ПРИОРИТЕТНЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ПРОЕКТ «ОБРАЗОВАНИЕ»
РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

М.Е. БОГОВСКИЙ

АНАЛИТИКО-ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА

Учебное пособие

Москва
2008

Инновационная образовательная программа
Российского университета дружбы народов

«Создание комплекса инновационных образовательных программ и формирование инновационной образовательной среды, позволяющих эффективно реализовывать государственные интересы РФ через систему экспорта образовательных услуг»

Экспертное заключение –

доктор физико-математических наук, профессор *Б.В. Пальцев*

Боговский М.Е.

Аналитико-численные методы для уравнений Навье–Стокса: Учеб. пособие. – М.: РУДН, 2008. – 231 с.

В учебном пособии представлено введение в современные функционально-аналитические и численные методы решения краевых и начально-краевых задач для стационарных и нестационарных уравнений Навье–Стокса. Главное внимание уделяется основам линейной L_p-теории, которая существенно расширяет и усиливает арсенал технических средств для исследования нелинейных задач. При этом известный своей сложностью материал впервые излагается на уровне, вполне доступном для студентов магистратуры, что несомненно оценят и аспиранты, и даже научные работники.

Учебное пособие адресовано прежде всего студентам магистратуры, обучающимся по направлению 510100 «Математика. Прикладная математика», но пригодится также аспирантам и научным работникам, занятым как теоретическими, так и прикладными исследованиями в области математической гидродинамики.

Учебное пособие выполнено в рамках инновационной образовательной программы Российского университета дружбы народов, направление «Комплекс экспортоориентированных инновационных образовательных программ по приоритетным направлениям науки и технологий», и входит в состав учебно-методического комплекса, включающего описание курса, программу и электронный учебник.

Оглавление

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\mathbb{R}^n$ — n-мерное вещественное евклидово пространство;
$\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x', x_n)\colon x \in \mathbb{R}^n, x_n > 0\}$ — полупространство в $\mathbb{R}^n$;
$S_n = \{x\colon x \in \mathbb{R}^n, |x| = 1\}$- единичная сфера в $\mathbb{R}^n$;
$A \times B$ — прямое (декартово) произведение множеств A и B;
$\overline{A}$ — замыкание множества A;
$\operatorname{Int} A$ — подмножество всех внутренних точек множества A;
∂A — множество всех граничных точек множества A;
Ω — область в $\mathbb{R}^n$ (т. е. открытое связное множество в $\mathbb{R}^n$);
$Q_T = \Omega \times (0, T)$ — цилиндр в $\mathbb{R}^{n+1}$, где Ω — область в $\mathbb{R}^n$, $T > 0$.
X^* — банахово пространство, сопряженное к банахову пространству X;
$X^\perp \subset Y$ — аннулятор подпространства $X \subset Y$ банахова пространства Y;
$X \times Y$ — пространство упорядоченных пар $\{u, v\}$, $u \in X$, $v \in Y$ с покомпонентным сложением и умножением на скаляры;
$X + Y = \{u + v\colon u \in X,\ v \in Y\}$ — сумма подпространств X и Y;
$X \oplus Y$ — прямая сумма замкнутых подпространств X и Y;
$X(\Omega)$ — пространство функций $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^1$ с нормой (полунормой) $\|f\|_{X(\Omega)}$;
$X(\Omega; \mathbb{R}^n)$ — пространство векторных полей $v = (v_1, \dots, v_n)\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ с нормой (полунормой) $\|f\|_{X(\Omega;\mathbb{R}^n)} = \sum\limits_{j=1}^{n} \|v_j\|_{X(\Omega)}$, при этом $X(\Omega; \mathbb{R}^1) = X(\Omega)$;
$X\big((0, T); Y\big)$ — банахово пространство функций $u\colon (0, T) \to Y$, принимающих значения в банаховом пространстве Y и измеримых по Бохнеру;
$C^l(\Omega)$ — пространство l раз непрерывно дифференцируемых в $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ функций;
$\overset{\circ}{C}{}^m(\Omega)$ — пространство m раз непрерывно дифференцируемых функций, финитных в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$;
$W^l_p(\Omega)$ — пространство Соболева с нормой $\|f\|_{W^l_p(\Omega)} = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant l} \|D^\alpha_x f(x)\|_{L_p(\Omega)}$;
$\overset{\circ}{W}{}^l_p(\Omega)$ — замыкание в $W^l_p(\Omega)$ его подпространства $\overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega)$;
$W^{-1}_p(\Omega)$ — банахово пространство линейных непрерывных функционалов на пространстве Соболева $\overset{\circ}{W}{}^1_{p'}(\Omega)$, $p' = p/(p-1)$, $1 < p < \infty$;
$W^{-1}_p(\Omega; \mathbb{R}^n)$ — банахово пространство линейных непрерывных функционалов на пространстве Соболева $\overset{\circ}{W}{}^1_{p'}(\Omega; \mathbb{R}^n)$, $p' = p/(p-1)$, $1 < p < \infty$;
$\overset{\circ}{J}{}^\infty(\Omega) = \{v \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)\colon \operatorname{div} v = 0\}$ — подпространство соленоидальных векторных полей в $\overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$;
$\overset{\circ}{J}_p(\Omega)$ — замыкание в $L_p(\Omega; \mathbb{R}^n)$ его подпространства $\overset{\circ}{J}{}^\infty(\Omega)$.

Предисловие

Основной целью учебно-методического комплекса «*Аналитико-численные методы для уравнений Навье–Стокса*» является обучение студентов современным методам решения краевых и начально-краевых задач динамики вязкой несжимаемой жидкости, которые описываются нелинейной системой уравнений Навье–Стокса. Наибольшие возможности для исследования трудных вопросов разрешимости, гладкости и аппроксимации решений краевых и начально-краевых задач для стационарной и нестационарной нелинейной системы Навье–Стокса предоставляет L_p-теория. В связи с этим задачей учебно-методического комплекса является систематизированное изложение основ L_p-теории краевых и начально-краевых задач для стационарной и нестационарной линейной системы Стокса. Задача курса состоит в том, чтобы продемонстрировать высокую эффективность новых аналитико-численных методов решения краевых и начально-краевых задач для стационарных и нестационарных уравнений Навье–Стокса. Основные идеи курса реализованы в виде новых подходов к применению метода Ньютона, включая новые подходы к построению начального приближения и к обращению производной Фреше соответствующего нелинейного отображения.

Курс состоит из четырех глав. В первой главе строится L_p-теория оператора div с краевыми условиями Дирихле. Дается вывод явного представления для правого обратного оператора и устанавливаются коэрцитивные L_p-оценки. Эта краевая задача хотя и носит вспомогательный характер, в математической гидродинамике встречается буквально на каждом шагу. В частности, на использовании разрешающего оператора этой задачи строится самая простая схема локализации для линейной системы Стокса.

Во второй главе в рамках L_p-теории изучаются сильные и слабые решения стационарной задачи Стокса. Первый параграф посвящен разложению пространства L_p векторных полей в прямую сумму двух замкнутых подпространств соленоидальных и потенциальных векторных полей. При $p = 2$ такое разложение часто называют ортогональным разложением Вейля–Соболева, а при $p \neq 2$ — разложением Гельмгольца. Важность этого разложения для уравнений Навье–Стокса подчеркивает тот факт, что наличие разложения служит критерием однозначной разрешимости начально-краевой задачи для линейной системы Стокса в областях с гладкими границами. Это разложение естественным образом связано с системой первого порядка, эллиптической по Дуглису–Ниренбергу. Второй параграф посвящен построению L_p-теории стационарной системы Стокса, которая является системой второго порядка, эллиптической по Дуглису–Ниренбергу. Подробно разбирается метод локализации для стационарной системы Стокса. С помощью метода локализации устанавливаются априорные оценки сильных решений, т. е. оцениваются L_p-нормы вторых производных. С помощью той же локализации устанавливается существование вторых производных у слабого решения, если правая часть системы Стокса из L_p. Метод локализации для стационарной задачи Стокса существенно опирается на L_p-теорию оператора div с краевыми условиями Дирихле, построенную в предыдущей главе.

Третья глава посвящена решению начально-краевых задач для нестационарных систем Стокса и Навье–Стокса. В первом параграфе разбирается метод Галеркина для нелинейной нестационарной системы Навье–Стокса. Поскольку метод Галеркина для уравнений Навье–Стокса как-то затрагивается во всех (немногочисленных) монографиях и учебных пособиях по уравнениям Навье–Стокса, то в первом параграфе основное внимание уделяется вопросам, недостаточно глубоко разработанным в научных исследованиях и уж тем более в учебной литературе. К этим вопросам относятся гладкость слабого решения по времени, краевые условия, отличные от преобладающих в литературе краевых условий прилипания, а также негладкость зависимости краевых условий от времени. Все эти проблемные вопросы входят в постановку начально-краевой задачи для нелинейной системы Навье–Стокса, которая представляет собой математическую макромодель урагана. В макромоделях динамики сплошных сред характерные особенности моделируемых процессов описываются через краевые условия. Второй параграф посвящен построению L_p-теории начально-краевых задач для линейной нестационарной системы Стокса. Подробно разбирается метод локализации, с помощью которого повышается гладкость слабого решения при наличии достаточной гладкости данных задачи. Для неограниченных областей с гладкими границами разработан метод получения оценок, позволивший установить критерий однозначной разрешимости начально-краевой задачи в классе сильных решений. Третий параграф посвящен построению L_p-теории локальной разрешимости начально-краевой задачи для нелинейной системы Навье–Стокса в том числе и в неограниченной области. Благодаря точным L_p-оценкам нелинейности установлены все известные виды локальной разрешимости для нелинейной нестационарной системы Навье–Стокса.

Четвертая глава посвящена методам численного решения краевых и начально-краевых задач для нелинейной нестационарной системы Навье–Стокса. Для решения нелинейной задачи наиболее эффективным оказывается итерационный метод Ньютона, известный своей сверхсходимостью. Практическое применение метода Ньютона наталкивается на две серьезные проблемы: обращение производной Фреше нелинейного отображения и выбор начального приближения. В первом параграфе разработан на дифференциальном уровне эффективный метод обращения производной Фреше нелинейного отображения, соответствующего 1-ой начально-краевой задаче для нестационарной системы Навье–Стокса. При этом решение соответствующей линейной начально-краевой задачи с переменными коэффициентами выписывается в виде ряда, члены которого образуют рекуррентную последовательность, строящуюся с помощью разрешающего оператора линейной начально-краевой задачи Стокса без конвективных членов. Установлена сходимость такого ряда со скоростью геометрической прогрессии в норме сильного решения. Метод перспективен для разработки практической численной реализации метода Ньютона для нестационарных уравнений Навье–Стокса. Кроме того, в первом параграфе разработан новый подход к построению начального приближения для метода Ньютона при решении начально-краевой задачи для системы Навье–Стокса. Подход позволяет построить начальное приближение в гарантированно малой окрестности искомого сильного решения и основан на использовании известной регуляризации Варнхорна уравнений Навье–Стокса с параметром регуляризации, представляющим собой величину запаздывания по времени в конвективном члене. Регуляризованное решение, отвечающее любому ненулевому значению параметра регуляризации, выписывается в виде ряда, члены которого образуют рекуррентную последовательность и строятся с помощью разрешающего оператора линейной начально-краевой задачи Стокса без конвективных членов. Установлена сходимость такого ряда со скоростью геометрической прогрессии в норме сильного решения. Таким образом, в первом параграфе проблема разработки высокоэффективных и высокоточных алгоритмов численного решения начально-краевой задачи для нелинейной системы Навье–Стокса сводится к созданию таких алгоритмов для линейной системы Стокса без конвективных членов. Во втором параграфе рассматриваются методы численного решения линейных краевых и начально-краевых задач, в основе которых лежит аппроксимация решениями. При этом решение ищется в виде линейной комбинации по заранее построенной базисной системе решений. Неизвестными являются коэффициенты линейных комбинаций, которые определяются из условия минимизации невязки краевых и начальных данных. При таком подходе первостепенную важность приобретают вопросы построения базисных систем решений. Эти вопросы и рассматриваются во втором параграфе в первую очередь на примере более простых эллиптических краевых задач. В третьем параграфе подробно разбирается упрощенное для студентов доказательство теоремы Браудера об аппроксимации решений эллиптического уравнения решениями того же уравнения в более широкой области. Теорема Браудера играет очень важную роль при построении базисных систем решений и легко переносится как на стационарную, так и нестационарную системы Стокса.

Глава 1

Оператор div с краевыми условиями Дирихле

Первая глава посвящена построению L_p-теории оператора div с краевыми условиями Дирихле. Дается вывод явного представления для правого обратного оператора и устанавливаются коэрцитивные L_p-оценки. Эта краевая задача хотя и носит вспомогательный характер, в математической гидродинамике встречается буквально на каждом шагу. В частности, на использовании разрешающего оператора этой задачи строится самая простая схема локализации для линейной системы Стокса.

1.1. Правый обратный для оператора div

В этом разделе для ограниченной области $\Omega \in \mathbb{R}^n$ рассматривается задача Дирихле

$$\operatorname{div} v = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{1.1.1}$$

$$v|_{\partial\Omega} = 0. \tag{1.1.2}$$

Решение задачи (1.1.1)–(1.1.2) ищется в классе $v \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega; \mathbb{R}^n)$ при произвольной заданной функции $f \in L_p(\Omega)$, удовлетворяющей необходимому для ограниченных областей условию согласования

$$\int\limits_\Omega f(x)\, dx = 0. \tag{1.1.3}$$

Требуется также, чтобы решение удовлетворяло неравенству

$$\sum_{|\alpha|=1} \|D_x^\alpha v\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|f\|_{L_p(\Omega)} \tag{1.1.4}$$

о постоянной $C > 0$, не зависящей от f. Результаты этой главы опубликованы в работах автора [6, 7]. До работ [6, 7] задача (1.1.1)–(1.1.2) рассматривалась, например, в [23, 25]. Путь решения задачи (1.1.1)–(1.1.2), предложенный в [23], не позволяет получить решение, удовлетворяющее неравенству (1.1.4). В [25] приводится доказательство существования решения задачи (1.1.1)–(1.1.2), удовлетворяющего неравенству (1.1.4), но только для случая $p = 2$. Преимуществом нашего подхода является явная конструкция решения задачи (1.1.1)–(1.1.2), охватывающая сразу все случаи $n \geqslant 2$ и $1 < p < \infty$. Наличие явной конструкции решения позволяет легко устанавливать зависимость гладкости решения v задачи (1.1.1)–(1.1.2) от гладкости правой части f. Наличие явной конструкции решения задачи (1.1.1)–(1.1.2) сыграет также важную роль в следующих главах при получении априорных оценок для стационарной и нестационарной систем Стокса в произвольной ограниченной области с гладкой границей.

Задача (1.1.1)–(1.1.2) с условием (1.1.3) разрешима в $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ не для всякой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Все зависит от гладкости границы $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Мы будем предполагать, что область Ω удовлетворяет условию конуса. Это — минимальная гладкость границы $\partial\Omega$, обеспечивающая существование в $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ решений задачи (1.1.1)–(1.1.2) для ограниченной области Ω при любых $f \in L_p(\Omega)$, удовлетворяющих условию (3). Напомним, что область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию конуса, если (см. [50]) существует конечный открытый выпуклый конус C такой, что каждая точка $x \in \Omega$ является вершиной некоторого конуса C_x, содержащегося в Ω и конгруэнтного конусу C.

Уточним сначала, в чем именно состоит проблема разрешимости задачи (1.1.1)–(1.1.2) для ограниченной области Ω. Обозначим

$$\widetilde{L}_p(\Omega) = \{f(x) \in L_p(\Omega) \colon \int\limits_\Omega f(x)\,dx = 0\} \tag{1.1.5}$$

и заметим, что область значений $\mathcal{R}(\mathrm{div})$ оператора

$$\mathrm{div}\colon \ \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega;\mathbb{R}^n) \to \widetilde{L}_p(\Omega) \tag{1.1.6}$$

всюду плотна в $\widetilde{L}_p(\Omega)$ при $1 < p < \infty$. Действительно, оператором, сопряженным к (1.1.6), будет линейный дифференциальный оператор

$$\mathrm{grad}\colon \widetilde{L}_{p'}(\Omega) \to W^{-1}_{p'}(\Omega; \mathbb{R}^n) \tag{1.1.7}$$

поскольку $\mathcal{R}(\mathrm{div}) \subset \widetilde{L}_p(\Omega)$ и $\big(\widetilde{L}_p(\Omega)\big)^* = \widetilde{L}_{p'}(\Omega)$, где $p' = p/(p-1)$, $1 < p < \infty$. Но оператор (1.1.7) имеет тривиальное ядро, откуда и следует, что область значений $\mathcal{R}(\mathrm{div})$ оператора (1.1.6) всюду плотна в пространстве $\widetilde{L}_p(\Omega)$.

Таким образом, разрешимость в $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega; \mathbb{R}^n)$ задачи (1.1.1)–(1.1.2) эквивалентна замкнутости области значений оператора (1.1.6) в $\widetilde{L}_p(\Omega)$ или, что то же самое, в $L_p(\Omega)$. Однако область значений оператора (1.1.6) замкнута в $L_p(\Omega)$ не для всякой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. В частности, область значений $\mathcal{R}(\mathrm{div})$ оператора (1.1.6) не будет замкнута в $L_p(\Omega)$, если Ω не удовлетворяет условию конуса.

Из леммы Гальярдо (см. [50], с. 93) следует, что всякую ограниченную область, удовлетворяющую условию конуса, можно представить в виде объединения конечного числа ограниченных областей, каждая из которых звездна относительно некоторого содержащегося в ней шара. Таким образом, для всякой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, удовлетворяющей условию конуса, найдется конечный набор ограниченных областей $\{\Omega_j\}_{j=1}^N$ такой, что Ω представима в виде

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^N \Omega_j\,, \tag{1.1.8}$$

где каждая из областей Ω_j, $j = 1, \ldots, N$ звездна относительно некоторого открытого шара K_j, $\overline{K_j} \subset \Omega_j$. В связи с этим задачу (1.1.1)–(1.1.2) решим сначала для ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, звездной относительно открытого шара K, $\overline{K} \subset \Omega_j$.

Пусть q — любая функция из $\overset{\circ}{C}{}^\infty(\mathbb{R}^n)$ такая, что $\operatorname{supp} q \subset K$ и

$$\int\limits_K q(x)\,dx = 1.$$

Рассмотрим векторное поле

$$v(x) = \int\limits_\Omega f(y) \Big\{ \frac{x-y}{|x-y|^n} \int\limits_{|x-y|}^\infty q\Big(y + \xi \frac{x-y}{|x-y|}\Big) \xi^{n-1}\, d\xi \Big\} dy. \tag{1.1.9}$$

Теорема 1.1.1. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — *любая ограниченная область, звездная относительно открытого шара* K, $\overline{K} \subset \Omega_j$, $n \geqslant 2$, $1 < p < \infty$, *и* f — *произвольная функция из* $L_p(\Omega)$. *Тогда векторное поле* (1.1.9) *принадлежит* $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$, *удовлетворяет неравенству* (1.1.4) *о постоянной* $C > 0$, *зависящей только от* n,p *и отношения диаметров* Ω *и* K. *Если при этом для* f *выполняется условие* (1.1.3), *то векторное поле* (1.1.9) *удовлетворяет почти всюду в* Ω *уравнению* (1.1.1).

Доказательство. Покажем, что векторное поле (1.1.9) принадлежит пространству Соболева $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$, если $1 < p < \infty$. Для этого продолжим f нулем на все $\mathbb{R}^n$, сохранив для продолжения прежнее обозначение. При этом область интегрирования Ω в (1.1.9) можно заменить на $\mathbb{R}^n$. Тогда для $k = 1, \ldots, n$ имеем

$$\frac{\partial v}{\partial x_k}(x) = f(x) \int\limits_{\mathbb{R}^n} q(x+y) \frac{y y_k}{|y|^2}\, dy + V_k(x), \tag{1.1.10}$$

где V_k — векторные поля вида

$$V_k(x) = V.p. \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y) \frac{\partial}{\partial x_k} \Big\{ \frac{x-y}{|x-y|^n} \int\limits_{|x-y|}^{\infty} q\Big(y + \xi \frac{x-y}{|x-y|}\Big) \xi^{n-1}\, d\xi \Big\} dy.$$

Чтобы получить (1.1.10), мы заменили в (1.1.9) переменную интегрирования y на $x - y$. Затем, после дифференцирования, произвели интегрирование по частям и сделали обратную замену $x - y$ на y.

Обозначим

$$Q(x, y, \xi) = q\Big(y + \xi \frac{x-y}{|x-y|}\Big) - q\Big(x + \xi \frac{x-y}{|x-y|}\Big).$$

Тогда векторные поля V_k можно представить в виде

$$V_k(x) = \sum_{m=1}^{3} V_{k,m}(x), \tag{1.1.11}$$

где векторные поля $V_{k,m}$ имеют вид

$$V_{k,1}(x) = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\frac{\partial}{\partial x_k}\Big\{\frac{x-y}{|x-y|^n}\int\limits_0^{|x-y|} q\Big(y+\xi\frac{x-y}{|x-y|}\Big)\xi^{n-1}\,d\xi\Big\}dy,$$

$$V_{k,2}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\frac{\partial}{\partial x_k}\Big\{\frac{x-y}{|x-y|^n}\int\limits_0^{\infty} q\Big(y+\xi\frac{x-y}{|x-y|}\Big)\xi^{n-1}\,d\xi\Big\}dy,$$

$$V_{k,3}(x) = V.p.\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\frac{\partial}{\partial x_k}\Big\{\frac{x-y}{|x-y|^n}\int\limits_0^{\infty} q\Big(y+\xi\frac{x-y}{|x-y|}\Big)\xi^{n-1}\,d\xi\Big\}dy$$

с индексами $k = 1,\ldots,n$.

Функции f и q имеют компактные в $\mathbb{R}^n$ носители, вследствие чего интегралы, представляющие $V_{k,1}(x)$ и $V_{k,2}(x)$, сходятся почти для всех $x \in K_R$, где K_R — какой-либо открытый шар радиуса $R > 0$, центр которого совпадает с центром шара K, и такой, что $\overline{\Omega} \subset K_R$. Что же касается интеграла, представляющего $V_{k,3}(x)$, то ниже будет показано, что из теоремы Зигмунда–Кальдерона [57] следует сходимость в смысле главного значения интеграла, представляющего $V_{k,3}(x)$, почти для всех $x \in K_R$.

Для всех $y, z \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\sum_{k=1}^{n}\Big|\frac{\partial}{\partial z_k}\Big\{\frac{z}{|z|^n}\int\limits_0^{|z|} q\Big(y+\xi\frac{z}{|z|}\Big)\xi^{n-1}\,d\xi\Big\}\Big| \leqslant C_1\|q\|_{C^1(\overline{K})}, \tag{1.1.12}$$

где $C^l(\overline{K})$ — банахово пространство l раз непрерывно дифференцируемых на $\overline{K}$ функций с sup-нормой, а постоянная C_1 зависит лишь от n.

Не ограничивая общности, можно считать, что центр шара K совпадает с началом координат. В таком случае с началом координат будет совпадать и центр шара K_R.

Выберем и зафиксируем какую-либо функцию q_0 из $\overset{\circ}{C}{}^\infty(\mathbb{R}^n)$ с носителем в шаре $\{x\colon x \in \mathbb{R}^n\}$ такую, что

$$\int\limits_K q_0(x)\,dx = 1.$$

Функцию q возьмем в виде $q(x) = r^{-n}q_0(x/r)$, где $r > 0$ — радиус шара K. Тогда в силу (1.1.12) будем иметь

$$\sum_{k=1}^{n}\big\|V_{k,1}\big\|_{L_p(K_R;\mathbb{R}^n)} \leqslant C_1'\|f\|_{L_p(\Omega)}, \tag{1.1.13}$$

где постоянная C_1' зависит лишь от n, p, R и r.

Поскольку $\operatorname{supp} f \subset K_R$ и $\operatorname{supp} q \subset K$, то для всех $x \in K_R$ выполняется неравенство

$$\big|V_{k,2}(x)\big| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\cdot\Big|\frac{\partial}{\partial x_k}\Big\{\frac{x-y}{|x-y|^n}\int\limits_0^{R+r} Q(x,y,\xi)\xi^{n-1}\,d\xi\Big\}\Big|\,dy$$

при $k = 1, \ldots, n$. Очевидно, для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$ и $\xi \in \mathbb{R}^1$

$$|Q(x,y,\xi)| \leqslant |x-y|\cdot\|q\|_{C^1(\overline{K})},$$
$$|\nabla_x Q(x,y,\xi)| \leqslant C_2|\xi|\cdot\|q\|_{C^2(\overline{K})} + \|q\|_{C^1(\overline{K})},$$

где постоянная $C_2 > 0$ зависит только от n. Поэтому для всех $x \in K_R$ имеем

$$\sum_{k=1}^n \big|V_{k,2}(x)\big| \leqslant C_2'\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{|x-y|^n}dy, \tag{1.1.14}$$

где C_2' зависит только от n, R и r.

Так как f имеет компактный в носитель, то из (1.1.14) следует, что для $1 < p < \infty$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^n \big\|V_{k,2}\big\|_{L_p(K_R;\mathbb{R}^n)} \leqslant C_2''\|f\|_{L_p(\Omega)} \tag{1.1.15}$$

где постоянная C_2'' зависит лишь от n, p, R и r.

Рассмотрим теперь векторное поле $V_{k,3}$. Удобно представить $V_{k,3}$ в виде

$$V_{k,3}(x) = U_{k,1}(x) + U_{k,2}(x), \quad k = 1, \ldots, n, \tag{1.1.16}$$

где векторные поля $U_{k,1}$ и $U_{k,2}$ имеют вид

$$U_{k,1}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\Big\{\frac{x-y}{|x-y|^n}\int\limits_0^{\infty} \frac{\partial q}{\partial x_k}\Big(y + \xi\frac{x-y}{|x-y|}\Big)\xi^{n-1}\,d\xi\Big\}dy,$$

$$U_{k,2}(x) = V.p.\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)N_k(x, x-y)dy,$$

а через N_k, $k = 1, \ldots, n$, обозначены ядра

$$N_k(x,z) = \frac{\partial}{\partial z_k}\Big\{\frac{z}{|z|^n}\int\limits_0^{\infty} q\Big(y + \xi\frac{z}{|z|}\Big)\xi^{n-1}\,d\xi\Big\}, \quad z \in \mathbb{R}^n.$$

Для $U_{k,1}$, $k = 1, \dots, n$ сразу же получаем оценку вида (1.1.14), из которой с учетом компактности в $\mathbb{R}^n$ носителя f следует оценка

$$\sum_{k=1}^{n} \big\| U_{k,1} \big\|_{L_p(K_R;\mathbb{R}^n)} \leqslant C_3 \|f\|_{L_p(\Omega)} \tag{1.1.17}$$

при $1 < p < \infty$ с постоянной $C_3 > 0$, зависящей только от n, p, R и r. Поскольку $U_{k,2}$, $k = 1, \dots, n$, нужно оценить только в шаре K_R, рассмотрим $U^{(R)}_{k,2}(x) = U_{k,2}(x)\chi_{_R}(x)$, $k = 1, \dots, n$, где $\chi_{_R}$ — характеристическая функция шара K_R. Очевидно, вектор-функцию $U^{(R)}_{k,2}$ можно представить в виде

$$U^{(R)}_{k,2}(x) = V.p.\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y) N^{(R)}_k(x, x-y)\,dy, \quad k = 1, \dots, n, \tag{1.1.18}$$

где ядра

$$N^{(R)}_k(x, z) = \chi_{_R}(x) N_k(x, z), \quad z \in \mathbb{R}^n,\ k = 1, \dots, n. \tag{1.1.19}$$

К сингулярным интегралам (1.1.18) с переменными ядрами (1.1.19) мы собираемся применить теорему Зигмунда–Кальдерона [57]. Для это необходимо проверить, что все требования теоремы [57] выполнены.

Представим ядра (1.1.19) в виде

$$N^{(R)}_k(x, z) = |z|^{-n}\Omega^{(R)}_k\Big(x, \frac{z}{|z|}\Big), \quad z \in \mathbb{R}^n,\ k = 1, \dots, n.$$

Выписав явное представление для угловых вектор-функций $\Omega^{(R)}_k$, нетрудно убедиться, что для любого $\gamma > 1$ выполнено неравенство

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_S \big|\Omega^{(R)}_k\big(x, z)\big)\big|^{\gamma} ds_z < A,$$

где $S = \{z \in \mathbb{R}^n \colon |z| = 1\}$ — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$, A — постоянная, зависящая только от N, γ, R и r.

Заметим теперь, что ядра $N^{(R)}_k$ можно представить также и в виде

$$N^{(R)}_k(x, z) = \chi_{_R}(x)\frac{\partial}{\partial z_k}\Big\{|z|^{-n+1}\Omega^{(R)}_0\Big(x, \frac{z}{|z|}\Big)\Big\}, \quad z \in \mathbb{R}^n,\ k = 1, \dots, n,$$

где через $\Omega^{(R)}_0$ обозначена угловая вектор-функция

$$\Omega^{(R)}_0\Big(x, \frac{z}{|z|}\Big) = \int\limits_0^{\infty} q\Big(y + \xi\frac{z}{|z|}\Big)\xi^{n-1}\,d\xi.$$

Очевидно, ядро $\Omega_0^{(R)}\Big(x,\dfrac{z}{|z|}\Big)$ бесконечно дифференцируемо по x и z при $z\neq 0$, а переходя к сферическим координатам, нетрудно убедиться, что

$$\int\limits_S \frac{\partial}{\partial z_k}\Big\{|z|^{-n+1}\Omega_0^{(R)}\Big(x,\frac{z}{|z|}\Big)\Big\}ds_z=0,\quad k=1,\dots,n,$$

для всех $x\in\mathbb{R}^n$, откуда получаем

$$\int\limits_S \Omega_k^{(R)}\big(x,z)\big)ds_z=0,\quad k=1,\dots,n,$$

для всех $x\in\mathbb{R}^n$.

Таким образом, ядра (1.1.19) удовлетворяют всем требованиям теоремы Зигмунда–Кальдерона (см. теорему 2 в [57]), из которой следует сходимость интегралов (1.1.18) в смысле главного значения почти для всех $x\in\mathbb{R}^n$, а также оценка

$$\sum_{k=1}^n\big\|U_{k,2}\big\|_{L_p(K_R;\mathbb{R}^n)}=\sum_{k=1}^n\big\|U_{k,2}^{(R)}\big\|_{L_p(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)}\leqslant C_4\|f\|_{L_p(\Omega)}\tag{1.1.20}$$

при $1<p<\infty$ с постоянной $C_4>0$, зависящей только от n,p,R и r. В результате из (1.1.10),(1.1.11),(1.1.13),(1.1.15)–(1.1.17), (1.1.20) получаем

$$\sum_{k=1}^n\Big\|\frac{\partial v}{\partial x_k}\Big\|_{L_p(K_R;\mathbb{R}^n)}\leqslant C_5\|f\|_{L_p(\Omega)}\tag{1.1.21}$$

при $1<p<\infty$ с постоянной $C_5>0$, зависящей только от n,p,R и r. А так как $R>0$ — любое число, для которого $\overline{\Omega}\subset K_R$, то из (1.1.21) следует, что векторное поле (1.1.9) принадлежит пространству $W^1_{p,loc}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$.

Поскольку область Ω звездна относительно содержащегося в ней шара, то векторное поле $v(x)$ вида (1.1.9) будет принадлежать $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{supp}|v|\subset\overline{\Omega}$. Покажем теперь, что $\operatorname{supp}|v|\subset\overline{\Omega}$.

Заметим, что для любого $x\notin\overline{K}$ носитель интеграла

$$w(x,y)=\int\limits_{|x-y|}^{\infty} q\Big(y+\xi\frac{x-y}{|x-y|}\Big)\xi^{n-1}\,d\xi\tag{1.1.22}$$

как функции переменной y при каждом фиксированном $x\notin\overline{K}$ содержится внутри полной конической поверхности с вершиной в точке x, описанной вокруг шара K, и причем в той из двух ее полостей, которая не содержит шара K. Действительно, если $x \notin \overline{K}$ а y не содержится внутри указанной полости полной конической поверхности, то $y + \xi \dfrac{x-y}{|x-y|} \notin K$ для любых $\xi \geqslant |x-y|$, так как $\operatorname{supp} q \subset K$. Поэтому для любых $\xi \geqslant |x-y|$ имеем

$$q\Big(y + \xi \frac{x-y}{|x-y|}\Big) = 0,$$

если $x \notin \overline{K}$ и y не содержится внутри указанной полости полной конической поверхности, откуда следует, что для тех же значений x и y интеграл (1.1.22) равен нулю. По этой причине

$$\operatorname{supp} w(x,y) \cap \operatorname{supp} f(y) = \varnothing$$

для каждого фиксированного $x \notin \overline{\Omega}$. А тогда из (1.1.9) следует, что $v(x) = 0$ для всех $x \notin \overline{K}$, т. е. $\operatorname{supp}|v| \subset \overline{\Omega}$. Это означает, что векторное поле $v(x)$ вида (1.1.9) принадлежит $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega; \mathbb{R}^n)$.

Остается проверить, что векторное поле (1.1.9) удовлетворяет почти всюду в Ω уравнению (1.1.1), если выполнено условие (1.1.3). Согласно (1.1.10) почти для всех $x \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\operatorname{div} v(x) = f(x) \int\limits_{\mathbb{R}^n} q(y)dy + \\ + V.p. \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y) \operatorname{div}_x \Big\{ \frac{x-y}{|x-y|^n} \int\limits_0^\infty q\Big(y + \xi \frac{x-y}{|x-y|}\Big) \xi^{n-1}\, d\xi \Big\} dy$$

А учитывая, что для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$ таких, что $x \neq y$,

$$\operatorname{div}_x \Big\{ \frac{x-y}{|x-y|^n} \int\limits_0^\infty q\Big(y + \xi \frac{x-y}{|x-y|}\Big) \xi^{n-1}\, d\xi \Big\} = -q(x),$$

и используя (1.1.8), получаем

$$\operatorname{div}_x v(x) = f(x) - q(x) \int\limits_\Omega f(y)dy$$

почти для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Стало быть, векторное поле (1.1.9) удовлетворяет почти всюду в Ω уравнению (1.1.1), если выполнено условие (1.1.3).

В силу (20) для векторного поля $v(x)$ вида (1.1.9) справедлива оценка (1.1.4) с постоянной $C = C_5$. Уточним зависимость постоянной C от диаметров Ω и K.

Пусть $\delta > 0$ — диаметр области Ω. По предположению, функция $q(x) = r^{-n}q_0(x/r)$, где $r > 0$ — радиус шара K. Перепишем представление (1.1.9) в виде

$$v(x) = r^{-n} \int\limits_{|y|<\delta} f(y)\Big\{\frac{x-y}{|x-y|^n} \int\limits_{|x-y|}^{\infty} q_0\Big(\frac{y}{r} + \frac{\xi}{r}\cdot\frac{x-y}{|x-y|}\Big)\xi^{n-1}\,d\xi\Big\}dy,$$

где $f(x) = 0$ при $x \in \mathbb{R}^n$. С помощью замен переменных интегрирования v можно представить теперь в виде $v(x) = \delta v_0(x/\delta)$, где

$$v_0(x) = \Big(\frac{\delta}{r}\Big)^{-n} \int\limits_{|y|<1} f(\delta y)\Big\{\frac{x-y}{|x-y|^n} \int\limits_{|x-y|}^{\infty} q_0\Big(y\cdot\frac{\delta}{r} + \xi\cdot\frac{\delta}{r}\cdot\frac{x-y}{|x-y|}\Big)\xi^{n-1}\,d\xi\Big\}dy.$$

К векторному полю $v_0(x)$ применима оценка (1.1.21), согласно которой

$$\sum_{|\alpha|=1}\Big(\int\limits_{|x|<1} |D_x^\alpha v(x)|^p dx\Big)^{1/p} \leqslant C\Big(\int\limits_{|x|<1} |f(x)|^p dx\Big)^{1/p}$$

с некоторой постоянной $C > 0$, зависящей только от n, p и отношения δ/r, откуда для $v(x) = \delta v_0(x/\delta)$ с помощью замен переменных интегрирования получим оценку (1.1.4) с той же самой постоянной C. Таким образом, постоянная C в оценке (1.1.4) для векторного поля (1.1.9) зависит только от n, p и отношения диаметра области Ω к диаметру шара K. Тем самым теорема 1 доказана.

Отметим, что представление (1.1.9) решения задачи (1.1.1)–(1.1.2) напоминает хорошо известное интегральное представление С.Л. Соболева для дифференцируемой функции через ее производные первого порядка (см., например, [50, 56]).

Следствие 1.1.1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, звездная относительно открытого шара K, $\overline{K} \subset \Omega$, $n \geqslant 2$, $1 < p < \infty$. Тогда для любой $\psi \in \widetilde{L}_p(\Omega)$ выполняется неравенство

$$\|\psi\|_{L_p(\Omega)} \leqslant 2C\|\nabla\psi\|_{W_p^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^n)}\,, \tag{1.1.23}$$

где C — постоянная из неравенства (1.1.4).

Доказательство. Заметим, что

$$\|\psi\|^p_{L_p(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} \psi(x) f(x)\, dx, \tag{1.1.24}$$

где функция f имеет вид

$$f(x) = \psi(x)|\psi(x)|^{p-2} - \frac{1}{\operatorname{mes}\Omega} \int\limits_{\Omega} \psi(y)|\psi(y)|^{p-2}\, dy,$$

т. е. функция f удовлетворяет условию (1.1.3). При этом $f \in L_{p'}(\Omega)$ с показателем $p' = p/(p-1)$ и

$$\|\psi\|_{L_{p'}(\Omega)} \leqslant 2\|\psi\|^{p-1}_{L_p(\Omega)} \tag{1.1.25}$$

при $1 < p < \infty$. Из теоремы 1.1.1 следует, что f можно представить в виде $f(x) = \operatorname{div} v(x)$, где векторное поле $v \in W^1_{p'}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ и имеет вид (1.1.9). А тогда из (1.1.24) находим

$$\|\psi\|^p_{L_p(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} \psi(x) \operatorname{div} v(x)\, dx = -\langle \nabla\psi, v\rangle,$$

откуда, пользуясь (1.1.4) и (1.1.25), получаем неравенство (1.1.23). Таким образом, следствие из теоремы 1.1.1 доказано.

