

**ПРИОРИТЕТНЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ПРОЕКТ «ОБРАЗОВАНИЕ»
РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ**

В.И. БЕЗЯЕВ

**ОБЩИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ
ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ
И ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ**

Учебное пособие

Москва

2008

*Инновационная образовательная программа
Российского университета дружбы народов*

**«Создание комплекса инновационных образовательных программ
и формирование инновационной образовательной среды,
позволяющих эффективно реализовывать государственные интересы РФ
через систему экспорта образовательных услуг»**

Экспертное заключение –

доктор физико-математических наук, профессор *А.А. Коньков*

Безяев В.И.

Общие краевые задачи для эллиптических и параболических уравнений:

Учеб. пособие. – М.: РУДН, 2008. – 288 с.

В пособии рассматривается введение в теорию общих краевых задач для линейных эллиптических уравнений и теорию общих смешанных задач для линейных параболических уравнений. Предварительно приводятся необходимые сведения из теории линейных операторов, теории распределений и функциональных пространств Соболева – Слободецкого.

Предназначено для бакалавров, обучающихся по направлениям «Математика. Прикладная математика», «Прикладная математика и информатика», «Физика».

Учебное пособие выполнено в рамках инновационной образовательной программы Российского университета дружбы народов, направление «Комплекс экспортноориентированных инновационных образовательных программ по приоритетным направлениям науки и технологий», и входит в состав учебно-методического комплекса, включающего описание курса, программу и электронный учебник.

© Безяев В.И., 2008

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	6
Список условных обозначений	11
Глава 1. Линейные операторы	12
1.1. Линейные непрерывные операторы.....	12
1.2. Компактные операторы.....	15
1.3. Фредгольмовы операторы.....	19
Задачи.....	32
Глава 2. Теория распределений	35
2.1. Пространства пробных функций и распределений	35
2.2. Умножение и дифференцирование распределений.....	42
2.3. Прямое произведение и свертка распределений.....	50
2.4. Преобразование Фурье распределений.....	64
2.5. Частичное преобразование Фурье.....	71
Задачи.....	74
Глава 3. Пространства Соболева	76
3.1. Определение и простейшие свойства пространств Соболева.....	76
3.2. Непрерывные вложения пространств $\overset{\circ}{W}_p^k(\Omega)$	79
3.3. Компактные вложения пространств $\overset{\circ}{W}_p^k(\Omega)$	88
3.4. Теорема о продолжении.....	93

3.5.	Теоремы о плотности и о вложениях пространств $W_p^k(\Omega)$	102
3.6.	След функции	106
	Задачи.....	115
Глава 4. Пространства Слободецкого.....		118
4.1.	Определения и простейшие свойства.....	118
4.2.	Терема Соболева и её следствия.....	132
4.3.	Теоремы о следах.....	135
4.4.	Компактные вложения.....	140
	Задачи.....	143
Глава 5. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами.....		145
5.1.	Фундаментальное решение.....	145
5.2.	Эллиптические дифференциальные операторы.....	151
5.3.	Теорема о локальной гладкости решений эллиптических уравнений.....	156
5.4.	Неравенство Гординга и его следствия.....	160
5.5.	Теорема о разрешимости эллиптического уравнения.....	164
	Задачи.....	170
Глава 6. Краевые задачи в полупространстве для эллиптических уравнений с постоянными коэффициентами.....		172
6.1.	Постановка краевой задачи в полупространстве.....	172
6.2.	Краевые задачи на полуоси.....	174
6.3.	Условие Лопатинского	186
6.4.	Критерий корректности постановки	189

6.5. Параметрикс.....	199
Задачи.....	202
Глава 7. Общие эллиптические краевые задачи.....	204
7.1. Определение эллиптической краевой задачи.....	204
7.2. Теорема о существовании параметрикса.....	208
7.3. Фредгольмовость общих эллиптических краевых задач.....	213
7.4. Регулярность решений и основная теорема.....	216
Задачи.....	217
Глава 8. Смешанные задачи для параболических уравнений	
произвольных порядков.....	219
8.1. Определение параболической смешанной задачи.....	219
8.2. Абстрактная эволюционная задача.....	222
8.3. Обобщенные решения смешанных задач.....	229
8.4. О регулярности обобщенных решений.....	240
8.5. Применение теории полугрупп.....	242
Задачи.....	248
Список литературы.....	251
Описание курса и программа	254

Введение

Данное пособие является вводным курсом по теории общих краевых задач для линейных эллиптических и параболических уравнений произвольных порядков. Оно подготовлено в рамках реализации Инновационной образовательной программы в Российском университете дружбы народов и предназначено для студентов и аспирантов физико-математических вузов. Содержание пособия представляет собой расширенное изложение соответствующего курса лекций для студентов-математиков РУДН.

Главное внимание в пособии уделено общим эллиптическим краевым задачам. Для общих параболических начально-краевых задач рассмотрены некоторые вопросы, наиболее тесно связанные с эллиптической теорией.

Как теория общих эллиптических краевых задач, так и теория параболических смешанных задач были созданы в последние 50–60 лет. Они представляют собой наиболее крупные достижения в современной теории уравнений в частных производных. При этом многие идеи и методы развивались не одно столетие, а в их раскрытии принимали участие очень многие крупнейшие математики двадцатого века.

Основной прогресс в теории уравнений в частных производных за последние полвека был достигнут благодаря применению так называемых функциональных методов, и в первую очередь теории распределений (обобщенных функций). Поэтому существенная часть пособия посвящена изложению необходимых разделов функционального анализа и теории распределений, включая теорию пространств Соболева–Слободецкого. Без них изложение современной теории уравнений с частными производными представляется неестественным.

Приведенный в конце пособия список литературы содержит некоторые наиболее известные и фундаментальные источники по рассматриваем-

мой тематике. В своем большинстве это серьезные монографии, чтение которых весьма затруднительно для начинающих. Учебных пособий, в которых излагаются теории общих эллиптических и общих параболических краевых задач, в русскоязычной литературе нет. В данном сравнительно небольшом пособии сделана попытка восполнения этого пробела.

Конкретная цель этого пособия заключается, по возможности, в систематическом изложении вопросов, касающихся существования, единственности и регулярности решений общих краевых задач, как для эллиптических, так и для параболических уравнений.

В первой главе пособия кратко излагаются основные понятия и утверждения теории линейных непрерывных, компактных и фредгольмовых операторов. Эти сведения необходимы для понимания рассматриваемых в пособии задач с операторной точки зрения.

Во второй главе дается введение в теорию распределений, достаточное для дальнейшего изложения. Наиболее содержательной частью главы является анализ Фурье распределений. Он представляет собой один из важнейших инструментов исследования эллиптических, а вместе с преобразованием Лапласа–Фурье и параболических краевых задач.

Третья и четвертая главы посвящены довольно подробному изложению теории основных функциональных пространств, в которых ищутся решения рассматриваемых задач. Это пространства Соболева $W_p^k(\Omega)$ для $p \geq 1$ и натуральных k и пространства Слободецкого $H^s(\Omega)$ при вещественных s . Заметим, что при $p \neq 2$ пространства $W_p^k(\Omega)$ более естественно применять для исследования соответствующих нелинейных краевых задач, однако они интересны и в линейном случае. Поэтому и для полноты изложения в главе 3 в сжатом виде изложены теории этих пространств (изложение приводится в соответствии с главой 1 в [3]).

Теория линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами базируется на теории распределений и анализе Фурье. В соответствии с этой концепцией в пятой главе кратко приводятся основные результаты теории таких операторов. За исключением теоремы о существовании фундаментального решения эти результаты излагаются для наиболее простых случаев. Все представленные в главе результаты имеют принципиальное значение как для самой теории операторов с постоянными коэффициентами, так и для теории краевых задач.

Глава 6 посвящена подробному изучению модельной эллиптической краевой задачи для однородных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами в полупространстве. Несмотря на свой весьма частный характер, эта задача играет ключевую роль в решении самых общих эллиптических краевых задач. При решении модельной задачи максимально используется её специфика – постоянство коэффициентов и однородность дифференциальных операторов, простота геометрии полупространства. С помощью преобразования Фурье всё это позволяет свести исследование модельной задачи к краевой задаче на полуоси для линейного обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

В седьмой главе, по существу, подводятся итоги предыдущих исследований. Здесь для произвольных эллиптических дифференциальных операторов с переменными коэффициентами и произвольной ограниченной областью с гладкой границей даются естественные условия, при которых краевая задача корректно поставлена. Последнее означает фредгольмовость соответствующего задаче оператора, действующего в подходящих функциональных пространствах Соболева–Слободецкого (или Гёльдера). В свою очередь, для фредгольмовых уравнений (т.е. уравнений вида $Au = f$ с линейным непрерывным оператором A , имеющим конечномерное ядро и коядро) теория разрешимости во многом аналогична теории разрешимости систем линейных алгебраических уравнений.

В принципе отдельный и трудный вопрос о регулярности решений из пространств Соболева решается в данном случае одновременно с вопросом разрешимости с помощью так называемых априорных оценок. При этом заметим, что соответствующая априорная оценка для модельной краевой задачи является основным результатом её исследования. Способ получения априорных оценок в случае переменных коэффициентов и области с кривой границей, ставшей уже классическим, основывается на принципе локализации. В общем, согласно этому принципу достаточно сначала получить оценку для оператора вблизи каждой точки области или её границы, после чего оценка во всей области получается “склеиванием” локальных оценок с помощью разбиения единицы. Таким образом, кроме априорной оценки, заодно определяется и параметрикс общей краевой задачи, т.е. её почти обратный оператор.

В заключительной восьмой главе основным является вопрос о разрешимости смешанных задач для параболических уравнений произвольного порядка с краевыми условиями общего вида. Основная идея исследования этих задач, как и эллиптической теории, состоит в ослаблении классической постановки задачи до обобщенной. При этом обобщенная постановка, в свою очередь, бывает двух видов – слабой и сильной. В отличие от рассматривавшихся в главе 7 сильных обобщенных решений эллиптических краевых задач, основное внимание в главе 8 уделяется слабым решениям параболических задач, имеющих подходящую вариационную формулировку. При этом для доказательства существования таких решений применяется еще один фундаментальный метод современной теории уравнений в частных производных – метод Галеркина.

В конце главы 8 для доказательства корректности постановки общих параболических смешанных задач используется существенно отличающийся от предыдущего подход. Он состоит в применении теории полугрупп операторов, которая, несмотря на небольшое время, прошедшее с момента

её появления, стала уже классической. Отметим ещё, что в данном случае уже сильные решения соответствующих обобщенных задач. При этом, как и в случае слабых решений, обобщенные решения оказываются гладкими в случае гладких исходных данных и условий их согласования.

В конце каждой главы приводится небольшое количество задач в основном технического характера, дополняющих и комментирующих основное содержание пособия. Заметим при этом, что известно немало книг, содержащих многочисленные задачи и упражнения. В то же время практически отсутствует литература, содержащая задачи или упражнения по теории общих краевых задач для эллиптических и параболических уравнений.

Пособие рассчитано на читателей, знакомых с курсом обыкновенных дифференциальных уравнений и основами функционального анализа.

Список условный обозначений

\mathbf{N} – множество натуральных чисел;

\mathbf{Z}_+ – множество неотрицательных целых чисел;

$\mathbf{Z}_+^n = \mathbf{Z}_+ \times \dots \times \mathbf{Z}_+$ – прямое произведение n множеств \mathbf{Z}_+ ;

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – мультииндекс, т.е. $\alpha \in \mathbf{Z}_+^n$ $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$;

\mathbf{R}^n – n -мерное евклидово пространство точек x с координатами;

(x_1, \dots, x_n) , $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, $dx = dx_1 \dots dx_n$ – мера Лебега в \mathbf{R}^n ;

$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}$, где $x \in \mathbf{Z}^n$, $\alpha \in \mathbf{Z}_+^n$, $\partial_j = \partial / \partial x_j$ $\nabla v = grad v$;

Ω – область в \mathbf{R}^n , $\bar{\Omega}$ – замыкание области Ω в \mathbf{R}^n , $\partial\Omega$ – граница области Ω , $\Omega' \subset \Omega$ – замыкание $\bar{\Omega}'$ компактно и $\bar{\Omega}' \subset \Omega$;

$L_p(\Omega)$, где $p \geq 1$, – пространство измеримых функций $f(x)$ на Ω , для ко-

торых сходится интеграл $\int_{\Omega} |f(x)|^p dx$, $\|f\|_p = \|f\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$;

$L_p^m(\Omega) = (L_p(\Omega))^m = L_p(\Omega) \times \dots \times L_p(\Omega)$ – прямая сумма из m пространств $L_p(\Omega)$;

$L_\infty(\Omega)$ – пространство существенно ограниченных функций.

ГЛАВА 1. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

В этой главе кратко напоминаются основные сведения о *линейных непрерывных, компактных и фредгольмовых* операторах.

1.1. Линейные непрерывные операторы

Определение 1.1. Пусть E_1 и E_2 – линейные топологические пространства. *Линейным оператором*, действующим из E_1 в E_2 , называется отображение $A: E_1 \rightarrow E_2$, удовлетворяющее условию

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2 \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{C}, \quad \forall x_1, x_2 \in D(A).$$

Область определения $D(A) \subset E_1$ оператора A будет предполагаться, как обычно, линейным подпространством в E_1 . Оператор A называется *непрерывным в точке* $x_0 \in D(A)$, если для любой окрестности V точки $y_0 = A x_0$ существует такая окрестность U точки x_0 , что $Ax \in V$, если $x \in U \cap D(A)$. Оператор A называется *непрерывным (на $D(A)$)*, если он непрерывен в любой точке $x_0 \in D(A)$. Линейные и непрерывные операторы называются *линейно непрерывными*.

Линейные подпространства $\text{Ker} A = \{x \in D(A) : Ax = 0\} \subset E_1$ и $\text{Im} A = \{y \in E_2 : y = Ax, x \in D(A)\} \subset E_2$ называются, соответственно, *ядром* и *образом* оператора A .

Примеры

1.1. Пусть $E_1 = \mathbf{R}^m$, $E_2 = \mathbf{R}^n$, $A: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ – линейный оператор с $D(A) = \mathbf{R}^m$. Тогда оператор A непрерывен и определяется матрицей (a_{ij}) ,

где $A_{l_i} = \sum_{k=1}^n a_{k_i} f_k$, e_1, \dots, e_m – базис в \mathbf{R}^m , f_1, \dots, f_n – базис в \mathbf{R}^n . Размерность подпространства $\text{Im } A$ равна рангу матрицы (a_{ij}) .

1.2. Пусть $E_1 = E_2 = C(\bar{\Omega})$, Ω – ограниченная область в \mathbf{R}^n , A – интегральный оператор из $C(\bar{\Omega})$ в $C(\bar{\Omega})$, определяемый по формуле $A\varphi(t) = \int_{\Omega} K(t,s)\varphi(s)ds$, где $K \in C(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega})$. Легко проверить, что оператор A – линейный и непрерывный.

1.3. Оператор дифференцирования $D: C[a,b] \rightarrow C[a,b]$, $D(A) = C^1([a,b])$, $Dx(t) = x'(t)$, линеен, но не непрерывен. Непрерывность нарушается, например, в точке $x_0(t) \equiv 0$, так как $x_n(t) \equiv \frac{\sin nt}{n} \rightarrow 0$ в $C[a,b]$ при $n \rightarrow \infty$, но $Dx_n(t) \equiv \cos nt$ не имеет предела в $C[a,b]$ при $n \rightarrow \infty$.

Легко видеть, что оператор дифференцирования $D: C^1([a,b]) \rightarrow C([a,b])$, $D(A) = C^1([a,b])$ является линейным и непрерывным. Линейным и непрерывным является линейный дифференциальный оператор $P: C^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$, $D(P) = C^\infty(\Omega)$, где $Pu(x) \equiv \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u$, $a_\alpha \in C^\infty(\Omega) \quad \forall |\alpha| \leq m$, Ω – область в \mathbf{R}^n .

Замечание 1.1. В случае, когда $E_2 = \mathbf{C}$ (или $E_2 = \mathbf{R}$) линейный непрерывный оператор называется линейным (непрерывным) функционалом.

Утверждение 1.1. Пусть E_1 и E_2 – банаховы пространства, $A: E_1 \rightarrow E_2$ – линейный оператор, $D(A) = E_1$. Тогда непрерывность оператора A равносильна его ограниченности, то есть условию $\|Ax\| \leq C\|x\| \quad \forall x \in E_1$, где $C = \text{const}$ (наименьшее из чисел C в этом условии называется нормой оператора A и обозначается $\|A\|$).

Доказательство является простым упражнением.

Замечание 1.2. Утверждение 1.1 верно и в случае, когда E_1 и E_2 – линейные топологические пространства, а в пространстве E_1 выполнена первая аксиома счетности ([15], с. 209).

В дальнейшем по умолчанию $D(A) = E_1$. Множество всех линейных непрерывных операторов из E_1 в E_2 обозначается $L(E_1, E_2)$ и является линейным пространством. Если E_1, E_2 – банаховы пространства, то $L(E_1, E_2)$ – банахово пространство с нормой, определенной в утверждении 1.1. Если $E_1 = E_2 = E$, то $End(E) = L(E, E)$ является алгеброй над полем \mathbf{C} . В случае, когда $E_2 = \mathbf{C}$ (или $E_2 = \mathbf{R}$) пространство $L(E_1, E_2)$ называется сопряженным пространством к E_1 и обозначается E_1' (или E_1^*).

Определение 1.2. Пусть $A: E_1 \rightarrow E_2$ – линейный непрерывный оператор, где E_1, E_2 – линейные топологические пространства. Оператор $A': E_2' \rightarrow E_1'$, однозначно определяемый из тождества $\langle y, Ax \rangle = \langle A' y, x \rangle \quad \forall x \in E_1$, где $\langle f, x \rangle = f(x)$ при $x \in E_1, f \in E_1'$, называется сопряженным к оператору A .

Непосредственно из определения следует, что A' – линейный непрерывный оператор. В случае, когда $E_1 = \mathbf{R}^m, E_2 = \mathbf{R}^n$, а линейный оператор $A: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ задается матрицей (a_{ij}) , сопряженный оператор $A': \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ определяется матрицей, сопряженной к матрице (a_{ij}) .

1.2 Компактные операторы

Определение 1.3. Пусть X и Y – нормированные пространства. Линейный оператор $A: X \rightarrow Y$ называется *компактным (вполне непрерывным)*, если он переводит всякое ограниченное множество в предкомпактное.

Обозначим совокупность всех компактных операторов, действующих из X в Y , через $K(X, Y)$. Очевидно, что $K(X, Y) \subset L(X, Y)$. Более того, имеет место следующая теорема.

Теорема 1.1. 1) $K(X, Y)$ – замкнутое подпространство в $L(X, Y)$.

2) Если $A \in L(X_1, X_2)$, $B \in K(X_2, X_3)$, $C \in L(X_3, X_4)$, где X_i , $i = 1, 2, 3, 4$ – нормированные пространства, то $CBA \in K(X_1, X_4)$, в частности $K(X, X)$ – идеал в $L(X, X)$.

3) Если $A \in K(X, Y)$, то сопряженный оператор $A': Y' \rightarrow X'$ принадлежит $K(Y', X')$.

Доказательство. 1) Если $A, B \in K(X, Y)$ и M – ограниченное множество в X , то AM и BM – предкомпактны. Отсюда следует, что при $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ предкомпактно и множество $\alpha AM + \beta BM$, т.е. $\alpha A + \beta B \in K(X, Y)$.

Пусть $A_n \in K(X, Y)$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и $A_n \rightarrow A$ в $L(X, Y)$. Докажем, что множество AM предкомпактно, если M – ограниченное множество в X . Для этого при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ построим конечную ε -сеть множества AM . Так как $A_n \rightarrow A$ в $L(X, Y)$ при $n \rightarrow \infty$, то существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $\|A_N - A\| < \varepsilon / (2R)$, где $R = \sup_{x \in M} \|x\|$. Тогда множество $A_N M$ будет $\varepsilon / 2$ -сетью (не обязательно конечной) для множества AM , так как $\|Ax - A_N x\| < \varepsilon / 2$ при всех $x \in M$. С другой стороны множество

$A_N M$ по условию предкомпактно, а, значит, имеет конечную $\varepsilon/2$ -сеть S . Но тогда, очевидно, что S – ε -сеть для множества AM .

2) Пусть M – ограниченное множество в X_1 . Тогда AM – ограниченное множество в X_2 , BAM – предкомпактное множество в X_3 . Требуется построить конечную ε -сеть для множества $CBAM \subset X_4$. Пусть S – конечная $\varepsilon/\|C\|$ -сеть для BAM ($\|C\| \neq 0$, в противном случае утверждение очевидно). Тогда CS – конечная ε -сеть для $CBAM$.

3) Так как любое ограниченное подмножество нормированного пространства содержится в некотором шаре, то достаточно доказать, что A' отображает каждый шар в предкомпактное множество. А в силу линейности оператора A' достаточно показать, что образ $UA'U'$ единичного шара $U' \subset Y'$ предкомпактен.

Пусть дана последовательность $y'_n \subset U'$. Рассмотрим последовательность функций $f_n(y) = \langle y'_n, y \rangle$, $y \in \overline{AU}$, где U – единичный шар в X , \overline{AU} – компакт в Y_n в силу компактности оператора A . Семейство функций $\{f_n\}$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно на компакте \overline{AU} :

$$1) |f_n(y)| = |\langle y'_n, y \rangle| \leq \|y'_n\| \|y\| \leq \|y\| \leq R, \text{ где } R = \sup_{y \in AU} \|y\|;$$

$$2) |f_n(y) - f_n(z)| = |\langle y'_n, y - z \rangle| \leq \|y'_n\| \|y - z\| \leq \|y - z\|, \text{ при всех } y, z \in \overline{AU}.$$

По теореме Арцела последовательность f_n содержит подпоследовательность f_{n_k} , равномерно сходящуюся на \overline{AU} . Отсюда

$$\|A'y'_{n_k} - A'y'_{n_m}\| = \sup_{x \in U} |\langle y'_{n_k} - y'_{n_m}, x \rangle| = \sup_{x \in U} |f_{n_k}(Ax) - f_{n_m}(Ax)| \rightarrow 0$$

при $k, m \rightarrow \infty$, т.е. последовательность $A'y'_{n_k}$ является фундаментальной в пространстве X' . Но сопряженное пространство к нормированному про-

странству является полным. Таким образом, последовательность $A'y'_{n_k}$ сходится, а оператор A' компактен. \square

Примеры. 1.4. Пусть $A \in L(X, Y)$ и A – оператор *конечного ранга* (т.е. $\text{Im } A$ – конечномерное подпространство в Y). Тогда $A \in K(X, Y)$, так как ограниченное множество в конечномерном пространстве предкомпактно.

1.5. Единичный оператор $I \in L(X, X)$ не является компактным, если X – бесконечномерное нормированное пространство. Для доказательства этого утверждения достаточно показать, что единичный шар в X не является компактом. В свою очередь, для этого достаточно доказать, что в X существует последовательность x_n , удовлетворяющая условиям

- 1) $\|x_n\| = 1$;
- 2) $\|x_{n+1} - x_n\| \geq 1/2, n = 1, 2, \dots$.

Построим такую последовательность.

Пусть z_1, z_2, \dots – последовательность линейных независимых векторов в X , X_n – линейная оболочка векторов z_1, \dots, z_n , ($n = 1, 2, \dots$). Так как X_{n-1} – замкнутое подпространство в X , а $z_n \notin X_{n-1}$ (в силу линейной независимости z_1, \dots, z_n), то $\rho(z_n, X_{n-1}) = \inf_{x \in X_{n-1}} \|z_n - x\| = \alpha_n > 0$. Пусть, \tilde{z}_{n-1} – такой вектор из X_{n-1} , что $\|z_n - \tilde{z}_{n-1}\| < 2\alpha_n$. Тогда последовательность $x_n = \frac{z_n - \tilde{z}_{n-1}}{\|z_n - \tilde{z}_{n-1}\|}$

удовлетворяет условиям 1) и 2). При этом за x_1 можно взять $\frac{z_1}{\|z_1\|}$. Выполнение условия 1) очевидно. Проверим выполнение условия 2). Для любого $x \in X_n$ имеем

$$\|x_{n+1} - x\| = \left\| \frac{z_{n+1} - \tilde{z}_n}{\|z_{n+1} - \tilde{z}_n\|} - x \right\| = \frac{1}{\|z_{n+1} - \tilde{z}_n\|} \|z_{n+1} - \tilde{z}_n - x\| \|z_{n+1} - \tilde{z}_n\| \geq$$

$$\begin{aligned} &\geq \frac{1}{\|z_{n+1} - \tilde{z}_n\|} \rho(z_{n+1} - \tilde{z}_n, X_n) = \frac{1}{\|z_{n+1} - \tilde{z}_n\|} \rho(z_{n+1}, X_n) = \\ &= \frac{1}{\|z_{n+1} - \tilde{z}_n\|} \alpha_{n+1} > \frac{1}{2\alpha_{n+1}} \alpha_{n+1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

В частности, при $x = x_n \in X_n$, $\|x_{n+1} - x_n\| \geq 1/2$, $n = 1, 2, \dots$.

1.6. В приложениях наиболее часто встречаются компактные *интегральные операторы*. Простейшим таким оператором является оператор

$$K : C[a, b] \rightarrow C[a, b], \quad Ku(x) = \int_a^b k(x, y) f(y) dy, \quad \text{где } -\infty < a < b < +\infty,$$

$$k \in C([a, b] \times [a, b]).$$

Докажем, что $K \in K(C[a, b], C[a, b])$. Очевидно, что $Kf \in C[a, b]$, если $f \in C[a, b]$. Имеем

$$1) |Kf(x)| \leq \max_{a \leq x, y \leq b} |k(x, y)| \int_a^b |f(y)| dy;$$

$$2) |Kf(x') - Kf(x'')| \leq \max_{a \leq x, y \leq b} |k(x', y) - k(x'', y)| \int_a^b |f(y)| dy.$$

Из 1) и 2) сразу следует, что оператор K отображает любое ограниченное в $C[a, b]$ множество в равномерно ограниченное и равномерно непрерывное семейство функций, т.е. в предкомпактное (по теореме Арцеля).

Из тех же неравенств 1) и 2) сразу следует, что оператор K является компактным оператором из $L_1(a, b)$ в $C[a, b]$. Так как в силу неравенства

$$\text{Гёльдера } \int_a^b |f(y)| dy \leq \left(\int_a^b |f(y)|^p dy \right)^{1/p} \left(\int_a^b 1 dy \right)^{1/q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad \text{то из неравенств}$$

1), 2) следует компактность оператора K как оператора из $L_p(a, b)$ в $C[a, b]$, $1 \leq p \leq \infty$.

Далее, так как всякое множество предкомпактное в $C[a, b]$ предкомпактно в $L_p(a, b)$ при $1 \leq p \leq \infty$, то оператор K является компактным как оператор из $L_p(a, b)$ в $L_p(a, b)$, ($1 \leq p \leq \infty$).

Аналогичные результаты верны и для интегрального оператора $Kf(x) = \int_{\Omega} k(x, y)f(y)dy$, где Ω – ограниченная область в \mathbf{R}^n , $k \in C(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega})$. В этом случае можно доказать, что $K \in K(C(\bar{\Omega}), C(\bar{\Omega}))$, $K \in K(C(\bar{\Omega}), L_p(\Omega))$ и $K \in K(L_p(\Omega), L_p(\Omega))$ при $1 \leq p \leq \infty$.

1.3. Фредгольмовы операторы

Определение 1.4. Пусть X, Y – банаховы пространства, $A : X \rightarrow Y$ – линейный непрерывный оператор. Тогда оператор A называется *фредгольмовым*, если $\dim \text{Ker} A < +\infty$ и $\dim \text{Co ker} A < +\infty$.

Напомним, что $\text{Ker} A = \{x \in X : Ax = 0\}$, $\text{Co ker} A = Y / \text{Im} A$, $\text{Im} A = \{y \in Y : y = Ax, x \in X\}$, а фактор-пространство $Y / \text{Im} A$ понимается в алгебраическом смысле (без учета топологии).

Индексом фредгольмова оператора A называется число $\text{ind} A = \dim \text{Ker} A - \dim \text{Co ker} A$.

Обозначим $\alpha(A) = \dim \text{Ker} A$, $\beta(A) = \dim \text{Co ker} A$, а множество всех фредгольмовых операторов A из $L(X, Y)$ через $F(X, Y)$.

Примеры. 1.7. *Конечномерный случай.* Пусть $\dim X = m$, $\dim Y = n$. Тогда оператор $A \in L(X, Y)$ является фредгольмовым, причем $m - \alpha(A) = n - \beta(A) = \text{rg} A$, $n - \alpha(A') = m - \beta(A') = \text{rg} A'$, где $A' : Y' \rightarrow X'$ – сопряженный к A оператор. Так как $\text{rg} A = \text{rg} A'$, то отсюда

$$\alpha(A) = \beta(A'), \quad \beta(A) = \alpha(A'), \quad \text{ind} A = -\text{ind} A' = m - n. \quad (1.1)$$

Ниже будет показано, что формулы (1.1) верны для фредгольмовых операторов и в бесконечномерном случае.

1.8. Фредгольмовым является любой *обратимый* оператор $A \in L(X, Y)$, т.е. такой, что существует оператор $B \in L(Y, X)$, обладающий свойствами $AB = I_Y, BA = I_X$. В этом случае $\alpha(A) = \beta(A) = \text{ind}A = 0$.

1.9. Пусть A – дифференциальный оператор вида $A = \left(\frac{d}{dx}\right)^m + a_1(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^{m-1} + \dots + a_m(x)$, где $a_i \in C([a, b])$, $i = 1, \dots, m$, действующий из $C^{k+m}([a, b]) \rightarrow C^k([a, b])$, $k \in \mathbf{Z}_+$, $-\infty < a < b < \infty$. Тогда оператор A является фредгольмовым, так как $\alpha(A) = m$, $\beta(A) = 0$ и $\text{ind}A = m$ (задача 1.9).

1.10. Рассмотрим оператор $A_k : C^m([a, b]) \rightarrow C([a, b]) \times \mathbf{R}^m$, действующий по формуле $A_k u(x) = \left\{ \sum_{i=0}^m a_i(x) u^{(m-i)}(x); u(a), u'(a), \dots, u^{(m-1)}(a) \right\}$, где $a_i \in C([a, b])$, $a_0(x) \neq 0$ при всех $x \in [a, b]$. Оператор A_k , отвечающий задаче Коши для линейного дифференциального уравнения, является линейным гомеоморфизмом, а значит и фредгольмовым. Это сразу следует из теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (и теоремы о продолжении решения в случае линейности дифференциального уравнения).

1.11. *Интегральные операторы с вырожденным ядром.*

Пусть оператор $A : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$, где Ω – ограниченная область в \mathbf{R}^n , определяется по формуле $Au(x) = u(x) - \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^m P_i(x) Q_i(y) \right) u(y) dy$, где $P_i, Q_i \in L_2(\Omega)$, $i = 1, \dots, m$. Тогда оператор A – фредгольмов. Для доказательства этого утверждения достаточно заметить, что общее решение

уравнения $Au = f$ имеет вид $u(x) = \sum_{i=1}^m c_i P_i(x) + f(x)$, где неопределенные коэффициенты c_1, \dots, c_m являются решениями системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} c_j + b_i = c_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (1.2)$$

где $a_{ij} = \int_{\Omega} Q_i(x) P_j(x) dx$, $b_j = \int_{\Omega} Q_j(x) f(x) dx$, $i, j = 1, \dots, m$ (задача 1.10).

1.12. *Оператор, соответствующий краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений.*

Пусть $D = \{y \in C^2([a, b]) : y(a) = y(b) = 0\}$, $A : D \rightarrow C([a, b])$, $Ay(x) \equiv y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x)$, где $p, q \in C([a, b])$, $-\infty < a < b < +\infty$. Тогда оператор A является фредгольмовым. Ясно, что $\dim \text{Ker} A \leq 1$. Докажем, что $\dim \text{Co ker} A < +\infty$. Частное решение уравнения $ly = f$, где

$f \in C([a, b])$, формула Коши $z(x) = \int_a^x k(x, t) f(t) dt$, где $k(x, t) = \frac{1}{w(t)} \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}$,

y_1, y_2 – фундаментальная система решений дифференциального однородного дифференциального уравнения $ly = 0$, w – вронскиан системы y_1, y_2 . Отсюда общее решение неоднородного уравнения $ly = f$ имеет вид $c_1 y_1 + c_2 y_2 + z$. Таким образом разрешимость операторного уравнения $Ay = f$ равносильна разрешимости относительно c_1, c_2 системы алгебраических уравнений

$$\begin{cases} c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a) = 0, \\ c_1 y_1(b) + c_2 y_2(b) + \int_a^b k(b, t) f(t) dt = 0. \end{cases}$$

Если определитель этой системы уравнений не равен нулю, то $\text{Im } A = C([a, b])$ и $\dim \text{Co ker } A = 0$. В противном случае для разрешимости системы необходимо и достаточно выполнение условия

$$\int_a^b k(b, t) f(t) dt = 0. \quad (1.3)$$

Из этого условия (1.3) сразу следует, что $\dim \text{Co ker } A = 1$ (задача 1.11).

Аналогично можно доказать фредгольмовость оператора

$$\begin{aligned} A: D_m &\rightarrow C([a, b]), \\ D_m &= \{y \in C^m([a, b]) : y(a) = \dots = y^{(r)}(a) = y(b) = \dots = y^{(r)}(b) = 0\}, \\ Ay(x) &\equiv y^{(m)}(x) + a_1(x)y^{(m-1)}(x) + \dots + a_m(x)y(x), \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $a_i \in C([a, b])$, $i = 1, \dots, m$, $-\infty < a < b < +\infty$ (задача 1.12).

Приведем теперь основные свойства фредгольмовых операторов.

Утверждение 1.2. Пусть $A \in F(X, Y)$. Тогда $\text{Im } A$ – замкнутое подпространство в Y .

Доказательство. Так как $\text{Ker } A$ – замкнутое подпространство в X , то фактор-пространство $X / \text{Ker } A$ является банаховым пространством с нормой $\|\bar{x}\| = \inf\{\|x + y\| : y \in \text{Ker } A\}$, где $\pi(x) = \bar{x}$, π – фактор-отображение X на $X / \text{Ker } A$. Линейный оператор $A_1 : X / \text{Ker } A \rightarrow Y$, $A_1 \bar{x} = Ax$ является непрерывным, причем $\text{Im } A_1 = \text{Im } A$, $\text{Ker } A_1 = \{0\}$. Пусть далее M – какое-либо конечномерное подпространство Y , для которого $Y = \text{Im } A \oplus M$ (\oplus – прямая сумма в алгебраическом смысле). Определим оператор $\tilde{A} : X / \text{Ker } A \oplus M \rightarrow Y$, $\tilde{A}(x, m) = A_1 \bar{x} + m \in Y$, где $X / \text{Ker } A \oplus M$ – банахова прямая сумма (в M задана какая-либо норма). Тогда оператор \tilde{A} является линейным изоморфизмом и непрерывен, а значит, по теореме Банаха об обратном операторе \tilde{A} – линейный топологический изоморфизм. Так

как подпространство $\tilde{A}^{-1}(\text{Im}A) = X / \text{Ker}A \oplus \{0\}$ замкнуто в $X / \text{Ker}A \oplus M$, то отсюда следует, что $\text{Im}A$ замкнуто в Y □

На самом деле при доказательстве утверждения 1.2 нигде не использовалось условие $\dim \text{Ker}A < \infty$. Поэтому верно следующее общее утверждение.

Утверждение 1.3. Пусть $A \in L(X, Y)$ и $\dim \text{Co ker} A < +\infty$. Тогда $\text{Im}A$ – замкнутое подпространство в Y .

Утверждение 1.4. Пусть $A \in L(X, Y)$, $\dim \text{Co ker} < +\infty$ и X_1 – такое замкнутое подпространство в X , что $X = X_1 \oplus \text{Ker}A$. Тогда $A|_{X_1}: X_1 \rightarrow \text{Im}A$ – линейный топологический изоморфизм, где $A|_{X_1}$ – ограничение оператора A на X_1 .

Доказательство непосредственно следует из доказательства утверждения 1.2.

В случае, когда $A \in F(X, Y)$, подпространство X_1 , указанное в утверждении 1.4, можно построить следующим образом. Выберем в $\text{Ker}A$ базис x_1, \dots, x_m , а в $(\text{Ker}A)'$ – двойственный базис f_1, \dots, f_m (т.е. $f_i(x_{ij}) = \delta_{ij}$, где при $i = j$, $\delta_{ij} = 1$ при $i \neq j$, $\delta_{ij} = 0$). По теореме Хана–Банаха существуют продолжения функционалов f_i до линейных непрерывных функционалов

$F_i \in X'$. Положим $X_1 = \bigcap_{i=1}^m \text{Ker}F_i$. Тогда X_1 – замкнутое подпространство

в X и $X = X_1 \oplus \text{Ker}A$. Последнее равенство означает, что для каждого $x \in X$ существует и единственно представление в виде

$$x = \sum_{i=1}^m c_i x_i + y, \text{ где } y \in X_1. \quad (1.5)$$

Существование указанного представления доказывается выбором коэффициентов c_i по формуле $c_i = F_i(x)$, $i = 1, \dots, m$. Если к обеим частям

равенства (1.5) применить F_i , то получим, что $c_i = F_i(x)$, т.е. единственность представления (1.5).

Утверждение 1.5. Пусть $A \in L(X, Y)$ и $\dim \text{Coker } A < +\infty$. Тогда $\dim \text{Coker } A = \dim \text{Ker } A'$, где $A' : Y' \rightarrow X'$ – сопряженный к A оператор.

Доказательство. Непосредственно из определения следует, что $\text{Ker } A' = \{f \in Y' : \langle y, f \rangle = 0 \ \forall y \in \text{Im } A\}$, т.е. $\text{Ker } A' = (\text{Im } A)^\perp$ – аннулятор подпространства $\text{Im } A$. Так как $\text{Im } A$ – замкнутое подпространство, то $(Y/\text{Im } A)'$ изоморфно $(\text{Im } A)^\perp$ (см. например, [23], теорема 4.9), т.е. $(Y/\text{Im } A)'$ изоморфно $\text{Ker } A'$. Поскольку $\dim \text{Coker } A = \dim(Y/\text{Im } A) < +\infty$, то $Y/\text{Im } A$ изоморфно $(Y/\text{Im } A)'$ и

$$\dim(Y/\text{Im } A) = \dim(Y/\text{Im } A)' = \dim \text{Ker } A'. \quad \square$$

Утверждение 1.6. Если $K \in K(X, X)$, то $A = I - K \in F(X, X)$.

Доказательство. Подпространство $\text{Ker } A$ определяется по формуле $\text{Ker } A = \{x \in X : Kx = x\}$. Таким образом, оператор $K : \text{Ker } A \rightarrow \text{Ker } A$ – единичный и компактный одновременно. Отсюда сразу следует конечномерность пространства $\text{Ker } A$.

Перейдем к доказательству конечномерности пространства $X/\text{Im } A$. Для этого сначала выберем, как это было сделано перед утверждением 1.5, замкнутое подпространство $M \subset X$, дополнительное к $\text{Ker } A$ (т.е. $\text{Ker } A \oplus M = X$).

Оператор $A|_M : M \rightarrow \text{Im } A$ отображает M на $\text{Im } A$ взаимно однозначно. Пусть B – обратный к $A|_M$ оператор. Докажем, что оператор B ограничен, т.е. $\|By\| \leq C\|y\| \ \forall y \in \text{Im } A$, где $C = \text{const} > 0$. Предположим противное. Тогда существует такая последовательность $x_n \subset M$, что $\|x_n\| = 1$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и $y_n = Ax_n \rightarrow 0$. Так как последовательность x_n ограниче-

на, то последовательность Kx_n предкомпактна. Без ограничения общности можно считать, что $Kx_n \rightarrow x$ и $Ax_n = x_n - Kx_n$, $x_n \rightarrow x$. Поскольку M замкнуто, то $x \in M$. Кроме того, $\|x\| = \lim \|x_n\| = 1$ и $Ax = \lim Ax_n = 0$. Таким образом, $0 \neq x \in M \cap \text{Ker} A$, что невозможно. Из этого противоречия следует ограниченность оператора B .

Докажем теперь замкнутость подпространства $\text{Im} A$. Пусть $y_n \subset \text{Im} A$ и $y_n \rightarrow y$. Тогда последовательность y_n является фундаментальной, а значит, фундаментальной является и последовательность $x_n = By_n$. Так как замкнутое подпространство M банахова пространства X является полным, то существует предел $x_n \rightarrow x \in M$. Следовательно, $Ax = \lim Ax_n = \lim y_n = y$, т.е. подпространство $\text{Im} A$ замкнуто.

Теперь нетрудно доказать конечномерность пространства $X / \text{Im} A$. Как и при доказательстве утверждения 1.5, имеем (в силу замкнутости $\text{Im} A$) изометрический изоморфизм $(X / \text{Im} A)' \cong (\text{Im} A)^\perp$ и равенство $\text{Ker} A' = (\text{Im} A)^\perp$. Так как $A' = I - K'$, где K' – компактный оператор, то по уже доказанному выше, $\dim \text{Ker} A' < +\infty$. Таким образом, $\dim \text{Co ker} A = \dim(\text{Co ker} A)' < +\infty$. \square

Следствие 1.1. Пусть $K \in L(X, Y)$ – конечномерный оператор в банаховом пространстве X . Тогда оператор $I + K$ фредгольмов.

Доказательство. Так как $K \in K(X, X)$, то мы имеем частный случай утверждения 1.5. \square

Утверждение 1.7. Пусть $A \in F(X, Y)$. Тогда существует такой оператор $B \in F(Y, X)$, что

$$BA = I_X - P_1, \quad AB = I_Y - P_2, \quad (1.6)$$

где $P_1 \in L(X, X)$, $P_2 \in L(Y, Y)$ – конечномерные операторы, причем P_1 – проектор на $\text{Ker}A$, $I_Y - P_2$ – проектор на $\text{Im}A$.

Доказательство. Пусть M – замкнутое дополнение к $\text{Ker}A$ в X . В силу утверждения 1.2 оператор $A|_M: M \rightarrow \text{Im}A$ является линейным топологическим изоморфизмом. Пусть $B_1: \text{Im}A \rightarrow M$ – обратный к оператору $A|_M$. Тогда $B_1A|_M = I|_M$.

Далее достаточно продолжить оператор B_1 нулем на дополнении к $\text{Im}A$ до оператора $B: Y \rightarrow X$. Тогда оператор B будет удовлетворять всем условиям доказываемого утверждения.

Докажем сначала, что существует конечномерное дополнение (к $\text{Im}A$, т.е. такое конечномерное подпространство $N \subset Y$, что $Y = N \overset{\square}{+} \text{Im}A$). Пусть $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n$ – базис в $\text{Coker}A = Y/\text{Im}A$, а y_i – представитель класса \bar{y}_i , $i = 1, \dots, n$. Пусть, далее, $N = \{y_1, \dots, y_n\}$ – линейная оболочка векторов y_1, \dots, y_n , \bar{y} – образ вектора $y \in Y$ при фактор-отображении в $Y/\text{Im}A$. Тогда существует и единственно разложение $\bar{y} = \sum_{i=1}^n d_i \bar{y}_i$, а значит существует и единственно представление любого $y \in Y$ в виде

$$y = \sum_{i=1}^n d_i y_i + z, \text{ где } z \in \text{Im}A. \quad (1.7)$$

Таким образом, $Y = N \oplus \text{Im}A$.

Определим теперь оператор $B: Y \rightarrow X$ по формуле $By = B_1z$, где $y \in Y$, а $z \in \text{Im}A$ определяется равенством (1.7). Так как B_1 – линейный непрерывный оператор, то $B \in L(Y, X)$. Кроме того, очевидно, что $\text{Ker}B = N$, $\text{Im}B = M$, т.е. $\dim \text{Ker}B < +\infty$, $\dim \text{Coker}B < +\infty$ и $B \in F(Y, X)$.

Проверим равенства (1.7). Пусть x_1, \dots, x_m – базис в $\text{Ker}A$. Тогда в силу разложения $X = \text{Ker}A \oplus M$ для любого $x \in X$ имеет место разложение

$$x = \sum_{i=1}^m c_i x_i + t, \text{ где } t \in M, \text{ а значит, } BAx = BA\left(\sum_{i=1}^m c_i x_i + t\right) = BAy = B_1 A t = t.$$

В силу разложения (1.7) для любого $y \in Y$

$$ABy = AB\left(\sum_{i=1}^n d_i y_i + z\right) = AB_1 z = z.$$

Таким образом, $P_1 = I_X - BA : x \rightarrow \sum_{i=1}^m c_i x_i$, $P_2 = I_Y - AB : y \rightarrow \sum_{i=1}^n d_i y_i$,

$$I_Y - P_2 = AB : y \rightarrow z \in \text{Im}A. \quad \square$$

Определение 1.5. Оператор $A \in L(X, Y)$ называется *почти обратимым*, если существуют такие операторы $B_1, B_2 \in L(Y, X)$, что

$$B_1 A = I_X + K_1, \quad AB_2 = I_Y + K_2, \quad (1.8)$$

где $K_1 \in K(X, X)$, $K_2 \in K(Y, Y)$. Операторы B_1 и B_2 называются при этом, соответственно, левым и правым параметриком оператора A .

Теорема 1.2 (критерий фредгольмовости).

Оператор $A \in L(X, Y)$, где X, Y – банаховы пространства, фредгольмов тогда и только тогда, когда он почти обратим.

Доказательство. Необходимость критерия доказана в утверждении 1.6, докажем достаточность.

Пусть A почти обратим, т.е. выполнены равенства (1.7). Тогда $\text{Ker}A \supset \text{Ker}B_1 A = \text{Ker}(I + K_1)$. По утверждению 1.6 $\dim \text{Ker}(I + K_1) < +\infty$, следовательно $\dim \text{Ker}A < +\infty$. Далее, $\text{Im}A \supset \text{Im}AB_2 = \text{Im}(I + K_2)$, где $\text{Im}(I + K_2)$ имеет конечную коразмерность по утверждению 1.6. Тогда и $\text{Im}A$ имеет конечную коразмерность. \square

Утверждение 1.8. Множество $F(X, Y)$ открыто в $L(X, Y)$ (относительно равномерной топологии) и инвариантно относительно сдвигов на элементы $K(X, Y)$.

Доказательство. Пусть $A \in L(X, Y)$. Тогда оператор A почти обратим и выполняются равенства (1.8). Пусть $C \in L(X, Y)$ и $\|C\| < \min\{\|B_1\|^{-1}, \|B_2\|^{-1}\}$.

Тогда операторы $I + B_1C$ и $I + CB_2$ обратимы, так как обратные к ним оп-

ределяются равенствами $(I + B_1C)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-B_1C)^k$, $(I + CB_2)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-CB_2)^k$,

где $\|B_1C\| < 1$, а следовательно, ряды сходятся. Отсюда имеем

$$1) (I + B_1C)^{-1} B_1(A + C) = (I + B_1C)^{-1} (I + K_1 + B_1C) = I + (I + B_1C)^{-1} K_1 = I + \tilde{K}_1,$$

где $\tilde{K}_1 \in K(X, X)$;

$$2) (A + C)B_2(I + CB_2)^{-1} = (I + K_2 + CB_2)(I + CB_2)^{-1} = I + K_2(I + CB_2)^{-1} = I + \tilde{K}_2,$$

где $\tilde{K}_2 \in K(Y, Y)$.

Из 1), 2) следует почти обратимость оператора $A + C$, а значит, множество $F(X, Y)$ содержит окрестность точки A .

Докажем теперь инвариантность множества $F(X, Y)$ относительно сдвигов на элементы $K(X, Y)$. Пусть $A \in F(X, Y), K \in K(X, Y)$. Тогда

$$B_1(A + K) = I + K_1 + B_1K = I + \hat{K}_1,$$

$$(A + K)B_2 = I + K_2 + KB_2 = I + \hat{K}_2,$$

где $\hat{K}_1 \in K(X, X)$, $\hat{K}_2 \in K(Y, Y)$. Таким образом, оператор $A + K$ почти обратим. □

Теорема 1.3. Функция $ind : F(X, Y) \rightarrow Z$ (индекс) постоянна на всех связных компонентах $F(X, Y)$, не меняется при сдвигах на элементы из $K(X, Y)$ и обладает свойством

$$ind(AB) = indA + indB, \quad (1.9)$$

где $A \in F(X_0, X_2)$, $B \in F(X_1, X_0)$, а значит, $AB \in F(X_1, X_2)$.

В частности, если A_t – непрерывная (по равномерной норме) операторная функция $t \in [0, 1]$ со значениями в $F(X, Y)$, то $indA_0 = indA_1$.

Доказательство опирается на следующую лемму. Пусть пространства X и Y разложены в прямые суммы (алгебраические) замкнутых подпространств $X = M_1 \oplus N_1$, $Y = M_2 \oplus N_2$. Тогда любой оператор $T \in L(X, Y)$ можно записать в виде операторной матрицы

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \text{ где } A \in L(N_1, N_2), B \in L(M_1, N_2), C \in L(N_1, M_2), D \in L(M_1, M_2). \quad (1.10)$$

Обозначим для краткости $i(T) = indT$.

Лемма 1.1. Пусть $T \in F(X, Y)$, а оператор D в представлении (1.10) обратим. Тогда $i(T) = i(A - BD^{-1}C)$.

Доказательство. Заметим сначала, что умножение оператора T слева и справа на обратимый оператор, очевидно, не меняет чисел $\alpha(T) = \dim KerT$ и $\beta(T) = \dim CokerT$, а значит, и $i(T)$. Отсюда

$$i(T) = i \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = i \left[\begin{pmatrix} I & -BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -D^{-1}C & I \end{pmatrix} \right] = i \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

Далее, если $S = \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix}$ (обозначим это еще $S = T_1 \oplus T_2$, то очевидно

$KerA = KerS_1 \oplus KerS_2$, $CokerS = CokerS_1 + CokerS_2$). Следовательно, в этом случае $i(S) = i(S_1) + i(S_2)$. Отсюда и из формулы (1.11) получаем, что $i(T) = i(A - BD^{-1}C) + i(D) = i(A - BD^{-1}C)$, так как D – обратимый оператор. Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы 1.3. Пусть $T_0 \in F(X, Y)$, $N_1 = \text{Ker}T_0$, $M_2 = \text{Im}T_0$, M_1 – замкнутое подпространство в X дополнительное к N_1 (см. его построение перед утверждением 1.5), и конечномерное подпространство N_2 в Y дополнительное к M_2 (см. его построение при доказательстве утверждения 1.5). Тогда оператор T_0 имеет вид $\begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix}$, где D_0 – обратимый оператор (см. утверждение 1.4).

Далее, любой оператор T , достаточно близкий по норме к оператору T_0 , имеет вид $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, где D – обратимый оператор.

В силу леммы $i(T) = i(A - BD^{-1}C) = \dim N_1 - \dim N_2$ (см. (1.1)), т.е. $i(T)$ локально постоянен, а значит, и постоянен на связанных компонентах $F(X, Y)$.

Если A_t – непрерывная операторная функция $t \in [0, 1]$ со значениями в $F(X, Y)$, то семейство $\{A_t, t \in [0, 1]\}$ лежит в связной компоненте $F(X, Y)$, а следовательно, $i(A_t) = i(A_0) = i(A_1)$ при всех $t \in [0, 1]$.

Отсюда сразу следует, что индекс не меняется при сдвигах на элементы из $K(X, Y)$. Пусть $A \in F(X, Y)$, $K \in K(X, Y)$ и $A_t = A + tK, t \in [0, 1]$. Тогда, очевидно, A_t – непрерывная функция, а по утверждению 1.7 $A_t \in F(X, Y)$ при всех $t \in [0, 1]$. Таким образом, $i(A_1) = i(A + K) = i(A_0) = i(A)$.

Докажем теперь формулу (1.9). Для этого рассмотрим вспомогательный оператор $A \oplus B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}: X_0 \oplus X_1 \rightarrow X_2 \oplus X_0$, где $X_0 \oplus X_1$ и $X_2 \oplus X_0$ – внешние прямые суммы. Как уже отмечалось выше, $i(A \oplus B) = i(A) + i(B)$.

Далее, в силу локального постоянства индекса, при достаточно малом

$\varepsilon > 0$ выполняется равенство $i\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} A & 0 \\ \varepsilon I_{X_0} & B \end{pmatrix}$. С другой стороны

$$i\begin{pmatrix} A & 0 \\ \varepsilon I_{X_0} & B \end{pmatrix} = i\left[\begin{pmatrix} I_{X_2} & -\varepsilon^{-1}A \\ 0 & I_{X_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ \varepsilon I_{X_0} & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1}I_{X_0} & B \\ 0 & -\varepsilon I_{X_0} \end{pmatrix}\right] = i\begin{pmatrix} 0 & AB \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = i(AB).$$

Таким образом, $i(A) + i(B) = i\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = i(AB)$. □

Теорема 1.4. (теоремы Фредгольма). Пусть X – банахово пространство, $K \in K(X, X)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (или $\lambda \in \mathbb{C}$) и $\lambda \neq 0$. Рассмотрим четыре уравнения:

- 1) $Kx - \lambda x = y$;
- 2) $Kx - \lambda x = 0$;
- 3) $K'f - \lambda f = g$;
- 4) $K'f - \lambda f = 0$,

где $x, y \in X$, $f, g \in X'$. Тогда либо

а) уравнения 2) и 4) имеют лишь тривиальное решение, а уравнения 1) и 3) однозначно и корректно разрешимы при любых правых частях, либо

б) уравнение 2) имеет конечномерное пространство решений $X_0 \subset X$, а уравнение 4) – конечномерное пространство решений $X_1 \subset X'$, причем $\dim X_0 = \dim X_1$; кроме того, в этом случае уравнение 1) разрешимо в точности для тех $y \in X$, для которых $f(y) = 0$ при всех $f \in X_1$, а уравнение 3) разрешимо в точности для тех $g \in X'$, для которых $g(x) = 0$ при всех $x \in X_0$.

Доказательство. Оператор λI при $\lambda \neq 0$ обратим, а значит, $\lambda I \in F(X, X)$ и $\text{ind}(\lambda I) = 0$. Отсюда и из теоремы 1.3 следует, что $A = K - \lambda I \in F(X, X)$ и $\text{ind}A = 0$. Аналогично получаем, что и $\text{ind}A' = 0$.

Случай а) альтернативы соответствует равенству $\alpha(A) = \dim Ker A = 0$. Отсюда следует, что $\beta(A) = \dim Co ker A = \alpha(A) + ind A = 0$, а в силу утверждения 1.4 $\alpha(A') = 0$. Но тогда аналогично получаем, что и $\beta(A') = 0$. Таким образом, $Ker A = \{0\}, Ker A' = \{0\}, Im A = X, Im A' = X'$, т.е. существуют A^{-1} и $(A')^{-1}$. По теореме Банаха об открытом отображении операторы A^{-1} и $(A')^{-1}$, т.е. уравнения 1) и 3) корректно разрешимы.

Случай б) альтернативы соответствует неравенству $\alpha(A) \neq 0$. Так как $A \in F(X, X)$ и $A' \in F(X', X')$, то $\alpha(A) < +\infty$ и $\alpha(A') < +\infty$. В силу доказанных выше равенств $ind A = ind A' = 0$ имеем равенства $\beta(A) = \alpha(A)$, $\beta(A) = \beta(A')$, а в силу утверждения 1.5 $\beta(A) = \alpha(A')$. Таким образом, $\alpha(A) = \alpha(A')$. Утверждения о разрешимости уравнений 1) и 3) в случае б) сразу следуют из равенств $Ker A' = (Im A)^\perp$, $Im A' = (Ker A)^\perp$ (см., например, теоремы 4.12. и 4.7 в [23]). Здесь через M^\perp , где M – подпространство X , обозначен, как и выше, аннулятор для M , т.е. множество $\{f \in X' : f(x) = 0 \ \forall x \in M\}$. □

Замечание 1.3. Аналогично формулируются и доказываются теоремы Фредгольма для оператора $K \in K(X, Y)$ и оператора $A \in F(X, Y)$, где X и Y – рефлексивные банаховы пространства (см., например, [25], § 21).

Задачи

1.1. Пусть банахово пространство X разложено в алгебраическую прямую сумму $X = X_1 + X_2$. Доказать, что оператор проектирования на X_1 параллельно X_2 ограничен в том и только том случае, когда X_1 и X_2 замкнуты в X .

1.2. Пусть A – оператор умножения на ограниченную измеримую функцию $a(x)$, действующий в пространстве $L_p(\Omega)$, где $p \geq 1$, Ω – область в \mathbf{R}^n . Доказать, что A ограничен и найти его форму.

1.3. Пусть $T(t)$ – семейство операторов сдвига в $L_p(\mathbf{R})$, $t \in \mathbf{R}$, $1 \leq p \leq \infty$: $T(t)f(x) = f(x+t)$. Доказать, что $T(t)f \rightarrow T(t_0)f$ при $t \rightarrow t_0$ для любой функции $f \in L_p(\mathbf{R})$. Верно ли, что $T(t) \rightarrow T(t_0)$ при $t \rightarrow t_0$ в норме $L(L_p(\mathbf{R}), L_p(\mathbf{R}))$.

1.4. Доказать, что в бесконечномерном нормированном пространстве компактный оператор не имеет ограниченного обратного.

1.5. Доказать некомпактность в пространстве $C[0,1]$ оператора A , действующего по формуле $Av(x) = xv(x)$.

1.6. Может ли компактный оператор A удовлетворять квадратному уравнению $aA^2 + dA + c = 0$?

Ответ. При $c \neq 0$ – нет, при $c = 0$ – да.

1.7. Пусть $l_p(\mathbf{R}) = \{x = (x_1, \dots, x_k, \dots) : x_k \in \mathbf{R} \text{ при } k \in \mathbf{N}, \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty\}$, где $p \geq 1$, а $T : l_p(\mathbf{R}) \rightarrow l_p(\mathbf{R})$ – оператор, действующий по формуле $Tx = (x_2, x_3, \dots, x_{k+1}, \dots)$. Найти ядро и коядро оператора T^n при любом $n \in \mathbf{N}$.

1.8. Построить почти обратный оператор для оператора T из задачи 1.7.

1.9. Доказать утверждение примера 1.9.

1.10. Доказать эквивалентность уравнения $Au = f$ в примере 1.11. и системы уравнений (1.2). Отсюда вывести фредгольмовость оператора A .

1.11. Проверить, что условие (1.3) в примере 1.12 (при $k(b, t) \neq 0$) эквивалентно равенству $\dim(C[a, b]/F) = 1$, где F – линейное подпространство всех функций из $C[a, b]$, удовлетворяющих условию (1.3).

1.12. Доказать фредгольмовость оператора (1.4) в примере 1.12.

1.13. При каких $\lambda \in \mathbf{R}$ уравнение $u(x) - \lambda \int_a^b e^{x-y} u(y) dy = 1$ разрешимо в $L_p(a, b)$, $1 \leq p \leq \infty$? *Ответ.* При $\lambda \neq 1/(b-a)$.

1.14. Пусть заданы линейные функционалы $U_j(v) = \int_0^1 d_j(x)v(x)dx$, где $d_j \in L_2(0,1)$, $j=1, 2$. Пусть, далее, оператор $H^2(0,1)$ – пространство Соболева (см. главу 3), действует по формуле $Av = (lv, U_1(v), U_2(v))$, где $l(v) = v'' + p(x)v' + q(x)$, $p, q \in C^\infty([0,1])$. Доказать фредгольмовость оператора A и найти $\text{ind}A$.

Указание. Рассмотреть отдельные случаи линейной зависимости и линейной независимости функций d_1 и d_2 .

ГЛАВА 2. ТЕОРИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Потребности физики и математики привели в XX столетии к расширению фундаментальных понятий математики – функции, производной и интеграла. Таким образом, появилась новая область современной математики – функциональный анализ, включающая в себя теорию распределений (обобщенных функций). Во многом благодаря теории распределений был достигнут существенный прогресс в теории линейных дифференциальных уравнений с частными производными. В настоящей главе сжато излагаются основные определения и результаты теории распределений, используемые в следующих главах. Более подробное изложение этой теории имеется во многих книгах (см., например, [5], [7], [11], [31], [32] и других).

2.1. Пространства пробных функций и распределений

Современное изложение теории распределений основано на теории линейных топологических пространств. В частности, пространство распределений – это сопряженное пространство L' , где L – некоторое пространство «пробных» (или «основных») функций.

Мы рассмотрим три наиболее часто используемых пространства распределений – $D'(\Omega)$, $E'(\Omega)$ и $S'(\mathbf{R}^n)$, где Ω – область в \mathbf{R}^n . Элементы этих пространств называются, соответственно, *распределения в области Ω* , *распределения с компактным носителем в области Ω* и *распределения умеренного роста в \mathbf{R}^n* .

Определим соответствующие линейные топологические пространства пробных функций $D(\Omega)$, $E(\Omega)$ и $S(\mathbf{R}^n)$.

Пространство $D(\Omega)$ как линейное пространство совпадает с $C_0^\infty(\Omega)$. Для определения топологии в $D(\Omega)$ рассмотрим сначала пространство

Фреше $D(K)$, где K – компакт в \mathbf{R}^n . Пространство $D(K)$ состоит из таких функций $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, что $\text{supp } \varphi$ – носитель непрерывной функции $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbf{C}$, совпадающей с замыканием (в Ω) множества $\{x \in \Omega: \varphi(x) \neq 0\}$.

Топология Фреше в $D(K)$ задается полунормами

$$p_{m,k}(\varphi) = \sum_{|\alpha| \leq m} \max_k |\partial^\alpha \varphi(x)|, \quad (2.1)$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$.

Определим теперь топологию в $D(\Omega)$. На линейном пространстве $D(\Omega)$ вводится топология индуктивного предела пространств $D(K_i)$, $i = 1, 2, \dots$, где $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \dots$ и для любой точки $x_0 \in \Omega$ существует такая j , что x_0 является внутренней точкой компакта K_j (т.е. K_1, K_2, K_3, \dots является исчерпывающей последовательностью компактов для области Ω). Ясно, что при таком выборе последовательности

K_1, K_2, K_3, \dots , $D(\Omega) = \bigcup_{i=1}^{\infty} D(K_i)$. Топология же индуктивного предела в

линейном пространстве $D(\Omega)$ определяется следующим образом. Выпуклое уравновешенное множество $U \subset D(\Omega)$ (уравновешенное означает, что если $\varphi \in U$, то $\lambda\varphi \in U$ при всех $\lambda \in \mathbf{C}$ при $|\lambda| \leq 1$) является окрестностью нуля в $D(\Omega)$ тогда и только тогда, когда множество $U \cap D(K_i)$ является окрестностью нуля в пространстве Фреше $D(K_i)$, $i = 1, 2, \dots$.

Таким образом, можно определить пространство $D'(\Omega)$ распределений в области Ω , как сопряженное линейное топологическое пространство со слабой топологией. При этом можно показать, что на самом деле сходимость последовательности $\varphi_k \rightarrow \varphi$ в $D(\Omega)$ равносильна двум условиям:

- 1) существует такой компакт $K \subset \Omega$, что $\varphi_k \in D(K)$ при всех $k \in \mathbf{N}$;

2) $\varphi_k \rightarrow \varphi$ в $D(K)$.

Кроме того, устанавливается, что включение $f \in D'(\Omega)$ равносильно двум условиям:

1) f – линейный функционал на $D(\Omega)$;

2) $\lim \langle f, \varphi_k \rangle = 0$, если $\varphi_k \rightarrow 0$ в $D(\Omega)$.

Здесь $\langle f, \varphi_k \rangle$ – значение функционала f пробной функции φ . Эквивалентное обозначение – $f(\varphi)$.

Слабая топология в $D'(\Omega)$ определяется полунормами $D'(\Omega) \ni f \rightarrow |f(\varphi)|$, где φ – произвольный фиксированный элемент $D(\Omega)$. Таким образом, сходимость $f_k \rightarrow f$ в $D'(\Omega)$ означает, что $f_k(\varphi) \rightarrow f(\varphi)$ для любого $\varphi \in D(\Omega)$.

Заметим ещё, что пространства $D(\Omega)$ и $D'(\Omega)$ являются полными. Для $D(\Omega)$ это означает, что если последовательность $\varphi_k \subset D(K)$, где K – компакт в Ω , и φ_k сходится в $D(K)$ к некоторой функции φ , то $\varphi \in D(\Omega)$. Это следует из теорем о равномерной сходимости в классическом анализе. Полнота пространства $D'(\Omega)$ означает, что если последовательность $f_k \subset D'(\Omega)$ и существует предел $f(\varphi) = \lim f_k(\varphi)$ для любой функции $\varphi \in D(\Omega)$, то $f \in D'(\Omega)$. Это следует из теоремы Банаха–Штейнгауза.

Линейное пространство $E(\Omega)$ совпадает с $C^\infty(\Omega)$, а топология Фреше задается счетным множеством полунорм $p_j, K_j(\varphi) = \sum_{|\alpha| \leq j} \max_{K_j} |\partial^\alpha \varphi|$, $j = 1, 2, \dots$, где $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \dots$ – исчерпывающая последовательность компактов для области Ω . Таким образом, $\varphi_k \rightarrow \varphi$ в $E(\Omega)$, если для любого мульти-

индекса α и для любого $K \subset \Omega$ последовательность $\partial^\alpha \varphi_k$ сходится равномерно на K к $\partial^\alpha \varphi$.

Пусть теперь $E'(\Omega)$ – сопряженное пространство к $E(\Omega)$. Тогда непрерывность линейного функционала $f \in E'(\Omega)$ означает, что $f(\varphi_k) \rightarrow f(\varphi)$, если $\varphi_k \rightarrow \varphi$ в $E(\Omega)$. Сопряженное пространство $E'(\Omega)$ со слабой топологией естественным образом непрерывно вложено в $D'(\Omega)$. Это следует из непрерывного вложения с плотным образом $D(\Omega)$ в $E(\Omega)$ и того, что для любого $f \in E'(\Omega)$ ограничение $f|_{D(\Omega)} \in D'(\Omega)$. Слабая топология в $E(\Omega)$ определяется семейством полунорм $p_\varphi(f) = |f(\varphi)|$, где φ – произвольная фиксированная функция из $E(\Omega)$. Таким образом (слабая) сходимость последовательности f_k в $E'(\Omega)$ к $f \in E'(\Omega)$ означает, что $f_k(\varphi) \rightarrow f(\varphi)$ при всех $\varphi \in E(\Omega)$. Из теоремы Банаха–Штейнгауза так же, как и для $D'(\Omega)$, следует полнота пространства $E'(\Omega)$ в слабой топологии.

Пространство $S = S(\mathbf{R}^n)$ – пространство Шварца – состоит из таких функций $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, что $\sup_{x \in \mathbf{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| < +\infty$ для любых мультииндексов α и β . Естественная топология пространства Фреше в $S(\mathbf{R}^n)$ определяется счетным семейством полунорм $p_j(\varphi) = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq j} \sup_{x \in \mathbf{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)|$, $j = 0, 1, 2, \dots$.

Сопряженное пространство $S'(\mathbf{R}^n)$ к пространству $S(\mathbf{R}^n)$ называется пространством распределений умеренного роста.

Легко видеть, что линейный функционал f над S будет непрерывным, в том и только в том случае, когда существуют такие $\alpha \in \mathbf{Z}_+^n$, $k \in \mathbf{Z}_+$ и $C = const \geq 0$, что $|f(\varphi)| \leq C \sup_{x \in \mathbf{R}^n} (1 + |x|^k) |\partial^\alpha \varphi(x)|$ при всех $\varphi \in S$. Про-

пространство $S' = S'(\mathbf{R}^n)$ также полно в слабой топологии, определяемой полунормами $p_\varphi(f) = |f(\varphi)|$, $\varphi \in S$.

Из естественных непрерывных вложений с плотными образами $D(\mathbf{R}^n) \subset S(\mathbf{R}^n) \subset E(\mathbf{R}^n)$ следуют естественные *непрерывные вложения* $E'(\mathbf{R}^n) \subset S'(\mathbf{R}^n) \subset D'(\mathbf{R}^n)$.

Кроме того, соответствие $f \rightarrow \langle f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx$ определяет естественные непрерывные вложения $L_{1,loc}(\Omega) \subset D'(\Omega)$, $L_{1,comp}(\Omega) \subset E'(\Omega)$, $L_p(\mathbf{R}^n) \subset S'(\mathbf{R}^n)$ при $p \in [1, +\infty]$, а также вложение всех измеримых функций $f(x)$ на \mathbf{R}^n , для которых $|f(x)| \leq c(1+|x|)^N$ при некоторых постоянных C и N .

В дальнейшем будем отождествлять функции f и их образы при этих вложениях. Кроме того, будем отождествлять обобщенные функции из $E'(\Omega)$ с их образами при естественном вложении в $D'(\Omega)$, а также обобщенные функции из $E'(\mathbf{R}^n)$ и $S'(\mathbf{R}^n)$ с их образами в $S'(\mathbf{R}^n)$ и $D'(\mathbf{R}^n)$ соответственно.

Если задано распределение $f \in D'(\Omega)$, то можно определить его *сужение (ограничение)* $f|_{\Omega'} \in D'(\Omega')$ на открытое множество $\Omega' \subset \Omega$, ограничив область определения линейного функционала f пространством $D(\Omega')$, непрерывно вложенным в $D(\Omega)$. С помощью разбиения единицы легко доказать следующее свойство. Если $f_1, f_2 \in D'(\Omega)$ и у каждой точки из Ω имеется такая окрестность U , что $f_1|_U = f_2|_U$, то $f_1 = f_2$ в Ω . На основании этого свойства естественно следующее определение.

Определение 2.1. *Носителем распределения $f \in D'(\Omega)$ называется множество всех точек из Ω , у которых не существует ни одной открытой окрестности, ограничение на которую распределения f равно нулю.*

Носитель распределения $f \in D'(\Omega)$ обозначается через $\text{supp } f$. Из определения носителя f непосредственно следует, что $\Omega \setminus \text{supp } f$ является открытым множеством, состоящим из всех точек, обладающих окрестностями, на которых f равно нулю, а значит, $f = 0$ на всем множестве $\Omega \setminus \text{supp } f$. Следовательно, $\Omega \setminus \text{supp } f$ – *наибольшее* открытое множество, на котором f равно нулю, т.е. $\Omega \setminus \text{supp } f$ содержит всякое открытое множество, на котором f равно нулю.

Таким образом, $f(\varphi) = 0$, если $\text{supp } f \cap \text{supp } \varphi = \emptyset$. Из того, что дополнение к $\text{supp } f$ является наибольшим открытым множеством, на котором распределение f равно нулю, следует, что в случае непрерывности функции f на Ω данное определение совпадает с классическим определением носителя непрерывности функции (носитель f – *наименьшее замкнутое* (в Ω) подмножество множества Ω , вне которого $f \equiv 0$).

Утверждение 2.1. Множество $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ плотно в пространстве $S(\mathbf{R}^n)$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in S(\mathbf{R}^n)$. Выберем такую функцию $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, что $\chi(x) = 1$ при $|x| \leq 1$. Положим $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(x)\chi(\varepsilon x)$, где $\varepsilon > 0$. Тогда $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ и, как легко проверить, $\varphi_\varepsilon \rightarrow \varphi$ в пространстве $S(\mathbf{R}^n)$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$, так как $\varphi(x) - \varphi_\varepsilon(x) = \varphi(x)(1 - \chi(\varepsilon x)) = 0$ при $|x| < 1/\varepsilon$. □

Теорема 2.1. Множество всех распределений из $D'(\Omega)$ с компактным носителем совпадает с пространством $E'(\Omega)$.

Доказательство. Пусть $f \in D'(\Omega)$ и $\text{supp } f$ компакт в Ω . Пусть K – компакт в Ω и K содержит окрестность $\text{supp } f$. Тогда распределение f определяется своим ограничением на $D(K)$ и

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq Cp_{l,k}(\varphi) \leq C \sum_{|\alpha| \leq l} \max_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)| \quad \text{при всех } \varphi \in D(K), \quad (2.2)$$

где числа C и l не зависят от φ . Так как при $\varphi \in D(\Omega)$ значение $\langle f, \varphi \rangle$ не зависит от значения φ на $\Omega \setminus K$, то ситуация (2.2) верна и для $\varphi \in D(\Omega)$. Таким образом, функционал f определен на $D(\Omega)$ и непрерывен в топологии $E(\Omega)$. Так как $D(\Omega)$ плотно в $E(\Omega)$, то f по непрерывности продолжается до функционала $f \in E'(\Omega)$.

Заметим также, что указанное продолжение на самом деле определяется по формуле $\langle f, \varphi \rangle = \langle f, \varphi_1 \rangle$, где $\varphi \in E(\Omega)$, а $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, $\varphi_1 \in D(\Omega)$, $\varphi_2 \in E(\Omega)$ и $\varphi_2 = 0$ в окрестности $\text{supp } f$.

Пусть теперь $f \in E'(\Omega)$. Так как f – линейный непрерывный функционал на пространстве $E(\Omega)$, то существуют такие числа C , l и компакт K в Ω , что $|\langle f, \varphi \rangle| \leq Cp_{l,K}(\varphi) = C \sum_{|\alpha| \leq l} \max_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|$ при всех $\varphi \in E(\Omega)$.

Поскольку числа C, l и компакт K не зависят от φ , то отсюда следует, что $\langle f, \varphi \rangle$ зависит от значений φ только в любой сколь угодно малой окрестности K . Таким образом, $f|_{\Omega \setminus K} = 0$, то есть $\text{supp } f = K$. \square

Определение 2.2. Распределение $f \in D'(\Omega)$ имеет *порядок не выше* k , если для всякого компакта $K \subset \Omega$ существует такая постоянная C , что $|\langle f, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |\gamma^\alpha \varphi|$, $\varphi \in C_0^\infty(K)$. Если f – распределение порядка не выше k , но ни при каком $l \in \mathbf{Z}_+$ не является распределением порядка не выше l , то f – распределение *порядка (точно) k* .

Легко увидеть, что распределение $f \in D'(\Omega)$, определяемое по формуле

$$\langle f, \varphi \rangle = \sum_{\alpha} \int f_{\alpha} \partial^{\alpha} \varphi dx, \quad \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega), \quad (2.3)$$

где $f_{\alpha} \in C(\Omega)$ или $f_{\alpha} \in L_{\infty}(\Omega)$ и число слагаемых конечно, имеет порядок не выше k , если $f_{\alpha} = 0$ при $|\alpha| > k$.

Распределение $\delta^{(\alpha)}(x - x_0)$ дает пример распределения порядка (точно) $|\alpha|$. Так как $|\langle \delta^{(\alpha)}(x - x_0), \varphi \rangle| = |\partial^{\alpha} \varphi(x_0)| \leq \sup |\partial^{\alpha} \varphi|$, $\varphi \in C_0^{\infty}(K)$ для любого $K \subset \subset \Omega$, то порядок не выше $|\alpha|$. Докажем, что порядок распределения $\delta^{(\alpha)}(x - x_0)$ не меньше $|\alpha|$. Пусть $\psi \in C_0^{\infty}(\mathbf{R}^n)$ и $\psi(0) = 1$, а $\varphi_h(x) = (x - x_0)^{\alpha} \psi((x - x_0)/h)$, где $h > 0$. Тогда $\langle \delta^{(\alpha)}(x - x_0), \varphi_h \rangle = \alpha!$, а $\sup_{x \in \mathbf{R}^n} |\partial^{\beta} \varphi_h| \leq C_{\beta} h^{|\alpha| - |\beta|} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0+$, $|\beta| < |\alpha|$.

2.2. Умножение и дифференцирование распределений

Пространство распределений $D'(\Omega)$ инвариантно относительно умножения на любую функцию из $C^{\infty}(\Omega)$ и относительно дифференцирования.

Определение 2.3. Пусть $f \in D'(\Omega)$, $g \in C^{\infty}(\Omega)$. Тогда произведением gf называется функционал $\langle gf, \varphi \rangle = \langle f, g\varphi \rangle$, $\varphi \in D(\Omega)$, а производной $D^{\alpha} f$ называется функционал $\langle D^{\alpha} f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, D^{\alpha} \varphi \rangle$, $\varphi \in D(\Omega)$.

Линейность и непрерывность на $D(\Omega)$ функционалов gf и $D^{\alpha} f$ непосредственно следует из линейности и непрерывности из $D(\Omega)$ в $D(\Omega)$ операций умножения на функцию $g \in C^{\infty}(\Omega)$ и дифференцирования.

Заметим, что произведение любых двух распределений нельзя определить так, чтобы оно было ассоциативно и коммутативно, а результат был распределением. Для построения контрпримера используем распределение

$$P \frac{1}{x}, \text{ где при } \varphi \in D(\Omega)$$

$$\langle P \frac{1}{x}, \varphi \rangle = V \cdot p \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right) \quad (2.4)$$

(см. задачу 2.3). Из определения сразу следует, что

$$\langle x P \frac{1}{x}, \varphi \rangle = \langle P \frac{1}{x}, x \varphi \rangle = V \cdot p \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \varphi(x)}{x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = \langle 1, \varphi \rangle.$$

Кроме того, имеем $g(x)\delta(x) = g(0)\delta(x)$ для любой функции $g \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$. Отсюда получаем, что если бы существовало коммутативное и ассоциативное произведение любых распределений, то

$$0 = 0 \cdot P \frac{1}{x} = (x\delta(x)) P \frac{1}{x} = (\delta(x)x) P \frac{1}{x} = \delta(x)(x P \frac{1}{x}) = \delta x. \text{ Противоречие.}$$

Утверждение 2.2 (обобщённая формула Лейбница). Пусть

$P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ – произвольный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами $a_\alpha \in \mathbf{C}$, $P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha$ – полный символ этого

оператора, $P^{(\alpha)}(\xi) = \partial^{|\alpha|} P(\xi) / \partial \xi_1^{\alpha_1} \dots \partial \xi_n^{\alpha_n}$, а $P^\alpha(D)$ – дифференциальные операторы, получающиеся из полиномов $P^{(\alpha)}(\xi)$ заменой переменной

ξ_j на D_j . Тогда для любых $g \in C^\infty(\Omega)$ и $v \in D'(\Omega)$ выполняются равенства:

$$P(D)(gv) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{1}{\alpha!} (D^\alpha g) P^{(\alpha)}(D)v = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{1}{\alpha!} (P^{(\alpha)}(D)g) D^\alpha v. \quad (2.5)$$

Доказательство. Непосредственно из определения 2.2 следует формула дифференциального произведения $D_j(gv) = (D_jg)v + g(D_jv)$, $j = 1, \dots, n$.

Отсюда видно, что

$$P(D)(gv) = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha g) Q_\alpha(D)v, \quad (2.6)$$

где $Q_\alpha(D)$, $|\alpha| \leq m$ – некоторые дифференциальные операторы. Символы $Q_\alpha(\xi)$ операторов $Q_\alpha(D)$, $|\alpha| \leq m$, легко найти, если в формулу (2.6) подставить функцию $g(x) = e^{i\xi \cdot x}$, $v(x) = e^{i\eta \cdot x}$. В этом случае получается равенство $P(\xi + \eta)e^{i(\xi + \eta)x} = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{1}{\alpha!} \xi^\alpha Q_\alpha(\eta) e^{i(\xi + \eta)x}$, так как $Q(D)e^{i\xi \cdot x} = Q(\xi)e^{i\xi \cdot x}$ для любого дифференциального оператора $Q(D)$ и для любого $\xi \in \mathbf{R}^n$.

Таким образом, $P(\xi + \eta) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{1}{\alpha!} \xi^\alpha Q_\alpha(\eta)$, а в силу единственности разложения по формуле Тейлора, $Q_\alpha(\eta) = P^{(\alpha)}(\eta)/\alpha!$ при всех $|\alpha| \leq m$. Следовательно, $P(D)(gv) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{1}{\alpha!} (D^\alpha g) P^{(\alpha)}(D)v$. Аналогично доказывается и равенство $P(D)(gv) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{1}{\alpha!} (P^{(\alpha)}(D)g) D^\alpha v$. \square

Докажем также, что любое распределение $f \in D'(\Omega)$, по крайней мере локально, может быть представлено в виде (2.3).

Теорема 2.2. Пусть $f \in D'(\Omega)$ и $\omega \subset\subset \Omega$, где ω – открытое множество. Тогда существует такая функция $F \in L_\infty(\omega)$ (или $F \in C(\omega)$), что

$$\langle f, \varphi \rangle = (-1)^{nm} \int F D_1^m \dots D_n^m \varphi \, dx, \quad \varphi \in C_0^\infty(\omega). \quad (2.7)$$

Доказательство. Из равенства (2.7) при $F \in L_\infty(\Omega)$ следует, что

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq C \int |D_1^m \dots D_n^m \varphi| dx, \quad \varphi \in C_0^\infty(\omega) \quad (2.8)$$

где $C = \|F\|_\infty$.

Докажем неравенство (2.8) с некоторой постоянной C , если $f \in D'(\Omega)$. Заметим сначала, что из определения непрерывности функционала f на $D(\Omega)$ следует неравенство $|\langle f, \varphi \rangle| \leq C_1 \sum_{\alpha \leq k} \sup |D^\alpha \varphi|$, $\varphi \in C_0^\infty(\omega)$, где числа C и k определяются множеством ω .

