оценка значимости нового понятия «вещества с отрицательным преломлением» существенно зависит от того, можем ли мы реально иметь такие вещества. Этот вопрос возник у нас ещё при публикации работ [23, 24]. Мы в свое время затратили заметные усилия для получения материала с отрицательным преломлением на основе магнитного полупроводника $CdCr_2Se_4$, однако эти усилия не увенчались успехом из-за существенных технологических трудностей, которые характеризуют синтез этого материала. Сейчас также, наверное, неуместно говорить об экзотической смеси электрических и магнитных зарядов, свойства которой были нами рассмотрены в [25].

Резкий перелом наступил, как это уже указывалось в начале нашего сообщения, тогда, когда в работах [21, 22] было сообщено о создании композитного материала, который мог характеризоваться отрицательными значениями ε и μ и, тем самым, отрицательным значением n . Этот материал состоял из многих медных стерженьков и колечек, расположенных в строгом геометрическом порядке. Стерженьки, по сути дела, являлись антеннами, которые реагировали на электрическое поле, а колечки были

антеннами, которые реагировали на магнитное поле. Размеры этих элементов и расстояние между ними были менее длины волны, а система в целом обладала отрицательными эффективными значениями ϵ и μ .

В работе [22] был изложен результат прямого измерения угла преломления для призмы, приготовленной из данного композита, и этот эксперимент показал полную справедливость для данного материала соотношения (7.2) при отрицательном n .

Описание нового класса веществ с несколько необычной электродинамикой привело к появлению в литературе ряда утверждений, справедливость которых вызывает обоснованные возражения. Так, в работе [29] утверждается, что отрицательное преломление имеет место только для фазовой скорости, а групповая скорость при всех обстоятельствах подчиняется обычному закону преломления с положительным значением. Авторы этой работы не смущает тот факт, что различие в направлениях фазовой и групповой скорости есть типичная особенность оптически анизотропных сред, которые заведомо не могут характеризоваться скалярным значением показателя преломления. Ошибка авторов [29] обусловлена тем, что они путают направление групповой скорости с направлением перпендикуляра к поверхности постоянной амплитуды при распространении в среде модулированных по амплитуде волн. Эта ошибка достаточно подробно рассмотрена и разъяснена в работе [30].

Мы сейчас находимся в самом начале пути, который ведёт нас в новую, весьма интересную и перспективную область электродинамики. Число исследователей, групп и организаций, связанных с данной тематикой, стремительно растёт. Точно так же увеличивается и количество публикаций в данной области. Интересующиеся могут обратиться к очень подробной подборке соответствующих работ, выложенной по адресу: http://physics.ucsd.edu/~drs/left_home. Работы автора [23 - 25] выложены на русском и английском языках по адресу: <http://zhurnal.ape.relarn.ru/-vgyv>.

Литература.

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1992.
2. *Севастьянов Л.А., Ловецкий К.П., Бикеев О.Н., Горобец А.П.* Методы и алгоритмы решения задач в моделях оптических покрытий. - М.: РУДН (в печати).
3. *Ильин В.А., Поздняк Э.Г.* Основы математического анализа. Часть 2. – М.: Наука, 2000.
4. К.П. Ловецкий, Л.А.Севастьянов, М. Л. Паукшто, А.А. Жуков. Методы связанных волн расчета оптических покрытий. - Москва: Изд. РУДН (в печати)
5. *Ловецкий К.П., Севастьянов Л.А., Паукшто М.Л., Бикеев О.Н.* Математический синтез оптических наноструктур. - М.: РУДН (в печати).
6. *Jones R. C.* New calculus for the treatment of optical systems //J. Opt. Soc. Am. 31, 488–493, (1941).
7. *Yeh P., Gu C.* Optics of Liquid Crystal Displays, John Wiley & Sons Inc., 1999.
8. *Hiroyuki Y.* NRF, NRZ and NIBCOM Retardation Film //Nitto Denko Technical Report 84 Vol. 41, 2003.
9. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. — М.: Наука, 1970.
10. *Azzam R.M.A., Bashara N.M.* Ellipsometry and polarized Light (North-Holland, Amsterdam, 1977).
11. *Berreman D.W.* Optics in stratified and anisotropic media: 4x4 matrix formulation //J. Opt. Soc. Am. 62, 502-510 (1972).
12. *Wöhler H., Fritsch M., Haas G., Mlynski D.A.* Characteristic matrix method for stratified anisotropic media: optical properties of special configurations //J. Opt. Soc. Am. A 8, 536-540 (1991).