В более общем случае справедлива

Теорема 1.1.2. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *— любая ограниченная область, удовлетворяющая условию конуса,* $n \geqslant 2$, $1 < p < \infty$. *Тогда найдется постоянная* $C_\Omega > 0$, *зависящая только от* n, p *и* Ω, *такая, что для любой* $f \in \widetilde{L}_p(\Omega)$ *существует векторное поле* $v \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega; \mathbb{R}^n)$, *удовлетворяющее почти всюду в* Ω *уравнению* (1.1.1), *и для которого выполняется неравенство*

$$\|v\|_{W^1_p(\Omega; \mathbb{R}^n)} \leqslant C_\Omega \|f\|_{L_p(\Omega)}\,. \tag{1.1.26}$$

Доказательство. Как уже было сказано, всякую ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, удовлетворяющую условию конуса, можно представить в виде (1.1.8). Заметим, что любую функцию $f \in L_p(\Omega)$, удовлетворяющую условию (1.1.3), можно представить в виде

$$f(x) = \sum_{j=1}^{N} f_j(x), \quad x \in \Omega, \tag{1.1.27}$$

где $f_j \in L_p(\Omega)$ и удовлетворяет условию (1.1.3), а $\operatorname{supp} f_j \subset \overline{\Omega}_j$, $j = 1, \ldots, N$. При этом каждая из областей (1.1.3) звездна относительно некоторого шара K_j, $\overline{K}_j \subset \Omega_j$, $j = 1, \ldots, N$, и выполнено неравенство

$$\sum_{j=1}^{N} \|f_j\|_{L_p(\Omega)} \leqslant C' \|f\|_{L_p(\Omega)} \tag{1.1.28}$$

с постоянной $C' > 0$, зависящей только от n, p и Ω (см. [7]). Согласно теореме 1.1.1, найдутся векторные поля $\{v^j\}_{j=1}^N$ такие, что для каждого $j = 1, \ldots, N$ векторное поле $v^j \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega_j; \mathbb{R}^n)$, удовлетворяет почти всюду в Ω_j уравнению $\operatorname{div} v^j = f_j(x)$, а также удовлетворяет неравенству

$$\|v^j\|_{W^1_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} \leqslant C'_j \|f_j\|_{L_p(\Omega_j)}\,, \tag{1.1.29}$$

где для каждого $j = 1, \ldots, N$ постоянная C'_j зависит только от n, p и отношения диаметров Ω_j и K_j.

Доопределим векторные поля v^j, $j = 1, \ldots, N$, нулем на $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$ и положим по определению

$$v(x) = \sum_{j=1}^{N} v^j(x), \quad x \in \Omega. \tag{1.1.30}$$

Очевидно, что такое $v \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega; \mathbb{R}^n)$, а из оценок (1.1.28),(1.1.29) следует оценка (1.1.26) с постоянной $C_\Omega > 0$, зависящей только от n, p и Ω. Кроме того, в силу (1.1.27) векторное поле v вида (1.1.30) удовлетворяет почти всюду в Ω уравнению $\operatorname{div} v = f(x)$. Таким образом, теорема доказана.

Чтобы получить явную конструкцию решения задачи (1.1.1)–(1.1.2) для какой-либо конкретной ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, удовлетворяющей условию конуса, достаточно представить эту область Ω в виде (1.1.8), что всегда возможно.

1.2. Коэрцитивные L_p-оценки явного решения

Возникает естественный вопрос: будет ли повышаться гладкость решений задачи (1.1.1)–(1.1.2) с повышением гладкости правой части? Ответ на этот вопрос нам будет достаточно получить только для ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, звездной относительно некоторого содержащегося в ней шара. С этой целью рассмотрим интегральный оператор T, который определим с помощью равенства

$$Tf(x) = \int\limits_{\Omega} f(y)\Big\{\frac{x-y}{|x-y|^n}\int\limits_{|x-y|}^{\infty} q\Big(y+\xi\frac{x-y}{|x-y|}\Big)\xi^{n-1}\,d\xi\Big\}dy,\ \ x\in\Omega,$$

где q — функция из (1.1.9). Справедлива

Теорема 1.2.1. *Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ — ограниченная область, звездная относительно открытого шара K, $\overline{K}\subset\Omega$, $n\geqslant 2$, $1<p<\infty$ и $l\geqslant 1$ — целое число. Тогда $T\colon\ \overset{\circ}{W}{}_p^l(\Omega)\to\overset{\circ}{W}{}_p^{l+1}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ и имеет место оценка*

$$\sum_{|\alpha|=l+1}||D_x^\alpha v||_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)}\leqslant C\sum_{|\alpha|=l}||D_x^\alpha f||_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} \tag{1.2.1}$$

с постоянной $C>0$, зависящей только от n,p,l и отношения диаметров Ω и K.

Доказательство. Обозначим $v(x) = Tf(x)$, т. е. v имеет вид (1.1.9). Функцию f доопределим нулем на $\mathbb{R}^n\backslash\Omega$. Тогда $f\in\overset{\circ}{W}{}_p^l(\Omega)$, а (1.1.9) можно переписать в виде

$$v(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\Big\{\frac{y}{|y|^n}\int\limits_{|y|}^{\infty} q\Big(x-y+\xi\frac{y}{|y|}\Big)\xi^{n-1}\,d\xi\Big\}dy,$$

откуда и из формулы Лейбница находим

$$D_x^\alpha v(x) = \sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\int\limits_{\mathbb{R}^n} D_x^\beta f(x-y)\Big\{\frac{y}{|y|^n}\int\limits_{|y|}^{\infty} q\Big(x-y+\xi\frac{y}{|y|}\Big)\xi^{n-1}\,d\xi\Big\}dy, \tag{1.2.2}$$

где α,β — мультииндексы, причем $|\alpha|\leqslant l$, а

$$\binom{\alpha}{\beta} = \prod_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j!}{\beta_j!(\alpha_j-\beta_j)!}$$

— биномиальные коэффициенты.

Дифференцируя равенство (1.2.2) по x_k, интегрируя по частям и делая замену переменной y на $x-y$, получим

$$\frac{\partial}{\partial x_k} D_x^\alpha v(x) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D_x^\beta f(x) \int\limits_{\mathbb{R}^n} q_{\alpha,\beta}(x+y) \frac{y y_k}{|y|^2}\, dy + V_k(x), \tag{1.2.3}$$

где $|\alpha| \leqslant l$, $q_{\alpha,\beta}(x) = D_x^{\alpha-\beta} q(x)$ и векторные поля V_k имеют вид

$$\begin{aligned} V_k(x) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} V.p. \int\limits_{\mathbb{R}^n} D_x^\beta f(y) \frac{\partial}{\partial x_k} \Big\{ \frac{x-y}{|x-y|^n} \times \\ \times \int\limits_{|y|}^{\infty} q_{\alpha,\beta}\Big(y + \xi \frac{x-y}{|x-y|} \Big) \xi^{n-1}\, d\xi \Big\} dy, \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

$k = 1, \ldots, n$. Так как $\beta \leqslant \alpha$ и $|\alpha| \leqslant l$, то $\beta \leqslant l$, т. е. в правую часть (1.2.3) входят производные от f порядка не выше l.

Векторные поля (1.2.4) оцениваются тем же путем, что и в теореме 1.1.1, откуда и из (1.2.3) следует оценка

$$\sum_{|\alpha| = l+1} ||D_x^\alpha v||_{L_p(K_R;\mathbb{R}^n)} \leqslant C' \sum_{|\alpha| = l} ||D_x^\alpha f||_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)}\,, \tag{1.2.5}$$

где K_R — шар из доказательства теоремы 1.1.1, а постоянная $C' > 0$ зависит только от n, p, l, Ω и R.

Так как $R > 0$ — любое число, для которого $\overline{\Omega} \subset K_R$, то на основании (1.2.5) заключаем, что $v \in W_{p,loc}^{l+1}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$. А используя те же, что и в доказательстве теоремы 1.1.1, рассуждения, нетрудно убедиться, что носители векторных полей (1.2.5) принадлежат Ω при $|\alpha| \leqslant l$. Поэтому $v \in \overset{\circ}{W}{}_p^{l+1}(\Omega;\mathbb{R}^n)$, так как Ω звездна относительно содержащегося в ней шара. Из оценки (1.2.5) следует оценка (1.2.1). Зависимость постоянной C в (1.2.1) только от n, p, l и отношения диаметров Ω и K устанавливается тем же путем, что и в теореме 1.1.1. Теорема доказана.

Через $[T, L]$ обозначим коммутатор линейных операторов T и L, т. е. $[T, L] = TL - LT$. В силу теорем 1.1.1,1.2.1 оператор

$$[T, D_x^\alpha]\colon\ \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega) \cap W_p^2(\Omega) \to L_p(\Omega;\mathbb{R}^n),$$

если $|\alpha| = 2$ и область Ω звездна относительно содержащегося в ней шара. Справедлива

Теорема 1.2.2. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, звездная относительно открытого шара K, $\overline{K} \subset \Omega$, $n \geqslant 2$, $1 < p < \infty$. И пусть α — любой мультииндекс такой, что $|\alpha| = 2$. Тогда существует постоянная $C > 0$, зависящая только от n, p и диаметров Ω и K, такая, что*

$$\|[T, D_x^\alpha] f\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} \leqslant C\big(\|\nabla f\|_{L_p(\partial\Omega;\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)}\big) \tag{1.2.6}$$

для всех $f \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega) \cap W_p^2(\Omega)$.

Доказательство. Через T^* обозначим линейный интегральный оператор, который определим с помощью равенства

$$T^* w(x) = -\int\limits_{\Omega} \Big(w(y), \frac{x-y}{|x-y|^n}\Big) \Big\{ \int\limits_{|x-y|}^{\infty} q\Big(x - \xi \frac{x-y}{|x-y|}\Big) \xi^{n-1}\, d\xi \Big\}\, dy \tag{1.2.7}$$

для всех $w \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega;\mathbb{R}^n)$, где q — функция из представления (1.1.9). Очевидно, равенство (1.2.7) можно переписать в виде

$$T^* w(x) = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(w(x-y), \frac{y}{|y|^n}\Big) \Big\{ \int\limits_{|x-y|}^{\infty} q\Big(x - \xi \frac{y}{|y|}\Big) \xi^{n-1}\, d\xi \Big\}\, dy,$$

доопределив w нулем Ω. В таком случае $w \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ и

$$\begin{aligned} D_x^\alpha T^* w(x) = -\sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(D_x^\beta w(x-y), \frac{y}{|y|^n}\Big) \times \\ \times \Big\{ \int\limits_{|y|}^{\infty} D_x^{\alpha-\beta} q\Big(x - \xi \frac{x-y}{|x-y|}\Big) \xi^{n-1}\, d\xi \Big\}\, dy, \end{aligned} \tag{1.2.8}$$

в силу формулы Лейбница.

Поскольку $|\alpha| = 2$, то, интегрируя в (1.2.8) по частям и пользуясь теоремой Зигмунда–Кальдерона [57], получим

$$\|D_x^\alpha T^* w - T^* D_x^\alpha w\|_{L_p(K_R)} \leqslant C_1 \|w\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)}\,, \tag{1.2.9}$$

где K_R — шар из доказательства теоремы 1.1.1, а постоянная $C_1 > 0$ зависит только от n, p, R и диаметра K. Из теоремы Зигмунда–Кальдерона [57] следует также оценка

$$\|T^* w\|_{W_p^1(K_R)} \leqslant C_2 \|w\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} \tag{1.2.10}$$

с постоянной $C_2 > 0$, зависящей только от n, p, R и диаметра K.

Заметим, что область Ω имеет липшицеву границу (см. [77]) в смысле определения в [50] на с. 83. Все параметры липшицевой границы $\partial\Omega$ из определения [50] можно выразить через диаметры Ω и K (см. [77]). Поэтому из (1.2.10) следует, что

$$\|T^* w\|_{L_p(\partial\Omega)} \leqslant C_3 \|w\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} \tag{1.2.11}$$

с постоянной $C_3 > 0$, зависящей только от n, p, R и диаметров Ω и K. Для всех $f \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega) \cap W^2_p(\Omega)$ имеем

$$\int\limits_\Omega \big([T, D^\alpha_x] f(x), w(x)\big)\, dx = \int\limits_\Omega D^\alpha_x f(x) T^* w(x)\, dx - \int\limits_\Omega f(x) T^* D^\alpha_x w\, dx,$$

откуда, интегрируя по частям, находим

$$\Big|\int\limits_\Omega \big([T, D^\alpha_x] f(x), w(x)\big)\, dx\Big| \leqslant \int\limits_\Omega |\nabla f(x)| \cdot |T^* w(x)|\, ds + \\ + \int\limits_\Omega |f(x)| \cdot |D^\alpha_x T^* w(x) - T^* D^\alpha_x w(x)|\, dx.$$

А тогда из неравенства Гельдера и оценок (1.2.9),(1.2.11) следует, что для всех $f \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega) \cap W^2_p(\Omega)$ и $w \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega;\mathbb{R}^n)$ справедлива оценка

$$\Big|\int\limits_\Omega \big([T, D^\alpha_x] f(x), w(x)\big)\, dx\Big| \leqslant C\big\{\|\nabla f\|_{L_p(\partial\Omega;\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)}\big\} \cdot \|w\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} \tag{1.2.12}$$

с постоянной $C > 0$, зависящей только от n, p и диаметров Ω и K, где $p' = p/(p-1)$, $1 < p < \infty$. Но при $1 < p < \infty$ имеем

$$\|v\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} = \sup_{w \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega;\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}} \frac{\Big|\int\limits_\Omega \big(v(x), w(x)\big)\, dx\Big|}{\|w\|_{L_{p'}(\Omega;\mathbb{R}^n)}} \tag{1.2.13}$$

для всех $v \in L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)$. Поэтому из (1.2.12) следует (1.2.6). Теорема доказана.

Отметим, что теоремы 1.2.1,1.2.2 будут справедливы и для любой ограниченной области Ω с липшицевой границей, если соответствующим образом определить оператор T (см. [7]).

Теорема 1.2.3. *Пусть$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, звездная относительно открытого шара K, $\overline{K} \subset \Omega$, $n \geqslant 2$, $1 < p < \infty$. Тогда существует постоянная $C > 0$, зависящая только от n, p и отношения диаметров Ω и K, такая, что для любого векторного поля $F \in W_p^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$, удовлетворяющего условию*

$$F\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1.2.14}$$

где ν — нормаль к $\partial\Omega$, справедливо неравенство

$$\|T \operatorname{div} F\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|F\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)}. \tag{1.2.15}$$

Доказательство. Для любого $w \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$ имеем

$$\int\limits_\Omega \big(T \operatorname{div} F(x), w(x)\big)\, dx = \int\limits_\Omega \operatorname{div} F(x) T^* w(x)\, dx, \tag{1.2.16}$$

где оператор T^* определен равенством (1.2.7). Интегрируя в (1.2.16) по частям, получим, пользуясь неравенством Гельдера и (1.2.14),

$$\Big|\int\limits_\Omega \big(T \operatorname{div} F(x), w(x)\big)\, dx\Big| \leqslant \|F\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} \|\nabla T^* w\|_{L_{p'}(\Omega;\mathbb{R}^n)}\,. \tag{1.2.17}$$

А из (1.2.10) следует, что

$$\|\nabla T^* w\|_{L_{p'}(\Omega;\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|w\|_{L_{p'}(\Omega;\mathbb{R}^n)} \tag{1.2.18}$$

с постоянной $C > 0$, зависящей только от n, p и диаметров Ω и K. Используя растяжения, тем же путем, что и в доказательстве теоремы 1.1.1, нетрудно убедиться, что наилучшая постоянная C в (1.2.18) зависит только от n, p и отношения диаметров Ω и K. Из (1.2.17),(1.2.18) в силу (1.2.13) следует неравенство (1.2.15) с постоянной $C > 0$, зависящей только от n, p и отношения диаметров Ω и K. Теорема доказана.

Результаты этой главы играют очень важную роль при получении априорных L_p-оценок решений начально-краевой задачи для линеаризованной системы Навье–Стокса без конвективных членов, которую обычно называют системой Стокса. Использование построенного в этой главе правого обратного для оператора div существенно упрощает вывод локальных L_p-оценок для системы Стокса. Дело в том, что локализация нарушает соленоидальность решения. Для стационарной системы Стокса простое решение проблемы локализации, найденное Л. Каттабригой в его знаменитой статье [58], сводится к замене однородного уравнения $\operatorname{div} v = 0$ на неоднородное $\operatorname{div} v = g$. Для нестационарной системы Стокса такое простое решение уже не годится, так как оператор div уменьшает порядок гладкости v на единицу по пространственным переменным, что равносильно уменьшению гладкости v на $1/2$ по времени. При этом никакой правый обратный для оператора div не сможет повысить гладкость правой части g по времени, ввиду независимости оператора div от времени. Поэтому от правой части g в нестационарном случае требуется, вообще говоря, гладкость больше индуцированной уравнением $\operatorname{div} v = g$, что исключает использование локализации по Каттабриге в нестационарном случае. При выводе априорных L_p-оценок для нестационарной системы Стокса решение проблемы локализации возможно только при использовании такого правого обратного для оператора div, для которого справедлива оценка коммутатора типа (1.2.6) — подробности см. ниже в главе 3.

Отметим, что результаты этой главы служат не только основой метода локализации, но имеют еще и многочисленные приложения к широкому кругу важных задач математической гидродинамики и теории упругости. Так например, использование построенного в этой главе правого обратного для оператора div существенно упрощает вывод L_p-неравенств Корна для ограниченных областей в $\mathbb{R}^n$, удовлетвлоряющих условию конуса. По сравнению с известными доказательствами [22, 32], такой вывод L_p-неравенств Корна больше похож на несложное упражнение для студента магистратуры. Разумеется, при этом все трудности вывода L_p-неравенств Корна переносятся на L_p-оценки правого обратного для оператора div, установленные в этой главе.

Глава 2

Стационарная система Стокса

Во второй главе в рамках L_p-теории изучаются сильные и слабые решения стационарной задачи Стокса. Первый параграф посвящен разложению пространства L_p векторных полей в прямую сумму двух замкнутых подпространств соленоидальных и потенциальных векторных полей. При $p = 2$ такое разложение часто называют ортогональным разложением Вейля–Соболева, а при $p \neq 2$ — разложением Гельмгольца. Важность этого разложения для уравнений Навье–Стокса подчеркивает тот факт, что наличие разложения служит критерием однозначной разрешимости начально-краевой задачи для линейной системы Стокса в областях с гладкими границами. Это разложение естественным образом связано с системой первого порядка, эллиптической по Дуглису–Ниренбергу. Второй параграф посвящен построению L_p-теории стационарной системы Стокса, которая является системой второго порядка, эллиптической по Дуглису–Ниренбергу. Подробно разбирается метод локализации для стационарной системы Стокса. С помощью метода локализации устанавливаются априорные оценки сильных решений, т. е. оцениваются L_p-нормы вторых производных. С помощью той же локализации устанавливается существование вторых производных у слабого решения, если правая часть системы Стокса из L_p. Метод локализации для стационарной задачи Стокса существенно опирается на L_p-теорию оператора div с краевыми условиями Дирихле, построенную в предыдущей главе.

2.1. L_p-разложение Гельмгольца

Все методы решения стационарной и нестационарной задач Стокса с краевыми условиями прилипания явно или неявно связаны с решением вспомогательной задачи Неймана для уравнения Пуассона

$$\begin{cases} \Delta q = \operatorname{div} F(x),\ x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial q}{\partial \nu_0}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{2.1.1}$$

где ν_0 — единичная внешняя нормаль к гладкой границе $\partial\Omega \in C^2$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Краевую задачу (2.1.1) будем решать в классе $\nabla q \in W_p^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$, задавая векторное поле $F \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$.

Решение краевой задачи (2.1.1) сводится к получению разложения пространства Лебега $L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ в прямую сумму

$$L_p(\Omega;\mathbb{R}^n) = \overset{\circ}{J}_p(\Omega) \oplus \hat{G}_p(\Omega) \tag{2.1.2}$$

двух замкнутых подпространств в $L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)$, которые определяются следующим образом:

$$\overset{\circ}{J}_p(\Omega) = \textit{замыкание в } L_p(\Omega;\mathbb{R}^n) \textit{ подпространства } \overset{\circ}{J}{}^\infty(\Omega),$$
$$\hat{G}_p(\Omega) = \{u \in L_p(\Omega;\mathbb{R}^n) \colon u = \nabla\psi,\ \psi \in W^1_{p,loc}(\Omega)\}.$$

Для ограниченной области с гладкой границей разложение (2.1.2) при $p = 2$ впервые было получено в [85] и [39]. При $p = 2$ разложение (2.1.2) является ортогональным и его часто называют разложением Вейля–Соболева. При $1 < p < \infty$ для ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с гладкой границей разложение (2.1.2) фактически была получено в [1,52], так как задача о разложении (2.1.2) формулируется как краевая задача для системы первого порядка

$$\begin{cases} v + \nabla q = F(x),\ \ x \in \Omega, \\ \operatorname{div} v = 0,\ \ (v, \nu_0)|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{2.1.3}$$

эллиптической по Дуглису–Ниренбергу. Для ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с гладкой границей явно сформулировано при $1 < p < \infty$ и подробно доказано разложение (2.1.2) было впервые в работе [61]. При $p \neq 2$ разложение (2.1.2) часто называют разложением Гельмгольца. Для неограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой компактной границей разложение (2.1.2) при $1 < p < \infty$ было получено в [42].

При получении разложения (2.1.2) мы будем предполагать, что граница $\partial\Omega \in C^1$, а при решении задачи (2.1.1) будем требовать, чтобы $\partial\Omega \in C^2$.

Принадлежность границы к классу C^m понимается здесь в смысле определения в [50] на с. 84. Рассмотрим обобщенную постановку задачи Неймана (2.1.1), т. е. интегральное тождество

$$\int_\Omega (\nabla q, \nabla\psi)\, dx = \int_\Omega (F, \nabla\psi)\, dx \quad \forall\, \nabla\psi \in \hat{G}_{p'}(\Omega), \tag{2.1.4}$$

где $\nabla q \in \hat{G}_p(\Omega)$ при $F \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega;\mathbb{R}^n)$, $p' = p/(p-1)$, $1 < p < \infty$. Следует обратить внимание на то, что круглыми скобками $(.\,,.)$ в (2.1.4) и далее, если не оговорено иное, обозначается скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

Символом $X^\perp$ обозначим, как обычно, аннулятор подпространства X банахова пространства — подробнее об аннуляторах см. [36]. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — любая область, $1 < p < \infty$, $p' = p/(p-1)$, $n \geqslant 2$. Тогда по теореме двойственности де Рама [35] имеем

$$\begin{cases} \overset{\circ}{J}_p(\Omega)^\perp = \hat{G}_{p'}(\Omega), \\ \hat{G}_p(\Omega)^\perp = \overset{\circ}{J}_{p'}(\Omega). \end{cases} \tag{2.1.5}$$

Подходящий для студентов существенно упрощенный вариант теоремы де Рама с доказательством можно найти в конце статьи [7]. Подчеркнем, что соотношения (2.1.5) выполнены для любого открытого связного множества в $\mathbb{R}^n$ без каких бы то ни было ограничений на $\partial\Omega$. В силу соотношений (2.1.5) для любого $F \in L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ решение $\nabla q \in \hat{G}_p(\Omega)$ задачи (2.1.4) существует и единственно тогда и только тогда, когда для области Ω имеет место разложение (2.1.2).

В этом параграфе разложение (2.1.2) будет установлено при $1 < p < \infty$, $n \geqslant 2$ для ограниченной области, а затем и для неограниченной области с компактной границей. Будет построен пример неограниченной области с некомпактной границей, для которой разложение (2.1.2) справедливо не для всех значений показателя $p \in (1,\infty)$. Начнем с общих свойств разложений (2.1.2).

Лемма 2.1.1. *Пусть Ω — любая область в $\mathbb{R}^n$, $1 < p < \infty$, $p' = p/(p-1)$, $n \geqslant 2$. Тогда*

$$L_p(\Omega;\mathbb{R}^n) = \overset{\circ}{J}_p(\Omega) \oplus \hat{G}_p(\Omega) \iff L_{p'}(\Omega;\mathbb{R}^n) = \overset{\circ}{J}_{p'}(\Omega) \oplus \hat{G}_{p'}(\Omega). \tag{2.1.6}$$

Доказательство. Достаточно показать, что

$$L_p(\Omega;\mathbb{R}^n) = \overset{\circ}{J}_p(\Omega) \oplus \hat{G}_p(\Omega) \implies L_{p'}(\Omega;\mathbb{R}^n) = \overset{\circ}{J}_{p'}(\Omega) \oplus \hat{G}_{p'}(\Omega). \tag{2.1.7}$$

Из предположения о справедливости разложения (2.1.2) и определения прямой суммы следует, что

$$L_p(\Omega;\mathbb{R}^n) = \overset{\circ}{J}_p(\Omega) + \hat{G}_p(\Omega), \quad \overset{\circ}{J}_p(\Omega) \cap \hat{G}_p(\Omega) = \{0\},$$

а в силу теоремы Банаха об открытом отображении алгебраическая прямая сумма (2.1.2) является топологической, т. е. найдется такая постоянная $C_p > 0$, что

$$\|v\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla q\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} \leqslant C_p \|v + \nabla q\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)}$$

для всех $\{v, \nabla q\} \in \overset{\circ}{J}_{p'}(\Omega) \times \hat{G}_{p'}(\Omega)$.

Из соотношений (2.1.5) находим

$$\big(\overset{\circ}{J}_p(\Omega) + \hat{G}_p(\Omega)\big)^{\perp} = \overset{\circ}{J}_{p'}(\Omega) \cap \hat{G}_{p'}(\Omega), \quad \big(\overset{\circ}{J}_{p'}(\Omega) + \hat{G}_{p'}(\Omega)\big)^{\perp} = \overset{\circ}{J}_p(\Omega) \cap \hat{G}_p(\Omega),$$

Поэтому $\overset{\circ}{J}_{p'}(\Omega) \cap \hat{G}_{p'}(\Omega) = \{0\}$ и подпространство $\overset{\circ}{J}_{p'}(\Omega) + \hat{G}_{p'}(\Omega)$ всюду плотно в $L_{p'}(\Omega;\mathbb{R}^n)$. Импликация (2.1.7) будет доказана, если установить замкнутость подпространства $\overset{\circ}{J}_{p'}(\Omega) + \hat{G}_{p'}(\Omega)$ в $L_{p'}(\Omega;\mathbb{R}^n)$. А для этого достаточно установить справедливость оценки

$$\|u\|_{L_{p'}(\Omega;\mathbb{R}^n)} \leqslant C_{p'} \|u + \nabla\psi\|_{L_{p'}(\Omega;\mathbb{R}^n)} \quad \forall\, \{v, \nabla q\} \in \overset{\circ}{J}_{p'}(\Omega) \times \hat{G}_{p'}(\Omega) \tag{2.1.8}$$

с постоянной $C_{p'} > 0$, не зависящей от u и $\nabla\psi$.

Чтобы оценить норму u в $L_{p'}(\Omega;\mathbb{R}^n)$, заметим, что

$$\|u\|^{p'}_{L_{p'}(\Omega;\mathbb{R}^n)} = \int\limits_{\Omega} |u|^{p'} dx = \int\limits_{\Omega} (u, u|u|^{p'-2})\, dx.$$

Поскольку $F = u|u|^{p'-2} \in L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)$, то из справедливости разложения (2.1.2) следует, что $F = v + \nabla q$ с оценкой

$$\|v\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} \leqslant C_p \|F\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} = C_p \|u\|^{p'-1}_{L_{p'}(\Omega;\mathbb{R}^n)}\,. \tag{2.1.9}$$

Поэтому, пользуясь соотношениями (2.1.5), получаем

$$\begin{aligned}\|u\|^{p'}_{L_{p'}(\Omega;\mathbb{R}^n)} &= \int\limits_{\Omega} (u, F)\, dx = \int\limits_{\Omega} (u, v + \nabla q)\, dx = \\ &= \int\limits_{\Omega} (u, v)\, dx = \int\limits_{\Omega} (u + \nabla\psi, v)\, dx,\end{aligned}$$

откуда и из (2.1.9) находим

$$\|u\|^{p'}_{L_{p'}(\Omega;\mathbb{R}^n)} \leqslant \|u+\nabla\psi\|_{L_{p'}(\Omega;\mathbb{R}^n)}\|v\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} \leqslant \\ \leqslant C_p\|u+\nabla\psi\|_{L_{p'}(\Omega;\mathbb{R}^n)}\|u\|^{p'-1}_{L_{p'}(\Omega;\mathbb{R}^n)},$$

что завершает доказательство неравенства (2.1.8) с постоянной $C_{p'} = C_p$. Импликация (2.1.7) доказана, а с ней доказана и лемма.

Лемма 2.1.2. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — любая область с границей $\partial\Omega \in C^1$, $1 < p < \infty$, $1 \leqslant s < p$, $n \geqslant 2$. И пусть $\nabla q \in \hat{G}_s(\Omega)$ — обобщенное решение задачи Неймана (2.1.4) с правой частью $F \in L_s(\Omega;\mathbb{R}^n) \cap L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)$. Тогда $\nabla q \in \hat{G}_s(\Omega) \cap \hat{G}_p(\Omega)$ и имеет место оценка*

$$\|\nabla q\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} \leqslant C\big[\|F\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla q\|_{L_s(\Omega;\mathbb{R}^n)}\big] \tag{2.1.10}$$

с постоянной $C > 0$, зависящей только от n, p и Ω.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай ограниченной области Ω. Вычитая из q константу, обозначим

$$\widetilde{q}(x) = q(x) - \frac{1}{\operatorname{mes}\Omega}\int\limits_{\Omega} q(y)\,dy, \quad x \in \Omega, \tag{2.1.11}$$

и заметим, что

$$\begin{cases} v + \nabla\widetilde{q} = F(x), \ x \in \Omega, \\ \operatorname{div} v = 0, \ (v,\nu_0)|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{2.1.12}$$

Из оценок [52] для системы первого порядка (2.1.12) следует, что $\widetilde{q} \in W^1_p(\Omega)$ и выполняется неравенство

$$\|\widetilde{q}\|_{W^1_p(\Omega)} \leqslant C_1\big(\|F\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} + \|\widetilde{q}\|_{L_s(\Omega;\mathbb{R}^n)}\big) \tag{2.1.13}$$

при $1 \leqslant s \leqslant p$ с постоянной $C_1 > 0$, зависящей только от n, p и Ω. Из оценки (2.1.13) и неравенства Пуанкаре находим

$$\|\nabla\widetilde{q}\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} \leqslant C\big(\|F\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla\widetilde{q}\|_{L_s(\Omega;\mathbb{R}^n)}\big) \tag{2.1.14}$$

при $1 \leqslant s < p$ с постоянной $C > 0$, зависящей только от n, p и Ω. А так как $\nabla\widetilde{q} = \nabla q$, то (2.1.14) совпадает с (2.1.10), что завершает доказательство леммы для случая ограниченной области Ω.

Прежде чем перейти к случаю неограниченной области, необходимо сделать методическое отступление для студентов, касающееся ссылки на априорные L_p-оценки знаменитой статьи [52]. Дело в том, что оценки [52] сформулированы и доказаны в упрощенной форме так, что от решений априори требуется конечность оцениваемых норм. Для доказываемой леммы такая упрощенная форма хотя и неудобна, но тем не менее приемлема. Следует только четко придерживаться какой-либо одной из имеющихся схем применения оценок [52]. Остановимся подробнее на стандартной схеме, наиболее удобной с точки зрения идей и методов, на которые опирается это учебное пособие. А именно, при ссылке на L_p-оценки статьи [52] у нас речь идет только о том, что для эллиптической по Дуглису–Ниренбергу системы первого порядка (2.1.12) для ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с границей $\partial\Omega \in C^1$ справедлива оценка вида

$$\|v\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} + \|\widetilde{q}\|_{W_p^1(\Omega)} \leqslant C_1\big(\|v + \nabla\widetilde{q}\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} + \|\widetilde{q}\|_{L_s(\Omega;\mathbb{R}^n)}\big) \tag{2.1.15}$$

для всех гладких $v \in \overset{\circ}{J}{}^{\infty}(\Omega)$ и $\widetilde{q} \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Пользуясь теперь тем, что по определению

$$\overset{\circ}{J}_p(\Omega) = \textit{замыкание в}\, L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)\, \textit{подпространства}\ \overset{\circ}{J}{}^{\infty}(\Omega), \tag{2.1.16}$$

а для ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с липшицевой границей подпространство $C^\infty(\overline{\Omega})$ всюду плотно в $W_p^1(\Omega)$, заключаем, что оценка (2.1.15) справедлива для всех $v \in \overset{\circ}{J}_p(\Omega)$ и $\widetilde{q} \in W_p^1(\Omega)$.

Рассмотрим теперь случай неограниченной области Ω. Пусть

$$B_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x-a| < d\} \subset B_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x-a| < 2d\} \subset \mathbb{R}^n$$

— открытые шары с общим центром $a \in \mathbb{R}^n$, имеющие диаметры d и $2d$ соответственно. Предполагается, что $a \in \partial\Omega$, если $B_2 \cap \partial\Omega \neq \varnothing$. Выбор достаточно малого значения $d > 0$ определяется параметрами гладкости границы $\partial\Omega \in C^1$ (см. [50], с. 84). Обозначим $\Omega_j = \Omega \cap B_j$, $j = 1, 2$, и заметим, что $\Omega_j = B_j$, если $B_2 \cap \partial\Omega = \varnothing$, $j = 1, 2$. Выберем и зафиксируем срезающую функцию $\eta_0 \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ так, чтобы $1 \leqslant \eta_0 \leqslant 1$ и

$$\eta_0(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant d, \\ 0, & |x| \geqslant 3d/2. \end{cases}$$

Полагая $\eta(x) = \eta_0(x-a)$, заметим, что

$$\eta|_{\Omega_1} = 1, \quad \operatorname{supp}\eta \subset \overline{\Omega}_2\,.$$

В случае $B_2 \cap \partial\Omega \neq \varnothing$ найдется подобласть $\omega \subset \Omega_2$, такая, что $\Omega_1 \subset \omega$ и $\partial\omega \in C^1$. Параметры гладкости границы $\partial\omega$ определяются значением диаметра d и параметрами гладкости $\partial\Omega \in C^1$ — подробности см. в [50] на с. 84. В случае $B_2 \cap \partial\Omega = \varnothing$ выберем $\omega = B_2 = \Omega_2$.

Умножая (2.1.12) на срезающую функцию η, получим

$$\begin{cases} \eta v + \nabla(\eta\widetilde{q}) = \eta F + \widetilde{q}\nabla\eta, \ x \in \Omega, \\ \operatorname{div}(\eta v) = (\nabla\eta, v), \ (\eta v, \nu_0)|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{2.1.17}$$

Линейный оператор $T\colon \widetilde{L}_s(\omega) \to \overset{\circ}{W}{}_s^1(\omega;\mathbb{R}^n)$ определим как построенный в главе 1 правый обратный для оператора $\operatorname{div}\colon \overset{\circ}{W}{}_s^1(\omega;\mathbb{R}^n) \to \widetilde{L}_s(\omega)$, где $\widetilde{L}_s$ — подпространство в L_s, определение которого дается на с. 10. Нетрудно убедиться, что $(\nabla\eta, v) \in \widetilde{L}_s(\omega)$, поэтому в силу теоремы 1.1.1 имеем

$$\operatorname{div} T(\nabla\eta, v) = (\nabla\eta, v), \quad T(\nabla\eta, v) \in \overset{\circ}{W}{}_s^1(\omega;\mathbb{R}^n),$$

с оценкой

$$\|T(\nabla\eta, v)\|_{W_s^1(\omega;\mathbb{R}^n)} \leqslant C_2\|(\nabla\eta, v)\|_{L_s(\omega)},$$

где постоянная $C_2 > 0$ зависит только от n, p, d и Ω.

Обозначим $u = \eta v - T(\nabla\eta, v)$ и рассмотрим краевую задачу в ограниченной области ω для системы

$$\begin{cases} u + \nabla(\eta\widetilde{q}) = G, \ x \in \omega, \\ \operatorname{div} u = 0, \ (\eta u, \nu_0)|_{\partial\omega} = 0, \end{cases} \tag{2.1.18}$$

с правой частью

$$G = \eta F + \widetilde{q}\nabla\eta - T(\nabla\eta, F) + T(\nabla\eta, \nabla\widetilde{q}).$$

Поскольку оператор $T\colon \widetilde{L}_s(\omega) \to \overset{\circ}{W}{}_s^1(\omega;\mathbb{R}^n)$ непрерывен, то в силу теоремы вложения $W_s^1(\omega;\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_r(\omega)$ и неравенства Пуанкаре имеем

$$\|G\|_{L_r(\omega;\mathbb{R}^n)} \leqslant C_3\big(\|F\|_{L_r(\omega;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla\widetilde{q}\|_{L_s(\omega;\mathbb{R}^n)}\big)$$

с постоянной $C_3 > 0$, зависящей только от n, p, d и Ω, где $1 \leqslant s < r \leqslant p$ и значение показателя r определяется значениями n, s в теореме вложения $W_s^1(\omega;\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_r(\omega)$, если ее предельный показатель $r < p$. Если окажется, что предельный показатель этой теоремы вложения $r = \infty$ или $r > p$, то без ограничения общности выберем $r = p$.

Пользуясь тем, что для ограниченной области утверждение леммы уже доказано, заключаем, что $\nabla\widetilde{q} \in L_r(\omega;\mathbb{R}^n)$ и выполнено неравенство

$$\|\nabla(\eta\widetilde{q})\|_{L_r(\omega;\mathbb{R}^n)} \leqslant C_4\big[\|F\|_{L_r(\omega;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla\widetilde{q}\|_{L_s(\omega;\mathbb{R}^n)}\big]$$

с постоянной $C_4 > 0$, зависящей только от n, p, d и Ω, где $1 \leqslant s < r \leqslant p$. Из определения срезающей функции η следует тогда

$$\|\nabla\widetilde{q}\|_{L_r(\Omega_1;\mathbb{R}^n)} \leqslant C_4\big[\|F\|_{L_r(\Omega_2;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla\widetilde{q}\|_{L_s(\Omega_2;\mathbb{R}^n)}\big],$$

откуда с учетом равенства $\nabla\widetilde{q} = \nabla q$ находим

$$\|\nabla q\|_{L_r(\Omega_1;\mathbb{R}^n)} \leqslant C_4\big[\|F\|_{L_r(\Omega_2;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla q\|_{L_s(\Omega_2;\mathbb{R}^n)}\big]. \tag{2.1.19}$$

Выбрав подходящее открытое покрытие $\overline{\Omega}$ открытыми шарами радиуса d с равномерно ограниченной кратностью покрытия, возводя неравенство (2.1.19) в степень r и суммируя по всем элементам покрытия, получим неравенство

$$\|\nabla q\|_{L_r(\Omega;\mathbb{R}^n)} \leqslant C_5\big[\|F\|_{L_r(\Omega;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla q\|_{L_s(\Omega;\mathbb{R}^n)}\big] \tag{2.1.20}$$

с постоянной $C_5 > 0$, зависящей только от n, p, d и Ω, где $1 \leqslant s < r \leqslant p$.