Если $\psi \in C_0^\infty(\omega)$, то из теоремы о среднем значении интеграла имеем оценку $\sup |\psi| \leq a_j \sup |D_j \psi|$, где a_j есть верхняя грань чисел $|x_j|$ на множестве ω_j , $j = 1, \dots, n$. Повторно применяя эту оценку, получим, что

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq C_2 \sup |D_1^k \dots D_n^k \varphi|, \quad \varphi \in C_0^\infty(\omega). \quad (2.9)$$

Кроме того, если $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, то $\psi(x) = i^n \int_{y < x} D_1 \dots D_n \psi(y) dy$, где

$y < x$ под знаком интеграла означает область интегрирования $y_1 < x_1, \dots, y_n < x_n$. Отсюда

$$\sup |\psi| \leq \int_{\mathbf{R}^n} |D_1 \dots D_n \psi(y)| dy, \quad \psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n). \quad (2.10)$$

Из неравенств (2.9) и (2.10) сразу следует неравенство (2.8), в котором $m = k + 1$.

Рассмотрим теперь линейный непрерывный функционал на подпространстве пространства $L_1(\omega)$ всех функций вида $(-1)^{nm} D_1^m \dots D_n^m \varphi$, $\varphi \in C_0^\infty(\omega)$, где $m = k + 1$, определяемый по формуле $(-1)^{nm} D_1^m \dots D_n^m \varphi \rightarrow \langle f, \varphi \rangle$, $\varphi \in C_0^\infty(\omega)$ (непрерывность этого функционала следует из неравенства (2.8)). По теореме Хана–Банаха этот функционал продолжается (с сохранением нормы) до линейного непрерывного

функционала на всем пространстве $L_1(\omega)$. Так как $L_\infty(\omega) = (L_1(\omega))'$, отсюда следует, что существует такая функция $F \in L_\infty(\omega)$, для которой выполняется равенство (2.7) при всех $\varphi \in C_0^\infty(\omega)$.

Если доопределить F нулем в $\mathbf{R}^n \setminus \omega$ и положить $G(x) = i^n \int_{y < x} F(y) dy$,

то получим, что $f = D_1^{m+1} \dots D_1^{m+1} F$ в ω , где $G \in C(\omega)$. \square

Утверждение 2.3. Пусть $\nu \in \xi'(\mathbf{R}^n)$ и $\text{supp } \nu = \{0\}$. Тогда $\nu(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha \delta(x)$, где $m \in \mathbf{Z}_+$, $\delta(x)$ – мера Дирака, $a_\alpha = \text{const} \in \mathbf{C}$ при $|\alpha| \leq m$.

Доказательство. В силу условия $\nu \in D'(\mathbf{R}^n)$ требуется доказать равенство

$$\langle \nu, \varphi \rangle = \sum_{|\lambda| \leq m} \alpha_\lambda (-D)^\lambda \varphi(0) \quad (2.11)$$

для некоторых $m \in \mathbf{Z}_+$ и любых $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Делая в случае необходимости замену независимых переменных вида $x' = tx$, где $t = \text{const} > 0$, без ограничения общности можно считать, что $\nu \in \xi'(B)$ и $\varphi \in C_0^\infty(B)$, где $B = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| < 1\}$. Пусть, далее, $\varphi \in C_0^\infty(B)$ и $\lambda(x) = 1$ при $|x| < 1/2$. Тогда представим функцию $\psi(x)$ в виде

$$\varphi(x) = \lambda(x) \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{1}{\alpha!} (iD)^\alpha \varphi(0) x^\alpha + \psi(x),$$

где m – порядок распределения ν . Для доказательства равенства (2.11) достаточно показать теперь, что $\langle \nu, \psi \rangle = 0$, поскольку тогда получим

равенство $\langle \nu, \varphi \rangle = \sum_{|\lambda| \leq k} \alpha_\lambda (-D)^\lambda \varphi(0)$, где $a_\lambda = \frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!} \langle \nu, x^\alpha \lambda(x) \rangle$, $|\alpha| \leq m$.

Заметим сначала, что $\psi \in C_0^\infty(B)$ и $D^\alpha \psi(0) = 0$ при $|\alpha| \leq m$. Пусть, далее, $B_r = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| < r\}$, где $r > 0$ и пусть $\chi_h(x) = \int_{B_{2h}} \omega_h(x-y) dy$, где $h > 0$, ω – ядро усреднения. Легко видеть, что $\chi_h \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, причем $\chi_h(x) = 1$ при $|x| \leq h$ и $\chi_h(x) = 0$ при $|x| \geq 3h$. Так как $\text{supp } \nu = \{0\}$ и $\psi(1-\chi_h) = 0$ в шаре B_h , то $\langle \nu, \psi \rangle = \langle \nu, \psi \chi_h \rangle$ при всех $h > 0$.

Поскольку $\nu \in E(\mathbf{R}^n)$ и m – порядок распределения ν , то по определению существует такой компакт $K \subset B$, что $|\langle \nu, \psi \rangle| \leq C \sum_{|\beta| \leq m} \max_{x \in \bar{B}} |D^\beta \psi(x)|$, где C – некоторая постоянная. Отсюда получаем, что

$$|\langle \nu, \chi_h \psi \rangle| \leq C \sum_{|\beta| \leq m} \max_{x \in \bar{B}} |\psi(x) \chi_h(x)|.$$

Оценим теперь производные $D^\beta(\psi \chi_h)$ на B при $|\alpha| \leq m$. Непосредственно проверяется, что $|D^\beta \chi_h| \leq C_\beta h^{-|\beta|}$ при всех $x \in \mathbf{R}^n$, $h > 0$ и $|\beta| \leq m$, где C_β – положительные постоянные, зависящие только от β . Далее, заметим, что при $|x| < 1/2$ функция $\psi(x)$ и все её производные вида $D^\beta \psi(x)$ при $|\beta| \leq m$ являются остаточными членами в формуле Маклорена для функции $\varphi(x)$. Отсюда следуют оценки вида $|D^\beta \psi(x)| \leq C'_\beta h^{m+1-|\beta|}$ при $|x| \leq 3h \leq 1$ и $|\beta| \leq m$, где C'_β – положительные постоянные, зависящие только от β .

Вычисляя теперь производные $D^\beta(\psi \chi_h)$ на шаре \bar{B} по правилу Лейбница, получим таким образом оценки $|D^\beta(\psi(x) \chi_h(x))| \leq C_1 h$ при $|x| \leq 3h \leq 1$ и $|\beta| \leq m$, где C_1 – постоянная, не зависящая от h . Отсюда получаем оценку $|\langle \nu, \psi \rangle| = |\langle \nu, \psi \chi_h \rangle| \leq C_2 h$ при всех достаточно малых положи-

тельных h , где C_2 – постоянная, не зависящая от h . Из этой оценки очевидно равенство $\langle v, \psi \rangle = 0$.

Пусть $P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$ – линейный дифференциальный оператор

с коэффициентами $a_\alpha \in C(\omega)$, $|\alpha| \leq m$, а ${}^t P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha [a_\alpha(x) \cdot]$ –

транспонированный дифференциальный оператор к оператору $P(x, D)$. Тогда

из формулы интегрирования по частям имеем

$$\int (P(x, D)\varphi) \psi dx = \int \varphi ({}^t P(x, D)\psi) dx \text{ при всех } \varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Определение 2.4. Обобщенным решением уравнения $P(x, D)u = f$, где $f \in D'(\Omega)$, называется такое распределение $u \in D'(\Omega)$, что $\langle P(x, D)u, \varphi \rangle = \langle u, {}^t P(x, D)\varphi \rangle$, $\varphi \in D(\Omega)$. Обобщенное решение $E(x)$ уравнения $P(x, D)E(x) = \delta(x)$ называется фундаментальным решением оператора $P(x, D)$.

Известно, что любой дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами имеет фундаментальное решение (см. п. 5.1).

Примеры.

2.1. Пусть $P(D) = \frac{d^m}{dx^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \dots + a_1 \frac{d}{dx} + a_0$, где $a_j = \text{const}$,

$j = 1, \dots, m$. Тогда непосредственно проверяется, что функция $E(x) = \theta(x)Z(x)$, где $Z(x)$ – решение уравнения $P(D)Z = 0$ с начальными условиями $Z(0) = \dots = Z^{m-2}(0) = 0$, $Z^{m-1}(0) = 1$.

2.2. Пусть $E_2(x) = \frac{1}{2\pi} \ln|x|$, $E_n(x) = \frac{1}{(2-n)\omega_{n-1}} |x|^{2-n}$ при $n \geq 3$, где

$x \in \mathbf{R}^n$, ω_{n-1} – площадь единичной сферы в \mathbf{R}^n . Тогда $E_n(x)$ – фундаментальное решение оператора Лапласа Δ в \mathbf{R}^n при $n \geq 2$ (в случае $n \geq 1$

функция $E_1(x) = \theta(x)x$ является фундаментальным решением оператора d^2/dx^2). Проверим это утверждение. Так как $E_n \in L_{1,loc}(\mathbf{R}^n)$, то

$$\langle \Delta E_n, \varphi \rangle = \langle E_n, \Delta \varphi \rangle = \int_{\mathbf{R}^n} E_n(x) \Delta \varphi(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} E_n(x) \Delta \varphi(x) dx$$

при всех $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Выберем $R > 0$ такое, что $\varphi(x) = 0$ при $|x| \geq R - 1$.

Тогда, в силу равенства $\Delta E_n(x) = 0$ при $x \neq 0$ и формулы Грина

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dx = \int_{\partial \Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS, \quad \Omega - \text{ограниченная область в } \mathbf{R}^n, \quad \partial \Omega -$$

кусочно-гладкая поверхность, ν – внешняя единичная нормаль к $\partial \Omega$,

$$u, v \in C^2(\overline{\Omega}), \text{ получим } \int_{|x| \geq \varepsilon} E_n(x) \Delta \varphi(x) dx = \int_{|x| = \varepsilon} \left(E_n \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} - \varphi \frac{\partial E_n}{\partial \nu} \right) dS.$$

$$\text{При этом } \frac{\partial E_n}{\partial \nu} = -\frac{\partial E_n(r)}{\partial r} = -\frac{1}{\omega_{n-1}} r^{1-n}, \text{ где } r = |x|.$$

$$\text{Отсюда } \int_{|x| \geq \varepsilon} E_n(x) \Delta \varphi(x) dx = \frac{1}{\omega_{n-1}} \left[-h_n(\varepsilon) \int_{|x| = \varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dS + \varepsilon^{1-n} \int_{|x| = \varepsilon} \varphi dS \right], \text{ где}$$

$h_2(\varepsilon) = \ln \varepsilon$, $h_n(\varepsilon) = \frac{1}{2-n} \varepsilon^{2-n}$, при $n \geq 3$. Так как $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, а площадь

сферы $|x| = \varepsilon$ в \mathbf{R}^n равна $\omega_{n-1} \varepsilon^{n-1}$, то $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(h_n(\varepsilon) \int_{|x| = \varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dS \right) = 0$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^{1-n} \int_{|x| = \varepsilon} \varphi dS = \omega_{n-1} \varphi(0).$$

Таким образом, $\langle \Delta E_n, \varphi \rangle = \varphi(0)$ или $\Delta E_n(x) = \delta(x)$.

Отметим ещё, что формула Грина непосредственно следует из равенства $u \Delta v - \Delta u = \nabla(u \nabla v) - \nabla(v \nabla u)$ и формулы Гаусса–Остроградского.

2.3. Прямое произведение и свёртка распределений

Определение 2.5. Пусть $f_j \in D'(\Omega_j)$, Ω_j – открытые множества в \mathbf{R}^n , $j=1, 2$. Тогда *прямым* или *тензорным произведением* f_1 и f_2 называется распределение из $D'(\Omega_1 \times \Omega_2)$, обозначаемое $f_1 \otimes f_2$, $f_1(x)f_2(y)$ или $f_1(x) \otimes f_2(y)$ и определяемое равенствами:

$$\langle f_1 \otimes f_2, \varphi \rangle = \langle f_1(x), \langle f_2(y), \varphi(x, y) \rangle \rangle = \langle f_2(y), \langle f_1(x), \varphi(x, y) \rangle \rangle, \quad (2.12)$$

$$\varphi \in D(\Omega_1 \times \Omega_2)$$

Поясним это определение, в котором последнее равенство в (2.12) является аналогом теоремы Фубини о повторных интегралах. Заметим сначала, что любой компонент $K \subset \Omega_1 \times \Omega_2$ содержится в некотором компоненте вида $K_1 \times K_2$, где K_j – компакт в Ω_j , $j=1, 2$. В частности, $\text{supp } \varphi \subset K_1 \times K_2$ при некоторых K_1, K_2 . Далее, функцию $\varphi(x, y)$ можно рассматривать как бесконечно дифференцируемую функцию от x со значениями в $D(K_2)$. Это означает существование всех производных как пределов своих разностных отношений в топологии $D(K_2)$. Таким образом, $\langle f_2(y), \varphi(x, y) \rangle \in D(K_1)$, так как f_2 является линейным непрерывным функционалом на $D(K_2)$. Следовательно, определен функционал

$$\langle F, \varphi \rangle = \langle f_1(x), \langle f_2(y), \varphi(x, y) \rangle \rangle, \quad \varphi \in D(\Omega_1 \times \Omega_2).$$

Непосредственно проверяется, что $F \in D'(\Omega_1 \times \Omega_2)$ и $\text{supp } F \subset \text{supp } f_1 \times \text{supp } f_2$. Аналогично определяется функционал $G \in D'(\Omega_1 \times \Omega_2)$ по формуле $\langle G, \varphi \rangle = \langle f_2(x), \langle f_1(y), \varphi(x, y) \rangle \rangle$, $\varphi \in D(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Для корректности определения 2.5 требуется проверить, что $\langle F, \varphi \rangle = \langle G, \varphi \rangle$ при всех $\varphi \in D(\Omega_1 \times \Omega_2)$. При этом, если $\varphi = \varphi_1 \otimes \varphi_2$, где $\varphi_j \in D(\Omega_j)$, $j=1, 2$, т.е. $\varphi(x, y) = \varphi_1(x)\varphi_2(x)$, то очевидно, что

$$\langle F, \varphi \rangle = \langle f_1, \varphi_1 \rangle \langle f_2, \varphi_2 \rangle = \langle G, \varphi \rangle.$$

Таким образом для доказательства равенства $F=G$ достаточно доказать следующее утверждение.

Утверждение 2.4. Линейные комбинации функций вида $\varphi_1 \otimes \varphi_2$, где $\varphi_j \in D(\Omega_j)$, $j=1, 2$, плотны в $D(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Доказательство. Это утверждение равносильно тому, что если K_j – компакт в Ω_j , $j=1, 2$, а \tilde{K}_j – компакт в Ω_j , что K_j содержится в множестве внутренних точек \tilde{K}_j , $j=1, 2$, то любую функцию $\varphi \in D(K_1 \times K_2)$ можно приблизить в $D(\tilde{K}_1 \times \tilde{K}_2)$ с любой точностью линейными комбинациями функций вида $\varphi_1 \otimes \varphi_2$, где $\varphi_j \in D(\tilde{K}_j)$, $j=1, 2$.

Для доказательства последнего утверждения рассмотрим такой куб:

$$Q = \{(x, y) : |x_k| \leq a/2, |y_j| \leq a/2, k=1, \dots, n_1, j=1, \dots, n_2\},$$

что компакт $K_1 \times K_2$ лежит строго внутри $Q \subset \mathbf{R}^{n_1+n_2}$. Функцию $\varphi(x, y) = \varphi(z)$, где $z = (x, y) \in \mathbf{R}^n$, $n = n_1 + n_2$, можно разложить в ряд Фурье по ортонормированному в $L_2(Q)$ базису $\left\{ \exp\left(\frac{2\pi i}{a} mz\right), m \in \mathbf{Z}^n \right\}$, т.е.

$$\varphi(z) = \sum_m \varphi_m \exp\left(\frac{2\pi i}{a} mz\right), \quad m \in \mathbf{Z}^n, \quad (2.13)$$

$$\text{где } \varphi_m = \frac{1}{a^n} \int_Q \varphi(z) \exp\left(-\frac{2\pi i}{a} mz\right) dz, \quad m \in \mathbf{Z}^n.$$

Так как $\varphi \in D(\Omega_1 \times \Omega_2)$, то, интегрируя по частям, при любом $N \in \mathbf{N}$, имеем

$$\begin{aligned}
(1+|m|^2)^N \varphi_m &= \frac{1}{a^n} \int_{\mathbb{Q}} \varphi(z) \left(1 - \frac{a^2}{4\pi^2} \Delta_z\right)^N \exp\left(-\frac{2\pi i}{a} mz\right) dz = \\
&= \frac{1}{a^n} \int_{\mathbb{Q}} \left[\left(1 - \frac{a^2}{4\pi^2} \Delta_z\right)^N \varphi(z)\right] \exp\left(-\frac{2\pi i}{a} mz\right) dz
\end{aligned}$$

Отсюда $|\varphi_m| \leq C_N (1+|m|^2)^{-N}$ при любых $m \in \mathbf{Z}^n$ и $N \in \mathbf{N}$, где постоянная C_N не зависит от m . Следовательно, ряд (2.13) сходится абсолютно и равномерно на \mathbb{Q} и его можно почленно дифференцировать любое число раз. Таким образом, ряд (2.13) сходится в топологии $C^\infty(\overline{\mathbb{Q}})$.

Выберем теперь такие функции $\chi_j \in D(\tilde{K}_j)$, что $\chi_j \equiv 1$ в некоторой окрестности K_j , $j=1, 2$. Тогда

$$\varphi(x, y) = \chi_1(x) \chi_2(y) \varphi(x, y) = \sum_{m_1, m_2} \varphi_m \chi_1(x) \exp\left(\frac{2\pi i}{a} m_1 x\right) \chi_2(y) \exp\left(\frac{2\pi i}{a} m_2 y\right),$$

где $m_1 \in \mathbf{Z}^{n_1}$, $m_2 \in \mathbf{Z}^{n_2}$, $m = (m_1, m_2)$, а последний ряд сходится в топологии $D(\tilde{K}_1 \times \tilde{K}_2)$. Конечные суммы этого ряда и дают доказываемые приближения для $\varphi(x, y)$. \square

Следствие 2.1. Прямое произведение распределений коммутативно и ассоциативно.

Доказательство. Коммутативность непосредственно следует из определения 2.4 и его корректности. Ассоциативность означает, что если $f_j \in D'(\Omega_j)$, $j=1, 2, 3$, то

$$(f_1 \otimes f_2) \otimes f_3 = f_1 \otimes (f_2 \otimes f_3) \text{ в } D'(\Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3).$$

Но это равенство также непосредственно следует из определения 2.4

$$\begin{aligned}
\langle (f_1 \otimes f_2) \otimes f_3, \varphi \rangle &= \langle (f_1 \otimes f_2), (x, y), \langle f_3(z), \varphi(x, y, z) \rangle \rangle = \\
&= \langle f_1(x), \langle f_2(y), \langle f_3(z), \varphi(x, y, z) \rangle \rangle \rangle = \langle f_1(x), \langle (f_2 \otimes f_3)(y, z), \varphi(x, y, z) \rangle \rangle = \\
&= \langle f_1 \otimes (f_2 \otimes f_3), \varphi \rangle
\end{aligned}$$

при всех $\varphi \in D(\Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3)$.

Замечание 2.1. Из определения 2.5 легко следует, что:

$$1) \text{supp}(f_1 \otimes f_2) \subset \text{supp } f_1 \times \text{supp } f_2;$$

$$2) \frac{\partial}{\partial x_j}(f_1 \otimes f_2) = \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \otimes f_2, \quad \frac{\partial}{\partial y_k}(f_1 \otimes f_2) = f_1 \otimes \frac{\partial f_2}{\partial y_k} \quad \text{для любых } j, k \text{ (задача 2.);}$$

$$3) (f_1 \otimes f_2) \otimes f_3 = f_1(f_2 \otimes f_3) \quad \text{в } D'(\Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3), \quad \text{где } f_j \in D'(\Omega_j), \\ j=1, 2, 3 \text{ (ассоциативность прямого произведения) (задача 2.9)}$$

Примеры.

$$2.3. \delta(x)\delta(y) = \delta(x) \otimes \delta(y) = \delta(x, y)$$

2.4. Пусть $\rho(x) \in C(\mathbf{R}^{n-1})$, $\delta(t) \in D'(\mathbf{R})$. Тогда распределение $\delta(t) \otimes \rho(x) \in D'(\mathbf{R}_{t,x}^n)$ называется *простым слоем с плотностью ρ на плоскости $t=0$* и определяется равенством

$$\langle \delta(t) \otimes \rho(x), \varphi(t, x) \rangle = - \int_{\mathbf{R}_x^{n-1}} \varphi(x, 0) \rho(x) dx, \quad \varphi \in D(\mathbf{R}^n).$$

2.5. Распределение $\delta'(t) \otimes \rho(x)$ называется *двойным слоем с плотностью ρ на плоскости $t=0$* и определяется равенством

$$\langle \delta'(t) \otimes \rho(x), \varphi(t, x) \rangle = - \int_{\mathbf{R}_x^{n-1}} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, x) \rho(x) dx, \quad \varphi \in D(\mathbf{R}^n).$$

Определение 2.6. Пусть распределения $f, g \in D'(\mathbf{R}^n)$ и одно из этих распределений имеет компактный носитель. Тогда *свёрткой* распределений f и g называется распределение из $D'(\mathbf{R}^n)$, обозначаемое $f * g$ и определяемое по формуле

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \langle f(x)g(y), \varphi(x+y) \rangle, \quad \varphi \in D(\mathbf{R}^n). \quad (2.14)$$

Заметим, что правая часть равенства (2.13) имеет смысл в данном случае, хотя $\varphi(x+y) \notin D(\mathbf{R}^{2n})$ при $\varphi \neq 0$. Действительно, пусть, например, $f \in E'(\mathbf{R}^n)$. Тогда по определению прямого произведения $f(x)g(x)$ формально имеем

$$\langle f(x)g(x), \varphi(x+y) \rangle = \langle f(x), \langle g(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle = \\ = \langle g(y), \langle f(x), \varphi(x+y) \rangle \rangle, \quad (2.15)$$

где $\langle g(y), \varphi(x+y) \rangle \in E(\mathbf{R}_x^n)$, $\langle f(x), \varphi(x+y) \rangle \in D(\mathbf{R}_y^n)$. Таким образом, определены выражения $\langle f(x), \langle g(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle$ и $\langle g(y), \langle f(x), \varphi(x+y) \rangle \rangle$ при всех $\varphi \in D(\mathbf{R}^n)$. Докажем также, что они совпадают. Для этого выберем такую функцию $\chi \in D(\mathbf{R}^n)$, что $\chi(x) = 1$ в некоторой окрестности $\text{supp } f$. Тогда $f = \chi f$ и выполняются равенства

$$\begin{aligned} \langle f(x), \langle g(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle &= \langle \chi(x) f(x), \langle g(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle = \\ &= \langle f(x), \chi(x), \langle g(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle = \langle f(x), \langle g(y), \chi(x) \varphi(x+y) \rangle \rangle, \end{aligned}$$

а также равенство

$$\langle g(y), \langle f(x), \varphi(x+y) \rangle \rangle = \langle g(y), \langle f(x), \chi(x) \varphi(x+y) \rangle \rangle.$$

Правые части последних двух равенств равны в силу доказанной выше корректности определения прямого произведения двух распределений (см. формулу (2.12)), поскольку $\chi(x) \varphi(x+y) \in D(\mathbf{R}^{2n})$. Таким образом, равны и левые части этих равенств.

Отметим также, что, как легко проверить, определение 2.6 является обобщением классического определения свёртки двух функций $f, g \in C(\mathbf{R}^n)$, одна из которых имеет компактный носитель.

Непосредственно из определения 2.6, коммутативности и ассоциативности прямого произведения следуют *коммутативность и ассоциативность* свёртки распределений. Последнее означает, что $(f * g) * h = f * (g * h)$, если $f, g, h \in D'(\mathbf{R}^n)$ и два из этих трех распределений имеют компактный носитель.

Пример 2.6. $\delta(x) * f(x) = f(x)$ при $f \in D'(\mathbf{R}^n)$.

Теорема 2.3. Пусть $f \in D'(\mathbf{R}^n)$, $\varphi \in D(\mathbf{R}^n)$ или $f = E'(\mathbf{R}^n)$, $\varphi = E'(\mathbf{R}^n)$.

Тогда

- 1) $f * \varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, причем $(f * \varphi)(x) = \langle f(y), \varphi(x-y) \rangle = \langle f(x-y), \varphi(y) \rangle$;
- 2) $\text{supp}(f * \varphi) \subset \text{supp } f + \text{supp } \varphi$;

$$3) \partial^\alpha (f * \varphi) = (\partial^\alpha f) * \varphi = f * (\partial^\alpha \varphi) \text{ при всех } \alpha \in \mathbf{Z}_f^n.$$

Доказательство.

1) Равенство $\langle f(y), \varphi(x-y) \rangle = \langle f(x-y), \varphi(y) \rangle$ следует из определения замены переменных в распределениях.

Функция $x \rightarrow \varphi(x-y)$ является бесконечно дифференцируемой со значениями в $C^\infty(\mathbf{R}_y^n)$. Кроме того, если $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, то $\varphi(x-y) \in C_0^\infty(\mathbf{R}_y^n)$ при фиксированном x и носитель $\varphi(x-y)$ как функции y лежит в некотором компакте, если x меняется на компакте. Отсюда следует, что $\langle f(y), \varphi(x-y) \rangle \in C^\infty(\mathbf{R}_x^n)$.

Таким образом, для доказательства утверждения 1) достаточно теперь доказать равенство

$$\langle f * \varphi, \psi \rangle = \langle \langle f(y), \varphi(x-y) \rangle, \psi(x) \rangle, \quad \psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n). \quad (2.16)$$

По определению и в силу включения $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ имеем

$$\begin{aligned} \langle f * \varphi, \psi \rangle &= \langle f(x), \langle \varphi(y), \psi(x+y) \rangle \rangle = \\ &= \langle f(x), \int \varphi(y) \psi(x+y) dy \rangle = \langle f(y), \int \varphi(x-y) \psi(x) dx \rangle. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\langle \langle f(y), \varphi(x-y) \rangle, \psi(x) \rangle = \int \langle f(y), \varphi(x-y) \rangle \psi(x) dx.$$

Из двух последних равенств следует, что для доказательства (2.16) осталось проверить равенство

$$\langle f(y), \int \varphi(x-y) \psi(x) dx \rangle = \int \langle f(y), \varphi(x-y) \rangle \psi(x) dx, \quad \psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n). \quad 2.17)$$

Заметим, что интеграл $\int \varphi(x-y) \psi(x) dx$ является пределом в топологии $C^\infty(\mathbf{R}_y^n)$ своих интегральных сумм, так как производные $\partial^\alpha y$ от интегральных сумм являются в данном случае интегральными суммами интеграла $\int \partial^\alpha y \varphi(x-y) \psi(x) dx$. Поскольку f – линейный непрерывный функционал, то отсюда следует равенство (2.17).

2) Докажем, что $\langle f * \varphi, \psi \rangle = 0$ при $\psi \in D(\mathbf{R}^n)$ и $\text{supp } \psi \cap (\text{supp } f + \text{supp } \varphi) = \emptyset$. Из последнего равенства следует, что $\text{supp } \psi(x, y) \cap (\text{supp } [f(x)\varphi(y)]) = \emptyset$. Отсюда и из равенства (2.14) сразу получаем, что $\langle f * \varphi, \psi \rangle = 0$, а значит, и включение $\text{supp}(f * \varphi) \subset \text{supp } f + \text{supp } \varphi$ (см. определение 2.1)

3) Из определения производной распределения, определения свертки и замечания 2.1 имеем

$$\begin{aligned} \langle \partial^\alpha (f * \varphi), \psi \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \langle f * \varphi, \partial^\alpha \psi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f(x)\varphi(y), (\partial^\alpha \psi)(x+y) \rangle = \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle f(x)\psi(y), \partial_x^\alpha \psi(x+y) \rangle = \langle (\partial_x^\alpha f(x))\psi(y), \psi(x+y) \rangle = \\ &= \langle (\partial^\alpha f) * \varphi, \psi \rangle, \quad \psi \in D(\mathbf{R}^n). \end{aligned}$$

Таким образом, $\partial^\alpha (f * \varphi) = (\partial^\alpha f) * \varphi$. Аналогично доказывается равенство $\partial^\alpha (f * \varphi) = f * \partial^\alpha \varphi$. \square

Замечание 2.2. Доказательства утверждений 2) и 3) теоремы 2.3 без изменений переносятся на случай, когда $f, \varphi \in D'(\mathbf{R}^n)$ и одно из этих распределений имеет компактный носитель (задача 2.10).

Следствие 2.2. Пусть $P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами в \mathbf{R}^n , распределения $f, g \in D'(\mathbf{R}^n)$ и одно из них имеет компактный носитель. Тогда

$$P(D)(f * g) = (P(D)f) * g = f * (P(D)g).$$

Доказательство сразу следует из замечания 2.2. \square

Примеры.

2.7. Если распределение $E \in D'(\mathbf{R}^n)$ является фундаментальным решением оператора $P(D)$, $f \in E'(\mathbf{R}^n)$, то распределение $u = E * f$ является частным (обобщенным) решением уравнения $P(D)u = f$. Это следует из равенств $P(D)(E * f) = (P(D)E) * f = \delta * f = f$.

В частности, для оператора Лапласа в \mathbf{R}^n частное решение уравнения $\Delta u = -f$, где $f \in E'(\mathbf{R}^n)$, определяется по формуле $u = -E_n * f$ (см. пример 2.2) и называется (*объемным*) *потенциалом*. Если, дополнительно, функция f – кусочно-непрерывна, то свертка $u = -E_n * f \in L_{1,loc}(\mathbf{R}^n)$ и

$$u(x) = -\int E_n(x-y)f(y)dy. \quad (2.18)$$

Это следует из включения $E_n(x-y)f(y) \in L_{1,loc}(\mathbf{R}_{x,y}^{2n})$ и из равенств, использующих теорему Фубини

$$\begin{aligned} \langle u, \varphi \rangle &= -\langle E_n * f, \varphi \rangle = -\langle E_n(x), \langle f(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle = \\ &= -\int E_n(x)dx \int f(y)\varphi(x+y)dy = -\int \varphi(x)dx \int E_n(x-y)f(y)dy, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \end{aligned}$$

При \mathbf{R}^n формула (2.18) определяет *логарифмический потенциал*

$$u(x) = -\frac{1}{2\pi} \int f(y) \ln|x-y|dy, \quad \text{а при } n=3 \text{ – } \textit{объемный потенциал}$$

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{f(y)}{|x-y|} dy \quad (\text{при кусочно-непрерывной функции } f).$$

2.8. Пусть Γ – гладкая поверхность коразмерности 1 в \mathbf{R}^n , $\rho \in C(\Gamma)$, ν – внешняя единичная нормаль к Γ . Тогда формулы $\langle \rho \delta_\Gamma, \varphi \rangle = \int_\Gamma \rho(x)\varphi(x)dS$, $\varphi \in D(\mathbf{R}^n)$, $\langle \frac{\partial}{\partial \nu}(\rho \delta_\Gamma), \varphi \rangle = -\int_\Gamma \rho(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial \nu} dS$, $\varphi \in D(\mathbf{R}^n)$, определяют, как легко проверить, распределения из $D'(\mathbf{R}^n)$, а в случае компактности – из $E'(\mathbf{R}^n)$ (задача 2.11). При $\Gamma = \mathbf{R}_x^{n-1}$ и $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}_{t,x}^n$ эти распределения совпадают с приведёнными в примерах 2.4 и 2.5 распределениями $\delta(t) \otimes \rho(x)$ и $\delta'(t) \otimes \rho(x)$.

Свёртки $v = -E_n * (\rho \delta_\Gamma)$ и $w = -E_n * \frac{\partial}{\partial \nu}(\rho \delta_\Gamma)$, где E_n – фундаментальное решение оператора Лапласа в \mathbf{R}^n из примера 2.2, Γ – гладкая компактная область коразмерности 1 в \mathbf{R}^n , называются соответственно *потенциалом простого слоя* и *потенциалом двойного слоя*. Потенциал v имеет интер-

претацию электрического потенциала совокупности зарядов, распределенных по поверхности Γ с плотностью ρ . Потенциал w интерпретируется как электрический потенциал совокупности диполей, распределенных на поверхности Γ , ориентированных вдоль нормалей $\nu(x)$ и имеющих плотность дипольного момента $\rho(x)$.

Легко видеть, что вне поверхности Γ оба потенциала v и w принадлежат $C^\infty(\mathbf{R}^n \setminus \Gamma)$ и определяются формулами

$$v(x) = -\int_{\Gamma} E_n(x-y)\rho(y)dS_y, \quad w(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial E_n(x-y)}{\partial \nu_y} \rho(y)dS_y \quad (2.19)$$

(задача 2.12).

Операция свертки *непрерывна* в следующем смысле.

Утверждение 2.5. Пусть $f_k \rightarrow f$ в $D'(\mathbf{R}^n)$, а $g \in E'(\mathbf{R}^n)$ или $f_k \rightarrow f$ в $E'(\mathbf{R}^n)$, а $g \in D'(\mathbf{R}^n)$. Тогда $f_k * g \rightarrow f * g$ в $D'(\mathbf{R}^n)$.

Доказательство. Из определений свертки и распределения имеем $\langle f_k * g, \varphi \rangle = \langle f_k(x), \langle g(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle \rightarrow \langle f(x), \langle g(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle = \langle f * g, \varphi \rangle, \varphi \in D(\mathbf{R}^n)$. \square

Фундаментальным в теории распределений является утверждение о том, что всякое распределение можно аппроксимировать гладкими функциями. Для этого используются *усреднения* распределения, являющиеся его сверткой с δ -образной последовательностью гладких функций.

Определение 2.7. Функция $\omega \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ называется *ядром усреднения*, если $\omega(x) = 0$ при $|x| \geq 1$, $\omega(x) \geq 0$ при $x \in \mathbf{R}^n$ и $\int \omega(x)dx = 1$.

Стандартным примером ядра усреднения является функция

$$\omega(x) = \begin{cases} C \exp\left(\frac{1}{|x|^2 - 1}\right) & \text{при } |x| < 1, \\ 0 & \text{при } |x| \geq 1, \end{cases} \quad \text{где } C = \left(\int_{|x| < 1} \exp\left(\frac{1}{|x|^2 - 1}\right) dx \right)^{-1}.$$

Заметим при этом, что $\omega(x) = \omega(-x)$ при всех $x \in \mathbf{R}^n$, т.е. функция $\omega(x)$ в этом примере – четная. В дальнейшем будем считать для удобства, что ядро усреднения является *четной* функцией.

Пусть $\omega_h(x) = h^{-n} \omega(x/h)$, где $h > 0$. Тогда любая последовательность $\omega_{h_k}(x)$, где $h_k \rightarrow 0+$ при $k \rightarrow \infty$, является δ -образной последовательностью в следующем смысле.

Утверждение 2.6. Имеет место соотношение $\omega_h(x) \rightarrow \delta(x)$ при $h \rightarrow 0+$ в $D'(\mathbf{R}^n)$.

Доказательство. Требуется доказать, что

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \int \omega_h(x) \varphi(x) dx = \varphi(0) \quad \text{при всех } \varphi \in D(\mathbf{R}^n).$$

Так как $\int \omega_h(x) dx = 1$ при всех $h > 0$, то $\int \omega_h(x) \varphi(x) dx - \varphi(0) = \int \omega_h(x) [\varphi(x) - \varphi(0)] dx$. Отсюда, в силу равенства $\omega_h(x) = 0$, при $|x| \geq h$ $|\int \omega_h(x) \varphi(x) dx - \varphi(0)| \leq \max_{|x| \leq h} |\varphi(x) - \varphi(0)| \rightarrow 0$ при $h_k \rightarrow 0+$. \square

Замечание 2.3. Соотношение $\omega_h(x) \rightarrow \delta(x)$ при $h \rightarrow 0+$ верно также в $S'(\mathbf{R}^n)$, $E'(\mathbf{R}^n)$, $E'(\Omega)$, если $0 \in \Omega$. Доказательство этих утверждений аналогично доказательству утверждений 2.3 (задача 2.13).

Определение 2.8. Усреднением распределения $f \in D'(\mathbf{R}^n)$ называется свёртка $f * \omega_h$, $h > 0$.

Из теоремы 2.3 следует, что $f * \omega_h \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ при всех $h > 0$, а если $f \in E'(\mathbf{R}^n)$, то $f * \omega_h \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Обозначим $f_h(x) = (f * \omega_h)(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$. Отметим ещё, что из определения свёртки и чётности $\omega_h(x)$ следует равенство $\langle f_h, \varphi \rangle = \langle f, \varphi_h \rangle$, $\varphi \in D(\mathbf{R}^n)$.

Теорема 2.4. Пусть $f \in D'(\mathbf{R}^n)$. Тогда имеет место соотношение $f_h \rightarrow f$ при $h \rightarrow 0+$ в $D'(\mathbf{R}^n)$.

Доказательство. Так как $\omega_{h_k}(x) \rightarrow \delta(x)$ при $h_k \rightarrow 0+$, то в силу утверждения 2.3 $f_{h_k} = f * \omega_{h_k} \rightarrow f * \delta = f$ при $h_k \rightarrow 0+$ в $D'(\mathbf{R}^n)$. \square

Следствие 2.3. Множество $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в $D'(\Omega)$, в $E'(\Omega)$ для любой области Ω в \mathbf{R}^n , а множество $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ плотно в $S'(\mathbf{R}^n)$.

Доказательство. Докажем сначала, что $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ плотно в $E(\mathbf{R}^n)$. Пусть $g \in E(\mathbf{R}^n)$, а $\chi(x)$ — такая функция из $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, что $\chi(x) = 1$ при $|x| \leq 1$. Определим $g_k(x) = \chi(x/k)g(x)$, где $k \in \mathbf{N}$. Легко проверить, что $g_k(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ и $g_k \rightarrow g$ при $k \rightarrow \infty$ в $E'(\mathbf{R}^n)$.

В силу теоремы 2.4 множество $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ плотно в $E'(\mathbf{R}^n)$. Пусть $f \in E'(\mathbf{R}^n)$, $K = \text{supp } f \subset\subset B = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| < R\}$ при некотором $R > 0$. Тогда по теореме 2.2 (утверждение 2) $\text{supp } f_h \subset \bar{B}$ при всех достаточно малых $h > 0$. Отсюда и из соотношения $f_h \rightarrow f$ в $D'(\mathbf{R}^n)$ при $h \rightarrow 0+$ следует, что $f_h \rightarrow f$ в $E'(\mathbf{R}^n)$ при $h \rightarrow 0+$.

Аналогично доказываются и остальные утверждения следствия 2.3 (задача 2.14). \square

Замечание 2.4. С помощью следствия 2.3 доказательство формул для распределений, обе части которых непрерывно зависят, например, от $f \in D'(\Omega)$, достаточно проверить при $f \in C_0^\infty(\Omega)$.

Утверждение 2.7. Пусть K — компактное подмножество области Ω в \mathbf{R}^n . Тогда существует такая функция $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$, что $0 \leq \chi(x) \leq 1$ при $x \in \Omega$ и $\chi(x) = 1$ при $x \in K$.

Доказательство. Пусть $d = \text{dist}(K, \partial\Omega)$, $\Omega_\delta = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \delta\}$, если $\Omega \notin \mathbf{R}^n$. Тогда, как легко проверить, функция $\chi(x) = \int_{\Omega_\delta} \omega_h(x-y) dy$ при $\delta = 3d/4$, $h = d/4$ удовлетворяет всем требованиям данного утверждения.

При $\Omega \in \mathbf{R}^n$ функция $\chi(x) = \int_{B_\delta} \omega_h(x-y) dy$ очевидно удовлетворяет всем условиям, если B – ограниченная область, содержащая K , а $\delta = \frac{3d}{4}$, $h = \frac{d}{4}$, где $d = \text{dist}(K, \partial B)$. \square

Определение 2.9. Пусть Ω – область в \mathbf{R}^n , $f \in L_{1,loc}(\Omega, \rho(x)dx)$. Тогда функция $f_h(x) = \int_{\Omega} f(y) \omega_h(x-y) \rho(y) dy$, $h > 0$, называется *усреднением функции f* .

Теорема 2.5. Пусть Ω – область в \mathbf{R}^n . Тогда для любой подобласти $\Omega' \subset\subset \Omega$ имеют место утверждения:

- 1) если $f \in L_{1,loc}(\Omega)$, то $f_h \in C^\infty(\Omega')$ и $\partial_x^\alpha [f_h(x)] = (\partial^\alpha f)_h(x)$ при любых $x \in \Omega'$, $\alpha \in \mathbf{Z}_+^n$ и достаточно малых $h > 0$;
- 2) если $f \in C^k(\Omega)$, где $k \in \mathbf{Z}_+$, то $\|f - f_h\|_{C^k(\bar{\Omega}')} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0+$;
- 3) если $f \in L_{p,loc}(\Omega)$, где $p \geq 1$, то $\|f - f_h\|_{L_p(\Omega')} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0+$;
- 4) если $f \in L_p(\Omega)$, где $p \geq 1$, то $\|f_h\|_{L_p(\Omega)} < \|f\|_{L_p(\Omega)}$ и $\|f - f_h\|_{L_p(\Omega)} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0+$.

Доказательство. 1) Функция $f_h(x)$ определена в области Ω' , если $h < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$. При этом $f_h \in C^\infty(\Omega')$ в силу теоремы о дифференцировании интеграла с параметром. Кроме того, используя формулу интегрирования по частям, при $x \in \Omega'$, $h < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ имеем

$$\begin{aligned} \partial_x^\alpha [f_h(x)] &= \int_{\Omega} \partial_x^\alpha [\omega_h(x-y)] f(y) dy = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \partial_y^\alpha [\omega_h(x-y)] f(y) dy = \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle f(y), \partial_y^\alpha [\omega_h(x-y)] \rangle = (-1)^{2|\alpha|} \langle \partial_y^\alpha f(y), \omega_h(x-y) \rangle = (\partial^\alpha f * \omega_h)(x) = \\ &= (\partial^\alpha f)_h(x). \end{aligned}$$

2) Докажем сначала, что $\|f - f_h\|_{C^0(\bar{\Omega}')} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0+$, если $f \in C^0(\Omega)$. Так как при $x \in \Omega'$, $2h < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ выполняются равенства

$$f_h(x) = h^{-n} \int_{|x-y| \leq h} \omega\left(\frac{x-y}{h}\right) f(y) dy = \int_{|z| \leq 1} \omega(z) f(x+hz) dz, \quad (2.20)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega_h(y) dy = 1, \quad f(x) = \int_{|z| \leq 1} f(x) \omega(z) dz,$$

то при этих h имеем

$$\max_{\Omega'} |f - f_h| \leq \max_{x \in \Omega'} \int_{|z| \leq 1} \omega(z) |f(x) - f(x+hz)| dz \leq \max_{x \in \Omega'} \max_{|z| \leq 1} |f(x) - f(x+hz)|.$$

Поскольку функция f является равномерно непрерывной на компакте $\{x \in \Omega : \text{dist}(x, \overline{\Omega'}) \leq h\}$, то из последнего неравенства следует, что f_h стремится к f равномерно на Ω' при $h \rightarrow 0+$.

В случае $k \in \mathbb{N}$ для доказательства утверждения 2) заметим, что в силу 1) $\partial_x^\alpha [f_h(x)] = (\partial^\alpha f)_h(x)$ при всех $|\alpha| \leq k$, $x \in \Omega'$, если $h < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$. Таким образом, случай произвольного $k \in \mathbb{N}$ сводится к случаю $k = 0$.

3) Из формулы (2.20) и неравенства Гельдера при $p > 0$ имеем

$$\begin{aligned} |f_h(x)|^p &= \left| \int_{|z| \leq 1} \omega(z) f(x+hz) dz \right|^p = \left| \int_{|z| \leq 1} (\omega(z))^{1/q} (\omega(z))^{1/p} f(x+hz) dz \right|^p \leq \\ &\leq \left(\int_{|z| \leq 1} \omega(z) dz \right)^{p/q} \int_{|z| \leq 1} \omega(z) |f(x+hz)|^p dz = \int_{|z| \leq 1} \omega(z) |f(x+hz)|^p dz, \end{aligned}$$

где $x \in \Omega'$, $2h < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$.

Отсюда при этих h и при $p \geq 0$ имеем в силу теоремы Фубини

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} |f_h(x)|^p dx &\leq \int_{\Omega'} dx \int_{|z| \leq 1} \omega(z) |f(x+hz)|^p dz = \int_{|z| \leq 1} \omega(z) dz \int_{\Omega'} |f(x+hz)|^p dx \leq \\ &\leq \int_{|z| \leq 1} \omega(z) dz \int_{\Omega''} |f(x)|^p dx = \int_{\Omega''} |f(x)|^p dx, \end{aligned}$$

где $\Omega'' = \Omega''^h = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \Omega') < h\}$. Следовательно,

$$\|f_h\|_{L_p(\Omega')} \leq \|f_h\|_{L_p(\Omega'')} \quad (2.21)$$

Докажем теперь соотношение $\|f - f_h\|_{L_p(\Omega')} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0+$. Пусть дано произвольное $\varepsilon > 0$, и пусть g — такая непрерывная функция на $\overline{\Omega''}$,

что $\|f - g\|_{L_p(\Omega^n)} < \varepsilon$. Для функции $g \in C^0(\overline{\Omega^n})$ применим утверждение 2) данной теоремы. Тогда для достаточно малых $h > 0$ очевидно выполняется неравенство $\|g - g_h\|_{L_p(\Omega)} < \varepsilon$. Используя теперь оценку (2.21) для разности $f - g$, получим

$$\begin{aligned} \|f - f_h\|_{L_p(\Omega')} &= \|f - g + g - g_h + g_h - f_h\|_{L_p(\Omega')} \leq \|f - g\|_{L_p(\Omega')} + \|g - g_h\|_{L_p(\Omega')} + \\ &+ \|(g - f)_h\|_{L_p(\Omega')} < \varepsilon + \varepsilon + \|g - f\|_{L_p(\Omega^n)} < 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon, \end{aligned}$$

если $h > 0$ и достаточно мало.

4) Если $\Omega \neq \mathbf{R}^n$, то продолжим функцию f нулем на $\mathbf{R}^n \setminus \Omega$ и это продолжение также будем обозначать через f . Далее, повторяя рассуждения в 3) с заменой Ω' на Ω , получим неравенство $\|f_h\|_{L_p(\Omega)} \leq \|f\|_{L_p(\Omega^h)} = \|f\|_{L_p(\Omega)}$.

Применяя теперь эту оценку к функции $f - g$, где $g \in C^0(\Omega)$ и $\|f - g\|_{L_p(\Omega)} < \varepsilon$ так же, как и в 3), получим требуемую аппроксимацию функции f функциями f_n в $L_p(\Omega)$. \square

Замечание 2.5. Утверждения 1), 3) и 4) теоремы 2.5 непосредственно обобщаются на случаи соответственно пространств $L_{1,loc}(\Omega, \rho(x)dx)$, $L_{p,loc}(\Omega, \rho(x)dx)$ и $L_p(\Omega, \rho(x)dx)$. В последнем случае предполагается, что функция $\rho(x)$ продолжается до непрерывной и положительной функции в некоторой окрестности Ω , если $\Omega \neq \mathbf{R}^n$.

Кроме того, из доказательства этих утверждений сразу получаем следующий результат.

Следствие 2.4. Множество $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в $L_p(\Omega, \rho(x)dx)$ для любой области Ω в \mathbf{R}^n , а множество $C^\infty(\Omega)$ плотно в $L_{p,loc}(\Omega, \rho(x)dx)$, где $p \geq 1$.

2.4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Определение 2.10. Пусть $f \in L_1(\mathbf{R}^n)$. Тогда преобразованием Фурье функции f называется функция $\tilde{f}(\xi)$, определяемая по формуле

$$\tilde{f}(\xi) = \int e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx, \text{ где } \xi \in \mathbf{R}^n. \quad (2.22)$$

Таким образом линейный логарифмический оператор преобразования Фурье F отображает пространство $L_1(\mathbf{R}^n)$ в $L_\infty(\mathbf{R}^n)$ по формуле $Ff = \tilde{f}$.

Теорема 2.6. Преобразование Фурье $F: S(\mathbf{R}^n) \rightarrow S(\mathbf{R}^n)$ является линейным топологическим изоморфизмом (т.е. непрерывным оператором, имеющим непрерывный обратный).

При этом

1) $(F^{-1}g)(x) = (2\pi)^{-n} \int g e^{ix \cdot \xi} g(\xi) d\xi$ (формула обратного преобразования Фурье);

2) $FD^\alpha = M^\alpha F$; 3) $FM^\alpha = (-D)^\alpha F$, где $M^\alpha g(y) = y^\alpha g(y)$ – оператор умножения на y^α , $\alpha \in \mathbf{Z}_+^n$.

Доказательство. Если $f \in S(\mathbf{R}^n)$, то $D_\xi^\alpha \tilde{f}(\xi) = \int e^{-ix \cdot \xi} (-x)^\alpha f(x) dx$ при всех $\alpha \in \mathbf{Z}_+^n$, так можно применять теорему о дифференцировании интеграла с параметром в равенстве (2.22). Следовательно, $\tilde{f} \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ и $D^\alpha F = F(-M)^\alpha$.

Далее, интегрируя по частям, получим равенство

$$\xi^\beta D_\xi^\alpha \tilde{f}(\xi) = \int e^{-ix \cdot \xi} D_x^\beta ((-x)^\alpha f(x)) dx \quad (2.23)$$

(при этом используется включение $f \in S(\mathbf{R}^n)$).

Отсюда $|\xi^\beta D_\xi^\alpha \tilde{f}(\xi)| \leq \int |D_x^\beta ((-x)^\alpha f(x))| dx \leq C_{\alpha\beta}$, при всех $\xi \in \mathbf{R}^n$, так как $D_x^\beta ((-x)^\alpha f(x)) \in S(\mathbf{R}^n) \subset L_1(\mathbf{R}^n)$.

Из равенства (2.23) при $\alpha = 0$ следует, что $\xi^\beta \tilde{f}(\xi)$ является преобразованием Фурье от $D^\beta f(x)$, т.е. $FD^\beta = M^\beta F$.

Непрерывность преобразования Фурье в $S(\mathbf{R}^n)$ следует из следующей оценки, использующей равенство (2.23). Имеем

$$\begin{aligned} |\xi^\beta D_\xi^\alpha \tilde{f}(\xi)| &\leq \int |D_x^\beta ((-x)^\alpha f(x))| dx = \\ &= \int \langle x \rangle^{-n-1} \cdot \langle x \rangle^{n+1} |D_x^\beta ((-x)^\alpha f(x))| dx \leq \\ &\leq \sup_x \left(\langle x \rangle^{n+1} |D_x^\beta ((-x)^\alpha f(x))| \right) \cdot \int \langle x \rangle^{-n-1} dx = \\ &= C \sup_x \left(\langle x \rangle^{n+1} |D_x^\beta ((-x)^\alpha f(x))| \right) \end{aligned}$$

при всех $f \in S(\mathbf{R}^n)$.

Докажем теперь формулу 1) обратного преобразования Фурье. Для этого нужно вычислить повторный интеграл

$$\int e^{ix \cdot \xi} d\xi \int f(y) e^{-iy \cdot \xi} dy, \text{ где } f \in S(\mathbf{R}^n). \quad (2.24)$$

Так как соответствующий двойной интеграл не является абсолютно сходящимся при всех $f \in S(\mathbf{R}^n)$, то в этом повторном интеграле нельзя поменять порядок интегрирования. Если заменить в интеграле (2.24) функцию $\tilde{f}(\xi)$ на функцию $\psi(\varepsilon\xi)\tilde{f}(\xi)$, где $\psi \in S(\mathbf{R}^n)$, $\varepsilon > 0$, то изменение порядка интегрирования в интеграле (2.24) дает равенства

$$\int e^{ix \cdot \xi} \psi(\varepsilon\xi) \tilde{f}(\xi) d\xi = \int f(y) \varepsilon^{-n} \tilde{\psi}((y-x)/\varepsilon) dy = \int \tilde{\psi}(y) f(x + \varepsilon y) dy.$$

Так как $\tilde{f}, \tilde{\psi} \in S(\mathbf{R}^n) \subset L_1(\mathbf{R}^n)$, а f и ψ — ограничены и непрерывны на \mathbf{R}^n , то переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0+$ в последних равенствах, получим $\psi(0) \int e^{ix \cdot \xi} \tilde{f}(\xi) d\xi = f(x) \int \tilde{\psi}(y) dy$.

Подставим в это равенство $\psi(\xi) = e^{-|\xi|^2/2}$ и $\tilde{\psi}(y) = (2\pi)^{n/2} e^{-|y|^2/2}$. Тогда получим $\int e^{ix \cdot \xi} \tilde{f}(\xi) d\xi = f(x) \cdot (2\pi)^{n/2} \int e^{-|y|^2/2} dy = (2\pi)^n f(x)$.

Таким образом, формула 1) доказана при всех $f \in S(\mathbf{R}^n)$.

Непрерывность оператора F^{-1} в пространстве $S(\mathbf{R}^n)$ доказывается, в силу формулы 1), аналогично непрерывности оператора F в $S(\mathbf{R}^n)$. \square

Следствие 2.5. Пусть $f, g \in S(\mathbf{R}^n)$. Тогда

$$1) \int \tilde{f} g dx = \int f \tilde{g} dx; \quad (2.25)$$

$$2) \int \tilde{f} \tilde{g} d\xi = \int f \bar{g} dx \quad (\text{равенство Парсеваля});$$

$$3) F(f * g) = F(f)F(g);$$

$$4) F(fg) = (2\pi)^{-n} F(f) * F(g).$$

Доказательство. 1) В силу теоремы Фубини имеем

$$\int \tilde{f}(x)g(x)dx = \int g(x)dx \int e^{-ix \cdot \xi} f(\xi)d\xi = \int f(\xi)d\xi \int e^{-ix \cdot \xi} g(x)dx = \int f(\xi)\tilde{g}(\xi)d\xi.$$

2) Обозначим $h(\xi) = (2\pi)^{-n} \overline{\tilde{g}(\xi)}$. Из формулы обратного преобразования Фурье следует, что $\overline{\tilde{h}(\xi)} = \overline{\int e^{-ix \cdot \xi} h(x)dx} = (2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \xi} \tilde{g}(x)dx = g(\xi)$. В силу формулы 1) данного следствия $d\xi = \int f \tilde{h} dx$, т.е. $(2\pi)^{-n} \int \tilde{f} \tilde{g} d\xi = \int f \bar{g} dx$.

3) В силу теоремы Фубини имеем

$$\begin{aligned} F(f * g) &= \int e^{-ix \cdot \xi} d\xi \int f(y)g(\xi - y)dy = \int f(y)dy \int e^{-ix \cdot \xi} g(\xi - y)d\xi = \\ &= \int f(y)dy \int e^{-i(\eta+y)x} g(\eta)d\eta = \int e^{-iy \cdot x} f(y)dy \int e^{-i\eta \cdot x} g(\eta)d\eta = F(f)F(g). \end{aligned}$$

4) Заметим сначала, что $F^2(fg) = F(F(fg)) = (2\pi)^n f(-x)g(-x)$. Используя теперь равенство 3) данного следствия, получим

$$F(Ff * Fg) = (F^2 f) (F^2 g) = (2\pi)^n f(-x)(2\pi)^n g(-x).$$

Отсюда $F^2(fg) = (2\pi)^{-n} F(Ff * Fg)$, а значит, $F(fg) = (2\pi)^{-n} Ff * Fg$. \square

Замечание 2.6. Из основной леммы вариационного исчисления следует, что формулу (2.25) можно использовать для эквивалентного определения преобразования Фурье функции f из $S(\mathbf{R}^n)$. Кроме того, обобщение этой формулы позволяет дать следующее определение преобразования Фурье распределений из $S'(\mathbf{R}^n)$.

Определение 2.11. Преобразование Фурье $Ff = \tilde{f}$ распределения $f \in S'(\mathbf{R}^n)$ задается формулой

$$\langle Ff, \psi \rangle = \langle f, F\psi \rangle, \quad \psi \in S(\mathbf{R}^n). \quad (2.26)$$

Таким образом, преобразование Фурье $F: S'(\mathbf{R}^n) \rightarrow S'(\mathbf{R}^n)$ является продолжением по непрерывности линейного топологического изоморфизма $F: S(\mathbf{R}^n) \rightarrow S(\mathbf{R}^n)$ (так как $S(\mathbf{R}^n)$ плотно в $S'(\mathbf{R}^n)$). Следовательно, отображение $F: S'(\mathbf{R}^n) \rightarrow S'(\mathbf{R}^n)$ также является линейным топологическим изоморфизмом. При этом обратный оператор F^{-1} задается формулой

$$\langle F^{-1}g, \varphi \rangle = \langle g, F^{-1}\varphi \rangle, \quad g \in S'(\mathbf{R}^n), \quad \varphi \in S(\mathbf{R}^n). \quad (2.27)$$

Это следует из того, что формула (2.25) очевидно выполняется при $g, \varphi \in S(\mathbf{R}^n)$, а также из непрерывности оператора F^{-1} на $S'(\mathbf{R}^n)$.

Обозначим $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$, где $\varphi \in S(\mathbf{R}^n)$ $\langle \check{f}, \varphi \rangle = \langle f, \check{\varphi} \rangle$, где $f \in S'(\mathbf{R}^n)$.

Теорема 2.7. Преобразование Фурье $F: S'(\mathbf{R}^n) \rightarrow S'(\mathbf{R}^n)$ является линейным топологическим изоморфизмом. При этом

- 1) $F^2 f = (2\pi)^n \check{f}$ (формула обратного преобразования Фурье);
- 2) $FD^\alpha = M^\alpha F$;
- 3) $FM^\alpha = (-D)^\alpha F$, где $M^\alpha g = y^\alpha g$ – оператор умножения распределения $g \in S'(\mathbf{R}^n)$ на y^α , $y \in \mathbf{R}^n$, $\alpha \in \mathbf{Z}_+^n$.

Доказательство. Остается доказать формулы 1) – 3). По определению $\langle F^2 f, \varphi \rangle = \langle f, F^2 \varphi \rangle = (2\pi)^n \langle f, \check{\varphi} \rangle$, $\varphi \in S(\mathbf{R}^n)$, так как $F^2 \varphi = \check{\varphi}$ в силу формулы обратного преобразования Фурье для функций $\varphi \in S(\mathbf{R}^n)$ (теорема 2.6). Таким образом, равенство 1) доказано. Равенства 2) и 3) следуют из непрерывности операторов F , D^α и M^α , из справедливости равенств 2) и 3) на $S(\mathbf{R}^n)$ и из плотности $S(\mathbf{R}^n)$ в $S'(\mathbf{R}^n)$. \square

Теорема 2.8. (теорема Планшереля). Если $f \in L_2(\mathbf{R}^n)$, то её преобразование Фурье $\tilde{f} = Ff$ также принадлежит $L_2(\mathbf{R}^n)$ и выполняется равенство Парсеваля $\int |\tilde{f}|^2 d\xi = (2\pi)^n \int |f|^2 dx$.

Доказательство. Так как $L_2(\mathbf{R}^n) \subset S'(\mathbf{R}^n)$, то преобразование Фурье $Ff = \tilde{f}$ определено формулой $\langle Ff, \varphi \rangle = \langle f, F\varphi \rangle$, $\varphi \in S(\mathbf{R}^n)$.

Отсюда, в силу неравенства Коши – Буняковского и равенства Парсеваля для функций из $S(\mathbf{R}^n)$ (см. формулу 2) следствие 2.5), имеем $|\langle \tilde{f}, \varphi \rangle| = |\langle f, \tilde{\varphi} \rangle| = \left| \int f \cdot \tilde{\varphi} dx \right| \leq \|f\|_2 \|\tilde{\varphi}\|_2 = (2\pi)^{n/2} \|f\|_2 \|\varphi\|_2$ при всех $\varphi \in S(\mathbf{R}^n)$, где $\|\cdot\|_2$ – норма в $L_2(\mathbf{R}^n)$. Таким образом, линейный функционал $\langle \tilde{f}, \varphi \rangle$ ограничен на $L_2(\mathbf{R}^n)$. По теореме Рисса существует такая функция $\hat{f} \in L_2(\mathbf{R}^n)$, что $\langle \tilde{f}, \varphi \rangle = (\hat{f}, \varphi)$ при всех $\varphi \in S(\mathbf{R}^n)$, где (\cdot, \cdot) – скалярное произведение в $L_2(\mathbf{R}^n)$. Следовательно, распределение \tilde{f} совпадает с распределением, определяемым функцией $\hat{f} \in L_2(\mathbf{R}^n)$. Поэтому можно считать, что $\tilde{f} = \hat{f} \in L_2(\mathbf{R}^n)$.

Докажем теперь равенство Парсеваля. Из неравенства $|\langle \tilde{f}, \varphi \rangle| \leq (2\pi)^{n/2} \|f\|_2 \|\varphi\|_2$ при всех $\varphi \in S(\mathbf{R}^n)$ очевидно следует неравенство $\|\tilde{f}\|_2 \leq (2\pi)^{n/2} \|f\|_2$ для всех $f \in L_2(\mathbf{R}^n)$. Применяя это неравенство два раза, получим $(2\pi)^n \|f\|_2 = \|F^2 f\|_2 \leq (2\pi)^{n/2} \|Ff\|_2 \leq (2\pi)^n \|f\|_2$ (первое равенство следует из равенства $F^2 f = (2\pi)^n \check{f}$ – см. формулу 1) теоремы 2.6). Отсюда $\|Ff\|_2 = (2\pi)^{n/2} \|f\|_2$. \square

Утверждение 2.7. Пусть $f \in E'(\mathbf{R}^n)$. Тогда $\tilde{f} \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, $\tilde{f}(\xi) = \langle f, e^{-ix \cdot \xi} \rangle$ и существует такое число $N > 0$, что

$$\left| D_\xi^\alpha \tilde{f}(\xi) \right| \leq C_\alpha \langle \xi \rangle^N \quad \text{при всех } \xi \in \mathbf{R}^n \quad (2.28)$$

для любого $\alpha \in \mathbf{Z}_+^n$ (C_α – постоянная, зависящая только от α).

Доказательство. Так как $f \in E'(\mathbf{R}^n)$, то существуют такие числа $N \in \mathbf{N}$, $C > 0$ и компакт $K \subset\subset \mathbf{R}^n$, что

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\beta| \leq N} \max_{x \in K} |\partial^\beta \varphi(x)|, \quad \varphi \in E(\mathbf{R}^n). \quad (2.29)$$

Обозначим $g(\xi) = \langle f(x), e^{-ix \cdot \xi} \rangle$, где $\xi \in \mathbf{R}^n$. Заметим, что $e^{-ix \cdot \xi}$ является бесконечно дифференцируемой функцией от $\xi \in \mathbf{R}^n$ со значениями в $E(\mathbf{R}_x^n)$. Отсюда следует, что $g(\xi) \in C^\infty(\mathbf{R}_\xi^n)$ и $D_\xi^\alpha g(\xi) = \langle f, (-x)^\alpha e^{-ix \cdot \xi} \rangle$ при всех $\alpha \in \mathbf{Z}_+^n$.

Используя теперь оценку (2.29) при $\varphi(x) = (-x)^\alpha e^{-ix \cdot \xi}$, получим оценку вида (2.28) для функции $g(\xi)$.

Проверим теперь, что $\tilde{f}(\xi) = g(\xi)$ при всех $\xi \in \mathbf{R}^n$, т.е. $\langle f, \tilde{\varphi} \rangle = \langle g, \varphi \rangle$ при всех $\varphi \in S(\mathbf{R}^n)$. Заметим, что интеграл $\int e^{-ix \cdot \xi} \varphi(\xi) d\xi$ сходится в топологии $E(\mathbf{R}_x^n)$, т.е. равномерно по $x \in K \subset\subset \mathbf{R}^n$ сходится этот интеграл и интегралы, полученные из него взятием производной D_x^γ при любом $\gamma \in \mathbf{Z}_+^n$. Отсюда, в силу включения $f \in E'(\mathbf{R}^n)$, имеет место равенство

$$\langle f(x), \int e^{-ix \cdot \xi} \varphi(\xi) d\xi \rangle = \int \langle f(x), e^{-ix \cdot \xi} \rangle \varphi(\xi) d\xi, \quad (2.30)$$

что и требовалось доказать. \square

Заметим, что утверждение 2.7 является следствием теоремы Винера–Пэли.

Теорема 2.9. (Винера – Пэли). Целая (т.е. аналитическая в C^n) функция $g(\zeta)$ является преобразованием Фурье распределения $f \in D'(\mathbf{R}^n)$, но-

ситель которого лежит в шаре $B_A = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| \leq A\}$, тогда и только тогда, когда $|g(\zeta)| \leq C \langle \zeta \rangle^N e^{A|\operatorname{Im}\zeta|}$ при всех $\zeta \in \mathbf{C}^n$ с некоторыми постоянными C и N . Целая функция $g(\zeta)$ является преобразованием Фурье функции $f \in C_0^\infty(B_A)$ тогда и только тогда, когда для любого $N \in \mathbf{N}$ существует такое число C_N , что $|g(\zeta)| \leq C_N \langle \zeta \rangle^{-N} e^{A|\operatorname{Im}\zeta|}$ при всех $\zeta \in \mathbf{C}^n$.

Доказательство см., например, в [32, с. 34].

Утверждение 2.8. Пусть $f \in E'(\mathbf{R}^n)$, $g \in S'(\mathbf{R}^n)$. Тогда:

$$F(f * g) = F(f)F(g). \quad (2.31)$$

Доказательство. В силу утверждения 2.7 $F(f) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ и для $F(f)$ выполняется оценка вида (2.28). Следовательно, правая часть равенства (2.31) имеет смысл и является распределением из $S'(\mathbf{R}^n)$. Проверим, что $f * g \in S'(\mathbf{R}^n)$, а значит, и левая часть равенства (2.31) имеет смысл. Если $\varphi \in S(\mathbf{R}^n)$, то $\langle f(y), \varphi(x+y) \rangle \in S(\mathbf{R}_x^n)$, так как $\varphi(x+y)$ является бесконечно дифференцируемой функцией от y со значениями в $S(\mathbf{R}_x^n)$, а для распределения f выполняется оценка вида (2.29). Поэтому при $\varphi \in S(\mathbf{R}^n)$ корректна формула $\langle f * g, \varphi \rangle = \langle g(x), \langle f(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle$, определяющая распределение $f * g \in S'(\mathbf{R}^n)$.

Докажем теперь равенство (2.31). Если $\varphi \in S(\mathbf{R}^n)$, то в силу равенства (2.30) имеем

$$\begin{aligned} \langle F(f * g), \varphi \rangle &= \langle f * g, F\varphi \rangle = \langle g(x), \langle f(y), F\varphi(x+y) \rangle \rangle = \\ &= \langle g(x), \langle f(y), \int e^{-i(x+y)\cdot\xi} \varphi(\xi) d\xi \rangle \rangle = \langle g(x), \int \langle f(y), e^{-iy\cdot\xi} \rangle e^{-ix\cdot\xi} \varphi(\xi) d\xi \rangle = \\ &= \langle g(x), \int \tilde{f}(\xi) e^{-ix\cdot\xi} \varphi(\xi) d\xi \rangle = \langle \tilde{g}(\xi), \tilde{f}(\xi) \varphi(\xi) \rangle = \langle \tilde{f}(\xi) \tilde{g}(\xi), \varphi(\xi) \rangle = \\ &= \langle F(f)F(g), \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, равенство (2.31) доказано. \square

Примеры.

2.9. Найдём преобразование Фурье производной от δ -функции $D^\alpha \delta$, $\alpha \in \mathbf{Z}_+^n$. В силу теоремы 2.7 $FD^\alpha \delta = M^\alpha F\delta$, т.е. $\overline{D^\alpha \delta(\xi)} = \xi^\alpha \tilde{\delta}(\xi)$. По определению

$$\langle F\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, F\varphi \rangle = \langle \delta(x), \int e^{-ix \cdot \xi} \varphi(\xi) d\xi \rangle = \int \varphi(\xi) d\xi = \langle 1, \varphi \rangle,$$

$\varphi \in S(\mathbf{R}^n)$. Отсюда получаем, что $\overline{D^\alpha \delta(\xi)} = \xi^\alpha$, $\alpha \in \mathbf{Z}_+^n$.

2.10. Найдём преобразование Фурье распределения $\delta_S \in E'(\mathbf{R}^3)$, где $S = S_R = \{x \in \mathbf{R}^3 : |x| = R\}$, $R > 0$ (δ_S – простой слой на сфере S в \mathbf{R}^3 – см. пример 2.8). По утверждению 2.7 имеют место включение $\tilde{\delta}_S = F\delta_S \in C^\infty(\mathbf{R}^3)$ и равенство $\tilde{\delta}_S(\xi) = \langle \delta_S(x), e^{-ix \cdot \xi} \rangle$. Вычислим последнее выражение. По определению $\langle \delta_S(x), e^{-ix \cdot \xi} \rangle = \int_{S_R} e^{-ix \cdot \xi} dS_x$. В интеграле сделаем замену переменных вида $x = Ax'$, где A – такой поворот системы координат x , что ось x_3' направлена вдоль вектора ξ . Тогда

$$\begin{aligned} \int_{S_R} e^{-ix \cdot \xi} dS_x &= \int_{S_R} e^{-iR|\xi|x_3'} dS_{x'} = \\ &= R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\psi e^{-iR|\xi|\sin\psi} \cos\psi d\psi = 4\pi R \frac{\sin R|\xi|}{|\xi|}. \end{aligned}$$

2.5. ЧАСТИЧНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

В дальнейшем, при изучении общих краевых задач для эллиптических уравнений, нам потребуются частичное преобразование Фурье функций и распределений, заданных в полупространстве $\mathbf{R}_+^n = \{x = (x', x_n) \in \mathbf{R}^n : x_n > 0\}$.

В данном пункте кратко излагаются соответствующие определения и утверждения.

Обозначим через $\bar{\mathbf{R}}_+^n$ замыкание полупространства \mathbf{R}_+^n и положим

$\mathring{S}(\bar{\mathbf{R}}_+^n) = \{\varphi \in S(\mathbf{R}^n) : \text{supp } \varphi \subset \bar{\mathbf{R}}_+^n\}$. Очевидно, что $\mathring{S}(\bar{\mathbf{R}}_+^n)$ является замкнутым подпространством в пространстве $S(\mathbf{R}^n)$, если в $\mathring{S}(\bar{\mathbf{R}}_+^n)$ ввести топологию, индуцированную топологией $S(\mathbf{R}^n)$.

Утверждение 2.9. Множество $C_0^\infty(\mathbf{R}_+^n)$ плотно в пространстве $\mathring{S}(\bar{\mathbf{R}}_+^n)$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}_+^n)$ и $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(x', x_n - \varepsilon)$, где $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$, $\varepsilon > 0$. Тогда $\varphi_\varepsilon \in \mathring{S}(\bar{\mathbf{R}}_+^n)$ и $\text{supp } \varphi_\varepsilon \subset \{x = (x', x_n) \in \mathbf{R}^n : x_n \geq \varepsilon\}$. При этом, как легко проверить, $\varphi_\varepsilon \rightarrow \varphi$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$ в смысле топологии $\mathring{S}(\bar{\mathbf{R}}_+^n)$.

Используем теперь срезающую функцию $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}_+^n)$, для которой $\chi(x) = 1$ при $|x| \leq 1$. Положим $\varphi_{\varepsilon, \delta}(x) = \varphi_\varepsilon(x) \chi(\delta x)$, где $\delta > 0$. Тогда $\varphi_{\varepsilon, \delta}(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}_+^n)$ и $\varphi_{\varepsilon, \delta} \rightarrow \varphi_\varepsilon$ в пространстве $\mathring{S}(\bar{\mathbf{R}}_+^n)$ при $\delta \rightarrow 0+$, так как $\varphi_\varepsilon(x) - \varphi_{\varepsilon, \delta}(x) = \varphi_\varepsilon(x)(1 - \chi(\delta x)) = 0$ при $|x| < 1/\delta$.

Таким образом, произвольную функцию $\varphi \in \mathring{S}(\bar{\mathbf{R}}_+^n)$ с любой точностью можно приблизить в топологии $\mathring{S}(\bar{\mathbf{R}}_+^n)$ функциями из семейства $\varphi_{\varepsilon, \delta}$.

Определение 2.12. Линейные непрерывные функционалы на топологическом пространстве $\mathring{S}(\bar{\mathbf{R}}_+^n)$ называются медленно растущими распределениями в полупространстве \mathbf{R}_+^n . Множество всех таких распределений обозначается через $S'(\bar{\mathbf{R}}_+^n)$.

Замечание 2.7. Из утверждения 2.9 следует, что любое распределение из $S'(\bar{\mathbf{R}}_+^n)$ однозначно определяется своим сужением на $C_0^\infty(\mathbf{R}_+^n)$. Указанное сужение, как легко проверить, является элементом пространства $D'(\mathbf{R}_+^n)$. Таким образом, можно отождествить любое распределение из

$S'(\bar{\mathbf{R}}_+^n)$ с распределением из $D'(\mathbf{R}_+^n)$ и считать $S'(\bar{\mathbf{R}}_+^n)$ подмножеством пространства $D'(\mathbf{R}_+^n)$.

Определение 2.13. Частичным преобразованием Фурье функция $\varphi \in \mathring{S}(\bar{\mathbf{R}}_+^n)$ определяется формулой

$$F_n \varphi(\xi', x_n) = \tilde{\varphi}_n(\xi', x_n) = \int e^{-i\xi' \cdot x'} \varphi(x', x_n) dx' \quad (2.32)$$

где $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$, $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \in \mathbf{R}^{n-1}$, $x' \cdot \xi' = \sum_{j=1}^{n-1} x_j \xi_j$.

Утверждение 2.10. Отображение F_n пространства $\mathring{S}(\bar{\mathbf{R}}_+^n)$, определенное формулой (2.32), является топологическим изоморфизмом на себя. При этом справедлива формула обратного частичного преобразования Фурье

$$\varphi(x', x_n) = (2\pi)^{1-n} \int e^{ix' \cdot \xi'} \tilde{\varphi}_n(\xi', x_n) d\xi', \quad \varphi \in \mathring{S}(\bar{\mathbf{R}}_+^n). \quad (2.33)$$

Кроме того, частичное преобразование Фурье от $D_j \varphi$ равно $\xi_j \tilde{\varphi}_n$, если $j < n$, и равно $D_n \tilde{\varphi}_n$, если $j = n$. Частичное преобразование Фурье от $x_j \varphi$ равно $-D_j \tilde{\varphi}_n$ при $j < n$ и равно $x_n \tilde{\varphi}_n$ при $j = n$.

Доказательство является легкой модификацией доказательства теоремы 2.6 (задача 2.19). \square

Определение 2.12. Частичное преобразование Фурье \tilde{f}_n распределения $f \in S'(\bar{\mathbf{R}}_+^n)$ определяется формулой $\langle \tilde{f}_n, \varphi \rangle = \langle f, \tilde{\varphi}_n \rangle$, $\varphi \in \mathring{S}(\bar{\mathbf{R}}_+^n)$.

Замечание 2.7. Формулу (2.30) обратного частичного преобразования Фурье и свойства преобразования F_n , указанные в утверждении 2.10, легко перенести на распределения из $S'(\bar{\mathbf{R}}_+^n)$ по аналогии с тем, как это было сделано для распределений из $S'(\mathbf{R}^n)$.

Кроме того, в силу теоремы Хана – Банаха, пространство $S'(\bar{\mathbf{R}}_+^n)$ совпадает с множеством ограничений на \mathbf{R}_+^n распределений из $S'(\mathbf{R}^n)$.

Обозначим еще через $S(\bar{\mathbf{R}}_+^n)$ множество всех ограничений на \mathbf{R}_+^n функцию из пространства $S(\mathbf{R}^n)$. Легко проверяется, что преобразование F_n является топологическим изоморфизмом пространства $S(\bar{\mathbf{R}}_+^n)$ на себя (задача 2.20).

ЗАДАЧИ

2.1. Пусть $\varphi \in S(\mathbf{R}^n)$. Выяснить, есть среди последовательностей:

1) $\frac{1}{k}\varphi(x)$; 2) $\frac{1}{k}\varphi(kx)$; 3) $\frac{1}{k}\varphi(\frac{x}{k})$, сходящиеся в $S(\mathbf{R}^n)$ при $k \rightarrow \infty$.

2.2. Пусть $\varphi \in S(\mathbf{R}^n)$, а $P(x)$ – полином от $x \in \mathbf{R}^n$, доказать, что $P\varphi \in S(\mathbf{R}^n)$.

2.3. Доказать, что функционал $P\frac{1}{x}$, определенный по формуле (2.4), линейный и непрерывный на $D(\mathbf{R})$.

2.4. Доказать, что $\delta(x-k) \rightarrow 0$ в $D'(\mathbf{R})$ при $k \rightarrow \infty$.

2.5. Доказать, что: 1) $e^x \in D'(\mathbf{R}) \setminus S'(\mathbf{R})$; 2) $e^x \sin e^x \in S'(\mathbf{R})$.

2.6. Вычислить пределы в $D'(\mathbf{R})$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$:

1) $\frac{\varepsilon}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)}$; 2) $\frac{1}{x} \sin \frac{x}{\varepsilon}$. *Ответы.* 1) $\delta(x)$; 2) $\pi\delta(x)$.

2.7. Найти обобщенные производные распределений из $D'(\mathbf{R})$:

1) $\theta(x)$; 2) $\theta^{(m)}(x-x_0)$, $m \in \mathbf{N}$; 3) $x \operatorname{sgn} x$; 4) $|x| \sin x$.

2.8. Найти общие решения в $D'(\mathbf{R})$ уравнений

1) $xy' = 1$; 2) $x^2y' = 0$; 3) $(x+1)y' = 0$.

2.9. Доказать замечание 2.1.

2.10. Проверить справедливость замечания 2.2.

2.11. Доказать, что функционалы $\rho\delta_\Gamma$ и $\frac{\partial}{\partial \nu}(\rho\delta_\Gamma)$, определенные в примере

2.8, содержатся в $D'(\mathbf{R}^n)$, а в случае компактности Γ в $E'(\mathbf{R}^n)$.

- 2.12. Доказать, что для потенциалов простого и двойного слоев v и w (см. пример 2.8) выполняются включения $v|_{\mathbf{R}^n \setminus \Gamma} \in C^\infty(\mathbf{R}^n \setminus \Gamma)$, $w|_{\mathbf{R}^n \setminus \Gamma} \in C^\infty(\mathbf{R}^n \setminus \Gamma)$ и при $x \in \mathbf{R}^n \setminus \Gamma$ верны формулы (2.19).
- 2.13. Пусть $\omega_h(x) = h^{-n} \omega(x/h)$, где $\omega(x)$ – ядро усреднения (см. определение 2.7). Доказать, что $\theta(R-|x|)$; 2) e^{ix^2} ; 3) e^{-x^2} при $h \rightarrow 0+$ в $S'(\mathbf{R}^n)$, $E'(\mathbf{R}^n)$ и $E'(\Omega)$, если $0 \in \Omega$.
- 2.14. Провести подробно доказательства следствия 2.3.
- 2.15. Доказать, что:
1) $\delta^{(m)}(x-a) * f(x) = f^{(m)}(x-a)$; 2) $\theta(x) * \theta(x) = x\theta(x)$.
- 2.16. Вычислить преобразование Фурье следующих функций из $S'(\mathbf{R}^n)$:
1) $\theta(R-|x|)$; 2) e^{ix^2} ; 3) e^{-x^2} .
- 2.17. Доказать, что преобразование Фурье от распределения $P \frac{1}{x}$ равно $i\pi \operatorname{sgn} \xi$.
- 2.18. Проверить равенство $F[\delta(x) \cdot 1(y)] = (2\pi)^m 1(\xi) \delta(\eta)$.
- 2.19. Доказать утверждение 2.10.
- 2.20. Пусть $F_n : S(\bar{\mathbf{R}}_+^n) \rightarrow S(\bar{\mathbf{R}}_+^n)$ – частичное преобразование Фурье (см. п. 2.5). Доказать, что $F F_n$ – топологический изоморфизм.

ГЛАВА 3. ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА

3.1. Определение и простейшие свойства пространств Соболева

Определение 3.1. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$, Ω – область из \mathbb{R}^n . Тогда множество комплекснозначных функций $f \in L_p(\Omega)$, имеющих на Ω все

обобщенные производные $\partial^\alpha f \in L_p(\Omega)$, где $|\alpha| \leq k$, обозначается символом $W_p^k(\Omega)$ и называется *пространством Соболева*.

Пример 3.1. При $n = 1$, $\Omega = (a, b)$, $-\infty < a < b < +\infty$, пространство $W_p^k((a, b))$ состоит из всех функций на (a, b) , $(k-1)$ -е классические производные которых существуют и являются непрерывными функциями на $[a, b]$, а классические производные k -го порядка существуют п.в. на $[a, b]$ и принадлежат пространству $L_p(a, b)$ (задача 1.1).

Теорема 3.1. Множество $W_p^k(\Omega)$ является сепарабельным банаховым пространством с нормой

$$\|v\|_{k,p} = \|v\|_{W_p^k(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq k} |\partial^\alpha v|^p dx \right)^{1/p} \quad (3.1)$$

при любых $k \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$, а при $p > 1$ – и рефлексивным банаховым пространством.

Доказательство. Очевидно, что $W_p^k(\Omega)$ является линейным пространством, а функционал (3.1) является нормой на нем. Полнота нормированного пространства с нормой (1.1) доказана, например, в [24], теорема 3.1.