13. *Chipman R. A.* Polarimetry //Handbook of Optics, McGraw-Hill, New-York, 1994, Chap. 22.
14. *Eidner K.* Light propagation in stratified anisotropic media: orthogonality and symmetry properties of the 4x4 matrix formalisms //J. Opt. Soc. Am. A, vol. 6, № 11, 1989.
15. *Schubert M.* The theory and application of generalized ellipsometry. William Andrew Publishing, Norwich, N.Y., 2005.
16. *Палто С.П.* Алгоритм решения оптической задачи для слоистых анизотропных сред //ЖЭТФ.— 2001.— Т. 119.— Вып. 4.— С. 638-648.
17. *Yeh P.* Optics of anisotropic layered media: A new 4x4 matrix algebra //Surf. Sci. 96, 41-53 (1980).
18. <http://en.wikipedia.org/wiki/Polarimetry>
19. <http://www.ioffe.ru/SVA/NSM/nk/index.html>
20. *Севастьянов Л.А., Ловецкий К.П., Бикеев О.Н., Ланеев Е.Б.* Алгоритмы вычислительного эксперимента для проектирования оптических наноструктур. - М.: РУДН (в печати).
21. *Smith D.R., Padilla W., Vier D.C., Nemat-Nasser S.C., Shultz S.* Phys. Rev. Let., 84 4184 (2000).
22. *Shelby R.A., Smith D.R., Shultz S.* Science, 292 77 (2001).
23. *Веселаго В.Г.* ФТТ 8 3571 (1966).
24. *Веселаго В.Г.* УФН 92 517 (1967).
25. *Веселаго В.Г.* ЖЭТФ 52 1025 (1966).
26. *Мандельштам Л.И.* ЖЭТФ 15 475 (1945).
27. *Notomi M.* Optical and Quantum Electronics 34 133 (2002).
28. *Веселаго В.Г.* УФН 172 1215 (2002).
29. *Valanju P.M., Walser R.M., Valanju A.P.* Phys. Rev. Let 88 187401 (2002).
30. *Pendry J.B., Smith D.R.* cond-mat / 0206563

ОПИСАНИЕ КУРСА И ПРОГРАММА

Цели и задачи магистерской программы «Оптика наноструктур»

Целью учебно-методического комплекса магистерской программы «Оптика наноструктур» является формирование у студентов четкого представления об основных принципах функционирования современных дифракционных оптических элементов и устройств, тонкопленочных многослойных покрытий; о законах взаимодействия электромагнитного излучения видимого диапазона с материалом. Целью является также изучение способов и возможностей математического синтеза и компьютерного проектирования дифракционных оптических покрытий. Полученные знания закрепляются в оптической лаборатории и дисплейном классе на примерах изучения конкретных дифракционных оптических элементов и многослойных покрытий со сложной геометрией.

Задачей учебно-методического комплекса магистерской программы «Оптика наноструктур» является обучение студентов навыкам самостоятельного анализа технических заданий на проектирование дифракционных оптических элементов и устройств. Они должны научиться выбирать из имеющихся в наличии алгоритмов и программ математического синтеза или разрабатывать их самостоятельно. В результате обучения обретут навыки ориентации в научной и бизнес информации с целью выбора нужной функции или нужного инструмента для реализации известной функции в области проектирования и создания дифракционных оптических наноструктур.

Цели и задача курса «Математическое моделирование и методы расчета оптических наноструктур»

Курс «Математическое моделирование и методы расчета оптических наноструктур» является составной частью магистерской программы «Оптика наноструктур». Магистерская программа «Оптика наноструктур» реализуется в рамках направления «Прикладная математика и информатика» и направления «Прикладная математика и физика», а возможно и других направлений. В составе магистерской программы «Оптика наноструктур» курс «Математическое моделирование и методы расчета оптических наноструктур» является обязательным, привязанным к семестру. Для других магистерских программ этот курс может быть курсом по выбору без привязки к семестру или факультативным на усмотрение методической комиссии программы. Курс носит теоретический и практический характер.