В зависимости от значений n, p и s может оказаться, что в неравенстве (2.1.20) показатель $r < p$. Пользуясь в таком случае еще раз неравенством (2.1.20), но уже с показателями $\widetilde{r} > r$ вместо $r > s$, получим

$$\|\nabla q\|_{L_{\widetilde{r}}(\Omega;\mathbb{R}^n)} \leqslant C_6\big[\|F\|_{L_{\widetilde{r}}(\Omega;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla q\|_{L_r(\Omega;\mathbb{R}^n)}\big] \tag{2.1.21}$$

с постоянной $C_6 > 0$, зависящей только от n, p, d и Ω, где $r < \widetilde{r} \leqslant p$. Если окажется, что $\widetilde{r} < p$, то повторяем процедуру еще раз. До любого показателя p, включая $= \infty$, можно добраться не более чем за n итераций указанной процедуры. Лемма доказана.

Из леммы 2.1.2 и (2.1.5) вытекает

Следствие 2.1.1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — любая область с границей $\partial\Omega \in C^1$, $1 < p < \infty$, $1 \leqslant s < p$, $n \geqslant 2$. И пусть для $v \in \overset{\circ}{J}_s(\Omega)$, $\nabla q \in \hat{G}_s(\Omega)$ выполнено условие $v + \nabla q \in L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$v \in \overset{\circ}{J}_s(\Omega) \cap \overset{\circ}{J}_p(\Omega), \quad \nabla q \in \hat{G}_s(\Omega) \cap \hat{G}_p(\Omega)$$

и имеет место оценка

$$\|v\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla q\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} \leqslant C'\big[\|v + \nabla q\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla q\|_{L_s(\Omega;\mathbb{R}^n)}\big]$$

с постоянной $C' > 0$, зависящей только от n, p и Ω.

Из леммы 2.1.2 и (2.1.5) вытекает также

Следствие 2.1.2. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — любая область с границей $\partial\Omega \in C^1$, $1 < p \leqslant 2$, $n \geqslant 2$. Тогда $\overset{\circ}{J}_p(\Omega) \cap \hat{G}_p(\Omega) = \{0\}$.

Доказательство. Обозначим

$$\hat{G}_p^\infty(\Omega) = \{v \colon v = \nabla\psi \in W_p^l(\Omega;\mathbb{R}^n)\ \forall\, l \geqslant 0,\ \psi \in L_\infty(\Omega)\}. \tag{2.1.22}$$

В силу теоремы 3 из [31] замыкание в $L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ его подпространства $\hat{G}_p^\infty(\Omega)$ совпадает с $\hat{G}_p(\Omega)$ при $1 < p < \infty$, $n \geqslant 2$. Пусть $v \in \overset{\circ}{J}_p(\Omega)$, $\nabla q \in \hat{G}_p(\Omega)$ и $v = \nabla q$ при $1 < p \leqslant 2$. Тогда в силу (2.1.5) имеем

$$\int\limits_\Omega (\nabla q, \nabla\psi)\, dx = 0 \quad \forall\, \nabla\psi \in \hat{G}_{p'}(\Omega).$$

Поэтому $\nabla q \in \hat{G}_2(\Omega)$ согласно лемме 2.1.2. Но $\hat{G}_2^\infty(\Omega) \subset \hat{G}_{p'}(\Omega)$ в силу теоремы вложения, так как $p' \geqslant 2$. Поэтому

$$\int\limits_\Omega (\nabla q, \nabla\psi)\, dx = 0 \quad \forall\, \nabla\psi \in \hat{G}_2^\infty(\Omega),$$

откуда следует, что $\nabla q(x) = 0$ почти всюду в Ω, поскольку $\nabla q \in \hat{G}_2(\Omega)$ и подпространство $\hat{G}_2^\infty(\Omega)$ всюду плотно в $\hat{G}_2(\Omega)$. Следствие доказано.

Из следствия 2.1.2 и (2.1.5) вытекает очевидное

Следствие 2.1.3. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — любая область с границей $\partial\Omega \in C^1$, $2 \leqslant p < \infty$, $n \geqslant 2$. Тогда подпространство $\overset{\circ}{J}_p(\Omega) + \hat{G}_p(\Omega)$ всюду плотно в пространстве Лебега $L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)$.

Замечание 2.1.1. В силу (2.1.5) для любой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, справедливо ортогональное разложение Вейля–Соболева

$$L_2(\Omega;\mathbb{R}^n) = \overset{\circ}{J}_2(\Omega) \oplus \hat{G}_2(\Omega). \tag{2.1.23}$$

Теорема 2.1.1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — любая ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^1$, $1 < p < \infty$, $n \geqslant 2$. Тогда справедливо разложение* (2.1.2).

Доказательство. При $p = 2$ справедливо разложение (2.1.23), поэтому $\overset{\circ}{J}_2(\Omega) \cap \hat{G}_2(\Omega) = \{0\}$. В силу ограниченности области Ω имеем включения

$$\overset{\circ}{J}_p(\Omega) \subset \overset{\circ}{J}_2(\Omega), \quad \hat{G}_p(\Omega) \subset \hat{G}_2(\Omega) \quad \forall\, p > 2,$$

откуда сразу же находим $\overset{\circ}{J}_p(\Omega) \cap \hat{G}_p(\Omega) = \{0\}$ при $p > 2$. А с учетом следствия 2.1.2 получим $\overset{\circ}{J}_p(\Omega) \cap \hat{G}_p(\Omega) = \{0\}$ при $1 < p < \infty$. Тогда на основании соотношений (2.1.5) заключаем, что подпространство $\overset{\circ}{J}_p(\Omega) + \hat{G}_p(\Omega)$ всюду плотно в $L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ при $1 < p < \infty$. Используя оценки [52] для системы первого порядка (2.1.12), эллиптической по Дуглису–Ниренбергу, получаем неравенство

$$\|v\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla q\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} \leqslant C\big[\|F\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} + \|\widetilde{q}\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)}\big] \tag{2.1.24}$$

с постоянной $C > 0$, зависящей только от n, p и Ω, где $\widetilde{q}$ имеет вид (2.1.11). Без ограничения общности можно считать, что

$$\int\limits_{\Omega} q(x)\, dx = 0, \tag{2.1.25}$$

откуда и из (2.1.24) находим

$$\|v\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla q\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} \leqslant C\big[\|F\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} + \|q\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)}\big]. \tag{2.1.26}$$

Покажем теперь, что найдется такая постоянная $C_0 > 0$, что

$$\|v\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla q\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|v + \nabla q\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} \tag{2.1.27}$$

для всех $\{v, \nabla q\} \in \overset{\circ}{J}_p(\Omega) \times \hat{G}_p(\Omega)$. Предположим противное, т. е. пусть для любого $k > 0$ найдется пара $\{v^k, \nabla q^k\} \in \overset{\circ}{J}_p(\Omega) \times \hat{G}_p(\Omega)$, такая, что

$$\|v^k\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla q^k\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} > k\|v^k + \nabla q^k\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)}. \tag{2.1.28}$$

Заметим,что $\|v^k\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla q^k\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} \neq 0$ и обозначим

$$\{V^k, \nabla Q^k\} = \frac{\{v^k, \nabla q^k\}}{\|v^k\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla q^k\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)}}\,.$$

Тогда для всех $k > 0$ имеем

$$\|V^k\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla Q^k\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} = 1, \quad \|V^k + \nabla Q^k\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} < 1/k\,,$$

где без ограничения общности будем считать, что

$$\int\limits_{\Omega} Q^k dx = 0 \quad \forall\, k > 0. \tag{2.1.29}$$

Ввиду рефлексивности пространства Лебега $L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ при $1 < p < \infty$ найдутся такая пара $\{V, \nabla Q\} \in \overset{\circ}{J}_p(\Omega) \times \hat{G}_p(\Omega)$ и такая числовая последовательность $k_j \to \infty$, что

$$V^{k_j} \to V, \quad \nabla Q^{k_j} \to \nabla Q$$

слабо в $L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ при $k_j \to \infty$. А так как

$$V^{k_j} \to 0, \quad \nabla Q^{k_j} \to 0$$

сильно в $L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ при $k_j \to \infty$, то $V + \nabla Q = 0$. Из уже установленной тривиальности пересечения $\overset{\circ}{J}_p(\Omega) \cap \hat{G}_p(\Omega) = \{0\}$ при $1 < p < \infty$ следует тогда, что $V = \nabla Q = 0$, причем ввиду условия (2.1.29) последовательность $Q^{k_j} \to 0$ слабо в $\widetilde{W}_p^1(\Omega)$ при $k_j \to \infty$, где

$$\widetilde{W}_p^1(\Omega) = \{\varphi \in W_p^1(\Omega)\colon \int\limits_{\Omega} \varphi\, dx = 0\}$$

И таким образом,

$$V^{k_j} \to 0, \quad \nabla Q^{k_j} \to 0$$

слабо в $L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ при $k_j \to \infty$.

Ввиду компактности вложения $\widetilde{W}_p^1(\Omega) \hookrightarrow L_p(\Omega;\mathbb{R}^2)$ последовательность $Q^{k_j} \to 0$ сильно в $L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ при $k_j \to \infty$. Но из оценки (2.1.26) следует тогда, что

$$\lim_{k_j\to\infty} \left(\|V^{k_j}\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla Q^{k_j}\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)}\right) = 0.$$

В то же время имеем

$$\|V^k\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla Q^k\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} = 1 \quad \forall\, k = k_j\,.$$

На основании полученного противоречия заключаем, что (2.1.28) выполняться не может. Следовательно, выполняется (2.1.27).

Из оценки (2.1.27) вытекает замкнутость в $L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ при $1 < p < \infty$ всюду плотного подпространства $\overset{\circ}{J}_p(\Omega) + \hat{G}_p(\Omega)$. А это означает совпадение $\overset{\circ}{J}_p(\Omega) + \hat{G}_p(\Omega) = L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)$. Теорема доказана.

Лемма 2.1.3. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *— любая область с границей* $\partial\Omega \in C^2$, $1 < p < \infty$, $n \geqslant 2$. *Если для области* Ω *справедливо разложение* (2.1.2), *то любое векторное поле* $F \in W_p^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ *однозначно представимо в виде* $F = v + \nabla q$, *где* $v \in \overset{\circ}{J}_p(\Omega) \cap W_p^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$, $\nabla q \in W_p^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ *и выполняется неравенство*

$$\|v\|_{W_p^1(\Omega;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla q\|_{W_p^1(\Omega;\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|F\|_{W_p^1(\Omega;\mathbb{R}^n)} \tag{2.1.30}$$

с постоянной $C > 0$, *зависящей только от* n, p *и* Ω.

Доказательство. По предположению, для области Ω справедливо разложение (2.1.2). Поэтому любое векторное поле $F \in W_p^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ однозначно представимо в виде $F = v+\nabla q$, где $v \in \overset{\circ}{J}_p(\Omega)$, $\nabla q \in L_p(\Omega; \mathbb{R}^n)$ и выполняется неравенство

$$\|v\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla q\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} \leqslant C_0\|F\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} \tag{2.1.31}$$

с постоянной $C_0 > 0$, зависящей только от n, p и Ω. При этом пара векторных полей является решением краевой задачи

$$\begin{cases} v + \nabla q = F(x), \\ \operatorname{div} v = 0, \ x \in \Omega, \\ (v, \nu_0)|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{2.1.32}$$

для системы первого порядка, эллиптической по Дуглису–Ниренбергу.

Воспользуемся стандартной схемой, подробно представленной в следующем параграфе для более сложного случая стационарной системы Стокса, т. е. системы второго порядка, эллиптической по Дуглису–Ниренбергу. Для значительно более простой системы первого порядка (2.1.32) остановимся лишь на основных моментах применения стандартной схемы, отсылая читателя за техническими подробностями в следующий параграф. Выберем подходящее открытое покрытие области Ω. Для ограниченной Ω покрытие будет конечным. Для неограниченной Ω покрытие будет счетным, локально конечным с равномерно ограниченной кратностью. С каждым элементом покрытия свяжем две ограниченные подобласти ω и $\widetilde{\omega}$, $\omega \subset \widetilde{\omega} \subset \Omega$. При этом $\partial\widetilde{\omega} \in C^2$. Обозначим

$$\widetilde{q}(x) = q(x) - \frac{1}{\operatorname{mes}\widetilde{\omega}} \int\limits_{\widetilde{\omega}} q(x)\, dx.$$

Тогда $F = v + \nabla\widetilde{q}$, причем

$$\int\limits_{\widetilde{\omega}} \widetilde{q}(x)\,dx = 0. \tag{2.1.33}$$

А так как $F \in W_p^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$, то из локальных L_p-оценок [52] для решений краевой задачи (2.1.32) следует, что $v \in W_p^1(\omega;\mathbb{R}^n)$, $\nabla q \in W_p^1(\omega;\mathbb{R}^n)$ и выполняется неравенство

$$\|v\|_{W_p^1(\omega;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla\widetilde{q}\|_{W_p^1(\omega;\mathbb{R}^n)} \leqslant C_1\big[\|F\|_{W_p^1(\widetilde{\omega};\mathbb{R}^n)} + \|\widetilde{q}\|_{L_p(\widetilde{\omega})}\big] \tag{2.1.34}$$

с постоянной $C_1 > 0$, зависящей только от n, p и подобластей ω, $\widetilde{\omega}$. Ввиду (2.1.33) из неравенства Пуанкаре и (2.1.34) находим

$$\|v\|_{W_p^1(\omega;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla\widetilde{q}\|_{W_p^1(\omega;\mathbb{R}^n)} \leqslant C_2\big[\|F\|_{W_p^1(\widetilde{\omega};\mathbb{R}^n)} + \|\nabla\widetilde{q}\|_{L_p(\widetilde{\omega};\mathbb{R}^n)}\big] \tag{2.1.35}$$

с постоянной $C_2 > 0$, зависящей только от n, p и подобластей ω, $\widetilde{\omega}$. Учитывая, что $\widetilde{q}$ и q отличаются на константу, перепишем (2.1.35) в виде

$$\|v\|_{W_p^1(\omega;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla q\|_{W_p^1(\omega;\mathbb{R}^n)} \leqslant C_2\big[\|F\|_{W_p^1(\widetilde{\omega};\mathbb{R}^n)} + \|\nabla q\|_{L_p(\widetilde{\omega};\mathbb{R}^n)}\big] \tag{2.1.36}$$

с той же постоянной $C_2 > 0$.

Гладкость границы $\partial\Omega \in C^2$ позволяет выбрать покрытие области Ω таким образом, чтобы множество всех постоянных C_2 имело конечную верхнюю грань. Поэтому, возводя (2.1.35) в степень p и суммируя по всем элементам покрытия, получим неравенство

$$\|v\|_{W_p^1(\Omega;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla q\|_{W_p^1(\Omega;\mathbb{R}^n)} \leqslant C_3\big[\|F\|_{W_p^1(\Omega;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla q\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)}\big] \tag{2.1.37}$$

с постоянной $C_3 > 0$, зависящей только от n, p и Ω. Из оценок (2.1.31) и (2.1.37), получим (2.1.30). Лемма доказана.

Теорема 2.1.2. *Пусть* $\Omega = \mathbb{R}^n$, $1 < p < \infty$, $n \geqslant 2$. *Тогда справедливо разложение* (2.1.2).

Доказательство. При $p = 2$ разложение (2.1.23) справедливо для любой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ без каких бы то ни было ограничений на Ω. В частности, при $p = 2$ разложение (2.1.23) справедливо для $\Omega = \mathbb{R}^n$. При $p \neq 2$ справедливость разложения (2.1.2) для всего пространства $\mathbb{R}^n$ проще всего устанавливается решением задачи во всем $\mathbb{R}^n$ для эллиптической по Дуглису–Ниренбергу системы первого порядка

$$\begin{cases} v + \nabla q = F(x), \\ \operatorname{div} v = 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{2.1.38}$$

с правой частью $F \in L_p(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$. Задача (2.1.38) решается в явном виде с помощью преобразования Фурье. Оценки решения устанавливаются с помощью теоремы об L_p-мультипликаторах преобразования Фурье.

Обозначим через $\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}[f(x)]$ преобразование Фурье в $\mathbb{R}^n$. При $1 < p < 2$ для любой $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ преобразование Фурье $\hat{f}$ будет обычной функцией из $L_{p'}(\mathbb{R}^n)$ с сопряженным показателем $p' = p/(p-1)$. При $2 < p < \infty$ преобразование Фурье $\hat{f}$ будет, вообще говоря, обобщенной функцией, с которой надлежит обращаться как с элементом пространства Шварца $S'(\mathbb{R}^n)$ обобщенных функций медленного роста. При этом в явное представление решения задачи (2.1.38) будут входить мультипликаторы вида

$$m_{jk}(\xi) = \frac{\xi_j\xi_k}{|\xi|^2}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad j,k = 1,\ldots,n. \tag{2.1.39}$$

Использование негладких функций m_{jk} в качестве мультипликаторов на $S'(\mathbb{R}^n)$ требует некоторой осторожности и предварительной подготовки.

Для доказательства теоремы имеется более легкий для студентов путь, не требующий привлечения теории обобщенных функций. А именно, для доказательства теоремы достаточно будет построить разрешающий оператор, определив его сначала на всюду плотном в $L_p(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ подпространстве $\overset{\circ}{C}{}^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ и установив его ограниченность из $L_p(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ в $L_p(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$. Затем разрешающий оператор можно будет доопределить по непрерывности на всем $L_p(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$.

Рассмотрим эллиптическую по Дуглису–Ниренбергу систему первого порядка (2.1.38), предполагая, что ее правая часть $F \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$. Формальное применение к системе (2.1.38) преобразования Фурье превращает ее в алгебраическую систему

$$\begin{cases} \hat{v} + i\xi\hat{q} = \hat{F}(\xi), \\ (i\xi, \hat{v}) = 0, \ \xi \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{2.1.40}$$

где круглыми скобками $(\,.\,,.\,)$ обозначена билинейная форма

$$(a,b) = \sum_{k=1}^n a_k \cdot b_k \quad \forall\, a,\, b \in \mathbb{C}^n.$$

Решая линейную алгебраическую систему (2.1.40), находим

$$\hat{v}(\xi) = \hat{F}(\xi) + \frac{i\xi\big(i\xi, \hat{F}(\xi)\big)}{|\xi|^2}, \quad i\xi\hat{q}(\xi) = -\frac{i\xi\big(i\xi, \hat{F}(\xi)\big)}{|\xi|^2}, \ \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{2.1.41}$$

Напомним, что интегральное преобразование вида

$$R_j f = \mathcal{F}^{-1}\Big[\frac{i\xi_j}{|\xi|}\hat{f}(\xi)\Big], \quad j = 1, \dots, n,$$

называют преобразованием Рисса. Это преобразование записывается также в виде сингулярного интеграла с ядром Зигмунда–Кальдерона

$$R_j f(x) = \frac{2}{\sigma_{n+1}} \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|x-y|>\varepsilon} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} f(y)\, dy, \quad j = 1, \dots, n,$$

где σ_n — площадь поверхности единичной сферы в $\mathbb{R}^n$. Подробное изложение L_p-теории преобразования Рисса содержится в монографии [43].

Используя преобразование Рисса, решение системы (2.1.38) с правой частью $F \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ можно представить в виде

$$\begin{cases} v_k = F_k + R_k \sum\limits_{j=1}^{n} R_j F_j\,, \\ \dfrac{\partial q}{\partial x_k} = -R_k \sum\limits_{j=1}^{n} R_j F_j\,, \end{cases} \tag{2.1.42}$$

k=1,…,n. Как установлено в [43], при $1 < p < \infty$ и $n \geqslant 2$ выполняются неравенства

$$\|R_j f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \quad \forall\, f \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\mathbb{R}^n)\},\ j = 1, \dots, n, \tag{2.1.43}$$

с постоянной $C > 0$, зависящей только от p и n, т. е. преобразования Рисса R_j непрерывны на всюду плотном в $L_p(\mathbb{R}^n)$ подпространстве $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Доопределяя преобразования Рисса по непрерывности на всем $L_p(\mathbb{R}^n)$, получим линейные непрерывные операторы

$$R_j : L_p(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}^n),\ j = 1, \dots, n.$$

Заметим (см. [40]), что при $1 < p < \infty$ и $n \geqslant 2$ подпространство

$$\overset{\circ}{G}{}^{\infty}(\mathbb{R}^n) = \{u = \nabla\varphi \colon \varphi \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\mathbb{R}^n)\}$$

всюду плотно в $\hat{G}_p(\mathbb{R}^n)$ — подробности см. в [31]. Поэтому для любого векторного поля $F \in L_p(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ равенства (2.1.42) в силу соотношений

(2.1.5) определяют решение $\{v, \nabla q\} \in \overset{\circ}{J}_p(\mathbb{R}^n) \times \hat{G}_p(\mathbb{R}^n)$ системы (2.1.38) во всем $\mathbb{R}^n$, а из (2.1.43) следует оценка

$$\|v\|_{L_p(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla q\|_{L_p(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)} \leqslant C_0 \|F\|_{L_p(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)} \tag{2.1.44}$$

с постоянной $C_0 > 0$, зависящей только от p и n.

Таким образом, установлено, что

$$L_p(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n) = \overset{\circ}{J}_p(\mathbb{R}^n) + \hat{G}_p(\mathbb{R}^n)$$

при $1 < p < \infty$ и $n \geqslant 2$, откуда и из соотношений (2.1.5) получаем

$$\overset{\circ}{J}_p(\mathbb{R}^n) \cap \hat{G}_p(\mathbb{R}^n) = \big(\overset{\circ}{J}_{p'}(\mathbb{R}^n) + \hat{G}_{p'}(\mathbb{R}^n)\big)^{\perp} = \{0\}$$

при $1 < p < \infty$ и $n \geqslant 2$, где $p' = p/(p-1)$. Тем самым установлена справедливость разложения в прямую сумму

$$L_p(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n) = \overset{\circ}{J}_p(\mathbb{R}^n) \oplus \hat{G}_p(\mathbb{R}^n) \tag{2.1.45}$$

при $1 < p < \infty$ и $n \geqslant 2$. Теорема доказана.

Из теоремы 2.1.2 вытекает

Следствие 2.1.4. Пусть $1 < p < \infty$, $n \geqslant 2$. Если для какой-либо пары векторных полей $\{v, \nabla q\} \in \overset{\circ}{J}_2(\mathbb{R}^n) \times \hat{G}_2(\mathbb{R}^n)$ их сумма $v + \nabla q \in L_p(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ с показателем $p \neq 2$, то $v \in \overset{\circ}{J}_2(\mathbb{R}^n) \cap \overset{\circ}{J}_p(\mathbb{R}^n)$ и $\nabla q \in \hat{G}_2(\mathbb{R}^n) \cap \hat{G}_p(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Введем обозначение для суммы $v + \nabla q = F$. По предположению, имеем $F \in L_2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n) \cap L_p(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$. Аппроксимируя F в норме пересечения $L_2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n) \cap L_p(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ последовательностью $\{F^k\}_{k=1}^{\infty}$ из $\overset{\circ}{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, пользуясь следствием 2.1.4 и переходя к пределу при $k \to \infty$, получим пару векторных полей $\{u, \nabla\psi\}$ таких, что $F = u + \nabla\psi$, причем

$$u \in \overset{\circ}{J}_2(\mathbb{R}^n) \cap \overset{\circ}{J}_p(\mathbb{R}^n), \quad \nabla\psi \in \hat{G}_2(\mathbb{R}^n) \cap \hat{G}_p(\mathbb{R}^n).$$

Очевидно, $v - u + \nabla(q - \psi) = 0$, где векторные поля $v - u \in \overset{\circ}{J}_2(\mathbb{R}^n)$ и $\nabla(q - \psi) \in \hat{G}_2(\mathbb{R}^n)$. А так как при $p = 2$ справедливо разложение (2.1.23), означающее тривиальность пересечения $\overset{\circ}{J}_2(\Omega) \cap \hat{G}_2(\Omega) = \{0\}\}$, то имеем $v - u = \nabla(q - \psi) = 0$. Следствие доказано.

Из теоремы 2.1.2 также вытекает

Следствие 2.1.5. Пусть $\Omega = \mathbb{R}^n_+$, $1 < p < \infty$, $n \geqslant 2$. Тогда справедливо разложение (2.1.2).

Доказательство. Заметим, что решение краевой задачи для полупространства

$$\begin{cases} v + \nabla q = F(x), \\ \operatorname{div} v = 0, \ x \in \mathbb{R}^n_+, \\ v_n|_{x_n=0} = 0, \ x' \in \mathbb{R}^{n-1} \end{cases} \tag{2.1.46}$$

получается из решения задачи (2.1.38) для всего пространства методом зеркальных отражений. А именно, векторное поле $F \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)$ продолжим с $\mathbb{R}^n_+$ на $\mathbb{R}^n$ так, чтобы компоненты $F_k = F_k(x', x_n)$, $k = 1, \dots, n-1$, были четными по x_n, а последняя компонента $F_n = F_n(x', x_n)$ — нечетной по x_n. Используя явное представление решения (2.1.42) для всего пространства $\mathbb{R}^n$, получим решение с гладкостью

$$v_k \in W^l_p(\mathbb{R}^n), \quad \frac{\partial q}{\partial x_k} \in W^l_p(\mathbb{R}^n), \quad k = 1, \dots, n,$$

для всех натуральных $l \geqslant 1$. В силу конструкции (2.1.42) векторное поле $v = v(x', x_n)$ будет иметь ту же четность, что и $F = F(x', x_n)$. В частности, компонента $v_n = v_n(x', x_n)$ будет нечетной по x_n. Ввиду гладкости компоненты $v_n = v_n(x', x_n)$, это означает, что $v_n|_{x_n=0} = 0$ для всех $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Сужение v на $\mathbb{R}^n_+$ дает искомое решение краевой задачи (2.1.46). Из оценки (2.1.44) получим неравенство

$$\|v\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla q\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)} \leqslant C_0 \|F\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)} \tag{2.1.47}$$

с той же, что и в (2.1.44), постоянной C_0.

С помощью четных продолжений с $\mathbb{R}^n_+$ на $\mathbb{R}^n$ нетрудно убедиться, что сужения на $\mathbb{R}^n_+$ всех векторных полей из $\overset{\circ}{G}{}^\infty(\mathbb{R}^n)$ образуют всюду плотное подпространство в $\hat{G}_p(\mathbb{R}^n_+)$ при $1 < p < \infty$, $n \geqslant 2$. Поэтому в силу оценки (2.1.47) и соотношений (2.1.5) для любого векторного поля $F \in L_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)$ существует решение $\{v, \nabla q\} \in \overset{\circ}{J}_p(\mathbb{R}^n_+) \times \hat{G}_p(\mathbb{R}^n_+)$ краевой задачи (2.1.46). Таким образом, установлено, что

$$L_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n) = \overset{\circ}{J}_p(\mathbb{R}^n_+) + \hat{G}_p(\mathbb{R}^n_+)$$

при $1 < p < \infty$ и $n \geqslant 2$, откуда и из соотношений (2.1.5) получаем

$$\overset{\circ}{J}_p(\mathbb{R}^n_+) \cap \hat{G}_p(\mathbb{R}^n_+) = \big(\overset{\circ}{J}_{p'}(\mathbb{R}^n_+) + \hat{G}_{p'}(\mathbb{R}^n_+)\big)^\perp = \{0\}$$

при $1 < p < \infty$ и $n \geqslant 2$, где $p' = p/(p-1)$. Тем самым установлена справедливость разложения в прямую сумму

$$L_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n) = \overset{\circ}{J}_p(\mathbb{R}^n_+) \oplus \hat{G}_p(\mathbb{R}^n_+) \tag{2.1.48}$$

при $1 < p < \infty$ и $n \geqslant 2$. Следствие доказано.

Займемся теперь неограниченной областью с гладкой компактной границей.

Теорема 2.1.3. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — любая неограниченная область с компактной границей $\partial\Omega \in C^1$, $1 < p < \infty$, $n \geqslant 2$. Тогда справедливо разложение* (2.1.2).

Доказательство. Выберем и зафиксируем такое число $R > 0$, что

$$\partial\Omega \subset B_R = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| < R\}$$

и обозначим

$$\Omega_R = \{x \in \Omega\colon |x| < R+1\}, \qquad \widetilde{\Omega}_R = \{x \in \Omega\colon |x| < R+2\}.$$

Выберем и зафиксируем срезающую функцию $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ так, чтобы

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & |x| \geqslant R+1, \\ 0, & |x| \leqslant R. \end{cases}$$

Введем обозначение

$$\widetilde{q}(x) = q(x) - \frac{1}{\operatorname{mes}\widetilde{\Omega}_R} \int\limits_{\widetilde{\Omega}_R} q(y)\,dy, \quad x \in \Omega, \tag{2.1.49}$$

и заметим, что

$$\begin{cases} v + \nabla\widetilde{q} = F(x),\ x \in \Omega, \\ \operatorname{div} v = 0,\ (v,\nu_0)|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{2.1.50}$$

Умножая (2.1.50) на срезающую функцию η и доопределяя v и $\widetilde{q}$ нулем вне Ω, получим

$$\begin{cases} \eta v + \nabla(\eta\widetilde{q}) = \eta F + \widetilde{q}\nabla\eta, \\ \operatorname{div}(\eta v) = (\nabla\eta, v),\ x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{2.1.51}$$

Линейный оператор $T\colon \widetilde{L}_p(\Omega_R) \to \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega_R;\mathbb{R}^n)$ определим как построенный в главе 1 правый обратный для оператора $\operatorname{div}\colon \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega_R;\mathbb{R}^n) \to \widetilde{L}_p(\Omega_R)$, где

$\widetilde{L}_p$ — подпространство в L_p , определение которого дается на с. 10. Нетрудно убедиться, что $(\nabla\eta, v) \in \widetilde{L}_p(\Omega_R)$, поэтому в силу теоремы 1.1.2 имеем

$$\operatorname{div} T(\nabla\eta, v) = (\nabla\eta, v), \quad T(\nabla\eta, v) \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega_R; \mathbb{R}^n),$$

с оператором T, не зависящим от показателя $p \in (1, \infty)$, с оценкой

$$\|T(\nabla\eta, v)\|_{W^1_p(\Omega_R;\mathbb{R}^n)} \leqslant C_2 \|(\nabla\eta, v)\|_{L_p(\Omega_R)}\,,$$

где постоянная $C_2 > 0$ зависит только от n, p, R и Ω.

Обозначим $u = \eta v - T(\nabla\eta, v)$, доопределим u нулем вне Ω и рассмотрим задачу во всем $\mathbb{R}^n$ для системы

$$\begin{cases} u + \nabla(\eta\widetilde{q}) = G, \\ \operatorname{div} u = 0, \;\; x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{2.1.52}$$

с правой частью

$$G = \eta F + \widetilde{q}\nabla\eta - T(\nabla\eta, F) + T(\nabla\eta, \nabla\widetilde{q}). \tag{2.1.53}$$

Поскольку оператор $T\colon \widetilde{L}_p(\Omega_R) \to \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega_R; \mathbb{R}^n)$ непрерывен, то в силу неравенства Пуанкаре при любых $p \in (1, \infty)$ имеем

$$\|G\|_{L_p(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)} \leqslant C_3\big(\|F\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla\widetilde{q}\|_{L_p(\Omega_R;\mathbb{R}^n)}\big) \tag{2.1.54}$$

с постоянной $C_3 > 0$, зависящей только от n, p, R и Ω.

Рассмотрим сначала случай $F \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$. Так как при $p = 2$ справедливо разложение (2.1.23), то существует единственная пара векторных полей $\{v, \nabla q\} \in \overset{\circ}{J}_2(\Omega) \times \hat{G}_2(\Omega)$ такая, что $F = v + \nabla q$. Поэтому участвующая в системе (2.1.52) пара векторных полей

$$\{u, \nabla(\eta\widetilde{q})\} \in \overset{\circ}{J}_2(\mathbb{R}^n) \times \hat{G}_2(\mathbb{R}^n),$$

а на основании оценки (2.1.54) заключаем, что в системе (2.1.52) правая часть $G \in L_2(\Omega; \mathbb{R}^n) \cap L_p(\Omega; \mathbb{R}^n)$ при любых $p \in (1, 2)$. Тогда согласно следствию 2.1.4 при любых $p \in (1, 2)$ имеем

$$\{u, \nabla(\eta\widetilde{q})\} \in \overset{\circ}{J}_p(\mathbb{R}^n) \times \hat{G}_p(\mathbb{R}^n),$$

откуда с учетом конструкции $\{u, \nabla(\eta\widetilde{q})\}$ следует, что

$$\{v, \nabla q)\} \in \overset{\circ}{J}_p(\Omega) \times \hat{G}_p(\Omega) \quad \forall\, p \in (1, 2).$$

Это означает всюду плотность в $L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ подпространства $\overset{\circ}{J}_p(\Omega)+\hat{G}_p(\Omega)$ при любых $p\in(1,2)$. А тогда ввиду соотношений (2.1.5) имеем

$$\overset{\circ}{J}_p(\Omega)\cap\hat{G}_p(\Omega)=\{0\}\quad\forall\, p\in(1,2).$$

Таким образом, с учетом следствий 2.1.2 и 2.1.3 заключаем, что при любых $p\in(1,\infty)$ подпространство $\overset{\circ}{J}_p(\Omega)+\hat{G}_p(\Omega)$ всюду плотно в $L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ и тривиально пересечение $\overset{\circ}{J}_p(\Omega)\cap\hat{G}_p(\Omega)=\{0\}$.

Напомним, что в силу в силу теоремы 3 из [31] замыкание в $L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ его подпространства

$$\hat{G}_p^\infty(\Omega)=\{v\colon v=\nabla\psi\in W_p^l(\Omega;\mathbb{R}^n)\ \forall\ l\geqslant 0,\ \psi\in L_\infty(\Omega)\}$$

совпадает с $\hat{G}_p(\Omega)$ при $1<p<\infty$, $n\geqslant 2$. Поэтому теорема будет доказана, если установить справедливость оценки

$$\|v\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)}+\|\nabla q\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)}\leqslant C\|v+\nabla q\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)}\tag{2.1.55}$$

для всех $\{v,\nabla q\}\in\overset{\circ}{J}{}^\infty(\Omega)\times\hat{G}_p^\infty(\Omega)$ при $1<p<\infty$, $n\geqslant 2$ с постоянной $C>0$, не зависящей от v и ∇q.

Обозначим сумму $v+\nabla q=F$, где $v\in\overset{\circ}{J}{}^\infty(\Omega)$ и $\nabla q\in\hat{G}_p^\infty(\Omega)$. Возвращаясь к системе (2.1.52) и сохранив все построения, использованные при выводе этой системы, вернемся к оценке (2.1.54) для векторного поля G вида (2.1.53). Согласно теореме 2.1.2 решение

$$\{u,\nabla(\eta\widetilde{q})\}\in\overset{\circ}{J}_p(\mathbb{R}^n)\times\hat{G}_p(\mathbb{R}^n)$$

системы (2.1.52) удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_{L_p(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)}+\|\nabla(\eta\widetilde{q})\|_{L_p(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)}\leqslant C_0\|G\|_{L_p(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)}\,,\tag{2.1.56}$$

откуда и из (2.1.54) с помощью разбиения единицы $1=1-\eta+\eta$ находим

$$\|v\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)}+\|\nabla\widetilde{q}\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)}\leqslant C_4\bigl[\|F\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)}+\|\nabla\widetilde{q}\|_{L_p(\Omega_R;\mathbb{R}^n)}\bigr]\tag{2.1.57}$$

с постоянной $C_4>0$, зависящей только от n, p, R и Ω.

Используя локальные L_p-оценки [52] для краевой задачи (2.1.50), получим

$$\|\nabla\widetilde{q}\|_{L_p(\Omega_R;\mathbb{R}^n)}\leqslant C_5\bigl[\|F\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)}+\|\widetilde{q}\|_{L_p(\widetilde{\Omega}_R;\mathbb{R}^n)}\bigr]$$

с постоянной $C_5 > 0$, зависящей только от n, p, R и Ω, откуда и из (2.1.57) при $1 < p < \infty$, $n \geqslant 2$ находим

$$\|v\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla\widetilde{q}\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} \leqslant C_6\big[\|F\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} + \|\widetilde{q}\|_{L_p(\widetilde{\Omega}_R;\mathbb{R}^n)}\big] \tag{2.1.58}$$

с постоянной $C_6 > 0$, зависящей только от n, p, R и Ω. Замечая, что

$$\int\limits_{\widetilde{\Omega}_R} \widetilde{q}(x)\,dx = 0,$$

и повторяя рассуждения от противного из доказательства теоремы 2.1.1 на с. 36, получим оценку (2.1.55) при $1 < p < \infty$, $n \geqslant 2$. Теорема доказана.

Нам понадобится следующее полезное обобщение хорошо известной теоремы К. Неймана (см., например, [16], с. 105).

Лемма 2.1.4. *Пусть X, Y — банаховы пространства и $T_j : X \to Y$, $j = 1, 2$, — линейные непрерывные операторы, причем оператор T_1 имеет непрерывный обратный и отображает X на Y. Если норма оператора T_2 удовлетворяет условию*

$$\|T_2\| < \|T_1^{-1}\|^{-1}, \tag{2.1.59}$$

то оператор $T = T_1 + T_2$ также имеет непрерывный обратный и отображает X на Y.

Доказательство. В силу (2.1.59) ядро оператора $T = T_1+T_2$ тривиально. Пусть $f \in Y$ — произвольный элемент, а $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ — такая последовательность элементов из X, что

$$T_1u_0 = f, \quad T_1u_k = -kT_2u_{k-1}\,, \quad k = 1, \ldots . \tag{2.1.60}$$

В силу (2.1.59) сходится ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\big(\|T_2\|\cdot\|T_1^{-1}\|^{-1}\big)^k < \infty,$$

а из (2.1.60) находим

$$\|u_k\|_X \leqslant k!\|T_2\|^k\|T_1^{-1}\|^{k+1}\|f\|_Y\,,$$

откуда следует сходимость в X ряда

$$u = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{u_k}{k!}\,. \tag{2.1.61}$$

Таким образом, $u \in X$ и, как нетрудно убедиться, $T_1 u + T_2 u = f$ в силу (2.1.60),(2.1.61), т. е. область значений оператора $T = T_1 + T_2$ совпадает с Y. Оценивая ряд (2.1.61), получим

$$\|T^{-1}\| \leqslant \|T_1^{-1}\| \cdot \bigl(1 - \|T_1^{-1}\| \cdot \|T_2\|\bigr)^{-1},$$

т. е. оператор T^{-1} непрерывен. Лемма доказана.

Замечание 2.1.2. В часто встречающихся вариантах формулировки леммы 2.1.4 отсутствует наиболее важное для нас свойство оператора T, а именно то, что оператор T отображает X на Y.