Заметим далее, что $W_p^k(\Omega)$ непрерывно вложено в $L_p^M(\Omega)$ по формуле

$v \rightarrow (v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^k v}{\partial x_n^k})$, здесь вектор $(v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^k v}{\partial x_n^k})$ состоит из всех производных

$\partial^\alpha v$, $|\alpha| \leq k$, взятых в некотором фиксированном порядке, $M = C_{n+k}^k$ – размерность этого вектора (задача 3.2). Так как $L_p^M(\Omega)$ является рефлексивным при $p > 1$ и сепарабельным банаховым пространством при $p \geq 1$ (как прямая сумма рефлексивных и сепарабельных банаховых пространств $L_p(\Omega)$ – задача 3.3), то $W_p^k(\Omega)$ также является рефлексивным при $p > 1$ и сепарабельным при $p \geq 1$ банаховым пространством (задача 3.4). \square

Следствие 3.1. Пространство $W_2^k(\Omega)$ является сепарабельным гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(v, w)_{k,2} = (v, w)_{W_2^k(\Omega)} = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq k} \partial^\alpha v \cdot \overline{\partial^\alpha w} dx. \quad (3.2)$$

Доказательство. Формула (3.2) очевидно определяет скалярное произведение на $W_2^k(\Omega)$. Поэтому данное утверждение является частным случаем теоремы 1.1 при $p = 2$. \square

Определение 3.2. Пространством $\overset{\circ}{W}_p^k(\Omega)$, где $k \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$, называется замыкание подмножества $C_0^\infty(\Omega)$ в банаховом пространстве $W_p^k(\Omega)$.

Замечание 3.1. Очевидно, что $\overset{\circ}{W}_p^k(\Omega)$ является сепарабельным при $p \geq 1$ и рефлексивным при $p > 1$ банаховым пространством, а при $p = 2$ – сепарабельным гильбертовым пространством со скалярным произведением (3.2) (задача 3.5).

Пример 3.2. При $n = 1$, $\Omega = (a, b)$, $-\infty < a < b < +\infty$, пространство $\overset{\circ}{W}_p^k((a, b))$ состоит из функций $v \in W_p^k((a, b))$, удовлетворяющих условиям

$$v(a) = \dots = v^{(k-1)}(a) = v(b) = \dots = v^{(k-1)}(b) = 0$$

(производные здесь односторонние) (задача 3.1).

Замечание 3.2. Свойства функций из пространств $\overset{\circ}{W}_p^k(\Omega)$ и $W_p^k(\Omega)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, существенно зависят от n . В частности, при $n \geq 2$ не всякая функ-

ция $v \in W_p^1(\Omega)$ будет непрерывной на Ω (задачи 3.6, 3.7). Тем не менее при $k > n/p$ имеется вложение $W_p^k(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$, где Ω – ограниченная область с достаточно гладкой границей. Это и другие утверждения подробно приводятся ниже.

Для большей простоты изложения всюду дальше по умолчанию будем считать область Ω *ограниченной*. Многие свойства пространств Соболева и их подпространств для ограниченных областей обобщаются и на случаи неограниченных областей. Но есть и свойства, которые не обобщаются (например, теорема Реллиха – Кондрашова – теорема 3.3 ниже).

Наиболее элементарные свойства пространств $W_p^k(\Omega)$ сформулированы в следующем утверждении.

Утверждение 3.1.

1. Если $\Omega' \subset \Omega$, где Ω' и Ω – области в \mathbf{R}^n , то $W_p^k(\Omega) \subset W_p^k(\Omega')$.
2. Если $\varphi \in C^k(\bar{\Omega})$, $v \in W_p^k(\Omega)$, то $\varphi v \in W_p^k(\Omega)$ и обобщенная производная $\partial^\alpha(\varphi v)$, $|\alpha| \leq k$, вычисляется по классическим правилам дифференцирования произведения, в частности:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi v) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} v + \varphi \frac{\partial v}{\partial x_j}, \text{ где } j = 1, \dots, n.$$

3. Если $v \in W_p^k(\Omega)$, v_h – усреднение функции v (см., например, [24], п. 1.3), то для любой области $\Omega' \subset \subset \Omega$ $\|v - v_h\|_{W_p^k(\Omega')} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0+$. Если дополнительно функция v *финитна* в области Ω (т. е. существует такая подобласть $\Omega' \subset \subset \Omega$, что $v(x) = 0$ п.в. в $\Omega \setminus \Omega'$), то $\|v - v_h\|_{W_p^k(\Omega)} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0+$.

4. Если финитная в Ω функция $v \in W_p^k(\Omega)$, $\Omega \subset \tilde{\Omega}$, где $\tilde{\Omega}$ – область в \mathbf{R}^n ,

$$\tilde{v}(x) = \begin{cases} v(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \tilde{\Omega} \setminus \Omega \end{cases}, \text{ то } \tilde{v} \in \overset{\circ}{W}_p^k(\tilde{\Omega}).$$

5. Пусть $y = y(x)$ ($y_j = y_j(x_1, \dots, x_n)$, $j = 1, \dots, n$) взаимно однозначное отображение области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ на область $\Psi \subset \mathbf{R}^n$, а $x = x(y)$ ($x_j = x_j(y_1, \dots, y_n)$, $j = 1, \dots, n$) –

соответствующее обратное отображение. Пусть, далее, при всех $j=1, \dots, n$ имеют место включения $y_j(x) \in C^k(\bar{\Omega})$, $x_j(y) \in C^k(\bar{\Psi})$. Тогда сложная функция $v(x) = w(y(x))$, где $w(y)$ – функция, определенная на Ψ , принадлежит $W_p^k(\Omega)$ в том и только в том случае, когда $w(y) \in W_p^k(\Psi)$.

В этом случае обобщенные производные $\partial^\alpha v$, где $|\alpha| \leq k$ вычисляются по классическим правилам дифференцирования сложной функции. В частности,

$$\frac{\partial v(x)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial w(y(x))}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial y_j(x)}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Кроме того, существуют такие постоянные C_1 и C_2 , зависящие от функций $y_j(x)$, $j = 1, \dots, n$, но не зависящие от w , что выполняются неравенства

$$\|v\|_{W_p^k(\Omega)} \leq C_1 \|w\|_{W_p^k(\Psi)}, \quad \|w\|_{W_p^k(\Psi)} \leq C_2 \|v\|_{W_p^k(\Omega)}.$$

Доказательство является простой модификацией на случай пространства $W_p^k(\Omega)$ доказательства предложения 3.1 из [24], являющегося частным случаем данного утверждения при $p = 2$ (задача 1.8). \square

3.2. НЕПРЕРЫВНЫЕ ВЛОЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ $\mathring{W}_p^k(\Omega)$

Всюду дальше будем обозначать *непрерывное вложение* банахова пространства X в банахово пространство Y (т. е. инъективное линейное непрерывное отображение X в Y) через $X \subset Y$.

Теорема 3.2 (о вложении пространства $\mathring{W}_p^1(\Omega)$).

Если $1 \leq p < n$, то $\mathring{W}_p^1(\Omega) \subset L_{np/(n-p)}(\Omega)$, а если $p > n$, то $\mathring{W}_p^1(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$.

Более того, существует такая постоянная $C = C(n, p)$, что для любой функции $v \in \mathring{W}_p^1(\Omega)$ выполняются неравенства

- 1) $\|v\|_{np/(n-p)} \leq C \|\nabla v\|_p$ при $1 \leq p < n$;
 2) $\operatorname{ess\,sup}_\Omega |v| \leq C |\Omega|^{1/n-1/p} \|\nabla v\|_p$ при $p > n$.

(3.3)

Доказательство. Оценку (3.3), 1) докажем сначала при $p=1$, $v \in C_0^\infty(\Omega)$.

Для этого используем следующую лемму.

Лемма 3.1. (обобщенное неравенство Гёльдера).

Пусть $v_j \in L_{p_j}(\Omega)$, $p_j > 1$, $j = 1, \dots, m$, $p_1^{-1} + \dots + p_m^{-1} = 1$, тогда

$$\int_\Omega |v_1 \dots v_m| dx \leq \|v_1\|_{p_1} \dots \|v_m\|_{p_m} \quad (3.4)$$

Доказательство следует из случая $m=2$ по индукции (задача 1.9). \square

Для любой функции $v \in C_0^\infty(\Omega) \subset C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ и для любого $i=1, \dots, n$ очевидно

выполняются неравенства $|v(x)| \leq \int_{-\infty}^{x_i} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| dx_i \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| dx_i$ при всех $x \in \Omega$. Отсюда

$$|v(x)|^n \leq \prod_{i=1}^n \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| dx_i \right) \text{ и } |v(x)|^{n/(n-1)} \leq \left(\prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| dx_i \right)^{1/(n-1)}.$$

Последнее неравенство проинтегрируем по x_1 и после этого применим лемму 1.1 при $p_1 = \dots = p_{n-1} = n-1$. Тогда получим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |v(x)|^{n/(n-1)} dx_1 &\leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial v}{\partial x_1} \right| dx_1 \right)^{1/(n-1)} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=2}^n \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| dx_i \right)^{1/(n-1)} dx_1 \leq \\ &\leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial v}{\partial x_1} \right| dx_1 \right)^{1/(n-1)} \cdot \prod_{i=2}^n \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| dx_1 dx_i \right)^{1/(n-1)}. \end{aligned}$$

Далее, полученное неравенство последовательно проинтегрируем по x_2, x_3, \dots, x_n , причем после каждого интегрирования применим обобщенное неравенство Гёльдера (3.4) с показателями $p_1 = \dots = p_{n-1} = n-1$. После этого получим неравенство

$$\|v\|_{n/(n-1)} = \left(\int_\Omega |v|^{n/(n-1)} dx \right)^{n-1} \leq \left(\prod_{i=1}^n \int_\Omega \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| dx \right)^{1/n}. \quad (3.5)$$

Так как функция $\ln t$ является выпуклой вверх, то $(1/n)\sum_{i=1}^n \ln a_i \leq \ln((\sum_{i=1}^n a_i)/n)$

для любых $a_i > 0, i=1, \dots, n$. Отсюда $\ln(\prod_{i=1}^n a_i)^{1/n} \leq \ln((1/n)\sum_{i=1}^n a_i)$, а значит

$(\prod_{i=1}^n a_i)^{1/n} \leq (1/n)\sum_{i=1}^n a_i$. Следовательно,

$$(\prod_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| dx)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| dx \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \|\nabla v\|_1$$

(в последнем неравенстве использовано неравенство $\sum_{i=1}^n |a_i| \leq \sqrt{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n |a_i|^2}$). Таким образом, неравенство (3.3) доказано при $p=1, v \in C_0^\infty(\Omega)$.

Для доказательства этого неравенства при $1 < p < n, v \in C_0^\infty(\Omega)$, подставим в доказанное при $p=1, C=1/\sqrt{n}$ неравенство (3.3) вместо v функцию $|v|^\gamma$, где γ будет подобрано ниже. Таким образом, с помощью неравенства Гельдера получим оценки (см. задачу 3.10)

$$\| |v|^\gamma \|_{n/(n-1)} \leq \frac{\gamma}{\sqrt{n}} \int_{\Omega} |v|^{\gamma-1} |\nabla v| dx \leq \frac{\gamma}{\sqrt{n}} \| |v|^{\gamma-1} \|_q \|\nabla v\|_p, \quad (3.6)$$

где $q^{-1} = 1 - p^{-1}$.

При $p < n$ выберем число γ так, чтобы $\gamma n/(n-1) = (\gamma-1)q$, т.е. $\gamma = (n-1)p/(n-p)$. Тогда $(\int_{\Omega} |v|^{\gamma n/(n-1)} dx)^{(n-1)/n} \leq \frac{\gamma}{\sqrt{n}} (\int_{\Omega} |v|^{\gamma n/(n-1)} dx)^{1/q} \|\nabla v\|_p$,

$$(\int_{\Omega} |v|^{\gamma n/(n-1)} dx)^{(n-1)/n-1/q} \leq \frac{\gamma}{\sqrt{n}} \|\nabla v\|_p.$$

Но $\frac{n-1}{n} - \frac{1}{q} = \frac{n-p}{np}$, $\frac{\gamma n}{n-1} = \frac{np}{n-p}$, следовательно, $(\int_{\Omega} |v|^{np/(n-p)} dx)^{(n-p)/pn} \leq \frac{\gamma}{\sqrt{n}} \|\nabla v\|_p$,

т. е. $\|v\|_{np/(n-p)} \leq (\gamma/\sqrt{n}) \|\nabla v\|_p$.

Для доказательства неравенства (3.3) в случае $p > n, v \in C_0^\infty(\Omega)$ применим следующую лемму.

Лемма 3.2. Пусть Ω – ограниченная область в \mathbf{R}^n . Тогда $v \in L_\infty(\Omega)$ в том и только в том случае, когда $v \in L_p(\Omega)$ при всех $p \geq 1$ и существует предел $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|v\|_{L_p(\Omega)}$. При этом $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|v\|_{L_p(\Omega)} = \text{ess sup}_\Omega |v| = \|v\|_{L_\infty(\Omega)}$.

Доказательство. Пусть $v \in L_\infty(\Omega)$, следовательно, $v \in L_p(\Omega)$ при всех $p \geq 1$. Докажем, что тогда существует $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|v\|_p$ ($\|v\|_p = \|v\|_{L_p(\Omega)}$).

Очевидно, что $\|v\|_p \leq |\Omega|^{1/p} \|v\|_\infty$ при всех $p \geq 1$. С другой стороны, в силу определения $\|v\|_\infty$ для любого $\varepsilon > 0$ существует такое измеримое множество Ω' , что $\Omega' \subset \Omega$, $|\Omega'| > 0$ и $\|v\|_\infty - \varepsilon \leq v(x)$ при всех $x \in \Omega'$. Следовательно, $(\|v\|_\infty - \varepsilon) |\Omega'|^{1/p} \leq \|v\|_p$ при всех $p \geq 1$. Таким образом, при всех $p \geq 1$ $(\|v\|_\infty - \varepsilon) |\Omega'|^{1/p} \leq \|v\|_p \leq |\Omega|^{1/p} \|v\|_\infty$. Отсюда $\|v\|_\infty - \varepsilon \leq \liminf_{p \rightarrow +\infty} \|v\|_p \leq \overline{\lim}_{p \rightarrow +\infty} \|v\|_p \leq \|v\|_\infty$.

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то $\|v\|_\infty \leq \liminf_{p \rightarrow +\infty} \|v\|_p$, а значит существует $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|v\|_p = \|v\|_\infty$.

Докажем теперь, что из включений $v \in L_p(\Omega)$ при всех $p \geq 1$ и существования (конечного) предела $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|v\|_p$ следует включение $v \in L_\infty(\Omega)$ и равенство $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|v\|_p = \|v\|_\infty$. Предположим, что $v \notin L_\infty(\Omega)$. Тогда, очевидно, для любого $R > 0$ существует такое измеримое множество $\tilde{\Omega}$, что $\tilde{\Omega} \subset \Omega$, $|\tilde{\Omega}| > 0$ и $|v(x)| \geq R$ при всех $x \in \tilde{\Omega}$. Следовательно, для любого $p \geq 1$ $\|v\|_p \geq R |\tilde{\Omega}|^{1/p}$, а значит $\liminf_{p \rightarrow +\infty} \|v\|_p \geq R$ для любого $R > 0$. Таким образом, предел $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|v\|_p$ не является конечным, а это противоречит условию. \square

Окончание доказательства теоремы 3.2. Определим (при $p > n$, $v \in C_0^\infty(\Omega)$, $v \neq \text{const}$) вспомогательную функцию $\tilde{v} = \sqrt{n} |v| / \|\nabla v\|_p$ и предположим пока, что $|\Omega| = 1$. Тогда из неравенства (1.6) получим, что

$\|\tilde{v}^\gamma\|_{n'} \leq \gamma \|\tilde{v}^{\gamma-1}\|_q$, где $n' = n/(n-1)$, $q^{-1} = 1 - p^{-1}$. Отсюда,

$$\|\tilde{v}\|_{n'} \leq \gamma^{1/\gamma} \|\tilde{v}\|_{q(\gamma-1)}^{1-1/\gamma} \leq \gamma^{1/\gamma} \|\tilde{v}\|_{q\gamma}^{1-1/\gamma}, \text{ так как } |\Omega| = 1$$

Теперь в качестве γ возьмем δ^k , $k = 1, 2, \dots$, где $\delta = n'/q > 1$. Следовательно,

$$\|\tilde{v}\|_{n'\delta^k} \leq \delta^{k\delta^{-k}} \|\tilde{v}\|_{n'\delta^{k-1}}^{1-\delta^{-k}}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.7)$$

(так как $\delta^k q = \delta^{k-1} \delta q = \delta^{k-1} q n' / q = n' \delta^{k-1}$).

Из этой оценки при $k = 1$ и из доказанной при $p = 1$ оценки (1.3) при $p = 1$ для функции \tilde{v} получаем

$$\|\tilde{v}\|_{n'\delta} \leq \delta^{\delta-1} \|\tilde{v}\|_{n'}^{1-\delta^{-1}} \leq \delta^{\delta-1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \|\nabla \tilde{v}\|_1 \right)^{1-\delta^{-1}} - \delta^{\delta-1} \quad (3.8)$$

$$\text{(так как } |\nabla \tilde{v}| = \frac{\sqrt{n}}{\|\nabla v\|_1} |\nabla |v|| = \frac{\sqrt{n}}{\|\nabla v\|_1} |\nabla v \cdot \text{sgn } v| = \frac{\sqrt{n} |\nabla v|}{\|\nabla v\|_1},$$

т. е. $\|\nabla \tilde{v}\|_1 = \frac{\sqrt{n}}{\|\nabla v\|_1} \|\nabla v\|_1 = \sqrt{n}$). Применяя далее оценку (3.7) при $k = 2$ и ис-

пользуя неравенство (3.8), получаем, что

$$\|\tilde{v}\|_{n'\delta^2} \leq \delta^{2\delta-2} \|\tilde{v}\|_{n'\delta}^{1-\delta^{-1}} \leq \delta^{2\delta-2} \cdot (\delta^{\delta-1})^{1-\delta^{-1}} \leq \delta^{2\delta-2} \cdot \delta^{\delta-1} = \delta^{\delta-1+2\delta-2}$$

(так как $1 - \delta^{-1} > 0$ и $\delta^{\delta-1} > 1$).

Таким же образом получим оценки $\|\tilde{v}\|_{n'\delta^k} \leq \delta^{\sum_{m=1}^k m\delta^{-m}}$ при всех $k = 1, 2, \dots$. Отсюда

$$\|\tilde{v}\|_{n'\delta^k} \leq \delta^{\sum_{m=1}^{\infty} m\delta^{-m}} = \chi \text{ при всех } k = 1, 2, \dots \quad (3.9)$$

(ряд $\sum_{m=1}^{\infty} m\delta^{-m}$ очевидно сходится, так как $\delta > 1$).

Лемма 3.3. Пусть $v \in L_{\tilde{p}}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \tilde{p}$. Тогда $|\Omega|^{-1/p} \|v\|_p \leq |\Omega|^{-1/\tilde{p}} \|v\|_{\tilde{p}}$.

Доказательство. При $\tilde{p} = p$ утверждение леммы тривиально. Пусть $\tilde{p} > p$. Обозначим тогда $p_1 = \tilde{p}/p > 1$, $q_1 = p_1/(p_1 - 1)$. Тогда с помощью неравенства Гёльдера получаем

$$\begin{aligned} \|v\|_p^p &= \int_{\Omega} |v|^p dx \leq \left(\int_{\Omega} (|v|^p)^{p_1} dx \right)^{1/p_1} \cdot \left(\int_{\Omega} dx \right)^{1/q_1} = \\ &= \left(\int_{\Omega} |v|^{\tilde{p}} dx \right)^{1/p_1} \cdot |\Omega|^{1/q_1} = \left[\left(\int_{\Omega} |v|^{\tilde{p}} dx \right)^{1/\tilde{p}} \right]^{\tilde{p}/p_1} \cdot |\Omega|^{1/q_1} = \|v\|_{\tilde{p}}^p |\Omega|^{1/q_1}. \end{aligned}$$

Отсюда $\|v\|_p \leq \|v\|_{\tilde{p}} |\Omega|^{1/pq_1} = \|v\|_{\tilde{p}} |\Omega|^{1/p-1/\tilde{p}}$, так как

$$1/pq_1 = (p-1)/pp_1 = (\tilde{p}-p)/p\tilde{p} = 1/p - 1/\tilde{p}. \quad \square$$

Из леммы 3.3 и неравенств (3.9) непосредственно следует, что функция $\varphi(p) \equiv \|\tilde{v}\|_p$ при $p \geq 1$ является неубывающей ($|\Omega|=1$) и ограниченной сверху.

Следовательно, существует $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|\tilde{v}\|_p \leq \chi$, а значит, по лемме 3.2 $\sup_{\Omega} \tilde{v} \leq \chi$.

Отсюда $\sup_{\Omega} |v| \leq (\chi/\sqrt{n}) \|\nabla v\|_p$, т. е. неравенство (3.3) при $p > n$, $v \in C_0^\infty(\Omega)$ и $|\Omega|=1$ доказано.

Случай произвольной ограниченной области Ω (и $p > n$) легко сводится к случаю $|\Omega|=1$ заменой независимых переменных x вида $x = \psi(\tilde{x})$, где $x_i = \psi_i(\tilde{x}) = |\Omega|^{1/n} \tilde{x}_i$, $i=1, \dots, n$, $\tilde{x} \in \tilde{\Omega}$, $x \in \Omega$. Тогда $|\tilde{\Omega}|=1$ и

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \Omega} |v(x)| &= \sup_{x \in \tilde{\Omega}} |v(\psi(\tilde{x}))| \leq (\chi/\sqrt{n}) \left(\int_{\tilde{\Omega}} |\nabla_{\tilde{x}} v(\psi(\tilde{x}))|^p d\tilde{x} \right)^{1/p} = \\ &= (\chi/\sqrt{n}) |\Omega|^{1/n-1/p} \left(\int_{\Omega} |\nabla_x v(x)|^p dx \right)^{1/p} = (\chi/\sqrt{n}) |\Omega|^{1/n-1/p} \|\nabla v\|_{L_p(\Omega)}. \end{aligned}$$

Итак, мы доказали оценки (3.3) для любых функций из $C_0^\infty(\Omega)$. Доказательство этих оценок для произвольных функций $v \in \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega)$ легко получить с помощью предельных соотношений. Точнее, пусть последовательность $v_m \subset C_0^\infty(\Omega)$ и $v_m \rightarrow v$ в $\overset{\circ}{W}_p^1(\Omega)$ при $m \rightarrow \infty$. Применим оценки (3.3) к функции $v_m - v_k$.

При $1 \leq p < n$ получим $\|v_m - v_k\|_{np/(n-p)} \leq C \|\nabla(v_m - v_k)\|_p \rightarrow 0$ при $m, k \rightarrow \infty$. Следовательно, существует предел в $L_{np/(n-p)}(\Omega)$ последовательности v_m , равный \tilde{v} . Но из сходимости в $L_{np/(n-p)}(\Omega)$ следует сходимость в $L_p(\Omega)$ (так как Ω – ог-

раниченная область и $p < np/(n-p)$). Отсюда получаем, что $v_m \rightarrow \tilde{v}$ при $m \rightarrow \infty$ в $L_p(\Omega)$, а значит, $\tilde{v} = v$ и $v \in L_{np/(n-p)}(\Omega)$. Таким образом, получаем, что $v_m \rightarrow v$ при $m \rightarrow \infty$ в $L_{np/(n-p)}(\Omega)$ и $\|v_m\|_{np/(n-p)} \rightarrow \|v\|_{np/(n-p)}$ при $m \rightarrow \infty$. Кроме того, имеем $\lim_{m \rightarrow \infty} \|\nabla v_m\|_p = \|\nabla v\|_p$ и $\|v_m\|_{np/(n-p)} \leq C \|\nabla v_m\|_p$ при всех $m = 1, 2, \dots$. Отсюда, переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$ в последнем неравенстве, получаем неравенство $\|v\|_{np/(n-p)} \leq C \|\nabla v\|_p$.

При $p > n$ имеем $\max_{x \in \Omega} |v_m(x) - v_k(x)| = \sup_{\Omega} |v_m(x) - v_k(x)| \leq C_1 \|\nabla(v_m - v_k)\|_p \rightarrow 0$

при $m, k \rightarrow \infty$. Следовательно, в $C(\bar{\Omega})$ существует предел последовательности v_m , равный \tilde{v} . Так как из сходимости в $C(\bar{\Omega})$ следует сходимость в $L_p(\Omega)$, то $v_m \rightarrow \tilde{v}$ в $L_p(\Omega)$ и $v = \tilde{v} \in C(\bar{\Omega})$. Таким образом, $v_m \rightarrow v$ в $C(\bar{\Omega})$, $\|v_m\|_{C(\bar{\Omega})} \rightarrow \|v\|_{C(\bar{\Omega})}$, $\|v_m\|_{C(\bar{\Omega})} = \sup_{\Omega} |v_m| \leq C |\Omega|^{1/n-1/p} \|\nabla v_m\|_p$ при всех $m = 1, 2, \dots$

Переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$ в последнем неравенстве, получаем неравенство. \square

Следствие 3.2. Для любого $k \in \mathbf{N}$ имеет место одно из следующих вложений пространств

- 1) $\overset{\circ}{W}_p^k(\Omega) \subset L_{np/(n-kp)}(\Omega)$, если $kp < n$;
- 2) $\overset{\circ}{W}_p^k(\Omega) \subset C^m(\bar{\Omega})$, если $kp > n + pm$, $m \in \mathbf{Z}_+$.

Доказательство. Докажем сначала вложение 1) при $k = 2$ ($2p < n$).

Пусть $v \in \overset{\circ}{W}_p^2(\Omega)$. В этом случае $v \in \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega)$ и $\frac{\partial v}{\partial x_j} \in \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega)$ при всех $j = 1, \dots, n$ (задача 3.11). Следовательно, по теореме 3.2 $v \in W_{p_1}^1(\Omega)$, где $p_1 = np/(n-p)$. Докажем далее включение $v \in \overset{\circ}{W}_{p_1}^1(\Omega)$. Пусть $v_m \in C_0^\infty(\Omega)$ и $v_m \rightarrow v$ в $\overset{\circ}{W}_p^2(\Omega)$ при $m \rightarrow \infty$. Тогда в силу первого неравенства (3.3)

$$\|v - v_m\|_{p_1} \leq C \|\nabla(v - v_m)\|_p \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow \infty,$$

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial x_j} - \frac{\partial v_m}{\partial x_j} \right\| \leq C \left\| \nabla \left(\frac{\partial v}{\partial x_j} - \frac{\partial v_m}{\partial x_j} \right) \right\|_p \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow \infty$$

для всех $j=1, \dots, n$. Таким образом, $v_m \rightarrow v$ в $W_{p_1}^1(\Omega)$, а значит $v \in \overset{\circ}{W}_{p_1}^1(\Omega)$.

Так как $p_1 < n$, то по неравенству (3.3) $\|v\|_{np_1/(n-p_1)} \leq C \|\nabla v\|_{p_1}$, т.е. $\|v\|_{np/(n-2p)} \leq C \|\nabla v\|_{p_1}$ ($(np_1/(n-p_1) = np/(n-2p))$) и $v \in L_{np/(n-p)}$.

Поскольку $\frac{\partial v}{\partial x_j} \in \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega)$, то $\left\| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\|_p \leq C \left\| \nabla \left(\frac{\partial v}{\partial x_j} \right) \right\|_p$ при всех $j=1, \dots, n$. Таким об-

разом, $\|v\|_{np/(n-2p)} \leq C_1 \sum_{i,j=1}^n \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_p$ при всех $v \in \overset{\circ}{W}_p^2(\Omega)$, где постоянная C_1 не за-

висит от функции v . Следовательно, вложение $\overset{\circ}{W}_p^k(\Omega) \subset L_{np/(n-kp)}(\Omega)$ при $k=2$ доказано.

В случае $k \geq 3$, повторяя те же рассуждения, что и при $k=2$, получим вложение $\overset{\circ}{W}_p^k(\Omega) \subset L_{np/(n-kp)}(\Omega)$, а также оценку

$$\|v\|_{np/(n-kp)} \leq C_2 \sum_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha v\|_p \quad \text{при всех } v \in \overset{\circ}{W}_p^k(\Omega), \quad (3.10)$$

где постоянная C_2 не зависит от функции v .

Вложение 2) при $m=0$ и $kp > n$, т.е. вложение $\overset{\circ}{W}_p^k(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega})$ при $kp > n$, доказывается аналогично вложению 2) в теореме 1.2. При этом, аналогично доказательству теоремы 3.2, используется оценка вида (3.10) и лемма 1.2 (задача 3.12).

В случае $m \in \mathbb{N}$ и $kp > n + pm$ получаем, что $(k-m)p > n$. Но тогда $\partial^\alpha v \in \overset{\circ}{W}_p^{k-m}(\Omega)$ при $|\alpha| \leq m$ и из предыдущего случая ($m=0$) следует вложение $\overset{\circ}{W}_p^{k-m}(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega})$. А отсюда следует и вложение $\overset{\circ}{W}_p^k(\Omega) \subset C^m(\bar{\Omega})$ (задача 3.13). \square

Замечание 3.3. При $kp = n$ имеет место непрерывное вложение $\overset{\circ}{W}_p^k(\Omega) \subset L_r(\Omega)$ при любых $k \in \mathbb{N}$ и $1 \leq r < \infty$ (см., например, [17], стр. 77).

Замечание 3.4. Теорема 3.2, следствие 3.1 и результат замечания 3.3 являются частными случаями так называемой *теоремы вложения Соболева*, а неравенства вида (3.3) называют *неравенствами Соболева*.

Следствие 3.3. Для любых $p \geq 1$, $|\beta| \leq k$ выполняется оценка

$$\|\partial^\beta v\|_p \leq C \left(\int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=k} |\partial^\alpha v|^p dx \right)^{1/p} \text{ при всех } v \in \overset{\circ}{W}_p^k(\Omega), \quad (3.11)$$

где постоянная C не зависит от v .

Доказательство. При $k=1$ и $p < n$ оценка (3.11) является очевидным следствием оценки (3.3). При $k > 1$ и $kp < n$ оценка (3.11) непосредственно следует из оценки (3.10), а при $kp > n$ из оценки, соответствующей оценке (3.3) при $p > n$. Доказательство в случаях $kp = n$ можно найти, например, в [26], § 4.6. \square

Замечание 3.5. Неравенство (3.11) называют *неравенством Фридрихса*.

Напомним, что две нормы $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|'$ в нормированном пространстве X называются *эквивалентными*, если существуют такие постоянные C_1 и C_2 , что $\|x\| \leq C_1 \|x\|'$, $\|x\|' \leq C_2 \|x\|$ при всех $x \in X$.

Следствие 3.4. Функционал $\|v\|_{\overset{\circ}{W}_p^k(\Omega)}' = \left(\int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=k} |\partial^\alpha v|^p dx \right)^{1/p}$ определяет на $\overset{\circ}{W}_p^k(\Omega)$ норму, эквивалентную норме $\|\cdot\|_{\overset{\circ}{W}_p^k(\Omega)}$.

Доказательство этого утверждения сразу следует из неравенства Фридрихса (следствие 3.2). \square

Следствие 3.5. При любых $k, m \in \mathbb{Z}_+$ таких, что $k - m > 0$, $k - m \geq n \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r} \right) > 0$, где $p \geq 1, r \geq 1$, имеет место непрерывное вложение

$$\overset{\circ}{W}_p^k(\Omega) \subset \overset{\circ}{W}_r^m(\Omega). \quad (3.12)$$

Доказательство. При $m=0$ это утверждение очевидным образом вытекает из следствия 3.1 и замечания 3.3. В этом случае вложение эквивалентно оценке

$$\|v\|_r \leq C \left(\sum_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha v\|_p^p \right)^{1/p} \text{ при всех } v \in \mathring{W}_p^k(\Omega). \quad (3.13)$$

При $m \geq 1$ $\partial^\beta v \in \mathring{W}_p^{\bar{k}}(\Omega)$ при всех $v \in \mathring{W}_p^k(\Omega)$, $|\beta| \leq m$, где $\bar{k} = k - m \geq n(1/p - 1/r)$.

Применяя к функциям $\partial^\beta v, |\beta| \leq m$ оценку (3.13), получим

$$\|\partial^\beta v\|_r \leq C \left(\sum_{\substack{|\alpha|=\bar{k}, \\ |\beta| \leq m}} \|\partial^{\alpha+\beta} v\|_p^p \right)^{1/p} \leq C \left(\sum_{|\gamma| \leq k} \|\partial^\gamma v\|_p^p \right)^{1/p} \leq C_1 \|v\|_{\mathring{W}_p^k(\Omega)} \text{ при всех } v \in \mathring{W}_p^k(\Omega). \quad \square$$

3.3. КОМПАКТНЫЕ ВЛОЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ $\mathring{W}_p^k(\Omega)$

Следующий результат относится к *компактным вложениям* пространств $\mathring{W}_p^k(\Omega)$. Напомним, что банахово пространство X называется *компактно вложенным* в банахово пространство Y (будем это обозначать через $X \subset\subset Y$), если X непрерывно вложено в Y и оператор вложения компактен (т. е. образ ограниченного множества в X является предкомпактным в Y).

Теорема 3.3 (теорема Реллиха – Кондрашова). При любых $k \in \mathbf{N}$, $p \geq 1$ имеют место следующие компактные вложения:

- 1) $\mathring{W}_p^k(\Omega) \subset\subset L_q(\Omega)$, если $kp < n$, $1 \leq q < np/(n - kp)$;
- 2) $\mathring{W}_p^k(\Omega) \subset\subset C^m(\bar{\Omega})$, если $m \in \mathbf{Z}_+$, $m < k - n/p$.

Доказательство. Пусть сначала $k=1$, $p < n$. В этом случае докажем вложение $\mathring{W}_p^k(\Omega) \subset\subset L_q(\Omega)$ при любом $q < np/(n - p)$ (в частности, при $q = p < np/(n - p)$).

Сначала рассмотрим случай $q=1$. Пусть K – ограниченное множество в $W_p^1(\Omega)$. Без ограничения общности можно считать, что $K \subset C_0^\infty(\Omega)$ и $\|v\|_{1,p} \leq 1$ для всех $v \in K$, где $\|v\|_{k,p} = \|v\|_{W_p^k(\Omega)}$.

Для достаточно малых $h > 0$ определим множество $K_h = \{v_h : v \in K\}$ из усреднений v_h функций $v \in K$. Докажем, что множество K_h является предкомпактным в $L_1(\Omega)$ (при фиксированном $h > 0$).

По определению для любой функции $v \in L_1(\Omega)$ имеем

$$v_h(x) = \int_{\Omega} \rho_h(x-y)v(y)dy = h^{-n} \int_{\Omega} \gamma\left(\frac{x-y}{h}\right)v(y)dy, \text{ где } \gamma \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n), \gamma(x) \geq 0 \text{ при } x \in \mathbf{R}^n$$

$$\text{supp } \gamma \subseteq \{x \in \mathbf{R}^n : |x| \leq 1\}, \int_{\mathbf{R}^n} \gamma(x)dx = 1. \text{ Отсюда для любой функции } v \in K \text{ при}$$

всех $x \in \bar{\Omega}$ имеем

$$|v_h(x)| = h^{-n} \left| \int_{\Omega} \gamma\left(\frac{x-y}{h}\right)v(y)dy \right| \leq h^{-n} \cdot \max_{\Omega} \gamma \cdot \|v\|_1,$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_j} v_h(x) \right| = h^{-n-1} \left| \int_{\Omega} \frac{\partial \gamma((x-y)/h)}{\partial x_j} v(y)dy \right| \leq h^{-n-1} \max_{\Omega} \left| \frac{\partial \gamma}{\partial x_j} \right| \cdot \|v\|_1,$$

где $j = 1, \dots, n$.

Из этих оценок следует равномерная ограниченность и равностепенная непрерывность подмножества K_h в $C^0(\bar{\Omega})$. Следовательно, по теореме Арцеля множество K_h предкомпактно в $C^0(\bar{\Omega})$, а значит, K_h предкомпактно и в $L_1(\Omega)$.

Далее, для любой функции $v \in K$ выполняются следующие соотношения:

$$|v(x) - v_h(x)| = \left| v(x) - h^{-n} \int_{\Omega} \gamma((x-y)/h)v(y)dy \right| =$$

$$= \left| v(x) - \int_{|z| \leq 1} \gamma(z)v(x-hz)dz \right| = \left| \int_{|z| \leq 1} \gamma(z)[v(x) - v(x-hz)]dz \right| \leq$$

$$\leq \int_{|z| \leq 1} \gamma(z)|v(x) - v(x-hz)|dz.$$

Так как $v(x) - v(x - hz) = h \int_0^1 \sum_{i=1}^n z_i v_{x_i}(x - (1-t)hz) dt$ (эта формула следует из

формулы $\varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t) dt$, где $\varphi(t) = v(x + hz(t-1))$), то

$$\begin{aligned} |v(x) - v_h(x)| &\leq h \int_{|z| \leq 1} \gamma(z) dz \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^n z_i v_{x_i}(x - (1-t)hz) \right| dt \leq \\ &\leq h \int_{|z| < 1} \gamma(z) dz \int_0^1 |\nabla v(x - (1-t)hz)| dt. \end{aligned}$$

Интегрируя эту оценку по x и применяя теорему Фубини, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |v(x) - v_h(x)| dx &\leq h \int_{\Omega} dx \int_{|z| \leq 1} \gamma(z) dz \int_0^1 |\nabla v(x - (1-t)hz)| dt = \\ &= h \int_{|z| \leq 1} \gamma(z) dz \int_0^1 dt \int_{\Omega} |\nabla v(x - (1-t)hz)| dx \leq \\ &\leq h \int_{|z| \leq 1} \gamma(z) dz \int_0^1 dt \int_{\mathbf{R}^n} |\nabla v(x - (1-t)hz)| dx = \\ &= h \int_{|z| \leq 1} \gamma(z) dz \int_0^1 dt \int_{\mathbf{R}^n} |\nabla v(x)| dx = h \int_{\Omega} |\nabla v(x)| dx \leq Ch |\Omega|^{1-1/p}, \end{aligned}$$

так как

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla v| dx &\leq \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |v_{x_i}| dx \leq \sum_{i=1}^n \left(\int_{\Omega} |v_{x_i}|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_{\Omega} dx \right)^{1-1/p} \leq \\ &\leq C \|v\|_{1,p} \cdot |\Omega|^{1-1/p} \leq C |\Omega|^{1-1/p} \end{aligned}$$

(здесь постоянная C не зависит от v).

Отсюда получаем, что $\|v - v_h\|_{L_1(\Omega)} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0+$ равномерно по $v \in K$. А поскольку при любом $h > 0$ множество K_h предкомпактно в $L_1(\Omega)$, то отсюда следует, что и множество K предкомпактно в $L_1(\Omega)$. Таким образом, доказано вложение $\overset{\circ}{W}_p^1(\Omega) \subset\subset L_1(\Omega)$ при $p < n$.

Лемма 3.4. Пусть $v \in L_r(\Omega)$, $r \geq 1$. Тогда

$$\|v\|_t \leq \|v\|_s^\lambda \|v\|_r^{1-\lambda}, \quad (3.14)$$

если $1 \leq s \leq t \leq r$ и $1/t = \lambda/s + (1-\lambda)/r$ (и, следовательно, $0 \leq \lambda \leq 1$).

Доказательство. Если $s = t$ или $r = t$, то неравенство (3.14) тривиально. Пусть далее $1 \leq s < t < r$. Обозначим тогда $p_1 = (r-s)/(r-t) > 1$, $p_2 = (r-s)/(t-s) > 1$. Следовательно, $1/p_1 + 1/p_2 = 1$, $s/p_1 + r/p_2 = t$ и по неравенству Гёльдера

$$\begin{aligned} \|v\|_t &= \left(\int_{\Omega} |v|^t dx \right)^{1/t} = \left(\int_{\Omega} |v|^{s/p_1} \cdot |v|^{r/p_2} dx \right)^{1/t} \leq \\ &\leq \left[\left(\int_{\Omega} |v|^s dx \right)^{1/p_1} \cdot \left(\int_{\Omega} |v|^r dx \right)^{1/p_2} \right]^{1/t} = \\ &= \left[\left(\int_{\Omega} |v|^s dx \right)^{1/s} \right]^{s/p_1 t} \cdot \left[\left(\int_{\Omega} |v|^r dx \right)^{1/r} \right]^{r/p_2 t} = \|v\|_s^{\lambda} \cdot \|v\|_r^{1-\lambda}, \end{aligned}$$

где $\lambda = s/(p_1 t)$. При этом $1/t = \lambda/s + (1-\lambda)/r$ (и, кроме того, $0 < \lambda < 1$). \square

Докажем теперь при $p < n$ вложение $\overset{\circ}{W}_p^1(\Omega) \subset\subset L_q(\Omega)$ для произвольного q , удовлетворяющего неравенствам $1 < q < np/(n-p)$. Заметим сначала, что из леммы 3.4 и теоремы 3.2 легко получить следующие неравенства:

$$\|v\|_q \leq \|v\|_1^{\lambda} \|v\|_{np/(n-p)}^{1-\lambda} \leq \|v\|_1^{\lambda} (C \|\nabla v\|_p)^{1-\lambda} \quad (3.15)$$

при всех $v \in \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega)$, где $\lambda + (1-\lambda)/(1/p - 1/n) = 1/q$ (и, следовательно, $0 < \lambda < 1$), а постоянная C не зависит от функции $v \in \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega)$. Пусть K – любое ограниченное множество в $\overset{\circ}{W}_p^1(\Omega)$. Тогда по доказанному выше множество K предкомпактно в $L_1(\Omega)$. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная ε -сеть A (относительно нормы в $L_1(\Omega)$) для множества K (без ограничения общности можно считать, что $A \subset K$). Заметим также, что в силу теоремы 3.2 имеет место вложение $K \subset L_{np/(n-p)}(\Omega)$, а значит, и вложение $K \subset L_q(\Omega)$.

Таким образом, для любого $v \in K$ существует $a \in A$ такое, что

$\|v-a\|_q \leq \|v-a\|_1^\lambda (C\|\nabla v-\nabla a\|_p)^{1-\lambda} \leq \varepsilon^\lambda (C(\|\nabla v\|_p + \|\nabla a\|_p))^{1-\lambda} \leq C_1 \varepsilon^\lambda$, где постоянная C_1 не зависит от $v \in K$ и $0 < \lambda < 1$ (здесь использованы (3.15) и ограниченность множества K в $\mathring{W}_p^1(\Omega)$). Отсюда следует существование конечной $\tilde{\varepsilon}$ -сети в $L_q(\Omega)$ для множества K при любом $\tilde{\varepsilon} > 0$. Следовательно, любое ограниченное множество K в $\mathring{W}_p^1(\Omega)$ при $p < n$ является предкомпактным в $L_q(\Omega)$, где $1 \leq q < np/(n-p)$.

Итак, доказано вложение $\mathring{W}_p^k(\Omega) \subset\subset L_p(\Omega)$ при $k \in \mathbf{N}$ и $1 < p < n$, $1 \leq q < np/(n-p)$. Отсюда и из следствия 3.4 при $k \in \mathbf{N}$ имеем вложения $\mathring{W}_p^k(\Omega) \subset \mathring{W}_r^1(\Omega) \subset L_t(\Omega)$, где $r = \frac{np}{n-(k-1)p}$, $1 \leq t < \frac{nr}{n-r} = \frac{np}{n-kp}$.

Таким образом, $\mathring{W}_p^k(\Omega) \subset\subset L_t(\Omega)$ при $1 \leq t < \frac{np}{n-kp}$ и вложение 1) данной теоремы полностью доказано.

Вложение 2) рассматриваемой теоремы при $m \in \mathbf{Z}_+$ и $m+1 < k-n/p$ является очевидным следствием вложений $\mathring{W}_p^k(\Omega) \subset C^{m+1}(\bar{\Omega})$ (следствие 3.4) и $C^{m+1}(\bar{\Omega}) \subset\subset C^m(\bar{\Omega})$ (теорема Арцеля). Это вложение верно и в случае любого $m \in \mathbf{Z}_+$, удовлетворяющего неравенствам $m < k-n/p$. Но доказательство этого утверждения намного сложнее (см., например, [8], разд. 7.10), где использованы оценки некоторых потенциалов). \square

Замечание 3.6. При $kp = n$ имеется компактное вложение $\mathring{W}_p^k(\Omega) \subset\subset L_q(\Omega)$ при любых $k \in \mathbf{N}$ и $1 \leq q < \infty$ (см., например, [17], с. 77). Вложение 2) в теореме 3.3 можно обобщить, если использовать *пространство Гёльдера*. Точнее, имеется вложение $\mathring{W}_p^k(\Omega) \subset\subset C^{m,\delta}(\bar{\Omega})$, где $0 < k-n/p-m < 1$, $0 < \delta < k-n/p-m$, $C^{m,\delta}(\bar{\Omega})$ – соответствующее пространство Гёльдера (см., например, [8], теорема 7.26).

Следствие 3.6. При любых $k \in \mathbf{N}$, $m \in \mathbf{Z}_+$ таких, что $k - m > 0$, $0 < \frac{1}{p} - \frac{k-m}{n} < \frac{1}{q}$, имеет место вложение $\overset{\circ}{W}_p^k(\Omega) \subset \subset \overset{\circ}{W}_q^m(\Omega)$.

Доказательство. Пусть v_l – ограниченная последовательность в $\overset{\circ}{W}_p^k(\Omega)$. Тогда при $|\alpha| \leq m$ $\partial^\alpha v_l$ является ограниченной последовательностью в $\overset{\circ}{W}_p^{k-m}(\Omega)$. Так как по теореме 3.3 $\overset{\circ}{W}_p^{k-m}(\Omega) \subset \subset L_q(\Omega)$, где $1 \leq q < np/(n-(k-m)p)$ (заметим, что условие $0 < 1/p - (k-m)/n$ эквивалентно условию $(k-m)p < n$), то из последовательности $\partial^\alpha v_l \subset L_q(\Omega)$, $|\alpha| \leq m$ можно выбрать фундаментальную в $L_q(\Omega)$ подпоследовательность. Без ограничения общности можно считать, что при любом $|\alpha| \leq m$ последовательность $\partial^\alpha v_l$ является фундаментальной в $L_q(\Omega)$. Таким образом, последовательность v_l является фундаментальной в $\overset{\circ}{W}_q^m(\Omega)$, где $1 \leq q < np/(n-(k-m)p)$, т. е. $1 \leq q$, $1/p - (k-m)/n < 1/q$. \square

3.4. ТЕОРЕМА О ПРОДОЛЖЕНИИ

При некоторых условиях регулярности ограниченной области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ любая функция из пространства Соболева $W_p^k(\Omega)$ может быть продолжена до функции из пространства $W_p^k(\mathbf{R}^n)$. Это утверждение является основным для доказательства плотности множества $C^\infty(\bar{\Omega})$ в пространстве $W_p^k(\Omega)$ и для обобщения на пространства $W_p^k(\Omega)$ доказанных выше утверждений о непрерывных и компактных вложениях пространств $\overset{\circ}{W}_p^1(\Omega)$. Известны различные условия регулярности области Ω , достаточные для построения указанного продолжения. К ним относятся условия классов C^k , $C^{k-1,1}$,

звездности, конуса и другие (см., например, [4], [8], [17], [20]). Мы рассмотрим наиболее сильные из перечисленных условий – условия принадлежности области Ω к классу C^k , позволяющие получить наиболее простые доказательства теоремы о продолжении и ее следствий. Отметим также, что всюду раньше никаких дополнительных условий на ограниченную область Ω не требовалось.

Определение 3.3. Будем говорить, что ограниченная область Ω в \mathbf{R}^n и ее граница $\partial\Omega$ принадлежат классу C^k , где $k \in \mathbf{Z}_+$, если для каждой точки $x_0 \in \partial\Omega$ существует шар $B = B_{x_0} = \{x \in \mathbf{R}^n : |x - x_0| < r_{x_0}\}$ (где $r_{x_0} > 0$) и взаимно однозначное отображение Φ этого шара B на некоторую область $D \subset \mathbf{R}^n$, такие, что:

- 1) $\Phi(B \cap \Omega) \subset \mathbf{R}_+^n = \{x \in \mathbf{R}^n : x_n > 0\}$;
- 2) $\Phi(B \cap \partial\Omega) \subset \partial\mathbf{R}_+^n$;
- 3) $\Phi \in C^k(B)$, $\Phi^{-1} \in C^k(D)$.

Определение 3.4. Продолжением на множество $\Omega' \subseteq \mathbf{R}^n$ функции f , заданной на множестве $\Omega \subset \Omega'$, называется любая функция F , определенная на Ω' и совпадающая с f на Ω .

Очевидно, что нетривиальной является задача о продолжении функции из пространства $C^k(\bar{\Omega})$ при $k \in \mathbf{Z}_+$ или функции из пространства $W_p^k(\Omega)$ при $k \in \mathbf{N}$ функцией, соответственно, из пространства $C^k(\bar{\Omega}')$ или из пространства $W_p^k(\Omega')$, где Ω – подобласть области Ω' .

Всюду дальше в данном разделе Ω – область в \mathbf{R}^n класса C^k , $k \in \mathbf{N}$. В этом случае теоремы о продолжении и о плотности для пространства $W_p^k(\Omega)$ можно доказать, например, по той же схеме, что использована при доказательстве аналогичных теорем для пространства $W_2^k(\Omega)$ в [24], п. 3.2. Для большей независимости изложения приведем здесь эти доказательства с соответствующими модификациями.

Лемма 3.5. Пусть $K^+ = \{x \in \mathbf{R}^n : |x_i| < a, i=1, \dots, n-1; 0 < x_n < a\}$, $K = \{x \in \mathbf{R}^n : |x_i| < a, i=1, \dots, n\}$, где $a > 0$. Тогда для любой функции $f \in C^k(\bar{K}^+)$, где $k \in \mathbf{Z}_+$, существует ее продолжение $F \in C^k(\bar{K})$ и имеют место неравенства

$$\|F\|_{C^k(\bar{K})} \leq C_1 \|f\|_{C^k(\bar{K}^+)}, \|F\|_{W_p^k(\Omega)} \leq C_2 \|f\|_{W_p^k(K^+)}, \quad (3.16)$$

в которых постоянные C_1 и C_2 не зависят от функции f (здесь $p > 1$).

Доказательство. Обозначим $K^- = K \cap \{x \in \mathbf{R}^n : x_n < 0\}$ и положим

$$F(x) = \begin{cases} \sum_{m=1}^{k+1} A_m f(x', -\frac{x_n}{m}), x \in K^-, \\ f(x), x \in \bar{K}^+, \end{cases} \quad (3.17)$$

где $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$, A_1, \dots, A_{k+1} – решение линейной системы уравнений

$$\sum_{m=1}^{k+1} (-1/m)^l A_m = 1, \quad l=0, 1, \dots, k \quad (\text{определитель которой является определителем}$$

Вандермонда и не равен нулю).

Непосредственно проверяется (см. также [12], с. 52), что $F \in C^k(\bar{K})$. Кроме того, из формулы (3.17) следует, что при $x \in K^-$, $|\alpha| \leq k$:

$$\text{а) } |\partial^\alpha F(x)| \leq \sum_{m=1}^{k+1} \frac{|A_m|}{m^{\alpha_n}} \left| \partial^\alpha f(x', -\frac{x_n}{m}) \right| \leq C_1 \sum_{m=1}^{k+1} \left| \partial^\alpha f(x', -\frac{x_n}{m}) \right|,$$

$$\text{б) } |\partial^\alpha F(x)|^p \leq \left(\sum_{m=1}^{k+1} \frac{A_m^q}{m^{q\alpha_n}} \right)^{p-1} \left(\sum_{m=1}^{k+1} \left| \partial^\alpha f(x', -\frac{x_n}{m}) \right|^p \right) \leq C_2 \sum_{m=1}^{k+1} \left| \partial^\alpha f(x', -\frac{x_n}{m}) \right|^p,$$

где $1/p + 1/q = 1$, C_1, C_2 – постоянные, не зависящие от функции f (неравенство б) получено с помощью неравенства Гёльдера).

Из неравенства а) и непосредственно проверяемых равенств

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x^0, \\ x \in K^-}} \partial^\alpha F(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x^0, \\ x \in K^+}} \partial^\alpha f(x), \quad \text{выполняющихся при всех } |\alpha| \leq k \text{ и}$$

$x^0 \in \bar{K} \cap \{x \in \mathbf{R}^n : x_n = 0\}$, следует первое из неравенств (3.16).

Докажем теперь второе из неравенств (3.16). Для этого проинтегрируем неравенство б) по области K^- , откуда получим

$$\begin{aligned} \int_{K^-} |\partial^\alpha F(x)|^p dx &\leq C'_2 \sum_{m=1}^{k+1} \int_{K^-} \left| \partial^\alpha f\left(x', -\frac{x_n}{m}\right) \right|^p dx = \\ &= C'_2 \sum_{m=1}^{k+1} m \int_{K^+ \cap \{x_n < a/m\}} |\partial^\alpha f(x)|^p dx \leq \tilde{C}_2 \int_{K^+} |\partial^\alpha f(x)|^p dx \end{aligned}$$

(постоянная \tilde{C}_2 не зависит от f). Так как $F(x) = f(x)$ при $x \in K^+$, то отсюда

$$\begin{aligned} \int_K |\partial^\alpha F(x)|^p dx &= \int_{K^-} |\partial^\alpha F(x)|^p dx + \int_{K^+} |\partial^\alpha F(x)|^p dx = \\ &= \int_{K^-} |\partial^\alpha F(x)|^p dx + \int_{K^+} |\partial^\alpha f(x)|^p dx \leq (1 + \tilde{C}_2) \int_{K^+} |\partial^\alpha f(x)|^p dx. \end{aligned}$$

Поскольку последняя оценка выполняется при всех $|\alpha| \leq k$ (при этом постоянная \tilde{C}_2 зависит от α), то из нее следует второе из неравенств (3.16). \square

Лемма 3.6. Пусть Π – прямоугольный параллелепипед в \mathbf{R}^n . Тогда множество $C^\infty(\bar{\Pi})$ является всюду плотным в банаховом пространстве $W_p^k(\Omega)$, где $p > 1$, $k \in \mathbf{Z}_+$.

Доказательство. В силу свойства 5 утверждения 3.1 достаточно доказать данное утверждение для параллелепипеда $\Pi = \Pi_a = \{x \in \mathbf{R}^n : |x_i| < a_i, i = 1, \dots, n\}$, где $a = (a_1, \dots, a_n)$, $a_i > 0$ при всех $i = 1, \dots, n$.

Фиксируем любую функцию $f \in W_p^k(\Pi)$ и произвольное число $\varepsilon > 0$. Для доказательства данной леммы достаточно теперь определить такую функцию $\Phi \in C^\infty(\bar{\Pi})$, для которой выполняется неравенство $\|f - \Phi\|_{W_p^k(\Pi)} < \varepsilon$.

Рассмотрим функцию $F_\rho(x) \equiv f\left(\frac{x}{\rho}\right)$, где $\rho > 1$, $x \in \Pi_{\rho a}$. В силу утверждения 3.1 имеют место включения $F_\rho \in W_p^k(\Pi_{\rho a})$ (свойство 5) и $F_\rho \in W_p^k(\Pi_a)$ (свойство 1). Кроме того, можно показать (см. ниже), что $\|F_\rho - f\|_{W_p^k(\Pi)} \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 1+$. Значит, существует такое $\rho_0 > 1$, что $\|F_{\rho_0} - f\|_{W_p^k(\Pi)} < \varepsilon/2$.

Так как $F_\rho \in W_p^k(\Pi_{\rho_0})$, то по свойству 3 утверждения 3.1 выполняется соотношение $\|(F_{\rho_0})_h - F_{\rho_0}\|_{W_p^k(\Pi)} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0+$, где $(F_{\rho_0})_h$ – усреднение функции

F_{ρ_0} . Выбирая теперь такое $h_0 > 0$, что $\|(F_{\rho_0})_{h_0} - F_{\rho_0}\|_{W_p^k(\Pi)} < \varepsilon/2$, получаем

$$\begin{aligned} \|(F_{\rho_0})_{h_0} - f\|_{W_p^k(\Pi)} &= \|(F_{\rho_0})_{h_0} - F_{\rho_0} + F_{\rho_0} - f\|_{W_p^k(\Pi)} \leq \\ &\leq \|(F_{\rho_0})_{h_0} - F_{\rho_0}\|_{W_p^k(\Pi)} + \|F_{\rho_0} - f\|_{W_p^k(\Pi)} < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Так как по свойству усреднений $(F_{\rho_0})_{h_0} \in C^\infty(\mathbf{R}^n) \subset C^\infty(\bar{\Pi})$, то функция $\Phi = (F_{\rho_0})_{h_0}$ и будет искомой.

Таким образом, осталось доказать соотношение $\|F_\rho - f\|_{W_p^k(\Pi)} \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 1+$.

Пусть ε – произвольное положительное число. Так как при любом $|\alpha| \leq k$ имеет место включение $\partial^\alpha f \in L_p(\Pi)$, то (в силу плотности $C_0^\infty(\Pi)$ в $L_p(\Pi)$) существует такая функция $g_\alpha \in C_0^\infty(\Pi)$, что $\|\partial^\alpha f - g_\alpha\|_{L_p(\Pi)} < \varepsilon$. С другой стороны, при $\rho > 1$ имеем

$$\|\partial^\alpha(F_\rho(x)) - g_\alpha(x)\|_{L_p(\Pi)} \leq \left\| \partial^\alpha(F_\rho(x)) - g_\alpha\left(\frac{x}{\rho}\right) \right\|_{L_p(\Pi)} + \left\| g_\alpha\left(\frac{x}{\rho}\right) - g_\alpha(x) \right\|_{L_p(\Pi)}$$

и (используя замену переменных в интеграле)

$$\begin{aligned} \left\| \partial^\alpha(F_\rho(x)) - g_\alpha\left(\frac{x}{\rho}\right) \right\|_{L_p(\Pi_{\rho a})} &= \left\| \frac{1}{\rho^{|\alpha|}} \partial^\alpha f\left(\frac{x}{\rho}\right) - g_\alpha\left(\frac{x}{\rho}\right) \right\|_{L_p(\Pi_{\rho a})} \leq \\ &\leq \left\| \left(1 - \frac{1}{\rho^{|\alpha|}}\right) \partial^\alpha f\left(\frac{x}{\rho}\right) \right\|_{L_p(\Pi_{\rho a})} + \left\| \partial^\alpha f\left(\frac{x}{\rho}\right) - g_\alpha\left(\frac{x}{\rho}\right) \right\|_{L_p(\Pi_{\rho a})} < \\ &< \rho^{n/p} \left(1 - \frac{1}{\rho^{|\alpha|}}\right) \|\partial^\alpha f(x)\|_{L_p(\Pi)} + \rho^{n/p} \varepsilon. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \|\partial^\alpha(F_\rho(x)) - g_\alpha(x)\|_{L_p(\Pi)} &< \rho^{n/p} \left(1 - \frac{1}{\rho^{|\alpha|}}\right) \|\partial^\alpha f(x)\|_{L_p(\Pi)} + \\ &+ \rho^{n/p} \varepsilon + \left\| g_\alpha\left(\frac{x}{\rho}\right) - g_\alpha(x) \right\|_{L_p(\Pi)}. \end{aligned}$$

Следовательно, при любом $|\alpha| \leq k$ имеют место неравенства

$$\begin{aligned} \|\partial^\alpha f - \partial^\alpha F_\rho\|_{L_\rho(\Pi)} &\leq \|\partial^\alpha f - g_\alpha\|_{L_\rho(\Pi)} + \|g_\alpha - \partial^\alpha F\|_{L_\rho(\Pi)} < \\ &< \varepsilon(1 + \rho^{n/p}) + \rho^{n/p} \left(1 - \frac{1}{\rho^{|\alpha|}}\right) \|\partial^\alpha f\|_{L_\rho(\Pi)} + \left\|g_\alpha(x) - g_\alpha\left(\frac{x}{\rho}\right)\right\|_{L_\rho(\Pi)}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Так как $g_\alpha \in C_0^\infty(\Pi) \subset C(\Pi)$, то g_α – равномерно непрерывная функция на компакте $\bar{\Pi}$. Отсюда следует соотношение $\left\|g_\alpha(x) - g_\alpha\left(\frac{x}{\rho}\right)\right\|_{C(\bar{\Pi})} \rightarrow 0$ при

$\rho \rightarrow 1+$, а значит и соотношение $\left\|g_\alpha(x) - g_\alpha\left(\frac{x}{\rho}\right)\right\|_{L_\rho(\Pi)} \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 1+$. Таким обра-

зом, в силу неравенства (3.18) для достаточно близких к единице чисел $\rho > 1$ при всех $|\alpha| \leq k$ выполняется неравенство

$$\|\partial^\alpha f - \partial^\alpha F_\rho\|_{L_\rho(\Pi)} < 3\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 5\varepsilon.$$

Это означает, что $\|f - F_\rho\|_{W_p^k(\Pi)} \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 1+$. \square

Лемма 3.7. Пусть K^+ и K – те же, что и в лемме 3.5, и пусть $f \in W_p^k(K^+)$, где $p > 1$, $k \in \mathbf{Z}_+$. Тогда существует продолжение $F \in W_p^k(K)$ функции f на K и имеет место неравенство $\|F\|_{W_p^k(K)} \leq C\|f\|_{W_p^k(K^+)}$, в котором постоянная C не зависит от f .

Доказательство. По лемме 3.6 существует такая последовательность $f_s \in C^k(\bar{K}^+)$, что $\|f_s - f\|_{W_p^k(K^+)} \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$. При каждом $s \in \mathbf{N}$ обозначим через F_s продолжение функции f_s на область K , определенное в лемме 3.5. Тогда $F_s \in C^k(\bar{K})$ и в силу второго из неравенств (3.16) выполняются соотношения $\|F_s - F_t\|_{W_p^k(K)} \leq C_2\|f_s - f_t\|_{W_p^k(K^+)} \rightarrow 0$ при $s, t \rightarrow \infty$.

Отсюда следует, что последовательность F_s является фундаментальной в пространстве $W_p^k(K)$. Так как пространство $W_p^k(K)$ полное, то существует такая функция $F \in W_p^k(K)$, что $\|F_s - F\|_{W_p^k(K)} \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$. Легко видеть, что

$F(x) = f(x)$ при почти всех $x \in K^+$, а значит, функция F является продолжением функции f на область K .

Так как по лемме 3.5 при $s \in \mathbb{N}$ $\|F_s\|_{W_p^k(K)} \leq C_2 \|f_s\|_{W_p^k(K^+)}$ (постоянная C_2 не зависит от s), то $\|F\|_{W_p^k(K)} = \lim_{s \rightarrow \infty} \|F_s\|_{W_p^k(K)} \leq C_2 \lim_{s \rightarrow \infty} \|f_s\|_{W_p^k(K^+)} = C_2 \|f\|_{W_p^k(K^+)}$. \square

Лемма 3.8 (о разбиении единицы). Пусть M – замкнутое ограниченное подмножество в \mathbb{R}^n и $M \subset \bigcup_{j=1}^N U_j$, где U_j – открытые подмножества в \mathbb{R}^n , $j=1, \dots, N$. Тогда существует разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_j\}$, т. е. существуют такие функции $\varphi_1, \dots, \varphi_N$, для которых выполняются следующие свойства

- 1) $\varphi_j \in C_0^\infty(U_j)$, $j=1, \dots, N$;
- 2) $0 \leq \varphi_j(x) \leq 1$ при всех $x \in U_j$, $j=1, \dots, N$;
- 3) $\sum_{j=1}^N \varphi_j(x) \equiv 1$ при всех $x \in M$.

Эта лемма является стандартной (ее доказательство, см., например, в [24], с. 55).

Теорема 3.4 (о продолжении). Пусть Ω – область в \mathbb{R}^n класса C^k , где $k \in \mathbb{N}$. Тогда при $p > 1$ для любой такой области $\tilde{\Omega}$ в \mathbb{R}^n , что $\Omega \subset\subset \tilde{\Omega}$, существует ограниченный линейный оператор продолжения $E: W_p^k(\Omega) \rightarrow \overset{\circ}{W}_p^k(\tilde{\Omega})$, удовлетворяющий при всех $f \in W_p^k(\Omega)$ условиям

- 1) $Ef = f$ на Ω ;
- 2) $\|Ef\|_{\overset{\circ}{W}_p^k(\tilde{\Omega})} \leq C \|f\|_{W_p^k(\Omega)}$,

где постоянная C не зависит от f .

Доказательство. Определим сначала линейный ограниченный оператор продолжения $E_a: W_p^k(K^+) \rightarrow W_p^k(K)$ с областью определения $W_p^k(K^+)$, где K и K^+ – соответственно прямоугольный параллелепипед и куб, определенные

в лемме 3.5, $2a$ — длина ребра куба K . Для функций $f \in C^k(\bar{K}^+)$ положим $E_a f(x) = F(x)$, где функция $F(x)$ определена по формулам (3.17). Тогда по лемме 3.5 оператор E_a является линейным ограниченным оператором продолжения из пространства $W_p^k(K^+)$ в пространство $W_p^k(K)$ с областью определения $C^k(\bar{K}^+)$, всюду плотной в $W_p^k(K^+)$ (лемма 3.6). Расширение по непрерывности этого оператора и задает требуемый оператор E_a с областью определения $W_p^k(K^+)$ (лемма 3.7).

Так как Ω — ограниченная область класса C^k , то по определению для каждой точки $\xi \in \partial\Omega$ существует шар B_ξ и взаимно однозначное отображение Φ_ξ шара B_ξ на область $D_\xi \subset \mathbf{R}^n$ (см. определение 3.2). Без ограничения общности можно считать, что $B_\xi \subset \tilde{\Omega}$ при всех $\xi \in \partial\Omega$. В этом случае при любом $\xi \in \partial\Omega$ существует такой куб $M_\xi = \{y \in \mathbf{R}^n : |y_i| < a_\xi, i = 1, \dots, n\}$, где $a_\xi > 0$, что $M_\xi \subset\subset D_\xi$. Положим $V_\xi = \Phi_\xi^{-1}(M_\xi)$, если $\xi \in \partial\Omega$. Тогда V_ξ — некоторая окрестность точки $\xi \in \partial\Omega$, а семейство всех этих окрестностей $\{V_\xi\}$ является открытым покрытием границы $\partial\Omega$. Так как Ω — ограниченная область, то $\partial\Omega$ — компакт и, следовательно, существует конечное подпокрытие $\{V_{\xi_j}, j = 1, \dots, N\}$ покрытия $\{V_\xi, \xi \in \partial\Omega\}$. Обозначим $U_j = V_{\xi_j}$, $\psi_j = \Phi_{\xi_j}$, $K_j = M_{\xi_j}$, $a_j = a_{\xi_j}$, $j = 1, \dots, N$. Таким образом, $U_j \subset\subset \tilde{\Omega}$ при всех $j = 1, \dots, N$, $\partial\Omega \subset \bigcup_{j=1}^N U_j$, а ψ_j — взаимно однозначное отображение области U_j на куб K_j , удовлетворяющее условиям:

- 1) $\psi_j(U_j \cap \Omega) = K_j^+ = K_j \cap \mathbf{R}_+^n$;
- 2) $\psi_j(U_j \cap \partial\Omega) = K_j \cap \partial\mathbf{R}_+^n$;
- 3) $\psi_j \in C^k(\bar{U}_j)$, $\psi_j^{-1} \in C^k(\bar{K}_j)$

при любом $j = 1, \dots, N$.

Пусть, далее, U_0 – такая подобласть Ω , что $U_0 \subset\subset \Omega$ и семейство $\{U_j, j=0,1,\dots,N\}$ является покрытием компакта $\bar{\Omega}$. Такую область U_0 легко построить. Для этого рассмотрим множество $P = \bar{\Omega} \cap (\mathbf{R}^n \setminus \bigcup_{j=1}^N U_j)$. Если $P = \emptyset$, то в качестве U_0 возьмем любую фиксированную область U_0 , для которой $U_0 \subset\subset \Omega$. Если $P \neq \emptyset$, то P – замкнутое и ограниченное множество в \mathbf{R}^n , причем $P \subset \Omega$. Так как $P \cap \partial\Omega = \emptyset$, P и $\partial\Omega$ компактны, то существует такое $\delta > 0$, что $|p - q| \geq \delta$, если $p \in P$, $q \in \partial\Omega$. Определяя теперь U_0 как объединение по всем $p \in P$ шаров $\{x \in \mathbf{R}^n : |x - p| < \delta/2\}$, получим нужную область U_0 .

Итак, мы имеем открытое покрытие $\{U_j, j=0,1,\dots,N\}$ компакта $\bar{\Omega}$. Пусть $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_N$ – разбиение единицы, подчиненное этому покрытию (см. лемму 3.8). Тогда, если $f \in W_p^k(\Omega)$, то при $j=1,\dots,N$ на параллелепипеде K_j^+ определена функция $f_0 \psi_j^{-1} \in W_p^k(K_j^+)$ (последнее включение следует из утверждения 3.1, свойства 1) и 5)). Используем теперь определенный выше оператор продолжения E_a , где $a > 0$. Тогда $E_a(f \circ \psi_j^{-1}) \in W_p^k(K_j)$ и, следовательно, $\varphi_j(E_a(f \circ \psi_j^{-1})) \circ \psi_j \in \overset{\circ}{W}_p^k(U_j)$, так как $\text{supp } \varphi_j \subset U_j, j=1,\dots,N$, (см. утверждение 3.1, свойства 2), 4) и 5)).

Таким образом, формула

$$Ef = \varphi_0 f + \sum_{j=1}^n \varphi_j (E_{a_j}(f \circ \psi_j^{-1})) \circ \psi_j \quad (3.19)$$

определяет линейный оператор $E: W_p^k(\Omega) \rightarrow \overset{\circ}{W}_p^k(\tilde{\Omega})$, так как

$\varphi_0 f \in \overset{\circ}{W}_p^k(\Omega) \subset \overset{\circ}{W}_p^k(\tilde{\Omega})$ и $\overset{\circ}{W}_p^k(U_j) \subset \overset{\circ}{W}_p^k(\tilde{\Omega}), j=1,\dots,N$. Используя свойства операторов $E_{a_j}, j=1,\dots,N$ и утверждение 1.1, легко проверить, что $Ef = f$ на области Ω и $\|Ef\|_{\overset{\circ}{W}_p^k(\tilde{\Omega})} \leq C \|f\|_{W_p^k(\Omega)}$, где постоянная C не зависит от функции f (постоянная C зависит от k, N, ψ_j, φ_j и a_j , т. е. от k, Ω и $\tilde{\Omega}$). \square

Замечание 3.7. Из первого неравенства (3.16) в лемме 3.5 легко следует, что формула (3.19) задает также линейный ограниченный оператор продолжения $E|_{C^k(\bar{\Omega})}: C^k(\bar{\Omega}) \rightarrow C_0^k(\tilde{\Omega})$. Еще раз отметим, что имеются аналоги теоремы 3.4 при различных более слабых условиях на область Ω , чем условия класса C^k , а также при $p=1$ (см. ссылки в начале п.3.4).

3.5. ТЕОРЕМЫ О ПЛОТНОСТИ И О ВЛОЖЕНИЯХ ПРОСТРАНСТВ $W_p^k(\Omega)$

Из фундаментального результата о продолжении (теорема 3.4) легко получить следующие теоремы о плотности и о вложениях для пространств $W_p^k(\Omega)$. Эти теоремы являются ключевыми как в самой теории пространств Соболева, так и в ее приложениях.

Теорема 3.5 (о плотности). Пусть Ω – ограниченная область в \mathbf{R}^n класса C^k , где $k \in \mathbf{N}$. Тогда множество $C^\infty(\bar{\Omega})$ всюду плотно в $W_p^k(\Omega)$ при всех $p > 1$.

Доказательство. Пусть $f \in W_p^k(\Omega)$, $F = Ef$, где $E: W_p^k(\Omega) \rightarrow W_p^k(\mathbf{R}^n)$ – оператор продолжения, определенный в теореме 3.4. Тогда $F \in W_p^k(\mathbf{R}^n)$, $F = f$ на Ω и по свойству 3 утверждения 3.1 $\|f - F_h\|_{W_p^k(\Omega)} = \|F - F_h\|_{W_p^k(\mathbf{R}^n)} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0+$, где F_h – усреднение функции F . Так как $F_h \in C^\infty(\mathbf{R}^n) \subset C^\infty(\Omega)$, то теорема доказана. \square

Объединяя результат теоремы 3.4 для случая $k=1$ с предыдущими результатами о вложениях (теоремы 3.2 и 3.3) легко получить соответствующие теоремы вложения для пространств Соболева $W_p^1(\Omega)$, где Ω – область класса C^1 (а не класса C^k). Итерация этих результатов дает следующую общую теорему вложения для пространств $W_p^k(\Omega)$.

Теорема 3.6 (о вложениях). Пусть Ω – область в \mathbf{R}^n класса C^1 , $k \in \mathbf{N}$, $p > 1$. Тогда

1) если $kp < n$, $p^* = np / (n - kp)$, то $W_p^k(\Omega) \subset L_{p^*}(\Omega)$ и $W_p^k(\Omega) \subset\subset L_q(\Omega)$, если $1 < q < p^*$;

2) если $m \in \mathbf{Z}_+$, $m < k - n/p$, то $W_p^k(\Omega) \subset\subset C^m(\bar{\Omega})$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай 1) при $k=1$ ($p < n$). Пусть $f \in W_p^1(\Omega)$ и $\tilde{\Omega}$ – какая-нибудь ограниченная область, для которой выполняется вложение $\Omega \subset\subset \tilde{\Omega}$ (например, $\tilde{\Omega}$ – шар с достаточно большим радиусом). Тогда, применяя теоремы 3.2 и 3.4, а также очевидное вложение $L_t(\tilde{\Omega}) \subset L_t(\Omega)$, $t \geq 1$, получим цепочку отображений $W_p^1(\Omega) \xrightarrow{E}$

$\rightarrow W_p^1(\tilde{\Omega}) \subset L_{p_1}(\tilde{\Omega}) \subset L_{p_1}(\Omega)$, где E – линейный непрерывный оператор продолжения из теоремы 3.4, а $p_1 = np / (n - p)$. Отсюда сразу следует, что композиция всех этих отображений является непрерывным вложением $W_p^1(\Omega) \subset L_{p_1}(\Omega)$.

При $q < p_1$ ($k=1$, $p < n$), используя теорему 3.3, получим цепочку отображений $W_p^1(\Omega) \xrightarrow{E} W_p^1(\tilde{\Omega}) \subset\subset L_{p_1}(\tilde{\Omega}) \subset L_{p_1}(\Omega)$.

Из этой цепочки отображений непосредственно получаем, что их композиция является компактным вложением $W_p^1(\Omega) \subset\subset L_q(\Omega)$.

Таким образом, в случае 1) при $k=1$ данная теорема полностью доказана.

Рассмотрим теперь случай $k > 1$, $kp < n$. Пусть $f \in W_p^k(\Omega)$, тогда $\partial^\alpha f \in W_p^1(\Omega)$ при всех $|\alpha| \leq k-1$. По доказанному выше (при $p < kp < n$) $W_p^1(\Omega) \subset L_{p_1}(\Omega)$, где $p_1 = np / (n - p)$. Следовательно, $f \in W_{p_1}^{k-1}(\Omega)$ и $W_p^k(\Omega) \subset W_{p_1}^{k-1}(\Omega)$. Если $k-1 > 1$, то тем же способом получаем цепочку непрерывных вложений

$$W_p^k(\Omega) \subset W_{p_1}^{k-1}(\Omega) \subset \dots \subset W_{p_{k-1}}^1(\Omega) \subset L_{p_k}(\Omega), \quad (3.20)$$

где $p_j = np_{j-1} / (n - p_{j-1}) = np / (n - pj)$, $j = 1, \dots, k$, $p_0 = p$. Так как $p_k = np / (n - kp) = p^*$, то вложение $W_p^k(\Omega) \subset L_{p^*}(\Omega)$ при $kp < n$ доказано.

В случае $k > 1$, $kp < n$ и $q < p^* = np/(n - kp)$ из (3.20) получаем цепочку вложений $W_p^k(\Omega) \subset W_{p_1}^{k-1}(\Omega) \subset \dots \subset W_{p_{k-1}}^1(\Omega) \subset L_q(\Omega)$, так как $q < np_{k-1}/(n - p_{k-1}) = np/(n - kp)$ и, следовательно, $W_{p_{k-1}}^1 \subset L_q(\Omega)$. Отсюда сразу следует вложение $W_p^k(\Omega) \subset L_q(\Omega)$ при $q < p^*$.

Итак, случай 1) данной теоремы полностью доказан.

Рассмотрим теперь случай 2), т. е. случай $n < kp$. Пусть сначала $k = 1$. Тогда из цепочки отображений

$W_p^1(\Omega) \xrightarrow{E} \overset{\circ}{W}_p^1(\tilde{\Omega}) \subset C^0(\tilde{\Omega}) \subset C^0(\bar{\Omega})$, где E и $\tilde{\Omega}$ – те же, что и выше, сразу получаем требуемое вложение $W_p^1(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega})$

(вложение $\overset{\circ}{W}_p^1(\Omega) \subset C^0(\tilde{\Omega})$ имеет место по теореме 3.2 при $n < p$, а вложение $C^0(\tilde{\Omega}) \subset C^0(\bar{\Omega})$, определяемое как ограничение функции $f \in C^0(\tilde{\Omega})$ до функции $f|_{\bar{\Omega}} \in C^0(\bar{\Omega})$, очевидно).

Пусть теперь $k = 2$, $n < 2p$. Требуется доказать, что $W_p^2(\Omega) \subset C^m(\bar{\Omega})$, где $m \in \mathbf{Z}_+$, $m < 2 - n/p \leq m + 1$. Очевидно, возможны два случая – $m = 0$ или $m = 1$. В случае $m = 0$ $0 < 2 - n/p \leq 1$, т. е. $n < 2p$, $p \leq n$. Если $n < 2p$ и $p < n$ то:

а) $W_p^2(\Omega) \subset W_{p_1}^1(\Omega)$, где $p_1 = np/(n - p)$;

б) $W_{p_1}^1(\Omega) \xrightarrow{E} \overset{\circ}{W}_{p_1}^1(\tilde{\Omega}) \subset C^0(\tilde{\Omega}) \subset C^0(\bar{\Omega})$.

Для доказательства вложения а) рассмотрим любую функцию $f \in W_p^2(\Omega)$. Тогда при $|\alpha| \leq 1$ имеют место включения $\partial^\alpha f \in W_p^1(\Omega)$, а $W_p^1(\Omega) \subset L_{p_1}(\Omega)$, так как $p < n$ (см. выше). Следовательно, $f \in W_{p_1}^1(\Omega)$ и $\|f\|_{W_{p_1}^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{W_p^2(\Omega)}$ с некоторой постоянной C , не зависящей от f . В цепочке отображений б) отображение E определено теоремой 3.4, вложение $\overset{\circ}{W}_{p_1}^1(\tilde{\Omega}) \subset C^0(\tilde{\Omega})$ выполняется в силу теоремы 3.2 (так как $n < 2p$ или $n/p_1 < 1$), а вложение $C^0(\tilde{\Omega}) \subset C^0(\bar{\Omega})$ очевид-

но. Объединяя теперь отображения а) и б), сразу получаем требуемое вложение $W_p^2(\Omega) \subset\subset C^0(\bar{\Omega})$.

Пусть теперь $p=n$ (и $n < 2p$). Для $f \in W_p^2(\Omega)$ при $|\alpha| \leq 1$ имеют место включения $\partial^\alpha f \in W_p^1(\Omega)$ и, кроме того, имеется отображение $W_p^1(\Omega) \xrightarrow{E} \overset{\circ}{W}_p^1(\tilde{\Omega})$. По замечанию 3.6 при $p=n$ выполняется вложение $\overset{\circ}{W}_p^1(\Omega) \subset L_r(\tilde{\Omega})$ при любом $r \geq 1$. Отсюда получаем цепочку отображений

$$W_p^2(\Omega) \subset W_r^1(\Omega) \xrightarrow{E} \overset{\circ}{W}_r^1(\tilde{\Omega}) \subset\subset C^0(\bar{\tilde{\Omega}}) \subset C^0(\bar{\Omega}),$$

если $0 < 1 - n/r$ (см. теорему 3.3). Композиция этих отображений дает требуемое вложение $W_p^2(\Omega) \subset\subset C^0(\bar{\Omega})$.

В случае $m=1$ неравенства $m < 2 - n/p \leq m+1$ эквивалентны неравенству $n < p$. В этом случае $W_p^1(\Omega) \subset\subset C^0(\bar{\Omega})$ (см. выше случай $k=1$, $n < p$). Следовательно, при $f \in W_p^2(\Omega)$ и при $|\alpha| \leq 1$ выполняются соотношения $\partial^\alpha f \in W_p^1(\Omega) \subset\subset C^0(\bar{\Omega})$. Отсюда непосредственно следует, что $f \in C^1(\bar{\Omega})$ и $W_p^2(\Omega) \subset\subset C^1(\bar{\Omega})$.