Целью курса является подробное ознакомление студентов с устойчивыми современными методами численного решения математических задач, возникающих при изучении взаимодействия электромагнитного излучения в области светового диапазона с веществом, в особенности с наноструктурами. Эта область знаний особенно быстро развивается в последние годы в связи с широким применением наноэлементов и тонких (менее одного микрометра толщиной) пленок, используемых в производстве жидко-кристаллических дисплеев, солнечных батарей на основе диэлектриков, фотоэмиссионных диодов, просветляющих покрытий, поляризаторов, миниатюрных лазеров, управляемых оптических элементов. Задачи оптики наноструктур практически не поддаются аналитическому решению, поэтому важным является не только освоение теоретического материала, но и изучение эффективных численных методов, используемых при решении данного

класса задач, приобретение навыков создания программного обеспечения для численного моделирования различных оптических наноструктур.

Задачей курса «Математическое моделирование и методы расчета оптических наноструктур» является формирование у студентов навыков работы на современной измерительной аппаратуре. Задачей курса является также обучение студентов использованию строгих методов связанных волн при решении задач моделирования современных оптических устройств на основе тонкопленочных покрытий и дифракционных оптических элементов. Это позволит им при необходимости разрабатывать новое программное обеспечение. Безусловной задачей курса является также освоение существующего программного обеспечения, ориентированного на расчет и проектирование оптических покрытий. В результате обучения они получают умение и навыки правильно оценить сложность научно-исследовательских и конструкторских заданий на разработку дифракционных оптических элементов и устройств, аргументированно выбрать метод решения конструкторской задачи, а затем экономично и эффективно выполнять компьютерный дизайн требуемого дифракционного оптического покрытия или устройства.

В пособии изложены распространенные математические модели оптических дифракционных решеток. Проанализированы ограничения на период решетки, обсуждаются современные методы преодоления указанных ограничений. Здесь же приводится обзор последних публикаций о феноменологических и теоретических моделях оптических свойств тонких пленок, синтезированных из углеродных нанотрубок и нанопроволок. Такие пленки обладают уникальными свойствами различной природы, мы же останавливаемся на оптических свойствах. Описаны различные методы расчета оптических свойств указанных пленок в зависимости от выбранной математической модели.

Трудоемкость курса составляет 3 кредита; 2 часа лекций и 2 часа лабораторных занятий в дисплейном классе в неделю.

Инновационность курса.

Курс является инновационным по содержанию и по литературе, он включает в себя последние научные достижения в области решения задач дифракционной оптики, когда характерные размеры исследуемых объектов не превышают либо сравнимы с длиной волны оптического излучения. Это направление наиболее полно развивается в научной школе В.А. Сойфера¹

Если характерные размеры препятствия на пути света сравнимы с длиной волны, то для адекватного описания дифракции света на препятствии требуется строго решать задачу, которая, в конечном счете, сводится к решению системы уравнений Максвелла (СУМ). Условно методы решения СУМ можно разделить на три группы методов: разностные методы решения дифференциальных уравнений, модовые методы решения интегральных и дифференциальных уравнений, и метод конечных и граничных элементов для решения интегральных уравнений.

Особняком стоит метод решения задач на собственные значения и собственные функции для дифференциальных или интегральных операторов. Перечисленные методы в настоящее время применяются для решения следующих задач оптики: расчета и анализа микрооптики, в том числе микрооптики на алмазных пленках; расчета субволнового антиотражающего покрытия; анализа дифракции света на одномерных и двумерных дифракционных решетках, фотонных кристаллах; расчета градиентной микрооптики, анализ пространственных мод оптических

¹ В.В. Котляр. Численное решение уравнений Максвелла в задачах дифракционной оптики. // Компьютерная оптика. №29, с.24-40.

волноводов и волокон, расчета силы и момента силы, действующей на микрообъект со стороны электромагнитного поля.

Наиболее универсальным считается метод разностного решения СУМ. Он применим для анализа дифракции произвольной электромагнитной волны на диэлектрических, металлических и анизотропных микрообъектах. Причем данный метод позволяет промоделировать временную эволюцию электромагнитного импульса в произвольной неоднородной среде.