Теорема 2.1.4. *Пусть Ω_1 Ω_2 — неограниченные области в $\mathbb{R}^n$, границы которых из класса C^1, $n \geqslant 2$, $1 < p < \infty$. И пусть существует диффеоморфизм Φ области Ω_1 на область Ω_2 с матрицей Якоби $J_\Phi = \bigl\{\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}(x)\bigr\}_{i,j=1}^n$ такой, что для всех $x \in \overline{\Omega}_1$*

$$\alpha < |\det J_\Phi| < \beta \quad \forall\, x \in \overline{\Omega}_1\,, \tag{2.1.62}$$

где α, β — какие-либо положительные постоянные, причем

$$\lim_{\substack{|x| \to \infty \\ x \in \Omega_1}} \sum_{i,j=1}^n \Bigl|\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}(x) - \delta_{i,j}\Bigr| = 0, \tag{2.1.63}$$

где $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера. Тогда для справедливости разложения

$$L_p(\Omega_1; \mathbb{R}^n) = \overset{\circ}{J}_p(\Omega_1) \oplus \hat{G}_p(\Omega_1)$$

необходимо и достаточно, чтобы имело место разложение

$$L_p(\Omega_2; \mathbb{R}^n) = \overset{\circ}{J}_p(\Omega_2) \oplus \hat{G}_p(\Omega_2)\,.$$

Доказательство. Согласно лемме 2.1.1 имеем

$$L_p(\Omega; \mathbb{R}^n) = \overset{\circ}{J}_p(\Omega) \oplus \hat{G}_p(\Omega) \iff L_{p'}(\Omega; \mathbb{R}^n) = \overset{\circ}{J}_{p'}(\Omega) \oplus \hat{G}_{p'}(\Omega) \tag{2.1.64}$$

для любой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ при $1 < p < \infty$, $n \geqslant 2$, где $p' = p/(p-1)$. Установим сначала, что из справедливости разложения

$$L_p(\Omega_1; \mathbb{R}^n) = \overset{\circ}{J}_p(\Omega_1) \oplus \hat{G}_p(\Omega_1) \tag{2.1.65}$$

следует справедливость разложения

$$L_p(\Omega_2;\mathbb{R}^n) = \overset{\circ}{J}_p(\Omega_2) \oplus \hat{G}_p(\Omega_2). \tag{2.1.66}$$

Ввиду (2.1.64) достаточно будет убедиться, что (2.1.66) следует из (2.1.65) при $1 < p < 2$. В случае $p = 2$ утверждение теоремы 2.1.4 лишено смысла, так как разложение (2.1.23) справедливо для любой $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Поскольку Φ — диффеоморфизм, т. е. по определению Φ — взаимно однозначное и непрерывно дифференцируемое в $\overline{\Omega}_1$ отображение области Ω_1 на область Ω_2, обратное к которому непрерывно дифференцируемо в $\overline{\Omega}_2$, то существует непрерывно дифференцируемое в $\overline{\Omega}_2$ отображение Φ^{-1}, обратное к отображению Φ. Пусть $J_{\Phi^{-1}}$ — матрица Якоби отображения $x = \Phi^{-1}(y)$. Очевидно, $J_{\Phi^{-1}} = J_\Phi^{-1}$ при $y = \Phi(x)$.

В силу следствия 2.1.2 из леммы 2.1.3 для доказательства (2.1.66) достаточно убедиться, что при $1 < p < 2$ найдется постоянная $C' > 0$, зависящая только от n, p , Φ и Ω_1, Ω_2, такая, что всякое векторное поле $F \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega_2;\mathbb{R}^n)$ можно представить в виде

$$F(y) = v(y) + \nabla q(y), \quad y \in \Omega_2\,, \tag{2.1.67}$$

где $v \in \overset{\circ}{J}_p(\Omega_2)$ и $\nabla q \in \hat{G}_p(\Omega_2)$ удовлетворяют неравенству

$$\|v\|_{L_p(\Omega_2;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla q\|_{L_p(\Omega_2;\mathbb{R}^n)} \leqslant C'\|F\|_{L_p(\Omega_2;\mathbb{R}^n)}\,. \tag{2.1.68}$$

Согласно (2.1.23) всякое векторное поле $F \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega_2;\mathbb{R}^n)$ можно представить в виде (2.1.67), где $v \in \overset{\circ}{J}_2(\Omega_2)$ и $\nabla q \in \hat{G}_2(\Omega_2)$. Покажем, что в действительности $v \in \overset{\circ}{J}_p(\Omega_2)$ и $\nabla q \in \hat{G}_p(\Omega_2)$ при $1 < p < 2$. Для этого перепишем (2.1.67) в виде

$$v\big(\Phi(x)\big) + \nabla_y\, q(\Phi(x)\big) = F(\Phi(x)\big), \quad x \in \Omega_1\,,$$

откуда получим

$$J_\Phi^* v\big(\Phi(x)\big) + \nabla_x\, q(\Phi(x)\big) = J_\Phi^* F(\Phi(x)\big), \quad x \in \Omega_1\,, \tag{2.1.69}$$

где J_Φ^* — транспонированная матрица Якоби.

Вводя обозначения

$$u(x) = |\det J_\Phi| \cdot J_\Phi^{-1} v\big(\Phi(x)\big), \;\; \psi(x) = q\big(\Phi(x)\big) \;\; f(x) = J_\Phi^* F\big(\Phi(x)\big)$$

и полагая $T_0 = |\det J_\Phi^{-1}| \cdot J_\Phi^* J_\Phi$, запишем (2.1.67) в виде

$$u(x) + \nabla\psi(x) = f(x) + (I - T_0)u(x), \quad x \in \Omega_1\,,$$

где I — тождественное отображение в $\mathbb{R}^n$. Нетрудно убедиться, что

$$u \in \overset{\circ}{J}_2(\Omega_1), \;\; \nabla\psi \in \hat{G}_2(\Omega_1), \;\; f \in \overset{\circ}{C}{}^1(\Omega_1; \mathbb{R}^n),$$

т. е. f — финитное в Ω_1 непрерывно дифференцируемое векторное поле. При этом элементы матрицы T_0 непрерывны в $\overline{\Omega}_1$.

Не ограничивая общности, будем считать, что область Ω_1 содержит начало координат. Функцию $\eta \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$ выберем и зафиксируем таким образом, чтобы

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| \geqslant 2. \end{cases}$$

Тогда для $x \in \Omega_1$ будем иметь

$$\Big[I - \Big(1 - \eta\Big(\frac{x}{R}\Big)\Big)(I - T_0)\Big]u(x) + \nabla\psi(x) = f(x) + \eta\Big(\frac{x}{R}\Big)(I - T_0)u(x), \quad (2.1.70)$$

где R — любое положительное число.

Теперь применим лемму 2.1.4. Пусть

$$X_p = \Big(\overset{\circ}{J}_p(\Omega_1) \times \hat{G}_p(\Omega_1)\Big) \bigcap \Big(\overset{\circ}{J}_2(\Omega_1) \times \hat{G}_2(\Omega_1)\Big)$$

— банахово пространство упорядоченных пар $\{w, \nabla\varphi\}$:

$$w \in \overset{\circ}{J}_p(\Omega_1) \cap \overset{\circ}{J}_2(\Omega_1), \;\; \nabla\varphi \in \hat{G}_p(\Omega_1) \cap \hat{G}_2(\Omega_1)$$

при $1 < p < 2$ с нормой

$$\|\{w, \nabla\varphi\}\|_{X_p} = \|w\|_{L_p(\Omega_1;\mathbb{R}^n)} + \|w\|_{L_2(\Omega_1;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla\varphi\|_{L_p(\Omega_1;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega_1;\mathbb{R}^n)}\,.$$

В качестве Y_p возьмем банахово пространство $L_p(\Omega_1; \mathbb{R}^n) \cap L_2(\Omega_1; \mathbb{R}^n)$ при $1 < p < 2$ с нормой

$$\|f\|_{Y_p} = \|f\|_{L_p(\Omega_1;\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{L_2(\Omega_1;\mathbb{R}^n)}\,.$$

Норму линейного непрерывного оператора $T\colon X_p \to Y_p$ будем обозначать через $\|T\|_p$. Норму обратного оператора $T^{-1}\colon Y_p \to X_p$, если он существует, также будем обозначать через $\|T^{-1}\|_p$.

Оператор $T_1\colon X_p \to Y_p$ определим следующим образом:

$$T_1\{w, \nabla\varphi\} = w + \nabla\varphi \quad \forall\, \{w, \nabla\varphi\} \in X_p\,.$$

Согласно предположению (2.1.65) и лемме 2.1.2, область значений оператора T_1 совпадает с Y_p, поэтому оператор T_1 имеет непрерывный обратный $T_1^{-1}\colon X_p \to Y_p$. Линейный непрерывный оператор $T_{2,R}\colon X_p \to Y_p$, зависящий от параметра $R > 0$, определим с помощью равенства

$$T_{2,R}\{w, \nabla\varphi\} = -\Big(1 - \eta\Big(\frac{x}{R}\Big)\Big)(I - T_0)w \quad \forall\, \{w, \nabla\varphi\} \in X_p\,.$$

При этом в силу условия (2.1.63) будем иметь

$$\lim_{R\to\infty} \|T_{2,R}\|_p = 0 \tag{2.1.71}$$

для каждого фиксированного p, $1 < p < 2$. И наконец, введем оператор $T = T_1 + T_{2,R}$. Очевидно, $T\colon X_p \to Y_p$ — линейный непрерывный оператор. Замечая, что правая часть (2.1.70) принадлежит Y_p, для любого $R > 0$, перепишем (2.1.70) в виде

$$T\{u, \nabla\psi\} = f + \eta\Big(\frac{x}{R}\Big)(I - T_0)u. \tag{2.1.72}$$

При этом число $R > 0$ выберем и зафиксируем таким образом, чтобы

$$\|T_{2,R}\|_p < \|T_1^{-1}\|_p^{-1}\,, \quad \sup_{\substack{x\in\Omega_1\\ |x|>R}} \sum_{i,j=1}^n \Big|\frac{\partial\Phi_i}{\partial x_j}(x) - \delta_{ij}\Big| < \frac{1}{2}\,, \tag{2.1.73}$$

что возможно в силу (2.1.71) и (2.1.63). Выбранное таким образом число R зависит от p, но p — фиксированное число, $1 < p < 2$.

Поскольку правая часть (2.1.72) является элементом Y_p, то согласно лемме 2.1.4 найдется такой элемент $\{w, \nabla\varphi\} \in X_p$, что

$$T\{w, \nabla\varphi\} = f + \eta\Big(\frac{x}{R}\Big)(I - T_0)u. \tag{2.1.74}$$

Покажем, что в действительности, $w = u$ и $\nabla\varphi = \nabla\psi$. Вычитая (2.1.74) из (2.1.72), получим

$$T\{U, \nabla\Psi\} = 0, \tag{2.1.75}$$

где $U = w - u$ и $\Psi = \varphi - \psi$, причем $U \in \overset{\circ}{J}_2(\Omega_1)$ и $\nabla\Psi \in \hat{G}_2(\Omega_1)$. Но (2.1.75) эквивалентно равенству

$$\Big[I - \Big(1 - \eta\Big(\frac{x}{R}\Big)\Big)(I - T_0)\Big]U + \nabla\Psi = 0, \tag{2.1.76}$$

из которого следует, что

$$\int\limits_{\Omega_1} \big|U(x)\big|^2 dx = \int\limits_{\Omega_1} \Big(1-\eta\Big(\frac{x}{R}\Big)\Big)\big((I-T_0)U(x), U(x)\big)\, dx.$$

А тогда из (2.1.73) находим

$$\|U\|^2_{L_2(\Omega_1;\mathbb{R}^n)} < \frac{1}{2}\|U\|^2_{L_2(\Omega_1;\mathbb{R}^n)}\,.$$

Последнее означает, что $U(x)=0$ в Ω_1. При этом $\nabla\Psi(x)=0$ в Ω_1 согласно (2.1.76). Таким образом, имеем $w(x)=u(x)$ и $\nabla\varphi(x)=\nabla\psi(x)$ в Ω_1, т. е. $u \in \overset{\circ}{J}_p(\Omega_1)$ и $\nabla\psi \in \hat{G}_p(\Omega_1)$. Поэтому $v \in \overset{\circ}{J}_p(\Omega_2)$ и $\nabla q \in \hat{G}_p(\Omega_2)$ в силу (2.1.62). Следовательно, для любого $F \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega_2;\mathbb{R}^n)$ существуют векторные поля $v \in \overset{\circ}{J}_p(\Omega_2)$ и $\nabla q \in \hat{G}_p(\Omega_2)$, удовлетворяющие равенству(2.1.67).

Осталось доказать неравенство (2.1.68). Обозначим через $\widetilde{X}_p$ банахово пространство $\overset{\circ}{J}_p(\Omega_1)\times\hat{G}_p(\Omega_1)$ упорядоченных пар $\{w,\nabla\varphi\}$ с нормой

$$\|\{w,\nabla\varphi\}\|_{\widetilde{X}_p} = \|w\|_{L_p(\Omega_1;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla\varphi\|_{L_p(\Omega_1;\mathbb{R}^n)}\,,$$

а через $\widetilde{Y}_p$ обозначим $L_p(\Omega_1;\mathbb{R}^n)$. Будем считать, что определенные выше операторы T_1, $T_{2,R}$ и T действуют теперь из $\widetilde{X}_p$ в $\widetilde{Y}_p$. Для норм этих операторов сохраним прежние обозначения.

Увеличивая, если это необходимо, число R так, чтобы условие (2.1.73) выполнялось и для операторов T_1, $T_{2,R}$, действующих из $\widetilde{X}_p$ в $\widetilde{Y}_p$, применим к (2.1.72) лемму 2.1.4. В результате получим

$$\begin{gathered}\|u\|_{L_p(\Omega_1;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla\psi\|_{L_p(\Omega_1;\mathbb{R}^n)} \leqslant \\ \leqslant C_0\Big[\|f\|_{L_p(\Omega_1;\mathbb{R}^n)} + \Big\|\eta\Big(\frac{x}{R}\Big)u\Big\|_{L_p(\Omega_1;\mathbb{R}^n)}\Big]\end{gathered} \tag{2.1.77}$$

с постоянной $C_0>0$, зависящей только от n, p и Ω_1, Ω_2, Φ. А из (2.1.77) и (2.1.62) находим

$$\|v\|_{L_p(\Omega_2;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla q\|_{L_p(\Omega_2;\mathbb{R}^n)} \leqslant C_0'\big[\|F\|_{L_p(\Omega_2;\mathbb{R}^n)} + \|v\|_{L_p(\Omega_{2,\rho};\mathbb{R}^n)}\big]$$

с постоянной $C_0'>0$, зависящей только от n, p и Ω_1, Ω_2, Φ, где подобласть $\Omega_{2,\rho}=\{y\in\Omega_2\colon |y|<\rho\}$ для некоторого фиксированного числа $\rho>0$, зависящего только от R и отображения Φ.

Используя локальные L_p-оценки из [52], находим

$$\|\nabla q\|_{L_p(\Omega_{2,\rho};\mathbb{R}^n)} \leqslant C_0''\big[\|F\|_{L_p(\Omega_2;\mathbb{R}^n)} + \big\|q - Q_\rho\big\|_{L_p(\Omega'_{2,\rho})}\big]$$

с постоянной $C_0'' > 0$, зависящей только от n, p, ρ и Ω_1, Ω_2, Φ, где $\Omega'_{2,\rho}$ — ограниченная подобласть в Ω_2, причем $\Omega_{2,\rho} \subset \Omega'_{2,\rho}$ и $\Omega'_{2,\rho}$ имеет границу класса C^1, а через Q_ρ обозначена аддитивная постоянная

$$Q_\rho = \frac{1}{\operatorname{mes}\Omega'_{2,\rho}} \int\limits_{\Omega'_{2,\rho}} q(x)\,dx.$$

Поэтому получаем оценку

$$\|v\|_{L_p(\Omega_2;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla q\|_{L_p(\Omega_2;\mathbb{R}^n)} \leqslant \widetilde{C}_0\big[\|F\|_{L_p(\Omega_2;\mathbb{R}^n)} + \big\|q - Q_\rho\big\|_{L_p(\Omega'_{2,\rho})}\big]$$

с постоянной $\widetilde{C}_0 > 0$, зависящей только от n, p, ρ и Ω_1, Ω_2, Φ. Из последней оценки, используя рассуждения от противного и компактность вложения $W_p^1(\Omega'_{2,\rho}) \hookrightarrow L_p(\Omega'_{2,\rho})$, получим оценку (2.1.68). Подробности стандартной схемы рассуждений от противного, позволяющих исключить норму $q - Q_\rho$ из правой части последнего неравенства, можно найти выше на с. 36.

Тем самым установлено, что из справедливости разложения (2.1.65) следует (2.1.66). Точно таким же образом устанавливается и обратная импликация, т. е. из справедливости (2.1.66) следует (2.1.65). Теорема доказана.

Рассмотрим неограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ вида

$$\Omega = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n\colon x_n > \varphi(x')\}, \tag{2.1.78}$$

где функция $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^{n-1})$ удовлетворяет условию

$$\lim_{|x'|\to\infty} |\nabla\varphi(x')| = 0. \tag{2.1.79}$$

Теорема 2.1.5. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *— область вида* (2.1.78), *удовлетворяющая условию* (2.1.79), $1 < p < \infty$, $n \geqslant 2$. *Тогда справедливо разложение* $L_p(\Omega;\mathbb{R}^n) = \overset{\circ}{J}_p(\Omega) \oplus \hat{G}_p(\Omega)$.

Доказательство. Согласно следствию 2.1.5 имеем

$$L_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n) = \overset{\circ}{J}_p(\mathbb{R}^n_+) \oplus \hat{G}_p(\mathbb{R}^n_+) \tag{2.1.80}$$

для полупространства $\mathbb{R}^n_+$ при $1 < p < \infty$, $n \geqslant 2$. По предположению, функция φ непрерывно дифференцируема и удовлетворяет условию (2.1.79). Отображение $y = \Phi(x)$ определим следующим образом:

$$y' = x', \quad y_n = x_n - \varphi(x').$$

Очевидно, $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{R}^n_+$ — диффеоморфизм Ω на $\mathbb{R}^n_+$ (в дальнейшем этот факт будет неоднократно использоваться). Очевидно также, что $\det J_\Phi = 1$. В силу (2.1.79) диффеоморфизм Φ удовлетворяет условию (2.1.63). Ссылка на разложение (2.1.80) и теорему 2.1.4 завершает доказательство теоремы 2.1.5.

Замечание 2.1.3. Ослабить условие (2.1.79) в теореме 2.1.5, вообще говоря, нельзя. Точность условия (2.1.79) проиллюстрируем примером. Для простоты ограничимся двумерным случаем. А именно, пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ имеет сколь угодно гладкую границу и представима в виде $\Omega = \Omega_0 \cup \Gamma_\alpha$, где Ω_0 — ограниченная область, а Γ_α — угол с раствором $\alpha \in (\pi, 2\pi)$, то разложение $L_p(\Omega; \mathbb{R}^2) = \overset{\circ}{J}_p(\Omega) \oplus \hat{G}_p(\Omega)$ не имеет места при $1 < p < 2/(1 + \pi/\alpha)$ и при $2/(1 - \pi/\alpha) < p < \infty$. Такую область Ω при надлежащем выборе Ω_0 можно представить в виде (2.1.78) со сколь угодно гладкой функцией φ, которая не будет удовлетворять условию (2.1.79).

Доказательство. Пусть (r, θ) — полярные координаты в $\mathbb{R}^2$. Не теряя общности, можно считать, что $\overline{\Omega}_0 \subset K_1$, где $K_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon |x| < 1\}$, и угол

$$\Gamma_\alpha = \{(r, \theta) \colon r > 0,\ 0 < \theta < \alpha\}, \quad \pi < \alpha < 2\pi.$$

Функцию $u_0 = u_0(x)$ определим в $\Gamma_\alpha \backslash \{0\}$ с помощью равенства

$$u_0(r \cos\theta, r \sin\theta) = r^{\frac{\pi}{\alpha}} \cos\Big(\frac{\pi\theta}{\alpha}\Big), \quad r > 0,\ 0 < \theta < \alpha.$$

Очевидно, $u_0 \in C^\infty(\Gamma_\alpha \backslash \{0\})$ и $\Delta u_0(x) = 0$ в $\Gamma_\alpha \backslash \{0\}$, причем

$$\frac{\partial u_0}{\partial \gamma}\Big|_{\Gamma_\alpha \backslash \{0\}} = 0,$$

где γ — нормаль к $\Gamma_\alpha \backslash \{0\}$. Срезающую функцию $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ выберем таким образом, чтобы

$$\eta(s) = \begin{cases} 0, & s \leqslant 1, \\ 1, & s \geqslant 2. \end{cases}$$

Заметим, что $\eta(|x|) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ и

$$\frac{\partial}{\partial \nu_0}\eta(|x|)\Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

где ν_0 — нормаль к $\partial\Omega$. Функцию $u_1 = u_1(x)$ определим с помощью равенства $u_1(x) = u_0(x)\eta(|x|)$. Очевидно, $U_1 \in C^\infty(\overline{\Omega})$ и

$$\frac{\partial u_1}{\partial \nu_0}\Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

В области Ω рассмотрим функцию

$$f(x) = 2\big(\nabla u_0(x), \nabla_x\,\eta(|x|)\big) + u_0(x)\Delta_x\eta(|x|), \quad x \in \Omega.$$

Нетрудно убедиться, что $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, причем $\operatorname{supp} f \subset (\overline{K}_2 \backslash K_1) \cap \overline{\Gamma}_\alpha$, где $K_2 = \{x \in \mathbb{R}^2\colon |x| < 2\}$, и область $(K_2 \backslash \overline{K}_1) \cap \Gamma_\alpha$ удовлетворяет условию конуса (определение см. на с. 10). Кроме того,

$$\int\limits_{(K_2\backslash\overline{K}_1)\cap\Gamma_\alpha} f(x)\,dx = 0.$$

Поэтому в силу теоремы 1.1.2 найдется векторное поле $v \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega;\mathbb{R}^2)$ при любых $p \in (1,\infty)$, причем $\operatorname{div} v(x) = f(x)$ в Ω, а $\operatorname{supp}|v| \subset (\overline{K}_2 \backslash K_1) \cap \overline{\Gamma}_\alpha$.

Таким образом, имеем $\Delta u_1(x) = \operatorname{div} v(x)$ в Ω. А так как, в частности, $v \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega;\mathbb{R}^2)$, то в силу теоремы Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала на гильбертовом пространстве существует единственное векторное поле $\nabla u_2 \in \hat{G}_2(\Omega)$, удовлетворяющее интегральному тождеству

$$\int\limits_\Omega (\nabla u_2\,, \nabla\psi)\,dx = \int\limits_\Omega (v, \nabla\psi)\,dx \quad \forall\,\nabla\psi \in \hat{G}_2(\Omega).$$

На основании леммы 2.1.3 заключаем, что $\nabla u_2 \in W^1_2(\Omega;\mathbb{R}^n)$. А тогда $\Delta u_2(x) = \operatorname{div} v(x)$ в Ω и

$$\frac{\partial u_2}{\partial \nu_0}\Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Рассмотрим теперь функцию $q(x) = u_1(x) - u_2(x)$, $x \in \Omega$. Из конструкции q видно, что $\Delta q(x) = \Delta u_1(x) - \Delta u_2(x) = 0$ в Ω и

$$\frac{\partial q}{\partial \nu_0}\Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Но $\nabla u_2 \in \hat{G}_p(\Omega)$ при любых значениях $p > 2$ в силу леммы 2.1.3, поскольку $v \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$ при любых $p \in (1, \infty)$. Если $2/(1 - \pi/\alpha) < p < \infty$, то $\nabla u_2 \in \hat{G}_p(\Omega)$. Поэтому $\nabla q \in \hat{G}_p(\Omega)$ при условии, что $2/(1-\pi/\alpha) < p < \infty$. Остается проверить, что $\nabla q(x)$ не будет тождественно равняться нулю в Ω. Предположим противное, т. е. пусть $\nabla q(x) = 0$ почти всюду в Ω. Тогда $\nabla u_1(x) = \nabla u_2(x)$ почти всюду в Ω. Но $\nabla u_2 \in \hat{G}_2(\Omega)$, а $\nabla u_2 \notin \hat{G}_2(\Omega)$ из-за недостаточно быстрого стремления $|\nabla u_1(x)|$ к нулю на бесконечности. Следовательно, $\nabla q(x)$ не может равняться нулю почти всюду в Ω.

Таким образом, при $2/(1 - \pi/\alpha) < p < \infty$ построено нетривиальное решение $\nabla q \in \hat{G}_p(\Omega)$ однородной задачи Неймана

$$\begin{cases} \Delta q = 0, \ x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial q}{\partial \nu_0}\Big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Обозначим $G^\infty(\Omega) = \{w \colon w = \nabla\psi|_\Omega\,, \ \psi \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\mathbb{R}^2)\}$. Тогда

$$\int\limits_\Omega (\nabla q\,, \nabla\psi)\, dx = 0 \quad \forall\, \nabla\psi \in G^\infty(\Omega).$$

Но для рассматриваемой области Ω в силу теоремы 6 из [31] и соотношений (2.1.5) замыкание в $L_p(\Omega; \mathbb{R}^2)$ его подпространства $G^\infty(\Omega)$ совпадает с $\hat{G}_p(\Omega)$ при любых $p \in (1, \infty)$. Поэтому

$$\int\limits_\Omega (\nabla q\,, \nabla\psi)\, dx = 0 \quad \forall\, \nabla\psi \in \hat{G}_{p'}(\Omega),$$

откуда и из (2.1.5) следует, что $\nabla q \in \overset{\circ}{J}_p(\Omega)$, причем $|\nabla q(x)| \not\equiv 0$. Это означает, что размерность $\dim \overset{\circ}{J}_p(\Omega) \cap \hat{G}_p(\Omega) \geqslant 1$, если $2/(1 - \pi/\alpha) < p < \infty$.

Следовательно, разложение $L_p(\Omega; \mathbb{R}^2) = \overset{\circ}{J}_p(\Omega) \oplus \hat{G}_p(\Omega)$ не имеет места при $2/(1-\pi/\alpha) < p < \infty$ хотя бы по той причине, что $\overset{\circ}{J}_p(\Omega) \cap \hat{G}_p(\Omega) \neq \{0\}$. Заметим, что $1 < p' < 2/(1 + \pi/\alpha)$, если $2/(1 - \pi/\alpha) < p < \infty$. Поэтому замыкание в $L_{p'}(\Omega; \mathbb{R}^2)$ подпространства $\overset{\circ}{J}_{p'}(\Omega) + \hat{G}_{p'}(\Omega)$ не будет совпадать с $L_{p'}(\Omega; \mathbb{R}^2)$, т. е. разложение $L_{p'}(\Omega; \mathbb{R}^2) = \overset{\circ}{J}_{p'}(\Omega) \oplus \hat{G}_{p'}(\Omega)$ не будет иметь место при $1 < p' < 2/(1 + \pi/\alpha)$.

Таким образом, для области $\Omega = \Omega_0 \cup \Gamma_\alpha$, имеющей сколь угодно гладкую границу, разложение $L_p(\Omega; \mathbb{R}^2) = \overset{\circ}{J}_p(\Omega) \oplus \hat{G}_p(\Omega)$ не имеет места при

$1 < p < 2/(1+\pi/\alpha)$ и $2/(1-\pi/\alpha) < p < \infty$, если $\pi < p < 2\pi$, что и требовалось доказать.

Замечание 2.1.4. Как установлено в работе [70], для области $\Omega = \mathbb{R}^2$ из замечания 2.1.3 при $p = 2/(1 \pm \pi/\alpha)$ пересечение $\overset{\circ}{J}_p(\Omega) \cap \hat{G}_p(\Omega) = \{0\}$ — тривиально, а сумма $\overset{\circ}{J}_p(\Omega) + \hat{G}_p(\Omega)$ образует всюду плотное, но незамкнутое подпространство в $L_p(\Omega; \mathbb{R}^2)$.

2.2. L_p-теория стационарной системы Стокса

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ рассмотрим стационарную задачу Стокса

$$\begin{cases} -\nu\Delta\, v + \nabla q = f(x), \\ \quad \operatorname{div} v = 0, \;\; x \in \Omega, \end{cases} \tag{2.2.1}$$

с однородными краевыми условиями

$$v\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2.2.2}$$

Предполагается, что $\partial\Omega \in C^2$, $n \geqslant 2$.

Рассмотрим вспомогательную стационарную задачу

$$\begin{cases} v - \nu\Delta v + \nabla q = f(x), \\ \operatorname{div} v = 0, \;\; x \in \Omega, \end{cases} \tag{2.2.3}$$

с однородными краевыми условиями

$$v\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.2.4}$$

Сильным решением линейной краевой задачи (2.2.3)–(2.2.4) с правой частью $f \in L_p(\Omega; \mathbb{R}^n)$ естественно называть пару векторных полей

$$\{v, \nabla q\} \in W_p^2(\Omega; \mathbb{R}^n) \cap \overset{\circ}{J}{}_p^1(\Omega) \times G_p(\Omega),$$

для которых система (2.2.3) выполняется почти всюду в Ω, а краевые условия (2.2.4) выполняются в смысле равенства соответствующих следов.

Для полупространства $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ справедлива следующая

Лемма 2.2.1. *Найдется постоянная $C_0 > 0$, зависящая только от n, p и ν, такая, что при $1 < p < \infty$, $n \geqslant 2$, $\nu > 0$ для любого $f \in L_p(\mathbb{R}^n_+; \mathbb{R}^n)$ существует единственное сильное решение $\{v, \nabla q\}$ краевой задачи* (2.2.3)–(2.2.4), *$v \in W_p^2(\mathbb{R}^n_+; \mathbb{R}^n) \cap \overset{\circ}{J}{}_p^1(\mathbb{R}^n_+)$, $\nabla q \in G_p(\mathbb{R}^n_+)$, удовлетворяющее неравенству*

$$\|v\|_{W_p^2(\mathbb{R}^n_+; \mathbb{R}^n)} + \|\nabla q\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+; \mathbb{R}^n)} \leqslant C_0 \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+; \mathbb{R}^n)}\,.$$

Доказательство. В случае $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ при любых $n \geqslant 2$ и $1 < p < \infty$ пространство $L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ раскладывается в прямую сумму

$$L_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n) = \overset{\circ}{J}_p(\mathbb{R}^n_+) \oplus G_p(\mathbb{R}^n_+)$$

замкнутых подпространств соленоидальных и потенциальных векторных полей (см. *Упр.*). Поэтому утверждение леммы достаточно доказать только для правых частей $f \in \overset{\circ}{J}_p(\mathbb{R}^n_+)$. Полагая без ограничения общности $\nu = 1$ и применяя к (2.2.3)–(2.2.4) преобразование Фурье относительно переменных $x' = (x_1,\ldots,x_{n-1})$, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} (1+|\xi'|^2)\hat{v}_k - \dfrac{\partial^2 \hat{v}_k}{\partial x_n^2} + i\xi_k \hat{q} = \hat{f}_k(\xi', x_n), \quad k = 1,\ldots,n-1, \\ (1+|\xi'|^2)\hat{v}_n - \dfrac{\partial^2 \hat{v}_n}{\partial x_n^2} + \dfrac{\partial \hat{q}}{\partial x_n} = \hat{f}_n(\xi', x_n), \\ \sum\limits_{k=1}^{n-1} i\xi_k \hat{v}_k + \dfrac{\partial \hat{v}_n}{\partial x_n} = 0, \quad x_n > 0, \end{cases} \tag{2.2.5}$$

с краевыми условиями

$$\hat{v}|_{x_n=0} = 0, \qquad \lim_{x_n \to +\infty} \hat{v}_n = 0. \tag{2.2.6}$$

Воспользуемся доказательством леммы 3.2.1, заменив $i\xi_0$ в (3.2.22) и (3.2.23) на единицу. При этом находим

$$i\xi'\hat{q}(\xi', x_n) = -\frac{i\xi'}{|\xi'|}\cdot\hat{\varphi}(\xi', x_n), \quad \frac{\partial \hat{q}}{\partial x_n} = \hat{\varphi}(\xi', x_n), \tag{2.2.7}$$

где функция φ определяется через свое преобразование Фурье

$$\hat{\varphi}(\xi', x_n) = |\xi'|\cdot e^{-x_n|\xi'|}\int\limits_0^\infty e^{-y_n\sqrt{1+|\xi'|^2}}\hat{F}(\xi', x_n)\,dy_n,\ x_n > 0, \tag{2.2.8}$$

и функция $F(x)$ тоже определяется через свое преобразование Фурье

$$\hat{F}(\xi', x_n) = \hat{f}(\xi', x_n) - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{i\xi_k}{|\xi'|}\cdot\hat{f}_k(\xi', x_n), \quad x_n > 0,\ \xi' \in \mathbb{R}^{n-1}. \tag{2.2.9}$$

Дальнейший ход доказательства почти буквально повторяет ход доказательства леммы 3.2.1. Лемма доказана.

Определение 2.2.1. Векторное поле $v \in \overset{\circ}{J}_p(\Omega)$ будем называть слабым решением задачи (2.2.3)–(2.2.4) класса $\overset{\circ}{J}_p(\Omega)$, если выполняется интегральное тождество

$$\int\limits_{\Omega} (v, u - \nu\Delta u)\, dx = \int\limits_{\Omega} (f, u)\, dx \quad \forall\, u \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p'}(\Omega;\mathbb{R}^n) \cap \overset{\circ}{J}{}^1_{p'}(\Omega)$$

при условии, что правая часть $f \in L_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)$.

Из леммы 2.2.1 вытекает

Следствие 2.2.1. В случае $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ при любых $n \geqslant 2$ и $1 < p < \infty$ слабое решение $v \in \overset{\circ}{J}_p(\mathbb{R}^n_+)$ задачи (2.2.3)–(2.2.4) единственно.

Доказательство. Пусть $v \in \overset{\circ}{J}_p(\mathbb{R}^n_+)$ удовлетворяет тождеству

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} (v, u - \nu\Delta u)\, dx = 0 \quad \forall\, u \in W^2_{p'}(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n) \cap \overset{\circ}{J}{}^1_{p'}(\mathbb{R}^n_+).$$

В силу леммы 2.2.1 это означает, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} (v, f)\, dx = 0 \quad \forall\, f \in L_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n),$$

откуда сразу же следует равенство $v = 0$ почти всюду в $\mathbb{R}^n_+$, что и требовалось доказать.

Напомним, что пространство Соболева $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ определено у нас как замыкание в пространстве $W^1_p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ его подпространства $\overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega;\mathbb{R}^n)$. Для показателя p', сопряженного к p, через $W^{-1}_{p'}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ естественно обозначить пространство всех линейных непрерывных функционалов на пространстве Соболева $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega;\mathbb{R}^n)$. Элементы $W^{-1}_{p'}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ удобно назвать «обобщенными векторными полями». Через $G^{-1}_{p'}(\Omega)$ обозначим подпространство всех потенциальных «обобщенных векторных полей» в $W^{-1}_{p'}(\Omega;\mathbb{R}^n)$.

Для любой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, без каких бы то ни было ограничений на границу $\partial\Omega$ согласно теореме де Рама [35] имеем

$$\overset{\circ}{J}{}^1_p(\Omega)^\perp = G^{-1}_{p'}(\Omega), \quad p' = p/(p-1),\ 1 < p < \infty, \tag{2.2.10}$$

где используется стандартное обозначение $X^\perp$ для аннулятора подпространства $X \subset B$ банахова пространства B. Напомним, что подпространство $X^\perp \subset B^*$ замкнуто в банаховом пространстве B^* линейных непрерывных функционалов на B.

Определение 2.2.2. Пару векторных полей $\{v, \nabla q\}$ будем называть слабым решением задачи (2.2.3)–(2.2.4) класса $\overset{\circ}{J}{}^1_p(\Omega) \times G_p^{-1}(\Omega)$, если эти векторные поля удовлетворяют системе (2.2.3) в смысле $\mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^n)$ при условии, что правая часть $f \in W_p^{-1}(\Omega; \mathbb{R}^n)$.

Говоря о слабом решении задачи (2.2.3)–(2.2.4), мы всегда будем указывать, к какому классу принадлежит это решение, из чего будет видно в смысле какого из двух определений решение является слабым. Отметим также, что из определения 2.2.1 в силу теоремы де Рама [35] вытекает существование потенциального векторного поля $\nabla q \in W_p^{-2}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ такого, что $v \in \overset{\circ}{J}_p(\Omega)$ из определения 2.2.1 и ∇q будут удовлетворять системе (2.2.3) в смысле $\mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^n)$.

Лемма 2.2.2. *Пусть* $\Omega = \mathbb{R}^n_+$, $n \geqslant 2$, $1 < p < \infty$ *и* $\nu > 0$. *Найдется постоянная* $C' > 0$, *зависящая только от* n, p *и* ν, *такая, что для любого* $f \in W_p^{-1}(\mathbb{R}^n_+; \mathbb{R}^n)$ *существует единственное слабое решение* $\{v, \nabla q\}$ *краевой задачи* (2.2.3)–(2.2.4) *класса* $\overset{\circ}{J}{}^1_p(\mathbb{R}^n_+) \times G_p^{-1}(\mathbb{R}^n_+)$. *Это решение удовлетворяет неравенству*

$$\|v\|_{W^1_p(\mathbb{R}^n_+; \mathbb{R}^n)} + \|\nabla q\|_{W_p^{-1}(\mathbb{R}^n_+; \mathbb{R}^n)} \leqslant C' \|f\|_{W_p^{-1}(\mathbb{R}^n_+; \mathbb{R}^n)}\,. \tag{2.2.11}$$

Доказательство. Начнем с единственности решения. Если $\{v, \nabla q\}$ — слабое решение однородной задачи класса $\overset{\circ}{J}{}^1_p(\mathbb{R}^n_+) \times G_p^{-1}(\mathbb{R}^n_+)$, то v будет слабым решением однородной задачи класса $v \in \overset{\circ}{J}_p(\mathbb{R}^n_+)$. Поэтому в силу следствия 2.2.1 слабое решение $\{v, \nabla q\}$ однородной задачи (2.2.3)–(2.2.4) класса $\overset{\circ}{J}{}^1_p(\mathbb{R}^n_+) \times G_p^{-1}(\mathbb{R}^n_+)$ будет единственно.

Заметим, что для любого $f \in W_p^{-1}(\mathbb{R}^n_+; \mathbb{R}^n)$ существует единственное $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\mathbb{R}^n_+; \mathbb{R}^n)$ такое, что $f = u - \Delta u$ и

$$\|u\|_{W^1_p(\mathbb{R}^n_+; \mathbb{R}^n)} \leqslant C_1 \|f\|_{W_p^{-1}(\mathbb{R}^n_+; \mathbb{R}^n)} \tag{2.2.12}$$

с постоянной $C_1 > 0$, зависящей только от n и p. Так как $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\mathbb{R}^n_+; \mathbb{R}^n)$, то найдется последовательность $\{u^j\}_{j=1}^\infty$ из $\overset{\circ}{C}{}^\infty(\mathbb{R}^n_+; \mathbb{R}^n)$, для которой

$$\lim_{j \to \infty} \|u - u^j\|_{W^1_p(\mathbb{R}^n_+; \mathbb{R}^n)} = 0. \tag{2.2.13}$$

Но $f = u - \Delta u$, поэтому из (2.2.13) следует, что

$$\lim_{j\to\infty} \|f - (u^j - \Delta u^j)\|_{W_p^1(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Последнее означает, что существование слабого решения и оценку (2.2.11) достаточно установить для случая, когда правая часть системы (2.2.3) имеет вид $f = u - \Delta u$ с векторным полем $u \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)$. При этом для u имеется оценка (2.2.11). Очевидно, в таком случае $f \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)$.