Аналогичные рассуждения приводят к доказательству случая 2) данной теоремы и при $k \geq 3$. \square

Замечание 3.8. В случае $kp=n$ имеет место вложение $W_p^k(\Omega) \subset\subset L_r(\Omega)$ при любом $r > 1$, если Ω – область класса C^1 . Доказательство этого утверждения сразу следует из цепочки отображений

$$W_p^k(\Omega) \subset W_{p_1}^{k-1}(\Omega) \subset \dots \subset W_{p_{k-1}}^1(\Omega) \xrightarrow{E} \overset{\circ}{W}_{p_{k-1}}^1(\tilde{\Omega}) \subset\subset L_r(\tilde{\Omega}) \subset L_r(\Omega),$$

где $p_j = np/(n - p_{j-1}) = np/(n - (j-1)p)$, $j=1, \dots, k-1$, E и $\tilde{\Omega}$ – те же, что и при доказательстве теоремы 3.6. В этой цепочке первые $k-1$ вложений приведены в (1.20), так как $(k-1)p \leq kp = n$, а вложение $\overset{\circ}{W}_{p_{k-1}}^1(\tilde{\Omega}) \subset\subset L_r(\Omega)$ при $r \geq 1$ следует из замечания 3.6, поскольку $p_{k-1} = np/(n - (k-1)p)$ при $kp = n$.

Следствие 3.7. Пусть Ω – область в \mathbf{R}^n класса C^1 . Тогда имеют место следующие вложения пространств Соболева:

$$1) W_p^k(\Omega) \subset W_q^m(\Omega), \text{ если } \frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - \frac{k-m}{n} > 0;$$

$$2) W_p^k(\Omega) \subset\subset W_q^m(\Omega), \text{ если } \frac{1}{q} > \frac{1}{p} - \frac{k-m}{n} > 0;$$

$$3) W_p^k(\Omega) \subset\subset W_q^m(\Omega), \text{ если } q > 1, \frac{1}{p} = \frac{k-m}{n};$$

$$4) W_p^k(\Omega) \subset\subset C^m(\bar{\Omega}), \text{ если } \frac{n}{p} < k-m.$$

Доказательство. Пусть $j = k - m$. Тогда $pj < n$ и $W_p^k(\Omega) \subset W_{p_j}^{k-j}(\Omega)$, где $p_j = np / (n - pj)$ (см. (1.20)). Так как $k - j = m$ и, очевидно, $W_{p_j}^m(\Omega) \subset W_p^m(\Omega)$ при $p_j \geq q$ (т. е. при $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p_j} = \frac{1}{p} - \frac{k-m}{n}$), то отсюда получаем утверждение 1).

Доказательство утверждения 2) совпадает с доказательством следствия 3.5, если в последнем заменить пространства $\mathring{W}_p^k(\Omega)$ и $\mathring{W}_q^m(\Omega)$ на, соответственно, пространства $W_p^k(\Omega)$ и $W_q^m(\Omega)$, а вместо теоремы 3.3 использовать теорему 3.6.

В случае утверждения 3) доказательство также повторяет доказательство следствия 3.5, где вместо теоремы 3.3 используется замечание 3.6.

Утверждение 4) просто повторяет случай 2) теоремы 3.6. \square

3.6. СЛЕД ФУНКЦИИ

При рассмотрении многих краевых задач математической физики в обобщённой постановке требуется обобщенное понятие граничного значения функции из пространства $W_p^k(\Omega)$, где $k \in \mathbf{N}$, $p > 1$.

Если $f \in C(\bar{\Omega})$, то понятие граничного значения $f|_{\partial\Omega}$ или более общее понятие значения функции f на $(n-1)$ -мерной поверхности S класса C^1 , где

$S \subset \overline{\Omega}$, не вызывает затруднений. В этом случае под значением f на S понимается функция $f|_S$, определённая в каждой точке S и равная в точке $x \in S$ значению $f(x)$.

Функция f , принадлежащая $W_p^1(\Omega)$ или $W_p^k(\Omega)$ ($k \in \mathbf{Z}_+$, $p > 1$), определена на Ω с точностью до множества n -мерной меры нуль. Поэтому значение $f|_S$ не имеет смысла, если понимать его как ограничение функции f на S , определённое поточечно.

Достаточно простой и естественный подход к понятию следа для функций из $W_p^1(\Omega)$ основан на «интегральном» исследовании этих функций. Идея «интегрального» подхода состоит в том, чтобы перенести обычное («поточечное») значение $g|_S$ функций из $C^1(\overline{\Omega})$ на функции из $W_p^1(\Omega)$, используя плотность множества $C^1(\overline{\Omega})$ в пространстве $W_p^1(\Omega)$.

Теорема 3.7. Пусть $f \in W_p^1(\Omega)$, $p > 1$, S — $(n-1)$ -мерная кусочно-гладкая поверхность и выполнено одно из условий: а) $S \subset\subset \Omega$ или б) $S \subset \overline{\Omega}$ и $\partial\Omega \in C^1$. Пусть далее, $\{f_m\}$ — любая последовательность функций из $C^1(\overline{\Omega})$, сходящаяся к функции f в пространстве $W_p^1(\Omega)$. Тогда: 1) последовательность функций $\{f_m|_S\}$ является сходящейся в пространстве $L_p(S)$; 2) предел $\varphi \in L_p(S)$ последовательности $\{f_m|_S\}$ не зависит от выбора последовательности $\{f_m\} \subset C^1(\overline{\Omega})$, аппроксимирующей функцию f в $W_p^1(\Omega)$; 3) выполняется неравенство

$$\|\varphi\|_{L_p(S)} \leq C \|f\|_{W_p^1(\Omega)}, \quad (3.21)$$

где постоянная C не зависит от функции f .

Доказательство. Вначале рассмотрим произвольную функцию f из множества $C_0^1(\overline{\Omega})$ и докажем для неё неравенство

$$\|f|_S\|_{L^p(S)} \leq C \|f\|_{W^1_p(\Omega)}, \quad (3.22)$$

где $f|_S$ - обычное (определяемое поточечно) значение f на S .

Так как S – кусочно-гладкая поверхность и \bar{S} - компакт в \mathbf{R}^n , то существует конечное число N поверхностей S_j , где $j=1, \dots, N$, из которых состоит S . Причём каждая из поверхностей S_j определяется как график некоторой непрерывно дифференцируемой функции.

Рассмотрим одну из этих поверхностей S_j , например поверхность S_1 . Без ограничения общности можно считать (изменяя при необходимости номера независимых переменных x_1, \dots, x_n), что поверхность $S_1 \subset \bar{\Omega}$ определяется как график функции $x_n = \varphi(x')$. Где $x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in D$, $\varphi(x') \in C^1(\bar{D})$, D – однозначная проекция S_1 на плоскость $\{x \in \mathbf{R}^n : x_n = 0\}$.

Поскольку область Ω ограничена, то существует такое число $a > 0$, что $\Omega \subset K = \{x \in \mathbf{R}^n : |x_i| < a, i = 1, \dots, n\}$. Так как $f \in C_0^1(\bar{\Omega}) \subset C_0^1(K)$, то из формулы Ньютона – Лейбница следует равенство

$$f|_{S_1}(x) = f(x', \varphi(x')) = \int_{-a}^{\varphi(x')} \frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n} d\xi_n, \text{ где } x = (x', \varphi(x')), x' \in \bar{D}.$$

Отсюда и из неравенства Гёльдера следуют неравенства

$$\left| f|_{S_1}(x) \right|^2 \leq (\varphi(x') + a) \int_{-a}^{\varphi(x')} \left| \frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n} \right|^p d\xi_n \leq 2a \int_{-a}^a \left| \frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n} \right|^p d\xi_n,$$

выполняющиеся при всех $x = (x', \varphi(x')), x' \in \bar{D}$. Умножая теперь первую и последнюю части этих неравенств на функцию $\sqrt{1 + \varphi_{x_1}^2 + \dots + \varphi_{x_{n-1}}^2}$ и интегрируя по множеству D , получаем неравенство

$$\|f|_{S_1}\|_{L^p(S)}^2 = \int_{S_1} |f|_{S_1}|^2 dS \leq C_1 \|f\|_{H^1(\Omega)}^2. \quad (3.23)$$

Аналогичные неравенства для функций $f|_{S_j}$ ($j=2, \dots, N$) получаются точно так же, как и неравенство (3.23) для функции $f|_{S_1}$. Суммируя теперь все эти неравенства, получаем требуемое неравенство (3.28) для любой функции f из $C_0^1(\overline{\Omega})$.

Неравенство (3.22) выполняется и для всех функций f из $C_0^1(\overline{\Omega})$. Докажем это сначала при условии «б» данной теоремы. Фиксируем какую-либо ограниченную область $\tilde{\Omega}$, удовлетворяющую условию $\Omega \subset\subset \tilde{\Omega}$. Так как по условию «б» имеет место включение $\partial\Omega \in C^1$, то в силу замечания 1.7 существует продолжение функции $f \in C^1(\overline{\Omega})$ до функции $F \in C_0^1(\tilde{\Omega})$, удовлетворяющее неравенству $\|F\|_{W_p^1(\tilde{\Omega})} \leq C_2 \|f\|_{W_p^1(\Omega)}$. Для функции F неравенство (3.22) доказано выше. Отсюда следует неравенство (3.22) и для функции f .

В случае условия «а» данной теоремы существует область Ω с границей класса C^1 , удовлетворяющая условию $S \subset \overline{\Omega}' \subset\subset \Omega$. Таким образом, мы фактически снова пришли к случаю «б».

Пусть теперь $f \in W_p^1(\Omega)$ и $\{f_m\}$ – указанная в условии теоремы последовательность. Так как $f_l - f_m \in C^1(\overline{\Omega})$, где $l, m=1, 2, \dots$, то для функций $f_l - f_m$ выполняется неравенство вида (3.22):

$$\|f_l|_S - f_m|_S\|_{L_p(S)} \leq C \|f_l - f_m\|_{W_p^1(\Omega)}. \quad (3.24)$$

Поскольку последовательность $\{f_m\}$ сходится в $W_p^1(\Omega)$, то она фундаментальна в $W_p^1(\Omega)$. Отсюда следует фундаментальность, а значит и сходимость последовательности $\{f_m|_S\}$ в $L_p(S)$.

Обозначим предел последовательности $\{f_m|_S\}$ в $L_p(S)$ через φ . Покажем, что этот предел не зависит от выбора последовательности $\{f_m\}$, аппроксимирующей функцию f в $W_p^1(\Omega)$. Пусть $\{\tilde{f}_m\}$ – другая последова-

тельность функций, удовлетворяющая условиям $\{\tilde{f}_m\} \subset C^1(\overline{\Omega})$, $\|\tilde{f}_m - f\|_{W_p^1(\Omega)} \rightarrow 0$, при $m \rightarrow \infty$, а $\tilde{\varphi}$ – предел в норме $L_p(S)$ последовательности $\{\tilde{f}_m|_S\}$.

Переходя в неравенстве (3.24) к пределу $L \rightarrow \infty$, получим неравенство $\|\varphi - f_m|_S\|_{L_p(S)} \leq C\|f - f_m\|_{W_p^1(\Omega)}$. Аналогичное неравенство имеет место и для последовательности $\{\tilde{f}_m\}$ $\|\tilde{\varphi} - \tilde{f}_m|_S\|_{L_p(S)} \leq C\|f - \tilde{f}_m\|_{W_p^1(\Omega)}$.

Отсюда и из неравенства треугольника следует, что

$$\begin{aligned} \|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{L_p(S)} &\leq \|\varphi - f_m|_S\|_{L_p(S)} + \|f_m|_S - \tilde{f}_m|_S\|_{L_p(S)} + \|\tilde{f}_m|_S - \tilde{\varphi}\|_{L_p(S)} \leq \\ &\leq C\left(\|f - f_m\|_{W_p^1(\Omega)} + \|f_m - \tilde{f}_m\|_{W_p^1(\Omega)} + \|\tilde{f}_m - f\|_{W_p^1(\Omega)}\right) \end{aligned}$$

(здесь также использовано следующее неравенство вида (3.22)

$$\|f_m|_S - \tilde{f}_m|_S\|_{L_p(S)} \leq C\|f_m - \tilde{f}_m\|_{W_p^1(\Omega)}).$$

Так как правая часть полученного неравенства стремится к нулю при $m \rightarrow \infty$, то функции φ и $\tilde{\varphi}$ совпадают как элементы пространства $L_p(S)$, т.е. $\varphi(x) = \tilde{\varphi}(x)$ для п.в. $x \in S$.

Неравенство (3.21) получается из неравенства $\|f_m|_S\|_{L_2(S)} \leq C\|f\|_{H^1(\Omega)}$ предельным переходом при $m \rightarrow \infty$. \square

Следствие 3.7. Если $f \in C(\overline{\Omega}) \cap W_p^1(\Omega)$, а S – такая же поверхность, как в условии теоремы 3.7, то для п.в. $x \in S$ (в смысле $(n-1)$ -мерной меры Лебега на S) выполняется равенство $f|_S(x) = \varphi(x)$, где $f|_S$ – значение f на S в $C(\overline{\Omega})$ (определенное поточечно), а φ – значение f на S в смысле теоремы 3.7.

Доказательство. Рассмотрим случай «б» условия теоремы 3.7. на поверхность S . Случай «а» легко свести к случаю «б» (см. доказательство теоремы 3.7).

Пусть $F \in C(\Omega^1) \cap W_p^1(\Omega^1)$ – продолжение функции $f \in C(\bar{\Omega}) \cap W_p^1(\Omega)$ на некоторую область $\Omega^1 \supset \supset \Omega$, определяемое теоремой (очевидно верной и при $\partial\Omega \in C^1, g \in C^0(\bar{\Omega})$). Так как для средних F_h имеют место соотношения

$$\|F_h - f\|_{C(\bar{\Omega})} \rightarrow 0 \text{ и } \|F_h - f\|_{W_p^1(\Omega)} \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow +0$$

(см. теорему 2.5), то $F_h|_S(x) \rightarrow f|_S(x)$ при $h \rightarrow +0$ равномерно по $x \in S$ и

$$\|F_h|_S(x) - \varphi\|_{L_p(S)} \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow +0. \text{ Здесь } F_h|_S - \text{ значение функции}$$

$F_h \in C(\bar{\Omega})$ на поверхности S , определённое поточечно. Из двух последних соотношений непосредственно следует, что $f|_S(x) = \varphi(x)$ при п.в. $x \in S$. \square

Таким образом, получаем следующее определение *следа* функций из пространств Соболева, обобщающее обычное определение значения непрерывной функции на поверхности.

Определение 3.5. Пусть $f \in W_p^1(\Omega)$, $p > 1$, S – $(n-1)$ -мерная кусочно гладкая поверхность и выполнено одно из двух условий: а) $S \subset \subset \Omega$ или б) $S \subset \bar{\Omega}$ и $\partial\Omega \in C^1$. Тогда *следом функции f на поверхности S* называется функция $\varphi \in L_p(S)$, определяемая теоремой 3.7.

Следствие 3.8. Если $f \in W_p^0(\Omega)$ и $\partial\Omega \in C^1$, то $f|_{\partial\Omega} = 0$.

Доказательство. По определению пространства $W_p^0(\Omega)$ существует последовательность функций $\{f_m\}$ из $C_0^1(\Omega)$, сходящаяся f в норме $W_p^1(\Omega)$. Так как $f_m|_{\partial\Omega} = 0$ при всех $m=1,2,\dots$, то непосредственно из теоремы 3.7 следует равенство $f|_{\partial\Omega} = 0$ (в смысле пространства $L_p(\partial\Omega)$). \square

Следствие 3.8 показывает, в частности, что включение $W_p^k(\Omega) \subset W_p^k(\Omega)$ ($k \in \mathbf{N}, p > 1$) является строгим. Действительно, например, функция $f(x) = 1$ на $\bar{\Omega}$ принадлежит $W_p^k(\Omega)$, её след $f|_{\partial\Omega} = 1$, а значит, функция f не принадлежит $W_p^1(\Omega)$ и, тем более $W_p^k(\Omega)$.

Заметим ещё, что верно и обратное к следствию 3.8. утверждение: если $f \in W_p^1(\Omega)$, $\partial\Omega \in C^1$ и $f|_S = 0$, то $f \in W_p^1(\Omega)$.

Следствие 3.9. Если $f \in W_p^1(\Omega)$, $p > 1$, $k \in \mathbf{N}$, $k > 1$, а поверхность S удовлетворяет условиям теоремы 3.7, то определен след φ_α на S любой обобщенной производной $\partial^\alpha f$, где $|\alpha| < k$, и при этом выполняется неравенство $\|\varphi_\alpha\|_{L_p(S)} \leq C_\alpha \|f\|_{W_p^k(\Omega)}$.

Доказательство. При $|\alpha| < k$ функция $\partial^\alpha f$ принадлежит пространству $W_p^{k-|\alpha|}(\Omega) \subset W_p^1(\Omega)$. Поэтому в силу теоремы 3.7 существует след φ_α на S функции $\partial^\alpha f$ и выполняются неравенства

$$\|\varphi_\alpha\|_{L_p(S)} \leq C_\alpha \|\partial^\alpha f\|_{W_p^1(\Omega)} \leq C_\alpha \|f\|_{W_p^{|\alpha|+1}(\Omega)} \leq C_\alpha \|f\|_{W_p^k(\Omega)}. \quad \square$$

Следствие 3.10. Пусть $f \in W_p^1(\Omega)$, $g \in W_q^1(\Omega)$, $p > 1, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ и $\partial\Omega \in C^1$. Тогда для любого $j=1, \dots, n$ имеет место формула интегрирования по частям

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_j} g dx = \int_{\partial\Omega} (f|_{\partial\Omega})(g|_{\partial\Omega}) \nu_j dS - \int_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial x_j} dx, \quad (3.25)$$

$\nu_j = \cos(\nu, x_j)$ – косинус угла между внешней нормалью n к поверхности $\partial\Omega$ и осью x_j .

Доказательство. Если f и g являются функциями из $C_1(\overline{\Omega})$, то формула 3.25 хорошо известна. При $f \in W_p^1(\Omega)$, $g \in W_q^1(\Omega)$, формула (3.25) следует теперь из плотности множества $C_1(\overline{\Omega})$ в пространствах $W_p^1(\Omega)$ и $W_q^1(\Omega)$ и определения следов функций из $W_p^1(\Omega)$ и $W_q^1(\Omega)$. \square

При решении неоднородных краевых задач математической физики в пространствах Соболева возникает необходимость в утверждении, обратном теореме 3.7. Имеется в виду вопрос – можно ли для любой функции $\varphi \in L_p(S)$, где S – $(n-1)$ -мерная поверхность и $S \subset \overline{\Omega}$, найти такую функцию $f \in W_p^1(\Omega)$, что $f|_S = \varphi$. В общем случае ответ на этот вопрос оказывается отрицательным даже при условии, что $\varphi \in C(S)$. Однако, если $S \in C^1$ и $\varphi \in C^1(S)$ (или $\varphi \in W_p^1(S)$), то указанное утверждение имеет место.

Здесь пространства $C^1(S)$ и $W_p^1(S)$ при $S \in C^1$, а также более общие пространства $C^k(S)$ и $W_p^k(S)$ при $k \in \mathbf{N}$, $p > 1$, $S \in C^k$, $S \subset \subset \mathbf{R}^n$ понимаются в следующем естественном смысле. Функция $\varphi(x)$ принадлежит $C^k(S)$ (или $W_p^k(S)$), если она принадлежит $C^k(S_j)$ (или $W_p^k(S_j)$) на каждом гладком простом куске S_j поверхности S .

Для простоты мы рассмотрим случай, когда $\varphi \in C^k(S)$, $S = \partial\Omega$. Общий случай поверхности S , а также случай, когда $\varphi \in W_p^k(S)$, исследуются в основном аналогично.

Отметим также, что при $S = \overline{S}$ линейное пространство $C^k(S)$ является банаховым пространством.

Теорема 3.8. Пусть $\partial\Omega$ – граница ограниченной области Ω из \mathbf{R}^n , причем $\partial\Omega \in C^k$, где $k \in \mathbf{N}$. Тогда для любой функции φ из пространства

$C^k(\partial\Omega)$ существует такая функция $f \in C^k(\bar{\Omega})$, что $f|_{\partial\Omega} = \varphi$ и выполняется неравенство:

$$\|f\|_{C^k(\bar{\Omega})} \leq C\|\varphi\|_{C^k(\partial\Omega)},$$

где постоянная C не зависит от функции φ .

Доказательство. Заметим, что по существу задача состоит в построении достаточно гладкого продолжения заданной на $\partial\Omega$ функции на всю область Ω . Идея решения этой задачи состоит в построении локальных продолжений и в последующей «склейке» построенных продолжений с помощью разбиения единицы.

Так как $\partial\Omega$ – компакт в \mathbf{R}^n , то существует конечно покрытие поверхности $\partial\Omega$ простыми кусками $S_j \in C^k$, $j=1, \dots, N$.

Рассмотрим какой-либо один из этих кусков S_j . Будем считать, без ограничений общности, что поверхность S_j является графиком некоторой функции $x_n \psi_j(x') \in C^k(S_j^1)$, где $x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in B_j'$, $B_j' = B_j \cap \{x \in \mathbf{R}^n : x_n = 0\}$, $B_j = \{x \in \mathbf{R}^n : |x - x_j| < r_j\}$, $x_j \in S_j$, $r_j > 0$. Положим теперь $f_j(x) = f_j(x', x_n) = \varphi_j(x', \psi_j(x'))$ при $x = (x', x_n) \in B_j$ (функция $f_j(x', x_n)$ является постоянной при фиксированном $x' \in B_j'$). Легко видеть, что $f_j \in C^k(B_j)$, $f_j|_{S_j} = \varphi|_{S_j}$ и для любого фиксированного шара $\omega_j = \{x \in \mathbf{R}^n : |x - x_j| < \tilde{r}_j\}$, где $0 < \tilde{r}_j < r_j$, выполняется неравенство:

$$\|f\|_{C^k(\bar{\omega}_j)} \leq C_j \|\varphi\|_{C^k(\partial\Omega)}, \quad (3.26) \text{ в котором постоянная } C_j \text{ зависит от } \omega_j, \text{ но не зависит от } \varphi.$$

Аналогично построим функцию f_j для всех $j=1, \dots, N$. Тогда при всех $j=1, \dots, N$ будут выполняться соотношения $f_j \in C^k(B_j)$, $f_j|_{S_j} = \varphi|_{S_j}$ и неравенства вида (3.26).

Пусть, далее, $\{\alpha_j(x)\}$, $j=1, \dots, N$ – разбиение единицы, подчиненное открытому покрытию $\bigcup_{j=1}^N B_j \supset \partial\Omega$ (см. лемму []). Так как $\alpha_j f_j \in C_0^k(B_j) = C_0^k(\mathbf{R}^n)$ при любом $j=1, \dots, N$, то функция $f = \sum_{j=1}^N \alpha_j f_j$ принадлежит $C_0^k(\mathbf{R}^n) \subset C^k(\overline{\Omega})$. Из свойств разбиения единицы, равенств $f|_{S_j} = \varphi|_{S_j}$ ($j=1, \dots, N$) и неравенств вида 3.26 теперь получаем, что построенная функция удовлетворяет условиям теоремы. \square

ЗАДАЧИ

3.1. Докажите: а) утверждение примера 3.1; б) утверждение примера 3.2.

3.2. Покажите, что число всех различных мультииндексов $\alpha \in \mathbf{Z}_+$, где $|\alpha| \leq k$, равно C_{n+k}^k .

3.3. Проверьте, что прямая сумма рефлексивных (сепарабельных) банаховых пространств является рефлексивным (сепарабельным) банаховым пространством.

3.4. Пусть банахово пространство X непрерывно вложено в банахово пространство Y . Докажите, что тогда из рефлексивности (сепарабельности) пространства Y следует рефлексивность (сепарабельность) пространства X .

3.5. Докажите замечание 3.5.

3.6. Проверьте, что функция $v(x) = \ln|\ln|x|| \in W_2^1(\Omega) \setminus C(\overline{\Omega})$, где $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^2 : |x| < 1/e\}$.

3.7. Исследуйте вопрос о принадлежности функции $v(x) = |x|^\alpha$ пространству $W_p^k(\Omega)$, где $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| < 1\}$, при всех возможных значениях $\alpha \in \mathbf{R}$, $k, n \in \mathbf{N}$, $p \geq 1$.

3.8. Докажите утверждение 1.1.

3.9. Используя метод индукции, докажите лемму 3.1.

3.10. С помощью неравенства Гёльдера проверьте оценки (3.6).

3.11. Пусть $v \in \overset{\circ}{W}_p^2(\Omega)$, $p \geq 1$. Показать, что тогда $\frac{\partial v}{\partial x_j} \in \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega)$, $j=1, \dots, n$.

3.12. Докажите вложение $\overset{\circ}{W}_p^k(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$, где Ω – ограниченная область в \mathbf{R}^n , $kp > n$.

3.13. Пусть Ω – ограниченная область в \mathbf{R}^n , $k, m \in \mathbf{N}$, $p \geq 1$, $kp > n + pm$. Проверьте, что тогда $\overset{\circ}{W}_p^k(\Omega) \subset C^m(\bar{\Omega})$. Указание. Используйте непрерывное вложение $\overset{\circ}{W}_p^{k-m}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$ из предыдущей задачи.

3.14. Приведите пример ограниченной в пространстве $W_p^1(\mathbf{R}^n)$ последовательности, не являющейся предкомпактной в $L_p(\mathbf{R}^n)$, где $p \geq 1$.

3.15. Пусть $v \in \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega)$, $w \in \overset{\circ}{W}_q^1(\Omega)$, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Докажите тогда, что при всех $j=1, \dots, n$ $\int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_j} w dx = - \int_{\Omega} v \frac{\partial w}{\partial x_j} dx$ (формула интегрирования по частям).

3.16. Докажите, что $v \in W_2^k(\mathbf{R}^n)$, $k \in \mathbf{Z}_+$, в том и только в том случае, когда $(1 + |\xi|^2)^{k/2} \tilde{v}(\xi) \in L_2(\mathbf{R}^n)$, где $\tilde{v}(\xi)$ – преобразование Фурье функции v .

3.17. Пусть Ω – ограниченная область класса C^1 , Ω_1 – подобласть в Ω , Γ_1 – гладкий кусок поверхности $\partial\Omega$, $p \geq 1$. Докажите, что тогда:

$$\text{а) } \int_{\Omega} |v|^p dx \leq C_1 \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^p dx + \left| \int_{\Omega_1} v dx \right|^p \right) \text{ при всех } v \in W_p^1(\Omega)$$

(неравенство Пуанкаре);

$$\text{б) } \int_{\Omega} |v|^p dx \leq C_2 \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^p dx + \left| \int_{\Gamma_1} v ds \right|^p \right) \text{ при всех } v \in C^\infty(\bar{\Omega})$$

(неравенство Фридрихса),

где постоянные C_1, C_2 не зависят от v .

3.18. Докажите, что существует функция $f \in W_2^1(\mathbf{R}^2)$, существенно неограниченная в окрестности любой точки $x \in \mathbf{R}^2$. Указание. Рассмотреть функцию $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} f_0(x - r_k)$, где r_k – счетное всюду плотное подмножество в \mathbf{R}^2 , а $f_0(x) = \ln|\ln|x||$ при малых $|x|$, $f_0(x)$ – неотрицательная достаточно гладкая функция вне некоторой окрестности начала координат и финитная в \mathbf{R}^2 .

Г Л А В А 4. ПРОСТРАНСТВА СЛОБОДЕЦКОГО

Пространства Слободецкого W_p^s при нецелых $s > 0$ заполняют «пробелы» между пространствами Соболева $W_1^0 = L_p, W_p^1, W_p^2, \dots$. Другая, более деликатная роль W_p^s с нецелыми s состоит в описании ограничений на поверхности в \mathbf{R}^n функций из пространств Соболева. Здесь будут рассмотрены пространства W_p^s при $s \in \mathbf{R}$ и только при $p = 2$, которые обычно обозначаются H^s . Эти пространства являются основой *линейной* теории краевых задач для уравнений с частными производными. Пространства W_p^s при $p \neq 2$ применяются в теории *нелинейных* краевых задач, которые в данном пособии не рассматриваются.

4.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА

Определение 4.1. Пусть $s \in \mathbf{R}$. Тогда *пространством Слободецкого* $H^s(\mathbf{R}^n)$ называется пространство всех распределений $v \in S'(\mathbf{R}^n)$, для которых $\tilde{v} \in L_2(\mathbf{R}^n, \langle \xi \rangle^{2s} d\xi)$. В пространстве $H^s(\mathbf{R}^n)$ вводится норма $\|v\|_s = \left((2\pi)^{-n} \int |\tilde{v}(\xi)|^2 \langle \xi \rangle^{2s} d\xi \right)^{1/2}$.

Утверждение 4.1. При любом $s \in \mathbf{R}$ пространство $H^s(\mathbf{R}^n)$ является сепарабельным гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(v, w)_s = (v, w)_{H^s(\mathbf{R}^n)} = (2\pi)^{-n} \int \tilde{v}(\xi) \overline{\tilde{w}(\xi)} \langle \xi \rangle^{2s} d\xi.$$

Доказательство. Так как $L_2(\mathbf{R}^n, \langle \xi \rangle^s d\xi) \subset S'(\mathbf{R}^n)$, то преобразование Фурье $F: H^s(\mathbf{R}^n) \rightarrow L_2(\mathbf{R}^n, (2\pi)^{-n} \langle \xi \rangle^s d\xi)$ является линейной изометрией нормированного пространства $H^s(\mathbf{R}^n)$ на сепарабельное гильбертово про-

пространство $L_2(\mathbf{R}^n, (2\pi)^{-n} \langle \xi \rangle^s d\xi)$. Отсюда сразу следует данное утверждение. \square

Следствие 4.1. При $s > s'$ имеет место непрерывное вложение $H^s(\mathbf{R}^n) \subset H^{s'}(\mathbf{R}^n)$, причем $\|v\|_{s'} \leq \|v\|_s$.

Доказательство получается непосредственно из определения 4.1. \square

Утверждение 4.2. Пусть $s \in \mathbf{Z}_+$. Тогда пространства $H^s(\mathbf{R}^n)$ и $W_2^s(\mathbf{R}^n)$ совпадают как множества, а нормы на них эквивалентны.

Доказательство. По теореме Планшереля преобразования Фурье $F: L_2(\mathbf{R}_x^n) \rightarrow L_2(\mathbf{R}_\xi^n, (2\pi)^{-n})$ является линейной изометрией. Таким образом, $H^0(\mathbf{R}^n) = W_2^0(\mathbf{R}^n) = L_2(\mathbf{R}^n)$.

Пусть теперь $s \in \mathbf{N}$. Докажем сначала, что $H^s(\mathbf{R}^n) \subset W_2^s(\mathbf{R}^n)$. Так как $\langle \xi \rangle^{2s} = (1 + |\xi|^2)^s = (1 + \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)^s = \sum_{|\alpha| \leq s} C_\alpha \xi^{2\alpha}$, где $C_\alpha > 0$ при всех $|\alpha| \leq s$, то

$$\begin{aligned} \|v\|_{H^s(\mathbf{R}^n)}^2 &= \int \sum_{|\alpha| \leq s} C_\alpha \xi^{2\alpha} |\tilde{v}(\xi)|^2 d\xi = \sum_{|\alpha| \leq s} C_\alpha \int \xi^{2\alpha} |\tilde{v}(\xi)|^2 d\xi = \\ &= \sum_{|\alpha| \leq s} C_\alpha \int |\xi^\alpha \tilde{v}(\xi)|^2 d\xi = (2\pi)^n \sum_{|\alpha| \leq s} C_\alpha \int |D^\alpha v|^2 dx \leq C_1 \|v\|_{W_2^s(\mathbf{R}^n)}^2 \end{aligned}$$

(последнее равенство следует из теоремы Планшереля и равенства $F(D^\alpha v) = \xi^\alpha \tilde{v}(\xi)$). Таким образом, $D^\alpha v \in L_2(\mathbf{R}^n)$ при всех $|\alpha| \leq s$.

Докажем теперь обратное включение — $W_2^s(\mathbf{R}^n) \subset H^s(\mathbf{R}^n)$. Если $v \in W_2^s(\mathbf{R}^n)$, то определению $D^\alpha v \in L_2(\mathbf{R}^n)$ при всех $|\alpha| \leq s$. Отсюда следует, что $\xi^\alpha \tilde{v}(\xi) \in L_2(\mathbf{R}^n)$ при $|\alpha| \leq s$, а значит, $\sum_{|\alpha| \leq s} |\xi^\alpha|^2 |\tilde{v}(\xi)|^2 \in L_1(\mathbf{R}^n)$. Так как при

всех $\xi \in \mathbf{R}^n$ выполняются неравенства $C_2^{-1} (1 + |\xi|^2)^s \leq \sum_{|\alpha| \leq s} |\xi^\alpha|^2 \leq C_2 (1 + |\xi|^2)^s$, где

положительная постоянная C_2 не зависит от $\xi \in \mathbf{R}^n$, то

$$\langle \xi \rangle^{2s} |\tilde{v}(\xi)|^2 \in L_1(\mathbf{R}_\xi^n), \quad v \in H^s(\mathbf{R}^n) \quad \text{и} \quad \|v\|_{W_2^s(\mathbf{R}^n)}^2 \leq (2\pi)^{-n} C_2 \|v\|_{H^s(\mathbf{R}^n)}^2. \quad \square$$

При исследовании гладкости распределений используется следующее семейство норм в $H^{s-1}(\mathbf{R}^n)$, где $s \in \mathbf{R}$, зависящее от $\delta > 0$

$$\|v\|_{s-1,\delta}^2 = \int \langle \xi \rangle^{2s} (1 + |\delta \xi|^2)^{-1} |\tilde{v}(\xi)|^2 d\xi.$$

Легко проверить, что существуют такие положительные постоянные $C_1(\delta)$, $C_2(\delta)$, зависящие от $\delta > 0$, но не зависящие от V :

$$C_1(\delta)\|v\|_{s-1} \leq \|v\|_{s-1,\delta} \leq C_2(\delta)\|v\|_{s-1} \quad \text{при } v \in H^{s-1}(\mathbf{R}^n).$$

Таким образом, при любом $\delta > 0$ норма $\|\cdot\|_{s-1,\delta}$ эквивалентна норме $\|\cdot\|_{s-1}$.

Из теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла следует, что $\|v\|_{s-1,\delta} \rightarrow \|v\|_s$ при $\delta \rightarrow 0+$, если $v \in H^s(\mathbf{R}^n)$.

В дальнейшем требуется также следующее утверждение.

Утверждение 4.3. Пусть $s \in \mathbf{R}$ для некоторой постоянной C , не зависящей от $\delta \in (0, \delta_0)$, и выполняется неравенство $\|v\|_{s-1,\delta} \leq C$ при всех $v \in H^{s-1}(\mathbf{R}^n)$,

тогда $v \in H^s(\mathbf{R}^n)$ и $\|v\|_s \leq C$.

Доказательство сразу следует из теоремы Фату о предельном переходе под знаком интеграла. \square

Утверждение 4.4. Пусть $P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами порядка m . Тогда линейный оператор $P(D): H^s(\mathbf{R}^n) \rightarrow H^{s-m}(\mathbf{R}^n)$ является непрерывным.

Доказательство. Пусть $v \in H^s(\mathbf{R}^n)$, т.е. $\langle \xi \rangle^s \tilde{v}(\xi) \in L_2(\mathbf{R}^n)$. Так как преобразование Фурье от $w = P(D)v$ равно $P(\xi)\tilde{v}(\xi)$, где $|P(\xi)| \leq C \langle \xi \rangle^m$ при всех $\xi \in \mathbf{R}^n$, то

$$\begin{aligned} \langle \xi \rangle^{s-m} |\tilde{w}(\xi)| &= \langle \xi \rangle^{s-m} |P(\xi)\tilde{v}(\xi)| \leq C \langle \xi \rangle^{s-m} \langle \xi \rangle^m |\tilde{v}(\xi)| \\ &= C \langle \xi \rangle^s |\tilde{v}(\xi)| \in L_2(\mathbf{R}^n). \quad \square \end{aligned}$$

Теорема 4.1. При любом $s \in \mathbf{R}$ имеют место непрерывные вложения $S(\mathbf{R}^n) \subset H^s(\mathbf{R}^n) \subset S'(\mathbf{R}^n)$. Кроме того, множество $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ плотно в пространстве $H^s(\mathbf{R}^n)$.

Доказательство. Очевидно, что имеют место непрерывные вложения

$$S(\mathbf{R}^n) \subset L_{2s}(\mathbf{R}^n) = L_2(\mathbf{R}^n, (2\pi)^{-n} \langle \xi \rangle^{2s} d\xi) \subset S'(\mathbf{R}^n).$$

При этом множество $S(\mathbf{R}^n)$ плотно в пространстве $L_2(\mathbf{R}^n, (2\pi)^{-n} \langle \xi \rangle^{2s} d\xi)$, так как $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ плотно в этом пространстве (следствие 2.4).

С другой стороны, преобразование Фурье является топологическим изоморфизмом пространств $S(\mathbf{R}^n)$, $H^s(\mathbf{R}^n)$ и $S'(\mathbf{R}^n)$ на, соответственно, пространства $S(\mathbf{R}^n)$, $L_{2,s}(\mathbf{R}^n)$ и $S'(\mathbf{R}^n)$. Отсюда сразу следует, что имеют место непрерывные вложения $S(\mathbf{R}^n) \subset H^s(\mathbf{R}^n) \subset S'(\mathbf{R}^n)$ и что $S(\mathbf{R}^n)$ плотно в $S'(\mathbf{R}^n)$.

В силу утверждения 2.1. множество $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ плотно в пространстве $S(\mathbf{R}^n)$. Отсюда следует, что множество $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ плотно в множестве $S(\mathbf{R}^n)$ по норме пространства $H^s(\mathbf{R}^n)$. Действительно, пусть $f \in S(\mathbf{R}^n)$, $f_k \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ и $f_k \rightarrow f$ в $S(\mathbf{R}^n)$. Тогда $\tilde{f}_k \rightarrow \tilde{f}$ в $S(\mathbf{R}^n)$ в силу топологического изоморфизма $F: S(\mathbf{R}^n) \rightarrow S(\mathbf{R}^n)$. Поэтому имеем $\|f - f_k\|_s^2 = \int \langle \xi \rangle^{2s} |\tilde{f}(\xi) - \tilde{f}_k(\xi)|^2 d\xi \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Таким образом, множество $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ плотно в $H^s(\mathbf{R}^n)$. \square

Утверждение 4.5. Пусть $s, t \in \mathbf{R}$ и $s < t$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такая постоянная $C_\varepsilon = C(\varepsilon, s, t) > 0$, что $\|v\|_s \leq \varepsilon \|v\|_t + C_\varepsilon \|v\|_{s-1}$ при всех $v \in H^t(\mathbf{R}^n)$. При этом в качестве C_ε можно взять $c_0 \varepsilon^{1/(t-s)}$, где $c_0 = \text{const} > 0$ и не зависит от ε .

Доказательство. Используя хорошо известное неравенство $\lambda^s \leq \varepsilon \lambda^t + C_\varepsilon \lambda^{s-1}$, где $a > 0$, $b > 0$, $p > 1$ и $1/p + 1/q = 1$. Докажем сначала для всех $\varepsilon > 0$ и $\lambda > 0$ неравенство $\lambda^s \leq \varepsilon \lambda^t + C_\varepsilon \lambda^{s-1}$.

Для этого положим $a/p = \varepsilon \lambda^t$, $b/q = C_\varepsilon \lambda^{s-1}$ и подберем p , q и C_ε такие, что $a^{1/p} b^{1/q} = \lambda^s$. Тогда получим, что $p = t - s + 1$, $q = \frac{t - s + 1}{t - s}$, $C_\varepsilon = c_0 \varepsilon$, где $c_0 = p^{1/(1-p)} q^{-1} > 0$.

Таким образом, неравенство $\lambda^s \leq \varepsilon \lambda^t + C_\varepsilon \lambda^{s-1}$ верно при всех $\varepsilon > 0$ и $\lambda > 0$, где $C_\varepsilon = c_0 \varepsilon^{1/(s-t)}$. Возводя это неравенство в квадрат и заменяя λ на $\langle \xi \rangle$, получим неравенство $\langle \xi \rangle^{2s} \leq \varepsilon^2 \langle \xi \rangle^{2t} + 2 \varepsilon C_\varepsilon \langle \xi \rangle^{t+s-1} + C_\varepsilon^2 \langle \xi \rangle^{2s-2}$, верное при всех $\xi \in \mathbf{R}^n$. Умножая теперь это неравенство на $|\tilde{v}(\xi)|^2$, где $v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, и, интегрируя полученное неравенство по \mathbf{R}_ξ^n , получим

$$\begin{aligned} \|v\|_s^2 &\leq \varepsilon^2 \|v\|_t^2 + 2\varepsilon C_\varepsilon \int \langle \xi \rangle^{t+s-1} |\tilde{v}(\xi)|^2 d\xi + C_\varepsilon^2 \|v\|_{s-1}^2 \leq \\ &\leq \varepsilon^2 \|v\|_t^2 + 2\varepsilon C_\varepsilon \left(\int \langle \xi \rangle^{2t} |\tilde{v}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \cdot \\ &\cdot \left(\int \langle \xi \rangle^{2s-2} |\tilde{v}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} + C_\varepsilon^2 \|v\|_{s-1}^2 = (\varepsilon \|v\|_t + C_\varepsilon \|v\|_{s-1})^2 \end{aligned}$$

(последнее неравенство следует из неравенства Коши – Буняковского).

Таким образом, $\|v\|_t^2 \leq \varepsilon \|v\|_t + C_\varepsilon \|v\|_{s-1}$ при всех $v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Поскольку $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ плотно в $H^t(\mathbf{R}^n)$, то это неравенство верно и при всех $v \in H^t(\mathbf{R}^n)$. \square

Теорема 4.2. Пусть $s \in \mathbf{R}$ и l – линейный непрерывный функционал на $H^s(\mathbf{R}^n)$. Тогда существует и единственно такое распределение $v \in H^{-s}(\mathbf{R}^n)$, что $l(u) = \langle \tilde{v}, u \rangle$, $u \in S$. При этом $\|l\| = \|v\|_{-s}$.

Доказательство. Преобразование Фурье F определяет линейную изометрию пространства $H^s(\mathbf{R}^n)$ на пространство $L_2(\mathbf{R}^n, (2\pi)^{-n} \langle \xi \rangle^{2s} d\xi)$. Таким образом, определен линейный непрерывный функционал

$L(U) = l(F^{-1}U)$ на пространстве $L_{2,s}(\mathbf{R}^n)$. В силу теоремы Рисса существует и единственна функция $V \in L_{2,s}(\mathbf{R}^n)$ такая, что

$$L(U) = (2\pi)^{-n} \int U(\xi) V_1(\xi) \langle \xi \rangle^{2s} d\xi = (2\pi)^{-n} \int U(\xi) V(\xi) d\xi,$$

где $V(\xi) = \langle \xi \rangle^{2s} V_1(\xi) \in L_{2,-s}(\mathbf{R}^n)$. Следовательно, существует и единственно такое распределение $v \in H^{-s}(\mathbf{R}^n)$, что $Fv = V$.

Таким образом, при $u \in S(\mathbf{R}^n)$ имеем

$$\begin{aligned} l(u) &= L(Fu) = (2\pi)^{-n} \int Fu \cdot V d\xi = (2\pi)^{-n} \int Fu \cdot Fv d\xi = (2\pi)^{-n} \langle Fv, Fu \rangle = \\ &= (2\pi)^{-n} \langle F^2 v, u \rangle = \langle \check{v}, u \rangle. \end{aligned}$$

Последнее равенство следует из $F^2 v = \check{v}$, где $v \in S'(\mathbf{R}^n)$, $\langle \check{v}, \varphi \rangle = \langle v, \check{\varphi} \rangle$, $\check{\varphi} = \varphi(-x)$, $\varphi \in S(\mathbf{R}^n)$ (см. теорему 2.7).

Кроме того, с помощью неравенства Коши – Буняковского получаем,

Что

$$\begin{aligned} |l(u)| &= (2\pi)^{-n} \left| \int Fu \cdot Fv d\xi \right| = (2\pi)^{-n} \left| \int \langle \xi \rangle^s \tilde{u}(\xi) \cdot \langle \xi \rangle^{-s} \tilde{v}(\xi) d\xi \right| \leq \\ &\leq (2\pi)^{-n} \left(\int \langle \xi \rangle^{2s} |\tilde{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \cdot \left(\int \langle \xi \rangle^{-2s} |\tilde{v}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} = \|u\|_s \|v\|_{-s}. \end{aligned}$$

Так как множество $S(\mathbf{R}^n)$ плотно в $H^s(\mathbf{R}^n)$, отсюда следует равенство $\|l\| = \|v\|_{-s}$. \square

Замечание 4.1. Из теоремы 4.2 и её доказательства следует, что при любом $S \in \mathbf{R}$ пространства $H^s(\mathbf{R}^n)$ и $H^{-s}(\mathbf{R}^n)$ топологически двойственны относительно канонической билинейной формы

$$\langle u, v \rangle = \int_{\mathbf{R}^n} u(x)v(x) dx. \quad (4.1)$$

Это означает, что форма (4.1) продолжается по непрерывности с $S(\mathbf{R}^n) \times S(\mathbf{R}^n)$ до билинейного отдельно непрерывного отображения $\langle \cdot, \cdot \rangle: H^s(\mathbf{R}^n) \times H^{-s}(\mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{C}$, причем всякий линейный непрерывный функционал $l(u)$ на $H^s(\mathbf{R}^n)$ единственным образом определяется в виде

$l(u) = \langle v, u \rangle$, $u \in S(\mathbf{R}^n)$, где $v \in H^{-s}(\mathbf{R}^n)$, а всякий линейный непрерывный функционал $m(v)$ на $H^{-s}(\mathbf{R}^n)$ единственным образом определяется в виде $m(v) = \langle u, v \rangle$, $v \in S(\mathbf{R}^n)$, где $u \in H^s(\mathbf{R}^n)$. При этом отображение $v \rightarrow \langle v, \cdot \rangle$, сопоставляющее каждому $v \in H^{-s}(\mathbf{R}^n)$ линейный непрерывный функционал на $H^s(\mathbf{R}^n)$ является *топологическим изоморфизмом* (т.е. двойственность – топологическая). В частности, имеем, что пространство $(H^s(\mathbf{R}^n))'$ изоморфно пространству $H^{-s}(\mathbf{R}^n)$ (здесь изоморфизм – сопряженно-линейный изометрический).

Следствие 4.2. При всех $v \in H^s(\mathbf{R}^n)$, $w \in H^{-s}(\mathbf{R}^n)$, где $s \in \mathbf{R}$, выполняется неравенство

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\|_s \|w\|_{-s} \quad (4.2)$$

Доказательство. Пусть сначала $v, w \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Тогда, используя равенство Парсеваля и неравенство Коши – Буняковского, имеем

$$\begin{aligned} |\langle v, w \rangle| &= \left| \int v(x)w(x)dx \right| = \left| (2\pi)^{-n} \int \tilde{v}(\xi)\tilde{w}(-\xi)d\xi \right| = \\ &= (2\pi)^{-n} \left| \int \langle \xi \rangle^s \tilde{v}(\xi) \langle \xi \rangle^{-s} \tilde{w}(-\xi)d\xi \right| \leq \\ &\leq \left((2\pi)^{-n} \int \langle \xi \rangle^{2s} |\tilde{v}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \left((2\pi)^{-n} \int \langle \xi \rangle^{-2s} |\tilde{w}(-\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} = \\ &= \|v\|_s \|w\|_{-s}. \end{aligned}$$

Так как $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ плотно в $H^s(\mathbf{R}^n)$ и $H^{-s}(\mathbf{R}^n)$, а билинейная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ раздельно непрерывна, то отсюда сразу следует неравенство (4.2) при всех $v \in H^s(\mathbf{R}^n)$ и $w \in H^{-s}(\mathbf{R}^n)$. \square

Следствие 4.3. Если $s \in \mathbf{R}$ и $v \in H^s(\mathbf{R}^n)$, то $\|v\|_s = \sup_{\substack{w \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n), \\ w \neq 0}} \frac{\langle v, \bar{w} \rangle}{\|w\|_{-s}}$.

Доказательство. В силу равенства Парсеваля

$$\langle v, \bar{w} \rangle = \int v(x)\bar{w}(x)dx = (2\pi)^{-n} \int \tilde{v}(\xi)\bar{\tilde{w}}(\xi)d\xi,$$

если $v, w \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Отсюда из плотности $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ в $H^s(\mathbf{R}^n)$ и из раздельной непрерывности формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $H^s(\mathbf{R}^n) \times H^{-s}(\mathbf{R}^n)$ следует, что

$$v_1, w_1 \in L_2(\mathbf{R}^n) \text{ и } \langle v, \bar{w} \rangle = (2\pi)^{-n} \int \tilde{v}(\xi) \bar{\tilde{w}}(\xi) d\xi$$

при всех $v \in H^s(\mathbf{R}^n)$ и $w \in H^{-s}(\mathbf{R}^n)$.

Пусть $v_1(\xi) = \tilde{v}(\xi) \langle \xi \rangle^s$, $w_1(\xi) = \tilde{w}(\xi) \langle \xi \rangle^s$. Тогда $v_1, w_1 \in L_2(\mathbf{R}^n)$ и $\langle v, \bar{w} \rangle = (2\pi)^{-n} \int v_1(\xi) \bar{w}_1(\xi) d\xi$.

Кроме того, имеем $\|v\|_s = (2\pi)^{-n/2} \|v_1\|_0$, $\|w\|_{-s} = (2\pi)^{-n/2} \|w_1\|_0$ и, как хорошо известно, $\|v_1\|_0 = \sup_{\substack{w_1 \in S(\mathbf{R}^n), \\ \|w_1\|_0=1}} \int v_1(\xi) \bar{w}_1(\xi) d\xi$.

Заметим далее, что условие $w_1 \in S(\mathbf{R}^n)$ равносильно условию $w \in S(\mathbf{R}^n)$. Это следует из того, что оператор $A_s : S(\mathbf{R}^n) \rightarrow S(\mathbf{R}^n)$, $A_s h(\xi) = \langle \xi \rangle^s h(\xi)$ является изоморфизмом, а значит, и оператор, $F^{-1} A_s : S(\mathbf{R}^n) \rightarrow S(\mathbf{R}^n)$, $F^{-1} A_s w_1 = w$ является изоморфизмом. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \|v\|_s &= (2\pi)^{-n/2} \|v_1\|_0 = (2\pi)^{-n} \sup_{\substack{w_1 \in S(\mathbf{R}^n), \\ \|w_1\|_0=1}} \int v_1(\xi) \bar{w}_1(\xi) d\xi = \\ &= (2\pi)^{-n} \sup_{\substack{w \in S(\mathbf{R}^n), \\ \|w\|_{-s} = (2\pi)^{-n/2}}} \langle v, \bar{w} \rangle = \sup_{\substack{w \in S(\mathbf{R}^n), \\ \|w\|_{-s} = 1}} \langle v, \bar{w} \rangle = \\ &= \sup_{\substack{w \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n), \\ \|w\|_{-s} = 1}} \langle v, \bar{w} \rangle = \sup_{\substack{w \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n), \\ w \neq 0}} \frac{\langle v, \bar{w} \rangle}{\|w\|_{-s}} \end{aligned}$$

(предпоследнее равенство выполняется в силу плотности $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ в пространстве $S(\mathbf{R}^n)$, а значит, и плотности $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ в $S(\mathbf{R}^n)$ относительно $\|\cdot\|_{-s}$. \square)

Определим далее пространства $H^s(M)$, где $s \in \mathbf{R}$ и M – гладкое компактное многообразие без края. В частности, в качестве основного примера

таких многообразий можно взять гладкую поверхность $\partial\Omega$ – границу ограниченной области Ω .

Определение 4.2. Пусть X – многообразие класса C^∞ . Если для каждой координатной системы $\theta: X_\theta \rightarrow \tilde{X}_\theta \subset \mathbf{R}^n$ на X задано такое распределение $\nu_\theta \in D'(\tilde{X}_\theta)$, что $\nu_{\theta'} = \nu_{\theta_0}(\theta\theta^{-1})$ на $\theta'(X_\theta \cap X_{\theta'})$, то семейство ν_θ называется *распределением на многообразии X* . Множество всех распределений на X обозначается через $D'(X)$.

Определение 4.3. Пусть $s \in \mathbf{R}$, M – гладкое компактное многообразие без края. Тогда пространство $H^s(M)$ состоит из таких же распределений $\nu \in D'(M)$, что для любого координатного диффеоморфизма $\theta: U \rightarrow \Omega \subset \mathbf{R}^n$ и для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ имеет место включение $\varphi(\nu_0\theta^{-1}) \in H^s(\mathbf{R}^n)$ (здесь распределение $\nu_0\theta^{-1} \in D'(\Omega)$ умножается на $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ и в результате $\varphi(\nu_0\theta^{-1}) \in E'(\Omega) \subset E(\mathbf{R}^n) \subset S'(\mathbf{R}^n)$).

Пусть теперь Ω – любая область с гладкой ограниченной границей $\partial\Omega$.

Определение 4.4. Пусть $s \in \mathbf{R}^n$. Тогда *пространством Слободецкого* $H^s(\Omega)$ называется фактор-пространство $H^s(\mathbf{R}^n) / \{v \in H^s(\mathbf{R}^n) : v|_\Omega = 0\}$ с нормой $\|v\|_{H^s(\Omega)} = \inf \left\{ \|V\|_{H^s(\mathbf{R}^n)} : V \in H^s(\mathbf{R}^n), V|_\Omega = v \right\}$.

Очевидно, что пространство $H^s(\Omega)$ с введенной нормой является *гильбертовым*.

В случае $s \in \mathbf{Z}_+$ это определение фактически совпадает с определением пространства $W_2^s(\Omega)$ (см. теорему 3.4).

Непосредственно из определения 4.4 следуют непрерывные вложения

- 1) $H^s(\Omega) \subset H^{s'}(\Omega)$, если $\Omega' \subset \Omega$;
- 2) $H^s(\Omega) \subset H^{s'}(\Omega)$, если $s > s'$.

Утверждение 4.6. При любом $s \in \mathbf{R}$ и для любой ограниченной области Ω с гладкой границей имеют место непрерывные вложения

$$C^\infty(\overline{\Omega}) \subset H^s(\Omega) \subset D'(\Omega), \text{ причем множество } C^\infty(\overline{\Omega}) \text{ плотно в } H^s(\Omega).$$

Доказательство непосредственно следует из теоремы 4.1 и определения пространства $H^s(\Omega)$. \square

Кроме пространств $H^s(\Omega)$, где $s \in \mathbf{R}$, рассматривают также пространства $\mathring{H}^s(\overline{\Omega}) = \{v \in H^s(\mathbf{R}^n) : \text{supp } v \subset \overline{\Omega}\}$ при условии ограниченности области Ω и гладкости ее границы.

Утверждение 4.7. Пополнение пространства $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $\|\cdot\|_s$ содержится в $\mathring{H}^s(\overline{\Omega})$.

Доказательство. Пусть $v_k \in C_0^\infty(\Omega) \subset C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \subset H^s(\mathbf{R}^n)$ при $k \in \mathbf{N}$ и $\|v_k - v_m\|_s \rightarrow 0$ при $k, m \rightarrow \infty$. В силу полноты $H^s(\mathbf{R}^n)$ существует предел $v_k \rightarrow v$ в $H^s(\mathbf{R}^n)$ при $k \rightarrow \infty$. Но тогда, очевидно, $v_k \rightarrow v$ в $S'(\mathbf{R}^n)$ при $k \rightarrow \infty$. Следовательно, $\langle v, \varphi \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle v_k, \varphi \rangle = 0$ при всех $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ и $\text{supp } \varphi \subset \mathbf{R}^n \setminus \Omega$. Таким образом, $\text{supp } v \subset \overline{\Omega}$. \square

Замечание 4.2. На самом деле в случае гладкой ограниченной кривой $\partial\Omega$ области Ω доказаны следующие свойства гильбертовых пространств $\mathring{H}^s(\overline{\Omega})$ (см., например, [26], глава 4). При $s > 1/2$ пространство $\mathring{H}^s(\overline{\Omega})$ не содержит распределений, сосредоточенных на $\partial\Omega$, и в этом случае вместо $\mathring{H}^s(\overline{\Omega})$ используют также обозначение $\mathring{H}^s(\Omega)$. Далее, $\mathring{H}^s(\overline{\Omega}) = H^s(\Omega)$ при $|s| < 1/2$, $\mathring{H}^s(\overline{\Omega}) \subseteq H^s(\Omega)$ при $s \geq 0$, $H^s(\Omega) \subseteq \mathring{H}^s(\overline{\Omega})$ при $s \leq 0$. При $s > -1/2$ в пространстве $\mathring{H}^s(\overline{\Omega})$ плотно множество $C_0^\infty(\overline{\Omega})$. В соответствии с последним утверждением для любой области Ω в \mathbf{R}^n (с произвольной границей)

пространство $H^s(\bar{\Omega})$ определяется как пополнение множества $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $\|\cdot\|_s$.

Кроме того, в случае ограниченной области Ω с гладкой границей пространства $H^s(\Omega)$ и $H^{-s}(\bar{\Omega})$ двойственны (сравните с замечанием 4.1). Это означает, что при всех $s \in \mathbf{R}$ сопряженное пространство $(H^s(\bar{\Omega}))'$ изоморфно пространству $H^{-s}(\bar{\Omega})$, а сопряженное пространство $(H^s(\Omega))'$ изоморфно пространству $H^{-s}(\bar{\Omega})$.

Определение 4.5. Пусть Ω – произвольная область в \mathbf{R}^n , $s \in \mathbf{R}$. Тогда «локальными» пространствами Соболева $H_{loc}^s(\Omega)$ называется пространство всех таких распределений $v \in D'(\Omega)$, что $\varphi v \in H^s(\mathbf{R}^n)$ для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Очевидно, что, например, $C^k(\Omega) \subset H_{loc}^k(\Omega)$. Кроме того, сразу из определения пространства $H_{loc}^s(\Omega)$ следует, что $\psi v \in H_{loc}^s(\Omega)$, если $\psi \in C^\infty(\Omega)$, $v \in H_{loc}^s(\Omega)$, где $s \in \mathbf{R}$.

Теорема 4.3. Пусть $v \in D'(\Omega)$ и для любой точки $x^0 \in \Omega$ существует такая функция $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, что $\psi(x^0) \neq 0$ и $\psi v \in H^s(\Omega)$. Тогда $v \in H_{loc}^s(\Omega)$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. По лемме Бореля – Лебега существует конечное множество таких функций $\psi_1, \dots, \psi_N \in C_0^\infty(\Omega)$, что $\psi_j v \in H^s(\Omega)$ и $\Psi = \sum_{j=1}^N |\psi_j|^2 > 0$ на $\text{supp } \varphi$. Доопределим функцию $\psi = \varphi / \Psi$ вне

$\text{supp } \varphi$ нулем. Тогда $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ и поэтому

$$\varphi v = \sum_{j=1}^N \psi |\psi_j|^2 v = \sum_{j=1}^N (\psi \bar{\psi}_j) (\psi_j v) \in H^s(\Omega).$$

Таким образом, $v \in H_{loc}^s(\Omega)$. \square

Теорема 4.4. Пространство $H_{loc}^s(\Omega)$ является пространством Фреше с топологией, заданной полунормами $v \rightarrow \|\varphi v\|_s$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, причем имеют место непрерывные вложения $E(\Omega) \subset H_{loc}^s(\Omega) \subset D'(\Omega)$. При этом множество $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в пространстве $H_{loc}^s(\Omega)$.

Доказательство. Докажем сначала, что топология в пространстве $H_{loc}^s(\Omega)$ задается счётным множеством полунорм. Пусть K_ν – такая расширяющаяся последовательность компактных множеств, что $K_\nu \subset \Omega$ при всех $\nu \in \mathbf{N}$ и что любое компактное подмножество множества Ω содержится в некотором K_ν .

Пусть, далее, $\chi_\nu \in C_0^\infty(\Omega)$ и $\chi_\nu(x) = 1$ при $x \in K_\nu$, где $\nu \in \mathbf{N}$ (см. утверждение 2.6). Тогда топология в $H_{loc}^s(\Omega)$ задается счётным множеством полунорм $v \rightarrow \|\chi_\nu v\|_s$. Для того чтобы это проверить, возьмем любую функцию $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ и выберем такое достаточно большое ν , что $\text{supp } \varphi \subset K_\nu$. Тогда $\varphi v = \varphi \chi_\nu v$ и $\|\varphi v\|_s = \|\varphi \chi_\nu v\|_s \leq C_\varphi \|\chi_\nu v\|_s$, где $C_\varphi = \text{const}$.

Последнее неравенство доказывается следующим образом. Обозначим

$u = \chi_\nu v \in H^s(\mathbf{R}^n)$. Тогда $\|\varphi u\|_s^2 = (2\pi)^{-n} \int \langle \xi \rangle^{2s} |\overline{\varphi u}(\xi)|^2 d\xi$, где

$$\overline{\varphi u}(\xi) = (2\pi)^{-n} \int \bar{\varphi}(\xi - \eta) \bar{u}(\eta) d\eta. \quad (4.3)$$

Заметим, что

$$\langle \xi + \eta \rangle^2 = 1 + |\xi + \eta|^2 \leq 1 + |\xi|^2 + 2|\xi||\eta| + |\eta|^2 \leq (1 + |\xi|^2)(1 + |\eta|^2) = \langle \xi \rangle^2 (1 + |\eta|^2)$$

при всех $\xi, \eta \in \mathbf{R}^n$. Отсюда следует, что для $s \in \mathbf{R}$ выполняется неравенство

$$\langle \xi + \eta \rangle^s \leq \langle \xi \rangle^s (1 + |\eta|^2)^{|s|} \quad \text{при всех } \xi, \eta \in \mathbf{R}^n \text{ или}$$

$$\langle \xi \rangle^s \leq (1 + |\xi - \eta|)^{|s|} \langle \eta \rangle^s \quad \text{при всех } \xi, \eta \in \mathbf{R}^n.$$

Умножая теперь равенство (4.3) на $\langle \xi \rangle^{2s}$ и используя последнее нера-

$$\text{венство, получим } \langle \xi \rangle^s |\overline{\varphi u}(\xi)| \leq (2\pi)^{-n} \int (1 + |\xi - \eta|)^{|s|} |\bar{\varphi}(\xi - \eta)| \langle \eta \rangle^s |\bar{u}(\eta)| d\eta.$$

Отсюда, $\|\varphi u\|_s^2 = (2\pi)^{-n} \int \langle \xi \rangle^{2s} \left| \overline{\varphi u}(\xi) \right|^2 d\xi \leq (2\pi)^{-3n} \int d\xi \left(\int g(\xi - \eta) h(\eta) d\eta \right)^2$,

где $g(\xi) = (1 + |\xi|)^{|s|} |\tilde{\varphi}(\xi)|$, $h(\eta) = \langle \eta \rangle^s |\tilde{u}(\eta)|$.

Так как в силу интегрального неравенства Минковского

$$\left[\int \left| \int f(\xi, \eta) d\eta \right|^p d\xi \right]^{1/p} \leq \int \left[\left(\int |f(\xi, \eta)|^p d\xi \right)^{1/p} \right] d\eta,$$

где $p > 1$ и f – подходящая функция (т.е. такая, что интеграл в правой части этого неравенства конечен), то при $p = 2$ получим

$$\begin{aligned} \|\varphi u\|_s &= (2\pi)^{-3n/2} \left[\int \left| \int g(\xi - \eta) h(\eta) d\eta \right|^2 d\xi \right]^{1/2} \leq \\ &\leq (2\pi)^{-3n/2} \int \left[\left(\int |g(\xi - \eta)|^2 |h(\eta)|^2 d\xi \right)^{1/2} \right] d\eta = \\ &= (2\pi)^{-3n/2} \int \left[\left(\int |g(\eta)|^2 |h(\xi - \eta)|^2 d\xi \right)^{1/2} \right] d\eta = \\ &= (2\pi)^{-3n/2} \int g(\eta) d\eta \cdot \left(\int |h(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} = \\ &= (2\pi)^{-3n/2} \int (1 + |\eta|)^{|s|} |\tilde{\varphi}(\eta)| d\eta \cdot \left(\int \langle \xi \rangle^{2s} |\tilde{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} = \\ &= (2\pi)^{-n} \int (1 + |\eta|)^{|s|} |\tilde{\varphi}(\eta)| d\eta \cdot \|u\|_s. \end{aligned}$$

Таким образом, $\|\varphi u\|_s \leq C_\varphi \|u\|_s$, где $C_\varphi = (2\pi)^{-n} \int (1 + |\eta|)^{|s|} |\tilde{\varphi}(\eta)| d\eta$.

Итак, в пространстве $H_{loc}^s(\Omega)$ топология определяется счетным числом полунорм, а значит, $H_{loc}^s(\Omega)$ – квазинормированное пространство.

Для доказательства полноты этого пространства достаточно доказать сходимость относительно полунорм $v \rightarrow \|\chi_v v\|_s$, где $v \in \mathbf{N}$, любой последовательности $v_k \in H_{loc}^s(\Omega)$, для которой последовательность $\chi_v v_k$, где $v \in \mathbf{N}$, является фундаментальной в $H^s(\mathbf{R}^n)$.

Так как $H^s(\mathbf{R}^n)$ гильбертово пространство, то в $H^s(\mathbf{R}^n)$ существует $\lim_{k \rightarrow \infty} \chi_v v_k = w_v$, где $v \in \mathbf{N}$. Следовательно, $\lim_{k \rightarrow \infty} \chi_v v_k = w_v$ в $S'(\mathbf{R}^n)$, а значит, и в $D'(\Omega)$ (так как $S'(\mathbf{R}^n) \subset D'(\mathbf{R}^n) \subset D'(\Omega)$).

Пусть Ω_ν – расширяющаяся последовательность открытых подмножеств в Ω , удовлетворяющих условиям $\Omega_\nu \subset K_\nu$ при всех $\nu \in \mathbf{N}$ и

$$\bigcup_{\nu=1}^{\infty} \Omega_\nu = \Omega. \text{ Тогда очевидно } w_\nu|_{\Omega_\nu \cap \Omega_{\nu'}} = w_{\nu'}|_{\Omega_\nu \cap \Omega_{\nu'}} \text{ для любых } \nu, \nu' \in \mathbf{N}.$$

Используя теперь разбиение единицы, получим, что существует такое распределение $w \in D'(\Omega)$, для которого $w|_{\Omega_\nu} = w_\nu|_{\Omega_\nu}$ при всех $\nu \in \mathbf{N}$. При этом $w = \lim_{k \rightarrow \infty} v_k$ в $D'(\Omega)$, а $\chi_\nu w = \lim_{k \rightarrow \infty} \chi_\nu v_k$ в $H^s(\mathbf{R}^n)$ при всех $\nu \in \mathbf{N}$.

Таким образом, доказана полнота пространства $H_{loc}^s(\Omega)$.

Непрерывность вложений $E(\Omega) \subset H_{loc}^s(\Omega) \subset D'(\Omega)$ и плотность множества $C^\infty(\Omega)$ в пространстве $H_{loc}^s(\Omega)$ легко следуют из непрерывности вложений $D(\Omega) \subset S(\mathbf{R}^n) \subset H^s(\mathbf{R}^n) \subset S'(\mathbf{R}^n)$ и плотности множества $S(\mathbf{R}^n)$ в пространстве $H^s(\mathbf{R}^n)$ (см. теорему 4.1). \square

Следствие 4.4. 1) Пусть $\varphi \in S(\mathbf{R}^n)$, $f \in H^s(\mathbf{R}^n)$, где $s \in \mathbf{R}$. Тогда $\varphi f \in H^s(\mathbf{R}^n)$ и $\|\varphi f\|_s \leq C_\varphi \|f\|_s$, где постоянная C_φ зависит только от функции φ .

2) Пусть $\psi \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $g \in H^s(\Omega)$, где $s \in \mathbf{R}$ и Ω – ограниченная область в \mathbf{R}^n с гладкой границей.

Доказательство. Утверждение 1) данного следствия содержится в доказательстве теоремы 4.4. Утверждение 2) следует из теоремы о продолжении функции из $C^\infty(\overline{\Omega})$ до функции $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ (см. замечание 3.7), определения пространства $H^s(\Omega)$ и утверждения 1) данной леммы. \square

Утверждение 4.8. Пусть $v \in H^s(\mathbf{R}^n)$, где $s \in \mathbf{R}$, $v_h = v * \omega_h$. Тогда $v_h \rightarrow v$ в $H^s(\mathbf{R}^n)$ при $h \rightarrow 0+$.

Доказательство. Требуется доказать, что

$$\|v - v_h\|_s^2 = (2\pi^{-n}) \int \langle \xi \rangle^{2s} |\tilde{v}(\xi) - \tilde{v}_h(\xi)|^2 \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0+.$$

Заметим, что $v_h(\xi) = \overline{v * \omega_h}(\xi) = \tilde{v}(\xi) \tilde{\omega}_h(\xi) = \tilde{v}(\xi) \tilde{\omega}(h\xi)$, так как

$$\tilde{\omega}_h(\xi) = h^{-n} \int e^{-ix \cdot \xi} \omega\left(\frac{x}{h}\right) dx = \int e^{-ihy \cdot \xi} \omega(y) dy = \tilde{\omega}(h\xi).$$

Далее, $|\tilde{\omega}(h\xi)| = \left| \int e^{-ihy \cdot \xi} \omega(y) dy \right| \leq \int \omega(y) dy = 1$ при всех $h > 0$ и всех $\xi \in \mathbf{R}^n$.

Кроме того, имеем

$$|\tilde{\omega}(h\xi) - 1| = |\tilde{\omega}(h\xi) - \tilde{\omega}(0)| = \left| \int e^{-ihy \cdot \xi} \omega(y) dy - \int \omega(y) dy \right| \leq \int \omega(y) |e^{-ihy \cdot \xi} - 1| dy \rightarrow 0$$

при $h \rightarrow 0+$ равномерно на каждом компактном множестве $k \subset \mathbf{R}_\xi^n$.

Отсюда, используя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, получаем

$$\int \langle \xi \rangle^{2s} |\tilde{v}(\xi) - \tilde{v}_h(\xi)|^2 d\xi = \int \langle \xi \rangle^{2s} |\tilde{v}(\xi)|^2 |1 - \tilde{\omega}(h\xi)|^2 d\xi \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0+. \quad \square$$

4.2. ТЕОРЕМА СОБОЛЕВА И ЕЁ СЛЕДСТВИЯ

Для пространств $H^s(\mathbf{R}^n)$, где $s \in \mathbf{R}$, довольно легко доказывается вложение $H^s(\mathbf{R}^n) \subset C_b^k(\mathbf{R}^n)$ при $s > k + n/2$. При $s \in \mathbf{Z}_+$ этот результат был получен С.Л. Соболевым, а при $s \in \mathbf{R}$ — Л.Н. Слободецким.

Обозначим $\|v\|_{(k)} = \|v\|_{C_b^k(\mathbf{R}^n)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \mathbf{R}^n} (\partial^\alpha v(x))$, где $v \in C_b^k(\mathbf{R}^n)$.

Теорема 4.5. Пусть $v \in H^s(\mathbf{R}^n)$, где $s \in \mathbf{R}$, $s > k + n/2$ и $k \in \mathbf{Z}_+$. Тогда функция v совпадает почти всюду с функцией $w \in C_b^k(\mathbf{R}^n)$ и при этом

$$\|w\|_{(k)} \leq C \|v\|_s, \quad (4.4)$$

где постоянная C не зависит от функции v .

Доказательство. Докажем вначале неравенство $\|w\|_{(k)} \leq C \|v\|_s$ при $v \in S(\mathbf{R}^n)$. Так как $v(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{-ix \cdot \xi} \tilde{v}(\xi) d\xi$, то

$$\partial^\alpha v(x) = (2\pi)^{-n} \int (i\xi)^\alpha e^{-ix \cdot \xi} \tilde{v}(\xi) d\xi.$$

Отсюда и из неравенства Коши — Буняковского получим

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha v(x)| &= (2\pi)^{-n} \int |\xi|^\alpha |\tilde{v}(\xi)| d\xi = (2\pi)^{-n} \int \langle \xi \rangle^s |v(\xi)| |\xi|^\alpha \langle \xi \rangle^{-s} d\xi \leq \\ &\leq (2\pi)^{-n} \left(\int \langle \xi \rangle^{2s} |v(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \left(\int \langle \xi \rangle^{2|\alpha|-2s} d\xi \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

так как $|\xi^\alpha| \leq |\xi|^\alpha \langle \xi \rangle^{|\alpha|}$ при всех $\xi \in \mathbf{R}^n$. При $2(|\alpha| - s) < -n$ последний интеграл сходится, следовательно, при $|\alpha| \leq k$ выполняется неравенство $|\partial^\alpha v(x)| \leq C_1 \|v\|_s$ при всех $x \in \mathbf{R}^n$ (так как $2|\alpha| - 2s \leq 2k - 2s < -n$ в силу условия $s > k + n/2$). Суммируя эти неравенства по α при $|\alpha| \leq k$, получим, что $\|v\|_{(k)} \leq C \|v\|_s$ для всех $v \in S(\mathbf{R}^n)$.

Пусть $v \in H^s(\mathbf{R}^n)$. По теореме 4.1 пространство $S(\mathbf{R}^n)$ плотно в $H^s(\mathbf{R}^n)$, а значит существует последовательность $v_m \subset S(\mathbf{R}^n)$, сходящаяся к функции v в $H^s(\mathbf{R}^n)$. В силу доказанного неравенства (4.4) для данной функции $v_m - v_l$ имеем $\|v_m - v_l\|_{(k)} \leq C \|v_m - v_l\|_s$ при всех $m, l \in \mathbf{N}$. Следовательно, последовательность v_m является фундаментальной в $C_b^k(\mathbf{R}^n)$ и, в силу полноты этого пространства, имеет предел $w \in C_b^k(\mathbf{R}^n)$.

Так как их сходимостей в $H^s(\mathbf{R}^n)$ или в $C_b^k(\mathbf{R}^n)$ следует сходимость в $D'(\mathbf{R}^n)$, то $\langle v, \varphi \rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} \langle v_m, \varphi \rangle = \langle w, \varphi \rangle$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Таким образом, $\int v \varphi dx = \int w \varphi dx$ при всех $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, а значит, в силу основной леммы вариационного исчисления $v = w$ почти всюду на \mathbf{R}^n .

Следствие 4.5. Пусть Ω – ограниченная область в \mathbf{R}^n с гладкой границей или $\Omega = \mathbf{R}^n$, $s > k + n/2$, где $k \in \mathbf{Z}_+$. Тогда имеются непрерывные вложения 1) $H^s(\Omega) \subset C_b^k(\Omega)$, 2) $H_{loc}^s(\Omega) \subset C^k(\Omega)$.

Доказательство получается непосредственно из теоремы 4.4 и определений пространства $H^s(\Omega)$ и $H_{loc}^s(\Omega)$. \square

Замечание 4.3. Непрерывное вложение $H_{loc}^s(\Omega) \subset C^k(\Omega)$, где $s > k + n/2$ очевидно выполняется для любых областей Ω в \mathbf{R}^n .

Следствие 4.6. Имеет место вложение множеств $E'(\mathbf{R}^n) \subset \bigcup_s H^s(\mathbf{R}^n)$.

Доказательство. Пусть $v \in E'(\mathbf{R}^n)$, $\text{supp } v \subset K \subset\subset \mathbf{R}^n$. Тогда по определению распределения из $E'(\mathbf{R}^n)$ имеем

$$|\langle v, \varphi \rangle| \leq C_2 \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \quad \varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^n),$$

где $m \in \mathbf{N}$ и постоянная C_2 не зависит от φ . В силу неравенства (4.4) отсюда следует, что $|\langle v, \varphi \rangle| \leq C \cdot C_2 \|\varphi\|_s$, где, например, $s = m + [n/2] + 1$.

Отсюда следует, что v является линейным непрерывным функционалом над пространством $H^s(\mathbf{R}^n)$. По теореме 4.2 и замечанию 4.1 существует распределение $w \in H^{-s}(\mathbf{R}^n)$, для которого $|\langle v, \varphi \rangle| = |\langle w, \varphi \rangle|$ при всех $\varphi \in S(\mathbf{R}^n)$. Так как $S(\mathbf{R}^n)$ плотно в пространстве $E(\mathbf{R}^n)$, то распределения v и w можно отождествить. \square

Замечание 4.4. Распределение $v = \sum_{j=1}^{\infty} \delta^{(j)}(x-j) \in D'(\mathbf{R})$, как легко проверить, не принадлежит пространству $H^s(\mathbf{R})$ ни при каких s (задача 4.1). Следовательно, $D'(\mathbf{R})$ не содержится в $\bigcup_s H^s(\mathbf{R}^n)$. Однако любое распределение $v \in D'(\mathbf{R}^n)$ может быть представлено как предел $v = \lim_{S \rightarrow -\infty} v_S$ в $D'(\mathbf{R}^n)$, где $v_S \in H^s(\mathbf{R}^n)$. Это следует из того, что для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ существует $s \in \mathbf{R}$, для которого $\varphi u \in H^s(\mathbf{R}^n)$ (задача 4.2).

4.3. ТЕОРЕМЫ О СЛЕДАХ

Теорема 4.6. Пусть $s > 1/2$, $x = (x', x_n) \in \mathbf{R}^n$, $n \geq 2$. Тогда линейный оператор следа (ограничения) $\gamma: H^s(\mathbf{R}^n) \rightarrow H^{s-1/2}(\mathbf{R}^{n-1})$, определенный на пространстве $S(\mathbf{R}^n)$ по формуле $(\gamma v)(x') = v(x', 0)$, является непрерывным.

Доказательство. Пусть $v \in S(\mathbf{R}^n)$, $w(x') = v(x', 0)$, где $x' \in \mathbf{R}^{n-1}$. Тогда преобразование Фурье $\tilde{v}(\xi) \in S(\mathbf{R}^n)$. По формуле обобщения преобразования Фурье и по теореме Фубини имеем

$$w(x') = v(x', 0) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{ix' \cdot \xi'} \tilde{v}(\xi', \xi_n) d\xi' d\xi_n = \int_{\mathbf{R}^n} e^{ix' \cdot \xi'} d\xi' \int_{\mathbf{R}} \tilde{v}(\xi', \xi_n) d\xi_n \text{ при всех } x' \in \mathbf{R}^{n-1}.$$

Отсюда, в силу изоморфизма преобразования Фурье на пространстве $S(\mathbf{R}^{n-1})$, получаем равенство

$$\tilde{w}(\xi') = \int_{\mathbf{R}} \tilde{v}(\xi', \xi_n) d\xi_n. \quad (4.5)$$

Докажем теперь ограниченность оператора γ на функциях из $S(\mathbf{R}^n)$, т.е. оценку $\|w\|'_{s-1/2} \leq C \|v\|_s$ при всех $v \in S(\mathbf{R}^n)$, где $w = w(x') = v(x', 0)$, $\|\cdot\|'_{s-1/2}$ – норма в пространстве $H^{s-1/2}(\mathbf{R}^{n-1})$, а постоянная C не зависит от v .

По определению нормы в пространстве $H^{s-1/2}(\mathbf{R}^{n-1})$ имеем

$$(\|w\|'_{s-1/2})^2 = \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \langle \xi' \rangle^{2s-1} |\tilde{w}(\xi')|^2 d\xi'. \quad (4.6)$$

С другой стороны, из формулы (4.3) и неравенства Коши – Буняковского получаем, что

$$\begin{aligned} |\tilde{w}(\xi')|^2 &= \left| \int_{\mathbf{R}} \tilde{v}(\xi', \xi_n) d\xi_n \right|^2 = \left| \int_{\mathbf{R}} \langle \xi \rangle^{-s} \langle \xi \rangle^s \tilde{v}(\xi) d\xi_n \right|^2 \\ &\leq \int_{\mathbf{R}} \langle \xi \rangle^{-2s} d\xi_n \int_{\mathbf{R}} \langle \xi \rangle^{2s} |\tilde{v}(\xi)|^2 d\xi_n. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Оценим теперь интеграл $\int_{\mathbf{R}} \langle \xi \rangle^{-2s} d\xi_n$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} \langle \xi \rangle^{-2s} d\xi_n &= \int_{\mathbf{R}} (1 + |\xi|^2)^{-s} d\xi_n = \int_{\mathbf{R}} (1 + |\xi'|^2 + |\xi_n|^2)^{-s} d\xi_n = \\ &= (1 + |\xi'|^2)^{-s} \int_{\mathbf{R}} (1 + (\frac{\xi_n}{\sqrt{1 + |\xi'|^2}})^2)^{-s} d\xi_n = (1 + |\xi'|^2)^{-s+1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + t^2)^{-s} dt \end{aligned}$$

(последнее равенство получено заменой в интеграле вида $t = \frac{\xi_n}{\sqrt{1 + |\xi'|^2}}$).

Так как $s > 1/2$, то $\int_{-\infty}^{+\infty} (1 + t^2)^{-s} dt < \infty$ и, значит, $\int_{\mathbf{R}} \langle \xi \rangle^{-2s} d\xi \leq C (1 + |\xi'|^2)^{-s+1/2}$,

где $C = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + t^2)^{-s} dt$.