Первоначальная постановка задачи была двухмерная: анализ дифракции цилиндрической или плоской волны на диэлектрическом цилиндре неограниченной длины и с произвольным сечением, например, цилиндрическая линза.

История проблемы численного решения СУМ начинается с работы S.K.Yee (1966), в которой была предложена оригинальная разностная схема. Наибольший вклад в исследования по численному решению СУМ, начиная с 1975 года, внес A. Taflove. В статьях западных ученых метод решения СУМ называется – FDTD (finite difference time-domain). Работы по применению этого метода анализа дифракции на элементах микро-оптики, в том числе дифракционной, начались с 1994 года.

Разностная схема Yee является условно устойчивой, а корректное введение излучения в расчетную область осуществляется с помощью метода полного и рассеянного полей.

Во многих задачах дифракции рассматривается монохроматический свет. Решение таких задач связано с решением уравнения Гельмгольца. Если ограничить рассмотрение только периодическими объектами, например, одномерными или двумерными дифракционными решетками, трехмерными фотонными кристаллами, то решать уравнение Гельмгольца в этом случае удобно с помощью метода связанных волн (rigorous coupled

wave - RCW). Впервые этот метод применил к анализу объемных голограмм в 1969 году Н. Kogelnik.

Для анализа дифракционных решеток метод связанных волн применили в 1981 году М. Moharam, Т. Gaylord.

Метод связанных волн (МСВ) основан на представлении электромагнитного поля в однородных областях пространства до периодического объекта и после него в виде линейной комбинации плоских волн.

Для решения задач дифракции электромагнитной волны на микрообъектах применяются не только дифференциальные методы, которые были рассмотрены до этого, но и интегральные методы. Они основаны на решении интегральных уравнений, как правило, линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Это методы конечных и граничных элементов в постановке Ритца или Галеркина, это метод прямого сведения интегрального уравнения к линейной системе алгебраических уравнений или использование алгоритма быстрого преобразования Фурье для итеративного решения интегрального уравнения типа свертки.

В ходе проведения занятий по этому курсу разработчики предполагают использование традиционных методик преподавания, принятой в странах болонской системы образования, то есть с использованием кредитной системы оценки знаний.

Наряду с традиционными элементами преподавания математических методов решения прикладных задач, разработчики курса предполагают воспользоваться хорошо зарекомендовавшим себя опытом МФТИ и подобных вузов. Для этого в рамках подпрограммы «Оптика наноструктур» осуществляется закупка уникального измерительного и аналитического оборудования для выполнения измерений разнообразных

характеристик оптических наноустройств с целью использования этого оборудования в учебном процессе и для проведения научно-исследовательских работ преподавателями, аспирантами и студентами.

По окончании магистратуры по направлению «Оптика наноструктур» выпускники Российского университета дружбы народов станут конкурентно-способными специалистами в области проектирования современных оптических устройств, которые не будут испытывать затруднений при последующем трудоустройстве.

Направление научно-практических разработок в области численного моделирования оптических элементов сформировалось лишь в последние 10 – 15 лет. Поэтому наблюдается сильный дефицит учебно-методической литературы не только в России, но и во всем мире. Разрабатываемые в рамках инновационной программы «Оптика наноструктур» учебные пособия восполнят в некоторой степени этот пробел и составят основной список литературы для слушателей курсов. Вместе с ними следует использовать несколько учебников и монографий, вышедших в свет к настоящему времени и перечисленные в списке литературы. Курс базируется на публикациях научных статей мировых лидеров исследований в данной области в научной периодике, диссертационных работах их учеников, включающих работы по непосредственному моделированию, дизайну и последующему изготовлению лабораторных образцов оптических элементов и устройств. В список дополнительной и рекомендуемой литературы включены все научно-исследовательские публикации, положенные в основу предлагаемого курса.

В качестве практических заданий, курсовых работ и тем рефератов слушателям магистерской программы будут предложены актуальные проблемы и задачи, решение которых востребовано современным уровнем

развития высокотехнологичных отраслей промышленности и научно-исследовательских лабораторий.