Из леммы 2.2.1 следует существование сильного решения $\{v, \nabla q\}$ задачи (2.2.3)–(2.2.4), которое будет также и слабым решением в смысле определения 2.2.2. Остается доказать оценку (2.2.11). Для этого удобно разбить f на два слагаемых: $f = f^1 + f^2$, где $f^1 = u \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)$, $f^2 = \nabla \operatorname{div} u - \Delta u$. Очевидно, $f^2 \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)$. Решение можно записать в виде $v = v^1 + v^2$, $\nabla q = \nabla q^1 + \nabla q^2$, где $\{v^1, \nabla q^1\}$ — решение с правой частью f^1, а $\{v^2, \nabla q^2\}$ — решение с правой частью f^2. При этом в силу леммы 2.2.1 и неравенства (2.2.12) имеем оценку

$$\|v^1\|_{W_p^1(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla q^1 - \nabla \operatorname{div} u^1\|_{W_p^{-1}(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)} \leqslant C_2 \|f\|_{W_p^{-1}(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)}$$

с постоянной $C_2 > 0$, зависящей только от n, p и ν. Последнее означает, что оценку (2.2.11) достаточно доказать лишь для правой части вида $f = \nabla \operatorname{div} u - \Delta u$ с векторным полем $u \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)$, для которого выполняется неравенство (2.2.12).

Предположим сначала, что $\nu = 1$. Поскольку $f \in \mathbb{R}^n_+$, то для преобразования Фурье функции $q(x) = q(x', x_n)$ относительно x' справедливо представление (2.2.7)–(2.2.8) с функцией $\hat{F}$ вида

$$\begin{aligned} \hat{F}(\xi', x_n) = |\xi'|^2 \hat{u}_n(\xi', x_n) + |\xi'| \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial x_n}(\xi', x_n) + \\ + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{i\xi_k}{|\xi'|} \Big[|\xi'| \frac{\partial \hat{u}_k}{\partial x_n}(\xi', x_n) + \frac{\partial^2 \hat{u}_k}{\partial x_n^2}(\xi', x_n) \Big]. \end{aligned} \tag{2.2.14}$$

Подставляя (2.2.14) в (2.2.8) и интегрируя по частям, находим

$$\hat{\varphi}(\xi', x_n) = (1 + |\xi'|^2)|\xi'| \cdot e^{-x_n|\xi'|} \int_0^\infty e^{-y_n\sqrt{1+|\xi'|^2}} \hat{\Phi}(\xi', x_n)\, dy_n, \ \ x_n > 0, \tag{2.2.15}$$

где функция Φ определяется через свое преобразование Фурье равенством

$$\hat{\Phi}(\xi', x_n) = \Big(1 + \frac{|\xi'|}{\sqrt{1+|\xi'|^2}}\Big) \cdot \left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{i\xi_k}{|\xi'|} \cdot \hat{u}_k(\xi', x_n) + \frac{|\xi'| \cdot \hat{u}_n(\xi', x_n)}{\sqrt{1+|\xi'|^2}}\right].$$

В силу (2.2.12) и теоремы [27] о мультипликаторах преобразования Фурье имеем

$$\sum_{|\alpha|\leqslant 1} \|D_x^\alpha \Phi\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C_3 \|f\|_{W_p^{-1}(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)} \tag{2.2.16}$$

с постоянной $C_3 > 0$, зависящей только от n и p.

Функцию φ представим в виде $\varphi = \psi_1 + \psi_2$, где $\psi_2(x) = -\Delta_{x'}\psi_1(x)$, а функция ψ_1 определяется через свое преобразование Фурье равенством

$$\psi_1(\xi', x_n) = |\xi'| \cdot e^{-x_n|\xi'|} \int\limits_0^\infty e^{-y_n\sqrt{1+|\xi'|^2}} \hat{\Phi}(\xi', x_n)\, dy_n\,. \tag{2.2.17}$$

Тогда q можно представить в виде $q = q_1 + q_2$, где

$$i\xi' \hat{q}_j(\xi', x_n) = -\frac{i\xi'}{|\xi'|} \cdot \hat{\psi}_j(\xi', x_n), \quad \frac{\partial \hat{q}_j}{\partial x_n} = \hat{\psi}_j(\xi', x_n), \quad j = 1, 2, \tag{2.2.18}$$

откуда следует, что $\nabla q_2(x) = -\Delta_{x'}\nabla q_1(x)$. Легко проверить, что

$$\begin{aligned} \|\nabla q_1\|_{W_p^{-1}(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)} &\leqslant \|\nabla q_1\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)}\,, \\ \|\nabla q_2\|_{W_p^{-1}(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)} &\leqslant \sum_{|\alpha'|=1} \|D_{x'}^{\alpha'} \nabla q_1\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)}\,. \end{aligned}$$

Поэтому в силу теоремы [27] о мультипликаторах преобразования Фурье и (2.2.18) имеем

$$\|\nabla q\|_{W_p^{-1}(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)} \leqslant C_4 \sum_{|\alpha'|\leqslant 1} \|D_{x'}^{\alpha'} \psi_1\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)} \tag{2.2.19}$$

с постоянной $C_4 > 0$, зависящей только от n и p.

Тем же путем, что и в лемме 3.2.1, получаем с учетом (2.2.17) оценку

$$\sum_{|\alpha'|\leqslant 1} \|D_{x'}^{\alpha'} \psi_1\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)} \leqslant C_5 \sum_{|\alpha'|\leqslant 1} \|D_{x'}^{\alpha'} \Phi\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+)}$$

с постоянной $C_5 > 0$, зависящей только от n и p, откуда и из

$$\|\nabla q\|_{W_p^{-1}(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)} \leqslant C_6 \|f\|_{W_p^{-1}(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)} \tag{2.2.20}$$

с постоянной $C_6 > 0$, зависящей только от n и p.

Из (2.2.20) и (2.2.12) получаем оценку (2.2.11) с $\nu = 1$. Делая замену переменных $y = x/\sqrt{\nu}$, получим оценку (2.2.11) для любого $\nu > 0$. Таким образом лемма доказана.

Для задачи (2.2.3)–(2.2.4) нам понадобится другое определение слабого решения класса $\overset{\circ}{J}{}^1_p(\Omega) \times G_p^{-1}(\Omega)$, эквивалентное определению 2.2.2. А именно, справедлива следующая лемма, в которой для краткости используется ставшее уже стандартным условное обозначение

$$(\nabla u, \nabla v) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} (\nabla u_k, \nabla v_k) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v_k}{\partial x_j}$$

для векторных полей $u = (u_1, \ldots, u_n)$ и $v = (v_1, \ldots, v_n)$ со значениями в $\mathbb{R}^n$.

Лемма 2.2.3. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — любая область, $1 < p < \infty$, $n \geqslant 2$ и $\nu > 0$. Если $v \in \overset{\circ}{J}{}^1_p(\Omega)$ и $f \in W_p^{-1}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ удовлетворяют интегральному тождеству*

$$\int\limits_{\Omega} \big[(v, u) + (\nabla v, \nabla u)\big]\, dx = \langle f, u \rangle \quad \forall\, u \in \overset{\circ}{J}{}^1_{p'}(\Omega)\,, \tag{2.2.21}$$

то найдется такое векторное поле $\nabla q \in G_p^{-1}(\Omega)$, что пара $\{v, \nabla q\}$ является слабым решением задачи (2.2.3)–(2.2.4) *в смысле определения* 2.2.2. *Если же $\{v, \nabla q\}$ — слабое решение задачи* (2.2.3)–(2.2.4) *в смысле определения* 2.2.2, *то v удовлетворяет тождеству* (2.2.21).

Доказательство. Если $v \in \overset{\circ}{J}{}^1_p(\Omega)$ и удовлетворяет тождеству (2.2.21), то $\Delta v \in W_p^{-1}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ и

$$\langle v - \nu \Delta v - f, u \rangle = 0 \quad \forall\, u \in \overset{\circ}{J}{}^1_{p'}(\Omega). \tag{2.2.22}$$

А если векторное поле $w \in \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^n)$ удовлетворяет тождеству

$$\langle w, u \rangle = 0 \quad \forall\, u \in \overset{\circ}{J}{}^{\infty}(\Omega)\,,$$

то найдется такой функционал $\psi \in \mathcal{D}'(\Omega)$, что $w = \nabla \psi$. Но $\overset{\circ}{J}{}^{\infty}(\Omega) \subset \overset{\circ}{J}{}^1_{p'}(\Omega)$ и имеет место вложение $W_p^{-1}(\Omega; \mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^n)$. Поэтому в силу теоремы де Рама [35] существует векторное поле $\nabla q \in \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^n)$, для которого

$$v - \nu \Delta v - f = -\nabla q. \tag{2.2.23}$$

Поскольку левая часть (2.2.23) является элементом $W_p^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^n)$, то и правая часть $-\nabla q \in W_p^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^n)$. А тогда пара векторных полей $\{v, \nabla q\}$ будет слабым решением задачи (2.2.3)–(2.2.4) в смысле определения 2.2.2.

Если же пара векторных полей $\{v, \nabla q\}$ является слабым решением задачи (2.2.3)–(2.2.4) в смысле определения 2.2.2, то

$$\int\limits_{\Omega} \big[(v,u) + (\nabla v, \nabla u)\big]\, dx + \langle \nabla q, u\rangle = \langle f, u\rangle \quad \forall\, u \in \overset{\circ}{J}{}^1_{p'}(\Omega)\,. \tag{2.2.24}$$

Но $\overset{\circ}{J}{}^{\infty}(\Omega)$ всюду плотно в $\overset{\circ}{J}{}^1_{p'}(\Omega)$, поэтому

$$\langle \nabla q, u\rangle = 0 \quad \forall\, u \in \overset{\circ}{J}{}^1_{p'}(\Omega)\,,$$

откуда и из (2.2.24) следует тождество (2.2.21). Лемма доказана.

Рассмотрим теперь область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ вида

$$\Omega = \{x = (x', x_n)\colon\ x \in \mathbb{R}^n,\ x_n > \varphi(x')\}, \tag{2.2.25}$$

где предполагается, что функция φ удовлетворяет равномерно в $\mathbb{R}^{n-1}$ условию Липшица и

$$\sup_{x' \in \mathbb{R}^{n-1}} |\nabla_{x'}\varphi(x')| \leqslant \varkappa \tag{2.2.26}$$

с некоторой постоянной $\varkappa > 0$.

Лемма 2.2.4. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область вида* (2.2.25), $1 < p < \infty$, $n \geqslant 2$, $\nu > 0$. *Тогда найдется постоянная $\varkappa = \varkappa(n, p, \nu$, зависящая только от n, p и ν, такая, что при условии выполнения* (2.2.26) *для любого $f \in W_p^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ существует единственное слабое решение $\{v, \nabla q\}$ задачи* (2.2.3)–(2.2.4) *класса $\overset{\circ}{J}{}^1_p(\Omega) \times G_p^{-1}(\Omega)$, причем*

$$\|v\|_{W_p^1(\Omega;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla q\|_{W_p^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|f\|_{W_p^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^n)}$$

с постоянной $C > 0$, зависящей только от n, p и ν.

Доказательство. Отображение $y = \Phi(x)$ определим с помощью равенств

$$y' = x', \quad y_n = x_n - \varphi(x'), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Очевидно, Φ отображает Ω на $\mathbb{R}^n$. Обозначим

$$u(y) = v\big(\Phi^{-1}(y)\big), \quad \psi(y) = q\big(\Phi^{-1}(y)\big), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Делая в системе (2.2.3) замену переменных $y = \Phi(x)$, получим

$$\begin{cases} u - \nu\Delta_y u + L\, u + J_\Phi^* \nabla_y \psi = f\big(\Phi^{-1}(y)\big), \\ \operatorname{div}_y u = \Big(\dfrac{\partial u}{\partial y_n}, \nabla_{y'}\varphi(y')\Big), \quad y \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{2.2.27}$$

где L — дифференциальный оператор вида

$$Lu = 2\nu \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_n} \cdot \frac{\partial \varphi(y')}{\partial y_k} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y_n^2} \cdot |\nabla_{y'}\varphi(y')|^2 + \nu \frac{\partial u}{\partial y_n} \cdot \Delta_{y'}\varphi(y'),$$

и J_Φ^* — транспонированная матрица Якоби отображения Φ. Для любого $u \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ имеем

$$\|Lu\|_{W_p^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^n)} \leqslant \nu\varkappa(1+\varkappa)\|u\|_{W_p^1(\Omega;\mathbb{R}^n)}\,. \tag{2.2.28}$$

Пусть $\Gamma = \{x = (x', x_n) \colon\ x \in \mathbb{R}^n,\ |x'| < x_n\}$ — конус и S_n — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$ с центром в начале координат. Выберем функцию $\omega \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(S_n)$ таким образом, чтобы $\operatorname{supp}\omega \subset S_n \cap \Gamma$ и

$$\int\limits_{S_n} \omega\, ds = 1.$$

Линейный оператор T определим следующим образом:

$$Tg(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} g(z) \frac{y - z}{|y - z|^n} \cdot \omega\Big(\frac{y - z}{|y - z|}\Big)\, dz.$$

В силу [7] имеем $Tg \in L_p^1(\mathbb{R}^n_+; \mathbb{R}^n)$ для любой $g \in L_p(\mathbb{R}^n_+)$, причем

$$\begin{aligned} &\operatorname{div}_y Tg(y) = g(y), \quad y \in \mathbb{R}^n_+\,, \\ &Tg(y)|_{y_n=0}, \quad y' \in \mathbb{R}^{n-1}, \end{aligned}$$

и выполняется неравенство

$$\sum_{|\alpha'|=1} \|D_y^\alpha Tg\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)} \leqslant C_1 \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)} \tag{2.2.29}$$

с постоянной $C_1 > 0$, зависящей только от n и p. А по теореме Зигмунда–Кальдерона о сингулярных интегралах имеем

$$\Big\|T\Big(\frac{\partial u}{\partial y_n}, \nabla_{y'}\varphi(y')\Big)\Big\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)} \leqslant \varkappa C_2 \|u\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)} \quad \forall\, u \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\mathbb{R}^n_+; \mathbb{R}^n) \tag{2.2.30}$$

с постоянной$C_2 > 0$, зависящей только от n и p. (подробности см. в [7]). Из (2.2.29),(2.2.30) следует, что

$$T\big(\frac{\partial u}{\partial y_n}, \nabla_{y'}\varphi(y')\big) \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n),$$

и выполняется неравенство

$$\big\|T\big(\frac{\partial u}{\partial y_n}, \nabla_{y'}\varphi(y')\big)\big\|_{W^1_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)} \leqslant \varkappa C_3 \|u\|_{W^1_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)} \quad \forall\, u \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n) \tag{2.2.31}$$

с постоянной$C_3 > 0$, зависящей только от n и p. Пусть

$$w(y) = u(y) - T\big(\frac{\partial u}{\partial y_n}, \nabla_{y'}\varphi(y')\big), \quad y \in \mathbb{R}^n_+\,. \tag{2.2.32}$$

Тогда $w \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)$ для любого $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)$. А в силу (2.2.31) и леммы 2.1.4 при $2\varkappa C_3 \leqslant 1$ для любого $w \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)$ существует единственное решение $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)$ уравнения (2.2.32), причем

$$\|u\|_{W^1_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)} \leqslant 2\|u\|_{W^1_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)} \tag{2.2.33}$$

и $u = T_0 w$, где $T_0\colon\ \overset{\circ}{W}{}^1_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n) \to \overset{\circ}{W}{}^1_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)$ — линейный непрерывный оператор, норма которого $\|T_0\| \leqslant 2$.

Из (2.2.27), учитывая (2.2.32), находим

$$\begin{cases} w - \nu\Delta_y w + L_0\, w + J^*_\Phi \nabla_y \psi = f\big(\Phi^{-1}(y)\big), \\ \operatorname{div}_y w = 0, \quad y \in \mathbb{R}^n\,, \end{cases} \tag{2.2.34}$$

где L_0 — линейный оператор вида

$$L_0 w = (I - \nu\Delta_y w + L) T\Big(\frac{\partial T_0 w}{\partial y_n}, \nabla_{y'}\varphi(y')\Big),$$

причем в силу (2.2.28),(2.2.31)–(2.2.33) при $2\varkappa C_3 \leqslant 1$ имеем

$$\|L_0 w\|_{W^{-1}_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)} \leqslant \varkappa C_4 \|w\|_{W^{-1}_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)} \quad \forall\, w \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n) \tag{2.2.35}$$

с постоянной $C_3 > 0$, зависящей только от n, p и ν. Таким образом, векторное поле $w \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)$, определенное равенством (2.2.32), соленоидально, т. е. $w \in \overset{\circ}{J}{}^1_p(\mathbb{R}^n_+)$ и удовлетворяет системе (2.2.34).

Операторы T_1, T_2 определим на упорядоченных парах $\{w, \nabla\psi\}$ с помощью равенств

$$
\begin{aligned}
&T_1\{w, \nabla\psi\} = w - \nu\Delta w + \nabla\psi,\\
&T_2\{w, \nabla\psi\} = w - \nu\Delta w + L_0 w + J_\Phi^*\nabla\psi.
\end{aligned} \tag{2.2.36}
$$

Нетрудно убедиться, что

$$
T_1\colon\ \overset{\circ}{J}{}^1_p(\mathbb{R}^n_+) \times G_p^{-1}(\mathbb{R}^n_+) \to W_p^{-1}(\mathbb{R}^n_+; \mathbb{R}^n)
$$

— линейный непрерывный оператор. Заметим, что для $\nabla\psi \in G_p(\mathbb{R}^n_+)$

$$
\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \big((I - J_\Phi^*)\nabla_y\psi(y), U(y)\big)\, dy = -\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \frac{\partial\psi(y)}{\partial y_n} \cdot \big(\nabla_{y'}\varphi(y'), U(y)\big)\, dy \tag{2.2.37}
$$

для всех $U \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\mathbb{R}^n_+; \mathbb{R}^n)$. Пусть $\{\rho_j\}_{j=1}^\infty$ — разбиение единицы в $\mathbb{R}^n_+$, обладающее следующими свойствами:

(а) $\rho_j \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$, $j \geqslant 1$;

(б) $0 \leqslant \rho_j \leqslant 1$, $j \geqslant 1$;

(в) $\sup\limits_{y\in\mathbb{R}^n} \sum\limits_{|\alpha|\leqslant 1} |D_y^\alpha \rho_j(y)| \leqslant M_0$ для некоторого числа M_0;

(г) $\sum\limits_{j=1}^\infty \rho_j(y) = 1, \quad y \in \overline{\mathbb{R}^n_+}$;

(д) множество $\mathbb{R}^n_+ \cap \operatorname{supp}\rho_j$ является кубом с единичным ребром, $j \geqslant 1$;

(е) множества $\{\operatorname{supp}\rho_j\}_{j=1}^\infty$ осуществляют покрытие $\mathbb{R}^n_+$ с кратностью, равномерно ограниченной числом N.

Обозначим $\Lambda_j = \mathbb{R}^n_+ \cap \operatorname{Int}(\operatorname{supp}\rho_j)$, $j \geqslant 1$. В силу (e) множество Λ_j представляет из себя открытый куб в $\mathbb{R}^n$ с единичным ребром. Пусть

$$
\widetilde{C}_j = \int \Lambda_j \psi(y)\, dy, \quad j \geqslant 1.
$$

Так как $\operatorname{mes}\Lambda_j = 1$, $j \geqslant 1$, то

$$
\int \Lambda_j\big(\psi(y) - \widetilde{C}_j\big)\, dy, \quad j \geqslant 1.
$$

Согласно следствию 1.1.1 из теоремы 1.1.1 главы 1 (см. с. 18) существует постоянная $C_5 > 0$, зависящая только от n и p, такая, что

$$\|\psi - \widetilde{C}_j\|_{L_p(\Lambda_j)} \leqslant C_5 \|\nabla\psi\|_{W_p^{-1}(\Lambda_j;\mathbb{R}^n)}\,. \tag{2.2.38}$$

Для $\nabla\psi \in G_p(\mathbb{R}^n_+)$ из (2.2.37) находим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \big((I - J^*_\Phi)\nabla_y\psi(y), U(y)\big)\,dy =$$
$$= -\sum_{j=1}^{\infty} \int \Lambda_j \frac{\partial}{\partial y_n}\big(\psi(y) - \widetilde{C}_j\big)\cdot\big(\nabla_{y'}\varphi(y'), U(y)\big)\,dy$$

откуда, интегрируя по частям относительно y_n, пользуясь (2.2.38) и неравенством Гёльдера, для $\nabla\psi \in G_p(\mathbb{R}^n_+)$ получаем

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \big((I - J^*_\Phi)\nabla_y\psi(y), U(y)\big)\,dy\Big| \leqslant \varkappa M_0 C_5 \sum_{j=1}^{\infty} \|\nabla\psi\|_{W_p^{-1}(\Lambda_j;\mathbb{R}^n)} \|U\|_{W^1_{p'}(\Lambda_j;\mathbb{R}^n)} \leqslant$$
$$\leqslant \varkappa M_0 C_5 \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|\nabla\psi\|^p_{W_p^{-1}(\Lambda_j;\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|U\|^p_{W^1_{p'}(\Lambda_j;\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

А тогда из леммы 3.2.3 следует, что для всех $U \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)$ выполняется неравенство

$$\begin{gathered}\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \big((I - J^*_\Phi)\nabla_y\psi(y), U(y)\big)\,dy\Big| \leqslant \\ \leqslant \varkappa M_0 C_5 M^{\frac{1}{p}} \|\nabla\psi\|_{W_p^{-1}(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)} \|U\|_{W^1_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)}\,,\end{gathered} \tag{2.2.39}$$

где $M > 0$ — постоянная из оценки (3.2.54). Из (2.2.39) получаем

$$\big\|(I - J^*_\Phi)\nabla_y\psi\big\|_{W_p^{-1}(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)} \leqslant \varkappa C_6 \|\nabla\psi\|_{W_p^{-1}(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)} \tag{2.2.40}$$

для всех $\nabla\psi \in W_p^{-1}(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)$, где постоянная $C_6 = M_0 C_5 N M^{\frac{1}{p}}$ зависит лишь от n и p.

Из (2.2.40) следует, в частности, что $J^*_\Phi\nabla\psi \in W_p^{-1}(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)$ для любого $\nabla\psi \in W_p^{-1}(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)$. Поэтому линейный оператор

$$T_2\colon\ \overset{\circ}{J}{}^1_p(\mathbb{R}^n_+) \times G_p^{-1}(\mathbb{R}^n_+) \to W_p^{-1}(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)$$

непрерывен. В силу (2.2.35),(2.2.40) и определения операторов T_1,T_2 имеем

$$\big\|(T_2-T_1)\{w,\nabla\psi\}\big\|_{W_p^{-1}(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)} \leqslant \varkappa C_7\big[\|w\|_{W_p^1(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)}+\|\nabla\psi\|_{W_p^{-1}(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)}\big]$$

для любого элемента $\{w,\nabla\psi\}\in\overset{\circ}{J}{}^1_p(\mathbb{R}^n_+)\times G_p^{-1}(\mathbb{R}^n_+)$ с положительной постоянной $C_7=C_4+C_6$, зависящей только от n, p и ν, откуда следует неравенство

$$\|T_2-T_1\|\leqslant\varkappa C_7 \tag{2.2.41}$$

для нормы оператора

$$T_2-T_1\colon\ \overset{\circ}{J}{}^1_p(\mathbb{R}^n_+)\times G_p^{-1}(\mathbb{R}^n_+)\to W_p^{-1}(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n).$$

Поскольку $T_2=T_1+(T_2-T_1)$, то, выбирая число

$$\varkappa=\Big\{\frac{1}{2C_3},\frac{1}{C_7\|T_1^{-1}\|}\Big\}, \tag{2.2.42}$$

заключаем на основании леммы 2.1.4, что оператор T_2 однозначно отображает $\overset{\circ}{J}{}^1_p(\mathbb{R}^n_+)\times G_p^{-1}(\mathbb{R}^n_+)$ на $W_p^{-1}(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)$, т. е. для любого $F\in W_p^{-1}(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)$ существует единственное решение $\{w,\nabla\psi\}\in\overset{\circ}{J}{}^1_p(\mathbb{R}^n_+)\times G_p^{-1}(\mathbb{R}^n_+)$ уравнения

$$T_2\{w,\nabla\psi\}=F,$$

и найдется постоянная $C_8>0$, зависящая только от n, p и ν, такая, что

$$\|w\|_{W_p^1(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)}+\|\nabla\psi\|_{W_p^{-1}(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)}\leqslant C_8\|F\|_{W_p^{-1}(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)}\,.$$

Но $u=T_0w$, поэтому для любого $f\in W_p^{-1}(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)$ существует единственное решение $\{u,\nabla\psi\}$ системы (2.2.35) из класса

$$u\in\overset{\circ}{W}{}^1_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n),\qquad \nabla\psi\in W_p^{-1}(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n),$$

и справедлива оценка

$$\|u\|_{W_p^1(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)}+\|\nabla\psi\|_{W_p^{-1}(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)}\leqslant C_8\|f\big(\Phi^{-1}(y)\big)\|_{W_p^{-1}(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)} \tag{2.2.43}$$

с постоянной $C_9>0$, зависящей только от n, p и ν. А это означает, что для любого $f\in W_p^{-1}(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)$ существует единственное решение $\{v,\nabla q\}$ задачи (2.2.3)–(2.2.4) из класса $v\in\overset{\circ}{J}{}^1_p(\mathbb{R}^n_+)$, $\nabla q\in W_p^{-1}(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)$, для которого в силу (2.2.43) выполняется неравенство из утверждения леммы. Лемма доказана.

Установим теперь существование и единственность сильного решения стационарной задачи (2.2.3)–(2.2.4) в области Ω вида (2.2.25). Будем предполагать, что все производные первого и второго порядка функции φ из (2.2.25) удовлетворяют равномерно в $\mathbb{R}^{n-1}$ условию Липшица, т. е. найдется такая постоянная $\gamma > 0$, что

$$\sup_{x' \in \mathbb{R}^{n-1}} \sum_{2 \leqslant |\alpha| \leqslant 3} \left| D_{x'}^{\alpha'} \varphi(x') \right| \leqslant \gamma. \tag{2.2.44}$$

Лемма 2.2.5. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *— область вида* (2.2.25), $1 < p < \infty$, $n \geqslant 2$, $\nu > 0$, $\gamma > 0$. *Тогда найдется постоянная* $\varepsilon = \varepsilon(n, p, \nu) > 0$, *зависящая только от* n, p *и* ν, *такая, что при условии выполнения* (2.2.44) *и неравенства*

$$\sup_{x' \in \mathbb{R}^{n-1}} \left| \varphi(x') \right| \leqslant \varepsilon$$

единственное сильное решение $\{v, \nabla q\}$, $v \in W_p^2(\Omega; \mathbb{R}^n) \cap \overset{\circ}{J}{}_p^1(\Omega)$ *задачи* (2.2.3)–(2.2.4) *существует для любого* $f \in L_p(\Omega; \mathbb{R}^n)$, *причем*

$$\|v\|_{W_p^2(\Omega;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla q\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} \leqslant C \|f\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} \tag{2.2.45}$$

с постоянной $C > 0$, *зависящей только от* n, p, ν *и* γ.

Доказательство. Пусть $y = \Phi(x)$ — отображение из доказательства леммы 2.2.4, и пусть $u(y) = v\big(\Phi^{-1}(y)\big)$, $\psi(y) = q\big(\Phi^{-1}(y)\big)$. Тогда, делая в системе (2.2.3) замену переменных $y = \Phi(x)$, получим

$$\begin{cases} u - \nu \Delta_y u - L_1 u + J_\Phi^* \nabla_y \psi = f\big(\Phi^{-1}(y)\big) - \nu \dfrac{\partial u}{\partial y_n} \cdot \Delta_{y'} \varphi(y'), \\ \operatorname{div}_y u = \Big(\dfrac{\partial u}{\partial y_n}, \nabla_{y'} \varphi(y')\Big), \quad y \in \mathbb{R}_+^n, \end{cases} \tag{2.2.46}$$

где L_1 — дифференциальный оператор вида

$$L_1 u = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y_n^2} \cdot \left| \nabla_{y'} \varphi(y') \right|^2 - 2\nu \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_n} \cdot |\nabla_{y'} \varphi(y')|^2.$$

Очевидно, для любого $u \in W_p^2(\mathbb{R}_+^n; \mathbb{R}^n)$ выполнено неравенство

$$\|L_1 u\|_{L_p(\mathbb{R}_+^n;\mathbb{R}^n)} \leqslant \nu \varepsilon (1 + \varepsilon) \|u\|_{W_p^2(\mathbb{R}_+^n;\mathbb{R}^n)} . \tag{2.2.47}$$

Векторное поле w определим через u с помощью равенств

$$\begin{aligned} & w_k(y) = u_k(y), \quad k = 1, \dots, n-1, \\ & w_n(y) = u_n(y) - \big(u(y), \nabla_{y'} \varphi(y')\big), \quad y \in \mathbb{R}_+^n. \end{aligned} \tag{2.2.48}$$

Тогда из (2.2.46) находим

$$\begin{cases} w - \Delta_y w - L_2 w + J_\Phi^* \nabla_y \psi = F(y), \\ \operatorname{div} w = 0, \quad y \in \mathbb{R}^n_+ , \end{cases} \tag{2.2.49}$$

где L_2 — дифференциальный оператор вида

$$L_2 u = L_1 u - a \cdot \bigl((I - \nu\Delta_y - L_1)w, \nabla_{y'}\varphi(y')\bigr), \tag{2.2.50}$$

где вектор $a = (0, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$, а правая часть F определяется равенствами

$$\begin{aligned} &F_k(y) = f_k\bigl(\Phi^{-1}(y)\bigr) - \nu \frac{\partial u}{\partial y_n} \cdot \Delta_{y'}\varphi(y'), \quad k = 1, \ldots, n-1, \\ &F_n(y) = f_n\bigl(\Phi^{-1}(y)\bigr) - \nu \frac{\partial u_n}{\partial y_n} \cdot \Delta_{y'}\varphi(y') + \nu\bigl(u, \Delta_{y'}\nabla_{y'}\varphi(y')\bigr) + \\ &+ 2\nu \sum_{k=1}^{n-1} \Bigl(\frac{\partial u}{\partial y_k}, \frac{\partial \nabla_{y'}\varphi(y')}{\partial y_k}\Bigr) - \nu\Bigl(\frac{\partial u}{\partial y_n}, \nabla_{y'}\bigl|\nabla_{y'}\varphi(y')\bigr|^2\Bigr), \quad y \in \mathbb{R}^n_+ . \end{aligned} \tag{2.2.51}$$

Из (2.2.47),(2.2.50) при $0 < \varepsilon \leqslant 1$ получаем

$$\|L_2 w\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)} \leqslant \nu\varepsilon(3\nu + 1)\|w\|_{W_p^2(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)}$$

для любого $w \in W_p^2(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)$. Операторы T_1 и T_2 определим на упорядоченных парах $\{w, \nabla\psi\}$ с помощью равенств (2.2.36). Очевидно,

$$T_j \colon \bigl(W_p^2(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n) \cap \overset{\circ}{W}{}_p^1(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)\bigr) \times G_p(\mathbb{R}^n_+) \to L_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n), \quad j = 1, 2,$$

— линейные непрерывные операторы. При этом

$$\begin{aligned} &\bigl\|(T_2 - T_1)\{w, \nabla\psi\}\bigr\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)} \leqslant \\ &\leqslant \nu\varepsilon(3\nu + 1)\bigl[\|w\|_{W_p^2(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla\psi\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)}\bigr]. \end{aligned} \tag{2.2.52}$$

В силу леммы 2.2.1 оператор T_1 обратим, т. е. для любого $F \in L_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)$ существует единственный элемент

$$\{w, \nabla\psi\} \in \bigl(W_p^2(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n) \cap \overset{\circ}{W}{}_p^1(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)\bigr) \times G_p(\mathbb{R}^n_+) \tag{2.2.53}$$

такой, что $T_1\{w, \nabla\psi\} = F$. Пусть число $\varkappa$ равно выбранному ранее в лемме 2.2.4 значению (2.2.42). Для доказываемой леммы выберем число

$$\varepsilon = \min\Bigl\{1, \varkappa, \frac{1}{2(3\nu + 1)C_0}\Bigr\},$$

где C_0 — постоянная из леммы 2.2.1. Тогда для оператора $T_2 = T_1+(T_2-T_1)$ согласно (2.2.52) имеем

$$\|T_2 - T_1\| \leqslant \frac{1}{2C_0} \leqslant \frac{1}{2}\cdot \|T_1^{-1}\|^{-1} < \|T_1^{-1}\|^{-1}, \tag{2.2.54}$$

так как норма обратного оператора $\|T_1^{-1}\| \leqslant C_0$ в силу оценки леммы 2.2.1. Из леммы 2.1.4 и (2.2.54) следует, что оператор T_2 также обратим, т. е. для любого $F \in L_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)$ существует единственное решение (2.2.53) системы (2.2.49) и справедлива оценка

$$\|w\|_{W^2_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla\psi\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|F\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)} \tag{2.2.55}$$

с постоянной $C_1 > 0$, зависящей только от n, p и ν.

Поскольку $\varepsilon \leqslant \varkappa$, то в силу леммы 2.2.4 существует единственное слабое решение $\{v, \nabla q\}$ задачи (2.2.3)–(2.2.4). Но тогда $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)$, а это означает, что $F \in L_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)$, так как F имеет вид (2.2.51), причем

$$\|F\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)} \leqslant \big\|f\big(\Phi^{-1}(y)\big)\big\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)} + 6\nu\gamma\|u\|_{W^1_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)}\,. \tag{2.2.56}$$

Таким образом, в (2.2.49) правая часть $F \in L_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)$. Поэтому решение $\{w, \nabla\psi\}$ с правой частью (2.2.51) попадает в класс (2.2.53) и имеет место оценка (2.2.55). Из (2.2.48),(2.2.55),(2.2.56) следует тогда, что

$$u \in W^2_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)\cap \overset{\circ}{W}{}^1_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n), \quad \nabla\psi \in L_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)$$

ввиду доказанной в лемме 2.2.4 единственности слабого решения, причем

$$\|u\|_{W^2_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla\psi\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)} \leqslant C_2\big[\|f\big(\Phi^{-1}(y)\big)\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{W^1_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)}\big]$$

с постоянной $C_2 > 0$, зависящей только от n, p, ν и γ. Следовательно, существует единственное сильное решение $\{v, \nabla q\}$ задачи (2.2.3)–(2.2.4), т. е. решение из класса

$$v \in W^2_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)\cap \overset{\circ}{J}{}^1_p(\mathbb{R}^n_+), \quad \nabla q \in L_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n),$$

и для этого решения справедлива оценка

$$\|v\|_{W^2_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)} \leqslant C_3\big[\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{W^1_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)}\big] \tag{2.2.57}$$

с постоянной $C_3 > 0$, зависящей только от n, p, ν и γ. А из (2.2.57) и оценки леммы 2.2.4 следует (2.2.45). Лемма доказана.

Следствие 2.2.2. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область, удовлетворяющая требованиям леммы 2.2.5 с числом $\varepsilon = \varepsilon(n, p', \nu)$, $p' = p/(p-1)$, $1 < p < \infty$, $n \geqslant 2$. Тогда слабое решение $v \in \overset{\circ}{J}_p(\Omega)$ задачи (2.2.3)–(2.2.4) единственно.

Доказательство. Пусть $v \in \overset{\circ}{J}_p(\Omega)$ удовлетворяет тождеству

$$\int_\Omega (v, u - \nu\Delta u)\, dx = 0 \quad \forall\, u \in W^2_{p'}(\Omega; \mathbb{R}^n) \cap \overset{\circ}{J}{}^1_{p'}(\Omega). \tag{2.2.58}$$

В силу леммы 2.2.5 для любого $f \in L_{p'}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ существует сильное решение $\{u, \nabla\psi\}$ задачи (2.2.3)–(2.2.4), т. е. решение из класса

$$u \in W^2_{p'}(\Omega; \mathbb{R}^n) \cap \overset{\circ}{J}{}^1_{p'}(\Omega), \quad \nabla\psi \in L_p(\mathbb{R}^n_+; \mathbb{R}^n),$$

поэтому для любого $f \in L_{p'}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ выполняется равенство

$$\int_\Omega (v, f)\, dx = \int_\Omega (v, u - \nu\Delta u + \nabla\psi)\, dx.$$

А так как $v \in \overset{\circ}{J}{}^1_p(\mathbb{R}^n_+)$ $\nabla\psi \in G_{p'}(\Omega)$, то имеем

$$\int_\Omega (v, \nabla\psi)\, dx = 0,$$

откуда и из (2.2.58) следует, что

$$\int_\Omega (v, f)\, dx = 0 \quad \forall\, f \in L_{p'}(\Omega; \mathbb{R}^n).$$

Последнее означает, что $v(x) = 0$ почти всюду в Ω, что и требовалось доказать.

Теорема 2.2.1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная или неограниченная область с границей из класса C^3, $1 < p < \infty$, $n \geqslant 2$, $\nu > 0$. Если слабое решение задачи* (2.2.3)–(2.2.4) *класса $v \in \overset{\circ}{J}_p(\Omega)$ с правой частью $f \in L_p(\Omega; \mathbb{R}^n)$, то $v \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega; \mathbb{R}^n) \cap \overset{\circ}{J}{}^1_p(\Omega)$ и существует постоянная $C > 0$, зависящая только от n, p и ν, такая, что*

$$\|v\|_{W^2_p(\mathbb{R}^n_+; \mathbb{R}^n)} \leqslant C\big[\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+; \mathbb{R}^n)} + \|u\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+; \mathbb{R}^n)}\big]. \tag{2.2.59}$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай неограниченной области Ω. По предположению, векторное поле $v \in \overset{\circ}{J}_p(\Omega)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_\Omega (v, u - \nu\Delta u)\, dx = 0 \quad \forall\, u \in W^2_{p'}(\Omega; \mathbb{R}^n) \cap \overset{\circ}{J}{}^1_{p'}(\Omega). \tag{2.2.60}$$

Воспользуемся разбиением единицы $\{\eta_j\}_{j=1}^\infty$, построенным при доказательстве леммы 3.2.4. Используя линейные операторы $\{T_j\}_{j=1}^\infty$, построенные при доказательстве леммы 3.2.4, из (2.2.60) находим

$$\int_\Omega \big(v, (I - \nu\Delta)\big[u\eta_j - T_j(u, \nabla\eta_j)\big]\big)\, dx = \int_\Omega \big(f, \big[u\eta_j - T_j(u, \nabla\eta_j)\big]\big)\, dx \tag{2.2.61}$$

для всех $u \in W^2_{p'}(\Omega; \mathbb{R}^n) \cap \overset{\circ}{J}{}^1_{p'}(\Omega)$, $j \geqslant 1$.