Отсюда и из неравенства (4.7) следует, что

$$|\tilde{w}(\xi')|^2 \leq C (1 + |\xi'|^2)^{-s+1/2} \cdot \int_{\mathbf{R}} \langle \xi \rangle^{2s} |\tilde{v}(\xi)|^2 d\xi_n.$$

Используя это неравенство и равенство (4.6), получим

$$\begin{aligned} (\|w\|'_{s-1/2})^2 &= \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \langle \xi' \rangle^{2s-1} |w(\xi')|^2 d\xi' \leq \\ &\leq C \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \langle \xi' \rangle^{2s-1} \cdot \langle \xi' \rangle^{-2s+1} \left(\int_{\mathbf{R}} \langle \xi \rangle^{2s} |\tilde{v}(\xi)|^2 d\xi_n \right) d\xi' = \\ &= C \int_{\mathbf{R}^n} \langle \xi \rangle^{2s} |\tilde{v}(\xi)|^2 d\xi = C \|v\|_s^2 \end{aligned}$$

(предпоследнее равенство следует из теоремы Фубини). \square

Следствие 4.7. При $s > 1/2$ оператор следа $\gamma: H^s(\mathbf{R}^n) \rightarrow H^{s-1/2}(\mathbf{R}^{n-1})$ с областью определения $S(\mathbf{R}^n)$ однозначно продолжается до линейного непрерывного оператора с областью определения $H^s(\mathbf{R}^n)$.

Доказательство очевидно в силу плотности $S(\mathbf{R}^n)$ в пространстве $H^s(\mathbf{R}^n)$. \square

Определение 4.6. Следом (ограничением) функции $v \in H^s(\mathbf{R}^n)$ (при $s > 1/2$) на гиперплоскость $x_n = 0$ называется функция $\gamma v \in H^{s-1/2}(\mathbf{R}^{n-1})$, где $\gamma: H^s(\mathbf{R}^n) \rightarrow H^{s-1/2}(\mathbf{R}^{n-1})$ – оператор следа.

Замечание 4.5. След γv функции $v \in H^s(\mathbf{R}^n)$ на гиперплоскость $x_n = 0$ обозначается также $v|_{x_n=0}$. В случае $v \in H^s(\mathbf{R}^n) \setminus S(\mathbf{R}^n)$ след $v|_{x_n=0}$ можно получить как предел в $H^{s-1/2}(\mathbf{R}^{n-1})$ последовательности $v_m|_{x_n=0}$, где $v_m \in S(\mathbf{R}^n)$ и $\lim_{m \rightarrow \infty} v_m = v$ в $H^s(\mathbf{R}^n)$. При этом след $v|_{x_n=0}$ как предел в $H^{s-1/2}(\mathbf{R}^{n-1})$ не зависит, очевидно, от аппроксимирующей последовательности.

Замечание 4.6. Оператор следа $\gamma: H^s(\mathbf{R}^n) \rightarrow H^{s-1/2}(\mathbf{R}^{n-1})$ на самом деле является эпиморфизмом (см., например, [32], гл. 2). Отметим также, что при $s \leq 1/2$ утверждение теоремы 4.6 неверно.

Следствие 4.8. Пусть $v \in H^s(\mathbf{R}^n)$ и $s > k + 1/2$, где $k \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$. Тогда оператор следа (ограничения) $\gamma_j: H^s(\mathbf{R}^n) \rightarrow H^{s-j-1/2}(\mathbf{R}^{n-1})$, определенный на пространстве $S(\mathbf{R}^n)$ по формуле $(\gamma_j v)(x') = \partial_n^j v(x', 0)$, $j = 1, \dots, k$, является непрерывным и продолжается по непрерывности на $H^s(\mathbf{R}^n)$.

Доказательство следует непосредственно из непрерывности оператора дифференцирования $\partial_n^j: H^s(\mathbf{R}^n) \rightarrow H^{s-j}(\mathbf{R}^n)$ (утверждение 4.4) и теоремы 4.6. \square

В теории линейных краевых задач используется и обратное утверждение к следствиям 4.7 и 4.8.

Теорема 4.7. Пусть функции $\varphi_j \in H^{s-j-1/2}(\mathbf{R}^{n-1})$, где $j = 0, 1, \dots, k$, где $s > k + 1/2$. Тогда существует функция $v \in H^s(\mathbf{R}^n)$, для которой

$$(\gamma_j v)(x') = \partial_n^j v(x', 0) = \varphi_j(x'), \quad j = 0, 1, \dots, k \quad (\gamma_0 = \gamma).$$

Доказательство. Выберем такую функцию $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, что $\chi(t) = 1$ в окрестности точки $t = 0$. Определим теперь искомую функцию v через её частичное преобразование Фурье $\tilde{v}(\xi', x_n)$ по переменным $x' \in \mathbf{R}^{n-1}$ по формуле

$$\tilde{v}(\xi, x_n) = \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} (ix_n)^j \chi(\langle \xi' \rangle x_n) \tilde{\varphi}_j(\xi').$$

Очевидно, что $\tilde{v}(\xi', 0) = \tilde{\varphi}_0(\xi')$, $\partial_n \tilde{v}(\xi', 0) = \tilde{\varphi}_1(\xi')$, ..., $\partial_n^k \tilde{v}(\xi', 0) = \tilde{\varphi}_k(\xi')$. Проверим теперь, что $v \in H^s(\mathbf{R}^n)$.

Так как преобразование Фурье по x_n функции $(ix_n)^j f(x_n)$ равно $\tilde{f}^{(j)}(\xi_n)$, а преобразование Фурье по x_n функции $g(\lambda x_n)$ равно $\lambda^{-1} \tilde{g}(\lambda^{-1} \xi_n)$ при $0 \neq \lambda \in \mathbf{R}$, то

$$\|v\|_s^2 = \int \langle \xi \rangle^{2s} |\tilde{v}(\xi)|^2 d\xi \leq \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!^2} \int \langle \xi \rangle^{2s} |\tilde{\varphi}_j(\xi')|^2 \langle \xi' \rangle^{-2j-2} |\chi^{(j)}(\langle \xi' \rangle \xi_n)|^2 d\xi.$$

Заменим в последнем интеграле $\langle \xi' \rangle \xi_n$ на η_n . Тогда получим

$$\|v\|_s^2 \leq \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!^2} \int |\tilde{\varphi}_j(\xi')|^2 (1 + |\xi'|^2)^{-\frac{2j+1}{2} + s} |\chi^{(j)}(\eta_n)|^2 (1 + \eta_n^2)^s d\xi' d\eta_n \leq C \sum_{j=0}^k \left(\|\varphi_j\|'_{s-j-\frac{1}{2}} \right)^2,$$

так как $\tilde{\chi}(x_n) \in S(\mathbf{R})$ (здесь $\|\cdot\|'_{s-j-1/2}$ – норма в $H^{s-j-1/2}(\mathbf{R}^{n-1})$).

Отсюда получаем, что $v \in H^s(\mathbf{R}^n)$ и $\partial_n^j v(x', 0) = \tilde{\varphi}_j(x')$, $j = 0, 1, \dots, k$. \square

Теорема 4.8. Пусть Ω – ограниченная область в \mathbf{R}^n с гладкой границей Γ . Тогда при $s > 1/2$ оператор следа $\gamma: H^s(\Omega) \rightarrow H^{s-1/2}(\Gamma)$, определенный на функциях $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ по формуле $(\gamma v)(x) = v(x)$ при $x \in \Gamma$, является непрерывным и продолжается по непрерывности на $H^s(\Omega)$.

Схема доказательства. Выбором таких локальных координат $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ в окрестности гладкого куска Γ_0 поверхности Γ , что Γ_0 станет куском гиперплоскости $\{x: x_n = 0\}$, по существу, сводится к теореме 4.6. При этом используется подходящее покрытие границы Γ конечным

множеством открытых шаров, а также разбиение единицы в окрестности $\overline{\Omega}$ (см. подробное доказательство, например, в [27], гл. 3). \square

Следствие 4.9. Пусть Ω – ограниченная область в \mathbf{R}^n с гладкой границей Γ , $s > k + 1/2$, где $k \in \mathbf{R}$. Тогда операторы следов $\gamma_j : H^s(\Omega) \rightarrow H^{s-j-1/2}(\partial\Omega)$, определенные на функциях $C^\infty(\overline{\Omega})$ по формулам $(\gamma_j v)(x) = \frac{\partial^j v(x)}{\partial \nu^j}$ при $x \in \Gamma$, $j = 0, 1, \dots, k$, где $\nu = \nu(x)$ – поле нормалей к Γ , являются непрерывными и продолжаются по непрерывности на $H^s(\Omega)$.

Схема доказательства. Для доказательства существования следа $\left. \frac{\partial^j v(x)}{\partial \nu^j} \right|_\Gamma$ нужно выбрать в окрестности гладкого куска Γ_0 такие локальные координаты $x = (x_1, \dots, x_n)$, что Γ_0 станет куском гиперплоскости $\{x : x_n = 0\}$ и $\nu = (0, 0, \dots, 0, 1)$. Но тогда $\frac{\partial^j v}{\partial \nu^j} = \frac{\partial^j v}{\partial x_n^j}$ и доказательство, по существу, сводится к следствию 4.8. При этом, так же как и при доказательстве теоремы 4.8, используется конечное покрытие Γ и соответствующее разбиение единицы в окрестности $\overline{\Omega}$ (см. [27], гл. 3). \square

Следствие 4.10. В условиях следствия 4.9 определен след $Bv|_\Gamma$, где $B = B(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq k} b_\alpha(x) D^\alpha$ – дифференциальный оператор порядка k с коэффициентами $b_\alpha \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $|\alpha| \leq k$. При этом оператор $\gamma B : H^s(\Omega) \rightarrow H^{s-k-1/2}(\Gamma)$ – непрерывен на $H^s(\Omega)$.

Доказательство сводится к теореме 4.8, так как при $v \in H^s(\Omega)$ и оператор $\partial^\alpha : H^s(\Omega) \rightarrow H^{s-|\alpha|}(\Omega)$ является непрерывным. \square

4.4. КОМПАКТНЫЕ ВЛОЖЕНИЯ

Теорема 4.9. Пусть Ω – ограниченная область в \mathbf{R}^n с гладкой границей и s, t – вещественные числа, $s < t$. Тогда оператор вложения $id: H^t(\Omega) \rightarrow H^s(\Omega)$ является вполне непрерывным.

Доказательство. Сначала докажем, что компактным является вложение $\mathring{H}^t(\bar{\Omega}) \subset \mathring{H}^s(\bar{\Omega})$, где $s < t$.

Пусть последовательность $v_k \in \mathring{H}^t(\bar{\Omega})$ и $\|v_k\|_t \leq 1$. Требуется доказать, что из этой последовательности можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся в $H^s(\mathbf{R}^n)$.

Выберем такую функцию $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, что $\chi(x) = 1$ в окрестности $\bar{\Omega}$. Тогда $v_k = \chi v_k$ на Ω и, значит, $\tilde{v}_k(\xi) = F(\chi v_k)(\xi) = (2\pi)^{-n} \int \tilde{v}_k(\eta) \tilde{\chi}(\xi - \eta) d\eta$. Так как $1 + |\xi| \leq (1 + |\xi - \eta|)(1 + |\eta|)$ при всех $\xi, \eta \in \mathbf{R}^n$, то для любого $s \in \mathbf{R}$ выполняется неравенство $(1 + |\xi|)^s \leq (1 + |\xi - \eta|)^{|s|} (1 + |\eta|)^s$, $\xi, \eta \in \mathbf{R}^n$. Отсюда в силу неравенства Коши – Буняковского получим

$$\begin{aligned} (1 + |\xi|)^s |\tilde{v}_k(\xi)| &\leq (2\pi)^{-n} \int (1 + |\eta|)^s |v_k(\eta)| (1 + |\xi - \eta|)^{|s|} |\tilde{\chi}(\xi - \eta)| d\eta \leq \\ &\leq (2\pi)^{-n} \left(\int (1 + |\eta|)^{2s} |v_k(\eta)|^2 d\eta \right)^{1/2} \left(\int (1 + |\xi - \eta|)^{2|s|} |\tilde{\chi}(\xi - \eta)|^2 d\eta \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Аналогично из равенства $\partial_{\xi_j} \tilde{v}_k(\xi) = (2\pi)^{-n} \int \tilde{v}_k(\eta) \partial_{\xi_j} \tilde{\chi}(\xi - \eta) d\eta$ получается оценка

$$(1 + |\xi|)^s |\partial_{\xi_j} \tilde{v}_k(\xi)| \leq (2\pi)^{-n} \left(\int (1 + |\eta|)^{2s} |\tilde{v}_k(\eta)|^2 d\eta \right)^{1/2} \left(\int (1 + |\xi - \eta|)^{2|s|} |\partial_{\xi_j} \tilde{\chi}(\xi - \eta)|^2 d\eta \right)^{1/2}.$$

Из двух последних оценок следует, что последовательность $\tilde{v}_k(\xi)$ равномерно ограничена и равномерно непрерывна на любом компактном множестве $K \subset \mathbf{R}_\xi^n$. Следовательно, по теореме Арцеля для каждого компакта K существует сходящаяся равномерно на K подпоследовательность.

Выбирая исчерпывающую последовательность компактов K_j в \mathbf{R}^n и диагональную подпоследовательность из равномерно сходящихся на K_j последовательностей, получим подпоследовательность $\tilde{v}_{ij}(\xi)$, равномерно сходящуюся на всех компактных подмножествах в \mathbf{R}^n . Меняя обозначения, будем считать, что этим свойством обладает сама последовательность \tilde{v}_k .

Пусть дано произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда существует такое $R > 0$, что $(1+|\xi|^2)^{(s-t)/2} < \varepsilon$ при $|\xi| > R$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \|v_k - v_l\|_s &= \left(\int (1+|\xi|^2)^s |\tilde{v}_k(\xi) - \tilde{v}_l(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} = \\ &= \left(\int_{|\xi| \leq R} (1+|\xi|^2)^s |\tilde{v}_k(\xi) - \tilde{v}_l(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} + \left(\int_{|\xi| > R} (1+|\xi|^2)^{s-t} (1+|\xi|^2)^t |\tilde{v}_k(\xi) - \tilde{v}_l(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left(\int_{|\xi| \leq R} (1+|\xi|^2)^s |\tilde{v}_k(\xi) - \tilde{v}_l(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} + \varepsilon \|v_k - v_l\|_t. \end{aligned}$$

Так как в силу теоремы Лебега $\left(\int_{|\xi| \leq R} (1+|\xi|^2)^s |\tilde{v}_k(\xi) - \tilde{v}_l(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \rightarrow 0$ при $k, l \rightarrow \infty$, а $\varepsilon \|v_k - v_l\|_t \leq \varepsilon (\|v_k\|_t + \|v_l\|_t) \leq 2\varepsilon$ (так как $\|v_k\|_t \leq 1$ при всех k), то последовательность v_k является фундаментальной в $\mathring{H}^s(\bar{\Omega})$.

Для доказательства компактности вложения $H^t(\bar{\Omega}) \subset H^s(\bar{\Omega})$ при $t > s$ необходимо использовать теорему об операторе продолжения $H^r(\Omega) \rightarrow \mathring{H}^r(\tilde{\Omega})$, где $\Omega \subset \tilde{\Omega}$ (см. [6], гл. 3). \square

Замечание 4.7. Для гладкого компактного многообразия (без края) M можно доказать компактность вложения $H^t(M) \subset H^s(M)$ при $t > s$ (задача 4.3). В то же время вложение $H^t(\mathbf{R}^n) \subset H^s(\mathbf{R}^n)$ не является ни при каких $t > s$ (задача 4.4).

Утверждение 4.9. Пусть $t > s$ и $t \geq -n/2$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta_0 > 0$, что $\|v\|_s \leq \varepsilon \|v\|_t$ при всех $v \in C_0^\infty(\omega)$, где ω – область \mathbf{R}^n с диаметром $\delta < \delta_0$.

Доказательство. Предположим, что данное утверждение неверно. Тогда при всех k существуют такие функции $v_k \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, что $\text{supp } v_k \subset \omega_k$, где ω_k – окрестности начала координат (без ограничения общности) $\text{diam } \omega_k < 1/k$ и $\|v_k\|_t = 1$, $\|v_k\|_s \geq \varepsilon_0 > 0$. Кроме того, не ограничивая общности, очевидно можно считать, что при всех k (в противном случае нужно выбрать подходящую последовательность из последовательности v_k).

По теореме 4.9 последовательность v_k является фундаментальной в $H^s(\omega_1)$, а значит, и в $H^s(\mathbf{R}^n)$. Следовательно, существует такая последовательность v_{k_l} и распределения $v \in H^s(\mathbf{R}^n)$, что $\|v_{k_l} - v\|_s \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$ и $\|v\|_s \geq \varepsilon_0 > 0$.

Так как из сходимости в $H^s(\mathbf{R}^n)$ следует сходимость в v_{k_l} , то $v_{k_l} \rightarrow v$ в $S'(\mathbf{R}^n)$. Следовательно, $\text{supp } v = \{0\}$, поскольку $\text{supp } v_{k_l} \subset \omega_{k_l}$ и $\text{diam } \omega_{k_l} = 1/k_l \rightarrow 0$.

Так как v_{k_l} является ограниченной последовательностью в гильбертовом (и значит рефлексивном) пространстве $H^t(\mathbf{R}^n)$, то существует ее последовательность, слабо сходящаяся к некоторому элементу $w \in H^t(\mathbf{R}^n)$. Без ограничения общности можно считать, что сама последовательность v_k слабо сходится к w . Поскольку $(H^t(\mathbf{R}^n))'$ изоморфно $H^{-t}(\mathbf{R}^n)$, а пространство $S(\mathbf{R}^n)$ плотно в $H^{-t}(\mathbf{R}^n)$, то $\langle v_{k_l}, \varphi \rangle \rightarrow \langle w, \varphi \rangle$ при всех $\varphi \in S(\mathbf{R}^n)$. Следовательно, последовательность v_{k_l} сходится к w в $S'(\mathbf{R}^n)$. Отсюда получаем, что $v = w \in H^t(\mathbf{R}^n)$.

Таким образом, имеем условия $\operatorname{supp} v = \{0\}$ и $v \in H^t(\mathbf{R}^n)$. Из первого условия в силу утверждения 2.2 существует такой оператор $P(D)$, что $v(x) = P(D)\delta(x)$. Но тогда $\tilde{v}(\xi) = P(\xi)$, где $P(\xi)$ – ненулевой полином степени $m \geq 0$. Из условия $v \in H^t(\mathbf{R}^n)$ теперь получаем, что $P(\xi) \langle \xi \rangle^{-s'} \in L_2(\mathbf{R}^n)$, т.е. $m+t < -n/2$. Отсюда следует неравенство $t < -n/2$, которое противоречит условию теоремы $t \geq -n/2$. \square

Замечание 4.8. Условие $t \geq -n/2$ в утверждении 4.9 является необходимым. При $t < -n/2$ соответствующее утверждение неверно, как показывает следующий пример.

Пусть $v_k = \omega_{1/k}$, где $\omega = \omega(x)$ – ядро усреднения. Тогда $\operatorname{diam} \operatorname{supp} v_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ и в силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла

$$\|v_k\|_{s'}^2 = \int \langle \xi \rangle^{2s'} |\tilde{v}_k(\xi)|^2 d\xi = \int \langle \xi \rangle^{2s'} |\tilde{\omega}(\xi/k)|^2 d\xi \rightarrow \int \langle \xi \rangle^{2s'} d\xi < \infty$$

при любом $s' < -n/2$. Следовательно, $\|v_k\|_{s'} \rightarrow C_s = \operatorname{const} > 0$,

$\|v_k\|_t \rightarrow C_t = \operatorname{const} > 0$, если $s < t < -n/2$. Таким образом,

$\|v_k\|_{s'} / \|v_k\|_t \rightarrow C_s / C_t = \operatorname{const} > 0$ при $k \rightarrow \infty$ т.е. $\|v_k\|_{s'} / \|v_k\|_t$ не стремится к нулю при стремлении к нулю $\operatorname{diam} \operatorname{supp} v_k$.

ЗАДАЧИ

4.1. При каких $s \in \mathbf{R}^n$ следующие функции принадлежат пространству $H^s(\mathbf{R}^n)$?

1) $\theta(R-|x|)$; 2) e^{ix^2} ; 3) e^{-ix^2} ; 4) $e^{-a|x|}$, $a > 0$.

4.2. Пусть $f(x) = \theta(x)e^{-ax} \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$, где $\alpha > 0$, $a > 0$.

Проверить, что $f \in H^s(\mathbf{R}^n)$ при всех $s < \alpha - 1/2$.

Указание. Доказать формулу $\tilde{f}(\xi) = \frac{1}{(a+i\xi)^\alpha}$.

4.3. Пусть $k \in \mathbf{N}$ и $\tilde{H}^k(0, 2\pi) = \{v \in H^k(0, 2\pi) : f^{(j)}(0) = f^{(j)}(2\pi), j = 1, \dots, k-1\}$.

Доказать, что $v \in \tilde{H}^k(0, 2\pi)$ в том и только в том случае, когда

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} m^{2k} |c_m|^2 < \infty, \text{ где } c_m = \int_0^{2\pi} v(x) e^{imx} dx, m \in \mathbf{Z}.$$

4.4. Доказать непрерывность оператора $P: H^s(\mathbf{R}^n) \rightarrow H^{s-m}(\mathbf{R}^n)$, где $P = P(D)$ – линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами порядка m .

4.5. При каких $s \in \mathbf{R}^n$ функция $f(x) = \frac{\theta(R-|x|)}{\sqrt{R^2-|x|^2}}$ принадлежит $H^s(\mathbf{R}^n)$?

Г Л А В А 5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В данной главе кратко рассматриваются основные вопросы теории дифференциальных уравнений с *постоянными* коэффициентами. К ним относятся задача о существовании фундаментального решения, неравенство Гординга, теоремы о существовании и о локальной гладкости решений эллиптических уравнений в пространствах Соболева – Слободецкого.

5.1. ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ

Пусть $P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ – линейный дифференциальный оператор порядка m с *постоянными* коэффициентами $a_\alpha \in \mathbb{C}$ при $|\alpha| \leq m$.

Определение 5.1. Распределение $E \in D'(\mathbb{R}^n)$ называется фундаментальным решением дифференциального оператора $P(D)$, если $P(D)E = \delta$, где $\delta = \delta(x)$ – распределение Дирака.

Заметим, что если E – фундаментальное решение оператора $P(D)$ и $f \in E'(\mathbb{R}^n)$, то распределение $u = E * f$ является обобщенным решением уравнения $P(D)u = f$. Это следует из равенств $P(D)u = P(D)(E * f) = (P(D)E) * f = \delta * f = f$ (см. п. 2.3). Таким образом, существование фундаментального решения оператора $P(D)$ обеспечивает существование обобщенного решения уравнения $P(D)u = f$ при любой правой части $f \in E'(\mathbb{R}^n)$. Кроме того, при $u \in E'(\mathbb{R}^n)$ в силу теоремы 2.3 выполняются равенства $E * (P(D)u) = (P(D)E) * u = \delta * u = u$.

Таким образом, свёртка с фундаментальным решением E оператора $P(D)$ является правым и левым обратными операторами к оператору $P(D)$, определённого на пространстве $E'(\mathbf{R}^n)$.

Известны явные фундаментальные решения ряда конкретных операторов с постоянными коэффициентами (в частности, см. примеры 2.1, 2.2).

Впервые теорема о существовании фундаментального решения *произвольного* дифференциального оператора с постоянными коэффициентами была опубликована Л. Эренпрайсом в 1954 году. Затем этот результат был усовершенствован рядом авторов.

Основная идея доказательства сводится к следующим рассуждениям.

Уравнение $f(D)E = \delta$ после применения преобразования Фурье переходит в уравнение $P(\xi)\tilde{E}(\xi) = 1$, где $P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha$ - (полный) символ оператора $P(D)$. Таким образом, вопрос сводится к задаче деления на полином в классе образов Фурье распределений.

Если полином $P(\xi)$ таков, что $|P(\xi)| \geq c = \text{const} > 0$ при всех $\xi \in \mathbf{R}^n$, то распределение $E = F^{-1}(1/P(\xi))$ очевидно является фундаментальным решением оператора $P(D)$. При этом $E \in S'(\mathbf{R}^n)$ и, более того, $E \in H^s(\mathbf{R}^n)$ при $s < -n/2$, так как

$$\|E\|_s^2 = \int |\tilde{E}(\xi)|^2 \langle \xi \rangle^{2s} d\xi = \int \frac{1}{|P(\xi)|^2} \langle \xi \rangle^{2s} d\xi \leq c^{-1} \int \langle \xi \rangle^{2s} d\xi < \infty \text{ при } s < -n/2.$$

Приведенные утверждения не проходят, если полином $P(\xi)$ имеет вещественные нули. В этом случае оказывается приведенное выше доказательство можно модифицировать выходом в комплексную область (только по одной переменной!). Эта модификация была предложена Л. Хёрмандером и использует некоторое подмножество в пространстве $\mathbf{C} \times \mathbf{R}^{n-1}$ переменных $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, которое теперь называется «лестницей» Хёрмандера.

Теорема 5.1. Любой линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами имеет фундаментальное решение.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $n = 1$. Пусть в этом случае число $\tau \in \mathbf{R}$ такое, что $P(\xi + i\tau) \neq 0$ при всех $\xi \in \mathbf{R}$. Определим тогда фундаментальное решение оператора по формуле

$$\langle E, \varphi \rangle = (2\pi)^{-1} \int \frac{\tilde{\varphi}(-\xi - i\tau)}{P(\xi + i\tau)} d\xi, \quad \varphi \in C_0^\infty.$$

Интеграл в этой формуле сходится, так как в данном случае $|P(\xi + i\tau)| \geq c = \text{const} > 0$ при всех $\xi \in \mathbf{R}$, а функция $\tilde{\varphi}(-\xi - i\tau)$ в силу теоремы Пэлли – Винера (теорема 2.8) быстро убывает при $|\xi| \rightarrow \infty$.

Проверим, что определенное таким образом распределение E является фундаментальным решением оператора $P(D)$. При всех $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ имеем

$$\begin{aligned} \langle P(D)E, \varphi \rangle &= \langle E, P(-D)\varphi \rangle = (2\pi)^{-1} \int \frac{P(D)\varphi(-\xi - i\tau)}{P(\xi + i\tau)} d\xi = \\ &= (2\pi)^{-1} \int \frac{P(\xi + i\tau)\tilde{\varphi}(-\xi - i\tau)}{P(\xi + i\tau)} d\xi = (2\pi)^{-1} \int \tilde{\varphi}(-\xi - i\tau) d\xi = \\ &= (2\pi)^{-1} \int \tilde{\varphi}(\xi) d\xi = \varphi(0). \end{aligned}$$

Предпоследнее равенство следует из аналогичности функции $\tilde{\varphi}(\xi)$ в \mathbf{C} , теоремы Коши и быстрого убывания функции $\tilde{\varphi}(-\xi - i\tau)$ при $|\xi| \rightarrow \infty$.

Пусть теперь $n \geq 2$ и $P_m(\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \xi^\alpha$ – главный (старший) символ оператора $P(D)$. Тогда $P_m(\xi)$ – однородный полином порядка m , не равный нулю тождественно.

С помощью поворота осей координат в пространстве \mathbf{R}_ξ^n , т. е. преобразования вида $\xi = U\eta$, где $U^T = U^{-1}$, можно получить полином $P(U\eta)$, у которого коэффициент при η_1^m не равен нулю. Это следует из того, что этот коэффициент, как легко проверить, равен $P_m(c_{11}, \dots, c_{n1})$, где $(c_{11}, \dots, c_{n1})^T$ – первый столбец матрицы U . Так как $P_m(\xi)$ не равно нулю тождественно

на единичной сфере в \mathbf{R}_ξ^n , то в качестве столбца $(c_{11}, \dots, c_{n1})^T$ надо взять какой-либо вектор $\xi^0 \in \mathbf{R}^n$, для которого $|\xi^0| = 1$ и $P_m(\xi^0) \neq 0$. Этот столбец будет определять координаты первого вектора в новой ортонормированной системе координат в \mathbf{R}^n , а остальные векторы в этой системе определим произвольно. Матрица перехода U от исходной системы координат к новой будет удовлетворять в этом случае нужному условию $P_m(c_{11}, \dots, c_{n1}) \neq 0$.

Заметим теперь, что если $F(y)$ – фундаментальное решение оператора $Q(D)$ с символом $Q(\eta) = P(U\eta)$, то, как легко говорить, $E(x) = F(Ux)$ – фундаментальное решение оператора $P(D)$. При этом, в частности, используется сферическая симметричность δ -функции, т.е. равенство $\delta(Ux) = \delta(x)$.

Таким образом, без ограничения общности, можно считать, что коэффициент при ξ_1^m полинома $P(\xi)$ равен единице.

Построим теперь в пространстве $\mathbf{C} \times \mathbf{R}^{n-1}$ «лестницу» Хёрмандера (т.е. некоторое специальное несвязное подмножество в $\mathbf{C} \times \mathbf{R}^{n-1}$). Для этого сначала фиксируем какое-либо $\xi'_0 = (\xi_2^0, \dots, \xi_n^0)$ и рассмотрим многочлен $P(\lambda, \xi')$ относительно $\lambda \in \mathbf{C}$. Если $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ – комплексные корни (с учетом кратных) этого многочлена, то

$$P(\lambda, \xi'_0) = (\lambda - \lambda_1^0) \dots (\lambda - \lambda_m^0). \quad (5.1)$$

Так как различных корней $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ не более m , то в полосе $|\tau_1| \leq m+1$ комплексной плоскости $\lambda = \xi_1 + i\tau$, имеющей ширину $2m+2$, существует прямая $\tau = \tau^0 = const$, расстояние от которой до любого из корней $\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0$ строго больше единицы. Из разложения (5.1) сразу следует, что на этой прямой $|P(\lambda, \xi'_0)| > 1$. Поскольку старший коэффициент многочлена (относительно λ) $P(\lambda, \xi'_0)$ равен единице (и не зависит от ξ'_0), то, в силу теоремы Руше, корни $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ многочлена $P(\lambda, \xi')$ непрерывно зави-

сят от относительных коэффициентов. Выберем теперь в плоскости \mathbb{C} такие малые окрестности точек $\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0$, что расстояние от этих окрестностей до прямой $\tau = \tau^0$ по-прежнему будет строго больше единицы. Тогда, в силу отмеченной непрерывности корней многочлена $P(\lambda, \xi')$ от ξ' , существует такая окрестность точки $\xi'_0 \in \mathbf{R}^{n-1}$, что для этой окрестности корни $\lambda_1(\xi'), \dots, \lambda_m(\xi')$ отстоят от прямой $\tau = \tau^0$ на расстояние строго больше единицы. Используя теперь разложение вида (5.1) при ξ' , принадлежащих выбранной окрестности точки ξ'_0 , выполняется неравенство $|P(\xi', \lambda)| > 1$, где λ лежит на прямой $\tau = \tau^0$ в \mathbb{C} .

Таким образом, каждой точке $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1}$ соответствуют число $\tau \in \mathbf{R}$ и окрестность ω точки ξ' такие, что $|P(\xi_1 + i\tau, \xi')| > 1$ при $\xi' \in \omega$.

Применяя лемму Гейне – Бореля, из покрытия пространства \mathbf{R}^{n-1} окрестностями ω выберем локально конечное (т.е. конечное в каждом шаге) покрытие окрестностями $\omega_1, \omega_2, \dots$. Этим окрестностям $\omega_1, \omega_2, \dots$ соответствуют указанные выше числа τ_1, τ_2, \dots , причем $|\tau_j| \leq m+1$ при всех $j=1, 2, \dots$. Далее, заменим множества ω_1 на $\omega'_1 = \omega_1$, ω_2 на $\omega'_2 = \omega_2 \setminus \omega_1$, ω_3 на $\omega'_3 = \omega_3 \setminus (\omega'_1 \cup \omega'_2)$ и т.д. Таким образом, получим разбиение пространства \mathbf{R}^{n-1} на непересекающиеся подмножества $\omega_1, \omega_2, \dots$ ($\mathbf{R}^{n-1} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \omega'_j$). Лестнице

Хёрмандера H определим теперь как множество точек $(\xi_1 + i\tau, \xi') \in \mathbb{C} \times \mathbf{R}^{n-1}$, для которых $\xi' \in \omega'_j$ при $\tau = \tau_j$, $j=1, 2, \dots$.

С помощью лестницы Хёрмандера определим теперь распределение $E \in D(\mathbf{R}^n)$ ($n \geq 2$) по формуле

$$\langle E, \varphi \rangle = (2\pi)^{-n} \int \frac{\tilde{\varphi}(-\xi_1 - i\tau, \xi')}{P(\xi_1 + i\tau, \xi')} d\xi, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n). \quad (5.2)$$

Интеграл в (5.2) понимается в смысле равенства

$$\int_H \frac{\tilde{\varphi}(-\xi_1 - i\tau, \xi')}{P(\xi_1 + i\tau, \xi')} d\xi = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\omega'_j} d\xi' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\varphi}(-\xi_1 - i\tau_j, \xi')}{P(\xi_1 + i\tau_j, \xi')} d\xi_1. \quad (5.3)$$

При этом интеграл и ряд в правой части равенства (5.3) сходятся, так как $|P(\xi_1 + i\tau_j, \xi')| > 1$ при всех $(\xi_1, \xi') \in \mathbf{R} \times \omega'_j$, $j=1, 2, \dots$, а функция $\tilde{\varphi}(-\xi_1 - i\tau_j, \xi')$ стремится к нулю при $|\xi| \rightarrow \infty$ быстрее любой степени от $1/|\xi|$, причем равномерно по τ при $|\tau| \leq m+1$. Легко проверить также, что определенный равенствами (5.2) и (5.3) функционал E является непрерывным на $D(\mathbf{R}^n)$, т.е. $E \in D'(\mathbf{R}^n)$.

Осталось проверить, что $P(D)E = \delta$. По определению имеем

$$\begin{aligned} \langle P(D)E, \varphi \rangle &= \langle E, P(-D)\varphi \rangle = (2\pi)^{-n} \int_H \frac{P(\xi_1 + i\tau, \xi') \tilde{\varphi}(-\xi_1 - i\tau, \xi')}{P(\xi_1 + i\tau, \xi')} d\xi = \\ &= (-2\pi)^{-n} \int_H \tilde{\varphi}(-\xi_1 - i\tau, \xi') d\xi = (2\pi)^{-n} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\omega'_j} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}(-\xi_1 - i\tau, \xi') d\xi_1. \end{aligned}$$

По теореме Коши внутренние интегралы по прямым $I_m \zeta_1 = \tau_j$, $j=1, 2, \dots$, параллельным вещественной оси, равны интегралу по этой оси (т.к. $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$). Отсюда получаем, что

$$\langle P(D)E, \varphi \rangle = (2\pi)^{-n} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\omega'_j} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}(\xi_1, \xi') d\xi_1 = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} \tilde{\varphi}(\xi) d\xi = \varphi(0)$$

при всех $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Таким образом, $P(D)E = \delta$.

Замечание 5.1. Фундаментальное решение у любого оператора $P(D)$ не единственно, так как если E – фундаментальное решение оператора $P(D)$, то $E_1 = E + v$, где $P(D)v = 0$, также является фундаментальным решением оператора $P(D)$. Имеются глубокие исследования различных фундаментальных решений дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами (см., например, [31], т. 2, [32] и [33]).

5.2. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Определение 5.2. Линейный дифференциальный оператор $P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$, где $a_\alpha = \text{const} \in \mathbb{C}$ при $|\alpha| \leq m$, называется *эллиптическим*, если его *характеристическая форма* (главный символ) $P_m(\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \xi^\alpha \neq 0$ при всех $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus 0$.

Примерами эллиптических операторов являются, как легко проверить, следующие операторы: оператор Лапласа Δ , Δ^k , $D_1^k + iD_2^k$, где $k \in \mathbb{N}$, $\sum_{i,j} a_{ij} D_i D_j$, если $\sum_{i,j} a_{ij} \xi_i \xi_j \geq c |\xi|^2$ при всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, где $c = \text{const} > 0$.

Утверждение 5.1. Оператор $P(D)$ является эллиптическим тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих эквивалентных условий:

- 1) $P_m(\xi) \neq 0$ при $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus 0$;
- 2) $|P_m(\xi)| \geq c_0 |\xi|^m$ при $\xi \in \mathbb{R}^n$, где $c_0 = \text{const} > 0$;
- 3) $|P(\xi)| \geq c_1 |\xi|^m - C_2$ при $\xi \in \mathbb{R}^n$, где $P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha$ - (полный) символ

оператора $P(D)$, c_1, C_2 - некоторые положительные постоянные.

Доказательство. 1) \Rightarrow 2). Пусть $c_0 = \min_{|\xi|=1} |P_m(\xi)| > 0$. Так как $P_m(\xi)$ является однородным полиномом порядка m , то при $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus 0$ имеем

$$|P_m(\xi)| = \left| P_m\left(|\xi| \frac{\xi}{|\xi|}\right) \right| = |\xi|^m \left| P_m\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) \right| \geq c_0 |\xi|^m.$$

Из 2) очевидно следует 1).

2) \Rightarrow 3). Пусть $P(\xi) = P_m(\xi) + Q(\xi)$, где $Q(\xi)$ - полином степени не выше $m-1$. Тогда при всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$c_0 |\xi|^m \leq |P_m(\xi)| = |P(\xi) - Q(\xi)| \leq |P(\xi)| + |Q(\xi)|,$$

т.е. $|P(\xi)| \geq c_0 |\xi|^m - |Q(\xi)| = (c_0 - \varepsilon) |\xi|^m + \varepsilon |\xi|^m - |Q(\xi)|$, где $0 < \varepsilon < c_0$.

Докажем, что существует такая положительная постоянная C_2 , что $\varepsilon |\xi|^m - |Q(\xi)| \geq -C_2$ при всех $\xi \in \mathbf{R}^n$. Так как степень полинома $Q(\xi)$ не больше $m-1$, то $\frac{|Q(\xi)|}{|\xi|^m} \rightarrow 0$ при $|\xi| \rightarrow \infty$.

Следовательно, существует такая постоянная $R > 0$, что $|Q(\xi)|/|\xi|^m \leq \varepsilon$ при $|\xi| \geq R$. Выберем теперь такую постоянную $C_2 > 0$, что $|Q(\xi)| \leq C_2$ при $|\xi| \leq R$. Тогда $|Q(\xi)| \leq \varepsilon |\xi|^m + C_2$ при всех $\xi \in \mathbf{R}^n$.

Таким образом, имеем

$$|P(\xi)| \geq (c_0 - \varepsilon) |\xi|^m - C_2 = c_1 |\xi|^m - C_2 \text{ при всех } \xi \in \mathbf{R}^n, \text{ где } c_1 = c_0 - \varepsilon.$$

3) \Rightarrow 1). Предположим противное, т.е. $P_m(\xi^0) = 0$ при $\xi^0 \neq 0$. Тогда $P(t\xi^0) = P_m(t\xi^0) + P(t\xi^0) - P_m(t\xi^0) = P(t\xi) - P_m(t\xi^0)$ – многочлен по $t \in \mathbf{R}$ степени не выше, чем $m-1$. В силу неравенства 3) теперь получим $|P(t\xi^0)| \geq c_1 |\xi^0|^m t^m - C_2$ при всех $t \in \mathbf{R}$ или $|P(t\xi^0)| + C_2 \geq c_1 |\xi^0|^m t^m$ при всех $t \in \mathbf{R}$.

Так как в левой части последнего неравенства $P(t\xi^0)$ – многочлен по t степени не выше, чем $m-1$, то получим противоречие. \square

Утверждение 5.2. Пусть $P(D)$ – эллиптический дифференциальный оператор порядка m . Тогда все коэффициенты этого оператора при производных D_1^m, \dots, D_n^m отличны от нуля.

Доказательство. Коэффициент оператора $P(D)$ при D_j^m , где $j = 1, \dots, m$, равен $P_m(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \neq 0$ (в векторе $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ все компоненты равны нулю, кроме j -й компоненты, равной единице). \square

Утверждение 5.3. При $n \geq 3$ любой эллиптический оператор $P(D)$ имеет четный порядок.

Доказательство. Пусть $P_m(\xi)$ – характеристическая форма оператора $P(D)$, где $\xi \in \mathbf{R}^n$. При каждом $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1} \setminus 0$ рассмотрим алгебраическое уравнение $P_m(\xi', \lambda) = 0$ относительно λ . В силу эллиптичности оператора $P(D)$ это уравнение при $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1} \setminus 0$ не имеет вещественных корней λ .

Обозначим через $m_+(\xi')$ и $m_-(\xi')$ число (с учетом кратностей) λ корней уравнения $P_m(\xi', \lambda) = 0$ соответственно в верхней и нижней полуплоскостях комплексной плоскости ($\xi' \in \mathbf{R}^{n-1} \setminus 0$). По основной теореме алгебры имеется равенство $m_+(\xi') + m_-(\xi') = m$.

Так как $P_m(\xi) = \sum_{|\varepsilon|=m} a_\varepsilon \xi^\varepsilon$, то

$$P_m(\xi', \lambda) = A_0(\xi') \lambda^m + A_1(\xi') \lambda^{m-1} + \dots + A_m(\xi'), \quad (5.4)$$

где $A_j(\xi') = \sum_{|\alpha'|=j} a_{(\alpha', j)} \xi'^{\alpha'}$ – однородные полиномы по $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1}$ порядка

j , $j = 0, 1, \dots, m$; в частности, $A_0(\xi') = a_{(m, 0, \dots, 0)} = \text{const} \neq 0$.

Из представления (5.4) сразу следует, что если $\lambda_0(\xi')$ является корнем уравнения $\frac{\partial^k P_m(\xi', \lambda)}{\partial \lambda^k} = 0$, $k = 0, \dots, r-1$, (r – кратность корня $\lambda_0(\xi')$), то

$-\lambda_0(\xi')$ является корнем уравнения $\frac{\partial^k P_m(-\xi', \lambda)}{\partial \lambda^k} = 0$, $k = 0, \dots, r-1$. От-

сюда получаем равенства

$$m_+(\xi') = m_-(-\xi'), \quad m_- (\xi') = m_+(-\xi'). \quad (5.5)$$

Так как $A_0 = \text{const}$, то в силу теоремы Руше функции $m_+(\xi')$ и $m_-(\xi')$ локально постоянны, т.е. для любой точки $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1} \setminus 0$ существует окрестность этой точки, в которой эти функции постоянны. Для доказательства этого утверждения рассмотрим, например, замкнутый гладкий контур Γ_+ в верхней полуплоскости комплексной плоскости, содержащий внутри себя все корни многочлена $P(\xi', \lambda) = 0$ с положительной мнимой частью.

Заметим далее, что $P(\tilde{\xi}', \lambda) = P_m(\xi', \lambda) + P_m(\tilde{\xi}', \lambda) - P_m(\xi', \lambda)$, где

$$P_m(\tilde{\xi}', \lambda) - P_m(\xi', \lambda) = [A_1(\tilde{\xi}') - A_1(\xi')] \lambda^{m-1} + \dots + [A_m(\tilde{\xi}') - A_m(\xi')], \quad \xi' \in \mathbf{R}^{n-1} \setminus 0.$$

Пусть $d = \min_{\lambda \in \Gamma_+} |P(\xi', \lambda)|$, где $d > 0$ (т.к. $P(\xi', \lambda) \neq 0$ при $\lambda \in \Gamma_+$). В силу ограниченности $|\lambda|$ на Γ_+ и непрерывности коэффициентов $A_j(\tilde{\xi}')$, $j=1, \dots, m$, существует такая малая окрестность U_+ точки ξ' в $\mathbf{R}^{n-1} \setminus 0$, что $P_m(\tilde{\xi}', \lambda) - P_m(\xi', \lambda) < d$ при всех $\lambda \in \Gamma_+$ и при всех $\tilde{\xi}' \in \tilde{U}_+$. Тогда по теореме Руше внутри контура Γ_+ уравнение $P_m(\tilde{\xi}', \lambda) = 0$ при всех $\tilde{\xi}' \in U_+$ имеет $m_+(\xi')$ корней (как и уравнение $P_m(\xi', \lambda) = 0$).

Аналогично для нижней полуплоскости – внутри некоторого контура Γ_- уравнение $P_m(\tilde{\xi}', \lambda) = 0$ при всех $\tilde{\xi}' \in U_-$ (окрестность точки ξ' в $\mathbf{R}^{n-1} \setminus 0$) имеет $m_-(\xi')$ корней. При этом других корней в нижней и верхней полуплоскостях уравнение $P_m(\tilde{\xi}', \lambda) = 0$ при $\tilde{\xi}' \in \tilde{U}_+ \cap U_-$ не имеет, так как $m_+(\xi') + m_-(\xi') = m$.

Таким образом, $m_+(\tilde{\xi}') = m_+(\xi')$ и $m_-(\tilde{\xi}') = m_-(\xi')$ при всех $\tilde{\xi}' \in \tilde{U}_+ \cap U_-$.

Так как пространство $\mathbf{R}^{n-1} \setminus 0$ при $n \geq 3$ является связным, то из локального постоянства функций $m_+(\xi')$ и $m_-(\xi')$ следует их (глобальное) постоянство на $\mathbf{R}^{n-1} \setminus 0$. Таким образом, $m_+(\xi') = m_+ = const$, $m_-(\xi') = m_- = const$ при всех $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1} \setminus 0$.

Отсюда, используя равенства (5.5) и равенства $m_+ + m_- = m$, получаем, что $m_+ = m_-$ и $2m_+ = m$. Таким образом доказано, что m – четное число. \square

Следствие 5.1. Пусть $P(D)$ – эллиптический дифференциальный оператор и $n \geq 3$. Тогда при всех $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1} \setminus 0$ число λ -корней уравнения $P_m(\xi', \lambda) = 0$ с положительной мнимой частью равно числу корней с отрицательной мнимой частью и равно $m/2$.

Доказательство содержится в доказательстве утверждения 5.3.

Замечание 5.2. При $n = 2$ эллиптический оператор может иметь и нечётный порядок. Наиболее простыми примерами являются операторы $P(D) = D_1^{2k-1} + iD_2^{2k-1}$, где $k \in \mathbb{N}$. Эти же примеры показывают, что и следствие 5.1 при $n = 2$ теряет силу. Однако в случае вещественных коэффициентов оператора $P(D)$ как утверждение 5.3, так и следствие 5.1 остаются справедливыми и при $n = 2$ (задача 5.7).

Следствие 5.2. Пусть $P(D)$ – эллиптический дифференциальный оператор и $n \geq 3$. Тогда для всякой пары линейно независимых векторов $\xi^1, \xi^2 \in \mathbb{R}^n$ многочлен $P_m(\xi^1 + \lambda\xi^2)$ относительно λ имеет $m/2$ корней с положительной мнимой частью.

Доказательство – непосредственное обобщение случая $\xi^1 = (\xi', 0)$, где $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus 0$, $\xi^2 = (0, 1)$, рассмотренного при доказательстве утверждения 5.3 (задача 5.8). \square

Общие свойства решений уравнения $P(D)u = f$, где $P(D)$ – эллиптический оператор (например, свойство локальной гладкости, рассмотренное дальше), выполняется при всех $n \geq 2$. Однако в теории краевых задач для эллиптических уравнений важное значение имеет замечание о числе λ -корней уравнения $P_m(\xi^1 + \lambda\xi^2) = 0$ с положительной мнимой частью, сделанное в следствиях 5.1 и 5.2. В связи с этим, чтобы включить в общую теорию эллиптических краевых задач и случай $n = 2$, часто используется следующее определение.

Определение 5.3. Линейный дифференциальный оператор $P(D)$ порядка $m = 2k$, где $k \in \mathbb{N}$, называется *правильно эллиптическим*, если он эллиптивен и если для всякой пары линейно независимых векторов $\xi^1, \xi^2 \in \mathbb{R}^n$ многочлен $P_m(\xi^1 + \lambda\xi^2)$ от переменной $\lambda \in \mathbb{C}$ имеет k корней с положительной мнимой частью.

Следствие 5.3. При $n \geq 3$ любой эллиптический оператор является собственнo эллиптическим.

Доказательство сразу следует из определения 5.3 и следствия 5.2. \square

Наиболее известным и используемым классом собственнo эллиптических операторов являются *сильно эллиптические* операторы.

Определение 5.4. Линейный дифференциальный оператор $P(D)$ порядка $m = 2k$, где $k \in \mathbb{N}$, называется *сильно эллиптическим*, если существуют такие числа $\gamma \in \mathbb{C}$ и $c > 0$, что $\operatorname{Re}(\gamma P_m(\xi)) \geq c|\xi|^m$ при всех $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Замечание 5.3. Легко проверить, что любой сильно эллиптический оператор является и собственнo эллиптическим, в том числе и при $n = 2$ (задача 5.9). Однако существуют собственнo эллиптические операторы, не являющиеся сильно эллиптическими. Соответствующий пример дает оператор $P(D) = D_1^4 + D_2^4 - D_3^4 + i(D_1^2 + D_2^2)D_3^4$ (задача 5.10).

5.3. ТЕОРЕМА О ЛОКАЛЬНОЙ ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В данном пункте доказывается, что гладкость обобщенных решений эллиптического уравнения $P(D)u = f$ тем выше (в смысле H^s), чем более гладкой является распределение f .

Теорема 5.2. Пусть $s \in \mathbb{R}$ и $P(D)$ – эллиптический оператор порядка m , $P(D)u = f$ в Ω , где Ω – область в \mathbb{R}^n , $u \in D'(\Omega)$ и $f \in H_{loc}^s(\Omega)$. Тогда $u \in H_{loc}^{s+m}(\Omega)$.

Пусть, далее, $h \in C_0^\infty(\Omega)$ и $h(x) = 1$ при $x \in \omega \subset\subset \Omega$. Тогда существует такая постоянная C , зависящая только от S , что

$$\|\varphi v\|_{s+m} \leq C(\|\varphi P(D)v\|_s + \|hv\|_{s+m-1}) \quad (5.6)$$

для всех $\varphi \in C_0^\infty(\omega)$ и всех $v \in H_{loc}^{s+m}(\Omega)$.

Доказательство. В силу теоремы 4.3 для доказательства включения $u \in H_{loc}^{s+m}(\Omega)$ достаточно доказать, что при любых $x^0 \in \Omega$ существует такая функция $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$, для которой $\chi(x^0) \neq 0$ и $\chi u \in H^{s+m}(\Omega)$.

Пусть x^0 – любая точка области Ω , а $\psi(x)$ – некоторая функция из $C_0^\infty(\Omega)$, равная единице в некоторой окрестности ω точки x^0 . Тогда $\psi u \in E'(\Omega)$ (теорема 2.1) и существует $t \in \mathbf{R}$, для которого $\psi u \in H^t(\Omega)$ (следствие 4.4).

Если $t \geq s + m$, то искомая функция $\chi(x)$ равна $\psi(x)$. Если $t < s + m$, то выберем такую функцию $\psi_1 \in C_0^\infty(\omega)$, что $\psi_1(x) = 1$ в некоторой окрестности ω_1 точки x^0 . Положим $u_1 = \psi_1 u$ и $f_1 = P_m(D)u_1$.

В силу обобщенной формулы Лейбница (утверждение 2.1) имеем

$$f_1 = P_m(D)(\psi_1 u) = \psi_1 P_m(D)u + \sum_{|\alpha|=1}^m \frac{1}{\alpha!} (P_m^{(\alpha)}(D)u)(D^\alpha \psi_1).$$

Каждый дифференциальный оператор в последней сумме является оператором порядка не больше чем $m-1$ и его коэффициенты равны нулю вне ω . Отсюда, в силу утверждения 4.4, имеет место включение

$$\left(\sum_{|\alpha|=1}^m \frac{1}{\alpha!} (P_m^{(\alpha)}(D)u)(D^\alpha \psi_1) \right) \in H^{t-m+1}(\mathbf{R}^n).$$

Далее,

$$P_m(D)u = P(D)u + (P_m(D) - P(D))u = f + (P_m(D) - P(D))u,$$

где дифференциальный оператор $P_m(D) - P(D)$ имеет порядок не выше, чем $m-1$. Следовательно, $\psi_1(P_m(D) - P(D))u \in H^{t-m+1}(\mathbf{R}^n)$, а $\psi_1 P_m(D)u \in H^{t_1}(\mathbf{R}^n)$, где $t_1 = \min(s, t - m + 1)$.

Таким образом, получаем, что $f_1 \in H^{t_1}(\mathbf{R}^n)$.

Применяя теперь к равенству $P_m(D)u_1 = f_1$ преобразование Фурье, получим равенство $P_m(\xi)\tilde{u}_1(\xi) = \tilde{f}_1(\xi)$. Из последнего равенства и из условия эллиптичности получаем, что $c_0|\xi|^m|\tilde{u}_1(\xi)| \leq |P_m(\xi)\tilde{u}_1(\xi)| = |\tilde{f}_1(\xi)|$ и $(1+|\xi|^2)^m|\tilde{u}_1(\xi)|^2 \leq C(|\tilde{f}_1(\xi)|^2 + |\tilde{u}_1(\xi)|^2)$ при всех $\xi \in \mathbf{R}^n$, где $C = const > 0$.

Обе части последнего неравенства умножим на $(1+|\xi|^2)^{t_1}(1+|\delta\xi|^2)^{-1}$, где $\delta > 0$, и проинтегрируем их по $\xi \in \mathbf{R}^n$. Таким образом получим неравенство

$$\begin{aligned} & \int (1+|\xi|^2)^{t_1+m} (1+|\delta\xi|^2)^{-1} |\tilde{u}_1(\xi)|^2 d\xi \leq \\ & \leq C \int (1+|\xi|^2)^{t_1} (1+|\delta\xi|^2)^{-1} (|\tilde{f}_1(\xi)|^2 + |\tilde{u}_1(\xi)|^2) d\xi, \end{aligned}$$

$$\text{т.е. } \|u_1\|_{t_1+m-1,\delta}^2 \leq C (\|f_1\|_{t_1-1,\delta}^2 + \|u_1\|_{t_1-1,\delta}^2).$$

Правая часть этого неравенства ограничена равномерно по $\delta > 0$, так как $f_1 \in H^t(\mathbf{R}^n)$ и $u_1 \in H^t(\mathbf{R}^n) \in H^{t_1}(\mathbf{R}^n)$ (последнее включение верно в силу неравенства $t_1 \leq t - m + 1$, т.е. $t \leq t_1 + m - 1 \geq t_1$). Следовательно, левая часть неравенства также ограничена равномерно по $\delta > 0$. Применяя теперь утверждение 4.3, получим включение $u_1 \in H^{t_1+m}(\mathbf{R}^n)$ и неравенство

$$\|u_1\|_{t_1+m} \leq C_1 (\|f_1\|_{t_1} + \|u_1\|_{t_1}), \quad \text{где } C_1 = const > 0$$

Если $t \geq s + m - 1$, то $t_1 + m = \min(t+1, s+m) = s+m$ и $\psi_1 u \in H^{s+m}$. В этом случае положим $\chi = \psi_1$. Если же $t < s + m - 1$, то надо повторить предыдущие рассуждения. Точнее, надо выбрать такую функцию $\psi_2 \in C_0^\infty(\omega_1)$, что $\psi_2(x) = 1$ в некоторой окрестности точки x^0 . В результате получим, что $u_2 = \psi_2 u \in H^{t_2+m}(\mathbf{R}^n)$, где $t_2 = \min(t - m + 2, s)$. Это следует из равенств $u_2 = \psi_2 u = \psi_2 \psi_1 u = \psi_2 u_1$, неравенства $t_1 + m \geq t + 1$ и включения $u_1 \in H^{t_1+m}(\mathbf{R}^n) \in H^{t+1}(\mathbf{R}^n)$.

Если теперь $t \geq s + m - 2$, то $t_2 + m = \min(t + 2, s + m) = s + m$, $\psi_2 u \in H^{s+m}(\Omega)$ и $\chi = \psi_2$. Если же $t < s + m - 2$, то предыдущие рассуждения повторяются.

Поскольку существует такое $\kappa \in \mathbf{N}$, что $t \geq s + m - \kappa$, то $\chi = \psi_\kappa$, где ψ_κ – соответствующая функция из $C_0^\infty(\omega_{\kappa-1})$, равная единице в окрестности ω_κ точки x^0

Таким образом, доказано включение $u \in H_{loc}^{s+m}(\Omega)$.

Докажем теперь неравенство (5.6). Из предыдущих рассуждений следует неравенство

$$\|\varphi v\|_{s+m} \leq C(\|P(\varphi v)\|_s + \|\varphi v\|_{s+m-1}), \quad (5.7)$$

где положительная постоянная C зависит только от s (не считая зависимости от заданного оператора $P(D)$). В силу обобщенной формулы Лейбница

$$\begin{aligned} P(\varphi v) &= \varphi P(D)v + \sum_{|\lambda|+1}^m \frac{1}{\lambda!} (P^{(\lambda)}(D)v) D^\lambda \varphi = \\ &= \varphi P(D)v + \sum_{|\lambda|+1}^m \frac{1}{\lambda!} (P^{(\lambda)}(D)(hv)) D^\lambda \varphi. \end{aligned}$$

Каждый дифференциальный оператор в последней сумме имеет порядок не выше, чем $m-1$, и его коэффициенты равны нулю вне $\text{supp } \varphi$. Отсюда, из неравенства (5.7) и условия $h(x) = 1$ на $\text{supp } \varphi$ получим неравенство (5.6). \square

Следствие 5.4. Если $P(D)$ – эллиптический оператор, $u \in D'(\Omega)$ и $P(D)u \in C^\infty(\Omega)$, то $u \in C^\infty(\Omega)$.

Доказательство. Так как $C^\infty(\Omega) \subset H_{loc}^s(\Omega)$ при любых $s \in \mathbf{R}$, то в силу теоремы 5.2 $u \in H_{loc}^{s+m}$ при всех $s \in \mathbf{R}$. Применяя теперь следствие 4.1, получим включение $u \in C^\infty(\Omega)$. \square

5.4. НЕРАВЕНСТВО ГОРДИНГА И ЕГО СЛЕДСТВИЯ

Неравенство Гординга является ключевым во многих вопросах теории эллиптических уравнений. В случае дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами это неравенство является элементарным.

Теорема 5.3. Пусть $\operatorname{Re} P_m(\xi) \geq c_0 |\xi|^m$ при всех $\xi \in \mathbf{R}^n$, где $P_m(\xi)$ – характеристическая форма дифференциального оператора $P(D)$, $c_0 = \text{const} > 0$. Тогда существует такая положительная постоянная C_1 , что

$$\operatorname{Re} \int P(D)v \cdot \bar{v} dx \geq c_0 \|v\|_{m/2}^2 - C_1 \|v\|_{(m-1)/2}^2, \quad v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \quad (5.8)$$

(неравенство Гординга).

Доказательство. В силу равенства Парсеваля неравенство (5.8) равносильно неравенству $\operatorname{Re} \int P(\xi) |\tilde{v}(\xi)|^2 d\xi \geq c_0 \int \langle \xi \rangle^m |\tilde{v}(\xi)|^2 d\xi - C_1 \int \langle \xi \rangle^{m-1} |\tilde{v}(\xi)|^2 d\xi$.

В свою очередь, последнее неравенство следует из неравенства

$$\operatorname{Re} P(\xi) \geq c_1 \langle \xi \rangle^{m-1} \quad \text{при } \xi \in \mathbf{R}^n. \quad (5.9)$$

Докажем теперь неравенство (5.9). Так как $P(\xi) = P_m(\xi) + Q(\xi)$, где $Q(\xi)$ – полином степени не больше $m-1$ и по условию $\operatorname{Re} P_m(\xi) \geq c_0 |\xi|^m$ при всех $\xi \in \mathbf{R}^n$, то $\operatorname{Re} P(\xi) = \operatorname{Re} P_m(\xi) + \operatorname{Re} Q(\xi) \geq c_0 |\xi|^m - |\operatorname{Re} Q(\xi)|$ при всех $\xi \in \mathbf{R}^n$. Таким образом, для доказательства неравенства (5.9) достаточно доказать неравенство $c_0 |\xi|^m - |\operatorname{Re} Q(\xi)| \geq c_0 \langle \xi \rangle^{m-1} - C_1 \langle \xi \rangle^{m-1}$ при всех $\xi \in \mathbf{R}^n$, где C_1 – некоторая положительная постоянная. Перепишем это неравенство в виде

$$c_0 |\xi|^m + C_1 \langle \xi \rangle^{m-1} \geq c_0 \langle \xi \rangle^m + |\operatorname{Re} Q(\xi)| \quad \text{при } \xi \in \mathbf{R}^n.$$

Так как $\langle \xi \rangle^m = (1 + |\xi|^2)^{m/2} = |\xi|^m (1 + |\xi|^{-2})^{m/2} = |\xi|^m + g(\xi) |\xi|^{m-2}$, где $g(\xi)$ – ограниченная функция на \mathbf{R}^n , то достаточно доказать неравенство

$$C_1 \langle \xi \rangle^{m-1} \geq c_0 g(\xi) |\xi|^{m-2} + |\operatorname{Re} Q(\xi)| \quad \text{при } \xi \in \mathbf{R}^n \quad (5.10)$$

с некоторой постоянной $C_1 > 0$. Поскольку существуют такие постоянные C_2 и C_3 , что $|\operatorname{Re} Q(\xi)| \leq C_2 |\xi|^{m-1}$ и $|c_0 g(\xi)| |\xi|^{m-2} \leq C_3 |\xi|^{m-2}$ при всех $\xi \in \mathbf{R}^n$, то очевидно существует такая постоянная $C_1 > 0$, что выполняется неравенство (5.10).

Следствие 5.5. При условиях теоремы 5.3 существует такая постоянная $C_1 > 0$, что

$$\operatorname{Re} \langle P(D)v, \bar{v} \rangle \geq c_0 \|v\|_{m/2}^2 - C_1 \|v\|_{(m-1)/2}^2 \quad \text{для всех } v \in H^{m/2}(\mathbf{R}^n), \quad (5.11)$$

где $P(D) : H^{-m/2}(\mathbf{R}^n) \times H^{m/2}(\mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{C}$ — каноническая билинейная форма на $H^{-m/2}(\mathbf{R}^n) \times H^{m/2}(\mathbf{R}^n)$, являющаяся продолжением по непрерывности с $C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \times C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ формы $\langle v, w \rangle = \int v(x) w(x) dx$.

Доказательство. Заметим, что пространства $H^{-m/2}(\mathbf{R}^n)$ и $P(D) : H^{-m/2}(\mathbf{R}^n) \times H^{m/2}(\mathbf{R}^n) \rightarrow H^{m/2}(\mathbf{R}^n)$ технологически двойственны относительно указанной в данном следствии формы (см. замечание 4.1). В частности, это означает, что билинейное отражение $\langle \cdot, \cdot \rangle : H^{-m/2}(\mathbf{R}^n) \times H^{m/2}(\mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{C}$ раздельно непрерывно (по каждой из двух компоненте). Отсюда, используя непрерывность оператора $P(D) : H^{-m/2}(\mathbf{R}^n) \times H^{m/2}(\mathbf{R}^n) \rightarrow H^{m/2}(\mathbf{R}^n)$, плотность $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ в $H^{m/2}(\mathbf{R}^n)$ и неравенство (5.8), получим неравенство (5.10).

Следствие 5.6. При условиях теоремы 5.3 для каждого $\varepsilon > 0$ существует такая постоянная $C_\varepsilon > 0$, что

$$\operatorname{Re} \int P(D)v(x) \cdot \bar{v}(x) dx \geq (c_0 - \varepsilon) \|v\|_{m/2}^2 - C_\varepsilon \|v\|_0^2 \quad (5.12)$$

при всех $v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Доказательство легко получить из неравенства (5.8) и интерполяционного неравенства (утверждение 4.5.). При всех $v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ имеем

$\|v\|_{(m-1)/2} \leq \varepsilon_1 \|v\|_{m/2} + C_{\varepsilon_1} \|v\|_{(m-3)/2}$, где ε_1 – произвольная положительная постоянная, а $C_{\varepsilon_1}^1$ – соответствующая постоянная в интерполяционном неравенстве. Отсюда, в силу неравенства $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, следует, что $\|v\|_{(m-1)/2}^2 \leq 2\varepsilon_1 \|v\|_{m/2} + 2C_{\varepsilon_1} \|v\|_{(m-3)/2}$ при всех $v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Подставляя это неравенство в (5.8), получим

$$\operatorname{Re} \int P(D)v \cdot \bar{v} dx \geq C_0 \|v\|_{m/2}^2 - C_1 \left(2\varepsilon_1^2 \|v\|_{m/2}^2 + 2C_{\varepsilon_1}^2 \|v\|_{m-3/2}^2 \right) = (C_0 - 2C_1\varepsilon_1^2) \|v\|_{m/2}^2 - 2C_1C_{\varepsilon_1}^2 \|v\|_{m-3/2}^2$$

при всех $v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Если $m-3 \leq 0$, то $\|v\|_{(m-3)/2}^2 \leq \|v\|_0^2$ и при достаточно малом $\varepsilon_1 > 0$ (точнее при $2C_1\varepsilon_1^2 \leq \varepsilon$) из последнего неравенства следует неравенство (5.8). Если $m-3 > 0$, то надо применить интерполяционное неравенство к $\|v\|_{m-3/2}^2$. Повторяя эту процедуру k раз, где k такое, что $m-1-2k < 0$, и подбирая достаточно малое $\varepsilon_1 > 0$, получим неравенство (5.8).

Заметим также, что оценку (5.8) легко получить непосредственно, используя оценку (5.9) (задача 5.5)

Замечание 5.4. Из следствия 5.6, используя отдельную непрерывность канонической билинейной формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на пространстве $H^{m/2}(\mathbf{R}^n) \times H^{-m/2}(\mathbf{R}^n)$, легко получить неравенство $\operatorname{Re} \langle P(D)v, \bar{v} \rangle \geq (c_0 - \varepsilon) \|v\|_{m/2}^2 - C_\varepsilon \|v\|_0^2$, верное при всех $v \in H^{m/2}(\mathbf{R}^n)$

Следствие 5.7. Пусть $P(D)$ – эллиптический дифференциальный оператор порядка m и $|P_m(\xi)| \geq c_0 |\xi|^m$, где $c_0 = \text{const} > 0$. Тогда для каждого существует такая положительная постоянная

$$C = C(\varepsilon), \text{ что } \|Pv\|_0^2 \geq (C_0^2 - \varepsilon) \|v\|_m^2 - C(\varepsilon) \|v\|_0^2, \quad v \in H^m(\mathbf{R}^n). \quad (5.13)$$

Доказательство. В силу плотности множества $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ в пространстве $H^m(\mathbf{R}^n)$ достаточно доказать неравенство (5.13) для всех $v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Положим $Q(D) = P^*(D)P(D)$, где $P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$, а $P^*(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} \bar{a}_\alpha D^\alpha$ формально сопряженный дифференциальный оператор к оператору $P(D)$ (т.е. такой оператор P^* , что $(Pv, \omega)_0 = (v, P^* \omega)_0$ при всех $v, \omega \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$), где $(v, \omega) = \int v(x)\omega(x)dx$.

Оператор $P(D)$ имеет, как легко увидеть, характеристическую форму $Q_{2m}(\xi) = |P_m(\xi)|^2 \geq C_0^2 |\xi|^{2m}$ при $\xi \in \mathbf{R}^n$ и является эллиптическим. Таким образом, к оператору $Q(D)$ можно применить следствие 5.6. При этом имеется равенство $\operatorname{Re}(Qv, v)_0 = \operatorname{Re}(P^*Pv, v)_0 = \operatorname{Re}(Pv, v)_0 = \|Pv\|_0^2$. Отсюда, используя неравенство вида (5.12) для оператора $Q(D)$, сразу получается неравенство (5.13) для всех $v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Следствие 5.8. Пусть $P(D)$ – эллиптический дифференциальный оператор порядка m и $|P_m(\xi)| \geq C_0 |\xi|^m$ при $\xi \in \mathbf{R}^n$, где $C_0 = \text{const} > 0$. Тогда, $\|Pv\|_0 \geq \frac{C_0}{2} \|v\|_m$ при всех $v \in C_0^\infty(\omega)$, если $\text{diam } \omega$ достаточно мал.

Доказательство. По утверждению 4.5 для любого $\varepsilon_1 > 0$ существует такое $\delta_1 > 0$, что $\|v\|_0 \leq \varepsilon_1 \|v\|_m$ при всех $v \in C_0^\infty(\omega)$, где ω – область в \mathbf{R}^n с диаметром $\delta < \delta_1$. Применяя теперь неравенство (5.13) для функций $v \in C_0^\infty(\omega)$, получим неравенства

$$\|Pv\|_0^2 \geq (C_0^2 - \varepsilon) \|v\|_m^2 - C(\varepsilon) \|v\|_0^2 \geq (C_0^2 - \varepsilon) \|v\|_m^2 - C(\varepsilon) \varepsilon_1 \|v\|_m^2 = (C_0^2 - \varepsilon - C(\varepsilon) \varepsilon_1) \|v\|_m^2 \geq \frac{1}{2} C_0^2 \|v\|_m^2$$

если ε_1 такое, что $2(\varepsilon + \varepsilon_1 C(\varepsilon)) \leq C_0^2$.

5.5. ТЕОРЕМА О РАЗРЕШИМОСТИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В данном пункте доказывается теорема о необходимом и достаточном условии разрешимости эллиптического уравнения в ограниченной области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ и с правой частью уравнения из $H^s(\Omega)$ при $s \in \mathbf{R}$.

Утверждение 5.4. Пусть Ω - ограниченная область в \mathbf{R}^n , $P(D)$ - линейный эллиптический дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами и $\text{Ker}P = \{v \in \xi'(\Omega) : P(D)v = 0\}$.

Тогда $\text{Ker}P$ является конечномерным подпространством пространства $C^\infty(\Omega)$.

Доказательство. Применяя следствие 5.4, сразу получаем включение $\text{Ker}P \subset C^\infty(\Omega)$. Поскольку $\text{Ker}P \subset \xi'(\Omega)$, то носители функций из $\text{Ker}P$ являются компактами в Ω и, значит, $\text{Ker}P \subset C^\infty(\Omega)$. Множество $\text{Ker}P$ очевидно является линейным подпространством (многообразием) линейного пространства $C^\infty(\Omega)$ в силу линейности оператора $P(D)$.

Докажем конечномерность линейного пространства $\text{Ker}P$. Для этого воспользуемся теоремой Ф. Рисса о том, что линейное многообразие (т.е. не обязательно замкнутое подпространство) L нормированного пространства X является локально предкомпактным тогда и только тогда, когда L - конечномерно (см., например, [10], п.19.5). При этом, по определению, неограниченное подмножество нормированного пространства X называется локально предкомпактным, если его пересечение с любым замкнутым шаром в X предкомпактно.

Пусть $L = \text{Ker}P$, $X = L_2(\mathbf{R}^n)$. Очевидно, что $\text{Ker}P$ - линейное многообразие пространства $L_2(\mathbf{R}^n)$ (т.к. $\text{Ker}P \subset C_0^\infty(\Omega) \subset C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \subset L_2(\mathbf{R}^n)$). Пусть, да-

лее, $R = \text{const} > 0$ и $B_R = \{v \in L_2(\mathbf{R}^n) : \|v\|_0 \leq R\}$ – произвольный замкнутый шар в $L_2(\mathbf{R}^n)$. При всех $v \in \text{Ker}P$ в силу неравенства (5.13) имеем

$$0 \geq (C_0^2 - \varepsilon) \|v\|_m^2 - C_\varepsilon \|v\|_0^2.$$

Отсюда при всех $v \in \text{Ker}P \cap B_R$ получим $(C_0^2 - \varepsilon) \|v\|_m^2 \leq C_\varepsilon \|v\|_0^2 \leq C_\varepsilon R^2$ т.е. $\|v\|_m \leq \tilde{C}$, где постоянная \tilde{C} не зависит от v . Используя теперь теорему Реллиха, получаем предкомпактность множества $\text{Ker}P \cap B_R$ в $L_2(\mathbf{R}^n)$.

Перейдем теперь к вопросу о разрешимости уравнения $P(D)u = f$, где $P(D)$ – эллиптический дифференциальный оператор $f \in H^s(\Omega)$, $s \in \mathbf{R}$ и Ω – ограниченная область в \mathbf{R}^n (с гладкой границей).

Пусть ${}^tP(D) = P(-D)$ – транспонированный оператор к оператору $P(D)$, $\text{Ker}{}^tP = \{v \in \xi'(\Omega) : P(D)v = 0\}$. Поскольку оператор ${}^tP(D)$ также является эллиптическим, то в силу утверждения 5.4 множество $\text{Ker}{}^tP$ – конечномерное подпространство в пространстве $C_0^\infty(\Omega)$.

Теорема 5.4. Пусть $P(D)$ – эллиптический дифференциальный оператор порядка m , $f \in H^s(\Omega)$, где $s \in \mathbf{R}$ и Ω – ограниченная область в \mathbf{R}^n с гладкой границей. Тогда уравнение

$$P(D)u = f \tag{5.14}$$

имеет (обобщенное) решение $u \in H^{s+m}(\Omega)$ тогда и только тогда, когда

$$\langle f, \varphi \rangle = 0 \quad \text{при всех } \varphi \in \text{Ker}{}^tP. \tag{5.15}$$

При этом выполняются неравенство

$$\|u\|_{H^{s+m}(\Omega)} \leq C \|f\|_{H^s(\Omega)}, \tag{5.16}$$

где постоянная C не зависит от f .

Доказательство. Необходимость условия (5.15) для разрешимости уравнения (5.14) доказывается совсем просто. Если $P(D)u = f$, то, в силу определения обобщенного решения дифференциального уравнения, полу-

чим $\langle f, \varphi \rangle = \langle P(D), \varphi \rangle = \langle u, {}^tP(D)\varphi \rangle = 0$ при всех $\varphi \in \text{Ker} {}^tP \subset C_0^\infty(\Omega)$.
Здесь $\langle f, \varphi \rangle = \langle F, \varphi \rangle$ значение распределения $F \in H^s(\mathbf{R}^n) \subset S'(\mathbf{R}^n)$ на пробной функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \subset C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \subset S(\mathbf{R}^n)$ где F – представитель класса смежности f из фактор-пространства $H^s(\Omega) = H^s(\mathbf{R}^n) / \{v \in H^s(\mathbf{R}^n) : v|_\Omega = 0\}$.
При этом число $\langle f, \varphi \rangle$ для $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, как легко проверить, не зависит от выбора представителя класса смежности f . Аналогичной смысл имеют выражения $\langle P(D), \varphi \rangle$ и $\langle u, {}^tP(D)\varphi \rangle$.

Докажем теперь достаточность условия (5.15) для разрешимости условия (5.14) при $f \in H^s(\Omega)$.

Пусть $N = (\text{Ker} {}^tP)^\perp$ – ограниченное дополнение (конечномерного) подпространства $\text{Ker} {}^tP$ в пространстве $H^{-s}(\bar{\Omega})$, а $M = \text{Im} {}^tP|_N$ – образ ограничения оператора ${}^tP : H^{-s}(\bar{\Omega}) \rightarrow H^{-s-m}(\bar{\Omega})$ на подпространство N . Очевидно, что M – линейное многообразие в гильбертовом пространстве $H^{-s-m}(\bar{\Omega})$.

Искомое распределение u будем определять как линейный ограниченный функционал на пространстве $H^{-s-m}(\bar{\Omega})$. Поскольку сопряженное пространство $(H^{-s-m}(\bar{\Omega}))'$ изоморфно пространству $H^{s+m}(\Omega)$ (см. замечание 4.2), то отсюда будет следовать включение $u \in H^{s+m}(\Omega)$.

Сначала определим функционал u на линейном многообразии M с помощью равенства

$$\langle u, \psi \rangle = \langle f, \varphi \rangle, \text{ где } \psi = P\varphi \in M. \quad (5.17)$$

Здесь $\langle f, \varphi \rangle$ – значение функционала $f \in H^s(\Omega) \square (H^{-s}(\bar{\Omega}))'$ на элементе $\varphi \in H^{-s}(\bar{\Omega})$. Ниже будет доказано, что определенный по формуле (5.17) функционал u ограничен на $M \subset H^{-s-m}(\bar{\Omega})$. Отсюда, в силу теоремы Хана –

Банаха, будет следовать существование продолжения этого функционала до линейно ограниченного функционала на всем пространстве $H^{-s-m}(\bar{\Omega})$. Будем обозначать это продолжение также через u .

Из формулы (5.17) при всех $\varphi \in N = (Ker^t P)^\perp$ сразу следует равенство $\langle u, {}^t P\varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$, а из формулы (5.15) это же равенство следует при всех $\varphi \in Ker^t P$. Отсюда получаем равенство $\langle u, {}^t P\varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$ при всех $\varphi \in H^{-s}(\bar{\Omega})$. Таким образом, поскольку имеется вложение $C_0^\infty \subset H^{-s}(\bar{\Omega})$, распределение u является обобщенным решением $Pu = f$.

Для доказательства ограниченности на M линейного функционала u , определенного по формуле (5.17), достаточно доказать неравенство

$$\|u\|_{H^{-s}(\bar{\Omega})} \leq C \|{}^t P\varphi\|_{H^{-s-m}(\bar{\Omega})} \quad \text{при всех } \varphi \in (Ker^t P)^\perp. \quad (5.18)$$

Действительно, с помощью неравенства (5.18) непосредственно получим, что $|\langle u, \psi \rangle| = |\langle f, \varphi \rangle| \leq \|f\|_{H^s(\Omega)} \|\varphi\|_{H^{-s}(\bar{\Omega})} \leq C \|f\|_{H^s(\Omega)} \|\psi\|_{H^{-s-m}(\bar{\Omega})}$ при всех $\psi = {}^t P\varphi \in M$.

Таким образом, линейный функционал $u : H^{-s-m}(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathbb{C}$ с областью определения M ограничен и его норма на M не больше чем $C \|f\|_{H^s(\Omega)}$. В силу теоремы Хана – Банаха отсюда сразу получаем, что существует продолжение функционала и на все пространство $H^{-s-m}(\bar{\Omega})$ с сохранением нормы и, следовательно, выполнением неравенства (5.16).

Докажем теперь неравенство (5.18). Для этого покажем сначала, что существуют такие положительные постоянные C_1 и C_2 , что при всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство

$$\langle \xi \rangle^{-2s} \leq C_1 |P(-\xi)|^2 \langle \xi \rangle^{-2s-2m} + C_2 \langle \xi \rangle^{-2s-2}. \quad (5.19)$$

Из эллиптичности оператора $P(-D)$ сразу следует, что

$$|P(-\xi)| = |P_m(-\xi) + Q(-\xi)| \geq |P_m(-\xi)| - |Q(-\xi)| \geq c_0 |\xi|^m - C_3 \langle \xi \rangle^{m-1}$$

при всех $\xi \in \mathbf{R}^n$, где c_0 и C_3 – некоторые положительные постоянные. Отсюда

$$c_0^2 |\xi|^{2m} \leq (|P(-\xi)| + C_3 \langle \xi \rangle^{m-1})^2 \leq 2|P(-\xi)|^2 + 2C_3^2 \langle \xi \rangle^{2m-2}$$

при всех $\xi \in \mathbf{R}^n$. Так как при $|\xi| \rightarrow \infty$ функции $|\xi|^{2m}$ и $\langle \xi \rangle^{2m}$ эквивалентны, то существует такое $R > 0$, что

$$1/2c_0^2 \langle \xi \rangle^{2m} \leq c_0^2 |\xi|^{2m} \leq 2|P(-\xi)|^2 + 2C_3^2 \langle \xi \rangle^{2m-2}$$

при всех $|\xi| > R$. В то же время существует такая постоянная $C_4 > 0$, что $1/2c_0^2 \langle \xi \rangle^{2m} \leq C_4$ при $|\xi| \leq R$, а значит, и $1/2c_0^2 \langle \xi \rangle^{2m} \leq C_4 \langle \xi \rangle^{2m-2}$ при $|\xi| \leq R$. Полагая теперь $C_5 = \max(2C_3^2, C_4)$, имеем неравенство $1/2c_0^2 \langle \xi \rangle^{2m} \leq 2|P(-\xi)|^2 + 2C_5 \langle \xi \rangle^{2m-2}$ при всех $\xi \in \mathbf{R}^n$. Если теперь умножить это неравенство на $2c_0^{-2} \langle \xi \rangle^{-2m-2s}$, то получим требуемое неравенство (5.19) с некоторыми положительными постоянными C_1 и C_2 .

Используя неравенство (5.19), легко получить неравенство

$$\|\varphi\|_{H^{-s}(\bar{\Omega})}^2 \leq C_1 \|{}^t P\varphi\|_{H^{-s-m}(\bar{\Omega})}^2 + C_2 \|\varphi\|_{H^{-s-1}(\bar{\Omega})}^2 \quad (5.20)$$

при всех $\varphi \in H^{-s}(\bar{\Omega})$. Для этого достаточно умножить неравенство (5.19) на $|\tilde{\varphi}(\xi)|^2$ и проинтегрировать полученное таким образом неравенство по $\xi \in \mathbf{R}^n$. При этом и получится неравенство (5.20), поскольку преобразование Фурье от ${}^t P(D)\varphi$ равно $P(-\xi)\tilde{\varphi}(\xi)$, а норма $\|\cdot\|_{H^t(\bar{\Omega})}$ равна по определению норме $\|\cdot\|_{H^t(\mathbf{R}^n)}$ при любом $t \in \mathbf{R}$.

Предположим теперь, что неравенство (5.18) неверно. Тогда существует последовательность распределений $\varphi_k \in H^{-s}(\bar{\Omega})$, для которых $\|\varphi_k\|_{-s} = 1$, $\|{}^t P\varphi_k\|_{-s-m} \leq 1/k$ и $\varphi_k \in (\text{Ker } {}^t P)^\perp$. По теореме 4.8 эта последовательность пред-

ставлена в $H^{\circ-s-1}(\bar{\Omega})$ и из нее можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторому распределению $\varphi \in H^{\circ-s-1}(\bar{\Omega})$. Без ограничения общности будем считать, что $\varphi_k \rightarrow \varphi$ в $H^{\circ-s-1}(\bar{\Omega})$.