Структура курса (с указанием количества часов аудиторных/самостоятельной работы на темы)

Темы лекций

Тема 1. Система уравнений Максвелла – единственно возможная математическая модель описания взаимодействия электромагнитного излучения видимого диапазона с материальными объектами, характерные размеры которых значительно меньше длины волны. Дифференциальная форма уравнений Максвелла, интегральная форма уравнений Максвелла. Уравнения Максвелла на границе раздела двух сред. Существование и единственность решений системы уравнений Максвелла; разные варианты граничных условий на бесконечности. (3 пары).

Тема 2. Фазовые и энергетические законы преломления и отражения плоской монохроматической поляризованной электромагнитной волны на плоской границе двух сред с разными диэлектрическими и магнитными проницаемостями. Представление о метаматериалах на основе работ Веселаго М.Г., Дж. Пендри и Шевченко В.В. (2 пары).

Тема 3. Взаимодействие плоской монохроматической поляризованной электромагнитной волны с многослойными однородными изотропными тонкопленочными структурами. Методы Берремана и Мохарама (для однородных слоев). (2 пары).

Тема 4. Строгий подход (Fourier Modal Method, метод Галеркина) к анализу одномерных дифракционных оптических решеток для произвольного профиля поверхности покрытия. Возможные варианты

решения полученных систем обыкновенных дифференциальных уравнений: метод связанных волн и метод дифференциальных разностей. Сходство и различие получившихся систем обыкновенных дифференциальных уравнений и следующее из этого сходство и различие методов численного решения. (2 пары)

Тема 5. Моделирование дифракции плоской монохроматической поляризованной электромагнитной волны на многослойных структурах, состоящих из двумерных дифракционных оптических решеток. Возможные варианты решения полученных систем обыкновенных дифференциальных уравнений: метод связанных волн и метод дифференциальных разностей. Сходство и различие получившихся систем обыкновенных дифференциальных уравнений и следующее из этого сходство и различие методов численного решения. (3 пары)

Тема 6. Обзор численных методов решения задач моделирования многомерных дифракционных оптических устройств. (1 пара).

Тема 7. Фотонные кристаллы. Моделирование дифракции плоской монохроматической поляризованной электромагнитной волны на трехмерной дифракционной оптической решетке. Метод связанных волн решения задачи о пропускании и отражении. (2 пары)

Тема 8. Активные оптические среды. Жидкие кристаллы. Моделирование прохождения плоской монохроматической поляризованной электромагнитной волны через жидкокристаллическую трехмерную ячейку методами RCWA и FDTD. По материалам диссертации Christian Bohley «Polarization Optics of Periodic Media» (2 пары).

Тема 9. Управляемые оптические структуры на базе дифракционных оптических сверхрешеток. Конкретизация математической модели в зависимости от поставленной задачи: геометрические параметры – плоские

слои, цилиндрические объекты, одномерные и двумерные регулярные решетки (синусоидальные, с прямоугольным профилем), фотонные кристаллы (3D-решетки), активные оптические ячейки, жидкие кристаллы (хиральные). Фотоэмиссионные диоды, ячейки солнечных батарей.

Темы семинарских и практических занятий

Формулы векторной алгебры и векторного анализа.

Вывод волновых уравнений для напряженностей электромагнитного поля из уравнений Максвелла.

Поперечность плоских монохроматических электромагнитных волн в однородной среде.

Формулы Френеля для s-поляризованных плоских монохроматических электромагнитных волн.

Формулы Френеля для p-поляризованных плоских монохроматических электромагнитных волн.

Законы преломления и отражения на границе среды с отрицательным показателем преломления.

Получение формул модального метода Фурье в случае распространения плоской поляризованной волны в одномерной периодической среде.

Вывод граничных условий в рамках модального метода Фурье для одномерных периодических дифракционных решеток.

Метод Галеркина для одномерных периодических дифракционных решеток в модальном методе Фурье.

Получение формул модального метода Фурье в случае распространения плоской поляризованной волны в двумерной периодической среде.

Вывод граничных условий в рамках модального метода Фурье для двумерных периодических дифракционных решеток.

Метод Галеркина для двумерных периодических дифракционных решеток в модальном методе Фурье.

«Зоны Бриллюэна» фотонных кристаллов.