Условие $v \in \overset{\circ}{J}_p(\Omega)$ означает, что

$$\int_\Omega (v, \nabla\psi)\, dx = 0 \quad \forall\, \nabla\psi \in G_{p'}(\Omega).$$

Поэтому имеем

$$\int_{\Omega\cap B_j} (v, \nabla\eta_j)\, dx = 0, \quad j \geqslant 1,$$

откуда и из свойств операторов T_j следует, что

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} T_j(v, \nabla\eta_j) = (v, \nabla\eta_j), \quad x \in \Omega \cap B_j \\ &T_j(v, \nabla\eta_j) \in \overset{\circ}{W}{}^1_p\, (\Omega \cap B_j; \mathbb{R}^n), \quad j \geqslant 1. \end{aligned}$$

А тогда

$$\begin{aligned} \int_{\Omega\cap B_j} \big(v\eta_j - T_j(v, \nabla\eta_j), \nabla\psi\big)\, dx &= \int_{\Omega\cap B_j} (v\eta_j, \nabla\psi)\, dx + \\ + \int_{\Omega\cap B_j} (v, \psi\nabla\eta_j)\, dx &= \int_{\Omega\cap B_j} \big(v, \nabla(\psi\eta_j)\big)\, dx = 0, \quad j \geqslant 1. \end{aligned}$$

Следовательно, $v\eta_j - T_j(v,\nabla\eta_j) \in \overset{\circ}{J}_p(\Omega\cap B_j)$ и из (2.2.61) находим

$$\int\limits_{\Omega\cap B_j} \big(v\eta_j - T_j(v,\nabla\eta_j), u-\nu\Delta u\big)\,dx = \langle F^j, u\rangle, \quad j\geqslant 1, \tag{2.2.62}$$

для всех $u\in W^2_{p'}(\Omega;\mathbb{R}^n)\cap \overset{\circ}{J}{}^1_{p'}(\Omega)$, где F^j — линейные функционалы вида

$$\begin{aligned}\langle F^j, w\rangle = \int\limits_{\Omega\cap B_j} \big(f, w\eta_j - T_j(w,\nabla\eta_j)\big)\,dx + \int\limits_{\Omega\cap B_j}\big(v,(I-\nu\Delta)T_j(w,\nabla\eta_j)\big)\,dx+\\ +\nu\int\limits_{\Omega\cap B_j}\Big(v, w\Delta\eta_j + 2(\nabla\eta_j\,,\nabla)w\Big)\,dx-\\ -\int\limits_{\Omega\cap B_j}\big(T_j(v,\nabla\eta_j),w\big)\,dx - \nu\int\limits_{\Omega\cap B_j}\big(\nabla T_j(v,\nabla\eta_j),\nabla w\big)\,dx.\end{aligned} \tag{2.2.63}$$

В силу свойств операторов T_j имеем

$$|\langle F^j,w\rangle| \leqslant C_1\big[\|f\|_{L_p(\Omega\cap B_j;\mathbb{R}^n)} + \|v\|_{L_p(\Omega\cap B_j;\mathbb{R}^n)}\big]\cdot\|w\|_{W^1_{p'}(\Omega\cap B_j;\mathbb{R}^n)} \tag{2.2.64}$$

для всех $w\in W^1_{p'}(\Omega\cap B_j;\mathbb{R}^n)$, $j\geqslant 1$, с постоянной $C_1>0$, зависящей только от n, p, ν и δ.

Рассмотрим сначала случай $\Omega\cap B_j\neq\varnothing$. Так же, как и при доказательстве леммы 3.2.4, будем считать, не ограничивая общности, что область $\Omega\cap B_j$ совпадает с некоторой областью b_j, где

$$b_j = \mathcal{B}_j\cap\{x\in\mathbb{R}^n\colon |x|<\delta\},\quad \mathcal{B}_j = \{x=(x',x_n)\in\mathbb{R}^n\colon x_n>\varphi_j(x')\}.$$

Ввиду того, что граница $\partial\Omega\in C^3$ и $|\nabla_{x'}\varphi(x')|=0$ в точке $x'=0$, найдется такое положительное число $\delta_3\leqslant\delta_1$, что каждая из областей b_j будет удовлетворять условию

$$\sup_{x'\in\mathbb{R}^{n-1}}|\nabla_{x'}\varphi(x')| \leqslant \min\big\{\varkappa(n,p,\nu),\varepsilon(n,p,\nu),\varepsilon(n,p',\nu)\big\} \tag{2.2.65}$$

при $\delta\leqslant\delta_3$, где $\varepsilon=\varepsilon(n,p,\nu)$ — число из леммы 2.2.4, $\varkappa=\varkappa(n,p,\nu)$ — число из леммы 2.2.5, δ_1 — число из доказательства леммы 3.2.4, $p'=p/(p-1)$, $1<p<\infty$. В дальнейшем будем считать, что $\delta=\delta_3$, т. е. радиус δ шаров $\mathcal{B}_j$ будет фиксирован.

Так как (2.2.64) выполняется, в частности, для всех $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p'}(\Omega;\mathbb{R}^n)$, то $F^j \in W_p^{-1}(\mathcal{B}_j;\mathbb{R}^n)$. В силу условия (2.2.64) и лемм 2.2.3,2.2.4 существует единственное $w^j \in \overset{\circ}{J}{}^1_p(\mathcal{B}_j)$ такое, что

$$\int\limits_{\mathcal{B}_j} \big[(w^j, u) + \nu(\nabla w^j, \nabla u)\big]\, dx = \langle F^j, u\rangle \quad \forall\, u \in \overset{\circ}{J}{}^1_{p'}(\mathcal{B}_j)\,, \tag{2.2.66}$$

и выполнено неравенство

$$\begin{gathered} \|w^j\|_{W_p^1(\mathcal{B}_j;\mathbb{R}^n)} \leqslant C_2 \|F^j\|_{W_p^{-1}(\mathcal{B}_j;\mathbb{R}^n)} \leqslant \\ \leqslant C_1 C_2 \big[\|f\|_{L_p(\Omega\cap B_j;\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{L_p(\Omega\cap B_j;\mathbb{R}^n)}\big] \end{gathered} \tag{2.2.67}$$

с постоянной $C_2 > 0$, зависящей только от n, p и ν. Из (2.2.64) находим

$$\int\limits_{\mathcal{B}_j} (w^j, u - \nu\Delta u)\, dx = \langle F^j, u\rangle \quad \forall\, u \in W_{p'}^2(\mathcal{B}_j;\mathbb{R}^n) \cap \overset{\circ}{J}{}^1_{p'}(\mathcal{B}_j)\,. \tag{2.2.68}$$

Векторные поля v^j определим с помощью равенств

$$v^j(x) = \begin{cases} v\eta_j - T_j(,\nabla\eta_j), & x \in \Omega\cap B_j\,, \\ 0, & x \in \mathcal{B}_j\setminus(\Omega\cap B_j). \end{cases}$$

Очевидно, $v^j \in \overset{\circ}{J}_p(\mathcal{B}_j)$, а согласно (2.2.62) имеем

$$\int\limits_{\mathcal{B}_j} \big[(v^j, u - \nu\Delta u)\, dx = \langle F^j, u\rangle \quad \forall\, u \in W_{p'}^2(\mathcal{B}_j;\mathbb{R}^n) \cap \overset{\circ}{J}{}^1_{p'}(\mathcal{B}_j)\,. \tag{2.2.69}$$

В силу (2.2.65) к области $\mathcal{B}_j$ применимо следствие из леммы 2.2.5. Поэтому из (2.2.68),(2.2.69) следует, что $v^j(x) = w^j(x)$ почти всюду в $\mathcal{B}_j$. Следовательно, $v^j \in \overset{\circ}{W}{}^1_p\ (\mathcal{B}_j;\mathbb{R}^n)$. Но $v^j(x) = 0$ при $x \in \mathcal{B}_j\setminus(\Omega\cap B_j)$ и область $\Omega\cap B_j$ имеет липшицеву границу, поэтому $v^j \in \overset{\circ}{W}{}^1_p\ (\Omega\cap B_j;\mathbb{R}^n)$. А так как $\operatorname{div} v^j = \operatorname{div} w^j = 0$, то $v^j \in \overset{\circ}{J}{}^1_p(\Omega\cap B_j)$. Это означает, что

$$v \in W_p^1(\Omega\cap B_j';\mathbb{R}^n)\,, \quad v|_{\partial\Omega\cap B_j'} = 0. \tag{2.2.70}$$

При этом $\operatorname{div} v = 0$, а в силу (2.2.67) и свойств операторов T_j имеем

$$\|v\|^p_{W_p^1(\Omega\cap B_j';\mathbb{R}^n)} \leqslant C_3\big[\|f\|^p_{L_p(\Omega\cap B_j;\mathbb{R}^n)} + \|v\|^p_{L_p(\Omega\cap B_j;\mathbb{R}^n)}\big] \tag{2.2.71}$$

с постоянной $C_3 > 0$, зависящей только от n, p, ν и δ.

Рассмотрим теперь случай, когда $\Omega \cap B_j = \varnothing$. В этом случае область $\Omega \cap B_j$ лежит в некотором полупространстве. Повторяя приведенные выше рассуждения и пользуясь леммой 2.2.2, снова приходим к заключению (2.2.70). При этом $\operatorname{div} v = 0$ и выполняется неравенство (2.2.71) с некоторой постоянной $C_3 > 0$, зависящей только от n, p, ν и δ. Не ограничивая общности, будем считать постоянную C_3 общей для случаев $\Omega \cap B_j \neq \varnothing$ и $\Omega \cap B_j = \varnothing$. Таким образом, справедливость оценки (2.2.71) установлена для всех значений индекса $j \geqslant 1$. А тогда, из (2.2.71) следует, что $v \in W_p^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ и выполняется неравенство

$$\|v\|^p_{W_p^1(\Omega;\mathbb{R}^n)} \leqslant C_4 \big[\|f\|^p_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} + \|v\|^p_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)}\big] \tag{2.2.72}$$

с постоянной $C_4 > 0$, зависящей только от C_3 и кратности покрытия N. При этом $\operatorname{div} v(x) = 0$ в Ω и $v|_{\partial\Omega} = 0$, т. е.

$$v \in \hat{\mathring{J}}{}_p^1(\Omega) = \{u \in \mathring{W}{}_p^1(\Omega;\mathbb{R}^n) \colon \operatorname{div} u = 0\}.$$

Но по предположению теоремы $v \in \mathring{J}_p(\Omega)$, поэтому из утверждения (20) работы [31] следует, что $v \in \mathring{J}{}_p^1(\Omega)$. Теперь, интегрируя в правой части (2.2.63) по частям, учитывая (2.2.71) и свойства операторов T_j, получим

$$|\langle F^j, u\rangle| \leqslant C_5 \big[\|f\|^p_{L_p(\Omega\cap B_j;\mathbb{R}^n)} + \|v\|^p_{W_p^1(\Omega\cap B_j;\mathbb{R}^n)}\big] \cdot \|w\|_{L_{p'}(\Omega\cap B_j;\mathbb{R}^n)} \tag{2.2.73}$$

для всех $w \in \mathring{W}{}_{p'}^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$ с постоянной $C_5 > 0$, зависящей только от n, p, ν и δ.

Вернемся к случаю $\Omega \cap B_j \neq \varnothing$. из (2.2.73) и теоремы Хана–Банаха следует существование векторного поля $f^j \in L_p(\mathcal{B}_j;\mathbb{R}^n)$ такого, что

$$\langle F^j, u\rangle = \int\limits_{\mathcal{B}_j} (f^j, u)\, dx \qquad \forall\, u \in \mathring{W}{}_{p'}^1(\mathcal{B}_j;\mathbb{R}^n) \tag{2.2.74}$$

силу теоремы Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала на L_p. При этом

$$\|f^j\|_{L_p(\mathcal{B}_j;\mathbb{R}^n)} \leqslant C_6 \big[\|f\|_{L_p(\Omega\cap B_j;\mathbb{R}^n)} + \|v\|_{L_p(\Omega\cap B_j;\mathbb{R}^n)}\big]\,, \tag{2.2.75}$$

ввиду (2.2.72),(2.2.73), где постоянная $C_6 = C_5 \cdot (1 + C_4)$.

Поскольку граница $\partial\Omega \in C^3$, то в силу (2.2.65) и леммы 2.2.5 существует единственное сильное решение $\{w^j, \nabla\psi^j\}$ задачи (2.2.3)–(2.2.4) класса

$$w^j \in W_p^2(\mathcal{B}_j;\mathbb{R}^n) \cap \overset{\circ}{J}{}_p^1(\mathcal{B}_j), \quad \nabla\psi^j \in L_p(\mathcal{B}_j;\mathbb{R}^n)\,,$$

при этом справедливо неравенство

$$\|w^j\|_{W_p^2(\mathcal{B}_j;\mathbb{R}^n)} \leqslant C_7 \|f^j\|_{L_p(\mathcal{B}_j;\mathbb{R}^n)} \tag{2.2.76}$$

с постоянной $C_7 > 0$, зависящей только от n, p, ν и $\partial\Omega$. Поэтому

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathcal{B}_j} (f^j, u)\,dx &= \int\limits_{\mathcal{B}_j} (w^j - \nu\Delta w^j + \nabla\psi^j, u)\,dx = \\ = \int\limits_{\mathcal{B}_j} (w^j - \nu\Delta w^j, u)\,dx &= \int\limits_{\mathcal{B}_j} \big[(w^j, u) + \nu(\nabla w^j, \nabla u)\big]\,dx\end{aligned} \tag{2.2.77}$$

для всех $u \in \overset{\circ}{J}{}_{p'}^1(\mathcal{B}_j)$.

Из (2.2.69),(2.2.74),(2.2.77) находим

$$\int\limits_{\mathcal{B}_j} \big[(v^j - w^j, u) + \nu\big(\nabla(v^j - w^j), \nabla u\big)\big]\,dx = 0 \qquad \forall\, u \in \overset{\circ}{J}{}_{p'}^1(\mathcal{B}_j). \tag{2.2.78}$$

А из (2.2.65),(2.2.78) и лемм 2.2.3,2.2.4 следует, что $v^j(x) = w^j(x)$ почти всюду $\mathcal{B}_j$. Тогда $v \in W_p^2(\Omega \cap B_j';\mathbb{R}^n)$ и

$$\|v\|^p_{W_p^2(\Omega\cap B_j';\mathbb{R}^n)} \leqslant C_8\big[\|f\|^p_{L_p(\Omega\cap B_j;\mathbb{R}^n)} + \|v\|^p_{L_p(\Omega\cap B_j;\mathbb{R}^n)}\big] \tag{2.2.79}$$

ввиду (2.2.75),(2.2.76) и свойств операторов T_j, где постоянная $C_8 > 0$ зависит только от n, p, ν и $\partial\Omega$.

В случае $\Omega \cap B_j = \varnothing$ на основании леммы 2.2.1 заключаем, что слабое решение $v \in W_p^2(\Omega \cap B_j';\mathbb{R}^n)$ и выполняется неравенство (2.2.79) с некоторой постоянной $C_8 > 0$, зависящей только от n, p, ν и δ. Не ограничивая общности, будем считать постоянную C_8 общей для случаев $\Omega \cap B_j \neq \varnothing$ и $\Omega \cap B_j = \varnothing$. Таким образом, справедливость оценки (2.2.79) установлена для всех значений индекса $j \geqslant 1$. А тогда из (2.2.79) следует, что $v \in W_p^2(\Omega;\mathbb{R}^n)$ и справедлива оценка (2.2.59). Таким образом, слабое решение $v \in W_p^2(\Omega;\mathbb{R}^n) \cap \overset{\circ}{J}{}_p^1(\Omega)$ и удовлетворяет (2.2.59), что завершает доказательство теоремы для неограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Очевидно, это же доказательство годится и для ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с той лишь разницей, что разбиение единицы будет не локально конечным, а просто конечным. Теорема 2.2.1 доказана.

Глава 3

Нестационарная система Навье-Стокса

Эта глава посвящена решению начально-краевых задач для нестационарных систем Стокса и Навье–Стокса. В первом параграфе разбирается метод Галеркина для нелинейной нестационарной системы Навье–Стокса. Поскольку метод Галеркина для уравнений Навье–Стокса как-то затрагивается во всех (немногочисленных) монографиях и учебных пособиях по уравнениям Навье–Стокса, то в первом параграфе основное внимание уделяется вопросам, недостаточно глубоко разработанным в научных исследованиях, и уж тем более в учебной литературе. К этим вопросам относятся гладкость слабого решения по времени, краевые условия, отличные от преобладающих в литературе краевых условий прилипания, а также негладкость зависимости краевых условий от времени. Все эти проблемные вопросы входят в постановку начально-краевой задачи для нелинейной системы Навье–Стокса, которая представляет собой математическую макромодель урагана. В макромоделях динамики сплошных сред характерные особенности моделируемых процессов описываются через краевые условия. Второй параграф посвящен построению L_p-теории начально-краевых задач для линейной нестационарной системы Стокса. Подробно разбирается метод локализации, с помощью которого повышается гладкость слабого решения при наличии достаточной гладкости данных задачи. Для неограниченных областей с гладкими границами разработан метод получения оценок, позволивший установить критерий однозначной разрешимости начально-краевой задачи в классе сильных решений. Третий параграф посвящен построению L_p-теории локальной разрешимости начально-краевой задачи для нелинейной системы Навье–Стокса, в том числе и в неограниченной области. Благодаря точным L_p-оценкам нелинейности установлены все известные виды локальной разрешимости для нелинейной нестационарной системы Навье–Стокса.

3.1. Слабые решения и метод Галеркина

В этом параграфе решается неклассическая начально-краевая задача динамики вязкой несжимаемой сплошной среды, заполняющей все полупространство $\mathbb{R}^3_+ = \{x = (x', x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 > 0\}$ с непроницаемой границей, на которой помимо не зависящего от времени условия непротекания задаются еще два краевых условия с зависящими от $x' = (x_1, x_2)$ и t типами. При этом в каждой отдельно взятой граничной точке x' тип краевого условия может с течением времени изменяться скачком — третье краевое условие может стать первым, а первое третьим. Движение сплошной среды описывается нелинейной системой уравнений Навье–Стокса

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial t} + (\, v, \nabla\,)\, v - \mu \Delta v + \frac{1}{\rho} \nabla p = f(x,t), \\ &\operatorname{div} v = 0, \quad (x,t) \in Q_T = \mathbb{R}^3_+ \times (0,T), \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

где $T > 0$ — любое наперед заданное число, $v(x,t) = (v_1, v_2, v_3)$ — поле скоростей сплошной среды, $p(x,t)$ — давление, ρ — постоянная плотность среды, $f(x,t) = (f_1, f_2, f_3)$ — массовая плотность внешних сил, $\mu > 0$ — коэффициент кинематической вязкости. На гиперплоскости $t = 0$ заданы начальные условия

$$v\big|_{t=0} = v^0(x), \quad \operatorname{div} v^0 = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3_+\,. \tag{3.1.2}$$

Краевые условия задаются на граничной плоскости $\mathbb{R}^2$, которая в каждый момент времени распадается на два не пересекающихся подмножества $S_1(t)$ и $S_2(t)$, так что $\mathbb{R}^2 = S_1(t) \cup S_2(t)$. Очевидно, в каждый момент времени t хотя бы одно из подмножеств $S_1(t)$ и $S_2(t)$ должно быть непусто. Не исключено, что $S_j(t) = \mathbb{R}^2$ при каких-либо $t \in [0,T]$ для одного из значений $j = 1, 2$.

Через Π_T обозначим слой $\Pi_T = \mathbb{R}^2 \times (0,T)$, и пусть

$$\omega_j^T = \big\{\, (x', t) \in \Pi_T : x' \in S_j(t),\ t \in (0,T)\,\big\},\ j = 1, 2,$$

при этом $\Pi_T = \omega_1^T \cup \omega_2^T$. Для системы (3.1.1) на ω_1^T и ω_2^T задаются краевые условия, относящиеся к разным типам, и поэтому в фиксированной точке границы $x' \in \mathbb{R}^2$ тип краевого условия с течением времени может меняться. На ω_1^T задаются условия прилипания к неподвижной границе

$$v\big|_{x_3=0} = 0 \quad \forall\,(x',t) \in \omega_1^T, \tag{3.1.3}$$

а на ω_2^T задаются так называемые условия Навье, т.е. условия внешнего трения сплошной среды о непроницаемую граничную плоскость

$$\left(\mu\frac{\partial v_k}{\partial x_3} - E v_k\right)\bigg|_{x_3=0} = 0,\ k = 1,2, \quad v_3\big|_{x_3=0} = 0 \quad \forall\,(x',t) \in \omega_2^T\,, \tag{3.1.4}$$

с коэффициентом внешнего трения $E > 0$ (под внутренним трением, как обычно, подразумеваются вязкие силы). Из физических соображений коэффициент E может зависеть от x' и $|v'| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$. В случае зависимости E от $|v'|$ доказательства соответствующих теорем удлиняются, не требуя при этом каких-либо принципиальных изменений. Учет же зависимости коэффициента E от x' не требует вообще никаких изменений в доказательствах, если $E = E(x') \geqslant 0$. Однако, чтобы не отвлекаться на несущественные подробности, мы будем считать коэффициент трения E положительной постоянной.

Начально-краевая задача (3.1.1)–(3.1.4) представляет собой математическую макромодель урагана. Отметим, что подмножество $S_1(t)$ — это зона покоя, куда входит в частности глаз урагана, а $S_2(t)$ — это зона локализации ветров ураганной силы. Первые два из трех скалярных краевых условий Навье (3.1.4) состоят в пропорциональности касательных напряжений касательным скоростям сплошной среды относительно неподвижной границы. Эффект трения особенно заметен при движении урагана над поверхностью суши. Исследуется случай негладкой эволюции граничных условий, когда нет непрерывной зависимости от t для подмножеств $S_j(t)$, т.е. их связность зависит от времени. Это означает, в частности, что в какие-то моменты времени t какие-то связные компоненты подмножеств $S_j(t)$ внезапно исчезают, а какие-то внезапно появляются. Такая негладкая эволюция больше соответствует наблюдаемому поведению урагана, движение которого часто сопровождается отделением торнадо, разделением урагана на отдельные составные части с последующим слиянием некоторых из них и т.п. Очень важно, что единственным предположением о характере эволюции краевых условий здесь служит предположение о замкнутости подмножества $\omega_1^T \subset \overline{\Pi}_T$, что равносильно предположению об открытости в Π_T подмножества ω_2^T. Подход, который никак не опирается на гладкость эволюции, особенно эффективен при изучении вопросов существования глобальных обобщенных решений задачи с неизвестной эволюцией урагана, т.е. с неизвестными подмножествами ω_1^T и ω_2^T.

Главной целью этого параграфа является исследование гладкости по t глобального обобщенного решения начально-краевой задачи (3.1.1)–(3.1.4), когда нет никаких ограничений на величины положительных μ, T и на величины соответствующих норм вектор-функций v^0 и f. Мы доказываем существование глобального обобщенного решения задачи (3.1.1)–(3.1.4) в классе Хопфа с оценкой решения в норме анизотропного пространства Соболева $W_{2,x,t}^{1,\gamma}$ вплоть до границы при $\gamma = 2/5$. Подобная глобальная оценка впервые была получена Ж.-Л. Лионсом [67, 68] при $\gamma < 1/4$ с краевыми условиями прилипания на всей границе. Затем Ж.-Л. Лионс улучшил эту оценку до порядка $\gamma = 2/5$, но так и не опубликовал доказательство — см. [76]. В этом параграфе приводится доказательство оценки с $\gamma = 2/5$ для случая существенно более сложных краевых условий, чем условия прилипания, которые рассматривал Ж.-Л. Лионс. Подчеркнем, что достижением здесь является не столько увеличение порядка гладкости до $\gamma = 2/5$, сколько получение самой оценки гладкости по t вплоть до границы. Основным препятствием к получению такой оценки, пусть даже и порядка $\gamma < 1/4$, являлось отсутствие гладкости у эволюции краевых условий. Даже в случае линеаризованной задачи (3.1.1)–(3.1.4) без $(v, \nabla)v$ это препятствие оставалось непреодолимым для всех известных методов получения оценок гладкости решения по t. Найденный здесь подход основывается на регуляризации краевых условий (3.1.3)–(3.1.4) с последующим предельным переходом по параметру регуляризации. При этом во избежание потери гладкости по t нужно, чтобы соответствующая оценка регуляризованного решения не зависела от параметра регуляризации, что собственно и представляет главную трудность. В предлагаемой ниже итерационной процедуре получения подобных оценок как раз и заключена принципиальная новизна нашего подхода.

Разработанный специально для задачи (3.1.1)–(3.1.4) метод получения оценки дробной производной обобщенного решения по времени оказывается эффективным для широкого круга других линейных и нелинейных эволюционных задач с краевыми условиями, тип которых зависит от времени негладким образом. В первую очередь это относится к начально-краевым задачам для линейных и нелинейных параболических уравнений. Следует обратить внимание на то, что в случае линеаризованной задачи (3.1.1)–(3.1.4) без $(v, \nabla)v$ наш метод позволяет дотянуть оценку дробной гладкости по t уже до любого порядка $\gamma < 1/2$.

Определение обобщенного решения проще сформулировать, введя подходящие функциональные пространства. Через $W_{2,x,t}^{1,0}(Q_T;\mathbb{R}^3)$ обозначим рефлексивное анизотропное пространство Соболева с нормой

$$\|v\|_{W_{2,x,t}^{1,0}(Q_T;\mathbb{R}^3)} = \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \|D_x^\alpha v\|_{L_2(Q_T;\mathbb{R}^3)}\,,$$

состоящее из классов смежности эквивалентных на Q_T вектор-функций $v(x,t)\colon Q_T \to \mathbb{R}^3$, имеющих обобщенные производные $D_x^\alpha v \in L_2(Q_T;\mathbb{R}^3)$ для всех мультииндексов α при $|\alpha| \leqslant 1$. Введя соответствующее скалярное произведение, можно было бы превратить $W_{2,x,t}^{1,0}(Q_T;\mathbb{R}^3)$ в гильбертово пространство, если бы в этом была необходимость. Замыкание в $W_{2,x,t}^{1,0}(Q_T;\mathbb{R}^3)$ его подпространства

$$\overset{\circ}{V}{}^\infty(Q_T) = \Big\{v(x,t) \in C^\infty(\overline{Q}_T;\mathbb{R}^3)\colon \operatorname{diam}\operatorname{supp}|v| < \infty,\ \operatorname{div}_x v = 0,$$
$$v_3\big|_{x_3=0} = 0,\ v_j(x',0,t)\big|_{\omega_1^T} = 0,\ j = 1,2\Big\}$$

обозначим через $\overset{\circ}{V}(Q_T)$. А через $\overset{\circ}{J}_2(\mathbb{R}^3_+)$ обозначим замыкание в $L_2(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)$ его подпространства

$$\overset{\circ}{J}{}^\infty(\mathbb{R}^3_+) = \{w(x) \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)\colon \operatorname{div} w = 0\}.$$

Подмножество $\omega_1^T \subset \Pi_T$ предполагается заданным и измеримым по Лебегу. Обобщенное решение задачи (3.1.1)–(3.1.4) ищется в классе

$$\hat{\overset{\circ}{V}}(Q_T) = \Big\{v(x,t) \in W_{2,x,t}^{1,0}(Q_T;\mathbb{R}^3)\colon \operatorname{div}_x v = 0,\ v_3\big|_{x_3=0} = 0,$$
$$v_j(x',0,t)\big|_{\omega_1^T} = 0,\ j = 1,2\Big\},$$

представляющим собой замкнутое подпространство в рефлексивном анизотропном пространстве Соболева $W_{2,x,t}^{1,0}(Q_T;\mathbb{R}^3)$. Когда $\operatorname{mes}\omega_1^T = 0$, т.е. в случае, когда подмножество $\omega_1^T \subset \Pi_T$ имеет нулевую трехмерную меру Лебега, краевые условия (3.1.3) теряют смысл. Без ограничения общности случай $\operatorname{mes}\omega_1^T = 0$ можно было бы исключить как тривиальный, поскольку в этом случае п.в. в Π_T будут выполняться краевые условия Навье, и таким образом, краевые условия в смысле равенства соответствующих следов будут иметь постоянный тип. Тем не менее мы не исключаем этот тривиальный частный случай из рассмотрения, по крайней мере, по следующим двум причинам: во-первых, глобальная оценка дробной гладкости по t порядка $\gamma = 2/5$ будет новым результатом даже в этом тривиальном случае, а, во-вторых, без этого частного случая рассматриваемая математическая модель оказалось бы неполной.

Определение 3.1.1. Обобщенным решением задачи (3.1.1)–(3.1.4) назовем элемент $v \in \hat{\overset{\circ}{V}}(Q_T)$, удовлетворяющий интегральному тождеству

$$\int\limits_{Q_T} \Big\{ -\Big(v, \frac{\partial u}{\partial t}\Big) + ((v,\nabla)v, u) + \mu \sum_{j=1}^{3} (\nabla v_j, \nabla u_j) \Big\}\, dx\, dt +$$

$$+ E \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\omega_2^T} v_j(x',0,t) u_j(x',0,t)\, dx'\, dt = \int\limits_{Q_T} (f,u)\, dx\, dt +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^3_+} (v^0(x), u(x,0))\, dx \quad \forall\, u \in \overset{\circ}{V}{}^{\infty}(Q_T) : u\big|_{t=T} = 0, \quad (3.1.5)$$

где для обозначения скалярного произведения в $\mathbb{R}^3$ используются, как обычно, круглые скобки $(\,.\,,\,.\,)$.

Очевидно, что $\overset{\circ}{V}(Q_T) \subset \hat{\overset{\circ}{V}}(Q_T)$. Вопрос об обратном включении интересен прежде всего потому, что он связан с проблемой единственности обобщенного решения задачи (3.1.1)–(3.1.4) в смысле определения 1. При некоторых дополнительных ограничениях на ω_1^T вопрос об обратном включении, хотя и решается положительно, является технически непростой проблемой, выходящей за рамки этого учебного пособия и требующей привлечения методов аппроксимации [31]. Не останавливаясь на этом вопросе, отметим, что для справедливости обратного включения заведомо достаточно непрерывности границы $\partial\omega_1^T$.

Определение 3.1.2. Обобщенное решение в смысле определения 3.1.1 будем называть обобщенным решением задачи (3.1.1)–(3.1.4) класса Хопфа, если

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,T]} \|v(x,t)\|_{L_2(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)} < \infty. \quad (3.1.6)$$

При $0 < s < 1$ через $W_{2,x,t}^{1,s}(Q_T;\mathbb{R}^3)$ обозначим анизотропное пространство Соболева–Слободецкого [38] с нормой

$$\|v\|_{W_{2,x,t}^{1,s}(Q_T;\mathbb{R}^3)} = \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \|D_x^\alpha v\|_{L_2(Q_T;\mathbb{R}^3)} +$$

$$+ \Bigg(\iiint\limits_{\mathbb{R}^3_+\,0\,0}^{\;\;T\;T} \frac{|v(x,\sigma) - v(x,\tau)|^2}{|\sigma-\tau|^{2s+1}}\, d\sigma\, d\tau\, dx \Bigg)^{1/2}. \quad (3.1.7)$$

Для вектор-функций, определенных на $Q = \mathbb{R}^3_+ \times \mathbb{R}^1$, вместо локальной нормы (3.1.7) можно использовать эквивалентную ей нелокальную норму

$$\|v\|_{W^{1,s}_{2,x,t}(Q;\mathbb{R}^3)} = \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \|D^\alpha_x v\|_{L_2(Q;\mathbb{R}^3)} + \left(\int\limits_Q |\hat{v}(x,\xi)|^2 \big(1+|\xi|^2\big)^s \, d\xi \, dx \right)^{1/2}$$

(см. лемму 3 в [38]), в которой для вектор-функции $v(x,t)$ гладкость вещественного порядка s по t определяется уже в терминах преобразования Фурье $\hat{v}(x,\xi) = \mathcal{F}_{t\to\xi}[v(x,t)]$ по переменной t. Такая нелокальная норма оказывается более практичной при получении оценок дробной гладкости обобщенного решения по t.

Докажем следующую основную теорему.

Теорема 3.1.1. *Пусть μ, E и T — какие-либо положительные числа, $\omega^T_1 \subset \Pi_T$ — какое-либо измеримое по Лебегу подмножество. Тогда для любых $f \in L_2(Q_T;\mathbb{R}^3)$, $v^0 \in \overset{\circ}{J}_2(\mathbb{R}^3_+)$ существует обобщенное решение задачи (3.1.1)–(3.1.4) из класса Хопфа такое, что $v \in W^{1,2/5}_{2,x,t}(Q_T;\mathbb{R}^3)$ и выполнено неравенство*

$$\|v\|_{W^{1,2/5}_{2,x,t}(Q_T;\mathbb{R}^3)} \leqslant C\Phi\Big(\|f\|_{L_2(Q_T;\mathbb{R}^3)} + \big\|v^0\big\|_{L_2(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)} \Big) \tag{3.1.8}$$

с многочленом $\Phi(\rho) = \rho^2 + \rho$, где положительная постоянная C зависит только от μ, E и T.

Предварительно, с помощью метода Галеркина будет доказано существование обобщенного решения регуляризованной задачи с параметром регуляризации $\beta > 0$, а затем для регуляризованного решения будет установлена не зависящая от β оценка нормы в анизотропном пространстве Соболева–Слободецкого $W^{1,2/5}_{2,x,t}(Q_T;\mathbb{R}^3)$.

Метод Галеркина для регуляризованной задачи

В случае, когда $\operatorname{mes}\omega^T_1 \neq 0$, вспомогательная регуляризованная задача для системы (3.1.1) с начальными условиями (3.1.2) определяется следующими граничными условиями

$$v_3\big|_{x_3=0} = 0 \;\; \forall\,(x',t) \in \Pi_T = \mathbb{R}^2 \times (0,T)\,, \tag{3.1.9}$$

$$\left.\begin{aligned} &\left(\mu\frac{\partial v_k}{\partial x_3} - E v_k\right)\bigg|_{x_3=0} = 0 \;\; \forall\,(x',t) \in \omega^T_2\,, \\ &\left(\mu\frac{\partial v_k}{\partial x_3} - (\beta+E) v_k\right)\bigg|_{x_3=0} = 0 \;\; \forall\,(x',t) \in \omega^T_1\,, \end{aligned}\right\} \; k = 1,2 \tag{3.1.10}$$

с параметром регуляризации $\beta > 0$. При этом краевые условия на ω_1^T и ω_2^T относятся уже к одному и тому же типу. В тривиальном частном случае $\operatorname{mes}\omega_1^T = 0$ никакой регуляризации для обобщенного решения не требуется. В случае $\operatorname{mes}\omega_1^T \neq 0$ обобщенное решение задачи (3.1.1)–(3.1.4) получается из обобщенного решения задачи (3.1.1), (3.1.2), (3.1.9), (3.1.10) предельным переходом при $\beta \to \infty$. Этот предельный переход будет сделан в конце раздела.

Для регуляризованной задачи введем еще одно функциональное пространство. Через $\dot{V}(Q_T)$ обозначим замыкание подпространства

$$\dot{V}^\infty(Q_T) = \Big\{ v(x,t) \in C^\infty(\overline{Q}_T;\mathbb{R}^3):\ \operatorname{diam}\operatorname{supp}|v| < \infty, \\ \operatorname{div}_x v = 0,\ v_3\big|_{x_3=0} = 0 \Big\}$$

в анизотропном пространстве Соболева $W_{2,x,t}^{1,0}(Q_T;\mathbb{R}^3)$. И пусть

$$\widehat{\dot{V}}(Q_T) = \Big\{ v(x,t) \in W_{2,x,t}^{1,0}(Q_T;\mathbb{R}^3):\ \operatorname{div}_x v = 0,\ v_3\big|_{x_3=0} = 0 \Big\}.$$

Очевидно, подпространство $\widehat{\dot{V}}(Q_T)$ замкнуто в $W_{2,x,t}^{1,0}(Q_T;\mathbb{R}^3)$ и имеет место априорное включение $\dot{V}(Q_T) \subset \widehat{\dot{V}}(Q_T)$. Обратное включение следует из [31], и, таким образом, подпространства $\widehat{\dot{V}}(Q_T)$ и $\dot{V}(Q_T)$ совпадают. При этом $\widehat{\overset{\circ}{V}}(Q_T) = \dot{V}(Q_T)$ в тривиальном случае $\operatorname{mes}\omega_1^T = 0$.

Определение 3.1.3. Обобщенным решением задачи (3.1.1), (3.1.2), (3.1.9), (3.1.10) назовем элемент $v \in \dot{V}(Q_T)$, удовлетворяющий интегральному тождеству

$$\int\limits_{Q_T} \Big\{ -\Big(v, \frac{\partial u}{\partial t}\Big) + ((v,\nabla)v, u) + \mu \sum_{j=1}^{3} (\nabla v_j, \nabla u_j) \Big\}\, dx\, dt + \\ + \sum_{j=1}^{2} \Big\{ E \int\limits_{\Pi_T} v_j(x',0,t) u_j(x',0,t)\, dx'\, dt + \beta \int\limits_{\omega_1^T} v_j(x',0,t) u_j(x',0,t)\, dx'\, dt \Big\} = \\ = \int\limits_{Q_T} (f,u)\, dx\, dt + \int\limits_{\mathbb{R}^3_+} (v^0(x), u(x,0))\, dx \quad \forall\, u \in \dot{V}^\infty(Q_T) : u\big|_{t=T} = 0. \quad (3.1.11)$$

А при условии выполнения (3.1.6) такое обобщенное решение будем называть обобщенным решением задачи (3.1.1), (3.1.2), (3.1.9), (3.1.10) из класса Хопфа.

Условимся, что для вектор-функции $v = (v_1, v_2, v_3)$ запись $\|\nabla v\|$ будет означать $\|\nabla v\|^2 = \|\nabla v_1\|^2 + \|\nabla v_2\|^2 + \|\nabla v_3\|^2$ при любой норме $\|\cdot\|$. То же соглашение распространяется и на модуль вектор-функции. Для вспомогательной задачи (3.1.1), (3.1.2), (3.1.9), (3.1.10) существование обобщенного решения (3.1.11) устанавливается с помощью метода Галеркина, лежащего в основе доказательства следующей теоремы.