Применяя теперь неравенство (5.20) к распределению $\varphi_K - \varphi_l \in \dot{H}^{-s}(\bar{\Omega})$, при всех $K, l \subset N$ получим соотношения

$$\begin{aligned} \|\varphi_k - \varphi_l\|_{-s}^2 &\leq C_1 \left\| {}^t P(\varphi_k - \varphi_l) \right\|_{-s-m}^2 + \|\varphi_k - \varphi_l\|_{-s-1}^2 \leq \\ &\leq C_1 (\|{}^t P \varphi_k\|_{-s-m} + \|{}^t P \varphi_l\|_{-s-m})^2 + C_2 \|\varphi_k - \varphi_l\|_{-s-1}^2 \leq \\ &\leq C_1 (1/k + 1/l)^2 + C_2 \|\varphi_k - \varphi_l\|_{-s-1}^2 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $k, l \rightarrow \infty$ (последнее соотношение следует из функциональности последовательности φ_k в пространстве $H^{\circ-s-1}(\bar{\Omega})$).

Таким образом, последовательность φ_k является функциональной и в пространстве $H^{\circ-s}(\bar{\Omega})$. Предел этой последовательности в $H^{\circ-s}(\bar{\Omega})$ также равен φ , поскольку пространство $H^{\circ-s}(\bar{\Omega})$ непрерывно вложено в пространство $H^{\circ-s-1}(\bar{\Omega})$. Так как $\|\varphi_k\|_{-s} = 1$ и $\varphi_k \subset (Ker {}^t P)^\perp$ при всех $k \in \mathbf{N}$, то отсюда сразу получим $\|\varphi_k\|_{-s} = 1$ и $\varphi_k \subset (Ker {}^t P)^\perp$. Из непрерывности оператора ${}^t P: H^{\circ-s}(\bar{\Omega}) \rightarrow H^{\circ-s-m}(\bar{\Omega})$ следует, что ${}^t P \varphi_k \rightarrow {}^t P \varphi$ в $H^{\circ-s}(\bar{\Omega})$. Отсюда, в силу неравенства $\|{}^t P \varphi_k\|_{-s-m} \leq 1/k$ при всех $k \in \mathbf{N}$, следует равенство $\|{}^t P \varphi\|_{-s-m} = 0$ и, значит, ${}^t P \varphi = 0$.

Итак на распределение φ получим следующие противоречивые условия: $\|\varphi\|_{-s} = 1$, $\varphi \in (Ker {}^t P)^\perp$ и ${}^t P \varphi = 0$. Это противоречие доказывает неравенство (5.18), а, значит, и утверждение данной теоремы. \square

Замечание 5.5. Доказательство теоремы 5.4 непосредственно переносится на случай произвольной области Ω с гладкой границей (необяза-

тельно ограниченной) при условии, что $\text{Ker}^t P$ является конечномерным подпространством в $C_0^\infty(\Omega)$. Здесь $\text{Ker}^t P$ – ядро непрерывного оператора ${}^t P: H^{-s}(\bar{\Omega}) \rightarrow H^{-s-m}(\bar{\Omega})$.

Замечание 5.6. В силу конечномерности пространства $\text{Ker}^t P$ условие (5.15) для всех $\varphi \in \text{Ker}^t P$ можно заменить на конечное множество условий вида $\langle f, \varphi_j \rangle = 0$, $j=1, \dots, p$ где $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ – какой либо базис в пространстве $\text{Ker}^t P$.

ЗАДАЧИ

5.1. Пусть $v \in D'(a, b)$ и $v^{(m)} + a_1(x)v^{(m-1)} + \dots + a_m(x)v = f(x)$, где $a_j, f \in C^\infty(a, b)$, $j=1, \dots, m$. Доказать, что тогда $v \in C^\infty(a, b)$ и v – классическое решение данного дифференциального уравнения.

5.2. Доказать, что $E(x, y) = \frac{1}{\pi(x+iy)}$ – фундаментальное решение оператора

$$\text{Коши – Римана} \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

5.3. Проверить, что распределение

$$1) \quad E_2(x) = \frac{1}{2\pi} \ln|x| \quad \text{при} \quad n=2,$$

$$2) \quad E_n(x) = -\frac{1}{(n-2)\sigma_n |x|^{n-2}} \quad \text{при} \quad n \geq 3,$$

где $\sigma_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ – площадь поверхности единичной сферы в \mathbb{R}^n , яв-

ляется фундаментальным решением оператора Лапласа в \mathbb{R}^n .

5.4. Доказать, что распределение $E(x, t) = \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-|x|^2/(4a^2 t)}$ – фундамен-

тальное решение оператора теплопроводности $\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \Delta$ в \mathbb{R}^n .

- 5.5. Проверить, что распределение $E(x, t) = \frac{\theta(at - |x|)}{2\pi a \sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}}$ – фундаментальное решение волнового оператора $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right)$.
- 5.6. Доказать, что распределение $E(t) = -\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}$ является фундаментальным решением оператора Гельмгольца $\Delta + k^2$ в \mathbf{R}^3 .
- 5.7. Доказать, что эллиптический дифференциальный оператор в \mathbf{R}^2 с вещественными коэффициентами является правильно эллиптическим.
- 5.8. Докажите следствие 5.2.
- 5.9. Доказать, что любой сильно эллиптический оператор (определение 5.4) является правильно эллиптическим при $n \geq 2$.
- 5.10. Проверить, что оператор $D_1^4 + D_2^4 - D_3^4 + i(D_1^2 + D_2^2)D_3^2$ является правильно эллиптическим, но не является сильно эллиптическим.
- 5.11. Пусть $P(D)$ – эллиптический оператор порядка m , $Q(D)$ – оператор порядка не больше m . Тогда $\sum_{|\alpha| \geq 0} |Q^{(\alpha)}(\xi)|^2 / \sum_{|\alpha| \geq 0} |P^{(\alpha)}(\xi)| \leq C$, $\xi \in \mathbf{R}^n$, где $C = \text{const} > 0$ (оператор P сильнее оператора Q).

Г Л А В А 6. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В этой главе рассматривается *модельная* краевая задача в полупространстве для линейного однородного эллиптического дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами произвольного порядка. Решение этой задачи является ключевым моментом при исследовании общих эллиптических краевых задач в ограниченных областях с гладкой границей. В то же время для модельной задачи проблема корректности постановки сводится к простому алгебраическому условию.

6.1. ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

В данной главе мы будем изучать *краевую задачу*, состоящую в нахождении функций $u \in C^\infty(\bar{\mathbf{R}}_+^n)$, удовлетворяющих условиям

$$P(D)u(x) = f(x) \quad \text{при } x_n > 0; \quad (6.1)$$

$$B_j(D)u(x) = g_j(x) \quad \text{при } x_n = 0, \quad j = 1, \dots, \mu. \quad (6.2)$$

Здесь $\mathbf{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n : x_n > 0\}$, $\bar{\mathbf{R}}_+^n$ – замыкание \mathbf{R}_+^n , $n \geq 2$, $P(D)$ – *однородный правильно эллиптический* (см. определение 5.3) дифференциальный оператор порядка $m = 2\mu$, $B_j(D)$ – однородные дифференциальные операторы порядка $m_j \leq m - 1$ при всех $j = 1, \dots, \mu$, f – заданная функция из $C^\infty(\bar{\mathbf{R}}_+^n)$, g_j – заданные функции из $C^\infty(\partial\mathbf{R}_+^n)$, $j = 1, \dots, \mu$, а $\partial\mathbf{R}_+^n$ – граница области \mathbf{R}_+^n .

Поставленная задача называется классической краевой задачей вида (6.1) и (6.2). Ее исследование будет основано на изучении задачи (6.1), (6.2) в более слабой, *обобщенной постановке*.

Обобщенная постановка краевой задачи (6.1), (6.2) состоит в нахождении функций $u \in H^m(\mathbf{R}_+^n)$, удовлетворяющих условиям

$$P(D)u = f, \quad \gamma B_j(D)u = g_j \quad \text{при } j = 1, \dots, \mu, \quad (6.3)$$

где f – заданная функция из $L_2(\mathbf{R}_+^n)$, g_j – заданные функции из $H^{m-jm-1/2}(\partial\mathbf{R}_+^n)$, $\gamma: H^s(\mathbf{R}^n) \rightarrow H^{s-1/2}(\partial\mathbf{R}_+^n)$ – оператор следа при $s > 1/2$ (см. п. 4.5).

Обобщенную постановку задачи (6.1), (6.2) удобно рассматривать как *операторное уравнение*. Для определения этого операторного уравнения введем гильбертово пространство $H = H^s(\mathbf{R}_+^n) \times H^{m-m_1-1/2}(\mathbf{R}^{n-1}) \times \dots \times H^{m-m_\mu-1/2}(\mathbf{R}^{n-1})$, являющееся прямой суммой указанных пространств (здесь и далее для простоты обозначений через \mathbf{R}^{n-1} обозначается гиперплоскость $\partial\mathbf{R}_+^n$). Определим, далее, следующий линейный непрерывный оператор $A: H^m(\mathbf{R}_+^n) \rightarrow H$, $D(A) = H^m(\mathbf{R}_+^n)$, $Av = (Pv, \gamma B_1 v, \dots, \gamma B_\mu v)$. Заметим при этом, что непрерывность оператора A очевидно следует из непрерывности операторов P , B_j ($j=1, \dots, \mu$) и γ в соответствующих пространствах.

Теперь можно переформулировать обобщенную постановку задачи (6.1), (6.2) следующим образом. В этой задаче требуется найти *решение операторного уравнения* $Au = F$, где $F = (f, g_1, \dots, g_\mu) \in H$.

Дальнейшее изложение в этой главе в основном посвящено доказательству трех основных результатов, относящихся к обобщенной краевой задаче (6.1), (6.2) при некоторых дополнительных условиях на нее. При этом все три результата, по существу, связаны друг с другом и их удобно объединить в следующем определении.

Определение 6.1. Обобщенная краевая задача (6.1), (6.2) называется *корректно поставленной*, если выполняются следующие условия.

1. Пространство решений $u \in H^m(\mathbf{R}_+^n)$ однородной задачи

$$P(D)u = f, \quad \gamma B_j(D)u = 0, \quad j = 1, \dots, \mu, \quad (6.4)$$

имеет конечную размерность.

2. Множество $\{P(D)v, \gamma B_1(D)v, \dots, \gamma B_\mu(D)v : v \in H^m(\mathbf{R}_+^n)\}$ замкнуто в пространстве $H^0(\mathbf{R}_+^n) \times H^{m-m_1-1/2}(\mathbf{R}^{n-1}) \times \dots \times H^{m-m_\mu-1/2}(\mathbf{R}^{n-1})$.

3. Существует такая положительная постоянная C , что

$$\|v_m\| \leq C(\|P(D)v\|_0 + \sum_{j=1}^{\mu} \|\gamma B_j(D)v\|_{m-m_j-1/2} + \|v\|_0) \quad (6.5)$$

при всех $v \in H^m(\mathbf{R}_+^n)$.

Пример 6.1. Пусть $P(D)$ – однородный правильно эллиптический дифференциальный оператор порядка $m = 2\mu$. Тогда краевая задача вида

$$P(D) u(x) = f(x) \quad \text{при} \quad x_n > 0, \quad \frac{\partial^j u(x)}{\partial x_n^j} = g_j(x) \quad \text{при} \quad x_n = 0, \quad j = 1, \dots, \mu$$

называется *задачей Дирихле* для оператора $P(D)$. Как будет следовать из дальнейшего изложения, эта задача корректно поставлена.

Пример 6.2. Пусть $P(D)$ – однородный правильно эллиптический дифференциальный оператор второго порядка. Тогда краевая задача

$$P(D) u(x) = f(x) \quad \text{при} \quad x_n > 0, \quad \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} = g_j(x) \quad \text{при} \quad x_n = 0 \quad (\text{задача с наклонной производной}),$$

как будет доказано ниже, является корректно поставленной в том и только в том случае, когда $b_n \neq 0$.

6.2. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ НА ПОЛУОСИ

С помощью частичного преобразования Фурье (см. п. 2.6) краевые задачи в полупространстве вида (6.1), (6.2) сводятся к краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений на полуоси. В этом пункте исследуются необходимые в дальнейшем краевые задачи для *обыкновенных* дифференциальных уравнений. Далее, через t обозначается вещественная переменная, а через D оператор $\frac{1}{i} \frac{d}{dt}$.

Теорема 6.1. Пусть алгебраическое уравнение $P(\lambda)=0$ порядка m имеет в точности $\mu \in \mathbb{N}$ корней с $\text{Im } \lambda > 0$ и не имеет вещественных корней. Пусть, далее, однородная краевая задача

$$P(D)v(t)=0 \quad \text{при } t > 0, \quad (p_j(D)v)(0)=\psi_j \quad \text{при } j=1, \dots, \mu, \quad (6.6)$$

где $p_j(D)$ – некоторые линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами при $j=1, \dots, \mu$, не имеет ограниченных решений на \mathbb{R}_+^1 решений v , не равных тождественно нулю. Тогда для любой функции $f \in C_0^\infty(\bar{\mathbb{R}}_+^1)$ и любых комплексных постоянных ψ_1, \dots, ψ_μ существует единственное ограниченное на $\bar{\mathbb{R}}_+^1$ решение неоднородной краевой задачи.

$$P(D)v(t)=f(t) \quad \text{при } t > 0, \quad (p_j(D)v)(0)=\psi_j \quad \text{при } j=1, \dots, \mu \quad (6.7)$$

При этом, если порядки операторов $p_j(D)$ меньше m для $j=1, \dots, \mu$, то существует такая независимая от f и ψ_1, \dots, ψ_μ постоянная C , что

$$\sum_{j=0}^m \int_0^\infty |D^j v|^2 dt + \sum_{j=0}^{m-1} |D^j v(0)|^2 \leq C \left[\int_0^\infty |f|^2 dt + \sum_{j=1}^\mu |\psi_j|^2 \right]. \quad (6.8)$$

Величина, обратная к наилучшей постоянной в оценке (6.8) при $v \in C_0^\infty(\bar{\mathbb{R}}_+^1)$ и доопределенная нулем, если эта оценка не выполняется, является непрерывной функцией от коэффициентов операторов $P(D)$ и $p_1(D), \dots, p_\mu(D)$.

Доказательство. Единственность ограниченного решения задачи (6.7) сразу следует из линейности этой задачи и условия на эту задачу (6.6).

Докажем существование ограниченного на $\bar{\mathbb{R}}_+^1$ решения задачи (6.7) при $f \in C_0^\infty(\bar{\mathbb{R}}_+^1)$. Для этого сначала заметим, что уравнение $P(D)v=f$ при $f \in C_0^\infty(\bar{\mathbb{R}}_+^1)$ имеет частное решение $v_1 \in C_0^\infty(\bar{\mathbb{R}}_+^1)$. Такое решение v_1 легко найти методом вариаций постоянных. В соответствии с этим методом частными решениями этого уравнения $P(D)v=f$ являются функции вида $C_1(x)y_1(x) + \dots + C_m(x)y_m(x)$, где $y_1(x), \dots, y_m(x)$ – функциональная система

решений однородного уравнения $P(D)v=0$. При этом функции $C_j(x)$ определяются по формулам $C_j(x)=\int \frac{\Delta_j(x)}{a_0\Delta(x)}f(x)dx$, $j=1, \dots, m$, где a_0 – коэффициент при старшей производной $\left(\frac{d}{dt}\right)^m$ оператора $P(D)$, не равный нулю, $\Delta(x)$ – вронскиан системы функций y_1, \dots, y_m , а $\Delta_j(x)$ – алгебраическое дополнение j -го элемента последней строки определителя $\Delta(x)$ ($j=1, \dots, m$). Выбирая теперь функции $C_1(x), \dots, C_m(x)$ с помощью формул $C_j(x)=-\int_x^{+\infty} \frac{\Delta_j(t)}{a_0\Delta(t)}f(t)dt$, $j=1, \dots, m$, получим искомое частное решение $v_1(x)=C_1(x)y_1(x)+ \dots + C_m(x)y_m(x) \in C_0^\infty(\bar{\mathbf{R}}_+^1)$ уравнения $P(D)v=f$. Таким образом достаточно доказать существование ограниченного решения задачи (6.7) при $f=0$.

Так как характеристическое уравнение $P(\lambda)=0$ имеет ровно μ корней в верхней полуплоскости, то множество всех N экспоненциально убывающих при $t \rightarrow +\infty$ решений уравнения $P(D)v=0$ является μ -мерным линейным пространством над \mathbf{C} . По предположению линейное отображение $\tilde{V}: N \rightarrow \mathbf{C}^\mu$, определяемое по формуле $N \ni v \rightarrow (p_1(D)v(0), \dots, p_\mu(D)v(0)) \in \mathbf{C}^\mu$, имеет нулевое ядро. А поскольку $\dim N = \mu$, то это отображение является изоморфным. Отсюда следует существование экспоненциально убывающего при $t \rightarrow +\infty$ (а значит и ограниченного на $\bar{\mathbf{R}}_+^1$) решения задачи (6.7) при $f=0$, а также и существование ограниченного решения задачи (6.7) при $f \neq 0$.

Докажем теперь оценку (6.8). Рассмотрим сначала случай $f=0$. Пусть $e_1(t), \dots, e_\mu(t)$ какой-либо базис в μ -мерном линейном пространстве N , состоящем из экспоненциально убывающих при $t \rightarrow +\infty$ вместе со всеми производными функций. В частности, в качестве базиса в N можно взять

функции $t^{l_j} e^{i\lambda_j t}$, где λ_j – корень кратности ν_j характеристического уравнения $P(\lambda) = 0$, $l_j = 0, \dots, \nu_j - 1$, $j = 1, \dots, r$, $\nu_1 + \dots + \nu_r = \mu$.

Пусть, далее B – матрица изоморфизма $\tilde{B}: N \rightarrow \mathbf{C}^\mu$ в базисах $e_1(t), \dots, e_\mu \subset N$ в каноническом базисе \mathbf{C}^μ . Если теперь $v(t) = \sum_{j=1}^{\mu} c_j e_j(t) \in N$, $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_\mu)^T = (p_1 v(0), \dots, p_\mu v(0))^T \in \mathbf{C}^\mu$, то $\psi = Bc$, где $c = (c_1, \dots, c_\mu)^T$. Отсюда $c = T\psi$ при всех $\psi \in \mathbf{C}^\mu$, где $T = B^{-1}$.

Теперь легко доказать оценку (6.8) при $f = 0$. Так как $D^k v(t) = \sum_{j=1}^{\mu} C_j D^k e_j(t)$, где $D^k e_j(t)$ – экспоненциально убывающие при $t \rightarrow +\infty$ функции при $j = 1, \dots, \mu$ и при любом $k \in \mathbf{Z}_+$, то

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} |D^k v(t)|^2 dt &= \int_0^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{\mu} C_j D^k e_j(t) \right|^2 dt \leq \mu \sum_{j=1}^{\mu} |C_j|^2 \int_0^{\infty} |D^k e_j(t)|^2 dt \leq \\ &\leq \mu \tilde{C}_k \|c\|^2 = \mu \tilde{C}_k \|T\psi\|^2 \leq \mu \tilde{C}_k \|T\|^2 \|\psi\|^2 = C_k \|\psi\|^2. \end{aligned}$$

Здесь использовано неравенство $|b_1 + \dots + b_\mu|^2 \leq \mu (|b_1|^2 + \dots + |b_\mu|^2)$, верное для любых чисел $b_1, \dots, b_\mu \subset \mathbf{C}$ и любого $\mu \in \mathbf{N}$, через \tilde{C}_k обозначено максимальное из чисел $\int_0^{\infty} |D^k e_j(t)|^2 dt$, $j = 1, \dots, \mu$, $\|C\|^2 = \sum_{j=1}^{\mu} |C_j|^2$, $\|\psi\|^2 = \sum_{j=1}^{\mu} |\psi_j|^2$, $\|T\|$ – норма матрицы T , соответствующая норме $\|\psi\|$ вектора $\psi \in \mathbf{C}^\mu$, а $C_k = \mu \tilde{C}_k \|T\|^2$.

Кроме того, при любом $k \in \mathbf{Z}_+$ имеем

$$|D^k v(0)|^2 = \left| \sum_{j=1}^{\mu} C_j D^k e_j(0) \right|^2 \leq \mu \sum_{j=1}^{\mu} |C_j|^2 |D^k e_j(0)|^2 = \mu \hat{C}_k \|c\|^2 \leq \mu \hat{C}_k \|T\|^2 \|\psi\|^2 = C'_k \|\psi\|^2,$$

где \hat{C}_k – максимальное из чисел $|D^k e_j(0)|^2$, $j = 1, \dots, \mu$, $C'_k = \mu \hat{C}_k \|T\|^2$.

Таким образом, неравенство (6.8) при $f=0$ с постоянной $C=C'=C_0+C_1+\dots+C_m+C'_0+\dots+C'_{m-1}$, не зависящей от $\psi=(\psi_1,\dots,\psi_\mu)\in C^\mu$, выполняется для соответствующего решения v для задачи (6.7) при $f=0$.

Перейдем теперь к доказательству оценки (6.8) для любых функций $f\in C_0^\infty(\bar{\mathbf{R}}_+^1)$. Для этого сначала рассмотрим частное обобщенное решение для v_0 уравнения $P(D)v_0=f$, определенное своим преобразованием Фурье по формуле $\tilde{v}_0=\frac{\tilde{f}_0(\tau)}{P(\tau)}$, где $f_0(t)=0$ при $t<0$ и $f_0(t)=f(t)$ при $t\geq 0$. Так как $f_0\in L_2(\mathbf{R})$, то по теореме Планшереля $\tilde{f}_0\in L_2(\mathbf{R})$. Поскольку многочлен $P(\tau)$ по предположению не имеет вещественных корней, то существует такая постоянная $A>0$, что $|1/P(\tau)|\leq A$ при всех $\tau\in\mathbf{R}$. Следовательно, $\tilde{v}_0=\tilde{f}_0(P\in L_2(\mathbf{R}))$ и по теореме Планшереля $v_0\in L_2(\mathbf{R})\subset S'(\mathbf{R})$. Так как $P(\tau)\tilde{v}_0(\tau)=\tilde{f}_0(\tau)$, то $f(D)v_0=f_0$ в смысле $S'(\mathbf{R})$, а поскольку $f_0\in C(\mathbf{R})$, то $v_0\in C^m(\mathbf{R})$ и является классическим решением уравнения $f(D)v_0=f_0$ на \mathbf{R} (задача 6.1). Отсюда, в частности, следует, что $f(D)v_0(t)=f(t)$ при $t>0$.

Докажем теперь, что существует такая положительная постоянная C' , не зависящая от f , что выполняется оценка

$$\sum_{j=1}^m \int_0^\infty |D^j v_0|^2 dt + \sum_{j=0}^{m-1} |D^j v_0(0)|^2 \leq C'' \int_0^\infty |f|^2 dt. \quad (6.9)$$

Так как многочлен $P(\tau)$ не имеет вещественных корней, то для любого $j=0, 1, \dots, m$ очевидно существует такая постоянная A_j , что $|\tau^j/P(\tau)|\leq A_j < \tau >^{j-m}$ при всех $\tau\in\mathbf{R}$. Отсюда, в силу неравенства Коши–Буняковского при $j=0, \dots, m-1$, имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\tau^j \tilde{f}_0(\tau)}{P(\tau)} \right| d\tau &\leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\tau^j}{P(\tau)} \right| d\tau \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{f}_0(\tau)| d\tau \right)^{1/2} \leq \\ &\leq A_j \left(\int_{-\infty}^{+\infty} < \tau >^{2(j-m)} d\tau \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{f}_0(\tau)| d\tau \right)^{1/2} < \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, при $j = 0, \dots, m-1$ функция $\tau^j \tilde{f}_0(\tau)/P(\tau)$ абсолютно интегрируема на \mathbf{R} и, в силу теоремы о дифференцируемости интеграла с параметром, $D^j v_0(t) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\tau} \tau^j \tilde{f}_0(\tau)/P(\tau) d\tau$, $j = 0, \dots, m-1$. Из этой формулы и из предыдущих неравенств, используя равенство Парсеваля, при $j = 0, \dots, m-1$ получим

$$|D^j v_0(0)|^2 \leq (2\pi)^{-2} A_j^2 \tilde{A}_j^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{f}_0(\tau)|^2 d\tau = (2\pi)^{-1} A_j^2 \tilde{A}_j^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |f_0(t)|^2 dt = \hat{A}_j \int_0^{+\infty} |f_0(t)|^2 dt,$$

где $\tilde{A}_j^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \tau \rangle^{2(j-m)} d\tau$, $\hat{A}_j = (2\pi)^{-1} A_j^2 \tilde{A}_j^2$.

Кроме того, снова используя равенство Парсеваля, при $j = 0, \dots, m$ имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} |D^j v_0(t)|^2 dt &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |D^j v_0(t)|^2 dt = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\tau^j \tilde{f}_0(\tau)}{P(\tau)} \right| d\tau \leq \\ &\leq (2\pi)^{-1} A_j^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{f}_0(\tau)|^2 d\tau = A_j^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |f_0(t)|^2 dt = A_j^2 \int_0^{+\infty} |f_0(t)|^2 dt \end{aligned}$$

Таким образом, оценка (6.9) выполняется с постоянной $C'' = A_0^2 + \dots + A_m^2 + \hat{A}_0 + \dots + \hat{A}_{m-1}$.

Пусть теперь v – ограниченное на $\bar{\mathbf{R}}_+$ решение задачи (6.6) с функцией $f \in C_0^\infty(\bar{\mathbf{R}}_+)$. Для этой функции f выберем решение v_0 уравнения $P(D)v_0 = f$, указанное выше, и сделаем замену вида $v = v_0 + w$, тогда для функции w получим следующую краевую задачу:

$$P(D)w(t) = 0 \text{ при } t > 0, \quad (p_j(D)w)(0) = \psi_j - (p_j(D)v_0)(0), \quad j = 1, \dots, \mu.$$

В силу оценки (6.8) при $f = 0$ (и при $C = C'$) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^m \int_0^{\infty} |D^j w|^2 dt + \sum_{j=0}^{m-1} |D^j w(0)|^2 &\leq C' \sum_{j=1}^{\mu} |\psi_j - (p_j(D)v_0)(0)|^2 \leq \\ &\leq 2C' \left(\sum_{j=1}^{\mu} |\psi_j|^2 + \sum_{j=1}^{\mu} |(p_j(D)v_0)(0)|^2 \right). \end{aligned} \tag{6.10}$$

Оценим теперь последнюю сумму. Пусть $p_j(D) = \sum_{l=0}^{m_j} a_{jl} D^{m_j-l}$, где по условию теоремы $m_j \leq m-1$ при всех $j=1, \dots, \mu$. Тогда при всех $j=1, \dots, \mu$, используя оценку (6.9), получим

$$\begin{aligned} |(p_j(D)v_0(0))|^2 &= \left| \sum_{l=0}^{m_j} a_{jl} D^{m_j-l} v_0(0) \right|^2 \leq m_j \sum_{l=0}^{m_j} |a_{jl}|^2 |D^{m_j-l} v_0(0)|^2 \leq \\ &\leq m_j \sum_{l=0}^{m_j} |a_{jl}|^2 C'' \int_0^{+\infty} |f|^2 dt = \tilde{C}_j'' \int_0^{+\infty} |f|^2 dt. \end{aligned}$$

Отсюда и из уравнения (6.9) следует, что

$$\sum_{j=1}^m \int_0^{\infty} |D^j w|^2 dt + \sum_{j=1}^{m-1} |D^j w(0)|^2 \leq 2C' \left(\sum_{j=1}^{\mu} |\psi_j|^2 + \sum_{j=1}^{\mu} \tilde{C}_j'' \int_0^{+\infty} |f|^2 dt \right) \leq C''' \left(\sum_{j=1}^{\mu} |\psi_j|^2 + \int_0^{+\infty} |f|^2 dt \right),$$

где $C''' = \max(2C', \sum_{j=1}^{\mu} \tilde{C}_j'')$.

Так как $v = v_0 + w$ и, значит, $|D^j v(t)|^2 \leq 2(|D^j v_0(t)|^2 + |D^j w(t)|^2)$ при всех $j=0, 1, \dots, m$ и всех $t \geq 0$, из (6.9) и последнего неравенства имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^m \int_0^{\infty} |D^j v|^2 dt + \sum_{j=0}^{m-1} |D^j v(0)|^2 &\leq 2C'' \int_0^{+\infty} |f|^2 dt + \\ &+ 2C''' \left(\sum_{j=1}^{\mu} |\psi_j|^2 + \int_0^{+\infty} |f|^2 dt \right) \leq C \left(\int_0^{+\infty} |f|^2 dt + \sum_{j=1}^{\mu} |\psi_j|^2 \right), \end{aligned}$$

где $C = 2C'' + 2C'''$.

Докажем непрерывность от коэффициентов операторов $P(D)$ и $p_j(D)$ ($j=1, \dots, \mu$) обратной величины к наилучшей постоянной C в оценке (6.8).

Для этого рассмотрим нижнюю грань функционала

$$F(v) = \int_0^{\infty} |P(D)v|^2 dt + \sum_{j=1}^m |p_j(D)v(0)|^2$$

по множеству D всех функций $v \in C_0^{\infty}(\bar{\mathbf{R}}_+^1)$,

удовлетворяющих условию

$$\sum_{j=0}^m \int_0^{\infty} |D^j v|^2 dt + \sum_{j=0}^{m-1} |D^j v(0)|^2 = 1. \quad (6.11)$$

Если C – наилучшая из возможных постоянных в неравенстве (6.8), то $1/C = \inf_{v \in D} F(v)$. Если оценка (6.8) не выполняется то $\inf_{v \in D} F(v)$.

Заметим теперь, что функционал $F(v)$ зависит также и от коэффициентов операторов $P(D)$ и $p_j(D)$, $j=1, \dots, \mu$. Таким образом, $F(v) = F(v; a)$, где $a \in \mathbf{R}^K$ для некоторого $K \in \mathbf{N}$ и вектор a составлен из коэффициентов $P(D)$ и $p_j(D)$, $j=1, \dots, \mu$.

Из условия (6.11) следует, что семейство функций $\{F(v; a) : v \in D\}$ равномерно непрерывно по $a \in \mathbf{R}^K$. Это означает, что для любого $a^0 \in \mathbf{R}^K$ и любого ε существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что $|F(v; a) - F(v; a^0)| < \varepsilon$ при всех $|a - a^0| < \delta$ при всех $v \in D$. Для доказательства этого утверждения рассмотрим сначала семейство функций $\int_0^\infty |P(b; D)v|^2 dt$, $v \in D$, где $P(b; D) = \sum_{k=0}^m b_{m-k} D^k$,

$$b = (b_0, b_1, \dots, b_m) \in \mathbf{R}^{m+1}.$$

При любых $v \in D$ и $b, b^0 \in \mathbf{R}^{m+1}$ имеем

$$\begin{aligned} & \left| |P(b; D)v|^2 - |P(b^0; D)v|^2 \right| = \left(\left| |P(b; D)v| - |P(b^0; D)v| \right| \right) \left(|P(b; D)v| + |P(b^0; D)v| \right) \leq \\ & \leq \left(|P(b; D)v - P(b^0; D)v| \right) \left(|P(b; D)v| + |P(b^0; D)v| \right) = \\ & = \left| \sum_{k=0}^m (b_{m-k} - b_{m-k}^0) D^k v \right| \left(\left| \sum_{\ell=0}^m b_{m-\ell} D^\ell v \right| + \left| \sum_{\ell=0}^m b_{m-\ell}^0 D^\ell v \right| \right) \leq \\ & \leq \sum_{k, \ell=0}^m |b_{m-k} - b_{m-k}^0| |b_{m-\ell}^0| |D^k v| |D^\ell v| + \sum_{k, \ell=0}^m |b_{m-k} - b_{m-k}^0| |b_{m-k}^0| |D^k v| |D^\ell v|. \end{aligned}$$

Пусть $\delta' > 0$ и $|b - b^0| < \delta'$. Тогда, используя последнюю оценку, неравенство Коши – Буняковского и условие (6.11), получим

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \left| |P(b; D)v|^2 - |P(b^0; D)v|^2 \right| dt \leq \sum_{k, \ell=0}^m |b_{m-k} - b_{m-k}^0| (|b_{m-\ell}| + |b_{m-\ell}^0|) \int_0^\infty |D^k v| |D^\ell v| dt \\
& \leq \sum_{k, \ell=0}^m |b_{m-k} - b_{m-k}^0| (|b_{m-\ell}| + |b_{m-\ell}^0|) \left(\int_0^\infty |D^k v|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^\infty |D^\ell v|^2 dt \right)^{1/2} \leq \\
& \leq \sum_{k, \ell=0}^m |b_{m-k} - b_{m-k}^0| (|b_{m-\ell}| + |b_{m-\ell}^0|) \leq \delta' (|b| + |b^0|) (m+1)^2 \leq \delta' (2|b^0| + \delta') (m+1)^2.
\end{aligned}$$

Отсюда, выбирая теперь $\delta'_1 > 0$ так, чтобы $\delta'_1 (2|b^0| + \delta') (m+1)^2 < \varepsilon/2$, получим оценку $\left| \int_0^\infty |P(b; D)v|^2 - \int_0^\infty |P(b^0; D)v|^2 dt \right| \leq \int_0^\infty \left| |P(b; D)v|^2 - |P(b^0; D)v|^2 \right| dt < \varepsilon/2$ при $|b - b^0| < \delta'$ и $v \in D$.

Оценим теперь разность $\left| |p_j(d_j; D)v(0)|^2 - |p_j(d_j^0; D)v(0)|^2 \right|$ при $|d_j - d_j^0| < \delta_j$,

$v \in D$, где $p_j(d_j; D) = \sum_{k=0}^{m_j} d_{j, m_j-k} D^k$, $d_j = (d_{j,0}, \dots, d_{j, m_j}) \in \mathbf{R}^{m_j+1}$, $j=1, \dots, \mu$.

Из условия (6.11) следуют неравенства $|D^k v(0)| \leq 1$ при всех $v \in D$ и при $k=0, 1, \dots, m-1$. Так как $m_j \leq m-1$ для всех $j=1, \dots, \mu$, то отсюда имеем

$$\begin{aligned}
& \left| |p_j(d_j; D)v(0)|^2 - |p_j(d_j^0; D)v(0)|^2 \right| \leq \\
& \leq |p_j(d_j; D)v(0) - p_j(d_j^0; D)v(0)| (|p_j(d_j; D)v(0)| + |p_j(d_j^0; D)v(0)|) \leq \\
& \leq \sum_{k,l}^{m_j} |d_{j, m_j-k} - d_{j, m_j-l}^0| (|d_{j, m_j-k}| + |d_{j, m_j-l}^0|) |D^k v(0)| |D^l v(0)| \leq \\
& \leq \delta_j (|d_j| + |d_j^0|) (m_j+1)^2 \leq \delta_j (2|d_j^0| + \delta_j) (m_j+1)^2, \quad j=1, \dots, \mu.
\end{aligned}$$

Выбирая теперь $\delta_j > 0$ так, чтобы $\delta_j (2|d_j^0| + \delta_j) (m_j+1)^2 < \varepsilon/2\mu$ получим оценки $\left| |p_j(d_j; D)v(0)|^2 - |p_j(d_j^0; D)v(0)|^2 \right| < \varepsilon/2\mu$ при $|d_j - d_j^0| < \delta_j$, $v \in D$, $j=1, \dots, \mu$.

Если теперь положить $\delta = \delta' + \delta_1 + \dots + \delta_\mu$, $a = (b, d_1, \dots, d_\mu)$, при всех $v \in D$ будем иметь

$$\begin{aligned}
|F(v; a) - F(v; a^0)| &= \left| \int_0^\infty (|p(b; D)v|^2 - |p(b^0; D)v|^2) dt + \sum_{j=1}^\mu |p_j(d_j; D)v(0)|^2 - |p_j(d_j^0; D)v(0)|^2 \right| \leq \\
&\leq \left| \int_0^\infty (|p(b; D)v|^2 - |p(b^0; D)v|^2) dt \right| + \sum_{j=1}^\mu \left| |p_j(d_j; D)v(0)|^2 - |p_j(d_j^0; D)v(0)|^2 \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \mu \frac{\varepsilon}{2\mu} < \varepsilon
\end{aligned}$$

при $|a - a^0| < \delta$, $v \in D$.

Таким образом, равностепенная непрерывность от коэффициентов $a \in \mathbf{R}^K$ операторов P и p_j , где $j = 1, \dots, \mu$, семейства функций $\{F(v; a) : v \in D\}$ доказана.

Пользуясь равномерной непрерывностью семейства $\{F(v; a) : v \in D\}$, легко доказать теперь непрерывность от $a \in \mathbf{R}^K$ нижней грани

$$F_0(a) = \inf \{F(v; a) : v \in D\}.$$

Пусть даны $a^0 \in \mathbf{R}^K$ и любое $\varepsilon > 0$. Выберем тогда такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что $|F(v; a) - F(v; a^0)| < \varepsilon/2$ при всех $|a - a^0| < \delta$ и $v \in D$. Отсюда и из определения нижней грани следует существование такой функции $v_0 \in D$, что

$$F_0(a) > F(v_0; a) - \varepsilon/2 = F(v_0; a) - F(v_0; a^0) + F(v_0; a^0) - \varepsilon/2 > -\varepsilon/2 + F(v_0; a^0) - \varepsilon/2 \geq F_0(a^0) - \varepsilon$$

при $|a - a^0| < \delta$.

Аналогично получим существование такой функции $v \in D$, что

$$F_0(a^0) > F(v; a^0) - \varepsilon/2 = F(v; a^0) - F(v; a) + F(v; a) - \varepsilon/2 > -\varepsilon/2 + F(v; a) - \varepsilon/2 \geq F_0(a) - \varepsilon$$

при $|a - a^0| < \delta$.

Таким образом, при всех $|a - a^0| < \delta$ получаем неравенства $F_0(a) > F_0(a^0) - \varepsilon$ и $F_0(a^0) > F_0(a) - \varepsilon$, т.е. $F_0(a^0) - \varepsilon < F_0(a) < F_0(a^0) + \varepsilon$.

Отсюда следует непрерывность функции $F_0(a)$ при всех $a \in \mathbf{R}^K$, т.е. от коэффициента операторов P , p_1, \dots, p_μ обратной величины $1/C$ к наилучшей постоянной в оценке (6.8) при $v \in C_0^\infty(\bar{\mathbf{R}}_+^1)$ (с условием доопределения величины $1/C$ нулем в случае невыполнения оценки (6.8)). \square

Замечание 6.1. Утверждение теоремы 6.1 легко переносится (задача 6.2) на случай, когда вместо краевой задачи (6.7) рассматривается одно

только уравнение $P(D)v = f$ на полуоси (без краевых условий). В этом случае при условии отсутствия ненулевых ограниченных на $\bar{\mathbf{R}}_+^1$ решений однородного уравнения $P(D)v = 0$ неоднородное уравнение $P(D)v = f$ имеет единственное ограниченное на $\bar{\mathbf{R}}_+^1$ решение для любой функции $f \in C_0^\infty(\bar{\mathbf{R}}_+^1)$. При этом существует такая постоянная $C > 0$, что выполняется оценка $\sum_{j=0}^m \int_0^\infty |D^j v|^2 dt + \sum_{j=0}^{m-1} |D^j v(0)|^2 \leq C \int_0^\infty |P(D)v|^2 dt$ при всех $v \in C_0^\infty(\bar{\mathbf{R}}_+^1)$, где m – порядок оператора $P(D)$. Кроме того, наилучшая величина C в этой оценке является непрерывной функцией от коэффициентов операторов $P(D), p_1(D), \dots, p_\mu(D)$.

Небольшой модификацией замечания 6.1 является следующая теорема.

Теорема 6.2. Пусть все корни алгебраического уравнения $P(\lambda) = 0$ порядка m находятся в полуплоскости $\text{Im } \lambda < \nu \in \mathbf{R}$. Тогда существует такая постоянная $C = C_\nu > 0$, зависящая от ν и не зависящая от $f \in C_0^\infty(\bar{\mathbf{R}}_+^1)$, что для всех решений уравнения $P(D)v = f$ на $\bar{\mathbf{R}}_+^1$ выполняется оценка

$$\sum_{j=0}^m \int_0^\infty e^{2\nu t} |D^j v(t)|^2 dt + \sum_{j=0}^{m-1} |D^j v(0)|^2 \leq C \int_0^\infty e^{2\nu t} |f(t)|^2 dt, \quad (6.12)$$

наилучшая из возможных постоянных C непрерывно зависит от коэффициентов оператора $P(D)$.

Доказательство. Отметим сначала, что решение $v \in C_0^\infty(\bar{\mathbf{R}}_+^1)$ уравнения $P(D)v = f$ на $\bar{\mathbf{R}}_+^1$ существует для любого линейного дифференциального оператора $P(D)$, где $D = -id/dt$, и любой функции $f \in C_0^\infty(\bar{\mathbf{R}}_+^1)$. Это замечание было доказано в начале доказательства теоремы 6.1.

Покажем, что замена $v(t) = w(t)e^{-\nu t}$ сводит данную теорему к замечанию 6.1. Очевидно, что $P(D)(we^{-\nu t}) = e^{-\nu t}Q(D)w$, где $Q(D)$ – линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами (зависящими от ν) порядка m .

Для любого линейного дифференциального оператора $P(D)$ с постоянными коэффициентами выполняется для любых $\lambda \in \mathbb{C}$ равенство $P(D)e^{i\lambda t} = P(\lambda)e^{i\lambda t}$, $t \in \mathbb{R}$. Отсюда и из равенства $P(D)(we^{-\nu t}) = e^{-\nu t}Q(D)w$ при $w(t) = e^{ist}$ получаем, что $P(s + i\nu) = Q(s)$ при всех $s \in \mathbb{C}$. Следовательно, для всех корней уравнения $Q(s) = 0$ выполняется условие $\text{Im } s < 0$.

Уравнение $P(D)v = f$ равносильно уравнению $Q(D)w = fe^{\nu t}$. В силу замечания 6.1 существует такая не зависящая от f постоянная $C' = C'_\nu > 0$, что для всех решений $w \in C_0^\infty(\bar{\mathbb{R}}_+)$ уравнения $Q(D)w = fe^{\nu t}$ выполняется оценка

$$\sum_{j=0}^m \int_0^\infty |D^j w|^2 dt + \sum_{j=0}^{m-1} |D^j w(0)|^2 \leq C' \int_0^\infty e^{2\nu t} |f|^2 dt. \quad (6.13)$$

В силу формулы Лейбница

$$D^k v(t) = D^k (w(t)e^{-\nu t}) = e^{-\nu t} \sum_{l=0}^k b_l D^l w(t), \quad (6.14)$$

где b_l – некоторые постоянные, зависящие от k и $l = 0, 1, \dots, k$. Отсюда, используя неравенство $|a_0 + \dots + a_k|^2 \leq (k+1)(|a_0|^2 + \dots + |a_k|^2)$ и оценку (6.13), при любом $k = 1, \dots, m$ получаем неравенство

$$\int_0^\infty e^{2\nu t} |D^k v(t)|^2 dt \leq (k+1) \sum_{l=0}^k |b_l|^2 \int_0^\infty |D^l w(t)|^2 dt \leq (k+1) B_k C' \int_0^\infty e^{2\nu t} |f|^2 dt, \quad (6.15)$$

где $B_k = \max(b_0, \dots, b_k)$.

Кроме того, при любом $k = 0, \dots, m$ из формулы (6.13) имеем

$$|D^k v(0)|^2 \leq (k+1) \sum_{l=0}^k |b_l|^2 |D^l w(0)|^2 \leq (k+1) B_k C' \int_0^\infty e^{2\nu t} |f|^2 dt. \quad (6.16)$$

Суммируя теперь оценки вида (6.15) при $k = 0, \dots, m$ и оценки вида (6.16) при $k = 0, \dots, m-1$, получим оценку (6.12) с некоторой постоянной C , зависящей от ν и от коэффициентов оператора $P(D)$.

Если C – наилучшая из возможных постоянных в оценке (6.12), то $\frac{1}{C} = \inf \left\{ \int_0^\infty e^{2vt} |P(D)v(t)|^2 dt \right\}$, где нижняя грань берется по всем функциям

$$v \in C_0^\infty(\bar{\mathbf{R}}_+^1), \text{ удовлетворяющим условию } \sum_{j=0}^m \int_0^\infty e^{2vt} |D^j v(t)|^2 dt + \sum_{j=0}^{m-1} |D^j v(t)|^2 = 1.$$

Так же, как при доказательстве теоремы (6.1), отсюда следует непрерывность функции $1/C$ от коэффициентов оператора $P(D)$. \square

Замечание 6.2. Теорему 6.2 можно обобщить на случай краевой задачи на $\bar{\mathbf{R}}_+^1$ вида $P(D)v = f$, $p_j(D)v(0) = \psi_j$, $j = 1, \dots, \mu$.

Однако в настоящем пособии мы не будем приводить это обобщение, поскольку оно является довольно громоздким и не будет здесь использоваться.

6.3. УСЛОВИЕ ЛОПАТИНСКОГО

В данном параграфе доказывается, что обобщенная краевая задача (6.3) корректно поставлена в том и только в том случае, когда выполняется формулируемое ниже *условие Лопатинского*. Это условие имеет несколько эквивалентных формулировок и названий – *условие эллиптичности краевой задачи, условия дополненности, условия накрывания, условия Шапиро-Лопатинского* (см, например, [1],[6],[11],[12],[13]).

Условие Лопатинского формируются следующим образом. Рассматривается вспомогательная краевая задача с параметром на полуоси

$$\begin{aligned} P(\xi', D_n)v(x_n) &= F(x_n) \quad \text{при } x_n > 0, \\ B_j(\xi', D_n)v(x_n) &= \psi_j \quad \text{при } x_n = 0, \quad j = 1, \dots, \mu, \end{aligned} \quad (6.17)$$

где параметр $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1} \setminus 0$, $\mu = m/2$.

На самом деле решения v задачи (6.17) зависят от параметра ξ' . В связи с этим в дальнейшем эти решения будут обозначаться и через $v(\xi'; x_n)$.

Определение 6.2. Краевая задача (6.1) и (6.2) (или (6.3)) удовлетворяет условию Лопатинского, если для любых $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1} \setminus 0$, $F \in C_0^\infty(\bar{\mathbf{R}}_+^1)$ и $\psi_1, \dots, \psi_\mu \subset \mathbf{C}$ (задача (6.17) имеет единственное ограниченное решение на $\bar{\mathbf{R}}_+^1$.

Уравнение $P(\xi', D_n)v(x_n) = F(x_n)$ имеет частные решения $v \in C_0^\infty(\bar{\mathbf{R}}_+^1)$ при $F \in C_0^\infty(\bar{\mathbf{R}}_+^1)$ (см. доказательство теоремы 6.1). С помощью этого частного решения задача (6.17) сводится к задаче того же вида с $F(x_n) = 0$ при $x_n \in \bar{\mathbf{R}}_+^1$. Это означает, что определение 6.2 равносильно следующему более простому определению.

Определение 6.3. Краевая задача (6.1), (6.2) (или (6.3)) удовлетворяет условию Лопатинского, если для любых $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1} \setminus 0$ и $\psi_1, \dots, \psi_\mu \subset \mathbf{C}$ задача

$$\begin{aligned} P(\xi', D_n)v(x_n) &= 0 \text{ при } x_n > 0, \\ B_j(\xi', D_n)v(x_n) &= \psi_j \text{ при } x_n = 0, \quad j=1, \dots, \mu \end{aligned} \quad (6.18)$$

имеет единственное ограниченное решение на $\bar{\mathbf{R}}_+^1$.

При фиксированном $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1} \setminus 0$ задача (6.18) является краевой задачей на $\bar{\mathbf{R}}_+^1$ для линейного однородного (без правой части) уравнения с постоянными коэффициентами. Так как оператор $P(D)$ по определению является однородным и правильно эллиптическим, то характеристическое уравнение $P(\xi', \lambda) = 0$ имеет ровно $\mu = m/2$ корней $\lambda_j(\xi')$ с $\text{Im}(\lambda_j(\xi')) > 0$ (с учетом кратностей). Поэтому множество всех ограниченных решений на $\bar{\mathbf{R}}_+^1$ уравнения $P(\xi', D_n)v = 0$ определяется по формуле

$$v = v(\xi', x_n) = \sum_{j=1}^r \sum_{l=0}^{v_j-1} c_{jl}(\xi') x_n^l e^{i\lambda_j(\xi')x_n}. \quad (6.19)$$

Здесь $\lambda_1(\xi'), \dots, \lambda_r(\xi')$ — корни характеристического уравнения $P(\xi', \lambda) = 0$, кратность которых соответственно равна v_1, \dots, v_r , $v_1 + \dots + v_r = \mu$, $\text{Im}(\lambda_j(\xi')) > 0$

при $j=1, \dots, \mu$, а $c_{jl}(\xi')$ – произвольные постоянные $l=0, \dots, \nu_{j-1}$, $j=1, \dots, \mu$ ($\xi' \in \mathbf{R}^{n-1} \setminus 0$ и ξ' – фиксировано).

Таким образом, для нахождения ограниченного на $\bar{\mathbf{R}}_+^1$ решения задачи (6.18) нужно подставить функцию v вида (6.19) в краевые условия $B_j(\xi', D_n)v(x_n) = \psi_j$ при $x_n = 0$, $j=1, \dots, \mu$. При этом получается линейная система μ уравнений относительно μ неизвестных c_{jl} . Условие Лопатинского означает, что эта система линейных уравнений должна быть однозначно разрешена при любых $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1} \setminus 0$ и любых $\psi_1, \dots, \psi_\mu \in \mathbf{C}$.

Если обозначить через $\tau_1(\xi'), \dots, \tau_\mu(\xi')$ корни $\lambda_1(\xi'), \dots, \lambda_r(\xi')$ с учетом их кратностей, то условие Лопатинского примет вид условия

$$\det \|B_j(\xi', \tau_k(\xi'))\|_{j,k=1}^\mu \neq 0 \quad \text{при всех } \xi' \in \mathbf{R}^{n-1} \setminus 0. \quad (6.20)$$

Отсюда легко следует также еще одно условие, эквивалентное условию Лопатинского.

Определение 6.4. Краевая задача (6.1), (6.2) (или (6.3)) удовлетворяет условию Лопатинского, если для любых $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1} \setminus 0$ задача

$$\begin{aligned} P(\xi', D_n)v(x_n) &= 0 \quad \text{при } x_n > 0, \\ B_j(\xi', D_n)v(x_n) &= 0 \quad \text{при } x_n = 0, \quad j=1, \dots, \mu \end{aligned} \quad (6.21)$$

имеет только нулевое ограниченное решение на $\bar{\mathbf{R}}_+^1$.

Замечание 6.3. Учитывая структуру общего решения линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и предположения о корнях уравнения $P(\xi', \lambda) = 0$ относительно λ , легко увидеть, что условия ограниченности решения $v(x_n)$ при $x_n > 0$ уравнения $P(\xi', D_n)v = 0$ равносильно следующим условиям:

- 1) $v(x_n) \rightarrow 0$ при $x_n \rightarrow +\infty$;
- 2) $v(x_n)$ экспоненциально убывает к нулю при $x_n \rightarrow +\infty$;
- 3) $v \in S(\bar{\mathbf{R}}_+^1)$; 4) $v \in L_2(\bar{\mathbf{R}}_+^1)$.

В заключение сформулируем еще одну эквивалентную условию Лопатинского (алгебраическую) формулировку условия *дополнительности краевой задачи*. Для этого при каждом $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1} \setminus 0$ определим многочлен $P^+(\xi', \lambda)$ от λ по формуле $P^+(\xi', \lambda) = \prod_{j=1}^{\mu} (\lambda - \tau_j(\xi'))$, где $\tau_1(\xi'), \dots, \tau_{\mu}(\xi')$ – все корни многочлена $P(\xi', \lambda)$, лежащие в верхней полуплоскости (с учетом кратностей).

Утверждение 6.1. Краевая задача (6.1), (6.2) (или (6.3)) удовлетворяет условию Лопатинского тогда и только тогда, когда для любого $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1} \setminus 0$ многочлены (от λ) $B_1(\xi', \lambda), \dots, B_{\mu}(\xi', \lambda)$ линейно независимы по модулю многочлена $P^+(\xi', D_n)$.

Доказательство. Пусть $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1} \setminus 0$ и выполняется равенство

$$c_1 B_1(\xi', \lambda) + \dots + c_{\mu} B_{\mu}(\xi', \lambda) = 0 \pmod{P^+(\xi', D_n)},$$

где c_1, \dots, c_{μ} – некоторые постоянные. По определению это равенство эквивалентно системе равенств

$$\sum_{j=1}^{\mu} c_j B_j(\xi', \tau_k(\xi')) = 0, \quad k = 1, \dots, \mu.$$

Последняя система, рассматриваемая как система линейных уравнений относительно независимых c_1, \dots, c_{μ} , имеет только тривиальное решение тогда и только тогда, когда выполняется условие (6.21). \square

Легко проверить, что краевые задачи в примерах 6.1 и 6.2 (при $b_n \neq 0$) удовлетворяют условию Лопатинского (задача 6.5).

6.4. КРИТЕРИЙ КОРРЕКТНОСТИ ПОСТАНОВКИ

Теорема 6.3. Для того чтобы обобщенная краевая задача (6.1), (6.2) была корректно поставлена, необходимо и достаточно выполнить для неё условия Лопатинского.

Доказательство необходимости проведем от противного. Допустим, что условие Лопатинского для задачи (6.1), (6.2) не выполняется при некотором $\xi' \in R^{n-1} \setminus 0$. Тогда существует ненулевое ограниченное на \bar{R}_+^1 решение краевой задачи

$$P(\xi', D_n)v(x_n) = 0 \quad \text{при } x_n > 0,$$

$$B_j(\xi', D_n)v(x_n) = 0 \quad \text{при } x_n = 0, \quad j = 1, \dots, \mu.$$

Выберем две срезающие функции $\varphi_1 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$ и $\varphi_2 \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, удовлетворяющие следующим условиям. Пусть $0 \leq \varphi_1(x') \leq 1$ при всех $x \in \mathbf{R}^{n-1}$, $0 \leq \varphi_2(x_n) \leq 1$ при всех $x_n \in \mathbf{R}$, $\varphi_1(x') = 1$ в некоторой окрестности точки $x' = 0$ в \mathbf{R}^{n-1} , $\varphi_2(x_n) = 1$ при $|x_n| \leq a$, где $a > 0$, $\varphi_2(x_n) < 1$ при $|x_n| > a$ и $\varphi_2(x_n) = 0$ при $|x_n| \geq b$. Отсюда, в частности, следует, что $\varphi_1\varphi_2 \in C_0^\infty\mathbf{R}^n$, $0 \leq \varphi_1(x')\varphi_2(x_n) \leq 1$ при всех $x = (x', x_n) \in \mathbf{R}^n$ и $\varphi_1(x')\varphi_2(x_n) = 1$ в некоторой окрестности ω точки $x = 0$ в \mathbf{R}^n .

Рассмотрим теперь семейство функций $u_\lambda(x', x_n) = \varphi_1(x')\varphi_2(x_n)e^{i\lambda\xi'_0 x'}v(\lambda x_n)$, где $\lambda \geq 1$. Очевидно, что $u_\lambda \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \subset C_0^\infty(\bar{\mathbf{R}}_+^n) \subset H^m(\mathbf{R}_+^n)$ при всех $\lambda \geq 1$. Покажем, что априорная оценка (6.5) не выполняется для функций u_λ при $\lambda \geq 1$. Это даст противоречие к предположению, что задача (6.1), (6.2) корректно поставлена.

Подставим функции u_λ при $\lambda \geq 1$ в левую и правую части неравенства (6.5) и оценим полученные значения при достаточно больших λ .

Так как $\xi'_0 = (\xi'_{01}, \dots, \xi'_{0,n-1}) \neq (0, \dots, 0)$, то существует такое $j \leq n-1$, что $\xi'_{0j} \neq 0$. Используя формулу Лейбница, вычислим $D_j^m u_\lambda$. Имеем

$$D_j^m u_\lambda(x) = \varphi_2(x_n)v(\lambda x_n) \sum_{k=0}^m C_k (D_j^k \varphi_1(x')) (D_j^{m-k} e^{i\lambda\xi'_0 x'}),$$

где C_k — некоторые постоянные при $k = 0, 1, \dots, m$, в частности $C_0 = 1$. Поскольку $D_j^l e^{i\lambda\xi'_0 x'} = \lambda^l \xi'_{0j} e^{i\lambda\xi'_0 x'}$ при всех $l = 0, 1, \dots, m$, то

$$D_j^m u_\lambda(x) = \lambda^m \xi_{0j}^m \varphi_1(x') \varphi_2(x_n) v(\lambda x_n) e^{i\lambda \xi_{0j}^m x'} + \\ + \varphi_2(x_n) v(\lambda x_n) e^{i\lambda \xi_{0j}^m x'} \sum_{k=1}^m D_j^k \varphi_1(x') \xi_{0j}^{m-k} \lambda^{m-k}.$$

Отсюда

$$\left| D_j^m u_\lambda(x) \right|^2 = D_j^m u_\lambda(x) \cdot D_j^m u_\lambda(x) = \lambda^{2m} \xi_{0j}^{2m} \varphi_1^2(x') \varphi_2^2(x_n) |v(\lambda x_n)|^2 + \\ + \varphi_2^2(x_n) |v(\lambda x_n)|^2 \sum_{l=0}^{2m-1} a_l(x') \lambda^l,$$

где $a_l \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$ и $\text{supp } a_l \subset \text{supp } p\varphi_1$ при всех $b = 0, 1, \dots, 2m-1$.

Оценим теперь снизу $\|D_j^m u_\lambda\|_0^2$ при достаточно больших λ , где $\|\cdot\|_0$ — норма в $L_2(\mathbf{R}_+^n)$. Имеем

$$\int_{\mathbf{R}_+^n} \left| D_j^m u_\lambda(x) \right|^2 dx = \lambda^{2m} \xi_{0j}^{2m} \int_{\mathbf{R}_+^n} \varphi_1^2(x') \varphi_2^2(x_n) |v(\lambda x_n)|^2 dx + \\ + \sum_{l=0}^{2m-1} \lambda^l \int_{\mathbf{R}_+^n} a_l(x') \varphi_2^2(x_n) |v(\lambda x_n)|^2 dx \geq \\ \geq \lambda^{2m} \xi_{0j}^{2m} \int_{\mathbf{R}_+^n} \varphi_1^2(x') \varphi_2^2(x_n) |v(\lambda x_n)|^2 dx - \sum_{l=0}^{2m-1} \lambda^l \int_{\mathbf{R}_+^n} |a_l(x')| \varphi_2(x_n) |v(\lambda x_n)|^2 dx$$

при всех $\lambda \geq 1$.

Рассмотрим интегралы в правой части последнего неравенства. Используя свойства функций φ_1 и φ_2 , а также делая замену $t = \lambda x_n$, получим, что

$$\int_{\mathbf{R}_+^n} \varphi_1^2(x') \varphi_2^2(x_n) |v(\lambda x_n)|^2 dx = \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \varphi_1^2(x') dx' \int_0^\infty \varphi_2^2(x_n) |v(\lambda x_n)|^2 dx \geq \\ \geq \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \varphi_1^2(x') dx' \int_0^a |v(\lambda x_n)|^2 dx = \lambda^{-1} \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \varphi_1^2(x') dx' \int_0^{\lambda a} |v(t)|^2 dt \geq \\ \geq \frac{1}{2} \lambda^{-1} \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \varphi_1^2(x') dx' \int_0^{\lambda a} |v(t)|^2 dt = c'_0 \lambda^{-1}$$

при достаточно больших λ , где $c'_0 = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \varphi_1^2(x') dx' \int_0^\infty |v(t)|^2 dt = \text{const} > 0$.

Аналогично при любом $l = 0, 1, \dots, 2m-1$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}_+^n} a_l(x') \varphi_2^2(x_n) |v(\lambda x_n)|^2 dx &= \int_{\mathbf{R}^{n-1}} |a_l(x')| dx' \int_0^\infty \varphi_2^2(x_n) |v(\lambda x_n)|^2 dx_n \leq \\ &\leq \int_{\mathbf{R}^{n-1}} |a_l(x')| dx' \int_0^b |v(\lambda x_n)|^2 dx_n = \lambda^{-1} \int_{\mathbf{R}^{n-1}} |a_l(x')| dx' \int_0^{\lambda b} |v(t)|^2 dt \leq C_l \lambda^{-1} \end{aligned}$$

при всех $\lambda \geq 1$, где

$$C_l = \int_{\mathbf{R}^{n-1}} |a_l(x')| dx' \int_0^{\lambda b} |v(t)|^2 dt, \quad l=0, 1, \dots, 2m-1.$$

Таким образом, при достаточно больших λ получаем

$$\|u_\lambda\|_m^2 \geq \|D_j^m u_\lambda\|_0^2 \geq c'_0 \xi_{0j}^{2m} \lambda^{2m-1} - \sum_{l=0}^{2m-1} C_l \lambda^{l-1} \geq \frac{1}{2} c'_0 \xi_{0j}^{2m} \lambda^{2m-1} = c_0 \lambda^{2m-1}, \quad (6.22)$$

где $c_0 = 1/2c'_0 \xi_{0j}^{2m} > 0$.

Далее, оценим сверху при достаточно больших λ слагаемые в правой части неравенства (6.5) при $v = u_\lambda$.

Сначала оценим $\|u_\lambda\|_0^2$ при $\lambda \geq 1$. Имеем

$$\begin{aligned} \|u_\lambda\|_0^2 &= \int_{\mathbf{R}^n} \varphi_1^2(x') \varphi_2^2(x_n) |v(\lambda x_n)|^2 dx = \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \varphi_1^2(x') dx' \int_0^\infty \varphi_2^2(x_n) |v(\lambda x_n)|^2 dx_n \leq \\ &\leq \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \varphi_1^2(x') dx' \int_0^\infty |v(\lambda x_n)|^2 dx_n = \lambda^{-1} \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \varphi_1^2(x') dx' \int_0^\infty |v(t)|^2 dt \leq A_0 = const \end{aligned}$$

при $\lambda \geq 1$.

Теперь рассмотрим выражение $\|P(D)u_\lambda\|_0^2$ при $\lambda \geq 1$. Заметим сначала, что $P(D)[e^{i\lambda\xi'_0 x'} v(\lambda x_n)] = \lambda^m e^{i\lambda\xi'_0 x'} (P(\xi'_0, D_n)v)(\lambda x_n) = 0$ при всех $\lambda \geq 1$ и всех $x_n > 0$, так как $(P(\xi'_0), D_n v)(\tilde{x}_n) = 0$ при $\tilde{x}_n > 0$ по предположению на функцию v . Отсюда, в силу обобщенной формулы Лейбница, получим, что

$$(P(D)u_\lambda)(x) = \sum_{|\beta|} \frac{1}{\beta!} D^\beta (\varphi_1(x'), \varphi_2(x_n)) P^{(\beta)}(D) [e^{i\lambda\xi'_0 x'} v(\lambda x_n)],$$

где $P^{(\beta)}(\xi) = i^{|\beta|} D_\xi^\beta P(\xi)$. При этом

$$\int_0^\infty \left| (P^{(\beta)}(\xi'_0, D_n)v)(\lambda x_n) \right|^2 dx_n = \lambda^{-1} \int_0^\infty \left| (P^{(\beta)}(\xi'_0, D_n)v)(t) \right|^2 dt.$$

Таким образом, используя неравенство $\left| \sum_{k=1}^K a_k \right|^2 \leq K \sum_{k=1}^K |a_k|^2$, при всех

$\lambda \geq 1$ имеем

$$\|P(D)u_\lambda\|_0^2 = \int_{\mathbf{R}_+^n} |P(D)u_\lambda(x)|^2 dx \leq K \sum_{|\beta|=1}^m \frac{\lambda^{2m-2|\beta|}}{(\beta!)^2} \int_{\mathbf{R}_+^n} |D^\beta(\varphi_1(x')\varphi_2(x_n))|^2 |(P^{(\beta)}(\xi'_0, D_n)v)(\lambda x_n)|^2 dx_n,$$

где K – число слагаемых в последней сумме. Поскольку $D^\beta(\varphi_1\varphi_2) \in C_0^\infty(\bar{\mathbf{R}}_+^n)$, то отсюда имеем

$$\begin{aligned} \|P(D)u_\lambda\|_0^2 &\leq K \sum_{|\beta|=1}^m A_\beta \lambda^{2m-2|\beta|} \int_0^\infty |(P^{(\beta)}(\xi'_0, D_n)v)(\lambda x_n)|^2 dx_n = \\ &= K \sum_{|\beta|=1}^m A_\beta \lambda^{2m-2|\beta|-1} \int_0^\infty |(P^{(\beta)}(\xi'_0, D_n)v)(t)|^2 dt, \end{aligned}$$

где A_β – некоторые положительные постоянные при $1 \leq |\beta| \leq m$. Из последнего неравенства следует существование такой постоянной $A_1 > 0$, что неравенства при достаточно больших λ выполняется неравенство

$$\|P(D)u_\lambda\|_0^2 \leq A_1 \lambda^{2m-3}. \quad (6.23)$$

Аналогично оцениваются для больших λ выражения $\|\gamma B_j(D)u_\lambda\|_{m-mj-1/2}^2$ при $j=1, \dots, \mu$, где γ – оператор ограничения на гиперплоскость $x_n=0$. При этом используются равенства

$$B(D)e^{i\lambda\xi'_0 x'} v(\lambda x_n) = \lambda^{m_j} e^{i\lambda\xi'_0 x'} (B_j(\xi'_0, D_n)v)(\lambda x_n) = 0$$

при $x_n=0$, $j=1, \dots, \mu$, так как $(B_j(\xi'_0, D_n)v)(\lambda x_n) = 0$ при $x_n=0$, $j=1, \dots, \mu$, в силу предположения на функцию v .

Таким образом, доказывается существование такой постоянной $A_3 > 0$, что при достаточно больших λ выполняется неравенство

$$\|\gamma B_j(D)u_\lambda\|_{m-mj-1/2}^2 \leq A_2 \lambda^{2m-3}, \quad j=1, \dots, \mu \quad (6.24)$$

(задача 6.6).

Используя теперь неравенства (6.22) – (6.24) и неравенство $\|u_\lambda\|_0^2 \leq A_0$, а также оценку (6.5) для функции u_λ , получим при достаточно больших λ неравенства

$$\begin{aligned} c_0 \lambda^{2m-1} &\leq \|u_\lambda\|_m^2 \leq (\mu+2)C^2 (\|P(D)u_\lambda\|_0^2 + \sum_{j=1}^{\mu} \|\gamma B_j(D)u_\lambda\|_{m-mj-1/2}^2 + \|u_\lambda\|_0^2) \leq \\ &\leq (\mu+2)C^2 (A_1 \lambda^{2m-3} + \mu A_2 \lambda^{2m-3} + A_0). \end{aligned}$$

Следовательно, получили, что для всех достаточно больших λ выполняется неравенство $c_0 \lambda^{2m-1} \leq \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 \lambda^{2m-3}$, где $c_0 > 0$, а \tilde{A}_0 и \tilde{A}_1 - некоторые положительные постоянные. Однако это неравенство очевидно не может выполняться при всех достаточно больших λ . Полученное противоречие показывает, что предположение о нарушении условия Лопатинского для задачи (6.1), (6.2) неверно.

Таким образом доказано, что из корректности постановки задачи (6.1), (6.2) следует выполнение для этой задачи условия Лопатинского.

Доказательство достаточности в теореме 6.3. Пусть для краевой задачи (6.1), (6.2) выполнено условие Лопатинского. Докажем, что тогда обобщенная краевая задача (6.1), (6.2) корректно поставлена.

Проверим сначала условие 1 определения 6.1. Пусть $u \in H^m(\mathbf{R}_+^n)$, $P(D)u = 0$, $\gamma B_j(D)u = 0$ при $j=1, \dots, \mu$. Так как $u \in H^m(\mathbf{R}_+^n) \subset L_2(\mathbf{R}_+^n)$, то по теореме Фубини $u(\cdot, x_n) \in L_2(\mathbf{R}^{n-1})$ при почти всех $x_n \in \mathbf{R}_+^1$. Обозначим через $\tilde{u}_n(\xi', x_n)$ преобразование Фурье функции $u(x', x_n)$ по переменным $x' \in \mathbf{R}^{n-1}$. Тогда из равенств $P(D)u = 0$, $\gamma B_j(D)u = 0$, $j=1, \dots, \mu$ и из свойств преобразования Фурье при почти всех $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1}$ имеем

$$\begin{aligned} P(\xi', D_n) \tilde{u}_n(\xi', x_n) &= 0 \quad \text{при } x_n > 0, \\ B_j(\xi', D_n) \tilde{u}_n(\xi', x_n) &= 0 \quad \text{при } x_n = 0, \quad j=1, \dots, \mu. \end{aligned}$$

Из условия Лопатинского следует, что $\tilde{u}_n(\xi', x_n) = 0$, при почти всех $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1}$ и всех $x_n \geq 0$, а значит $u = 0$.

Докажем теперь условие 3 определения корректности постановки краевой задачи (6.1), (6.2).

Частичное преобразование Фурье по переменным $x' \in \mathbf{R}^{n-1}$ при $x_n \geq 0$ формально сводит краевую задачу (6.1), (6.2) к краевой задаче с параметром $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1}$ на полуоси $x_n \geq 0$:

$$\begin{aligned} P(\xi', D_n) v(\xi', x_n) &= F(\xi', x_n) \quad \text{при } x_n > 0, \\ B_j(\xi', D_n) v(\xi', x_n) &= h_j(\xi') \quad \text{при } x_n = 0, \quad j=1, \dots, \mu. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Здесь $F(\xi', x_n)$ – частичное преобразование Фурье по переменным $x' \in \mathbf{R}^{n-1}$ (см. п.2.5) заданной функции $f \in C_0^\infty(\bar{\mathbf{R}}_+^n)$, $h_j(\xi')$ – преобразования Фурье заданных функций $g_j \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$, $j=1, \dots, \mu$, $v(\xi', x_n) = \tilde{u}_n(\xi', x_n)$ (частичное преобразование Фурье, определенное по формуле (2.29)).

Из условия Лопатинского и теоремы 6.1. следует, что задача (6.25) при любом $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1} \setminus 0$ имеет единственное ограниченное при $x_n \geq 0$ решение $v(\xi', x_n)$. Кроме того, из теоремы 6.1 следует оценка

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^m \int_0^\infty |D_n^j v(\xi', x_n)|^2 dx_n + \sum_{j=0}^{m-1} |D_n^j v(\xi', 0)|^2 &\leq \\ &\leq C(\xi') \left(\int_0^\infty |F(\xi', x_n)|^2 dx_n + \sum_{j=1}^\mu |h_j(\xi')|^2 \right), \end{aligned}$$

где наилучшая из возможных постоянных $C(\xi')$ является непрерывной функцией от $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1} \setminus 0$.

Пусть C_1 – максимальное значение функции $\tilde{C}(\xi')$ при $|\xi'|=1$. Тогда при $|\xi'|=1$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^m \int_0^{\infty} |D_n^j v(\xi', x_n)|^2 dx_n + \sum_{j=0}^{m-1} |D_n^j v(\xi', 0)|^2 \leq \\ & \leq C_1 \left(\int_0^{\infty} |F(\xi', x_n)|^2 dx_n + \sum_{j=1}^{\mu} |h_j(\xi')|^2 \right). \end{aligned} \quad (6.26)$$

Пусть $P(\xi', D_n) = \sum_{k=0}^m a_k(\xi') D_n^k$, $B_j(\xi', D_n) = \sum_{k=0}^{m_j} b_{jk}(\xi') D_n^k$, $j=1, \dots, \mu$. Тогда, в силу однородности операторов $P(D)$ и $B_j(D)$, $j=1, \dots, \mu$, функции $a_k(\xi')$ и $b_{jk}(\xi')$ являются однородными порядка k , причем $a_0(\xi') = \text{const} \neq 0$ в силу эллиптичности оператора $P(D)$.

Пусть теперь $|\xi'| = t > 0$ и $\xi' = t\eta'$, $tx_n = y$. Тогда, как легко проверить, функция $w(\eta', y) = v(t\eta', t^{-1}y)$ является решением задачи

$$\begin{aligned} (P(\eta', D_y)w)(\eta', y) &= t^{-m} F(t\eta', t^{-1}y) \quad \text{при } y > 0, \\ (B_j(\eta', D_y)w)(\eta', y) &= t^{-m_j} h_j(t\eta') \quad \text{при } y = 0, \quad j=1, \dots, \mu. \end{aligned}$$

Так как $|\eta'| = 1$, то, в силу неравенства (6.25), имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^m \int_0^{\infty} |D_y^j w(\eta', y)|^2 dy + \sum_{j=0}^{m-1} |D_y^j w(\eta', 0)|^2 \leq \\ & \leq C_1 \left(\int_0^{\infty} t^{-2m} |F(t\eta', t^{-1}y)|^2 dy + \sum_{j=1}^{\mu} t^{-2m_j} |h_j(t\eta')|^2 \right). \end{aligned}$$

Делая обратную замену $y = tx_n$, $\xi' = t\eta'$ и $w(\eta', y) = v(\xi', x_n)$, получим

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^m t^{1-2j} \int_0^{\infty} |D_n^j v(\xi', x_n)|^2 dx_n + \sum_{j=0}^{m-1} t^{-2j} |D_n^j v(\xi', 0)|^2 \leq \\ & \leq C_1 \left(\int_0^{\infty} t^{1-2m} |F(\xi', x_n)|^2 dx_n + \sum_{j=1}^{\mu} t^{-2m_j} |h_j(\xi')|^2 \right), \end{aligned}$$

где $t = |\xi'| > 0$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^m |\xi'|^{2(m-j)} \int_0^{\infty} |D_n^j v(\xi', x_n)|^2 dx_n + \sum_{j=0}^{m-1} |\xi'|^{2(m-j)-1} |D_n^j v(\xi', 0)|^2 \leq \\ & \leq C_1 \left(\int_0^{\infty} |F(\xi', x_n)|^2 dx_n + \sum_{j=1}^{\mu} |\xi'|^{2(m-m_j)-1} |h_j(\xi')|^2 \right) \end{aligned} \quad (6.27)$$

при всех $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1} \setminus 0$, где постоянная C_1 не зависит от ξ' .

Интегрируя последнее неравенство по $|\xi'| \geq 1$, получим

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^m \int_{|\xi'| \geq 1} (1+|\xi'|^2)^{m-j} d\xi' \int_0^\infty |D_n^j v(\xi', x_n)|^2 dx_n + \\ & + \sum_{j=0}^{m-1} \int_0^\infty (1+|\xi'|^2)^{m-j-1/2} |D_n^j v(\xi', 0)|^2 \leq \\ & \leq C_2 \left(\int_{|\xi'| \geq 1} d\xi' \int_0^\infty |F(\xi', x_n)|^2 dx_n + \sum_{j=1}^{\mu} \int_{|\xi'| \geq 1} (1+|\xi'|^2)^{m-m_j-1/2} |h_j(\xi')|^2 d\xi' \right), \end{aligned} \quad (6.28)$$

где положительная постоянная C_2 не зависит от F, h_1, \dots, h_μ .

Оценим теперь интегралы по $|\xi'| \leq 1$. В этом случае легко видеть, что

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{m-1} \int_{|\xi'| \leq 1} (1+|\xi'|^2)^{m-j} d\xi' \int_0^\infty |D_n^j v(\xi', x_n)|^2 dx_n + \\ & + \sum_{j=0}^{m-1} \int_{|\xi'| \leq 1} (1+|\xi'|^2)^{m-j-1/2} |D_n^j v(\xi', 0)|^2 \leq \\ & \leq C_3 \left(\sum_{j=0}^{m-1} \int_{|\xi'| \leq 1} d\xi' \int_0^\infty |D_n^j v(\xi', x_n)|^2 dx_n + \sum_{j=0}^{\mu} \int_{|\xi'| \leq 1} |D_n^j v(\xi', 0)|^2 d\xi' \right) \leq \\ & \leq C_4 (\|u\|_{m-1}^2 + \|\gamma u\|_{m-1/2}^2), \end{aligned} \quad (6.29)$$

с некоторой положительной постоянной C_4 (последнее неравенство получено с помощью теоремы Фубини и равенства Парсеваля).

Так как $P(\xi', D_n) = a_0 D_n^m + \sum_{k=1}^m a_k(\xi') D_n^{m-k}$, где $a_0 = \text{const} \neq 0$, $a_k(\xi')$ — однородные полиномы (порядка k) от $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1}$, то

$$a_0 D_n^m v(\xi', x_n) = F(\xi', x_n) - \sum_{k=1}^m a_k(\xi') D_n^{m-k} v(\xi', x_n).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & \int_{|\xi'| \leq 1} d\xi' \int_0^\infty |D_n^m v(\xi', x_n)|^2 dx_n \leq C_5 \left(\int_{|\xi'| \leq 1} d\xi' \int_0^\infty |F(\xi', x_n)|^2 dx_n + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^m \int_{|\xi'| \leq 1} d\xi' \int_0^\infty |D_n^{m-k} v(\xi', x_n)|^2 dx_n \right) \leq C_6 (\|F\|_0^2 + \|u\|_{m-1}^2) \end{aligned} \quad (6.30)$$

с положительной постоянной C_6 , не зависящей от F .

Теперь из неравенств (6.28) – (6.30) получаем оценку

$$\|u\|_m^2 + \|\gamma u\|_{m-1/2}^2 \leq C_7 (\|f\|_0^2 + \sum_{j=1}^m \|g_j\|_{m-m_j-1/2}^2 + \|\gamma u\|_{m-1/2} + \|u\|_{m-1}^2)$$

при всех $u \in C_0^\infty(\bar{\mathbf{R}}_+^n)$. Из этой оценки и неравенства $\|u\|_{s-1} \leq \varepsilon \|u\|_s + C_\varepsilon \|u\|_{s-2}$ (см. утверждение 4.5), примененного при $s = m, m-1, \dots, 2$ и при достаточно малом $\varepsilon > 0$, получим оценку (6.5) при $u \in C_0^\infty(\bar{\mathbf{R}}_+^n)$. При всех $u \in H^m(\mathbf{R}_+^n)$ та же оценка получается предельным переходом.

Из априорной оценки (6.5) и следующей леммы вытекает выполнение условия 2 (и условия 1) определения 6.1.

Лемма 6.1. Пусть X, X_0 , и X' – рефлексивные банаховы пространства, X вложено в X_0 и это вложение компактно. Пусть, далее, $A: X \rightarrow X'$ – линейный непрерывный оператор. Тогда следующие два условия эквивалентны:

1) $\text{Im } A$ замкнуто в X' и $\text{Ker } A$ – конечномерно;

2) существует такая постоянная $C > 0$, что $\|v\|_X \leq C(\|Av\|_{X'} + \|v\|_{X_0})$ при всех $v \in X$.

Доказательство леммы имеется, например, в [13], п. 5.2.

Применяя эту лемму к оператору A краевой задачи (6.3), определенному в п. 6.1, положим $X = H^m(\mathbf{R}_+^n)$, $X_0 = L_2(\mathbf{R}_+^n)$, $X' = H$. В этом случае доказанная выше оценка (6.5) совпадает с условием 2) леммы 6.1. \square

Таким образом, из теоремы 6.3 следует, что краевые задачи в *примерах 6.1 и 6.2* поставлены корректно.

6.5 ПАРАМЕТРИКС

Напомним, что через H мы обозначаем прямое произведение $H^0(\mathbf{R}_+^n) \times H^{m-m_1-1/2}(\mathbf{R}^{n-1}) \times \dots \times H^{m-m_\mu-1/2}(\mathbf{R}^{n-1})$, а через $A: H^m(\mathbf{R}_+^n) \rightarrow H$ — линейный непрерывный оператор, действующий по формуле

$$Av = (P(D)v, \gamma B_1(D)v, \dots, \gamma B_\mu(D)v).$$

Здесь $P(D), B_1(D), \dots, B_\mu(D)$ — операторы краевой задачи (6.1), (6.2), $\gamma: H^s(\mathbf{R}^n) \rightarrow H^{s-1/2}(\mathbf{R}^{n-1})$ — оператор следа, где $s > 1/2$.

Определение 6.5. Оператор $R: H \rightarrow H^m(\mathbf{R}_+^n)$ называется *правым* (соответственно, *левым*) *параметриksom* (*квазипараметриksom*) краевой задачи $Pu = f$ в \mathbf{R}_+^n , $B_1u = g_1, \dots, B_\mu u = g_\mu$ при $x_n = 0$ (задачи (6.1), (6.2) или задачи (6.3)), если $AR = I + T_1$ (соответственно, $RA = I + T_2$), где $T_1: H \rightarrow H'$ и $T_2: H^m(\mathbf{R}_+^n) \rightarrow H^{m+1}(\mathbf{R}_+^n)$ — сглаживающие линейные непрерывные операторы, $H' = H'(\mathbf{R}_+^n) \times H^{m-m_1+1/2}(\mathbf{R}^{n-1}) \times \dots \times H^{m-m_\mu+1/2}(\mathbf{R}^{n-1})$.

Теорема 6.4. Пусть для краевой задачи (6.1), (6.2) выполнено условие Лопатинского. Тогда существует оператор $R: H \rightarrow H^m(\mathbf{R}_+^n)$, который является правым и левым параметриksom этой краевой задачи.