Темы коллоквиумов и контрольных работ

Формулы Френеля для s-поляризованных плоских монохроматических электромагнитных волн.

Формулы Френеля для p-поляризованных плоских монохроматических электромагнитных волн.

Получение формул модального метода Фурье в случае распространения плоской поляризованной волны в одномерной периодической среде.

Вывод граничных условий в рамках модального метода Фурье для одномерных периодических дифракционных решеток.

Метод Галеркина для одномерных периодических дифракционных решеток в модальном методе Фурье.

Описание системы контроля знаний:

Общие правила выполнения контрольных заданий;

Требования к оформлению работы

Постановка задачи.

1. Краткая формулировка задачи.
2. Развернутая постановка задачи с указанием основных режимов работы и их сценариев.

Алгоритм решения.

1. Математическое описание алгоритма.
2. Структура алгоритма ядра программы (укрупненная блок-схема).

Тестирование.

1. Описание основных режимов тестирования алгоритма и программы и результатов работы программы.
2. Список возможных ошибок и аномалий, описание реакции программы на них.

Заключение.

Содержит общие комментарии и замечания исполнителя о выполненной работе.

Приложение.

Приложение может содержать текст программы (полная распечатка или распечатка алгоритма ядра программы).

Работа должна быть представлена в виде распечатанного текста и на дискете.

Рекомендации к составлению отчета

Оформление.

отчет по работе должен быть оформлен в форме Word-файла.

Содержание отчета.

Каждый пункт задания вычислительного эксперимента должен найти свое отражение в отчете.

Каждый раздел отчета должен содержать:

формулировку цели эксперимента

описание исходных данных - приближаемая функция, интервал и порядок приближения, метод приближения и т.п.

результаты эксперимента, представленные в форме таблиц, гистограмм и графиков

иллюстрационный материал в виде копий экрана с графиками зависимостей погрешности приближения, вида приближаемой функции и т.п.

выводы, следующие из результатов эксперимента в контексте его цели.

Шкала оценок, итоговые оценки (методика выставления)

Бально-рейтинговая методика оценки уровня знаний по обязательной дисциплине «Математическое моделирование и методы расчета оптических наноструктур», привязанной к семестру

Порядок начисления баллов за семестр.

Контрольная работа № 1: 0 – 40 баллов

Теоретические вопросы: 0 – 10 баллов

Практические задания: 0 – 30 баллов

Контрольная работа № 2: 0 – 40 баллов

Теоретические вопросы: 0 – 10 баллов

Практические задания: 0 – 30 баллов

Контрольная работа № 3: 0 – 20 баллов

Теоретические вопросы: 0 – 20 баллов

Шкала бально-рейтинговой системы.

Баллы за семестр	Автоматическая оценка		Баллы за итоговый контроль знаний	Общая сумма баллов	Итоговая оценка
	Итоговая оценка	Дополнительные баллы			
78 – 80	зачет	по 5 баллов за каждый свыше 76**	0 – 20*	86 – 100	зачет
41 – 77	Нет	Нет	0 – 20	51 – 97	зачет
			0 – 20	41 – 50	незачет
< 41	незачет	Нет	Нет	Нет	незачет

* студент имеет право не проходить итоговый контроль знаний.

** дополнительные баллы начисляются автоматически:

за 86 баллов, набранных в семестре, начисляется дополнительно 6 баллов (общая сумма баллов – 92);

за 87 баллов – 12 баллов (99);

за 88 баллов – 18 баллов (106);

за 89 баллов – 24 балла (113);

за 90 баллов – 30 баллов (120).

Академическая этика, соблюдение авторских прав.

Все имеющиеся в тексте сноски тщательно выверены и снабжены «адресами». Авторы не включали в свою работу выдержки из работ других авторов без указания на это, не пересказывали чужих работ близко к тексту без отсылки к ним. Авторы также не использовали чужих идей без указания первоисточников. Это касается и источников, найденных в интернете. В необходимых случаях указан полный адрес сайта.

Программа курса УМК:

Аннотированное содержание курса.

Первый модуль трудоемкостью в 1 кредит составляют:

- теоретический материал, излагаемый в первых трех темах,
- практическими занятиями в дисплейном классе в течение 14 академических часов,
- самостоятельные занятия по написанию рефератов.