Теорема 3.1.2. *Пусть μ, E, T, β — какие-либо положительные числа, $\omega_1^T \subset \Pi_T$ — какое-либо измеримое по Лебегу подмножество. Тогда для любых $f \in L_2(Q_T;\mathbb{R}^3)$, $v^0 \in \overset{\circ}{J}_2(\mathbb{R}^3_+)$ существует обобщенное решение задачи* (3.1.1), (3.1.2), (3.1.9), (3.1.10) *из класса Хопфа и*

$$\frac{1}{4}\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,T]} \|v(x,t)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)} + \mu\,\|\nabla v\|^2_{L_2(Q_T;\mathbb{R}^3)} + \\ + \sum_{j=1}^{2}\Big\{E\int\limits_{\Pi_T} |v_j(x',0,t)|^2\,dx'\,dt + \beta\int\limits_{\omega_1^T} |v_j(x',0,t)|^2\,dx'\,dt\Big\} \leqslant \\ \leqslant \|v^0\|^2_{L_2(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)} + \left(2\int\limits_0^T \|f(x,t)\|_{L_2(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)}\,dt\right)^2. \qquad (3.1.12)$$

Доказательство. Определение класса решений $\dot{V}(Q_T)$ позволяет выбрать в качестве базисных вектор-функций $\{w^k(x)\}_{k=1}^\infty$ для галеркинских приближений элементы подпространства

$$\dot{J}^\infty(\mathbb{R}^3_+) = \Big\{w(x) \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}^3_+};\mathbb{R}^3)\colon\ \operatorname{diam}\operatorname{supp}|w| < \infty, \\ \operatorname{div} w = 0,\ w_3\big|_{x_3=0} = 0\Big\}.$$

Базисная система $\{w^k(x)\}_{k=1}^\infty$ выбирается при этом линейно независимой и полной в подпространстве $\dot{J}^1_2(\mathbb{R}^3_+) \subset W^1_2(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)$, которое определяется как замыкание в $W^1_2(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)$ его подпространства $\dot{J}^\infty(\mathbb{R}^3_+)$. Такой выбор возможен благодаря сепарабельности $W^1_2(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)$, поскольку нетрудно убедиться, что для всякого сепарабельного метрического пространства X каждое всюду плотное в X множество содержит счетное подмножество, также всюду плотное в X.

Из [31] следует совпадение $\dot{J}^1_2(\mathbb{R}^3_+)$ с подпространством

$$\hat{J}^1_2(\mathbb{R}^3_+) = \Big\{w(x) \in W^1_2(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)\colon\ \operatorname{div} w = 0,\ w_3\big|_{x_3=0} = 0\Big\}.$$

Важно, что для регуляризованной задачи с параметром β базисные вектор-функции для галеркинских приближений не зависят от переменной t. Отметим, что нет никакой необходимости в традиционной ортогонализации базисной системы.

Ввиду измеримости ω_1^T найдется подмножество $I \subset (0,T)$ полной меры, сечение $S_1(t)$ которого измеримо для всех $t \in I$, т. е. для почти всех $t \in (0,T)$. Переопределим $S_1(t)$ на $(0,T)\backslash I$, полагая $S_1(t) = \varnothing$. Теперь сечение $S_1(t)$ станет измеримым для каждого $t \in (0,T)$, но при этом изменится само подмножество ω_1^T. Однако на значении интеграла Лебега по ω_1^T такое изменение подмножества ω_1^T никак не отразится, а следовательно, не отразится оно и на определении обобщенного решения.

Последовательность галеркинских приближений

$$v^N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} C_k^N(t) w^k(x), \ \ N \geqslant 1, \tag{3.1.13}$$

определяется, как обычно, из задачи Коши

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathbb{R}^3_+} \big(v^N(x,t), w^m(x)\big)\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}^3_+} \big(\big(v^N(x,t),\nabla\big)\, v^N(x,t), w^m(x)\big)\,dx + \\ + \mu\sum_{j=1}^{3}\int\limits_{\mathbb{R}^3_+} \big(\nabla v_j^N(x,t), \nabla w_j^m(x)\big)\,dx + \\ + \sum_{j=1}^{2}\Big\{E\int\limits_{\mathbb{R}^2} v_j^N(x',0,t) w_j^m(x',0)dx' + \beta\int\limits_{S_1(t)} v_j^N(x',0,t) w_j^m(x',0)dx'\Big\} = \\ = \int\limits_{\mathbb{R}^3_+} (\, f(x,t), w^m(x)\,)\,dx, \ \ t \in (0,T), \ \ m = 1,\ldots,N,\end{gathered} \tag{3.1.14}$$

с начальными условиями вида

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3_+} \big(v^N(x,0), w^m(x)\big)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^3_+} \big(v^0(x), w^m(x)\big)\,dx, \ m = 1,\ldots,N. \tag{3.1.15}$$

В силу определения галеркинских приближений (3.1.13) система (3.1.14) представляет собой нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для N неизвестных функций $C_1^N(t),\ldots,C_N^N(t)$, тогда как

(3.1.15) представляет собой линейную алгебраическую систему, из которой определяются начальные данные $C_1^N(0), \ldots, C_N^N(0)$.

Для доказательства разрешимости задачи Коши (3.1.14)–(3.1.15) при каждом фиксированном N достаточно установить априорную ограниченность $v^N(x,t)$. С этой целью умножим, как обычно, каждое из уравнений системы (3.1.14) на $C_m^N(t)$ и просуммируем по всем m. Тогда

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|v^N(x,t)\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)} + \mu\left\|\nabla v^N(x,t)\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)} + \\ + \sum_{j=1}^{2}\Big\{E\int\limits_{\mathbb{R}^2}\left|v_j^N(x',0,t)\right|^2\,dx' + \beta\int\limits_{S_1(t)}\left|v_j^N(x',0,t)\right|^2\,dx'\Big\} = \\ = \int\limits_{\mathbb{R}^3_+}\big(f(x,t), v^N(x,t)\big)\,dx \quad \dot{\forall}\, t\in(0,T), \quad (3.1.16)$$

где квантор с точкой $\dot{\forall}$ означает «для почти всех». Аналогичным образом, умножив каждое из уравнений (3.1.15) на $C_m^N(0)$ и просуммировав по всем индексам m, с помощью неравенства Коши–Буняковского получаем

$$\left\|v^N(x,0)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)} \leqslant \left\|v^0(x)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)},$$

откуда и из (3.1.16) находим

$$\frac{1}{2}\left\|v^N(x,\tau)\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)} + \mu\left\|\nabla v^N\right\|^2_{L_2(Q_\tau;\mathbb{R}^3)} + \\ + \sum_{j=1}^{2}\Big\{E\int\limits_{\Pi_\tau}\left|v_j^N(x',0,t)\right|^2\,dx'\,dt + \beta\int\limits_{\omega_1^\tau}\left|v_j^N(x',0,t)\right|^2\,dx'\,dt\Big\} = \\ = \frac{1}{2}\left\|v^0(x)\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)} + \int\limits_{Q_\tau}\left(f, v^N\right)\,dx\,dt \qquad \forall\,\tau\in[0,T]. \quad (3.1.17)$$

Для оценки интеграла в правой части (3.1.17) применяется сначала неравенство Коши–Буняковского, а затем неравенство $ab \leqslant 2a^2 + b^2/8$. При этом для всех $\tau \in [0, T]$ получаем

$$\int\limits_{Q_\tau} \left(f, v^N\right) \, dx \, dt \leqslant \int\limits_0^\tau \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)} \left\|v^N\right\|_{L_2(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)} \, dt \leqslant$$

$$\leqslant \max_{t\in[0,\tau]} \left\|v^N(x,t)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)} \int\limits_0^\tau \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)} \, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{8} \max_{t\in[0,\tau]} \left\|v^N(x,t)\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)} + 2\left(\int\limits_0^\tau \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)} \, dt\right)^2. \quad (3.1.18)$$

Подставляя (3.1.18) в правую часть (3.1.17), находим

$$\frac{1}{4} \max_{t\in[0,T]} \left\|v^N(x,t)\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)} + \mu \left\|\nabla v^N\right\|^2_{L_2(Q_T;\mathbb{R}^3)} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{2} \left\{ E \int\limits_{\Pi_T} \left|v_j^N(x', 0, t)\right|^2 \, dx' \, dt + \beta \int\limits_{\omega_1^T} \left|v_j^N(x', 0, t)\right|^2 \, dx' \, dt \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \left\|v^0\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)} + \left(2\int\limits_0^T \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)} \, dt\right)^2 \quad \forall\, N \geqslant 1. \quad (3.1.19)$$

Из (3.1.19), в частности, следует неравенство

$$\max_{t\in[0,T]} \left\|v^N\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)} \leqslant 4 \left\|v^0\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)} + \left(4\int\limits_0^T \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)} \, dt\right)^2, \quad (3.1.20)$$

откуда ввиду линейной независимости системы $\{w^k(x)\}_{k=1}^\infty$ находим

$$\max_{t\in[0,T]} \sum_{k=1}^{N} \left|C_k^N(t)\right|^2 \leqslant M_N \left(\left\|v^0\right\|_{L_2(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)} + \int\limits_0^T \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)} \, dt \right)^2$$

с некоторой постоянной $M_N > 0$, которая при заданной базисной системе зависит только от N. Последняя оценка означает априорную ограниченность решения $C^N(t) = (C_1^N, \ldots, C_N^N)$ задачи Коши, полученной при подстановке (3.1.13) в (3.1.14)–(3.1.15) и имеющей вид

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \mathcal{A}_N C^N = F^N(t, C^N), \\ &\mathcal{A}_N C^N(0) = a^N \in \mathbb{R}^N, \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

с заданной вектор-функцией $F^N(t, C^N)$, представляющей собой многочлен второго порядка относительно C^N, где $\mathcal{A}_N$ — матрица Грама для базисной системы $\{w^k(x)\}_{k=1}^N$ относительно скалярного произведения в $L_2(\mathbb{R}^3_+; \mathbb{R}^3)$. Ввиду линейной независимости базисной системы $\{w^k(x)\}_{k=1}^\infty$ определитель Грама $\det \mathcal{A}_N \neq 0$ для каждого $N \geqslant 1$.

Нелинейность в задаче Коши (3.1.21) гладкая, что гарантирует локальную разрешимость этой задачи в классе $W_2^1\big((0,T); \mathbb{R}^N\big)$. Из только что установленной для задачи Коши (3.1.21) априорной ограниченности вытекает существование ее глобального решения $C^N(t) \in W_2^1\big((0,T); \mathbb{R}^N\big)$.

Займемся теперь предельным переходом при $N \to \infty$. Из (3.1.19) очевидным образом вытекает оценка

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \left\| v^N \right\|^2_{L_2(Q_T;\mathbb{R}^3)} + \mu \left\| \nabla v^N \right\|^2_{L_2(Q_T;\mathbb{R}^3)} \leqslant \\ \leqslant (T+1) \left\| v^0 \right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)} + (T+1) \left(2 \int\limits_0^T \| f \|_{L_2(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)} \, dt \right)^2 \end{aligned} \qquad (3.1.22)$$

для всех $N \geqslant 1$. Правая часть (3.1.22) от N не зависит, что означает слабую относительную компактность множества $\{v^N\}$ в рефлексивном банаховом пространстве $W^{1,0}_{2,x,t}(Q_T; \mathbb{R}^3)$. А так как в $W^{1,0}_{2,x,t}(Q_T; \mathbb{R}^3)$ каждое сильно замкнутое подпространство совпадает со своим слабым замыканием, то из $\{v^N\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{v^{N_\nu}\}$, слабо сходящуюся в $W^{1,0}_{2,x,t}(Q_T; \mathbb{R}^3)$ к некоторому элементу $v \in \dot{V}(Q_T)$. В силу (3.1.19) слабый предел $v \in \dot{V}\ (Q_T)$ удовлетворяет неравенству (3.1.12), поскольку в $W^{1,0}_{2,x,t}(Q_T; \mathbb{R}^3)$ каждый сильно замкнутый шар совпадает со своим слабым замыканием.

Остается доказать, что слабый предел $v \in \dot{V}(Q_T)$ является обобщенным решением вспомогательной задачи в смысле определения 3.1.3. Согласно

(3.1.14) подпоследовательность $\left\{v^{N_\nu}\right\}$ удовлетворяет равенству

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3_+} \left(\frac{\partial v}{\partial t}^{N_\nu}, w^m(x)\right) dx + \int\limits_{\mathbb{R}^3_+} \left(\left(v^{N_\nu}, \nabla\right) v^{N_\nu}, w^m(x)\right) dx + \\ + \mu \sum_{j=1}^{3} \int\limits_{\mathbb{R}^3_+} \left(\nabla v_j^{N_\nu}, \nabla w_j^m(x)\right) dx + E \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} v_j^{N_\nu}(x', 0, t) w_j^m(x', 0)\, dx' + \\ + \beta \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{S_1(t)} v_j^{N_\nu}(x', 0, t) w_j^m(x', 0)\, dx' = \int\limits_{\mathbb{R}^3_+} (f, w^m(x))\, dx \quad (3.1.23)$$

п.в. на $(0, T)$ при $m = 1, \ldots, N_\nu$. Умножим равенство (3.1.23) на функцию $\varphi(t) \in C^\infty[0, T]$ и проинтегрируем по t на $(0, T)$. Интегрируя затем в первом слагаемом полученного равенства по частям и пользуясь при этом начальными условиями (3.1.15), получим

$$-\int\limits_{Q_T} \left(v^{N_\nu}, w^m(x)\right) \varphi'(t)\, dx\, dt + \int\limits_{Q_T} \left(\left(v^{N_\nu}, \nabla\right) v^{N_\nu}, w^m(x)\right) \varphi(t)\, dx\, dt + \\ + \mu \sum_{j=1}^{3} \int\limits_{Q_T} \left(\nabla v_j^{N_\nu}, \nabla w_j^m(x)\right) \varphi(t)\, dx\, dt + \\ + E \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\Pi_T} v_j^{N_\nu}(x', 0, t) w_j^m(x', 0) \varphi(t)\, dx'\, dt + \\ + \beta \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\omega_1^T} v_j^{N_\nu}(x', 0, t) w_j^m(x', 0) \varphi(t)\, dx'\, dt = \int\limits_{Q_T} (f, w^m(x))\, \varphi(t)\, dx\, dt + \\ + \varphi(0) \int\limits_{\mathbb{R}^3_+} \left(v^0(x), w^m(x)\right) dx \quad \forall\, \varphi \in C^\infty[0, T]\colon \varphi(T) = 0 \quad (3.1.24)$$

для каждого $m = 1, \ldots, N_\nu$.

Чтобы обосновать предельный переход в (3.1.24) при $N_\nu \to \infty$ для линейных относительно v^{N_ν} членов, достаточно сослаться на непрерывность соответствующих линейных функционалов. С нелинейным членом несколько сложнее, и оставшаяся часть доказательства теоремы посвящена обоснованию предельного перехода при $N_\nu \to \infty$ для нелинейного члена.

Для этого достаточно будет установить относительную компактность множества $\{v^N\}$ в пространстве $L_q(Q_T^R;\mathbb{R}^3)$ с некоторым показателем $q \geqslant 2$ для цилиндра $Q_T^R = \{(x,t) \in Q_T\colon |x| < R\}$ при любом заданном $R > 0$. С этой целью мы докажем ограниченность последовательности $\{v^N\}$ в норме $W_{2,x,t}^{1,\delta}(Q_T;\mathbb{R}^3)$ с некоторым $\delta > 0$, откуда и из компактности вложения $W_{2,x,t}^{1,\delta}(Q_T;\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L_q(Q_T^R;\mathbb{R}^3)$ сразу же вытекает относительная компактность в $L_q(Q_T^R;\mathbb{R}^3)$ множества $\{v^N\}$.

Такой подход к доказательству относительной компактности галеркинских приближений был использован Ж.-Л. Лионсом [67, 68] в более простом случае не зависящих от времени обычных краевых условий прилипания на всей границе. Отметим, что при фиксированном β отличие краевых условий (3.1.9), (3.1.10) от обычных условий прилипания несущественно. Однако это отличие станет весьма существенным позднее, когда для предельного перехода при $\beta \to \infty$ нам понадобятся не зависящие от параметра β оценки дробной гладкости решения по t.

Через $\mathcal{B}_\alpha$ обозначим сглаживающее интегральное преобразование по переменной t, обычно называемое преобразованием Бесселя, которое определяется через обратное преобразование Фурье по формуле

$$\mathcal{B}_\alpha[u(t)] = \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to t}\Big[\hat{u}(\xi)\left(1+|\xi|^2\right)^{-\alpha/2}\Big],\ \alpha > 0.$$

Через $\mathcal{H}$ обозначим интегральное преобразование Гильберта

$$\mathcal{H}[u(t)] = \frac{1}{\pi}\, V.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(\tau)}{t-\tau}\,d\tau,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Напомним, что преобразование Гильберта является изометрией $L_2(\mathbb{R}^1)$ на себя, так как образ Фурье преобразования Гильберта имеет вид

$$\widehat{\mathcal{H}[u(t)]} = \mathcal{F}_{t\to\xi}\Big[\mathcal{H}[u(t)]\Big] = i\,\mathrm{sign}\,\xi\,\hat{u}(\xi),$$

откуда, в частности, следует равенство

$$\mathcal{F}_{t\to\xi}\Big[\mathcal{B}_\alpha\mathcal{H}\big[\eta(t)v^N(x,t)\big]\Big] = \frac{\widehat{\mathcal{H}\big[\eta v^N\big]}}{(1+\xi^2)^{\alpha/2}} = \frac{i\,\mathrm{sign}\,\xi(\widehat{\eta v^N})}{(1+\xi^2)^{\alpha/2}}\,. \tag{3.1.25}$$

Для доказательства ограниченности последовательности $\{v^N\}$ в норме неизотропного пространства Соболева–Слободецкого $W_{2,x,t}^{1,\delta}(Q_T;\mathbb{R}^3)$, доопределим вектор-функции $C^N(t) = (C_1^N, \dots, C_N^N)$ вне $[0,T]$, полагая

$$C^N(t) = \begin{cases} 0, & t > T, \\ C^N(t), & t \in [0,T], \\ C^N(-t), & t < 0, \end{cases}$$

а затем умножим (3.1.23) на $\mathcal{B}_\alpha\mathcal{H}\big[\eta(t)C_k^N(t)\big]$ и просуммируем по всем k, выбрав какую-нибудь четную срезающую функцию $\eta(t) \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\mathbb{R}^1)$ вида

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leqslant T/2, \\ 0, & |t| > 3T/4, \end{cases} \qquad 0 \leqslant \eta(t) \leqslant 1.$$

В левой части полученного таким образом равенства оставим только первое слагаемое, перенеся остальные в правую часть. Теперь п.в. на $[-T,T]$ при любых $N \geqslant 1$ будет выполняться равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3_+} \left(\frac{\partial v^N}{\partial t}, \mathcal{B}_\alpha\mathcal{H}\left[\eta v^N\right]\right) dx = h_N(t)\operatorname{sign} t, \tag{3.1.26}$$

где для краткости введено обозначение

$$\begin{gathered} h_N(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3_+} \Big(f, B_\alpha\mathcal{H}\left[\eta v^N\right]\Big)\, dx - \\ - \int\limits_{\mathbb{R}^3_+} \Big(\big(v^N, \nabla\big)\, v^N, \mathcal{B}_\alpha\mathcal{H}\left[\eta v^N\right]\Big)\, dx - \mu \sum_{j=1}^{3} \int\limits_{\mathbb{R}^3_+} \Big(\nabla v_j^N, \nabla\mathcal{B}_\alpha\mathcal{H}\left[\eta v_j^N\right]\Big)\, dx - \\ - E \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} v_j^N(x',0,t)\mathcal{B}_\alpha\mathcal{H}\left[\eta(t)v_j^N(x',0,t)\right]\, dx' - \\ - \beta \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{S_1(t)} v_j^N(x',0,t)\mathcal{B}_\alpha\mathcal{H}\left[\eta(t)v_j^N(x',0,t)\right]\, dx'. \end{gathered}$$

Умножая (3.1.26) на срезающую функцию $\eta(t)$ и интегрируя по t, находим

$$\begin{gathered} \int\limits_Q \left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\eta v^N\right), \mathcal{B}_\alpha\mathcal{H}\left[\eta v^N\right]\right) dx\,dt = \\ = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \eta(t)h_N(t)\operatorname{sign} t\, dt + \int\limits_Q \eta'(t)\Big(v^N, \mathcal{B}_\alpha\mathcal{H}\left[\eta v^N\right]\Big)\, dx\, dt, \end{gathered} \tag{3.1.27}$$

где используется обозначение $Q = \mathbb{R}^3_+ \times \mathbb{R}^1$.

В силу формулы Планшереля и (3.1.25) имеем

$$\int\limits_Q \Big(\frac{\partial}{\partial t}\left(\eta v^N\right), \mathcal{B}_\alpha \mathcal{H}\left[\eta v^N\right]\Big)\, dx\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_Q \left(i\xi\big(\widehat{\eta v^N}\big), \overline{\frac{i \operatorname{sign} \xi (\widehat{\eta v^N})}{(1+\xi^2)^{\alpha/2}}} \right) dx\, d\xi = \frac{1}{2\pi} \int\limits_Q \frac{|\xi| \cdot \big|\widehat{\eta v^N}\big|^2}{(1+\xi^2)^{\alpha/2}}\, dx\, d\xi,$$

откуда и из (3.1.27) ввиду четности и финитности по t следует, что

$$\frac{1}{4\pi} \int\limits_Q \frac{|\xi| \cdot \big|\widehat{\eta v^N}\big|^2}{(1+\xi^2)^{\alpha/2}}\, dx\, d\xi \leqslant \int\limits_0^T |h_N(t)|\, dt + C_1 \int\limits_{Q_T} \big|v^N\big| \cdot \big|\mathcal{B}_\alpha \mathcal{H}\left[\eta v^N\right]\big|\, dx\, dt$$

с постоянной $C_1 = \max |\eta'(t)|$. Можно взять $C_1 = 4$, считая $T > 1$, что ничуть не ограничит общности, так как обобщенная постановка задачи (3.1.1), (3.1.2), (3.1.9), (3.1.10) сохраняет ее эволюционный характер. А именно, для любого $T^* > T$ можно доопределить правую часть $f(x,t)$ нулем при $T < t \leqslant T^*$, решить задачу на $(0, T^*)$ и затем взять сужение обобщенного решения на $(0,T)$, ограничившись в интегральном тождестве пробными вектор-функциями, обращающимися в ноль при $t \geqslant T$.

В представлении для $h_N(t)$ проинтегрируем по частям во втором слагаемом. Оценивая затем $h_N(t)$ по модулю, получим

$$\frac{1}{4\pi} \int\limits_Q \frac{|\xi| \cdot \big|\widehat{\eta v^N}\big|^2}{(1+\xi^2)^{\alpha/2}}\, dx\, d\xi \leqslant \int\limits_{Q_T} |f| \cdot \big|\mathcal{B}_\alpha \mathcal{H}\left[\eta v^N\right]\big|\, dx\, dt +$$

$$+ \int\limits_{Q_T} |v^N|^2 \big|\mathcal{B}_\alpha \mathcal{H}\left[\eta \nabla v^N\right]\big|\, dx\, dt + \mu \sum_{j=1}^{3} \int\limits_{Q_T} \big|\big(\nabla v_j^N, \mathcal{B}_\alpha \mathcal{H}\left[\eta \nabla v_j^N\right]\big)\big|\, dx\, dt +$$

$$+ (E+\beta) \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\Pi_T} \big|v_j^N(x',0,t) \mathcal{B}_\alpha \mathcal{H}\left[\eta v_j^N(x',0,t)\right]\big|\, dx'\, dt +$$

$$+ C_1 \int\limits_{Q_T} |v^N| \cdot \big|\mathcal{B}_\alpha \mathcal{H}\left[\eta v^N\right]\big|\, dx\, dt. \quad (3.1.28)$$

Нетрудно убедиться, что при $\alpha > 0$ норма интегрального оператора $\mathcal{B}_\alpha \mathcal{H}\colon L_2(\mathbb{R}^1) \to L_2(\mathbb{R}^1)$ равна единице. Поэтому из (3.1.28) и неравенства

Коши–Буняковского следует, что

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{Q}\frac{|\xi|\cdot\left|\widehat{\eta v^N}\right|^2}{(1+\xi^2)^{\alpha/2}}\,dx\,d\xi \leqslant \int\limits_{Q_T}|v^N|^2\left|\mathcal{B}_\alpha\mathcal{H}\left[\eta(t)\nabla v^N\right]\right|\,dx\,dt+$$
$$+\sqrt{2}\mu\left\|\nabla v^N\right\|^2_{L_2(Q_T;\mathbb{R}^3)}+\sqrt{2}(E+\beta)\left\|v^N(x',0,t)\right\|^2_{L_2(\Pi_T;\mathbb{R}^3)}+$$
$$+\sqrt{2}C_1\left\|v^N\right\|^2_{L_2(Q_T;\mathbb{R}^3)}+\sqrt{2}\left\|f\right\|_{L_2(Q_T;\mathbb{R}^3)}\left\|v^N\right\|_{L_2(Q_T;\mathbb{R}^3)}\,,$$

где еще раз использована четность и финитность по t, и откуда с помощью оценки (3.1.12) получаем

$$\int\limits_{Q}\frac{|\xi|\cdot\left|\widehat{\eta v^N}\right|^2}{(1+\xi^2)^{\alpha/2}}\,dx\,d\xi \leqslant 4\pi\int\limits_{Q_T}\left|v^N\right|^2\left|\mathcal{B}_\alpha\mathcal{H}\left[\eta(t)\nabla v^N\right]\right|\,dx\,dt+$$
$$+C_2\left(\|f\|^2_{L_2(Q_T;\mathbb{R}^3)}+\left\|v^0\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)}\right) \quad (3.1.29)$$

с некоторой постоянной $C_2>0$, зависящей только от T, E, β. Точнее, постоянная C_2 зависит только от T и отношения β/E.

Для оценки первого слагаемого в правой части (3.1.29) удобнее представить интеграл по Q_T как повторный и начать с оценки интеграла только по одной переменной t. Применяя неравенство Гельдера с показателями $p=4/3$ и $p'=4$, получаем

$$\int\limits_0^T\left|v^N\right|^2\left|\mathcal{B}_\alpha\mathcal{H}\left[\eta\nabla v^N\right]\right|\,dt\leqslant$$
$$\leqslant\left\|v^N\right\|^2_{L_{8/3}((0,T);\mathbb{R}^3)}\left\|\mathcal{B}_\alpha\mathcal{H}\left[\eta\nabla v^N\right]\right\|_{L_4(\mathbb{R}^1;\mathbb{R}^3)}. \quad (3.1.30)$$

Из определения нормы в пространстве Соболева–Слободецкого в терминах преобразования Фурье и из определения преобразования Бесселя находим, пользуясь теоремой Планшереля,

$$\|\mathcal{B}_\alpha u\|_{W_2^\alpha(\mathbb{R}^1)}=\left\|\left(1+\xi^2\right)^{\alpha/2}\widehat{\mathcal{B}_\alpha u}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^1)}=$$
$$=\|\widehat{u}(\xi)\|_{L_2(\mathbb{R}^1)}=\sqrt{2\pi}\,\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^1)}\,.$$

А так как теорема вложения $W_2^\alpha(\mathbb{R}^1)\hookrightarrow L_4(\mathbb{R}^1)$ справедлива при любых $\alpha\geqslant 1/4$, то минимальное значение α, для которого справедлива оценка

$$\|\mathcal{B}_\alpha u\|_{L_4(\mathbb{R}^1)}\leqslant C_3\,\|\mathcal{B}_\alpha u\|_{W_2^{1/4}(\mathbb{R}^1)}=C_3\sqrt{2\pi}\,\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^1)}\,, \quad (3.1.31)$$

равно $1/4$. Оценка дробной гладкости решения по t будет тем лучше, чем меньше значение параметра α. По этой причине в оставшейся части доказательства теоремы будем считать, что $\alpha = 1/4$.

Ввиду того, что норма оператора $\mathcal{B}_\alpha\mathcal{H}\colon L_2(\mathbb{R}^1) \to L_2(\mathbb{R}^1)$ равна единице, из оценки (3.1.31) с параметром $\alpha = 1/4$ следует оценка

$$\left\|\mathcal{B}_\alpha\mathcal{H}\left[\eta\nabla v^N\right]\right\|_{L_4(\mathbb{R}^1;\mathbb{R}^3)} \leqslant C_3\sqrt{2\pi}\left\|\eta\nabla v^N\right\|_{L_2(\mathbb{R}^1;\mathbb{R}^3)} \leqslant C_4\left\|\nabla v^N\right\|_{L_2((0,T);\mathbb{R}^3)}.$$

А тогда из (3.1.30) получаем

$$\int\limits_0^T \left|v^N\right|^2\left|\mathcal{B}_\alpha\mathcal{H}\left[\eta\nabla v^N\right]\right|\,dt \leqslant C_4\left\|v^N\right\|^2_{L_{8/3}((0,T);\mathbb{R}^3)}\left\|\nabla v^N\right\|_{L_2((0,T);\mathbb{R}^3)},$$

откуда и из теоремы Фубини в силу неравенств Коши–Буняковского и Минковского следует, что

$$\int\limits_{Q_T}\left|v^N\right|^2\left|\mathcal{B}_\alpha\mathcal{H}\left[\eta\nabla v^N\right]\right|dx\,dt \leqslant C_4\left\|\int\limits_0^T\left|v^N\right|^{8/3}dt\right\|^{3/4}_{L_{3/2}(\mathbb{R}^3_+)}\left\|\nabla v^N\right\|_{L_2(Q_T;\mathbb{R}^3)} \leqslant$$
$$\leqslant C_4\left(\int\limits_0^T\left\|v^N\right\|^{8/3}_{L_4(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)}dt\right)^{3/4}\left\|\nabla v^N\right\|_{L_2(Q_T;\mathbb{R}^3)}. \quad (3.1.32)$$

Для полупространства $\mathbb{R}^3_+$ имеем мультипликативную оценку

$$\left\|v^N\right\|_{L_4(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)} \leqslant C_5\left\|v^N\right\|^{1/4}_{L_2(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)}\left\|\nabla v^N\right\|^{3/4}_{L_2(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)},$$

которая не отличается от оценки [4] для всего пространства $\mathbb{R}^3$ ввиду очевидной возможности продолжить v^N четным образом по x_3 с полупространства $\mathbb{R}^3_+$ на все $\mathbb{R}^3$ с сохранением класса. В силу этой мультипликативной оценки из (3.1.32) следует оценка

$$\int\limits_{Q_T}\left|v^N\right|^2\left|\mathcal{B}_\alpha\mathcal{H}\left[\eta\nabla v^N\right]\right|\,dx\,dt \leqslant C_4C_5^2\max_{t\in[0,T]}\left\|v^N\right\|^{1/2}_{L_2(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)}\left\|\nabla v^N\right\|^{5/2}_{L_2(Q_T;\mathbb{R}^3)}$$

с теми же постоянными C_4 и C_5, откуда и из (3.1.12) находим

$$\int\limits_{Q_T}\left|v^N\right|^2\left|\mathcal{B}_\alpha\mathcal{H}\left[\eta\nabla v^N\right]\right|\,dx\,dt \leqslant C_6\left(\|f\|_{L_2(Q_T;\mathbb{R}^3)} + \left\|v^0\right\|_{L_2(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)}\right)^3 \quad (3.1.33)$$

с некоторой постоянной $C_6 > 0$, зависящей только от μ и T. Отметим, что оценка (3.1.33) справедлива не только при $\alpha = 1/4$, но и при любом $\alpha \geqslant 1/4$, чем мы и воспользуемся в следующем разделе. А в этом разделе оценка (3.1.33) понадобится нам лишь при $\alpha = 1/4$.

С помощью (3.1.29) и (3.1.33) получаем оценку

$$\int\limits_Q \frac{|\xi|\cdot\left|\widehat{\eta v^N}\right|^2}{(1+\xi^2)^{\alpha/2}}\,dx\,d\xi \leqslant C_2\left(\|f\|_{L_2(Q_T;\mathbb{R}^3)} + \left\|v^0\right\|_{L_2(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)}\right)^2 + \\ + 4\pi C_6\left(\|f\|_{L_2(Q_T;\mathbb{R}^3)} + \left\|v^0\right\|_{L_2(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)}\right)^3, \quad (3.1.34)$$

которая фактически является оценкой дробной производной по t от вектор-функции ηv^N. Действительно, в силу очевидного неравенства $(1+\xi^2)^{1/2} \leqslant 1 + |\xi|$ имеем

$$\int\limits_Q \left(1+\xi^2\right)^{1/2-\alpha/2}\left|\widehat{\eta v^N}\right|^2 d\xi\,dx \leqslant \\ \leqslant \int\limits_Q \frac{|\xi|\left|\widehat{\eta v^N}\right|^2}{(1+\xi^2)^{\alpha/2}}\,d\xi\,dx + \int\limits_Q \frac{\left|\widehat{\eta v^N}\right|^2}{(1+\xi^2)^{\alpha/2}}\,d\xi\,dx, \quad (3.1.35)$$

поэтому при $\alpha = 1/4$ из неравенств (3.1.34) и (3.1.35) с помощью теоремы Планшереля получаем

$$\int\limits_Q \left(1+\xi^2\right)^{3/8}\left|\widehat{\eta v^N}\right|^2 d\xi\,dx \leqslant C_2\left(\|f\|_{L_2(Q_T;\mathbb{R}^3)} + \left\|v^0\right\|_{L_2(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)}\right)^2 + \\ + 4\pi C_6\left(\|f\|_{L_2(Q_T;\mathbb{R}^3)} + \left\|v^0\right\|_{L_2(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)}\right)^3 + 4\pi\left\|v^N\right\|^2_{L_2(Q_T;\mathbb{R}^3)},$$

откуда и из (3.1.22) в силу определения нелокальной нормы в пространстве Соболева–Слободецкого $W_{2,x,t}^{1,3/8}(Q;\mathbb{R}^3)$ следует оценка

$$\left\|\eta v^N\right\|^2_{W_{2,x,t}^{1,3/8}(Q;\mathbb{R}^3)} \leqslant C_7\Phi_0\left(\|f\|_{L_2(Q_T;\mathbb{R}^3)} + \left\|v^0\right\|_{L_2(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)}\right) \quad (3.1.36)$$

с многочленом $\Phi_0(\rho) = \rho^3 + \rho^2$, где постоянная $C_7 > 0$ от N не зависит. А так как $\eta(t) = 1$ при $t \in [0, T/2]$, то для локальной нормы (3.1.7) в пространстве Соболева–Слободецкого $W_{2,x,t}^{1,3/8}(Q;\mathbb{R}^3)$ имеем

$$\left\|v^N\right\|^2_{W_{2,x,t}^{1,3/8}(Q_{T/2};\mathbb{R}^3)} = \left\|\eta v^N\right\|^2_{W_{2,x,t}^{1,3/8}(Q_{T/2};\mathbb{R}^3)} \leqslant \left\|\eta v^N\right\|^2_{W_{2,x,t}^{1,3/8}(Q;\mathbb{R}^3)}.$$

И наконец, переходя от локальной нормы пространства Соболева–Слободецкого $W_{2,x,t}^{1,3/8}(Q;\mathbb{R}^3)$ к эквивалентной нелокальной, в силу (3.1.36) приходим к оценке

$$\left\|v^N\right\|^2_{W_{2,x,t}^{1,3/8}(Q_{T/2};\mathbb{R}^3)} \leqslant C_8\Phi_0\left(\|f\|_{L_2(Q_T;\mathbb{R}^3)} + \left\|v^0\right\|_{L_2(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)}\right) \tag{3.1.37}$$

с многочленом $\Phi_0(\rho) = \rho^2 + \rho^3$, причем постоянная $C_8 > 0$ от N не зависит. И если в методе Галеркина с самого начала выбрать интервал $(0, 2T)$, а не $(0, T)$, доопределив $f(x, t)$ нулем при $t > T$, то получится оценка той же дробной производной по t, но уже в Q_T. Таким образом,

$$\sup_{N\geqslant 1}\left\|v^N\right\|_{W_{2,x,t}^{1,3/8}(Q_T;\mathbb{R}^3)} < \infty, \tag{3.1.38}$$

т.е. последовательность $\left\{v^N\right\}$ ограничена в пространстве Соболева–Слободецкого $W_{2,x,t}^{1,3/8}(Q_T;\mathbb{R}^3)$.

По теореме 9.6.2 из [33] при $2 \leqslant q \leqslant 34/11$ имеет место вложение $W_{2,x,t}^{1,3/8}(Q_T;\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L_q(Q_T;\mathbb{R}^3)$. При $q < 34/11$ это вложение характеризуется неравенством 26.3.1(15) из [4] с параметром $\varepsilon > 0$, поэтому в силу теоремы 26.3.5 из [4] ограниченность (3.1.38) при $2 \leqslant q < 34/11$ означает относительную компактность $\left\{v^N\right\}$ в $L_q(Q_T^R;\mathbb{R}^3)$ с любым заданным $R > 0$ для цилиндра $Q_T^R = \{(x,t) \in Q_T\colon |x| < R\}$. А тогда ввиду слабой сходимости $\left\{v^{N_\nu}\right\}$ имеем

$$\lim_{N_\nu\to\infty}\left\|v - v^{N_\nu}\right\|_{L_q(Q_T^R;\mathbb{R}^3)} = 0 \quad \forall\, R > 0 \tag{3.1.39}$$

при $2 \leqslant q < 34/11$, где элемент $v \in \dot{V}(Q_T)$ является уже известным слабым пределом подпоследовательности $\{v^{N_\nu}\}$.

Из (3.1.24) в силу (3.1.39) и слабой сходимости подпоследовательности

$\{v^{N_\nu}\}$ в пространстве Соболева $W_{2,x,t}^{1,0}(Q_T;\mathbb{R}^3)$ следует, что

$$-\int\limits_{Q_T} (v, w^m(x))\,\varphi'(t)\,dx\,dt + \int\limits_{Q_T} ((v,\nabla)\,v, w^m(x))\,\varphi(t)\,dx\,dt+$$
$$+\mu\sum_{j=1}^{3}\int\limits_{Q_T}\big(\nabla v_j, \nabla w_j^m(x)\big)\,\varphi(t)\,dx\,dt+$$
$$+E\sum_{j=1}^{2}\int\limits_{\Pi_T} v_j(x',0,t)w_j^m(x',0)\varphi(t)\,dx'\,dt+$$
$$+\beta\sum_{j=1}^{2}\int\limits_{\omega_1^T} v_j(x',0,t)w_j^m(x',0)\varphi(t)\,dx'\,dt = \int\limits_{Q_T}(f, w^m(x))\,\varphi(t)\,dx\,dt+$$
$$+\varphi(0)\int\limits_{\mathbb{R}^3_+}\big(v^0(x), w^m(x)\big)\,dx \quad \forall\,\varphi\in C^\infty[0,T]\colon \varphi(T)=0 \quad (3.1.40)$$

для каждого $m \geqslant 1$. Но система базисных вектор-функций $\{w^k(x)\}_{k=1}^\infty$ полна в подпространстве $\dot{J}_2^1(\mathbb{R}^3_+) \subset W_2^1(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)$, поэтому любую вектор-функцию $u(x,t) \in \dot{V}^\infty(Q_T)$ такую, что $u(x,T)=0$, можно аппроксимировать в $W_2^1(Q_T;\mathbb{R}^3)$ линейными комбинациями

$$u^k(x,t) = \sum_{m=1}^{k}\varphi_m^k(t)w^m(x), \quad k\geqslant 1$$

базисных вектор-функций с коэффициентами $\varphi_1^k(t),\dots,\varphi_k^k(t) \in C^\infty[0,T]$ такими, что $\varphi_1^k(T)=\dots=\varphi_k^k(T)=0$. Ввиду (3.1.40) это означает, что слабый предел $v \in \dot{V}(Q_T)$ удовлетворяет интегральному тождеству (3.1.11) для всех пробных вектор-функций $u(x,t)\in\dot{V}^\infty(Q_T)$ таких, что $u(x,T)=0$. Тем самым установлено, что слабый предел $v\in\dot{V}(Q_T)$ является обобщенным решением задачи (3.1.1), (3.1.2), (3.1.9), (3.1.10) в смысле определения 3.1.3 и удовлетворяет при этом неравенству (3.1.12), что и завершает доказательство теоремы 3.1.2.