Доказательство. Так как множество $C_0^\infty(\bar{\mathbf{R}}_+^n; C_0^\infty(\mathbf{R}^{n-1}), \mu) = C_0^\infty(\bar{\mathbf{R}}_+^n) \times C_0^\infty(\mathbf{R}^{n-1}) \times \dots \times C_0^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$ (в этом прямом произведении μ экземпляров множества $C_0^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$) плотно в пространстве H , то достаточно определить оператор R на этом множестве.

Пусть $(f, g_1, \dots, g_\mu) \in C_0^\infty(\bar{\mathbf{R}}_+^n; \mathbf{R}^{n-1}, \mu)$, $F(\xi', x_n)$ — такое частичное преобразование Фурье по переменным $x' \in \mathbf{R}^{n-1}$ функции $f \in C_0^\infty(\bar{\mathbf{R}}_+^n)$, $h_j(\xi')$ — преобразования Фурье функций $g_j \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$, $j = 1, \dots, \mu$. Пусть, далее, $v(\xi', x_n)$ — ограниченное при $x_n \geq 0$ решение задачи (6.24), определенное

единственным образом при любом $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1} \setminus 0$. Тогда для функции $v(\xi', x_n)$, как доказано в предыдущем пункте, выполняется оценка (6.26).

Пусть, далее, $v_0(\xi', x_n)$ – решение уравнения

$$P(\xi', D_n) v_0(\xi', x_n) = F(\xi', x_n) \quad (6.31)$$

равное нулю при достаточно больших x_n (существование такого решения доказано в 6.2). Пусть, далее, все корни $\lambda(\xi')$ уравнения $P(\xi', \lambda) = 0$ при $|\xi'| \leq 1$ удовлетворяют условию $\text{Im } \lambda(\xi') < \nu - 1$, где $\nu \geq 0$ и ν не зависит от ξ' (при $|\xi'| \leq 1$). Такое число ν существует в силу непрерывной зависимости от ξ' корней уравнения $P(\xi', \lambda) = 0$ и в силу компактности множества $|\xi'| \leq 1$, $x' \in \mathbf{R}^{n-1}$.

Из теоремы 6.2 теперь следует оценка

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^m \int_0^{\infty} e^{2\nu x_n} |D_n^j v_0(\xi', x_n)|^2 dx_n + \sum_{j=0}^{m-1} |D_n^j v_0(\xi', 0)|^2 \leq \\ & \leq C(\xi') \int_0^{\infty} e^{2\nu x_n} |F(\xi', x_n)|^2 dx_n \end{aligned} \quad (6.32)$$

при всех $|\xi'| \leq 1$, где наилучшая постоянная $C_1(\xi')$ непрерывно зависит от ξ' . Так как множество $\{\xi' \in \mathbf{R}^{n-1} : |\xi'| \leq 1\}$ является компактом, то $C(\xi')$ можно заменить в последнем неравенстве на $C_1 = \max_{|\xi'| \leq 1} C(\xi')$.

Если $f(x', x_n) = 0$ при всех $x_n \geq T = \text{const} > 0$, то $v_0(x', x_n) = 0$ при $x_n \geq T$ (см. доказательство теоремы 6.1) и из неравенства (6.31) следует оценка

$$\sum_{j=0}^m \int_0^{\infty} |D_n^j v_0(\xi', x_n)|^2 dx_n + \sum_{j=0}^{m-1} |D_n^j v_0(\xi', 0)|^2 \leq C_T \int_0^{\infty} |F(\xi', x_n)|^2 dx_n \quad (6.33)$$

при всех $|\xi'| \leq 1$, где C_T – положительная постоянная, не зависящая от ξ' .

Положим теперь $V(\xi', x_n) = v(\xi', x_n)$ при $|\xi'| \leq 1$, $x_n \geq 0$ и $V(\xi', x_n) = v_0(\xi', x_n)$ при $|\xi'| < 1$, $x_n \geq 0$, а

$$u = (RG)(x) = (2\pi)^{1-n} \int e^{i\xi' \cdot x'} V(\xi', x_n) d\xi', \quad x_n \geq 0, \quad (6.34)$$

где $G = (f, g_1, \dots, g_\mu) \in C_0^\infty(\bar{\mathbf{R}}_+^n; \mathbf{R}^{n-1}, \mu)$. Равенство (6.34) определяет при фиксированных $x_n \geq 0$ обратное (частичное) преобразование Фурье функции $V(\xi', x_n) \in L_2(\mathbf{R}_{\xi'}^{n-1})$, где последнее включение следует из оценок (6.26) и (6.32). Действительно, из оценок (6.26) и (6.32), включений $F \in S(\bar{\mathbf{R}}_+^n)$, $h_j \in S(\mathbf{R}^{n-1})$ при $j=1, \dots, \mu$ и теоремы Фубини сразу получаем включение $V \in L_2(\mathbf{R}_{\xi'}^{n-1} \times \mathbf{R}_+^1)$, а значит, $V(\xi', x_n) \in L_2(\mathbf{R}_{\xi'}^{n-1})$ при почти всех $x_n \geq 0$.

Кроме того, используя оценки (6.26) (6.32) и такие же рассуждения, как и при доказательстве достаточности теоремы 6.3, получим включение $u = PG \in H^m(\mathbf{R}_+^n)$ при всех $G \in C_0^\infty(\bar{\mathbf{R}}_+^n; \mathbf{R}^{n-1}, \mu)$.

Если $G = Au$, где $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}_+^n)$, то в силу единственности ограниченного при $x_n \geq 0$ решения задачи (6.24) и финитного при $x_n \geq 0$ решения уравнения (6.30), имеем равенства $v(\xi', x_n) = v_0(\xi', x_n) = \tilde{u}_n(\xi', x_n)$. Отсюда и из формулы (6.33) сразу следует, что $RAu = u$ при всех $u \in C_0^\infty(\bar{\mathbf{R}}_+^n)$, т.е. $RA = I$.

Докажем теперь равенство

$$ARG = G + T_1G, \quad G \in C_0^\infty(\bar{\mathbf{R}}_+^n; \mathbf{R}^{n-1}, \mu), \quad (6.35)$$

где $T_1G = (0, \varphi_1, \dots, \varphi_\mu)$ и

$$\varphi_j(x') = (2\pi)^{1-n} \int_{|\xi'| \leq 1} e^{i\xi' \cdot x'} (B_j(\xi', D_n) v_0(\xi', 0) - h_j(\xi')) d\xi', \quad j=1, \dots, \mu. \quad (6.36)$$

Оценки (6.27) и (6.33) позволяют применить к интегралу в формуле (6.34) теорему о дифференцируемости интеграла с параметром. В силу этой теоремы, равенства $P(\xi', D_n)V(\xi', x_n) = F(\xi', x_n)$ при всех $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1}$ и $x_n \geq 0$ и формулы обращения частичного преобразования Фурье, получим равенство $P(D)u(x) = f(x)$ при $x_n > 0$, где $u = RG$. Заметим также, что на самом деле $u \in C_0^\infty(\bar{\mathbf{R}}_+^n)$ при $G \in C_0^\infty(\bar{\mathbf{R}}_+^n; \mathbf{R}^{n-1}, \mu)$. Это следует из включений $F \in S(\bar{\mathbf{R}}_+^n)$, $h_j \in S(\mathbf{R}^{n-1})$, $j=1, \dots, \mu$, оценок (6.27) и (6.33) и теоремы Соболева (задача 6.6).

Так как $m_j < m$ при всех $j=1, \dots, \mu$, то, дифференцируя под знаком интеграла в (6.34), непосредственно получаем равенство (6.35), где оператор T_1 определяется по формуле (6.36).

Далее, оценим $\|T_1 G\|_{H^1}$ при $G \in C_0^\infty(\bar{\mathbf{R}}_+^n; \mathbf{R}^{n-1}, \mu)$. Из определения $\|\cdot\|_{H^1}$ и из формулы (6.36) имеем

$$\begin{aligned} \|T_1 G\|_{H^1}^2 &= \sum_{j=1}^{\mu} \|\varphi_j\|_{m-m_j+1/2}^2 = \sum_{j=1}^{\mu} \int (1+|\xi'|^2)^{2(m-m_j)+1} |\tilde{\varphi}_j(\xi')|^2 d\xi' = \\ &= \sum_{j=1}^{\mu} \int_{|\xi'| \leq 1} (1+|\xi'|^2)^{2(m-m_j)+1} |B_j(\xi', D_n)v_0(\xi', 0) - h_j(\xi')|^2 d\xi' \leq \\ &\leq 2^{2m+1} \sum_{j=1}^{\mu} \int_{|\xi'| \leq 1} |B_j(\xi', D_n)v_0(\xi', 0) - h_j(\xi')|^2 d\xi', \end{aligned}$$

так как $(1+|\xi'|^2)^{2(m-m_j)+1} \leq 2^{2(m-m_j)+1} \leq 2^{2m+1}$ при $|\xi'| \leq 1$.

Отсюда, используя оценку (6.33) и условия $m_j \leq m-1$ при всех $j=1, \dots, \mu$, можно получить оценку $\|T_1 G\|_H \leq C_T \|G\|_{H^1}$ при $G \in C_0^\infty(\bar{\mathbf{R}}_+^n; \mathbf{R}^{n-1}, \mu)$ и $\text{sup } pF \subset \{x \in \mathbf{R}_+^n : x_n \leq T\}$, где $T = \text{const} > 0$.

Таким образом, доказано, что T_1 – «локально» сглаживающий оператор. Этого свойства нам будет достаточно в дальнейшем при рассмотрении эллиптических краевых задач на ограниченной области. Тем не менее можно доказать существование «глобального» правого параметрикса (квазипараметрикса) задачи (6.1), (6.2) при выполнении условия Лопатинского (см. [11], гл III, § 5 и [21], § 12). \square

ЗАДАЧИ

6.1. В полуплоскости $\{(x, y) : y \geq 0\}$ решить задачу Дирихле $\Delta u = 0$ при $y > 0$, $u(x, 0) = \varphi(x)$ при $x \in \mathbf{R}$ в классе ограниченных в $x \in \bar{\mathbf{R}}_+^2$ функций $u(x, y)$. *Указание.* С помощью преобразования Фурье по x сначала решить эту задачу в классе убывающих по x функций.

- 6.2. При каких значениях постоянных a_1, \dots, a_n краевая задача $P(D)u = f$ при $x_n > 0$, $\sum_{j=1}^n a_j D_j u = g$ при $x_n = 0$, где $P(D)$ – эллиптический оператор второго порядка с вещественными коэффициентами, удовлетворяет условию Лопатинского?
- 6.3. Проверить выполнение условия Лопатинского для следующей задачи Дирихле в полупространстве $\Delta^2 u = f$ при $x_n > 0$, $u = g_1$, $D_n u = g_2$ при $x_n = 0$.
- 6.4. В полупространстве $\bar{\mathbf{R}}_+^3$ решить задачу Дирихле $\Delta u = 0$ при $x_3 > 0$, $u|_{x_3=0} = \varphi(x_1, x_2)$ в классе $S(\bar{\mathbf{R}}_+^3)$ (см. п.2.5). *Указание.* Использовать частичное преобразование Фурье.
- 6.5. Проверить выполнение условия Лопатинского в примерах 6.1 и 6.2.
- 6.6. Доказать неравенство (6.24) по аналогии с доказательством неравенства (6.23).
- 6.7. Удовлетворяет ли условию Лопатинского краевая задача $\Delta^2 u = f$ в $\bar{\mathbf{R}}_+^n$, $u = g_1$, $\frac{\partial \Delta u}{\partial x_n} = g_2$ при $x_n = 0$?

Г Л А В А 7. ОБЩИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

Краевая задача для дифференциальных операторов состоит в нахождении такого решения дифференциального уравнения в области Ω из \mathbf{R}^n , которое на границе $\partial\Omega$ удовлетворяет некоторым другим дифференциальным уравнениям, называемым *краевыми условиями*. В этой главе рассматриваются краевые задачи для эллиптических уравнений с переменными коэффициентами произвольного порядка в ограниченной области. Общая идея исследования этих задач состоит в аппроксимации этих уравнений соответствующими уравнениями с *постоянными* коэффициентами, краевые задачи для которых рассмотрены в предыдущей главе. Основным результатом, относящимся к *эллиптическим* краевым задачам в ограниченной области, состоит в их *фредгольмовости*, *регулярности решений* и *априорной оценке*. Этому результату и посвящена данная глава.

7.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

В этой главе будем рассматривать линейные дифференциальные операторы с гладкими коэффициентами вида

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha, \quad (7.1)$$

где *коэффициенты* $a_\alpha \in C^\infty(\bar{\Omega})$ при всех $|\alpha| \leq m$, Ω – ограниченная область в \mathbf{R}^n при $n \geq 2$ с гладкой границей $\partial\Omega$.

Определение 7.1. Оператор $P(x, D)$ вида (7.1) называется *эллиптическим* дифференциальным оператором при $x \in \bar{\Omega}$, если *главный символ* (*характеристическая форма*) $P_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$ не обращается в нуль при всех $\xi \in \mathbf{R}^n \setminus 0$ и всех $x \in \bar{\Omega}$. При этом уравнение вида $P(x, D)u(x) = f(x)$ называется *эллиптическим уравнением*.

При $n \geq 3$ порядок m эллиптического оператора $P(x, D)$ с необходимостью является *четным* числом, причем для любых двух линейно независимых векторов $\xi^1, \xi^2 \in \mathbf{R}^n$ многочлен $P_m(x, \xi^1 + \lambda \xi^2)$ имеет относительно λ ровно $m/2$ корней, лежащих в полуплоскости $\text{Im } \lambda > 0$ и, следовательно, ровно $m/2$ корней, лежащих в полуплоскости $\text{Im } \lambda < 0$ (см. утверждение 5.3 и следствие 5.2). В случае $n = 2$ то же самое очевидно верно при условии, что коэффициенты $a_\alpha(x)$ при $|\alpha| = m$ являются *вещественными*. В общем случае (т.е. в случае *комплексных* коэффициентов $a_\alpha(x)$ при $|\alpha| = m$) при $n = 2$ будем рассматривать в дальнейшем *правильно эллиптические* дифференциальные операторы $P(x, D)$ вида (7.1) при всех $x \in \bar{\Omega}$ (см. определение 5.3).

Утверждение 7.1. Оператор $P(x, D)$ вида (7.1) является эллиптическим при $x \in \bar{\Omega}$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих эквивалентных условий:

$$1) P_m(x, \xi) \neq 0 \text{ при } x \in \bar{\Omega}, \xi \in \mathbf{R}^n \setminus 0;$$

$$2) |P_m(x, \xi)| \geq c_0 |\xi|^m \text{ при } x \in \bar{\Omega}, \xi \in \mathbf{R}^n, \text{ где } c_0 = \text{const} > 0;$$

$$3) |P_m(x, \xi)| \geq c_1 |\xi|^m - C_2 \text{ при } x \in \bar{\Omega}, \xi \in \mathbf{R}^n, \text{ где } P(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha - (\text{пол-}$$

ный) символ оператора $P(x, D)$, c_1, C_2 – некоторые положительные постоянные.

Доказательство легко следует из утверждения 5.1. и непрерывности коэффициентов оператора $P(x, D)$ на компакте $\bar{\Omega}$ (задача 7.5). \square

Рассмотрим теперь краевую задачу

$$P(x, D)u(x) = f(x) \text{ при } x \in \Omega, \quad (7.2)$$

$$B_j(x, D)u(x) = g_j(x) \text{ при } x \in \partial\Omega, \quad j = 1, \dots, \mu, \quad (7.3)$$

где Ω – ограниченная область в \mathbf{R}^n с гладкой границей $\partial\Omega$, $B_j(x, D)$ – ли-

нейные дифференциальные операторы вида $B_j(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m_j} b_{j\alpha}(x) D^\alpha$,

$b_{j\alpha} \in C^\infty(\bar{\Omega})$ при $|\alpha| \leq m_j$, $m_j < m$, $j=1, \dots, \mu = m/2$, а m – порядок правильно эллиптического оператора $P(x, D)$ вида (7.1).

В дальнейшем будем для простоты предполагать границу $\partial\Omega$ *связной*, хотя все приведенные ниже утверждения и их доказательства непосредственно переносятся на случай, когда граница $\partial\Omega$ состоит из конечного числа связных компонент.

Определение 7.2. Пусть Ω – ограниченная область в \mathbf{R}^n . Такую область будем называть *областью с гладкой границей* (или C^∞ -*областью*), если существуют N открытых шаров K_1, \dots, K_N в \mathbf{R}^n , для которых выполняются условия

$$1) \quad \partial\Omega \subset \bigcup_{j=1}^N K_j, \quad K_j \cap \partial\Omega \neq \emptyset, \quad j=1, \dots, N;$$

2) для любого $j=1, \dots, N$ существует такая вектор-функция $\psi^j = \psi^j(x) = (\psi_1^j(x), \dots, \psi_n^j(x))$, что $\psi_k^j(x) \in C^\infty(\bar{K}_j)$ при всех $k=1, \dots, n$, $y = \psi^j(x)$ – взаимно однозначное отображение шара K_j на некоторую ограниченную область в \mathbf{R}^n , при котором $\partial\Omega \cap K_j$ отображается на $(n-1)$ -мерную область в гиперплоскости $\{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n : y_n = 0\}$, а $\Omega \cap K_j$ отображается на некоторую односвязную область \mathbf{R}_+^n ;

$$3) \quad \text{якобиан } \frac{\partial(\psi_1^j, \dots, \psi_n^j)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \neq 0 \text{ при всех } x \in \bar{K}_j, \quad j=1, \dots, N. \quad \text{Отображения}$$

$y = \psi^j(x)$ называются при этом *локальной системой координат* в шаре K_j , $j=1, \dots, N$.

Обозначим через $B_j^0(x, D)$ – однородную часть порядка m_j оператора $B_j(x, D)$, т.е. $B_j^0(x, D) = \sum_{|\alpha|=m_j} b_{j\alpha}(x) D^\alpha$, где $j=1, \dots, \mu$, и через $P_0(x, D)$ оператор $P_m(x, D)$.

Определение 7.3. Пусть $x^0 \in \partial\Omega$ и в окрестности точки x^0 задана локальная система координат $y = \psi(x)$ в соответствии с определением 7.2. Бу-

дем говорить, что краевая задача (7.2), (7.3) удовлетворяет в точке x^0 условию Лопатинского, если вспомогательная краевая задача в полупространстве вида

$$P_0(x^0, D)U(y) = \Phi(y) \text{ при } y_n > 0,$$

$$B_j^0(x^0, D)U(y) = \Psi_j(y) \text{ при } y_n = 0, \quad j=1, \dots, \mu,$$

где $P_0(x^0, D)$, $B_j^0(x^0, D)$ ($j=1, \dots, \mu$) – соответствующие дифференциальные операторы с постоянными (по y) коэффициентами, удовлетворяет условию Лопатинского (в смысле определения 6.2).

Если условие Лопатинского выполняется для задачи (7.2), (7.3) в каждой точке x^0 , то будем говорить, что это условие выполняется для задачи (7.2), (7.3) на $\partial\Omega$.

Замечание 7.1. Условие Лопатинского на $\partial\Omega$ для задачи (7.2), (7.3) часто называют *условием эллиптичности краевой задачи* (при правильной эллиптичности оператора $P(x, D)$), *условием дополненности*, *условием накрывания* и *условием Шапиро -- Лопатинского*, а сама задача (7.2), (7.3) называется при этом *эллиптической в Ω* .

Пример 7.1. Пусть Ω – ограниченная область в \mathbf{R}^n с гладкой границей, $P(x, D)$ – правильно эллиптический оператор на $\bar{\Omega}$ порядка $m=2\mu$. Тогда задача Дирихле

$$P(x, D)u(x) = f(x) \text{ при } x \in \Omega, \quad \frac{\partial^j u(x)}{\partial \nu^j} = g_j(x) \text{ при } x \in \partial\Omega, \quad j=1, \dots, \mu,$$

где $\nu = \nu(x)$ – векторное поле внешних единичных нормалей к $\partial\Omega$ в точках $x \in \partial\Omega$, является эллиптической (задача 7.6).

Пример 7.2 (задача с косой производной). Пусть $P(x, D)$ – правильно эллиптический оператор 2-го порядка на ограниченной области Ω в \mathbf{R}^n с гладкой границей $\partial\Omega$. Пусть, далее, $l(x)$ – C^∞ -гладкая вектор-функция (со значениями в \mathbf{R}^n), определенная на $\partial\Omega$. Тогда нетрудно проверить, что эллиптичность краевой задачи

$$P(x, D) u(x) = f(x) \quad \text{при } x \in \Omega, \quad \frac{\partial u(x)}{\partial l(x)} = g(x) \quad \text{при } x \in \partial\Omega,$$

в случае $n \geq 3$ равносильна тому, что поле $l(x)$ не касается $\partial\Omega$ ни в одной точке $x \in \partial\Omega$, а в случае $n = 2$ эллиптичность этой задачи равносильна тому, что $l(x) \neq 0$ при всех $x \in \partial\Omega$ (задача 7.7).

7.2. ТЕОРЕМА О СУЩЕСТВОВАНИИ ПАРАМЕТРИКСА

Пусть всюду дальше в этой главе Ω – ограниченная область в \mathbf{R}^n с гладкой границей и пусть

$$H = H^0(\Omega) \times H^{m-m_1-1/2}(\partial\Omega) \times \dots \times H^{m-m_\mu-1/2}(\partial\Omega),$$

$$H'' = H^1(\Omega) \times H^{m-m_1+1/2}(\partial\Omega) \times \dots \times H^{m-m_\mu+1/2}(\partial\Omega).$$

Далее, пусть $A: H^m(\Omega) \rightarrow H$ – оператор, определенный по формуле

$$Au = (Pu, \gamma B_1 u, \dots, \gamma B_\mu u),$$

где $P: H^m(\Omega) \rightarrow H^0(\Omega)$, $B_j: H^m(\Omega) \rightarrow H^{m-m_j}(\Omega)$ – линейные непрерывные операторы, определяемые соответственно дифференциальными операторами $P(x, D)$, $B_j(x, D)$ при $j = 1, \dots, m$, а $\gamma: H^s(\Omega) \rightarrow H^{s-1/2}(\partial\Omega)$ – линейный непрерывный оператор следа $\partial\Omega$ при $s > 1/2$ (см. п. 4.3). Тогда в обобщенной постановке краевая задача (7.2), (7.3) состоит в нахождении решений $u \in H^m(\mathbf{R}_+^n)$ операторного уравнения $Au = F$, где $F \in H$.

Определение 7.4. *Левым* (соответственно *правым*) *параметриксом* краевой задачи (7.2), (7.3) называется такой оператор $R: H \rightarrow H^m(\Omega)$, что $RAu = u + T_1 u$ при всех $u \in H^m(\Omega)$ (соответственно $ARF = F + T_2 F$ при всех $F \in H$), где $T_1: H \rightarrow H'$ (соответственно $T_2: H^m(\Omega) \rightarrow H^{m+1}(\Omega)$) – линейный непрерывный оператор.

Теорема 7.1. Пусть краевая задача (7.2), (7.3) является эллиптической в ограниченной области Ω с гладкой границей. Тогда для нее существуют

левый и правый параметрикс. При этом существует такая постоянная $C > 0$, что если $u = R(u, g_1, \dots, g_m)$, то

$$\|u\|_m = C(\|f\|_0 + \sum_{k=1}^m \|g_k\|_{m-m_k-1/2} + \|u\|_0) \quad (7.4)$$

Доказательство. Коэффициенты операторов $P_0(x, D)$ и $B_j^0(x, D)$ при $j = 1, \dots, \mu$ непрерывны на компакте $\bar{\Omega}$, а значит, и равномерно непрерывны на $\bar{\Omega}$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что значения коэффициентов операторов $P_0(x, D)$ и $B_j^0(x, D)$ при $j = 1, \dots, \mu$ отличаются менее, чем на ε в каждой двух точках из $\bar{\Omega}$, расстояние между которыми меньше δ .

Пусть $\omega'_1, \dots, \omega'_N$ – покрытие компакта $\bar{\Omega}$ открытыми шарами в \mathbf{R}^n , диаметры которых меньше $\delta/2$, а $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ – функции, определяющие разбиение единицы, подчиненное покрытию $\omega'_1, \dots, \omega'_N$ (см. лемму 3.8). При каждом $j = 1, \dots, N$ выберем также такую срезающую функцию ψ_j , что $\psi_j \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $\psi_j(x) \geq 0$ при $x \in \mathbf{R}^n$, $\psi_j(x) = 1$ при $x \in \text{supp } p\varphi_j$ и $\text{supp } p\psi_j = \bar{\omega}_j$, где ω_j – открытый шар в \mathbf{R}^n с диаметром меньше δ .

Не ограничивая общности, можно считать, что в случае пересечения шара ω_j с границей $\partial\Omega$ на нем определена локальная система координат $y = \psi^j(x)$, в которой пересечение границы $\partial\Omega$ с ω_j переходит при отражении ψ_j в часть гиперплоскости $\{(y_1, \dots, y_n) : y_n = 0\}$, а $\omega_j \cap \Omega$ переходит в область, лежащую в полупространстве $\{(y_1, \dots, y_n) : y_n > 0\}$.

Основная идея построения параметрикса для задачи (7.2), (7.3) состоит в построении “локальных” параметриксов в шарах ω_j при $j = 1, \dots, N$ для достаточно малого $\delta > 0$, а затем их “склеивания” в “глобальный” параметрикс, используя разбиение единицы.

Построим правый параметрикс; левый параметрикс строится аналогично. Если шар ω_j не пересекается с $\partial\Omega$, то зафиксируем любую точку $x^j \in \omega_j$ и построим параметрикс R_j (одновременно левый и правый) для дифференциального оператора $P_0(x^j, D)$ с постоянным коэффициентом во всем пространстве \mathbf{R}^n . Здесь под параметриksom R_j имеется в виду такой линейный ограниченный оператор $R_j : L_2(\mathbf{R}^n) \rightarrow H^m(\mathbf{R}^n)$, что

$$R_j P_0(x^j, D)v = v + \tilde{T}'_j v, \quad v \in H^m(\mathbf{R}^n),$$

$$P_0(x^j, D)R_j w = w + \tilde{T}''_j w, \quad w \in L_2(\mathbf{R}^n),$$

где $\tilde{T}'_j \in L(H^m(\mathbf{R}^n), H^{m+1}(\mathbf{R}^n))$, $\tilde{T}''_j \in L(L_2(\mathbf{R}^n), H^1(\mathbf{R}^n))$.

В качестве такого оператора, как легко проверить, можно взять оператор R_j , определенный по формуле

$$R_j w(x) = (2\pi)^{-n} \int_{|\xi| \geq 1} e^{i\xi x} (P_0(x^j, \xi))^{-1} \tilde{w}(\xi) d\xi, \quad w \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n). \quad (7.5)$$

Более того, отсюда следует, что

$$R_j P_0(x^j, D)(\varphi_j v) = \varphi_j v + T'_j v, \quad v \in H^m(\mathbf{R}^n),$$

$$P_0(x^j, D)R_j(\varphi_j w) = \varphi_j w + T''_j w, \quad w \in L_2(\mathbf{R}^n), \quad (7.6)$$

где $T'_j \in L(H^m(\mathbf{R}^n), H^{m+1}(\mathbf{R}^n))$, $T''_j \in L(L_2(\mathbf{R}^n), H^1(\mathbf{R}^n))$ (задача 7.9).

Если теперь шар ω_j пересекается с $\partial\Omega$, то фиксируем любую точку $x^j \in \omega_j \cap \partial\Omega$ и локальную систему координат $y = \psi^j(x)$ с указанными выше свойствами. В полупространстве \mathbf{R}_+^n (по y) рассмотрим эллиптическую краевую задачу

$$P_0(x^j, D)v(y) = f^*(y) \quad \text{при } y_n > 0,$$

$$B_l^0(x^j, D)v(y) = g_l^*(y) \quad \text{при } y_n = 0, \quad l = 1, \dots, \mu.$$

Для этой задачи построим параметрикс, как это описано в доказательстве теоремы 6.4.

Возвращаясь к исходной системе координат x_1, \dots, x_n , мы получим с помощью этого параметрикса оператор R_j , определенный на вектор-функциях вида $(\varphi_j f, \varphi_j g_1, \dots, \varphi_j g_\mu)$ при

$$(f, g_1, \dots, g_\mu) \in H = H^\circ(\Omega) \times H^{m-m_1-1/2}(\partial\Omega) \times \dots \times H^{m-m_\mu-1/2}(\partial\Omega)$$

(здесь $\varphi_j g_l$ означает $\varphi_j|_{\partial\Omega} g_l$, $l=1, \dots, \mu$). При этом, если обозначить

$$u_j = R_j(\varphi_j f, \varphi_j g_1, \dots, \varphi_j g_\mu), \text{ то}$$

$$P_0(x^j, D)u_j = \varphi_j f + T_j(f, g_1, \dots, g_\mu),$$

$$B_l^0(x^j, D)u_j = \varphi_j g_l + T_{jl}(f, g_1, \dots, g_\mu),$$

где $T_j \in L(H, H^1(\Omega))$, $T_{jl} \in L(H, H^{m-m_l+1/2}(\partial\Omega))$, $l=1, \dots, \mu$ (см. теорему 6.4).

Теперь “склеим” все построенные выше “локальные” параметриксы R_j ,

точнее, положим $R^\circ = \sum_{j=1}^N \psi_j R_j \varphi_j : H \rightarrow H^m(\Omega)$. При этом в случае

$\text{supp } \varphi_j \cap \partial\Omega = \emptyset$ под $R_j(\varphi_j f, \varphi_j g_1, \dots, \varphi_j g_\mu)$ мы подразумеваем функцию $R_j(\varphi_j f)$, определенную по формуле (7.5). Из свойств операторов R_j сразу следует, что $R^\circ \in L(H, H^m(\Omega))$.

Пусть $F = (f, g_1, \dots, g_\mu) \in H$, тогда при $x \in \Omega$

$$P(x, D)R^\circ F = \sum_j P(x, D)\psi_j R_j \varphi_j F = \sum_j \psi_j P(x, D)R_j \varphi_j F + T_1' F,$$

где $T_1' F = \sum_j (P(x, D)\psi_j R_j \varphi_j F - \psi_j P(x, D)R_j \varphi_j F)$ и $T_1' \in L_1(H, H^1(\Omega))$ (за-

дача 7.10). Далее, получим

$$\begin{aligned} \sum_j \psi_j P(x, D)R_j \varphi_j F &= \sum_j \psi_j P_0(x^j, D)R_j \varphi_j F + \sum_j \psi_j [P(x, D) - P_0(x^j, D)]R_j \varphi_j F = \\ &= \sum_j \psi_j \varphi_j f + \sum_j \psi_j T_j F + T_3' F = f + T_2' F + T_3' F, \end{aligned}$$

где $T'_2 = \sum_j \psi_j T_j \in L(H, H^1(\Omega))$, $T'_3 \in L(H, L_2(\Omega))$ и $\|T'_3\| \leq C_1 \varepsilon$, где постоянная $C_1 > 0$ не зависит от ε . При этом последнее неравенство очевидно следует из вида оператора T'_3 , из условия, что значения коэффициентов оператора $P_0(x, D)$ отличаются менее чем на ε в каждой двух точках из $\bar{\omega}_j = \sup p \psi_j$, $j = 1, \dots, N$, а также из неравенства $\|av\|_{L_2(\omega)} \leq \max_{x \in \bar{\omega}} |a(x)| \|v\|_{L_2(\omega)}$ при $a \in C(\bar{\omega})$, $v \in L_2(\omega)$.

Далее, при $x \in \partial\Omega$ аналогично получаем

$$\begin{aligned} B_l(x, D)R^\circ F &= \sum_j B_l(x, D)\psi_j R_j \varphi_j F = \sum_j \psi_j B_l(x, D)R_j \varphi_j F + T'_{l1} F = \\ &= \sum_j \psi_j B_l^0(x^j, D)R_j \varphi_j F + \sum_j \psi_j [B_l(x, D) + B_l^0(x^j, D)]R_j \varphi_j F + T'_{l1} F = \\ &= \sum_j \psi_j \varphi_j g_l + T'_{l2} F + T'_{l3} F = g + T'_{l2} F + T'_{l3} F, \end{aligned}$$

где $T'_{l1}, T'_{l2} \in L(H, H^{m-m_l+1/2}(\partial\Omega))$, $T'_{l3} \in L(H, H^{m-m_l-1/2}(\partial\Omega))$ и $\|T'_{l3}\| \leq C'_l \varepsilon$, где постоянная $C'_l > 0$ не зависит от ε , $l = 1, \dots, \mu$.

Таким образом, если $A: H^m(\Omega) \rightarrow H$,

$$Au = (P(x, D)u, \gamma B_1(x, D)u, \dots, \gamma B_\mu(x, D)u), \text{ то } AR^\circ F = F + \bar{T}F + \bar{T}_1 F,$$

где $\bar{T} \in L(H, H')$, $\bar{T}_1 \in L(H, H)$,

$$H' = H^1(\Omega) \times H^{m-m_1+1/2}(\partial\Omega) \times \dots \times H^{m-m_\mu+1/2}(\partial\Omega), \quad \|\bar{T}_1\| \leq \bar{C}_1 E, \text{ а постоянная } \bar{C}_1 > 0 \text{ не}$$

зависит от ε .

Если теперь выбрать такое $\varepsilon > 0$, что $\bar{C}_1 \varepsilon < 1$, то оператор $I + \bar{T}_1$ обратим и $AR^\circ(I + \bar{T}_1)^{-1} = I + \bar{T}(I + \bar{T}_1)^{-1}$. Так как $\bar{T}(I + \bar{T}_1)^{-1}$ – линейный ограниченный оператор из H в H' , то оператор $R = R^\circ(I + \bar{T}_1)^{-1}$ является правым параметриком краевой задачи (7.2), (7.3).

Оценка (7.4) следует непосредственно из построения правого параметрика R (задача 7.11).

Следствие 7.1. Левый R_1 и правый R_2 параметрикс в теореме 7.1 являются ограниченными операторами из пространства

$H_{(s)} = H^s(\Omega) \times H^{m-m_1+1/2}(\partial\Omega) \times \dots \times H^{m-m_\mu+1/2}(\partial\Omega)$ в пространство $H^{s+m}(\Omega)$ при любых $s \in \mathbf{Z}_+$. При этом линейные операторы

$$R_1 A - I : H^{s+m}(\Omega) \rightarrow H^{s+m+1}(\Omega), \quad AR_2 - I : H_{(s)} \rightarrow H_{(s+1)}$$

являются также ограниченными. Кроме того, для каждого $s \in \mathbf{Z}_+$ существует такая постоянная $C = C_{(s)} > 0$, что

$$\|u\|_{s+m} \leq C \left(\|Pu\|_s + \sum_{j=1}^{\mu} \|\gamma B_j u\|_{s+m-m_j-1/2} + \|u\|_s \right), \quad u \in H^m(\Omega). \quad (7.7)$$

Доказательство является в основном повторением доказательства теоремы 7.1 с заменой пространств H и $H^m(\Omega)$ на пространства $H_{(s)}$ и $H^{s+m}(\Omega)$ соответственно.

Замечание 7.2. На самом деле все утверждения следствия 7.1 выполняются для любых вещественных $s \geq 0$ (см., например, [12], гл. III, § 2, [19], гл.2, п.5.4).

7.3. ФРЕДГОЛЬМОВОСТЬ ОБЩИХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Используя построенный в предыдущем пункте параметрикс краевой задачи (7.2), (7.3) легко изучить ядро и образ линейного непрерывного оператора $A : H^{s+m}(\Omega) \rightarrow H_{(s)}$ при любом вещественном $s \geq 0$, действующего по формуле $Au = (Pu, \gamma B_1 u, \dots, \gamma B_\mu u)$ и определяющего обобщенные решения этой задачи при $s = 0$.

Теорема 7.2. Пусть (7.2), (7.3) – эллиптическая краевая задача. Тогда $\text{Ker} A$ является конечномерным линейным подпространством в пространстве $C^\infty(\bar{\Omega})$.

Доказательство. Пусть $u \in \text{Ker}A$, а R_1 – левый параметрикс краевой задачи (7.2),(7.3), указанный в следствии (7.1). Тогда $R_1 Au = u + T_1 u = 0$, где $T_1 \in L(H^{s+m}(\Omega), H^{s+m+1}(\Omega))$ при всех $s \in \mathbf{Z}_+$.

Отсюда получаем, что если $\|u\|_m \leq 1$, то $\|T_1 u\|_{m+1} \leq C$ для некоторой положительной постоянной C , не зависящей от u . Теперь при $u \in \text{Ker}A$ и $\|u\|_m \leq 1$ имеем неравенство $\|u\|_{m+1} \leq C$ (с той же постоянной C), поскольку $u = -T_1 u$ в данном случае. Так как $A \in L(H^m(\Omega), H)$, то $\text{Ker}A$ – замкнутое подпространство в $H^m(\Omega)$, а значит, $\text{Ker}A$ – гильбертово пространство с нормой $H^m(\Omega)$. Далее, в силу ограниченности области Ω , вложение $H^{m+1}(\Omega)$ в $H^m(\Omega)$ компактно (см. п. 3.5). Следовательно, единичный шар в $\text{Ker}A$ (с нормой $H^m(\Omega)$) является предкомпактом, что очевидно равносильно конечности мерности пространства $\text{Ker}A$ (задача 7.7).

Кроме того, при $u \in \text{Ker}A \subset H^m(\Omega)$ выполняется соотношение $u = -T_1 u \in H^{m+1}(\Omega)$ так как $T_1 \in L(H^m(\Omega), H^{m+1}(\Omega))$. А следовательно, $H^{m+1}(\Omega) \ni u = -T_1 u \in H^{m+2}(\Omega)$ и т.д. Таким образом, $u \in H^{m+s}(\Omega)$ при всех $s \in \mathbf{Z}_+$, т.е. $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ (по теореме Соболева). \square

Теорема 7.3. Если краевая задача (7.2), (7.3) эллиптическая, то образ оператора $A: H^{s+m}(\Omega) \rightarrow H_{(s)}$ замкнут при любом вещественном $s \geq 0$.

Доказательство. В силу замечания 7.2 выполнена оценка (7.7) при любом вещественном $s \geq 0$. Используя теперь лемму 6.1, сразу получаем требуемое утверждение (и, дополнительно, конечномерность $\text{Ker}A$). \square

Теорема 7.4. Пусть краевая задача (7.2), (7.3) является эллиптической. Тогда существуют такие функции $\Phi_k \in C^\infty(\Omega)$ и $\Psi_{kj} \in C^\infty(\partial\Omega)$, где $k=1, \dots, N$, $j=1, \dots, \mu = m/2$, $N = \text{Coker}A$, что обобщенное решение задачи (7.2), (7.3)

существует в том и только в том случае, если для набора $(f, g_1, \dots, g_\mu) \in H_{(s)}$ (при любом $s \in \bar{\mathbf{R}}_+^1$) выполняются условия разрешимости

$$\int_{\Omega} f \Phi_k dx + \sum_{j=1}^{\mu} \int_{\partial\Omega} g_j \Psi_{kj} ds_x = 0, \quad j=1, \dots, N. \quad (7.8)$$

Доказательство. Пусть $R_2 : H_{(s)} \rightarrow H^{m+s}(\Omega)$ – правый параметрикс краевой задачи (7.2), (7.3), построенный в теореме 7.1 (см. также замечание 7.2). Тогда $AR_2 = I + T_2$, где $T_2 \in L(H_{(s)}, H_{(s+1)})$.

Так как пространство $H_{(s+1)}$ компактно вложено в пространство $H_{(s)}$ (это непосредственно следует из теоремы 4.9 и замечания 4.7), то оператор T_2 является компактным оператором из пространства $H_{(s)}$ в себя. Кроме того, оператор $T_1 = R_1 A - I : H^{m+s}(\Omega) \rightarrow H^{m+s}(\Omega)$, где R_1 – левый параметрикс задачи (7.2), (7.3), также является компактным в силу включения $T_1 \in L(H^{s+m}(\Omega), H^{s+m+1}(\Omega))$ и компактности вложения $H^{m+s+1}(\Omega)$ в $H^{m+s}(\Omega)$. Следовательно, оператор A является почти обратимым и фредгольмовым (см. п. 1.3). Заметим, что отсюда, в частности, следует и замкнутость области значений оператора A (см. утверждение 1.1).

Применяя теперь к оператору $A \in F(H^{m+s}(\Omega), H_{(s)})$ теоремы Фредгольма (см. замечание 1.3) получаем, по существу, доказываемое утверждение. При этом пространство $\text{Coker } A$ изоморфно пространству $\text{Ker } A'$ и $\dim \text{Ker } A' < \infty$, A' – сопряженный оператор к A (см. определение 1.2). Далее, любой базис G_1, \dots, G_N в пространстве $\text{Ker } A'$, где $G_k = (\Phi_k, \Psi_{k1}, \dots, \Psi_{k\mu})$, $k=1, \dots, N$, задает искомый набор функций, определяющих условия разрешимости (7.8).

Остается пояснить включения $\Phi_k \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $\Psi_{kj} \in C^\infty(\partial\Omega)$ при всех $k=1, \dots, N$, $j=1, \dots, \mu$. Доказательство этих включений сразу следует из априорной оценки для оператора A' , аналогичной оценке (7.7) для оператора A , (см. подробнее [19], глава 2, § 5). \square

7.4. РЕГУЛЯРНОСТЬ РЕШЕНИЙ И ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Теорема 7.5. Пусть $u \in H^{t_0}(\Omega)$ является обобщенным решением эллиптической краевой задачи (7.2), (7.3), где $t_0 \geq m$, $f \in H^{s-m}(\Omega)$, $g_j \in H^{s-m_j-1/2}(\partial\Omega)$, $j=1, \dots, \mu$, а $s > t_0$. Тогда имеет место включение $u \in H^s(\Omega)$. При этом, если $f \in C^\infty(\Omega)$, $g_j \in C^\infty(\partial\Omega)$ при $j=1, \dots, \mu$, то $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$.

Доказательство. Пусть R_1 – левый параметрикс краевой задачи (7.2), (7.3) из теоремы 7.1 (см. также замечание 7.2). Тогда из равенства $Au = (f, g_1, \dots, g_\mu)$ следует равенство $u + T_1 u = R_1(f, g_1, \dots, g_\mu)$, где $T_1 \in L(H^t(\Omega), H^{t+1}(\Omega))$ при $t \geq m$, $R_1 \in L(H_{(s-m)}, H^s(\Omega))$. Отсюда сразу получаем, что $u = R_1(f, g_1, \dots, g_\mu) - T_1 u \in H^s(\Omega) \cap H^{t_0+1}(\Omega)$. Далее, используя равенство $u = R_1(f, g_1, \dots, g_\mu) - T_1 u$ конечное число раз, получим включение $u \in H^s(\Omega)$.

Если $f \in C^\infty(\Omega)$, $g_j \in H^{s-m_j-1/2}(\partial\Omega)$, то $f \in H^s(\Omega)$, $g_j \in H^{s-m_j-1/2}(\partial\Omega)$ при всех $s > t_0$, $j=1, \dots, \mu$. Отсюда, в силу теоремы Соболева (следствие 4.5), $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$. \square

Подводя итоги, сформулируем следующую основную теорему.

Теорема 7.6. Пусть для задачи (7.2), (7.3) выполнено условие эллиптичности. Тогда:

1) при любом $s \geq m$ оператор

$$A: H^s(\Omega) \rightarrow H^{s-m}(\Omega) \times H^{s-m_1-1/2}(\partial\Omega) \times \dots \times H^{s-m_\mu-1/2}(\partial\Omega),$$

$$Au = (Pu, \gamma B_1 u, \dots, \gamma B_\mu u), \text{ где } m = \mu/2,$$

фредгольмов, причем $\text{Ker} A \subset C^\infty(\bar{\Omega})$;

2) при любом $s \geq m$ выполняется априорная оценка

$$\|u\|_s \leq C(\|Pu\|_{s-m} + \sum_{j=1}^{\mu} \|\gamma B_j u\|_{s-m_j-1/2} + \|u\|_0), \quad u \in H^s(\Omega),$$

где положительная постоянная $C = C(s)$ не зависит от u ;

3) если $u \in H^m(\Omega)$ является обобщенным решением краевой задачи (7.2), (7.3) при $f \in H^s(\Omega)$, $g_j \in H^{s+m_j-1/2}(\partial\Omega)$, $j=1, \dots, \mu$, где $s \geq 0$, то $u \in H^{s+m}(\Omega)$;

4) при любом $s \geq m$ и при $f \in H^{s-m}(\Omega)$, $g_j \in H^{s-m_j-1/2}(\partial\Omega)$, $j=1, \dots, \mu$, краевая задача (7.2), (7.3) имеет обобщенное решение в том и только в том случае, когда выполнены условия разрешимости (7.8).

Доказательство сразу следует из приведенных выше утверждений. \square

Замечание 7.3. Результаты данной главы обобщаются на случаи *эллиптических систем дифференциальных уравнений и компактных C^∞ -многообразий с краем* (см., например, [31], т.3, глава 20, [32], глава 10).

ЗАДАЧИ

7.1. Доказать фредгольмовость задачи Дирихле

$$-\operatorname{div}(k(x)\operatorname{grad}u) + a(x)u = f(x) \quad \text{при } |x| < 1,$$

$$u(x) = g(x) \quad \text{при } |x| = 1,$$

где $x \in \mathbf{R}^3$, $k \in C^1(\bar{\Omega})$, $a \in C^0(\bar{\Omega})$, $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^3 : |x| < 1\}$.

7.2. Проверить, что задача $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2i \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f$ при $x^2 + y^2 < 1$, $u = g$ при

$x^2 + y^2 = 1$ не является фредгольмовой, хотя уравнение эллиптическое.

Указание. Использовать семейство решений однородной задачи ($f=0$, $g=0$) вида $u(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)h(x + iy)$, где h – любая аналитическая функция.

7.3. Доказать, что краевая задача $\Delta u^2 + u = f$ при $x_n > 0$, $u = g_1$, $\frac{\partial \Delta u}{\partial x_n} = g_2$

при $x_n = 0$ удовлетворяет условию Лопатинского.

7.4. Пусть Ω – ограниченная область с гладкой границей. Проверить эллиптичность задачи Неймана $\Delta u = f$ в Ω , $\frac{\partial u}{\partial \nu} = g$ на $\partial\Omega$ и существование у неё решения $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$, определенного с точностью до постоянной при любых $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $g \in C^\infty(\partial\Omega)$, удовлетворяющих условию $\int_{\Omega} f dx + \int_{\partial\Omega} g ds = 0$. Найти индекс этой задачи.

Ответ. Индекс равен нулю.

7.5. Доказать утверждение 7.1.

7.6. Проверить эллиптичность задачи Дирихле в ограниченной области с гладкой границей для правильно эллиптического оператора.

7.7. Доказать утверждение в примере 7.2 (задача с косой производной).

7.8. Методом разделения переменных в круге $r < 1$ решить задачу с косой производной $\Delta u = 0$ при $r < 1$, $\cos \varphi \frac{\partial u}{\partial r} + \sin \varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} = g(\varphi)$ при $r = 1$, где (r, φ) – полярные координаты. Доказать эллиптичность этой задачи и найти её индекс.

7.9. Доказать, что оператор R_j , определенный по формуле (7.5), является параметриком для оператора $P(x^j, D)$ и выполняются условия (7.6).

7.10. Доказать, что $T_1' \in L(H, H^1(\Omega))$, где $T_1' F = \sum_j (P \psi_j E_j \varphi_j - \psi_j P E_j \varphi_j F)$ (см. доказательство теоремы 7.1).

7.11. Проверить выполнение оценки (7.4) для правого параметрикса R , построенного в доказательстве теоремы 7.1.

ГЛАВА 8. СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОРЯДКОВ

В данной главе дается краткое изложение *функциональных методов* исследования *смешанных краевых задач* для параболических уравнений любых порядков. Общая идея такого исследования состоит в сведении исходной задачи к линейному *операторному* дифференциальному уравнению в гильбертовом пространстве вида

$$\frac{du}{dt} + A(t)u = f(t), \quad (8.1)$$

где $A(t)$ – некоторый линейный оператор с параметром t . Этот подход к исследованию параболических краевых задач тесно связан с теорией эллиптических краевых задач, представленных в предыдущей главе.

8.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу нахождения функции $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям

$$\begin{aligned} u_t &= A(x,t, D_x)u + f(x,t) \quad \text{при } (x,t) \in Q_t, \\ u(x,0) &= \varphi(x) \quad \text{при } x \in \Omega, \\ B_j(x,t, D_x)u &= g_j(x,t) \quad \text{при } (x,t) \in S_t, \quad j = 1, \dots, \mu. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Здесь и всюду в данной главе Ω – ограниченная область в \mathbf{R}^n с гладкой границей $S = \partial\Omega$, $Q_t = \Omega \times (0, T)$ – цилиндр в $\mathbf{R}_{x,t}^{n+1}$, $S_t = S \times (0, t)$ – боковая граница этого цилиндра, T – любое положительное число;

$$A = A(x,t, D_x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x,t) D_x^\alpha \quad (8.3)$$

– линейный дифференциальный оператор по x порядка $m = 2\mu$, где $\mu \geq 1$, с коэффициентами $a_\alpha \in C^\infty(\bar{Q}_t)$ при $|\alpha| \leq m$;

$$B_j = B_j(x, t, D_x) = \sum_{|\beta| \leq m_j} b_{j\beta}(x, t) D_x^\beta \quad (8.4)$$

– линейные дифференциальные операторы по x порядков $m_j < m$ с коэффициентами $b_{j\beta} \in C^\infty(\bar{S}_T)$ при $|\beta| \leq m_j$, где $j = 1, \dots, \mu$; f, φ, g_j при $j = 1, \dots, \mu$ – заданные на, соответственно, Q_t, \bar{S}_T, Ω функции.

При каждом фиксированном $t \in [0, T]$ рассмотрим еще одну краевую задачу с параметром λ

$$(A(x, t, D_x) - \lambda)v(x) = h(x) \quad \text{при } x \in \Omega, \quad (8.5)$$

$$B_j(x, t, D_x)v(x) = \psi_j(x) \quad \text{при } x \in \partial\Omega, \quad j = 1, \dots, \mu.$$

Определение 8.1. Говорят, что задача (8.5) удовлетворяет *условию эллиптичности с параметром* $\lambda \in \Lambda$, где Λ – некоторый замкнутый угол с вершиной в точке 0 на комплексной плоскости C , если

1) $A(x, t, D_x)$ – правильный эллиптический оператор;

2) $a_m(x, t, \xi) - \lambda \neq 0$ при всех таких $(x, \xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbf{R}^n$, $\lambda \in \Lambda$, что $|\xi| + |\lambda| \neq 0$,

где $a_m(x, t, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x, t) \xi^\alpha$ – главный символ оператора A ;

3) для любых $x^\circ \in \partial\Omega$, $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1}$, $\lambda \in \Lambda$ и $\chi_1, \dots, \chi_\mu \subset C$ при $|\xi'| + |\lambda| \neq 0$ задача на полуоси $x_n \geq 0$

$$A^\circ(x^\circ, t, \xi', D_n)w(x_n) = 0 \quad \text{при } x_n \geq 0;$$

$$B_j^\circ(x^\circ, t, \xi', D_n)w(x_n) = \chi_j \quad \text{при } x_n = 0, \quad j = 1, \dots, \mu$$

имеет единственное ограниченное решение $A^\circ(x^\circ, t, D_n), B_j^\circ(x^\circ, t, D_n)$ – старшие однородные части операторов A, B_j при фиксированном x° (и t) в локальной системе координат, для которой Ω локально задается обла-

стью в $\{x : x_n > 0\}$, а $\partial\Omega$ локально определяется областью в $\{x : x_n = 0\}$ (см. определение 7.2).

Определение 8.2. Задача (8.2) называется *смешанной (начально-краевой)* параболической задачей, если задача (8.5) удовлетворяет условию эллиптичности с параметром $\lambda \in \Lambda$ при $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \geq 0\}$.

Пример 8.1.

1) *Первая* начально-краевая задача для уравнений теплопроводности

$$u_t = a^2 \Delta u + f(x, t) \text{ при } (x, t) \in Q_t,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) \text{ при } x \in \Omega, \quad u(x, t) = g(x, t) \text{ при } (x, t) \in S_T$$

является *параболической* (задача 8.2).

2) Параболической является и *вторая* смешанная задача для уравнения теплопроводности, отличающаяся от первой только краевым условием

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial \nu} = g(x, t) \text{ при } (x, t) \in S_T, \text{ где } \nu \text{ — векторное поле внешних единичных нормалей к } S_T \text{ (задача 8.2).}$$

Заметим также, что для существования достаточно гладкого вплоть до границы решения $u(x, t)$ смешанной задачи (8.2) необходимо выполнение условия согласования заданных функций $f, \varphi, g_j, j = 1, \dots, \mu$, означающее непротиворечивость уравнения, начальных и краевых условий в точках вида $(x, 0)$, где $x \in \partial\Omega$.

Основным результатом для параболической задачи (8.2) является существование единственного ее *классического* решения при $f \in C^\infty(\bar{Q}_t)$, $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $g_j \in C^\infty(\bar{S}_T)$, $j = 1, \dots, \mu$, и выполнение всех условий согласования. Доказательство этого утверждения функциональными методами, как и в случае эллиптической краевой задачи, разбивается на два этапа. На первом этапе определяется и решается соответствующая (8.2) *обобщенная за-*

дача, а на втором этапе доказывается гладкость обобщенного решения этой задачи при условиях гладкости решений $f, \varphi, g_1, \dots, g_\mu$.

Изложению реализации указанного плана решения смешанной задачи (8.2) и посвящена данная глава.

8.2. АБСТРАКТНАЯ ЭВОЛЮЦИОННАЯ ЗАДАЧА

Для определения соответствующей (8.2) обобщенной задачи удобно сначала поставить и решить абстрактную эволюционную задачу для операторного дифференциального уравнения вида (8.1).

Пусть заданы два сепарабельных гильбертовых пространства V и H . Обозначим через V' и H' сопряженные пространства с пространствами V и H соответственно, и пусть вложения $V \subset H \subset V'$ непрерывны, причем каждое пространство плотно в следующем. Кроме того, далее пространства H' и H будем отождествлять.

Пусть также дано семейство непрерывных на V билинейных форм $a(t, v, w)$ при $v, w \in V$, $t \in (0, T)$, где T – фиксированная положительная постоянная, при этом будем предполагать, что это семейство удовлетворяет следующим двум условиям:

1) (условие равномерной ограниченности) при любых фиксированных $v, w \in V$ функция $a(t, v, w)$ измерима при $t \in (0, T)$ и

$$|a(t, v, w)| \leq C \|v\| \|w\| \text{ при всех } v, w \in V \text{ и почти всех (п.в.) } t \in (0, T), \quad (8.6)$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от t, v и w , $\|\cdot\| = \|\cdot\|_V$

2) (условие коэрцитивности) существуют такие числа λ и $c_0 > 0$, что

$$a(t; v, w) + \lambda |v|^2 \geq c_0 \|v\|^2 \text{ при всех } v \in V \text{ и п. в. } t \in (0, T), \quad (8.7)$$

где $\|\cdot\| = \|\cdot\|_H$.

Замечание 8.1. Из условия 1) равномерной ограниченности семейства форм $a(t, v, w)$ сразу следует непрерывность формы $a(t, v, w)$ на $V \times V$ при

фиксированном t . Обратное утверждение в общем случае очевидно не верно, т.е. из непрерывности форм $a(t, v, w)$ на $V \times V$ при п.в. $t \in (0, T)$ следует оценка вида (8.6), но с $C = C(t)$ (т.е. постоянная C в этой оценке зависит от t) (задача 8.3).

Так как при п. в. $t \in (0, T)$ и при фиксированном $v \in V$ форма $a(t, v, w)$ является линейной и ограниченной по w , то из теоремы Рисса и линейности и ограниченности этой формы по v при фиксированном $w \in V$ следует существование при п. в. $t \in (0, T)$ оператора $A(t) \in L(V, V')$, для которого выполняется тождество

$$a(t, v, w) = \langle A(t)v, w \rangle \text{ при п.в. } t \in (0, T) \text{ и всех } v, w \in V. \quad (8.8)$$

Здесь через $\langle f, w \rangle$ обозначено значение функционала $f \in V'$ на элементе $w \in V$.

Обозначим через $L_2(0, T, V)$ пространство (классов) всех *измеримых по Бохнеру* при $t \in (0, T)$ функций $t \rightarrow f(t)$, отображающих интервал $(0, T)$ в

пространство V и таких, что $\int_0^T \|f(t)\|^2 dt < \infty$ (см., например, [14], глава 15,

§ 5, [6], глава IV, § 1). Аналогично определим пространство $L_2(0, T, V')$.

При $f \in L_2(0, T, V)$ имеем включения $A(t)f(t) \in V'$ для п.в. $t \in (0, T)$. Кроме того, функция $t \rightarrow A(t)f(t)$ очевидно и измерима (по Бохнеру) и в силу условия (8.6) имеем

$$\|A(t)f(t)\|_{V'} \leq C\|f(t)\|_V, \quad f \in L_2(0, T, V).$$

Отсюда сразу следует, что оператор, действующий по формуле $f(t) \rightarrow A(t)f(t)$, является линейным и ограниченным оператором из $L_2(0, T, V)$ в $L_2(0, T, V')$.

Определение 8.3. Пространством $D'((0, T); V)$ *распределений* на интервале $(0, T)$ со значениями в пространстве V называется пространство всех

линейных непрерывных операторов из $D(0, T)$ в V , где $D(0, T)$ – линейное топологическое пространство пробных функций на $(0, T)$ (см. п. 2.1).

Производная $\frac{df}{dt}$ распределения $f \in D'((0, T); V)$ определяется по формуле

$$\left\langle \frac{df}{dt}, \varphi \right\rangle = - \left\langle f, \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle, \quad \varphi \in D(0, T), \quad \text{где } \langle f, \psi \rangle - \text{значение распределения } f \text{ на}$$

элементе $\psi \in D(0, T)$. При этом, как легко проверить, $\frac{df}{dt} \in D'((0, T); V)$. Схо-

димость $f_k \rightarrow f$ в $D'((0, T); V)$ означает сходимость $\langle f_k, \varphi \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle$ при всех $\varphi \in D(0, T)$.

Пространство $L_2(0, T, V)$ непрерывно вкладывается в пространство

$$D'((0, T); V) \text{ с помощью формулы } \langle \bar{f}, \varphi \rangle = \int_0^T f(t) \varphi(t) dt, \quad \varphi \in D(0, T). \text{ Отожде-}$$

ствляя \bar{f} с f можем записать вложение $L_2(0, T, V) \subset D'((0, T); V)$. Таким образом, для любой функции $f \in L_2(0, T, V)$ определена обобщенная производная $\frac{df}{dt} \in D'((0, T); V)$.

Рассмотрим теперь гильбертово (задача 8.5) пространство

$$W^1 = W^1(0, T) = \left\{ f \in L_2(0, T; V) : \frac{df}{dt} \in L_2(0, T; V') \right\}$$

$$\text{с нормой } \|f\|_{W^1} = \left(\int_0^T (\|f(t)\|_V^2 + \left\| \frac{df(t)}{dt} \right\|_{V'}^2) dt \right)^{1/2}.$$

Теорема 8.1. Пусть $f \in W^1(0, T)$. Тогда функция f с точностью до множества меры нуль совпадает с непрерывной функцией из $[0, T]$ в H .

Доказательство приведено, например, в [19], глава 1, § 3.

Если через $C^\circ([0, T]; H)$ обозначить множество всех непрерывных функций $[0, T] \rightarrow H$, то из теоремы 8.1 следует вложение (множеств)

$$W^1(0, T) \subset C^\circ([0, T]; H).$$

Определение 8.4. Эволюционная задача для уравнения (8.1) с определенной формулой (8.8) семейством операторов $A(t)$ и с заданной функцией $f \in L_2(0, T; V)$ состоит в нахождении функции $u \in W^1(0, T)$, удовлетворяющей (8.1) и начальному условию

$$u(0) = u_0, \quad (8.9)$$

где u_0 – заданный элемент пространства H .

Заметим, что условие (8.9) имеет смысл в силу теоремы 8.1.

Теорема 8.2. Пусть выполнены условия (8.6), (8.7) на семейство билинейных форм $a(t; v, w)$. Тогда эволюционная задача (8.1), (8.9) имеет решение и оно единственно. Кроме того, это решение непрерывно зависит от f и u_0 , т.е. билинейное отображение $(f, u_0) \rightarrow u_0$ пространства $L_2(0, T; V) \times H$ в $W^1(0, T)$ непрерывно.

Доказательство. Если сделать замену вида $u(t) = v(t)e^{pt}$, то задача (8.1), (8.9) будет эквивалентна задаче $\frac{dv}{dt} + (A(t) + pI)v = fe^{-pt}$, $v(0) = u_0$.

Для оператора $A(t) + pI$ при $p = \lambda$ соответствующая квадратичная форма $\tilde{a}(t; v, w) = a(t; v, w) + \lambda|v|^2$ удовлетворяет неравенству (8.7) при $\lambda = 0$. Поэтому без ограничения общности будем считать, что для исходной задачи условия (8.7) выполняются при $\lambda = 0$.

Докажем сначала *единственность* решения эволюционной задачи (8.1), (8.9). В силу линейности задачи очевидно достаточно доказать, что $u = 0$, если $f = 0$ и $u_0 = 0$.

Так как при п.в. $t \in [0, T]$ обе части уравнения (8.1) являются элементами V' , а $u(t) \in V$, то

$$\left\langle \frac{du(t)}{dt}, u(t) \right\rangle + \langle A(t)u(t), u(t) \rangle = 0. \quad (8.10)$$

Далее нетрудно проверить (см. [19], глава 1, § 3), что, используя равенство $u(0) = 0$,

$$\int_0^T \left\langle \frac{du(t)}{dt}, u(t) \right\rangle dt = \frac{1}{2} |u(T)|^2.$$

Поскольку $\langle A(t)u(t), u(t) \rangle = a(t; u(t); u(t))$, то, интегрируя равенство (8.10), получим

$$\frac{1}{2} |u(T)|^2 + \int_0^T a(t; u(t); u(t)) dt = 0.$$

Следовательно, в силу (8.7) (при $\lambda = 0$)

$$\frac{1}{2} |u(T)|^2 + c_0 \int_0^T \|u(t)\|^2 dt \leq 0,$$

а значит, $u(t) = 0$ при всех $t \in [0, T]$.

Доказательство существования проведем методом Галеркина. Так как пространство V сепарабельно, то в нем существует “базис” – полная система линейно независимых векторов $\{h_1, h_2, \dots\}$. Это означает, что для любого $m \in \mathbb{N}$ векторы h_1, \dots, h_m линейно независимы (в V), а множество всех (конечных) комбинаций вида $\sum_j \alpha_j h_j$ плотно в V .

Найдем сначала при каждом $m \in \mathbb{N}$ приближенное (по Галеркину) решение $u_m(t)$ задачи (8.1), (8.9). Это решение определяется по формуле

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^m c_{jm}(t) h_j, \quad (8.11)$$

где функции $c_{jm}(t)$ такие, чтобы выполнялись условия

$$\left(\frac{du_m(t)}{dt}, h_k \right) + a(t; u_m(t), h_k) = \langle f(t), h_k \rangle, \quad k = 1, \dots, m, \quad (8.12)$$

$$u_m(0) = u_{0m} = \sum_{j=1}^m \alpha_{jm} h_j, \quad \sum_{j=1}^m \alpha_{jm} h_j \rightarrow u_0 \text{ в } H \text{ при } m \rightarrow \infty. \quad (8.13)$$

Здесь $(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)_H$.

Условия (8.12), (8.13) представляют собой задачу Коши для системы из m линейных дифференциальных уравнений относительно m неизвестных функций $c_{1m}(t), \dots, c_{mm}(t)$ вида

$$B_m \frac{d\bar{c}_m}{dt} + A_m(t)\bar{c}_m = \bar{f}_m(t), \quad \bar{c}_m(0) = \bar{a}_m, \quad (8.14)$$

где B_m и $A_m(t)$ – матрицы $m \times m$ с элементами (h_i, h_j) и $a(t; h_i, h_j)$ соответственно, $\bar{c}_m(t) = (c_{1m}(t), \dots, c_{mm}(t))^T$, $\bar{f}_m(t) = (\langle f(t), h_1 \rangle, \dots, \langle f(t), h_m \rangle)^T$. Поскольку векторы h_1, \dots, h_m линейно независимы, то B_m – матрица Грамма этих векторов и $\dim B_m \neq 0$. Отсюда и из условия (8.4), в силу теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши для линейной системы дифференциальных уравнений (см., например, [29], §1, теорема 3), задача (8.14) имеет решение $\bar{c}_m(t)$ на всем отрезке $[0, T]$ и оно единственно. Таким образом, приближенное решение по Галеркину $u_m(t)$ определено (единственным образом) формулой (8.11) на всем отрезке $[0, T]$.

Докажем теперь, что при $m \rightarrow \infty$ $u_m \rightarrow u$ слабо в $L_2(0, T; V)$, где u – решение задачи (8.1), (8.9). Для это умножим равенство (8.10) на c_{km} и проинтегрируем по x . Тогда, пользуясь билинейностью формы $a(t; v, w)$, получим

$$\left(\frac{du_m(t)}{dt}, u_m(t) \right) + a(t; u_m(t), u_m(t)) = \langle f(t), u_m(t) \rangle,$$

$$\text{т.е. } \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_m(t)|^2 + a(t; u_m(t), u_m(t)) = \langle f(t), u_m(t) \rangle.$$

Отсюда, в силу условия (8.7) (при $\lambda = 0$), имеем

$$\begin{aligned} |u_m(T)|^2 + 2c_0 \int_0^T \|u_m(t)\|^2 dt &\leq |u_{0m}|^2 + 2 \int_0^T |\langle f(t), u_m(t) \rangle| dt \leq \\ &\leq |u_{0m}|^2 + 2 \int_0^T \|f(t)\|_{V'} \|u_m(t)\|_V dt \leq |u_{0m}|^2 + c_0 \int_0^T \|u_m(t)\|^2 dt + \frac{1}{c_0} \int_0^T \|f(t)\|_{V'}^2 dt, \end{aligned}$$

так как $2|ab| = 2|c_0^{1/2} a \cdot c_0^{-1/2} b| \leq c_0 |a|^2 + c_0^{-1} |b|^2$ при всех $a, b \in \mathbf{R}$, $c_0 > 0$.

Так как по условию $u_{0m} \rightarrow u_0$ в H , то $|u_{0m}| \leq c_0 |u_0|$ при всех m , где c_0 – некоторая положительная постоянная. Следовательно,

$$\int_0^T \|u_m(t)\|^2 dt \leq C_2 \left(|u_0|^2 + \int_0^T \|f(t)\|_{V'}^2 dt \right), \quad (8.15)$$

где C_2 – некоторая положительная постоянная, не зависящая от m . Отсюда получаем, что последовательность u_m ограничена по норме гильбертова пространства $L_2(0, T; V)$, а значит, существует слабо сходящаяся в $L_2(0, T; V)$ подпоследовательность $v_n = u_{m_n}$ последовательности u_m .

Пусть $v_n = u_{m_n}$, $v_n \rightarrow y$ слабо в $L_2(0, T; V)$ и пусть N – любое натуральное число, а $n > N$. Тогда умножая обе части равенства (8.12) на функцию $\varphi \in C^1[0, T]$ и удовлетворяющую условию $\varphi(T) = 0$, а затем, интегрируя по t от 0 до T и применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$\int_0^T [-(v_n(t), \varphi_k'(t)) + a(t; v_n(t), \varphi_k(t))] dt = \int_0^T \langle f(t), \varphi_k(t) \rangle dt + (v_{0n}, \varphi_k(0)),$$

где $\varphi_k(t) = \varphi(t)h_k$, $k = 1, \dots, m$.

Поскольку $v_n \rightarrow y$ слабо в $L_2(0, T; V)$, то переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в последнем равенстве будет иметь равенство

$$\int_0^T [-(y, \varphi_k'(t)) + a(t; y, \varphi_k(t))] dt = \int_0^T \langle f(t), \varphi_k(t) \rangle dt + \langle u_0, \varphi_k(0) \rangle. \quad (8.16)$$

Это равенство выполняется для всех $\varphi \in C^1[0, T]$, $\varphi(T) = 0$, а значит, оно выполняется и для всех $\varphi \in D((0, T))$. Следовательно,

$$\frac{d}{dt} (y(t), h_k) + a(t; y(t), h_k) = \langle f(t), h_k \rangle, \quad k = 1, \dots, m, \quad (8.17)$$

где производная берется в смысле $D'(0, T)$.

Так как в равенстве (8.17) число m , а значит, и k , является произвольным и множество всех конечных линейных комбинаций элементов h_k плотно в пространстве V , то

$$\frac{dy}{dt} + A(t)v = f. \quad (8.18)$$

Отсюда $\frac{dy}{dt} = f - A(t)v \in L_2(0, T; V)$ и, следовательно, по определению $y \in W^1(0, T)$. Это включение позволяет интегрировать по частям в равенстве (8.18), так что в силу (8.18) получим $(y(0), h_k)\varphi(0) = (u_0, h_k)\varphi(0)$ при всех $k \in \mathbf{R}$ и всех допустимых φ , т.е. $(y(0), h_k) = (u_0, h_k)$, $k = 1, 2, \dots$

Следовательно, $y(0) = u_0$ и $y(t)$ – решение задачи (8.1), (8.9).

Так как выше было доказано, что задача (8.1), (8.9) может иметь единственное решение, то любая другая слабо сходящаяся в $L_2(0, T; V)$ подпоследовательность последовательности u_m слабо сходится к той же функции u . Поскольку последовательность u_m ограничена, то вся последовательность u_m слабо сходится в $L_2(0, T; V)$ к u .

Обозначим $u(t) = y(t)$. Тогда $u_m \rightarrow u$ слабо в $L_2(0, T; V)$ и выполняется оценка (8.13). Следовательно выполняется неравенство

$$\int_0^T \|u(t)\|^2 dt \leq C_2 \left(|u_0|^2 + \int_0^T \|f(t)\|_{V'}^2 dt \right). \quad (8.19)$$

Отсюда в силу неравенства $\frac{du}{dt} = f - A(t)u$ и $\|A(t)u(t)\|_{V'} \leq C\|u(t)\|_V = C\|u(t)\|$

получаем оценку $\left\| \frac{du}{dt} \right\|_{L_2(0, T; V')} \leq C_3 \left(|u_0|^2 + \int_0^T \|f(t)\|_{V'}^2 dt \right)$, означающую вместе с оценкой (8.19) непрерывную зависимость решения $u(t)$ от исходных данных f и u_0 . \square

8.3. ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ

Известно несколько способов определения *обобщенного решения* краевой задачи вида (8.2) (см., например, [19], глава 3, [30], глава X и др.). Мы бу-

дем использовать для этого определения так называемые *эволюционные уравнения вариационного типа* ([19], глава 3). Это уравнения, определяемые с помощью заданного семейства непрерывных билинейных форм $a(t, v, w)$ на гильбертовом пространстве V аналогично тому, как это сделано в предыдущем пункте. При этом соответствующая *однородной* (т.е. при $\varphi=0$ и $g_j=0, j=1, \dots, \mu$) задаче (8.2) билинейная форма $a(t, v, w)$ определяется оператором $A(x, t, D_x)$, а пространство V – операторами $B_j(x, t, D_x)$ и, возможно, также оператором $A(x, t, D_x)$.

Далее, без ограничения общности, будем рассматривать *однородные* (т.е. при $g_j=0, j=1, \dots, \mu$) смешанные задачи вида (8.2). Задача (8.2) с ненулевыми начальными и краевыми условиями сводится к однородной с помощью замены на новую неизвестную функцию $u_1 = u - \Phi$, где функция Φ удовлетворяет этим условиям.

Целью данного пункта является доказательство того, что параболическая смешанная задача (8.2) всегда *однозначно разрешима в обобщенном смысле, если функции f, φ и g_j не слишком плохие*. Для этого будет использована теорема 8.2. При этом оказывается, что обобщенное решение задачи (8.2) будет одновременно и *классическим* решением этой задачи, если функции f, φ и g_j достаточно гладкие.

Для определения соответствующей оператору $A(x, t, D_x)$ билинейной формы удобно записать его в *дивергентной форме*

$$A(x, t, D_x)u = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_{\alpha\beta}(x, t) D^\beta u), \quad (8.20)$$

где $m = 2\mu$ – порядок оператора A , а коэффициенты $a_{\alpha\beta} \in C^\infty(\bar{Q}_T)$ и легко определяются по коэффициентам a_α в формуле (8.3) (задача 8.4). При этом для простоты будем рассматривать операторы A и B_j с *вещественными* коэффициентами, а также будем предполагать *вещественными* все рассматриваемые в этом пункте функциональные пространства. В случае

комплексных коэффициентов операторов A и B_j , а также соответствующих комплексных функциональных пространств все основные утверждения и доказательства с вещественного случая легко переносятся на комплексный случай. Всюду дальше (в том числе и в задаче (8.2)) оператор записан в дивергентной форме (8.20).

Итак, рассмотрим параболическое уравнение с вещественными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(x, t, D_x)u + f \text{ в } Q_T, \quad (8.21)$$

где оператор $A(x, t, D_x)$ имеет вещественные (и ограниченные на \bar{Q}_T) коэффициенты и определен формулой (8.20). Пусть для уравнения (8.19) выполняется условие *равномерной параболичности* (в смысле Петровского), т.е. оператор $-A$ удовлетворяет условию сильной эллиптичности (см. определение 5.4) в Ω (равномерно по t). Последнее в данном случае означает, что

$$-a_m(x, t, \xi) = (-1)^{\mu+1} \sum_{|\alpha|+|\beta|=\mu} a_{\alpha\beta}(x, t) \xi^{\alpha+\beta} \geq c_0 |\xi|^{2\mu} \quad (8.22)$$

при всех $\xi \in \mathbf{R}^n$, $x \in \bar{\Omega}$ и $t \in [0, T]$, где $m = 2\mu$, $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$ при $|\alpha| = |\beta| = \mu$, $T = \text{const} > 0$, $c_0 = \text{const} > 0$ (c_0 не зависит от x и t). Поскольку коэффициенты оператора A вещественные и ограниченные, то условие сильной эллиптичности оператора $-A$ совпадает с условием *равномерной эллиптичности* $-A$ на $\bar{\Omega}$ (при всех $t \in [0, T]$) $C_1^{-1} |\xi|^m \leq -a_m(x, t, \xi) \leq C_1 |\xi|^m$ при всех $\xi \in \mathbf{R}^n$, $(x, t) \in \bar{Q}_T$, где положительная постоянная не зависит от $(x, t) \in \bar{Q}_T$, где положительная постоянная не зависит от x и t .

Определим теперь семейство (по $t \in [0, T]$) билинейных форм на $H^\mu(Q_T)$, соответствующих оператору A , по формуле

$$a(t, v, w) = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq \mu} \int_{\Omega} a_{\alpha\beta}(x, t) D^\alpha v D^\beta w dx. \quad (8.23)$$

В силу условий на коэффициенты $a_{\alpha\beta}$ это семейство билинейных форм, как легко проверить, удовлетворяет условию (8.4) для любого (замкнутого) подпространства V в $H^\mu(Q_T)$, где $\|\cdot\|_V = \|\cdot\|_{H^\mu(\Omega)}$ (задача 8.5).

В случае $V = \mathring{H}^\mu(\Omega)$ и $H = L_2(\Omega)$ из неравенства Гординга (следствие 5.6) непосредственно получаем и условие (8.5) для семейства $a(t, v, w)$, определенного формулой (8.23). Как известно (см. п. 4.3), $\mathring{H}^\mu(\Omega)$ определяется (в случае области Ω с гладкой границей) как подпространство в $H^\mu(\Omega)$ с помощью условий Дирихле $\mathring{H}^\mu(\Omega) = \{v \in H^\mu(\Omega) : \gamma \frac{d^j v}{dv^j} = 0, j = 0, 1, \dots, \mu\}$, где $\gamma: H^\mu(\Omega) \rightarrow H^{\mu-1/2}(\partial\Omega)$ – оператор следа, ν – поле внешних единичных нормалей к $\partial\Omega$.

Таким образом, естественно определить *обобщенное решение первой (однородной) начальной краевой задачи* для уравнения (8.21) с помощью эволюционной задачи (8.1), (8.7), соответствующей билинейной форме (8.21) на пространстве $\mathring{H}^\mu(\Omega)$. Легко проверить при этом, что для $f \in C^\infty(\bar{Q}_T)$ функция $u \in C^\infty(\bar{Q}_T)$ будет классическим решением указанной смешанной задачи в том и только в том случае, когда функция $t \rightarrow u(t, \cdot)$ является решением соответствующей эволюционной задачи (задача 8.9). В этом смысле классическая задача (8.2) с условиями Дирихле (однородными) *формально* равносильна соответствующему эволюционному уравнению вариационного типа с начальным условием.

Имеется немало примеров задач вида (8.2) с другими операторами B_j , которые в аналогичном смысле формально равносильны соответствующим эволюционным задачам (т.е. имеющим *вариационную формулировку*). Однако в общем случае задача (8.2) *не всегда* допускает вариационную постановку, даже если смешанная задача (8.2) является параболической (см. определение 8.2). Подробнее об этом см. [19], глава 2, § 9.4. При этом одно

из дополнительных ограничений на операторы B_j в задаче (8.2) связано с необходимостью выполнения условия (8.5) (условия коэрцитивности при п.в. $t \in [0, T]$) на соответствующую билинейную форму $a(t, v, w)$. Достаточные алгебраические условия коэрцитивности формы $a(t, v, w)$ на пространстве V (при фиксированном $t \in [0, T]$) приведены в [19], глава 2, § 9.6 для случая, когда $V = \{v \in H^\mu(\Omega) : \lambda B_j v = 0, j = 1, \dots, p\}$, где коэффициенты B_j не зависят от t , $m_j \leq m - 1$ при $j = 1, \dots, p$ при $p \leq m$.

Приведем еще простой пример вариационной формулировки задачи вида (8.2). Рассмотрим семейство форм

$$a(t, v, w) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left[a_{ij}(x, t) \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial w}{\partial x_i} + c(x, t)vw \right] dx, \quad (8.24)$$

где a_{ij}, c – вещественнозначные функции, $a_{ij}, c \in C^\infty(\bar{Q}_T)$, $a_{ij} = a_{ji}$ при всех i, j и выполняется условие равномерной параболичности на \bar{Q}_T

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \geq c_0 |\xi|^2 \quad \text{при всех } \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbf{R}^n \text{ и } (x, t) \in \bar{Q}_T,$$

$c_0 = \text{const} > 0$ (и не зависит от x и t). В качестве области определения формы $a(t, v, w)$ возьмем пространство $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$.

Легко проверяется выполнение всех условий теоремы 8.2 для данного семейства билинейных форм $a(t, v, w)$, если положить $H = L_2(\Omega)$, $V = H^1(\Omega)$ (задача 8.8). Из теоремы 8.2 сразу следует корректность (существование, единственность и непрерывная зависимость исходных данных) эволюционной задачи $u' + A(t)u = f$, $u(0) = u_0$, где $f \in L_2(0, t; (H^1(\Omega))')$, а оператор $A(t)$ определен тождеством $(A(t)v, w)_{L_2(\Omega)} = a(t, v, w)$ (см. п. 8.2).

Покажем, что данная эволюционная задача является формулировкой задачи типа Коши – Неймана

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_j}) + c(x,t)u + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \\ u(x,0) &= u_0(x), \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial N_A} &= 0, \quad (x,t) \in S_T, \end{aligned} \quad (8.25)$$

где $\partial/\partial N_A$ – кономальная (трансверсальная) по отношению к оператору

$$A(x,t,D_x) = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}) \text{ производная, т.е. } \frac{\partial}{\partial N_A} = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \cos(x_j, \nu) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \nu \text{ – поле}$$

внешних единичных нормалей к $\partial\Omega$.

В частности, при ν – поле внешних единичных нормалей к $\partial\Omega$ $a_{ij}(x,t) = \delta_{ij}$ (символ Кронекера) при $x,t \in \bar{Q}_T$ выполняется равенство $\frac{\partial u}{\partial N_A} = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$

(обычное условие Неймана).

Пусть $f \in C^\infty(\bar{Q}_T)$, $u_0 \in C^\infty(\bar{\Omega})$ и функция $u \in C^\infty(\bar{Q}_T)$ является (классическим) решением задачи (8.25). Умножим обе части уравнения в (8.25) на произвольную функцию $v \in C_0^\infty(\Omega)$ и проинтегрируем обе части полученного равенства по области Ω . Применяя далее формулу интегрирования по частям, получим тождество

$$\int_{\Omega} u_t v dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial N_A} v dS - a(t,u,v) + \int_{\Omega} f v dx \quad \text{при всех } v \in C_0^\infty(\Omega) \text{ и } t \in [0,T]. \quad (8.26)$$

Это тождество равносильно в слабом смысле уравнению вида (8.1), где оператор $A(t) \in L(H^1(\Omega), (H^1(\Omega))')$ и определен тождеством $(A(t)v, w)_{L_2(\Omega)} = a(t,v,w)$ при $v, w \in C_0^\infty(\Omega)$, $t \in [0,T]$. При этом $u \in L_2(0,T; H^1(\Omega)) \cap C^0(0,T; L_2(\Omega))$ (см. подробнее в [19], с. 276).