В конце этого модуля проводится промежуточный контроль знаний.

Второй модуль трудоемкостью в 1 кредит составляют:

- теоретический материал, излагаемый в четвертой, пятой и шестой темах,
- практическими занятиями в дисплейном классе в течение 10 академических часов,
- самостоятельные занятия по написанию рефератов.

В конце этого модуля проводится промежуточный контроль знаний.

Третий модуль трудоемкостью в 1 кредит составляют:

- теоретический материал, излагаемый в седьмой и восьмой темах,

- практическими занятиями в дисплейном классе в течение 8 академических часов,
- самостоятельные занятия по написанию рефератов.

В конце этого модуля проводится итоговый контроль знаний.

Список обязательной и дополнительной литературы с указанием соответствия разделов источника (постранично) разделам читаемого курса

Список обязательной литературы.

1. Математическое моделирование и методы расчета оптических наноструктур / Под ред. К.П. Ловецкого: Учебное пособие. - М.: Изд-во РУДН (готовится к печати).
2. Методы компьютерной оптики/Под ред. В.А. Сойфера: Учеб. для вузов. — 2-е изд., испр. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. - 688 с.
3. M. Neviere, E. Popov. Light Propagation in Periodic Media: Differential Theory and Design Marcel Dekker Inc, 2002, 432 p.
4. P. Yeh, M. Paukshto, "Molecular Crystalline Thin-Film E-polarizer". Molecular Materials, 14, 2001.
5. P. Lazarev, M. Paukshto, "Low Leakage Off Angle in E-polarizer". J. of the SID, 9, 2001.
6. P. Lalanne, "Improved formulation of the coupled-wave method for two-dimensional gratings," J. Opt. Soc. Am. A 14, 1592-1598 (1997)
7. P. Lalanne and G. M. Morris, "Highly improved convergence of the coupled-wave method for TM polarization," J. Opt. Soc. Am. A 13, 779- (1996)
8. C. Sauvan, G. Lecamp, P. Lalanne, and J. Hugonin, "Modal-reflectivity enhancement by geometry tuning in Photonic Crystal microcavities," Opt. Express 13, 245-255 (2005)
9. Jianhua Jiang. PhD. Thesis. Rigorous analysis and design of diffractive

- optical elements. The University of Alabama in Huntsville, 2000.
10. Chr. Bohley. PhD. These Polarization Optics of Periodic Media, Neuchâtel, 2004
11. Carlos Fernando Rondina Mateus. PhD. Thesis. Tunable Optoelectronic Devices, UNIVERSITY of CALIFORNIA at BERKELEY, 2004, 217 p.

Список дополнительной литературы и источников в интернете.

12. Родионов С.А. Основы оптики. Конспект лекций.– СПб: СПб ГИТМО (ТУ), 2000. - 167 с.
13. Терлецкий Я.П., Рыбаков Ю.П. Электродинамика. М.: Высш. шк., 1990.
14. Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г. Математические модели электродинамики. М.: Высшая школа. 1991. 224с.
15. Ярив А., Юх П. Оптические волны в кристаллах. М. Мир.1983.
16. Аззам Р., Башара Н. Эллипсометрия и поляризованный свет. М. Мир.1981.
17. Moharam, M. G., E. B. Grann, D. A. Pommet, and T. K. Gaylord, "Formulation for stable and efficient implementation of rigorous coupled-wave analysis of binary gratings," J. Opt. Soc. Am. A, Vol. 12, No. 5, 1068-1076, 1995.
18. Moharam, M. G., D. A. Pommet, E. B. Grann, and T. K. Gaylord, "Stable implementation of the rigorous coupled-wave analysis for surface-relief gratings: enhanced transmittance matrix approach," J. Opt. Soc. Am. A, Vol. 12, No. 5, 1077-1086, 1995.

Темы рефератов, курсовых работ, эссе

Темы рефератов.