При тех же предположениях на функции f, u_0 и u из интегрального тождества (8.26), проводя обратные рассуждения и применяя основную лемму вариационного исчисления, легко получить условия (8.25) на функцию u (задача 8.10). Таким образом, смешанная задача (8.25) допускает вариационную формулировку с помощью формы (8.24).

Приведем также два *отрицательных примера* однородных задач вида (8.2), для которых *не* существует вариационной формулировки. Пусть,

$$A(x, t, D_x)u = \Delta^2 u + u \text{ в } Q_T, \\ B_1(x, t, D_x)u = u, \quad B_2(x, t, D_x)u = \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} \text{ на } S_T, \quad (8.27)$$

где Δ – оператор Лапласа по переменным x , ν – внешняя единичная нормаль к $\partial\Omega$.

Можно доказать, что для задачи (8.2) с приведенными операторами A, B_1 и B_2 *не существует* вариационной формулировки даже без условия коэрцитивности (8.5) (см. [19], п. 9.4). В то же время эта задача является параболической в смысле определения 8.2 (задача 8.12).

Во втором примере смешанная задача сводится к вариационной, но последняя *не является коэрцитивной*. Пусть

$$A(x, t, D_x)u = \Delta^2 u + u \text{ в } Q_T, \\ B_1(x, t, D_x)u = u, \quad B_2(x, t, D_x)u = \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} \text{ на } S_T, \quad (8.28)$$

где Δ и ν – те же, что и в предыдущем примере. Легко проверить, что однородная задача (8.2) с данными операторами A, B_1 и B_2 допускает вариационную формулировку без условия коэрцитивности, если в качестве соответствующей формы $a(t, v, w)$ взять

$$a(t, v, w) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_j^2} dx, \quad v, w \in H^2(\Omega). \quad (8.29)$$

Легко проверить, что форма $a(t, v, w)$ не удовлетворяет условию коэрцитивности (8.5) (задача 8.13).

После приведенных пояснений и примеров достаточно естественным становится следующее определение.

Определение 8.5. Пусть V – некоторое замкнутое подпространство пространства $H^\mu(\Omega)$, удовлетворяющее условию $H^{\circ\mu}(\Omega) \subset V$, $f \in L_2(Q_T) \subset L_2(0, T, V')$, $u_0 \in L_2(\Omega)$. Тогда задачу нахождения функции $u \in L_2(0, T, V)$, яв-

ляющейся при $H = L_2(\Omega)$ решением эволюционной задачи (8.1), (8.9), определяемой семейством билинейных форм (8.23), назовем *обобщенной начально-краевой (смешанной) задачей относительно пространства V* для параболического уравнения (8.21).

В случае, когда обобщенная смешанная задача для уравнения (8.21) формально эквивалентна задаче вида (8.2), решение обобщенной задачи будем называть *обобщенным (слабым) решением* соответствующей задачи (8.2) (при $f \in L_2(Q_T)$, $u_0 \in L_2(\Omega)$).

Замечание 8.2. Очевидно, что условие $a_{\alpha\beta} \in C^\infty(\bar{Q}_T)$ в определении 8.5 можно ослабить до условия $a_{\alpha\beta} \in L_\infty(Q_T)$ при всех α, β . Поэтому далее будем предполагать выполненным в этом определении последнее условие.

Замечание 8.3. Отметим, что имеются и другие определения и методы исследования обобщенных (и классических) решений общих краевых задач для линейных (и нелинейных) параболических уравнений и систем произвольных порядков (см., в частности, такие фундаментальные источники, как [2], [6], [17], [19], [30]). Например, в работе [2] для *смешанных параболических задач* (см. определение 8.2) доказана их однозначная разрешимость в анизотропных пространствах Соболева – Слободецкого. При этом использовалось *преобразование Лапласа* по t и его обращение. Для обоснования в этой ситуации формулы обращения и потребовалось условие эллиптичности с параметром соответствующей вспомогательной задачи (см. определение 8.1).

В п.8.5 кратко изложен ещё один хорошо известный метод исследования краевых задач для параболических уравнений и систем произвольного порядка, использующий *теорию полугрупп*. Заметим также, что имеется определенная близость многих функциональных методов исследования общих краевых задач для параболических уравнений.

Теорема 8.3. Пусть $f \in L_2(Q_T)$, $u_0 \in L_2(\Omega)$, $H = L_2(\Omega)$, V – замкнутое подпространство в $H^m(\Omega)$, $\overset{\circ}{H}^m(\Omega) \subset V$, $a_{\alpha\beta} \in L_\infty(\Omega)$ при всех α, β и семейство билинейных форм (8.23) удовлетворяет условиям (8.4), (8.5). Тогда обобщенная смешанная задача относительно V для уравнения (8.21) имеет единственное решение, которое непрерывно зависит от исходных данных f и u_0 .

Доказательство непосредственно следует из теоремы 8.2. \square

Следствие 8.1. Пусть однородная задача (8.2) имеет формально эквивалентную вариационную формулировку на заданном подпространстве V в $H^m(\Omega)$, где $\overset{\circ}{H}^m(\Omega) \subset V$, а семейство форм (8.23) удовлетворяет условиям (8.4), (8.5) при $H = L_2(\Omega)$. Тогда смешанная задача (8.2) имеет единственное обобщенное (*слабое*) решение, которое непрерывно зависит от исходных данных f и u_0 .

Доказательство получается сразу из теоремы 8.3. \square

Приведем теперь два простых примера обобщенных смешанных задач для уравнения вида (8.21), “классические” аналоги которых *существенно отличаются от задач вида* (8.2). Это отличие связано с разрывностью коэффициентов $a_{\alpha\beta}$ формы $a(t, v, w)$ или с выбором допустимого пространства V для этой формы.

Пример 8.2. Пусть Ω – область в \mathbf{R}^n с гладкой границей $\partial\Omega$, а Γ_1 есть часть $\partial\Omega$ и является гладкой поверхностью (многообразием размерности $n-1$ с краем), $\Gamma_2 = \partial\Omega \setminus \Gamma_1$. Пусть $H = L_2(\Omega)$, $V = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ на } \Gamma_1\}$ (т.е. $\gamma_1 v = 0$, где $\gamma_1 : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma_1)$ – оператор следа на Γ_1), $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $T > 0$. Рассмотрим на $V \times V$ семейство форм (8.24) с указанными сразу после формулы (8.24) условиями на a_{ij}, c (с заменой условия $a_{ij}, c \in C^\infty(\bar{Q}_T)$ на

условие $a_{ij}, c \in L_2(Q_T)$ в соответствии с замечанием 8.2) и дополнительным условием $c(x,t) \geq m > 0$ при п.в. $(x,t) \in Q_T$, где $m = \text{const} > 0$.

Легко проверить, используя теорему 8.1, что обобщенная смешанная задача относительно V для уравнения в (8.25) при указанных условиях однозначно разрешима и её решение u непрерывно зависит от $f \in L_2(Q_T)$ и $u_0 \in L_2(\Omega)$. При этом формально (т.е. при условии C^∞ -гладкости u_0 на Ω и функций a_{ij}, c, f, u на \bar{Q}_T) данная обобщенная задача эквивалентна задаче

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_j}) + c(x,t)u + f(f,t) \text{ в } Q_T, \quad u(x,0) = u_0(x) \text{ на } \Omega,$$

$$u(x,t) = 0 \text{ на } \Gamma_1 \times (0,T), \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial N_A} = 0 \text{ на } \Gamma_2 \times (0,T), \quad (8.30)$$

где $\frac{\partial}{\partial N_A} = -\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \cos(x_j, \nu) \frac{\partial}{\partial x_i}$ – соответствующая кономальная производная (задача 8.14). Обобщенное (слабое) решение u здесь принадлежит пространству $L_2(0,T;V)$, где $V = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ на } \Gamma_1\}$ и удовлетворяет уравнению (8.28) в смысле распределений в Q_T (см. подробнее [19], с. 280).

Пример 8.3. Пусть Ω и Q_T – те же области, что и в предыдущем примере, Q_T^1 и Q_T^2 – две точки, на которые разделена область Q_T (так что $\bar{Q}_T = \bar{Q}_T^1 \cup \bar{Q}_T^2$), а коэффициенты формы в (8.24) и функция f – гладкие в \bar{Q}_T^1 и \bar{Q}_T^2 в отдельности и $u_0 \in C^\infty(\bar{\Omega})$ (для простоты). Тогда при выполнении условия равномерной параболичности на \bar{Q}_T коэффициентов $a_{ij}(x,t)$ и неотрицательности $c(x,t)$ на \bar{Q}_T обобщенная смешанная задача относительно $\dot{H}^1(\Omega)$ для уравнения в (8.25) по теореме 8.1 корректно разрешима. При этом обобщенная задача формально при дополнительном условии, что $u \in C^\infty(\bar{Q}_T^1) \cap C^\infty(\bar{Q}_T^2)$, эквивалентна задаче

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_j}) + c(x,t)u + f(f,t) \text{ в } Q_T^1 \cup Q_T^2,$$

$$u(x,0) = u_0(x) \text{ в } \Omega, \quad u(x,t) = 0 \text{ на } \partial\Omega \times (0,T), \quad (8.31)$$

$$[u](x,t) = 0 \text{ на } \Gamma, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial N_A} \right](x,t) = 0 \text{ на } \Gamma.$$

Здесь $\Gamma = \bar{Q}_T^1 \cap \bar{Q}_T^2$ – поверхность раздела областей Q_T^1 и Q_T^2 , а $\partial/\partial N_A$ – соответствующая коэффициентам a_{ij} кономальная производная, а символ $[v]$ означает скачок, который испытывает функция $v \in C^\infty(\bar{Q}_T^1) \cap C^\infty(\bar{Q}_T^2)$ при переходе через поверхность Γ из Q_T^1 в Q_T^2 , т. е.

$$[v](x^0, t^0) = \lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (x^0, t^0), \\ (x,t) \in Q_T^1}} v(x,t) - \lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (x^0, t^0), \\ (x,t) \in Q_T^2}} v(x,t) \text{ при } (x^0, t^0) \in \Gamma$$

(см. задачу 8.15).

Замечание 8.4. Задачи, аналогичные (8.31), называются задачами *дифракции* ([17], глава 3, § 13) или *трансмиссии* ([19], с. 238) и для уравнений *второго* порядка подробно исследованы в [17].

Замечание 8.5. Подводя итог изложенного выше, можно сказать, что существенная часть смешанных задач вида (8.2) (с оператором $A(x,t, D_x)$ в дивергентной форме $D(A)$) имеет формально эквивалентную обобщенную (вариационную) постановку (точнее см. [19]). В то же время, как показывают, в частности, примеры, есть задачи вида (8.2) и обобщенные смешанные задачи для параболических уравнений, не имеющие соответствующих формально эквивалентных аналогов.

Замечание 8.6. При некоторых дополнительных условиях смешанные задачи вида (8.2), как и обобщенные смешанные задачи для параболических уравнений, могут быть решены *методом разделения переменных (методом Фурье)* (см., например, [13], глава 5, п. 5.10 или [28], часть I, п. 8).

8.4. О РЕГУЛЯРНОСТИ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ

Заметим прежде всего, что при исследовании вопроса о гладкости решения смешанной задачи (8.2) необходимо выполнение условий согласования заданных функций f , φ и g_1, \dots, g_μ . Эти условия означают непротиворечивость в задаче (8.2) уравнения, начальных и краевых условий в точках стыковки боковой поверхности цилиндра \bar{Q}_T и его нижнего основания, т.е. в точках множества $\Gamma_0 = \{(x, 0) : x \in \partial\Omega\}$.

Поясним это подробнее сначала на примере однородной первой начальной краевой задачи вида (8.2) (т.е. при $B_j u = \partial^{j-1} u / \partial \nu^{j-1} = 0$, $j = 1, \dots, \mu$) с начальной функцией $\varphi(x) = 0$ на Ω . Пусть $u(x, t)$ – достаточно гладкое на \bar{Q}_T решение этой задачи (т.е. $u \in C^N(\bar{Q}_T)$ при достаточно большом N , где $f \in C^{N-m}(\bar{Q}_T)$, $N \geq m$). Тогда уравнение в (8.2) удовлетворяется по непрерывности в точках множества Γ_0 . Следовательно, используя нулевые начальные и краевые условия, получим тождества $f(x, 0) = 0$ при $x \in \partial\Omega$. Далее, дифференцируя последовательно уравнение в (8.2) и снова используя нулевые начальные и краевые условия задачи (8.2), получим тождества $D_i^j D_x^\gamma f(x, 0) = 0$ при $i = 0, 1, \dots, N_0$, $|\gamma| \leq N_0$ (где N_0 зависит от N). Эти тождества и являются в данном случае необходимыми условиями согласования.

В случае, когда в задаче (8.2), например, $f(x, t) = 0$ при $(x, t) \in \bar{Q}_T$ и $b_{j\beta}(x, t) = b_{j\beta}(x)$ при всех $Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t) - I}{t} x$ (т.е. $b_{j\beta}$ не зависят от t), $\varphi \in C^N(\bar{\Omega})$, $g_j \in C^N(\bar{Q}_T)$ при $j = 1, \dots, \mu$ и при достаточно большом N , самое простое условие согласования очевидно имеет вид тождества $g_j(x, 0) = (B_j \varphi)(x, 0)$ при всех $x \in \partial\Omega$, $j = 1, \dots, \mu$. Используя уравнение в (8.2), получаем следующие

условия согласования
$$\frac{\partial g_j(x, 0)}{\partial t} = (B_j A \varphi)(x, 0) \quad \text{при всех } x \in \partial\Omega, \quad j = 1, \dots, \mu.$$

Дальнейшие условия согласования получаются дифференцированием два

раза по t краевых условий с последующей подстановкой $t=0$ и заменой производной решения u по t в силу уравнения через производные по x , а после – заменой u на φ . В частности, если $A=A(x, D_x)$ (т.е. не зависит от t), то получим ($B_j(x, D_x)$ также не зависит от t)

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(B_j u) = B_j \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = B_j \frac{\partial}{\partial t}(Au) = B_j A^2 u = B_j A^2 \varphi \quad \text{при } x \in \partial\Omega, \quad t=0.$$

Повторяя указанные действия, будем получать следующие необходимые условия согласования, количество которых зависит от показателя N гладкости этих функций. В случае $N=\infty$ получаем счетное множество условий согласования.

Теорема 8.4. Пусть задача (8.2) является параболической, $f \in C^\infty(\bar{Q}_T)$, $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $g_j \in C^\infty(\bar{S}_T)$ при $j=1, \dots, \mu$ и выполнены все условия согласования. Тогда существует единственное решение $u \in C^\infty(\bar{Q}_T)$ этой задачи.

Доказательство достаточно сложное и приведено в [2]. При этом для доказательства существования (и единственности) решения u , как уже отмечалось выше, использовалось преобразование Лапласа. Регулярность u получается из априорной оценки с нормами в некоторых анизотропных пространствах Соболева – Слободецкого в теореме 7.5 для эллиптических краевых задач.

Аналогичный результат получен в [17, глава УП, § 10], *методом потенциалов*.

Если задача (8.2) формально эквивалентна эволюционной задаче (см. п.8.3), то для её обобщенного решения (однозначно определенного по теореме 8.1) также выполняются априорные оценки, аналогичные оценке 2) в теореме 7.5. Это следует из соответствующих оценок в [2] или [17]. Используя эти оценки, получим, что $u \in H^s(Q_T)$ при всех $s \geq m$, если $f \in C^\infty(\bar{Q}_T)$, $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $g_j \in C^\infty(\bar{S}_T)$ при $j=1, \dots, \mu$. Следовательно, по теореме Соболева сразу получаем включение $u \in C^\infty(\bar{Q}_T)$.

Доказательство существования и единственности *однородной первой смешанной задачи* для равномерно параболического (по Петровскому) уравнения “обобщенного решения” (т.е. решения эволюционного уравнения вида (8.1) с *неограниченным* оператором $A(t): H \rightarrow H$) а также его *регулярность* доказываются в [30, глава X, §§ 6,7] применением пространств вида $W^k(0, T; V)$, где $k \in \mathbb{N}$ и $V = H^p(\Omega)$, аналогичных пространству $W^1(0, T; V)$ (см. п. 8.2).

Замечание 8.7. При нахождении решений задачи (8.2) *конечной* гладкости (в подходящих пространствах Соболева – Слободецкого) *достаточно* выполнения лишь условий согласования *минимального порядка*, т.е. тех которые *необходимы* для существования решения из рассматриваемого пространства (см. [17], глава УП, § 10).

8.5. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ПОЛУГРУПП

Полугруппы операторов естественно возникают в теории дифференциальных уравнений в частных производных, а также в других разделах математики (см., например, [16], глава УШ, [14], [22], глава IX, [17], глава X). Наиболее активно теория полугрупп операторов применяется для доказательства корректности начальных и смешанных задач широких классов параболических и гиперболических уравнений и систем уравнений в частных производных. В этом пункте мы кратко рассмотрим применение теории полугрупп для обоснования корректности *первой смешанной задачи* для *сильно параболических* уравнений.

Общая идея в теории полугрупп операторов очень проста и состоит в рассмотрении “экспонент” $T(t) = e^{tA}$ операторов A некоторого класса. Формально с помощью “экспоненты” e^{tA} эволюционная задача

$$\frac{du}{dt} = Au, \quad u(0) = u_0 \tag{8.32}$$

легко решается по формуле $u(t) = e^{tA}u_0$.

Однако обоснование этого плана в случае *неограниченных операторов* A представляет собой уже непростую задачу, решаемую теорией полугрупп. При этом заметим, что к уравнениям вида (8.32) с *неограниченным* оператором A как раз и сводятся указанные выше задачи для уравнений с частными производными. Кроме того, возникает нетривиальная задача обоснования применимости абстрактной теории групп в конкретных приложениях.

Перейдем к точным формулировкам.

Определение 8.6. Семейство линейных ограниченных операторов $\{T(t), 0 \leq t < \infty\}$ на банаховом пространстве X называется *сильно непрерывной полугруппой*, если

- 1) $T(0) = I$ (I – тождественный оператор);
- 2) $T(s)T(t) = T(s+t)$ при всех $s, t \in \bar{\mathbf{R}}_+^1$;
- 3) функция $t \rightarrow T(t)x$ является непрерывной на $[0, \infty)$ для любого $x \in X$.

Условия 1), 2) определяют полугрупповые свойства семейства $T(t)$, а условие 3) – сильную непрерывность.

Определение 8.7. Пусть $\{T(t), t \geq 0\}$ – сильно непрерывная полугруппа ограниченных операторов в банаховом пространстве X . Линейный оператор $A: X \rightarrow X$, определяемый по формуле

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{T(t) - I}{t} x \quad (8.33)$$

с областью определения $D(A)$, совпадающей с теми x , для которых предел в (8.31) существует, называется *инфинитезимальным производящим оператором* полугруппы $T(t)$.

Лемма 8.1. Множество $D(A)$ – линейное (не замкнутое) подпространство плотное в X , а оператор A замкнут.

Доказательство имеется в указанных выше книгах.

Пример 8.4. Пусть выполнены условия теоремы 8.2, но оператор $A(t) = A_0$ (т.е. форма $a(v, w)$ не зависит от t), и пусть в уравнении (8.1) $f = 0$. Тогда по теореме 8.2 задача

$$\frac{du}{dt} + A_0 u = 0, \quad u(0) = u_0 \quad (8.34)$$

корректно поставлена, т.е. существует и единственно её решение $u(t) \in W^1(0, t_1)$, непрерывно зависящее от $u_0 \in H$.

Определим семейство операторов $\{T(t), t \geq 0\}$ в пространстве H по формуле $T(t)u_0 = u(t)$, $u_0 \in H$. Легко проверить, что семейство будет сильно непрерывной полугруппой операторов, а её инфинитезимальный производящий оператор $A_1 : H \rightarrow H$ однозначно определяется тождеством

$$(A_1 v, w)_H = a(v, w) \text{ при всех } v \in V.$$

Заметим при этом, что оператор $A_1 : H \rightarrow H$, вообще говоря, неограниченный в отличие от оператора $A \in L(V, V')$, но $A_1 v = -A_0 v$, если $A_0 v \in H$ (задача 8.16).

Теорема 8.5 (Хилле – Иосиды). Необходимое и достаточное условие того, что замкнутый оператор A в банаховом пространстве X с плотной в X областью определения является инфинитезимальным оператором сильно непрерывной полугруппы операторов состоит в следующем:

существуют такие положительные числа M и ω ,

что при всех вещественных $\lambda > \omega$ определен оператор

$$(\lambda I - A)^{-1} \in L(X, X) \text{ и } \|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq M(\lambda - \omega)^{-n} \text{ при } \lambda > \omega.$$

При этом $\|T(t)\| \leq M e^{\omega t}$.

Доказательство этой теоремы можно найти в литературе, указанной в начале этого пункта.

Определение 8.8. Пусть $A : X \rightarrow X$ – линейный замкнутый оператор с плотной в X областью определения $D(A)$. Под задачей Коши (началь-

ной задачей) (8.32) на отрезке $[0, T]$, где $t > 0$, $u_0 \in D(A)$ будем понимать задачу о нахождении такой функции $u: [0, t_1] \rightarrow X$, что

- 1) $u(t) \in D(A)$ при $t \in [0, t_1]$;
- 2) при всех $t \in [0, t_1]$ существует *сильная* производная

$$u'(t) = \lim_{\square t \rightarrow \infty} \frac{u(t + \square t) - u(t)}{\square t}$$

(и, следовательно, функция $u(t)$ непрерывна на $t \in [0, t_1]$);

- 3) при всех $t \in [0, t_1]$ выполняется равенство $u'(t) = Au(t)$;
- 4) $u(0) = u_0$.

Определение 8.9. Задача Коши (8.32) поставлена *равномерно корректно*, если

- 1) для любого $u_0 \in D(A)$ существует и единственно её решение на каждом отрезке $[0, t_1]$;
- 2) если $u_n(0) \rightarrow 0$, то $u_n(t) \rightarrow 0$ равномерно по t на каждом отрезке $[0, t_1]$.

Некоторое усиление условия теоремы Хилле – Йосиды дает следующий критерий равномерной корректности задачи вида (8.32)

Теорема 8.6 ([16], глава 1, теорема 2.10). Задача Коши (8.32) (с замкнутым оператором A , имеющим плотную область определения $D(A)$ в X) поставлена равномерно корректно тогда и только тогда, когда для некоторых чисел M и ω при $\operatorname{Re} \lambda > \omega$ существует резольвента $(\lambda I - A)^{-1} \in L(X, X)$

и выполняются оценки $\|(\lambda I - A)^{-n}\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re} \lambda - \omega)^n}$ при $\operatorname{Re} \lambda > \omega$, $n = 1, 2, \dots$

Замечание 8.8. Для выполнения условия (8.34) очевидно достаточно выполнение неравенства

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda - \omega} \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} \lambda > \omega, \quad (8.35)$$

которое проверять легче, чем условие (8.32).

Следствие 8.2. Задача (8.32) (с замкнутым оператором A) поставлена равномерно корректно в том и только том случае, когда оператор A является инфинитезимальным производящим оператором некоторой сильно непрерывной полугруппы операторов.

Доказательство. Необходимость сразу следует из теорем 8.4 и 8.3.

Докажем достаточность. Пусть A – инфинитезимальный производящий оператор сильно непрерывной полугруппы $T(t)$, $t \geq 0$. При любом $u_0 \in D(A)$ положим $u(t) = T(t)u_0$. Тогда по определению оператора A функция $u(t)$ является решением задачи (8.32), а в силу оценки $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ (см. теорему 8.3) функция $u(t)$ равномерно непрерывна на любом отрезке $[0, t_1]$ зависит от u_0 . Доказательство единственности построения решения $u(t)$ легко получается с помощью преобразования Лапласа (функций на $[0, \infty)$ со значениями в X) и теоремы Хилле – Йосиды (см. [16], с. 63). \square

Рассмотрим теперь одно из приложений приведенных абстрактных понятий и утверждений.

Теорема 8.7. Пусть $\tilde{A}(x, D_x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$ – дифференциальный оператор порядка $m = 2\mu$ с вещественными коэффициентами $a_\alpha \in C^\infty(\bar{\Omega})$, где Ω – ограниченная область в \mathbf{R}^n с гладкой границей, удовлетворяющей условию сильной эллиптичности $(-1)^\mu \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \xi^\alpha < 0$ при $x \in \bar{\Omega}$, $\xi \in \mathbf{R}^n$. Пусть, далее,

A – замыкание в $L_2(\Omega)$ оператора A_0 с областью определения

$$D(A_0) = \{v \in C^\infty(\bar{\Omega}) : \partial^j v / \partial \nu^j = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad j = 0, 1, \dots, \mu - 1\},$$

(ν – единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega$) и действующего по формуле

$A_0 v = \tilde{A}v$. Тогда:

- 1) оператор A порождает сильно непрерывную полугруппу $T(t)$, $t \geq 0$ в $L_2(\Omega)$ и для $u_0 \in L_2(\Omega)$ функция $u(x, t) = (T(t)u_0)(x)$ аналитична при $t > 0$ и бесконечно дифференцируема при $x \in \bar{\Omega}$,

- 2) задача (8.32) с данным оператором A поставлена равномерно корректно (в $D(A)$).
- 3) $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \tilde{A}(x, D_x)u(x,t)$ при $x \in \Omega$, $t > 0$.

Доказательство. При данных условиях оператор A удовлетворяет оценке вида (8.33) (см. [16], с. 208). Из этой оценки, теоремы 8.4 и следствия 8.2 сразу следует равномерная корректность постановки задачи (8.30) и существование сильно непрерывной полугруппы, для которой оператор A является инфинитезимальным производящим оператором.

Из сильной эллиптичности оператора $\tilde{A}(x, D_x)$ следует и аналитичность полугруппы $T(t)$, а с ней и функции $u(x,t)$ при $t > 0$ (см. [16], глава I, § 4). Бесконечная дифференцируемость по $x \in \bar{\Omega}$ функции $u(x,t)$ при $t > 0$ доказана в [10], глава XIV, § 8. Тождество 3) является непосредственным следствием гладкости функции $u(x,t)$ и её определения. \square

Замечание 8.9. Для более общих краевых условий в случае параболичности (см. п.8.1) однородной смешанной задачи (8.2) с $f = 0$ в [16, стр. 209] утверждается равномерная корректность соответствующей эволюционной задачи вида (8.32) и аналитичность (при $t > 0$) её решения.

Замечание 8.10. Принцип Дюамеля позволяет легко решить задачу Коши для неоднородного эволюционного уравнения

$$\frac{du}{dt} = Au(t) + f(t), \quad u(0) = u_0. \quad (8.36)$$

Если задача Коши (8.32) равномерно корректно поставлена (см. теорему 8.6), функции $f(t)$ и $Af(t)$ непрерывны при $t \in [0, t_1]$, то (см. теорему 6.5 главы I в [16]) для любого $u_0 \in D(A)$ существует единственное решение $u \in C^1([0, t_1], X)$ задачи (8.33), определяемое по формуле

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds.$$

Здесь использован интеграл Римана от непрерывных при $t \in [0, t_1]$ функций со значениями в банаховом пространстве X .

ЗАДАЧИ

- 8.1. Проверить условие эллиптичности с параметром задач Дирихле и Неймана для оператора Лапласа в ограниченной области Ω , если в качестве Λ взять угол, не содержащий луча $(-\infty,]$ (см. определение 8.1).
- 8.2. Показать, что первая и вторая смешанные задачи для уравнения теплопроводности являются *параболическими* (см. примеры 8.1, 8.2 и определение 8.2).
- 8.3. Показать, что классическое решение $u \in C(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$ первой смешанной задачи $u_t = \Delta u$ при $(x, t) \in \Omega \times (0, T)$, $u(x, 0) = \varphi(x)$ при $x \in \Omega$, $u(x, t) = 0$ при $(x, t) \in \partial\Omega \times (0, T)$ является обобщенным (слабым) решением этой задачи (см. определение 8.5), если Ω – ограниченная область с гладкой границей.
- 8.4. Найти вещественные числа b_1 и b_2 , для которых является параболической смешанная задача с *косой производной*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u \quad \text{в } Q_T = \{(x, t) : x \in \mathbf{R}_+^2, 0 < t < T\},$$

$$u(x, 0) = 0, \quad b_1 \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_2} = g(x_1, t) \quad \text{при } x = (x_1, 0), \quad 0 < t < T.$$

Ответ. $b_2 \neq 0$.

- 8.5. Проверить, что пространство $W^1(0, T)$ (см. п. 8.2) является гильбертовым.

- 8.6. Доказать, что любой оператор $A(x, t, D_x)$, $A(x, t, D_x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x, t) D_x^\alpha$, можно записать в *дивергентной форме* (8.20), если $a_\alpha \in C^\infty(\bar{Q}_T)$ при $|\alpha| \leq m$.
- 8.7. Проверить условие (8.4) для билинейной формы (8.23), определенной на любом замкнутом подпространстве V в $H^\mu(\Omega)$.
- 8.8. Пусть $u \in C^\infty(\bar{Q}_T)$. Тогда $u(x, t)$ – классическое решение первой смешанной задачи для уравнения (8.21) (при $g_j = 0$) в том и только в том случае, когда функция $t \rightarrow u(\cdot, t)$ является решением соответствующей эволюционной задачи.
- 8.9. Доказать, что пространство $V = \{v \in H^\mu(\Omega) : \gamma B_j v = 0, j = 1, \dots, \mu\}$ для любых дифференциальных операторов B_j порядков, *меньших* μ , является замкнутым в $H^\mu(\Omega)$.
- 8.10. При $f \in C^\infty(\bar{Q}_T)$, $u_0 \in C^\infty(\bar{\Omega})$ и $u \in C^\infty(\bar{Q}_T)$ вывести из интегрального тождества (8.26) условие (8.25).
- 8.11. Пусть X, Y и Z – банаховы пространства и $B: X \times Y \rightarrow Z$ – билинейное отображение. Доказать, что непрерывность отображения B на $X \times Y$ эквивалентна его *ограниченности*, т.е. условию $\|B(x, y)\|_Z \leq M \|x\|_X \|y\|_Y$ при всех $x \in X, y \in Y$, где $M > 0$.
- 8.12. Доказать параболичность задачи вида (8.2) с оператором (8.28).
Указание. С помощью локальной системы координат свести к случаю, когда $\Omega = \mathbf{R}_+$.
- 8.13. Проверить, что задача (8.2) с операторами (8.29) формально равносильна эволюционной задаче, определяемой формой (8.31), но эта форма *не* удовлетворяет условию (8.5).
- 8.14. Доказать формальную эквивалентность двух приведенных в примере 8.3 задач и корректную разрешимость первой из них.

- 8.15. Используя формулу интегрирования по частям, проверить формальную эквивалентность двух задач в примере 8.3 и корректную разрешимость первой из них.
- 8.16. Доказать, что семейство операторов $T(t)$, $t \geq 0$, в примере 8.4 является сильно непрерывной полугруппой и определить её инфинитезимальный производящий оператор $-A_1$. *Указание.* Рассмотреть билинейную форму $a(v, w)$ при фиксированном v как линейный непрерывный функционал (от w) на H и использовать теорему Рисса.
- 8.17. Доказать, что замыкание $A: L_2(\mathbf{R}^n) \rightarrow L_2(\mathbf{R}^n)$ оператора

$$\Delta: L_2(\mathbf{R}^n) \rightarrow L_2(\mathbf{R}^n), \quad D(\Delta) = S(\mathbf{R}^n), \quad \Delta v(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}$$

будет инфинитезимальным производящим оператором некоторой полугруппы $T(t)$. Проверить, что при этом функция $u(x, t) = T(t)u_0$ будет слабым решением уравнения теплопроводности $u_t = \Delta u$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. – М.: Мир, 1962. – 205 с.
2. *Агранович М.С., Вишик М.И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида. Успехи математических наук, 1964, т.19, № 3, с.53 – 161.
3. *Безяев В.И.* Пространства Соболева и их приложения. – М.: РУДН, 2007. – 83 с.
4. *Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. – М.: Наука, 1975, – 480 с.
5. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. 5-е изд., доп. – М.: Наука, 1988. – 512 с.
6. *Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336с.
7. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. – М.: Физматгиз, 1958. – 439 с. (Обобщенные функции. Вып. 1).
8. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. – М.: Наука, 1989.– 464 с.
9. *Данфорд Н., Шварц Дж.Т.* Линейные операторы. Общая теория. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 896с.
10. *Данфорд Н., Шварц Дж.Т.* Линейные операторы. Спектральная теория. – М.: Мир, 1966.– 1064 с.
11. *Егоров Ю.В.* Лекции по уравнениям с частными производными. Дополнительные главы. – М.: Изд-во МГУ, 1985. – 164 с.
12. *Егоров Ю.В.* Линейные дифференциальные уравнения главного типа. – М.: Наука, 1984. – 360 с.

13. *Егоров Ю.В., Шубин М.А.* Линейные дифференциальные уравнения с частными производными. Основы классической теории.–М.: ВИНТИ, 1988.–262 с. (Совр. пробл. математики. Фундам. направл. Т.30).
14. *Иосида К.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
15. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – 3-е изд., перераб. – М.: Наука, 1972. – 496 с.
16. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967. – 464 с.
17. *Ладыженская О. Л., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 730 с.
18. *Лоинс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М.: Мир, 1972. – 415 с.
19. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971. – 371 с.
20. *Мазья В.Г.* Пространства С.Л. Соболева. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. – 415 с.
21. *Панич О.И.* Введение в общую теорию эллиптических краевых задач. – Киев, Вища школа, 1986. – 128 с.
22. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики.– Т.2: Гармонический анализ. Самосопряженность. – М.: Мир, 1978.– 395 с.
23. *Рудин У.* Функциональный анализ. – 2-е изд., испр. и доп. – СПб.: Изд-во «Лань», 2005. – 448 с.
24. *Скубачевский А.Л., Безяев В.И.* Функциональные пространства в задачах математической физики. – М.: Изд-во МАИ, 1992. – 80 с.
25. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. 2-е изд., испр. – М.: Наука, Физматлит, 1993. – 440 с.

26. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. – М.: Мир, 1980. – 664 с.
27. *Трибель Х.* Теория функциональных пространств. – М.: Мир, 1986. – 448 с.
28. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. – М.: Мир, 1974. – 160 с.
29. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 1985. – 224 с.
30. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968. – 427 с.
31. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: в 4 т. – М.: Мир 1986–1988; т. 1, 1986. – 462 с., т. 2, 1986. – 455 с., т. 3, 1987. – 694 с., т. 4, 1988. – 466 с.
32. *Хёрмандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. – М.: Мир, 1965. – 379 с.
33. *Шилов Г.Е.* Математический анализ: Второй специальный курс. – 2-е изд., перераб. – Изд-во МГУ, 1984. – 207 с.
34. *Шубин М.А.* Лекции об уравнениях математической физики. – М.: МЦНМО, 2001. – 302 с.
35. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 443 с.

ОПИСАНИЕ КУРСА И ПРОГРАММА

Цели и задачи курса

- представленный в курсе материал относится к области дифференциальных уравнений (математика)
- в курсе дается введение в теорию эллиптических дифференциальных операторов в R^n произвольных порядков, общую теорию эллиптических краевых задач и теорию краевых задач для параболических уравнений
- курс предназначен для бакалаврской программы обучения
- рекомендуется в качестве спецкурса по выбору для студентов физико-математических факультетов университетов и вузов, обучающихся по направлению «Математика»
- курс носит теоретический характер
- курс рассчитан на 144 часа учебной нагрузки (один семестр, 4 кредита), из которых 36 часов отводится на лекции, 36 – на практические занятия, 72 часа на самостоятельную работу студентов.

Иновационность курса

- представленный в курсе материал отражает современные достижения в теории дифференциальных уравнений, многие из которых до настоящего времени не были представлены в учебной литературе
- курс готовится с учетом реализации в рамках кредитно-модульной системы
- часть аудиторных занятий и самостоятельной работы студентов проводится в компьютерных классах с целью визуализации излагаемого по курсу материала, а также проведения студентами и проверки преподавателем численных расчетов по задачам курса.

Структура курса

Тема 1. Линейные операторы

(лекции-2 часа, практические занятия - 2 часа, самостоятельная работа – 4 часа).

Линейные операторы, Компактные операторы. Фредгольмовы операторы. Необходимые и достаточные условия фредгольмовости операторов.

Тема 2. Теория распределений и пространств Соболева

(лекции – 10 часов, практические занятия – 10 часов, самостоятельная работа – 20 часов).

Линейные топологические пространства гладких функций $D(\Omega)$, $E(\Omega)$, $S(\mathbb{R}^n)$, где Ω – область в \mathbb{R}^n . Линейные топологические пространства распределений $D'(\Omega)$, $E'(\Omega)$ и $S'(\mathbb{R}^n)$. Примеры и простейшие свойства распределений. Порядок и носитель распределения. Теорема о компактности носителей распределений из $E'(\Omega)$.

Умножение распределения на гладкую функцию, производная распределения. Обобщение формулы Лейбница на произвольный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами. Свертка функций, свертка распределения с гладкой функцией. Теорема о гладкости и о носителе свертки. Усреднения распределений, их свойства.

Преобразование Фурье функций из пространства $S(\mathbb{R}^n)$, его свойства. Преобразование Фурье функций из $L_2(\mathbb{R}^n)$. Теорема Планшереля. Равенство Парсеваля. Преобразование Фурье распределений из $S'(\mathbb{R}^n)$, его свойства, примеры.

Пространства Соболева $H^k(\Omega)$, где Ω – область в \mathbb{R}^n , при целом неотрицательном k . Пространства Соболева-Слободецкого $H^s(\mathbb{R}^n)$ при $s \in \mathbb{R}$, их свойства. Эквивалентность двух определений пространства $H^s(\mathbb{R}^n)$ при целом неотрицательном s .

Теорема о плотности подпространства $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ в пространстве $H^s(\mathbb{R}^n)$.
Теорема об общем виде линейного непрерывного функционала над пространством $H^s(\mathbb{R}^n)$. Усреднения распределений из $H^s(\mathbb{R}^n)$, их свойства.

Теорема Соболева о гладкости распределения из $H^s(\mathbb{R}^n)$ при $s > 1/2$ на плоскость $x_n = 0$ и ее следствие. Теорема о продолжении распределения из $H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ при $s > 1/2$ до распределения из $H^s(\mathbb{R}^n)$ и ее следствие.

Определение пространств $H^s(\Omega)$ и $H_0^s(\Omega)$, где $s \in \mathbb{R}$, для произвольной области Ω в \mathbb{R}^n .

Теорема о компактности вложения пространства $H^{0t}(\Omega)$ в пространство $H^{0s}(\Omega)$, если $s < t$ и Ω -ограниченная область в \mathbb{R}^n .

Тема 3. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами

(лекций – 6 часов, практические занятия- 6 часов, самостоятельная работа – 12 часов)

Обобщенное решение дифференциального уравнения. Фундаментальное решение дифференциального оператора. Примеры фундаментальных решений. Теорема о существовании фундаментального решения дифференциального оператора с постоянными коэффициентами.

Общие эллиптические дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, их свойства, примеры.

Теорема о локальной гладкости решения эллиптического уравнения.

Неравенство Гординга, его следствие.

Теорема о необходимом и достаточном условии разрешимости общего эллиптического уравнения в пространствах Соболева-Слободецкого $H^s(\Omega)$.

Тема 4. Общие эллиптические краевые задачи

(лекции – 10 часов, практические занятия- 10 часов, самостоятельная работа – 20 часов).

Постановка краевой задачи для эллиптического дифференциального оператора с постоянными коэффициентами в полупространстве. Условие Лопатинского, Примеры. Понятие корректно поставленной краевой задачи в полупространстве, связь с фредгольмовостью.

Теорема о необходимости условия Лопатинского для корректности постановки краевой задачи в полупространстве для эллиптического оператора с постоянными коэффициентами.

Теорема о достаточности условия Лопатинского для корректности постановки краевой задачи в полупространстве для эллиптического оператора с постоянными коэффициентами.

Понятие параметрикса краевой задачи, связь с фредгольмовостью. Построение параметрикса краевой задачи в полупространстве для эллиптического оператора с постоянными коэффициентами.

Постановка краевой задачи для общего эллиптического дифференциального оператора с переменными коэффициентами в ограниченной области Ω из R^n . Условие Лопатинского. Теорема о существовании параметрикса для общей эллиптической краевой задачи в ограниченной области. Теорема о фредгольмовости общей эллиптической краевой задачи в ограниченной области.

Теорема о гладкости решения общей эллиптической краевой задачи в ограниченной области.

Псевдодифференциальные операторы, их свойства. Псевдодифференциальные уравнения в полупространстве. Краевые задачи для эллиптического однородного псевдодифференциального оператора в полупространстве.

Тема 5. Краевые задачи для параболических уравнений

(лекции – 8 часов, практические занятия- 8 часов, самостоятельная работа- 16 часов).

Эволюционные уравнения. Функционально-аналитическая формулировка смешанных задач для параболических уравнений. Используемые функциональные пространства и их свойства.

Теорема о существовании, единственности и непрерывной зависимости решения начальной задачи для операторного дифференциального уравнения

Теоремы о существовании и единственности решений первой и второй смешанных задач для параболического уравнения. Определение решений с помощью полугрупп.

Система контроля знаний

Включает

- промежуточный контроль в форме письменной контрольной работы
- написание реферата по выбранной студентом теме
- написание курсовой работы по выбранной студентом теме
- итоговый контроль в форме письменной итоговой работы и дополнительных устных вопросов.

Письменная контрольная работа рассчитана на одно практическое занятие на 10-11 неделе семестра. Целью работы является проверка усвоения материала первой основной части курса. В контрольную работу входят три задачи по теории распределений и пространствам Соболева, дифференциальным операторам с постоянными коэффициентами, постановке общей эллиптической краевой задачи и критерию ее корректности. Работа выполняется каждым студентом в аудитории, без использования конспектов и литературы по предмету. В группе дается не менее четырех вариантов контрольной работы. Оцениваются обоснованность метода решения, логика и

четкость рассуждений, а также правильность ответа. Точное содержание контрольной работы студентам заранее не известно. Примерные варианты контрольной работы приведены ниже.

Вариант 1.

1. Доказать, что

$$\ln |\ln |x|| \in H^1(\Omega)$$

$$\text{где } \Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1/e\}$$

2. Является ли эллиптическим дифференциальный оператор

$$2D_1^2 + 9D_2^2 + 2D_3^2 - 4D_1D_2 + 4D_2D_3 + 4D_1 + 2D_2 - 4D_3 + 1?$$

3. При каких значениях комплексных постоянных a_1, \dots, a_n краевая задача

$$P(D)u = f \text{ при } x_n > 0,$$

$$\sum_{j=1}^n a_j D_j u = g \text{ при } x_n = 0,$$

где $P(D)$ - эллиптический оператор 2-го порядка с постоянными вещественными коэффициентами, является корректно поставленной.

Вариант 2.

1. Найти преобразование Фурье обобщенной функции $e^{i|x|^2} \in S'(\mathbb{R}^2)$.

2. Доказать, что обобщенная функция

$$\xi(x, y) = \frac{1}{\pi(x + iy)}$$

является обобщенным решением оператора Коши-Римана

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

3. Удовлетворяет ли условию Лопатинского краевая задача

$$\Delta^2 u = f \text{ при } x^n > 0,$$

$$D_n u = g_1, D_n^2 u = g_2 \text{ при } x_n = 0?$$

Вариант 3.

1. Доказать, что функция $|x|^{-1/4} e^{x_1+x_3}$ принадлежит пространству $H^1(\Omega)$, где $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1\}$.

2. Найти фундаментальное решение оператора

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

обращающиеся в нуль при $y < 0$.

3. Является ли корректно поставленной краевая задача

$$\Delta^2 u = f \text{ при } x_n > 0,$$

$$u = g_1, D_n^2 u = g_2 \text{ при } x_n = 0?$$

Вариант 4.

1. Доказать, что существует такая постоянная $\underline{c} > 0$, что при всех $v \in H^1(\Omega)$ выполняется неравенство

$$\int_{\Omega} v^2 dx \leq C \left[\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \int_{\Omega} v^2 dx \right].$$

2. Проверить, что функция

$$\xi(x, t) = \frac{1}{2^a} \theta(at - |x|)$$

Является фундаментальным решением волнового уравнения \square_a .

3. Рассматривается краевая задача

$$(5D_1^2 + 5D_2^2 + 3D_3^2 + 2D_1D_2 + 2\sqrt{2}D_1D_3 + 2\sqrt{2}D_2D_3)u = f \text{ при } x_3 = 0.$$

Будет ли оператор, соответствующий данной краевой задаче, фредгольмовым?

Перечень вопросов, входящих в итоговую работу.

1. Линейные непрерывные, компактные и фредгольмовы операторы, Свойства фредгольмовых операторов.
2. Линейные топологические пространства гладких функций $D(\Omega)$, $E(\Omega)$, $S(\mathbb{R}^n)$, где Ω — область в \mathbb{R}^n .

3. Линейные топологические пространства распределений $D'(\Omega)$, $E'(\Omega)$ и $S'(R^n)$.
4. Примеры и простейшие свойства распределений. Порядок и носитель распределения. Теорема о компактности носителей распределений из $E'(\Omega)$.
5. Обобщенное решение дифференциального уравнения. Фундаментальное решение дифференциального оператора. Примеры фундаментальных решений. Теорема о существовании фундаментального решения дифференциального оператора с постоянными коэффициентами.
6. Умножение распределения на гладкую функцию, производная распределения. Обобщение формулы Лейбница на произвольный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами.
7. Свертка функций, свертка распределения с гладкой функцией. Теорема о гладкости и о носителе свертки.
8. Усреднения распределений, их свойства.
9. Преобразование Фурье функций из пространства $S(R^n)$, его свойства.
10. Преобразование Фурье функций из $L_2(\square^n)$. Теорема Планшереля. Равенство Парсеваля.
11. Преобразование Фурье распределений из $S'(R^n)$, его свойства, примеры.
12. Пространства Соболева $H^k(\Omega)$, где Ω – область в R^n , при целом неотрицательном k .
13. Пространства Соболева-Слободецкого $H^s(\square^n)$ при $s \in R$, их свойства. Эквивалентность двух определений пространства $H^s(\square^n)$ при целом неотрицательном s .

14. 13. Теорема о плотности подпространства $C_0^\infty(\square^n)$ в пространстве $H^s(\square^n)$.
15. Теорема об общем виде линейного непрерывного функционала над пространством $H^s(\square^n)$.
16. Усреднения распределений из $H^s(\square^n)$, их свойства.
17. Теорема Соболева-Слободецкого о гладкости распределения из $H^s(\square^n)$ при достаточно большом s .
18. Теорема об ограничении распределения из $H^s(\square^n)$ при $s > 1/2$ на плоскость $x_n = 0$ и ее следствие.
19. Теорема о продолжении распределения из $H^{s-1/2}(\square^{n-1})$ при $s > 1/2$ до распределения из $H^s(\square^n)$ и ее следствие.
20. Определение пространств $H^s(\Omega)$ и $\overset{0}{H}^s(\Omega)$, где $s \in \mathbb{R}$, для произвольной области Ω в \mathbb{R}^n .
21. Теорема о компактности вложения пространства $\overset{0}{H}^t(\Omega)$ в пространство $\overset{0}{H}^s(\Omega)$, если $s < t$ и где Ω – ограниченная область в \mathbb{R}^n .
22. Общие эллиптические дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, их свойства, примеры.
23. Теорема о локальной гладкости решения эллиптического уравнения.
24. Неравенство Гординга, его следствие.
25. Теорема о необходимом и достаточном условии разрешимости общего эллиптического уравнения в пространствах Соболева-Слободецкого $H^s(\Omega)$.
26. Постановка краевой задачи для эллиптического дифференциального оператора с постоянными коэффициентами в полупространстве. Условие Лопатинского, Примеры.

27. Понятие корректно поставленной краевой задачи в полупространстве, связь с фредгольмовостью.
28. Теорема о необходимости условия Лопатинского для корректности постановки краевой задачи в полупространстве для эллиптического оператора с постоянными коэффициентами.
29. Теорема о достаточности условия Лопатинского для корректности постановки краевой задачи в полупространстве для эллиптического оператора с постоянными коэффициентами.
30. Понятие параметрикса краевой задачи, связь с фредгольмовостью.
31. Построение параметрикса краевой задачи в полупространстве для эллиптического оператора с постоянными коэффициентами.
32. Постановка краевой задачи для общего эллиптического дифференциального оператора с переменными коэффициентами в ограниченной области Ω в R^n . Условие Лопатинского.
33. Теорема о существовании параметрикса для общей эллиптической краевой задачи в ограниченной области.
34. Теорема о фредгольмовости общей эллиптической краевой задачи в ограниченной области.
35. Теорема о гладкости решения общей эллиптической краевой задачи в ограниченной области.
36. Псевдодифференциальные операторы и их основные свойства.
37. Псевдодифференциальные уравнения в полупространстве.
38. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных операторов в полупространстве.
39. Эволюционные уравнения. Функционально-аналитическая формулировка смешанных задач для параболического уравнений.
40. Функциональные пространства, используемые при исследовании краевых задач для параболических уравнений, их свойства.

41. Теорема о единственности и непрерывной зависимости решения начальной задачи для операторного дифференциального уравнения.
42. Теорема о существовании решения начальной задачи для операторного дифференциального уравнения.
43. Теорема о существовании, единственности и непрерывной зависимости решения первой смешанной задачи для параболического уравнения.
44. Теорема о существовании, единственности и непрерывной зависимости решения второй смешанной задачи для параболического уравнения.
45. Полугруппы операторов, их основные свойства.
46. Представление решения начальной задачи для операторного уравнения с помощью полугрупп операторов.
47. Решение смешанных задач для параболических уравнений с помощью полугрупп операторов.

Подготовка и написание реферата является самостоятельной внеаудиторной формой работы студентов в семестре. Распределение тем рефератов планируется на первой неделе, а представление написанных рефератов не позднее предпоследней недели семестра. Целью работы над рефератом является более широкое и глубокое изучение студентами курса, включая примеры и приложения, а также развитие навыков самостоятельной работы с математической или прикладной литературой. При оценке работы над рефератом учитываются самостоятельность, глубина понимания рассматриваемой темы, умение в краткой и ясной форме излагать рассматриваемые вопросы.

При написании реферата, естественно, не разрешается копирования работ других авторов, использования выдержек из других работ без указания на это, изложения чужих идей без указания первоисточников, включая ис-

точника из Интернета. Все случаи плагиата должны пресекаться. В конце работы дается резюме и полный список всех использованных источников.

Курсовая работа предполагается обычно как продолжение работы по теме реферата. При желании студента тема курсовой работы может быть не связана с темой реферата. Как правило, студент выбирает темы реферата и курсовых работ из списков тем, предлагаемых преподавателем. В то же время, студент может самостоятельно выбрать темы реферата и курсовой работы, согласовав их с преподавателем. Распределение тем курсовых работ, как и тем рефератов, планируется на первой неделе, а представление отчетов по курсовым работам – не позднее предпоследней недели семестра. При этом реферат необходимо представить не позднее курсовой работы. Курсовая работа является самостоятельной внеаудиторной формой работы студента в семестре. В то же время студент имеет право консультироваться с преподавателем в ходе выполнения курсовой работы.

Цель курсовой работы – развитие у студентов навыков самостоятельной научно-исследовательской работы, более широкое и глубокое изучение курса.

Отчет по курсовой работе должен включать в себя несколько разделов – введение, постановку задачи, теоретическую часть, описание решения задачи, выводы, список литературы и, возможно, приложение.

Во введении кратко характеризуется современное состояние поставленной задачи, анализируются возможные пути её решения, формулируется цель работы.

В теоретической части приводятся необходимые для решения поставленной задачи теоретические сведения – теоремы, алгоритмы и т.д.. Эти сведения даются без доказательств и обоснований, но с точными ссылками на литературные источники.

В описании решения задачи требуется дать подробный алгоритм исследования задачи с соответствующими обоснованиями и ссылками на теоретическую часть.

В разделе «Выводы» кратко формулируются полученные в курсовой работе результаты, дается сравнение полученных результатов с требованиями задания, предлагаются пути дальнейшего исследования задачи и т.п.

В разделе «Литература» составляется список точных ссылок на используемые в работе источники.

Приложение не является обязательным и может содержать текст программы для ЭВМ (если эта программа использовалась при исследовании поставленной задачи), графический и табличный материал и т.п.

Законченный отчет по курсовой работе должен иметь:

- 1) титульный лист с названием темы работы;
- 2) задание на курсовую работу;
- 3) отзыв руководителя;
- 4) текст отчета.

При оценке курсовой работы учитывается самостоятельность работы студента, его математическая и литературная грамотность, качество оформления отчета, своевременность выполнения работы.

После окончания семестра, в котором ведется курс, проводится итоговая работа. Итоговая работа охватывает весь обязательный материал курса и проводится в аудитории в течение двух академических часов. Задание к итоговой работе состоит из двух теоретических вопросов и одной задачи. Первый вопрос относится к темам 1-3, а второй к темам 4 и 5. Перечень вопросов и примеры задач, входящих в итоговую работу, даются на первой неделе семестра. После написания итоговой работы каждый студент «защищает» свою работу устно. Во время «защиты» может быть задано несколько небольших дополнительных вопросов, как по написанным отве-

там, так и по программе курса. При этом проверяются свободное владение теорией по курсу и умение её применять к конкретным задачам.

Примерные варианты заданий итоговой работы

Вариант 1.

1. Обобщенное решение дифференциального уравнения. Фундаментальное решение дифференциального оператора. Примеры.
2. Терема о необходимости условия Лопатинского для корректности постановки краевой задачи в полупространстве для эллиптического оператора с постоянными коэффициентами.
3. Доказать, что множество

$$\bar{H}^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} f dx = 0\},$$

где Ω - ограниченная область в \mathbb{R}^n , является подпространством пространства $H^1(\Omega)$.

Вариант 2.

1. Свертка функций, свертка распределения с гладкой функцией. Терема о гладкости и о носителе свертки.
2. Постановка краевой задачи для общего эллиптического дифференциального оператора с переменными коэффициентами в ограниченной области Ω из \mathbb{R}^n . Условие Лопатинского.
3. Пусть Ω - ограниченная область в \mathbb{R}^3 , $\partial\Omega \in C^1$, $\nu = \nu(x)$ - вектор-функция со значениями в \mathbb{R}^3 класса C^1 . Доказать, что краевая задача с косою производной

$$\Delta u = f \text{ в } \Omega,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = g \text{ на } \partial\Omega$$

Является эллиптической тогда и только тогда, когда поле $\nu(x)$ не касается $\partial\Omega$ ни в одной точке $x \in \partial\Omega$.

Вариант 3.

1. Пространства Соболева-Слободецкого $H^s(\square^n)$ при $s \in \mathbb{R}$, их свойства. Эквивалентность двух определений пространства $H^s(\square^n)$ при целом неотрицательном s .
2. Теоремы о существовании и единственности решений первой смешанной задачи для параболического уравнения.
3. Доказать эллиптичность задачи Дирихле
$$\Delta u = f \text{ в } \Omega,$$
$$u = g \text{ на } \partial\Omega,$$
где Ω - ограниченная область с гладкой границей.

Вариант 4.

1. Теорема об ограничении распределения из $H^s(\square^n)$ при $s > \frac{1}{2}$ на плоскость $x_n = 0$ и ее следствие.
2. Построение параметрикса краевой задачи в полупространстве для эллиптического оператора с постоянными коэффициентами.
3. Доказать, что функция

$$\xi(x, t) = \frac{\theta(t)}{\sqrt{\pi t}} e^{-(x+bt)^2/4t}$$

является фундаментальным решением оператора

$$\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - b \frac{\partial}{\partial x}.$$

Итоговая оценка работы студента по курсу определяется по балльной системе. Максимальному результату соответствует 100 баллов. При этом студент может набрать:

- от 0 до 12 баллов за контрольную работу;
- от 0 до 10 баллов за реферат;
- от 0 до 28 баллов за курсовую работу;
- от 0 до 50 баллов на итоговую работу.

Соответствия балльной системы пятибалльной шкале и европейскому стандарту показаны в следующих таблицах.

Баллы	0-50	51-68	69-85	86-100
Оценка	Неуд.	Удовл.	хорошо	отлично

Баллы	0-30	31-50	51-62	63-73	74-83	84-92	93-100
Оценка	F	FX	E	D	C	B	A

Методика выставления оценок соответствует балльно-рейтинговым системам оценки знаний студентов РУДН по теоретическим дисциплинам.

Программа курса

Аннотированное содержание курса

Раздел 1

Темы 1,2

Трудоемкость: 1 кредит, 38 часов, из них

- лекции – 10 часов,
- практические занятия – 10 часов,
- самостоятельная работа – 18 часов.

Первый раздел посвящен теории распределений и функциональных пространств, в основном пространств Соболева-Слободецкого. Здесь также

приводятся элементы теории линейных операторов. Теория распределений дается довольно подробно для большей независимости от соответствующего курса, который часто читается позже данного. При этом рассматриваются три основных пространства распределений $D'(\Omega)$, $\mathcal{D}'(\Omega)$ и $S'(\mathbb{R}^n)$. Для обобщенных функций из этих пространств рассматриваются понятия обобщенной производной, порядка и носителя, свертки и усреднения, доказываются соответствующие теоремы. Для обобщенных функций медленного роста из $S'(\mathbb{R}^n)$ определяется преобразование Фурье и доказываются его свойства.

Далее вводятся пространства Соболева $H^k(\Omega)$, где $k \in \mathbb{Z}$ и пространства Соболева-Слободецкого $H^s(\Omega)$, где $s \in \mathbb{R}$, и даются их простейшие свойства. Для этих пространств приводятся основные теоремы – о плотности подпространства гладких функций, о следе, о продолжении, о компактных вложениях и их следствия. Кратко рассматриваются и банаховы пространства Соболева $W_k^p(\Omega)$, где $p > 1$. Приводятся примеры разрывных функций из пространства Соболева-Слободецкого, обсуждается точность условий теоремы о следе и теоремы о компактности вложения одних пространств Соболева-Слободецкого в другие.

Раздел 2.

Тема 3.

Трудоемкость: 1 кредит, 30 часов, из них

- лекции – 6 часов,
- практические занятия – 6 часов,
- самостоятельная работа – 18 часов.

В данном разделе рассматриваются дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, в основном эллиптические. Вначале вводятся понятия обобщенного решения дифференциального уравнения и фундаментального решения дифференциального оператора. Приводятся приме-

ры фундаментальных решений для обыкновенных дифференциальных операторов, операторов Лапласа, волнового и теплопроводности. Доказывается теорема о существовании фундаментального решения для любого дифференциального оператора с постоянными коэффициентами.

Для эллиптических дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами даются их простейшие свойства, приводятся примеры таких операторов. Далее доказывается теорема о локальной гладкости в шкале пространств Соболева-Слободецкого решений эллиптических уравнений с постоянными коэффициентами и неравенство Гординга. Приводятся их следствия.

Заканчивается раздел теоремой о необходимости и достаточном условии разрешимости в пространстве Соболева-Слободецкого общего эллиптического уравнения с постоянными коэффициентами.

Раздел 3.

Тема 4.

Трудоемкость: 1 кредит, 38 часов, из них

- лекции – 10 часов,
- практические занятия- 10 часов,
- самостоятельная работа -18 часов.

Этот раздел является основным и посвящен общим эллиптическим краевым задачам. Вначале, как это принято в теории эллиптических краевых задач, рассматривается модельная задача в полупространстве для однородных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. Определяется условие Лопатинского для таких задач. Дается понятие корректно поставленной краевой задачи, его связь с фредгольмовостью соответствующего оператора. Приводятся примеры краевых задач в полупространстве для указанных операторов, для которых проверяется условие Лопатинского.

Далее формулируется и доказывается ключевая теорема теории эллиптических краевых задач об эквивалентности условия Лопатинского корректности постановки соответствующей задачи в полупространстве.

Вводится понятие параметрикса краевой задачи, рассматривается его связь с фредгольмовостью соответствующего оператора. Строится параметрикс эллиптической краевой задачи в полупространстве для однородных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами.

Даются определения эллиптической краевой задачи и условия Лопатинского для дифференциальных операторов с переменными коэффициентами в ограниченной области Ω из \mathbb{R}^n . Доказываются теоремы о существовании параметрикса такой задачи, о фредгольмовости и о гладкости решения.

В заключение кратко дается понятие о краевых задачах для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. Для этого сначала дается определение и основные свойства псевдодифференциальных операторов в области. Затем рассматриваются ограничения псевдодифференциальных операторов на полупространстве. Это позволяет сформулировать краевую задачу в полупространстве для эллиптического псевдодифференциального уравнения, а также привести основные результаты по указанной задаче.

Раздел 4.

Тема 5.

Трудоемкость: 1 кредит, трудоемкость 34 часа, из них

- лекции – 8 часов,
- практические занятия – 8 часов,
- самостоятельная работа – 18 часов.

Данный раздел является заключительным и посвящен краевым задачам для параболических уравнений произвольного порядка. Рассматривается функциональный метод исследования этих задач.

В начале раздела дается функционально-аналитическая формулировка смешанных задач для параболических уравнений. При этом вводятся спе-

циальные функциональные пространства и рассматриваются их свойства. Методом Галеркина доказывается теорема существования решения начальной задачи для операторного дифференциального уравнения. Кроме того, для этой задачи доказываются теоремы единственности и о непрерывной зависимости решения. Как следствие, из указанных теорем получаются теоремы о существовании, единственности и о непрерывной зависимости решения первой или второй смешанной задачи для параболического уравнения. В заключение теорема о существовании решения начальной задачи для операторного дифференциального уравнения доказывается с помощью теории полугрупп. Как следствие получается теорема о существовании решения первой или второй смешанной задачи для параболического уравнения.

Список литературы.

Обязательная литература.

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: наука, 1988 (тема 2).
2. Егоров Ю.В. Лекции по уравнениям с частными производными. Дополнительные главы. М.: Издательство МГУ, 1985 (темы 2, 3, 4).
3. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972 (тема 5).
4. Панич О.И. Введение в общую теорию эллиптических краевых задач. Киев.: Вища школа, 1986 (темы 1, 2, 3, 4).

Дополнительная литература.

1. Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. М.: Издательство Иностранной литературы, 1962 (тема 4)
2. Егоров Ю.В. Линейные дифференциальные уравнения главного типа. М.: Наука. 1984. (темы 1, 2, 3, 4).

3. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. (темы 2, 3, 4).
4. Ремпель Ш., Шульце Б.-В. Теория индекса эллиптических краевых задач. М.: Мир, 1986 (тема 1, 4).
5. Трибель Х. Теория интерполяции, Функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980 (темы 2, 3)
6. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968 (тема 5).
7. Хермандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М.: Мир, 1965 (тема 1, 2, 3, 4).

Примеры тем рефератов.

1. Фредгольмовы интегральные операторы.
2. Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье.
3. Гиперфункции и их приложения в математической физике.
4. Волновые фронты обобщенных функций.
5. Теоремы вложения для пространств Соболева.
6. Пространства Соболева с дробными и отрицательными показателями.
7. Фундаментальные решения дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами.
8. Эллиптические и гипоеллиптические операторы с постоянными коэффициентами.
9. Фундаментальные решения параболических операторов с постоянными коэффициентами высших порядков.
10. Особенности фундаментальных решений гиперболических операторов с постоянными коэффициентами.
11. Эллиптические системы дифференциальных операторов.
12. Эллиптические операторы на замкнутых многообразиях.

13. Индекс эллиптических краевых задач.
14. Эллиптические краевые задачи на компактном многообразии с краем.
15. Построение параметриков эллиптических краевых задач.
16. Вариационный метод решения эллиптических краевых задач.
17. Нелокальные краевые задачи для эллиптических операторов.
18. Полугруппы параболического уравнения.
19. Управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными параболического типа.
20. Асимптотическое поведение решений краевых задач для параболических уравнений.

Примеры тем курсовых работ.

1. Исследование фредгольмовой разрешимости задачи Дирихле для эллиптических уравнений 2-го порядка методом потенциалов.
2. Исследование фредгольмовой разрешимости задач с наклонной производной для эллиптических уравнений 2-го порядка методом потенциалов.
3. Область значений преобразования Фурье обобщенных функций медленного роста.
4. Решение телеграфного уравнения в гиперфункциях и физические приложения.
5. Волновые фронты решений дифференциальных уравнений с частными производными.
6. Теоремы вложения для банаховых пространств Соболева.
7. Граничные дифференциальные операторы в пространствах Соболева с дробными показателями на многообразиях.
8. Построение фундаментальных решений дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами.

9. Регулярность решений эллиптических и гипоеллиптических уравнений с постоянными коэффициентами.
10. Фундаментальные решения параболических уравнений высших порядков и параболических систем с постоянными коэффициентами.
11. Решение задачи Коши для однородных гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами. Формулы Герглотца-Петровского.
12. Оценка волнового фронта фундаментального решения гиперболического оператора с постоянными коэффициентами.
13. Обобщенные решения задачи Дирихле и задачи на собственные значения для сильно эллиптических систем.
14. Теоремы существования обобщенных решений в линейной теории упругости.
15. Индексы гомотопных эллиптических операторов на замкнутом многообразии.
16. Слабая разрешимость задачи Дирихле на стратифицированном множестве.
17. Наилучшие кубатурные формулы и полигармонические уравнения.
18. Сведение краевой задачи к псевдодифференциальному уравнению.
19. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями параболического типа.
20. Асимптотическое поведение решений параболических уравнений высших порядков.
21. Численное исследование сжатой эллиптической пластинки.

В курсовых работах по темам 1 и 2 для эллиптических дифференциальных операторов 2-го порядка с постоянными коэффициентами нужно: 1) определить фундаментальное решение данного оператора; 2) исследовать соответствующие обобщенные потенциалы двойного и простого сло-

ев; 3) редуцировать поставленную краевую задачу к эквивалентному интегральному уравнению Фредгольма второго рода (см., например, Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных». М.: Наука, 1981, гл. I, §5, п. 5°).

В случае, когда направление, по которому берется наклонная производная (тема 2), хотя бы в одной точке границы области касается границы, соответствующая краевая задача сводится к сингулярному интегральному уравнению. Курсовая работа по такой задаче имеет повышенную трудность и может быть дана наиболее сильным студентам. В указанном случае тема курсовой работы близка к известной проблеме в теории краевых задач (см., например, Егоров Ю.В. «Линейные дифференциальные уравнения главного типа». М.: Наука, 1984, гл. IV).

По теме 3 имеется немало знаменитых результатов: теоремы Планшереля, Римана-Лебега, Бохнера, Пэли-Винера, неравенство Хаусдорфа-Юнга и т.д. (см., например, М.Рид, Б. Саймон. «Методы современной математической физики». Т.2. М.: Мир, 1978, гл. IX). В курсовой работе по данной теме предлагается разобраться в наиболее интересных (студенту) из этих результатов и их приложениях. В качестве примеров приложений можно рассмотреть теорию положительно определенных функций Бохнера, свойства собственных функций оператора Шредингера, теорию интерполяции и т.д.

В курсовой работе по теме 4 студент, во-первых, узнает о самом широком классе обобщенных функций – гиперфункциях. Во-вторых, научится решать в гиперфункциях наиболее популярные дифференциальные уравнения, обыкновенные и с частными производными. А в-третьих, сможет выбрать и исследовать физико-техническое приложение решения в гиперфункциях телеграфного уравнения. В качестве литературного источника для этой работы достаточно компактной, элементарной и вполне доступ-

ной студентам книги К. Иосиды «Операционное исчисление. Теория гиперфункций», Минск, изд. «Университетское», 1989.

Курсовая работа по теме 5 предполагает, в частности, что студент разберется в теореме (и в её доказательстве) о волновом фронте обобщенного решения любого линейного дифференциального уравнения в частных производных с коэффициентами и правой частью из C^∞ . Эта теорема существенно уточняет классический результат регулярности решений эллиптических уравнений и является введением в микролокальный анализ. При этом естественно исследовать волновые фронты обобщенных решений как классических уравнений, так и некоторых других (например, с вырождением). В качестве основного литературного источника в этой работе можно рекомендовать книгу Л. Хёрмандера «Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными». Т.1, М.: Мир, 1986, § 8.1 - 8.3.

Теория банаховых пространств Соболева $W_k^p(\Omega)$, где $p \geq 1$, является основой функциональных методов исследования нелинейных краевых задач. В этих исследованиях теоремы вложения пространств Соболева в другие пространства играют ключевую роль. В курсовой работе по теме 6 студент должен разобраться в доказательствах основных теорем вложения в наиболее общем и трудном случае банаховых пространств Соболева. Известные доказательства непросты и нередко требуют восстановления деталей доказательств. Восстановление этих деталей и понимание метода доказательства фундаментальных теорем функционального анализа будет весьма полезно для более глубокого усвоения курса. В качестве одного из наиболее современного и одновременно наиболее доступного источника можно рекомендовать книгу Д. Гилбарга и Н. Трудингера «Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка», М.: Мир, 1989, глава 7.

Конечным результатом работы по теме 7 является доказательство точной теоремы о непрерывности линейного отображения пространства $H^s(\Omega)$ на пространство $H^{s-m-1/2}(\partial\Omega)$, определяемого линейным дифференциальным оператором порядка m . Здесь $s-m-1/2 > 0$, Ω - гладкое многообразие с границей $\partial\Omega$. Этот результат необходим, например, для постановки и исследования на разрешимость краевых задач для линейных дифференциальных уравнений высших порядков на многообразиях (в том числе и на областях в \mathbb{R}^n). Формулировку теоремы и указания к её доказательству можно найти в книге Л. Хёрмандера «Линейные дифференциальные операторы с частными производными». М.: Мир, 1965, п.2.6.

Основной результат в курсовой работе по теме 8 – известная теорема о существовании фундаментального решения для любого линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Студент должен разобраться в её нетривиальном доказательстве с помощью так называемой лестницы Хёрмандера. Кроме того, нужно привести примеры – фундаментальных решений для однородных эллиптических дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами и каких-либо ещё по выбору студента. По теореме о существовании фундаментального решения можно рекомендовать хорошо известное учебное пособие Г.Е. Шилова «Математический анализ. Второй специальный курс». М.: Наука, 1965, §17. О фундаментальных решениях эллиптических операторов можно найти в не менее известной книге И.М. Гельфанда и Г.Е. Шилова «Обобщенные функции и действия над ними». М.: Физматгиз, 1958, глава III, §2. Данная тема является классической в теории общей теории дифференциальных операторов, а курсовая работа по ней является сравнительно нетрудной.

В курсовой работе по теме 9 студенту предоставляется возможность разобраться в сути знаменитого результата о гладкости любого обобщенного решения линейного эллиптического уравнения с гладкими коэффициента-

ми и гладкой правой частью. Для этого предлагается рассмотреть в качестве основного примера линейное эллиптическое уравнение с постоянными коэффициентами, а также более широкий класс гипоеллиптических уравнений с постоянными коэффициентами. При этом для простоты можно ограничиться однородными эллиптическими операторами, а также и квазиэллиптическими операторами. В качестве основного литературного источника рекомендуется указанная в предыдущем абзаце книга «Линейные дифференциальные операторы с частными производными». М.: Мир, 1965, глава 4.

В курсовой работе по теме 10 фундаментальные решения можно построить, используя преобразование Фурье. Для простоты лучше ограничиться рассмотрением сильно параболических уравнений и систем или даже примерами таких уравнений и систем. Требуется доказать соответствующие результаты о дифференцируемости и об оценках фундаментального решения, привести конкретные примеры. Кроме того, с помощью полученных фундаментальных решений и их свойств в курсовой работе требуется доказать существование решения соответствующей задачи Коши, привести примеры. По данной теме удобно использовать книгу С.Д. Эйдельмана «Параболические системы». М.: Наука, 1964, глава 1.

Курсовая работа по теме 11 доступна большинству студентов, обучающихся по курсу. Для её выполнения достаточно разобраться в решении поставленной задачи, приведенным, например, в книге И.М. Гельфанда и Г.Е. Шилова «Обобщенные функции и действия над ними». гл. III, §2. В этой работе, естественно, необходимо привести примеры использования формулы Герглотца-Петровского.

Для выполнения работы по теме 12 необходимо разобраться в более тонких и современных результатах по теории гиперболических операторов высших порядков с помощью монографии Л. Хёрмандера «Анализ линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами», т.2,

§12.6. Доказательство основного результата о нижней границе для волнового фронта фундаментального решения гиперболического оператора с постоянными коэффициентами, а также вспомогательных для этой теоремы утверждений, можно вести на примере гиперболического оператора второго порядка. Для конкретных операторов привести примеры фундаментальных решений и волновых фронтов, а затем сравнить с результатами теоремы.

В задачах по темам 13 и 14 можно разобраться, прочитав, соответственно, §5 и §6 части 1 книги Г. Фикеры «Теоремы существования в теории упругости». М.: Мир, 1974. Метод исследования обобщенной задачи Дирихле для сильно эллиптических систем опирается на неравенство Гординга для этих систем и хорошо известен из теории обобщенных краевых задач для сильно эллиптических уравнений. Граничные задачи равновесия в линейной теории упругости, в свою очередь, являются соответствующими задачами для сильно эллиптических систем частного вида. В курсовой работе по теме 14 требуется дать обобщенную постановку одной из трех краевых задач линейной теории упругости в случае неоднородного анизотропного тела и доказать, в частности, неравенство Корна, из которого следует сильная эллиптичность соответствующей системы уравнений.

В курсовой работе по теме 15 требуется доказать теорему о совпадении индексов гомотопных эллиптических дифференциальных операторов на гладких компактных многообразиях без края. Для этого необходимо разобраться в соответствующих понятиях, доказать теорему о существовании регуляризатора эллиптического оператора на замкнутом многообразии, знать основные свойства индекса абстрактных операторов. Предлагается также рассмотреть пример оператора Лапласа на торе. В качестве литературного источника по этой теме можно использовать книгу О.И. Панича «Введение в общую теорию эллиптических краевых задач». Киев.: «Вища школа», 1986, §§9,10.

Курсовая работа по теме 16 относится к сравнительно новому понятию краевой задачи на так называемом стратифицированном множестве. К таким задачам сводится ряд задач математической физики, связанных с описанием сложных систем, составленных их элементов, имеющих различные размерности или различные физические характеристики. Тема является нестандартной и довольно трудной. Основным источником – книга Ю.В. Покорного и др. «Дифференциальные уравнения на геометрических графах». М.: Физматлит, 2004, §9.1.

Тема 17 для курсовой работы также является нестандартной. Она относится к связи задачи о построении кубатурных формул теории приближенных вычислений и полигармонического уравнения. Основным источником – книга С.Л. Соболева «Введение в теорию кубатурных формул». М.: Наука, 1974, главы XII, XIV. По главе XII студент должен познакомиться с необходимыми свойствами решений полигармонического уравнения. В главе XIV ставится задача оптимизации приближенного вычисления кратного интеграла (кубатурной формулы). Кроме того, в этой главе исследуемый функционал погрешности кубатурной формулы выражается через решение полигармонического уравнения. Студент в данной работе должен разобраться в приведенных результатах и научиться их применять в простых примерах.

По теме 18 требуется на простых примерах научиться сводить краевые задачи для эллиптических уравнений к псевдодифференциальным уравнениям на границе области. В качестве примеров можно рассмотреть задачу с кривой производной для оператора Лапласа на полупространстве, в ограниченной области с гладкой границей, итерированного оператора Лапласа в полупространстве. В примерах доказать, что условие Лопатинского для этих задач эквивалентно эллиптичности уравнения на границе. В качестве ссылки на литературу можно дать, например, книгу Ю.В. Егорова «Линейные дифференциальные уравнения главного типа», гл. III, §3.

В курсовой работе по теме 19 требуется разобраться в абстрактной постановке соответствующей задачи оптимального управления и в теоремах, определяющих это оптимальное управление. Примеры задач оптимального управления системами, описываемыми конкретными уравнениями параболического типа 2-го или высших порядков с конкретными смешанными условиями дают примеры разных курсовых работ по теме 19. В качестве основного литературного источника можно использовать книгу Лионса Ж.-Л. «Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными». М.: Мир, 1972, гл. 3.

В работе по теме 20 сначала требуется доказать теорему об асимптотическом поведении при $t \rightarrow \infty$ решения смешанной задачи в цилиндрической области для параболического уравнения высшего порядка с постоянными коэффициентами. Формулировку теоремы и указания к ней можно найти в книге А. Фридмана «Уравнения параболического типа». М.: Мир, 1968, гл. X, §8. Затем применить указанную теорему в конкретных примерах, предлагаемых преподавателем. При этом примеры могут быть как для задач явно решаемых, так и для задач, где явное решение найти нельзя.

Курсовая работа по теме 21 дает пример использования численных методов для исследования решений краевых задач для эллиптических уравнений высших порядков. По выбору студента можно использовать метод конечных разностей или метод Галеркина (см., например, Н. Бахвалов, Н. Жидков, Г. Кобельков «Численные методы». М.: Физматлит, 200, гл. 10, §6).

Учебный тематический план курса

№ п.п.	Название тем	Всего часов	В том числе		
			лекции	Практ. занятия	Самост. работа
1.	Линейные операторы. Компактные операторы. Фредгольмовы операторы	8	2	2	4
2.	Теория распределений и пространств Соболева	32	8	8	16
2.1.	Линейное топологическое пространство $D(\Omega)$. Пространство распределений $D'(\Omega)$. Порядок и носитель распределения. Обобщенное решение дифференциального уравнения. Фундаментальное решение дифференциального оператора. Примеры фундаментальных решений.	8	2	2	4
2.2.	Пространство распределений $E'(\Omega)$. Теорема о компактности носителей распределений из $E'(\Omega)$. Пространство S гладких быстро убывающих функций на \mathbb{R}^n . Пространство S' распределений умеренного роста. Обобщение формулы Лейбница на произвольный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами. Усреднения распределений, их свойства.	8	2	2	4

№ п.п.	Название тем	Всего часов	В том числе		
			лекции	Практ. занятия	Самост. работа
2.3.	Теорема Планшереля. Топологический изоморфизм пространства S на себя с помощью преобразования Фурье. Свёртка распределения с гладкой функцией. Преобразование Фурье распределений из S' . Пространства Соболева $H^k(\Omega)$ при целом неотрицательном k . Пространства Соболева-Слободецкого $H^s(\Omega)$ при $s \in R$.	8	2	2	4
2.4.	Теоремы об общем виде линейного непрерывного функционала над пространством $H^s(\square^n)$ и об усреднении распределений из $H^s(\square^n)$. Теорема Соболева-Слободецкого о гладкости распределения из $H^s(\square^n)$ при достаточно большом s . Определение пространств $H^s(\Omega)$ и $H^0_s(\Omega)$, где $s \in R$, для произвольной области $\Omega \subset \square^n$. Теорема о сужении распределения из $H^s(\square^n)$ на плоскость $x_n = 0$ и ее следствие. Теорема о компактности вложения $H^t(\Omega)$ в $H^s(\Omega)$, если Ω - ограниченная область в R^n , $t > s$.	8	2	2	4

№ п.п.	Название тем	Всего часов	В том числе		
			лекции	Практ. занятия	Самост. работа
3.	Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами.	24	6	6	12
3.1.	Теорема о существовании фундаментального решения дифференциального оператора с постоянными коэффициентами.	8	2	2	4
3.2.	Общие эллиптические дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами и их основные свойства. Теорема о локальной гладкости решения эллиптического уравнения.	8	2	2	4
3.3.	Неравенство Гординга, его следствие. Теорема о необходимом и достаточном условии разрешимости общего эллиптического уравнения в пространствах Соболева-Слободецкого.	8	2	2	4
4.	Общие эллиптические краевые задачи.				
4.1	Краевая задача для общего эллиптического дифференциального оператора с постоянными коэффициентами в полупространстве. Условие Лопатинского. Понятие корректно поставленной краевой задачи и её фредгольмовость.	8	2	2	4

№ п.п.	Название тем	Всего часов	В том числе		
			лекции	Практ. занятия	Самост. работа
4.2.	Теорема о необходимости условия Лопатинского для корректности постановки краевой задачи в полупространстве для эллиптического оператора с постоянными коэффициентами.	8	2	2	4
4.3	Теорема о достаточности условия Лопатинского для корректности постановки краевой задачи в полупространстве для эллиптического оператора с постоянными коэффициентами.	8	2	2	4
4.4	Понятие параметрика краевой задачи, связь с фредгольмовостью. Существование параметрика краевой задачи в полупространстве для эллиптического оператора с постоянными коэффициентами.	8	2	2	4
4.5.	Псевдодифференциальные операторы, их свойства. Псевдодифференциальные уравнения в полупространстве. Краевые задачи для эллиптического псевдодифференциального оператора в полупространстве.	8	2	2	4

№ п.п.	Название тем	Всего часов	В том числе		
			лекции	Практ. занятия	Самост. работа
5.	Краевые задачи параболического уравнения.	32	8	8	16
5.1.	Эволюционные уравнения. Функционально-аналитическая формулировка смешанных задач для параболических уравнений. Используемые функциональные пространства и их свойства	8	2	2	4
5.2.	Теорема о существовании, единственности и непрерывной зависимости решения начальной задачи для операторного дифференциального уравнения	8	2	2	4
5.3.	Теоремы о существовании и единственности решений первой и второй смешанных задач для параболического уравнения. Теоремы о существовании и единственности решений первой и второй смешанных задач для параболического уравнения.	8	2	2	4
5.4.	Полугруппы операторов. Теорема Хилле-Иосиды. Решение начальной задачи для дифференциального уравнения с помощью полугруппы операторов. Примеры.	8	2	2	4
	Итого	144	36	36	72