1. Строгое математическое изложение модели распространения монохроматических поляризованных (линейно и

эллиптически) электромагнитных волн (плоских, сферических, цилиндрических) в однородной среде (изотропной, анизотропных) с учетом граничных условий на бесконечности. (Ильинский, Борн, Топтыгин и Румянцев, Рыбаков, Морс и Фешбах)

2. Строгий вывод формул Френеля для плоских монохроматических линейно поляризованных электромагнитных волн.
3. Вывод и анализ дисперсионных соотношений Крамерса-Кронига.
4. Обзор работ Тихонова и Самарского 1947-1948 годов о полноте собственных мод замкнутого волновода.
5. Парциальные условия излучения на бесконечности.
6. Моделирование многослойных зеркал и зеркал на одномерных дифракционных решетках по PhD dissertation of Carlos Fernando Rondina Mateus (University of California at Berkeley)

Темы курсовых работ

1. Строгий вывод формул Френеля для плоских монохроматических эллиптически поляризованных электромагнитных волн.
2. Конечномерная аппроксимация дисперсионных соотношений Крамерса-Кронига.

Темы курсовых работ с последующим продолжением в качестве магистерской диссертации.

3. Расчет пропускания и отражения ТЕ- и ТМ-мод для однослойной двумерной бинарной решетки.

4. Расчет пропускания и отражения ТЕ- и ТМ-мод для однослойной двумерной бинарной решетки при коническом падении плоско-параллельной монохроматической волны.

Учебный тематический план курса УМК (календарный план, структурированный по видам учебных занятий)

Календарный план (20 недель) учебных занятий по обязательной дисциплине «Математическое моделирование и методы расчета оптических наноструктур», привязанный ко второму семестру магистратуры.

Виды и содержание учебных занятий				
Неделя	Лекции	Число часов	Семинарские занятия	Число часов
1	Дифференциальная форма системы уравнений Максвелла, материальные уравнения связи.	2	Вывод уравнения непрерывности.	2
2	Интегральная форма системы уравнений Максвелла. Уравнения Максвелла на границе раздела двух сред.	2	Вектор Умова-Пойнтинга. Поток энергии через границу.	2
3	Существование и единственность решений системы уравнений Максвелла; разные	2	Парциальные условия излучения на бесконечности.	2

	варианты граничных условий на бесконечности.			
4	Вывод законов Снеллиуса, метаматериалы.	2	Обзор работ Веселаго, Пендри и Шевченко.	2
5	Вывод формул Френеля.	2	Четвертьволновые пластинки.	2
6	Однородные многослойные изотропные покрытия. Подход Мохарама (RCWA).	2	Полуволновые пластинки.	2
7	Однородные многослойные анизотропные покрытия. Подход Берремана.	2	Оптические резонаторы, многослойные зеркала.	2
8	Промежуточный контроль знаний			2
9	Гипотеза Рэлея, теорема Флоке-Блоха для одномерных решеток.	2	Доклад по реферату 1.	2
10	Сшивание функциональных рядов на границах раздела, метод Галеркина.	2	Доклад по реферату 2.	2
11	Сравнение методов (RCWA и FD) решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений	2	Метод Галеркина.	2

12	Сшивание двукратных функциональных рядов на границах раздела, метод Галеркина.	2	Вывод системы линейных алгебраических уравнений для ТМ-мод.	2
13	Сравнение методов (RCWA и FD) решения двухиндексных систем обыкновенных дифференциальных уравнений	2	Доклад по реферату 3.	2
14	Методы моделирования многомерных дифракционных оптических устройств.	2	Доклад по реферату 4. (Брэгговские зеркала)	
15	Промежуточный контроль знаний			2
16	Моделирование дифракции плоской монохроматической поляризованной электромагнитной волны на трехмерной дифракционной оптической решетке. Часть 1.	2	Запрещенные оптические «зоны Бриллюэна».	2
17	Моделирование дифракции плоской монохроматической	2	Реферат по фотонным кристаллам.	2

	поляризованной электромагнитной волны на трехмерной дифракционной оптической решетке. Часть 2.			
18	Моделирование прохождения плоской монохроматической поляризованной электромагнитной волны через жидкокристаллическую трехмерную ячейку методом RCWA.	2	Жидкие кристаллы. Принцип работы жидкокристаллических дисплеев (LCD).	2
19	Моделирование прохождения плоской монохроматической поляризованной электромагнитной волны через жидкокристаллическую трехмерную ячейку методом FDTD.	2	Заключительный обзор курса. Консультации.	2
20	Итоговый контроль знаний			2