Не зависящие от β оценки дробной гладкости обобщенного решения регуляризованной задачи

В оценке (3.1.37) дробной производной обобщенного решения по t постоянная C_8 не является наилучшей и даже неограниченно возрастает при $\beta\to\infty$. Такая оценка вполне пригодна для доказательства сходимости галеркинских приближений к обобщенному решению задачи (3.1.1), (3.1.2), (3.1.9), (3.1.10) с фиксированным параметром регуляризации β, но совершенно бесполезна для предельного перехода при $\beta \to \infty$. Чтобы получить не зависящие от β оценки дробной гладкости по t для обобщенного решения задачи (3.1.1), (3.1.2), (3.1.9), (3.1.10), доопределим это обобщенное решение при $t < 0$ не зависящим от β образом. В качестве такого продолжения удобно взять обобщенное решение $v(x,t)$ следующей линейной задачи

$$\begin{aligned}
&-\frac{\partial v}{\partial t} - \mu\Delta v + \nabla q = 0,\\
&\operatorname{div} v = 0,\ (x,t) \in Q_{-T} = \mathbb{R}^3_+ \times (-T,0),\\
&v\big|_{t=0} = v^0(x),\ \operatorname{div} v^0 = 0,\ x \in \mathbb{R}^3_+,\\
&v_3\big|_{x_3=0} = 0,\ (x',t) \in \Pi_{-T} = \mathbb{R}^2 \times (-T,0),\\
&\left(\mu\frac{\partial v_k}{\partial x_3} - Ev_k\right)\bigg|_{x_3=0} = 0,\quad (x',t) \in \Pi_{-T},\ k = 1,2.
\end{aligned} \tag{3.1.41}$$

Линейная начально-краевая задача (3.1.41) имеет единственное обобщенное решение $v \in \dot{V}(Q_{-T})$ в смысле интегрального тождества

$$\int\limits_{Q_{-T}} \left\{\left(v, \frac{\partial u}{\partial t}\right) + \mu\sum_{j=1}^{3}(\nabla v_j, \nabla u_j)\right\} dx\,dt + \\
+ E\sum_{j=1}^{2}\int\limits_{\Pi_{-T}} v_j(x',0,t)u_j(x',0,t)\,dx'\,dt = \int\limits_{\mathbb{R}^3_+}\big(v^0(x), u(x,0)\big)\,dx$$

$$\forall\, u \in \dot{V}^{\infty}(Q_{-T}):\ u|_{t=-T} = 0. \tag{3.1.42}$$

Ввиду линейности задачи (3.1.41) единственность очевидна и на ней мы останавливаться не будем, поскольку в ней нет необходимости. Существование устанавливается, как и в разделе 2, методом Галеркина. При этом по аналогии с (3.1.12), обобщенное решение задачи (3.1.41) удовлетворяет неравенству

$$\frac{1}{4}\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[-T,0]}\|v(x,t)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)} + \mu\,\|\nabla v\|^2_{L_2(Q_{-T};\mathbb{R}^3)} + \\
+ E\sum_{j=1}^{2}\int\limits_{\Pi_{-T}} |v_j(x',0,t)|^2\,dx'\,dt \leqslant \left\|v^0\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)} \tag{3.1.43}$$

и имеет гладкость $v \in W_{2,x,t}^{1,3/8}(Q_{-T};\mathbb{R}^3)$. Можно было бы показать, что $v \in W_{2,x,t}^{1,1/2}(Q_{-T};\mathbb{R}^3)$, если бы в этом была необходимость.

Не зависящая от β оценка обобщенного решения регуляризованной задачи в $W_{2,x,t}^{1,2/5}(Q_T;\mathbb{R}^3)$ устанавливается в два этапа. На первом этапе получим оценку решения в $W_{2,x,t}^{1,1/3}(Q_{2T};\mathbb{R}^3)$. С этой целью доопределим правую часть $f(x,t)$ нулем при $t < 0$ и $t > T$, и будем считать, что обобщенное решение задачи (3.1.1), (3.1.2), (3.1.9), (3.1.10) из класса Хопфа построено в разделе 2 для Q_{3T}. Особое внимание следует обратить на процедуру получения не зависящей от β оценки нормы обобщенного решения в $W_{2,x,t}^{1,1/3}(Q_{2T};\mathbb{R}^3)$. Эта процедура является новым эффективным средством вывода оценок гладкости обобщенных решений. На втором этапе, исходя из не зависящей от β оценки решения в $W_{2,x,t}^{1,1/3}(Q_{2T};\mathbb{R}^3)$ и повторяя уже использованную на первом этапе процедуру, получим не зависящую от β оценку в $W_{2,x,t}^{1,2/5}(Q_T;\mathbb{R}^3)$ для обобщенного решения регуляризованной задачи в смысле определения 3.

Выберем какую-нибудь срезающую функцию $\eta(t) \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\mathbb{R}^1)$ вида

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-T/2, 2T], \\ 0, & t \in (-\infty, -T] \cup [3T, \infty), \end{cases} \qquad 0 \leqslant \eta(t) \leqslant 1,$$

считая, что построенное в разделе 2 обобщенное решение регуляризованной задачи $v \in \dot{V}(Q_{3T})$ удовлетворяет условию (3.1.6) и тождеству (3.1.11), если T заменить на $3T$.

Заменив T на $3T$ в (3.1.11), подставим произведение ηu вместо $u(x,t)$ в (3.1.11) и (3.1.42). Тогда, доопределяя $v(x,t)$ нулем вне $[-T, 3T]$ и вычитая одно тождество из другого, получим новое интегральное тождество

$$\begin{gathered} -\int\limits_Q (\eta v, u_t)\,dx\,dt = \int\limits_{Q_T} (f, \eta u)\,dx\,dt + \int\limits_Q (v,u)\eta'(t)\,dx\,dt - \\ -\mu \sum_{j=1}^3 \int\limits_{-T}^{3T}\int\limits_{\mathbb{R}^3_+} (\nabla v_j, \nabla u_j)\,\eta(t)\operatorname{sign} t\,dx\,dt - \int\limits_{Q_{3T}} \Big((v,\nabla)v, u\Big)\eta(t)\,dx\,dt - \\ -E\sum_{j=1}^2 \int\limits_{-T}^{3T}\int\limits_{\mathbb{R}^2} v_j(x',0,t)u_j(x',0,t)\operatorname{sign} t\,\eta(t)\,dx'\,dt - \\ -\beta\sum_{j=1}^2 \int\limits_{\omega_1^{3T}} v_j(x',0,t)u_j(x',0,t)\eta(t)\,dx'\,dt \qquad \forall\, u \in \dot{V}^\infty(Q), \quad (3.1.44) \end{gathered}$$

где используется обозначение $Q = \mathbb{R}^3_+ \times \mathbb{R}^1$.

На вектор-функциях $U(x', t)\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ из изотропного пространства Соболева $W_2^{1/2}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^2)$ определим линейный функционал

$$\Lambda(U) = \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} V_j(x', t) U_j(x', t)\, dx'\, dt \qquad \forall\, U = (U_1, U_2) \in W_2^{1/2}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^2),$$

где для краткости введено обозначение

$$V_j(x', t) = \begin{cases} \eta(t) v_j(x', 0, t), & (x', t) \in \omega_1^{3T}, \\ 0, & (x', t) \in \mathbb{R}^3 \backslash \omega_1^{3T}. \end{cases}$$

Любую вектор-функцию $U(x', t) \in W_2^{1/2}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^2)$ можно продолжить с гиперплоскости $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1$ на полупространство $Q = \mathbb{R}^3_+ \times \mathbb{R}^1$ таким образом, что продолжение $u(x, t) \in W_2^1(Q; \mathbb{R}^3) \cap \dot{V}(Q)$ имеет след $u\big|_{x_3=0} = (U_1, U_2, 0)$ и выполняется неравенство

$$\|u\|_{W_2^1(Q;\mathbb{R}^3)} \leqslant C_1 \|U\|_{W_2^{1/2}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^2)}\,, \tag{3.1.45}$$

в котором постоянная $C_1 > 0$ не зависит от U. Такое продолжение легко построить в виде ротора с помощью известной теоремы продолжения $W_2^{1/2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow W_2^1(\mathbb{R}^4)$ с гиперплоскости $\mathbb{R}^3$ на все $\mathbb{R}^4$.

Тождество (3.1.44) теперь можно переписать в виде

$$\beta\Lambda(U) = \int\limits_{Q} (\eta v, u_t)\, dx\, dt + \Lambda_v(u) - \int\limits_{Q_{3T}} \Big((v, \nabla)v, u\Big)\eta\, dx\, dt, \tag{3.1.46}$$

где функционал $\Lambda_v(u)$ состоит из всех линейных относительно v членов из (3.1.44), не содержащих частной производной u_t, причем коэффициент β в функционал $\Lambda_v(u)$ явно не входит. Оценим линейные по v слагаемые в правой части тождества (3.1.46), используя неравенство Коши–Буняковского, оценку (3.1.12) с $3T$ вместо T и оценку (3.1.43) для задачи (3.1.41). При этом в силу неравенства (3.1.45) будем иметь

$$\Big|\int\limits_Q (\eta v, u_t)\,dx\,dt + \Lambda_v(u)\Big| \leqslant \int\limits_Q |(\eta v, u_t)|\;dx\,dt + \int\limits_{Q_T} |(f,u)|\;dx\,dt +$$

$$+ \int\limits_Q |(v,u)\eta'(t)|\;dx\,dt + \mu\sum_{j=1}^{3}\int\limits_{-T}^{3T}\int\limits_{\mathbb{R}^3_+} |(\nabla v_j, \nabla u_j)|\;dx\,dt +$$

$$+ E\sum_{j=1}^{2}\int\limits_{-T}^{3T}\int\limits_{\mathbb{R}^2} |v_j(x',0,t)u_j(x',0,t)|\;dx'\,dt \leqslant$$

$$\leqslant C_2\Big(\|v\|_{W^{\,1,0}_{2,x,t}(Q_{3T};\mathbb{R}^3)} + \|v\|_{W^{\,1,0}_{2,x,t}(Q_{-T};\mathbb{R}^3)}\Big)\,\|u\|_{W^1_2(Q_{3T};\mathbb{R}^3)} +$$

$$+ \|f\|_{L_2(Q_T;\mathbb{R}^3)}\,\|u\|_{L_2(Q_T;\mathbb{R}^3)} \leqslant$$

$$\leqslant C_3\Big(\|f\|_{L_2(Q_T;\mathbb{R}^3)} + \big\|v^0\big\|_{L_2(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)}\Big)\,\|U\|_{W_2^{1/2}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^2)} \qquad (3.1.47)$$

с некоторой постоянной $C_3 > 0$, зависящей только от μ, E, T. Последнее слагаемое в (3.1.46), соответствующее нелинейному члену, оценим сначала с помощью неравенства Гельдера

$$\int\limits_{Q_{3T}} |v||\nabla v||u|\,dx\,dt \leqslant \int\limits_0^{3T} \|v\|_{L_6(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)}\,\|\nabla v\|_{L_2(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)}\,\|u\|_{L_3(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)}\;dt \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,3T]} \|u(x,t)\|_{L_3(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)} \int\limits_0^{3T} \|v\|_{L_6(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)}\,\|\nabla v\|_{L_2(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)}\,dt, \quad (3.1.48)$$

а затем воспользуемся теоремой вложения $W_2^1(\mathbb{R}^3_+) \hookrightarrow L_6(\mathbb{R}^3_+)$, теоремой о следах $W_2^1(Q_{3T}) \hookrightarrow L_3(\mathbb{R}^3_+)$ и оценками (3.1.12), (3.1.45). Тогда

$$\int\limits_{Q_{3T}} |v||\nabla v||u|\,dx\,dt \leqslant C_4\,\|v\|^2_{W^{\,1,0}_{2,x,t}(Q_{3T};\mathbb{R}^3)}\,\|u\|_{W^1_2(Q_{3T};\mathbb{R}^3)} \leqslant$$

$$\leqslant C_5\Big(\|f\|_{L_2(Q_T;\mathbb{R}^3)} + \big\|v^0\big\|_{L_2(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)}\Big)^2\,\|U\|_{W_2^{1/2}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^2)}\,. \quad (3.1.49)$$

Для краткости обозначим через M функционал

$$M = M(f, v^0) = \|f\|_{L_2(Q_T;\mathbb{R}^3)} + \big\|v^0\big\|_{L_2(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)} \qquad (3.1.50)$$

от заданных f и v^0. Из (3.1.46), (3.1.47) и (3.1.49) при любых $\beta > 0$ получаем

$$\beta\,|\Lambda(U)| \leqslant C_6 M(M+1)\,\|U\|_{W_2^{1/2}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^2)} \quad \forall\, U \in W_2^{1/2}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^2) \tag{3.1.51}$$

с постоянной $C_6 = \max\{C_3\,, C_5\}$, зависящей только от μ, E, T.

При выводе оценки нормы обобщенного решения в $W_{2,x,t}^{\,1,1/3}(Q_{2T};\mathbb{R}^3)$ нам понадобится теорема о следах, доказанная в [38]. А именно, справедлива следующая теорема, в которой $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ и $n \geqslant 2$.

Теорема 3.1.3. *Пусть $\rho' = r'\big(1 - 1/(2r_n)\big)$ и $\sigma = s\big(1 - 1/(2r_n)\big)$, где числа $r', s > 0$ и $r_n > 1/2$. Тогда любая функция $u(x,t) \in W_{2,x',x_n,t}^{\,r',r_n,s}(\mathbb{R}^{n+1})$ имеет след $u(x',0,t) \in W_{2,x',t}^{\,\rho',\sigma}(\mathbb{R}^n)$ с оценкой*

$$\|u(x',0,t)\|_{W_{2,x',t}^{\,\rho',\sigma}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\,\|u(x',x_n,t)\|_{W_{2,x',x_n,t}^{\,r',r_n,s}(\mathbb{R}^{n+1})}\,,$$

в которой постоянная $C > 0$ не зависит от функции u.

Теперь все готово для вывода не зависящей от β оценки нормы обобщенного решения регуляризованной задачи в $W_{2,x,t}^{\,1,1/3}(Q_{2T};\mathbb{R}^3)$. Без ограничения общности можно считать, что уже построено обобщенное решение $v \in W_{2,x,t}^{\,1,3/8}(Q_{3T};\mathbb{R}^3)$, хотя и с нормой, о поведении которой при $\beta \to +\infty$ пока еще ничего не известно. А так как для линейной задачи (3.1.41) обобщенное решение $v \in W_{2,x,t}^{\,1,3/8}(Q_{-T};\mathbb{R}^3)$, то произведение $\eta v \in W_{2,x,t}^{\,1,3/8}(Q;\mathbb{R}^3)$ при любом заданном значении параметра $\beta > 0$, откуда и из формулы順 Планшереля находим

$$\Big|\int\limits_Q (\eta v, u_t)\,dx\,dt\Big| \leqslant \frac{1}{2\pi}\,\|\eta v\|_{W_{2,x,t}^{\,1,3/8}(Q;\mathbb{R}^3)}\,\|u\|_{W_{2,x,t}^{\,0,5/8}(Q;\mathbb{R}^3)}\,. \tag{3.1.52}$$

В силу оценки (3.1.52) тождество (3.1.44) будет выполняться и для вектор-функции $u(x,t) = \mathcal{B}_{1/3}\mathcal{H}\big[\eta v\big]$, поскольку $1/3 + 3/8 > 5/8$. Из (3.1.44) и формулы Планшереля в таком случае следует равенство

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{Q}\frac{|\xi||\widehat{\eta v}|^2}{(1+\xi^2)^{1/6}}\,d\xi\,dx=\int\limits_{Q_T}\Big(\eta f,\mathcal{B}_{1/3}\mathcal{H}\big[\eta v\big]\Big)\,dx\,dt+$$
$$+\int\limits_{Q}\Big(v,\mathcal{B}_{1/3}\mathcal{H}\big[\eta v\big]\Big)\eta'(t)\,dx\,dt-\int\limits_{Q_{3T}}\Big((v,\nabla)v,\mathcal{B}_{1/3}\mathcal{H}\big[\eta v\big]\Big)\eta(t)\,dx\,dt-$$
$$-\mu\sum_{j=1}^{3}\int\limits_{-T}^{3T}\int\limits_{\mathbb{R}^3_+}\Big(\nabla v_j,\nabla\mathcal{B}_{1/3}\mathcal{H}\big[\eta v_j\big]\Big)\eta(t)\operatorname{sign}t\,dx\,dt-$$
$$-E\sum_{j=1}^{2}\int\limits_{-T}^{3T}\int\limits_{\mathbb{R}^2}v_j(x',0,t)\mathcal{B}_{1/3}\mathcal{H}\big[\eta(t)v_j(x',0,t)\big]\eta(t)\operatorname{sign}t\,dx'\,dt-$$
$$-\beta\sum_{j=1}^{2}\int\limits_{\omega_1^{3T}}v_j(x',0,t)\mathcal{B}_{1/3}\mathcal{H}\big[\eta(t)v_j(x',0,t)\big]\eta(t)\,dx'\,dt.\quad(3.1.53)$$

Необходимо подчеркнуть, что оценка (3.1.52) используется только при выводе равенства (3.1.53) для обоснования законности подстановки пробной вектор-функции $u(x,t)=\mathcal{B}_{1/3}\mathcal{H}\big[\eta v\big]$ в тождество (3.1.44). Нигде в дальнейшем оценка (3.1.52) не используется.

Поскольку произведение $\eta v\in W_{2,x,t}^{1,3/8}(Q;\mathbb{R}^3)$ при любом значении $\beta>0$, то след $\eta(t)v(x',0,t)\in W_{2,\,x',\,t}^{1/2,3/16}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ в силу теоремы 3.1.3. А так как $1/3+3/16>1/2$, то $\mathcal{B}_{1/3}\mathcal{H}\big[\eta(t)v(x',0,t)\big]\in W_2^{1/2}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$, и оценка (3.1.51) будет выполняться для вектор-функции $U(x',t)$ с компонентами

$$U_j(x',t)=\mathcal{B}_{1/3}\mathcal{H}\big[\eta(t)v_j(x',0,t)\big]\in W_2^{1/2}(\mathbb{R}^3),\quad j=1,2,$$

т.е. согласно (3.1.51) имеем

$$\beta\Big|\sum_{j=1}^{2}\int\limits_{\omega_1^{3T}}v_j(x',0,t)\mathcal{B}_{1/3}\mathcal{H}\big[\eta(t)v_j(x',0,t)\big]\eta(t)\,dx'\,dt\Big|\leqslant$$
$$\leqslant C_6M(M+1)\,\big\|\mathcal{B}_{1/3}\mathcal{H}\big[\eta(t)v(x',0,t)\big]\big\|_{W_2^{1/2}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)}\quad\forall\,\beta>0\quad(3.1.54)$$

с постоянной C_6 из (3.1.51) и с функционалом $M=M(f,v^0)$ вида (3.1.50).

Чтобы оценить правую часть (3.1.53), используем ограниченность оператора $\mathcal{B}_\alpha\mathcal{H}\colon L_2(\mathbb{R}^1)\to L_2(\mathbb{R}^1)$, оценку (3.1.33) с параметром $\alpha=1/3$ и оценку (3.1.54). Используя затем оценку (3.1.12) с $3T$ вместо T, а также оценку (3.1.43) для задачи (3.1.41), получим

$$\|\eta v\|^2_{W^{1,0}_{2,x,t}(Q;\mathbb{R}^3)} + \int\limits_Q \frac{(1+\xi^2)^{1/2}\,|\widehat{\eta v}|^2}{(1+\xi^2)^{1/6}}\,d\xi\,dx \leqslant C_7M^2 + C_8M^3 + \\ + 2\pi C_6 M(M+1)\left\|\mathcal{B}_{1/3}\mathcal{H}\big[\eta(t)v(x',0,t)\big]\right\|_{W_2^{1/2}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)} \quad \forall\,\beta>0 \quad (3.1.55)$$

с положительными постоянными C_6, C_7 и C_8, зависящими только от μ, E и T. Хорошо известно, что норма в анизотропном пространстве Соболева–Слободецкого $W^{\rho',\sigma}_{2,x',t}(\mathbb{R}^n)$ при $\rho',\sigma>0$ эквивалентна сумме норм анизотропных пространств $W^{0,\sigma}_{2,x',t}(\mathbb{R}^n)$ и $W^{\rho',0}_{2,x',t}(\mathbb{R}^n)$. Поэтому

$$C_9\left\|\mathcal{H}\mathcal{B}_{1/3}\big[\eta(t)v_j(x',0,t)\big]\right\|_{W_2^{1/2}(\mathbb{R}^3)} \leqslant \left\|\mathcal{H}\mathcal{B}_{1/3}\big[\eta(t)v_j(x',0,t)\big]\right\|_{W^{1/2,0}_{2,\,x',\,t}(\mathbb{R}^3)} + \\ + \left\|\mathcal{H}\mathcal{B}_{1/3}\big[\eta(t)v_j(x',0,t)\big]\right\|_{W^{0,1/2}_{2,x',\,t}(\mathbb{R}^3)} \leqslant \|\eta(t)v_j(x',0,t)\|_{W^{1/2,0}_{2,\,x',\,t}(\mathbb{R}^3)} + \\ + \|\eta(t)v_j(x',0,t)\|_{W^{0,1/6}_{2,x',\,t}(\mathbb{R}^3)} \leqslant C_{10}\,\|\eta(t)v_j(x',0,t)\|_{W^{1/2,1/6}_{2,\,x',\,t}(\mathbb{R}^3)}\,,$$

откуда и из (3.1.55) с помощью теоремы 3.1.3 получаем

$$\|\eta v\|^2_{W^{1,1/3}_{2,x,t}(Q;\mathbb{R}^3)} \leqslant 2\,\|\eta v\|^2_{W^{1,0}_{2,x,t}(Q;\mathbb{R}^3)} + 2\int\limits_Q (1+\xi^2)^{1/3}|\widehat{\eta v}|^2\,d\xi\,dx \leqslant \\ \leqslant C_0M(M+1)\Big(M + 2\,\|\eta v\|_{W^{1,1/3}_{2,x,t}(Q;\mathbb{R}^3)}\Big) \quad (3.1.56)$$

с постоянной $C_0>0$, зависящей только от μ, E, T, и где функционал $M = M(f, v^0)$ имеет вид (3.1.50).

Из квадратичного неравенства (3.1.56) сразу же следует оценка

$$\sup_{\beta>0}\|\eta v\|_{W^{1,1/3}_{2,x,t}(Q;\mathbb{R}^3)} \leqslant C_0'M(M+1) < \infty \qquad (3.1.57)$$

с постоянной $C_0' = 2C_0 + 1/2$. А тогда, переходя от нелокальной нормы в пространстве Соболева–Слободецкого к эквивалентной локальной и пользуясь тем, что $\eta(t) = 1$ при $t\in[0,2T]$, получаем

$$\sup_{\beta>0}\|v\|_{W^{1,1/3}_{2,x,t}(Q_{2T};\mathbb{R}^3)} \leqslant C_0'M(M+1). \qquad (3.1.58)$$

Таким образом, установлена не зависящая от β оценка нормы обобщенного решения регуляризованной задачи в $W^{1,1/3}_{2,x,t}(Q_{2T};\mathbb{R}^3)$.

Займемся теперь не зависящей от β оценкой нормы обобщенного решения регуляризованной задачи в $W^{1,2/5}_{2,x,t}(Q_T;\mathbb{R}^3)$. Для этого нам понадобится теорема продолжения с гиперплоскости $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^{n+1}$ для анизотропных пространств Соболева–Слободецкого, доказанная в [38]. А именно, при $n \geqslant 2$ справедлива следующая

Теорема 3.1.4. *Пусть $\rho' = r'\bigl(1 - 1/(2r_n)\bigr)$ и $\sigma = s\bigl(1 - 1/(2r_n)\bigr)$, где числа $r', s > 0$ и $r_n \geqslant 1/2$. Тогда для любой функции $\psi(x',t) \in W^{\rho',\sigma}_{2,x',t}(\mathbb{R}^n)$ существует продолжение $u(x,t) \in W^{r',r_n,s}_{2,x',x_n,t}(\mathbb{R}^{n+1})$ такое, что след $u(x',0,t) = \psi(x',t)$ и выполняется неравенство*

$$\|u(x',x_n,t)\|_{W^{r',r_n,s}_{2,x',x_n,t}(\mathbb{R}^{n+1})} \leqslant C\,\|\psi(x',t)\|_{W^{\rho',\sigma}_{2,x',t}(\mathbb{R}^n)}$$

с постоянной $C > 0$, не зависящей от ψ.

Любую вектор-функцию $U(x',t) \in W^{1,3/8}_{2,x',t}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^2)$ можно продолжить с гиперплоскости $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1$ на полупространство $Q = \mathbb{R}^3_+ \times \mathbb{R}^1$ таким образом, что продолжение $u(x,t) \in W^{2\,1,3/4}_{2,x',x_3,t}(Q;\mathbb{R}^3) \cap \overset{\cdot}{V}(Q)$ имеет след $u\big|_{x_3=0} = (U_1,U_2,0)$ и выполняется неравенство

$$\|u(x,t)\|_{W^{2,1,3/4}_{2,x',x_3,t}(Q;\mathbb{R}^3)} \leqslant C\,\|U(x',t)\|_{W^{1,3/8}_{2,x',t}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^2)}\,, \tag{3.1.59}$$

в котором постоянная $C > 0$ не зависит от U. Такое продолжение легко построить в виде ротора с помощью теоремы 4.

Выберем теперь срезающую функцию $\eta(t) \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\mathbb{R}^1)$ вида

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-T/2, T], \\ 0, & t \in (-\infty,-T] \cup [2T,\infty), \end{cases} \qquad 0 \leqslant \eta(t) \leqslant 1,$$

и будем считать, что теперь именно эта срезающая функция используется в тождестве (3.1.44). На вектор-функциях $U(x',t)\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ из анизотропного пространства Соболева $W^{1,3/8}_{2,x',t}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^2)$ рассмотрим тот же линейный функционал Λ, для которого сохраняется равенство (3.1.46).

Нам снова нужна оценка функционала $\beta\Lambda(U)$, но на этот раз для всех вектор-функций $U \in W^{1,3/8}_{2,x',t}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^2)$. С этой целью оценим все слагаемые, входящие в правую часть (3.1.46). Чтобы оценить слагаемое из (3.1.46) с производной u_t, воспользуемся формулой Планшереля

$$\int\limits_Q (\eta v, u_t)\,dx\,dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_Q \left(\widehat{\eta v}, \overline{i\xi\hat{u}}\right)\,dx\,d\xi$$

и определением нормы в пространстве Соболева–Слободецкого в терминах преобразования Фурье по t. При этом получим

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^4_+}(\eta v, u_t)\,dx\,dt\Big| \leqslant \frac{1}{2\pi}\,\|\eta v\|_{W_{2,x,t}^{0,1/3}(Q;\mathbb{R}^3)}\,\|u\|_{W_{2,x,t}^{0,2/3}(Q;\mathbb{R}^3)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\,\|\eta v\|_{W_{2,x,t}^{1,1/3}(Q;\mathbb{R}^3)}\,\|u\|_{W_{2,x',x_3,t}^{2,1,3/4}(Q;\mathbb{R}^3)}\,.$$

А тогда из (3.1.57) и теоремы 4 следует, что

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^4_+}(\eta v, u_t)\,dx\,dt\Big| \leqslant C_{11}M(M+1)\,\|U\|_{W_{2,x',t}^{1,3/8}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^2)} \tag{3.1.60}$$

с постоянной $C_{11} > 0$, зависящей только от μ, E, T, и с функционалом $M = M(f, v^0)$ вида (3.1.50).

Линейный функционал $\Lambda_v(u)$ из правой части (3.1.46) оценивается точно так же, как и раньше. Поэтому для всех линейных по v слагаемых из равенства (3.1.46) в силу (3.1.60) будем иметь

$$\Big|\int\limits_{Q}(\eta v, u_t)\,dx\,dt + \Lambda_v(u)\Big| \leqslant C_{12}M(M+1)\,\|U\|_{W_{2,x',t}^{1,3/8}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^2)}\,, \tag{3.1.61}$$

с некоторой постоянной $C_{12} > 0$, зависящей только от μ, E, T. Для оценки нелинейного члена используем неравенство (3.1.48), теорему вложения $W_2^1(\mathbb{R}^3_+) \hookrightarrow L_6(\mathbb{R}^3_+)$, теорему о следах $W_{2,x',x_3,t}^{2,1,3/4}(Q) \hookrightarrow L_3(\mathbb{R}^3_+)$ из [33] (см. теорему 9.6.2 на с. 361 в [33]) и оценки (3.1.12), (3.1.59). Тогда

$$\int\limits_{Q_{2T}} |v||\nabla v||u|\,dx\,dt \leqslant C_{13}M^2\,\|U\|_{W_{2,x',t}^{1,3/8}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^2)}\,,$$

откуда и из (3.1.46), (3.1.61) при любых $\beta > 0$ получаем оценку

$$\beta\,|\Lambda(U)| \leqslant C_{14}M(M+1)\,\|U\|_{W_{2,x',t}^{1,3/8}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^2)} \tag{3.1.62}$$

для всех $U \in W_{2,x',t}^{1,3/8}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^2)$ с постоянной $C_{14} > 0$, зависящей только от μ, E, T, и с функционалом $M = M(f, v^0)$ вида (3.1.50).

Через $\mathcal{B}^{x',t}_{\rho',\sigma}$ обозначим сглаживающее интегральное преобразование, которое определяется через обратное преобразование Фурье по переменным $x' = (x_1, x_2)$ и t с помощью равенства

$$\mathcal{B}^{x',t}_{\rho',\sigma}[u(x', x_3, t)] = \mathcal{F}^{-1}_{\substack{\xi'\to x'\\ \xi_0\to t}}\left[\frac{\hat u(\xi', x_3, \xi_0)}{1 + |\xi'|^{\rho'} + |\xi_0|^{\sigma}}\right], \quad \rho', \sigma > 0,$$

где крышечка теперь будет означать прямое преобразование Фурье по переменным x' и t. И пусть для любого $R > 0$ функция

$$\chi_R(\xi_0) = \begin{cases} 1, & \xi_0 \in [-R, R], \\ 0, & \xi_0 \notin [-R, R]. \end{cases}$$

Семейство вектор-функций $\{V^R(x,t)\}$, зависящих от параметра $R > 0$, определим через преобразование Фурье только по одной переменной t с помощью равенства

$$V^R(x,t) = \mathcal{F}^{-1}_{\xi_0 \to t}\big[\chi_R(\xi_0)\mathcal{F}_{t\to\xi_0}[\eta(t)v(x,t)]\big], \quad R > 0.$$

При этом $V^R(x,t) \in W^1_2(Q;\mathbb{R}^3)$ для любого $R > 0$. Нетрудно убедиться, что норма интегрального оператора $\mathcal{HB}^{x',t}_{\rho',\sigma}\colon L_2(\mathbb{R}^3) \to L_2(\mathbb{R}^3)$ равна единице для любых $\rho', \sigma > 0$. Поэтому $\mathcal{HB}^{x',t}_{\rho',\sigma}[V^R] \in W^1_2(Q;\mathbb{R}^3)$ для любых значений параметров $\rho', \sigma, R > 0$. Кроме того,

$$\mathcal{F}_{\substack{x'\to\xi' \\ t\to\xi_0}}\Big[\mathcal{HB}^{x',t}_{\frac{1}{2},\frac{7}{40}}[V^R(x,t)]\Big] = \frac{i\chi_R(\xi_0)\,\mathrm{sign}\,\xi_0\,\widehat{\eta v}}{1 + |\xi'|^{1/2} + |\xi_0|^{7/40}}\,. \tag{3.1.63}$$

Теперь все готово для вывода не зависящей от β оценки нормы обобщенного решения регуляризованной задачи в $W^{1,2/5}_{2,x,t}(Q_T;\mathbb{R}^3)$. Подставим вектор-функцию $u(x,t) = \mathcal{HB}^{x',t}_{\frac{1}{2},\frac{7}{40}}[V^R] \in W^1_2(Q;\mathbb{R}^3) \cap \dot{V}(Q)$ в интегральное тождество (3.1.44) и воспользуемся формулой Планшереля:

$$\begin{gathered}
\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_Q \frac{|\xi_0||\chi_R\widehat{\eta v}|^2\,d\xi_0\,d\xi'\,dx_3}{1 + |\xi'|^{1/2} + |\xi_0|^{7/40}} = \int\limits_{Q_T}\Big(\eta f, \mathcal{HB}^{x',t}_{\frac{1}{2},\frac{7}{40}}[V^R]\Big)\,dx\,dt + \\
+ \int\limits_Q \Big(v, \mathcal{HB}^{x',t}_{\frac{1}{2},\frac{7}{40}}[V^R]\Big)\eta'(t)\,dx\,dt - \int\limits_{Q_{2T}}\Big((v,\nabla)v, \mathcal{HB}^{x',t}_{\frac{1}{2},\frac{7}{40}}[V^R]\Big)\eta(t)\,dx\,dt - \\
- \mu\sum_{j=1}^3\int\limits_{-T}^{2T}\int\limits_Q\Big(\nabla v_j, \nabla\mathcal{HB}^{x',t}_{\frac{1}{2},\frac{7}{40}}[V^R_j]\Big)\,\mathrm{sign}\,t\,\eta(t)\,dx\,dt - \\
- E\sum_{j=1}^2\int\limits_{-T}^{2T}\int\limits_{\mathbb{R}^2} V^R_j(x',0,t)\mathcal{HB}^{x',t}_{\frac{1}{2},\frac{7}{40}}[V^R_j(x',0,t)]\,\mathrm{sign}\,t\,\eta(t)\,dx'\,dt - \\
- \beta\sum_{j=1}^2\int\limits_{\omega_1^{2T}} v_j(x',0,t)\mathcal{HB}^{x',t}_{\frac{1}{2},\frac{7}{40}}[V^R_j(x',0,t)]\eta(t)\,dx'\,dt.
\end{gathered} \tag{3.1.64}$$

Оценку правой части равенства (3.1.64) начнем с нелинейного по v слагаемого. Интегрируя по частям и оценивая по модулю, находим

$$\Big|\int\limits_{Q_{2T}} \Big((v,\nabla)v, \mathcal{H}\mathcal{B}^{x',t}_{\frac{1}{2},\frac{7}{40}}[V^R]\Big)\eta(t)\,dx\,dt\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{Q_{2T}} |v|^2 \Big|\mathcal{H}\mathcal{B}^{x',t}_{\frac{1}{2},\frac{7}{40}}[\nabla V^R]\Big|\,dx\,dt. \quad (3.1.65)$$

В правой части неравенства (3.1.65) к интегралу по Q_{2T} применим теорему Фубини, а затем к интегралу по $\mathbb{R}^2$ применим неравенство Гельдера с показателями $p = 4/3$ и $p' = 4$. Тогда из оценки теоремы вложения $W_2^{1/2}(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L_4(\mathbb{R}^2)$ и из неравенства Коши–Буняковского получаем

$$\int\limits_{Q_{2T}} |v|^2 \Big|\mathcal{H}\mathcal{B}^{x',t}_{\frac{1}{2},\frac{7}{40}}[\nabla V^R]\Big|\,dx\,dt = \int\limits_0^{2T} dt \int\limits_0^{\infty} dx_3 \int\limits_{\mathbb{R}^2} |v|^2 \,\Big|\mathcal{H}\mathcal{B}^{x',t}_{\frac{1}{2},\frac{7}{40}}[\nabla V^R]\Big|\,dx' \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^{2T}\int\limits_0^{\infty} \|v\|^2_{L_{8/3}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^3)} \,\Big\|\mathcal{H}\mathcal{B}^{x',t}_{\frac{1}{2},\frac{7}{40}}[\nabla V^R]\Big\|_{L_4(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^3)} dx_3\,dt \leqslant$$

$$\leqslant C_{15} \int\limits_0^{2T} \|v\|^2_{L^{x',x_3}_{\frac{8}{3},4}(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)} \,\Big\|\mathcal{H}\mathcal{B}^{x',t}_{\frac{1}{2},\frac{7}{40}}[\nabla V^R]\Big\|_{W^{\,1/2,0}_{2,\,x',\,x_3}(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)} dt. \quad (3.1.66)$$

Анизотропную норму в $L^{x',x_3}_{\frac{8}{3},4}(\mathbb{R}^3_+)$ оценим с помощью мультипликативного неравенства из [4], согласно которому

$$\|v\|^2_{L^{x',x_3}_{\frac{8}{3},4}(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)} \leqslant C_{16}\,\|v\|_{L_2(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)}\,\|\nabla v\|_{L_2(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)} \quad (3.1.67)$$

(см. теорему 15.8 на с. 226 в [4]). Из (3.1.65)–(3.1.67) с помощью неравенства Коши–Буняковского находим

$$\Big|\int\limits_{Q_{2T}} \Big((v,\nabla)v, \mathcal{H}\mathcal{B}^{x',t}_{\frac{1}{2},\frac{7}{40}}[V^R]\Big)\eta(t)\,dx\,dt\Big| \leqslant$$

$$\leqslant C_{17} \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,2T]} \|v\|_{L_2(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)} \int\limits_0^{2T} \|\nabla v\|_{L_2(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)} \,\Big\|\mathcal{H}\mathcal{B}^{x',t}_{\frac{1}{2},\frac{7}{40}}[\nabla V^R]\Big\|_{W^{\,1/2,0}_{2,\,x',\,x_3}(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)} dt \leqslant$$

$$\leqslant C_{17} \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,2T]} \|v\|_{L_2(\mathbb{R}^3_+;\mathbb{R}^3)}\,\|\nabla v\|_{L_2(Q_{2T};\mathbb{R}^3)}\,\Big\|\mathcal{H}\mathcal{B}^{x',t}_{\frac{1}{2},\frac{7}{40}}[\nabla V^R]\Big\|_{W^{\,1/2,0,0}_{2,\,x',\,x_3,t}(Q;\mathbb{R}^3)}.$$

Напомним, что преобразование Гильберта является изометрией $L_2(\mathbb{R}^1)$ на себя. Поэтому в силу (3.1.63) и теоремы Планшереля имеем

$$\Big\|\mathcal{HB}^{x',t}_{\frac{1}{2},\frac{7}{40}}[\nabla V^R]\Big\|^2_{W_{2,\,x',\,x_3,t}^{\;1/2,0,0}(Q;\mathbb{R}^3)} \leqslant \|\eta\nabla v\|^2_{L_2(Q;\mathbb{R}^3)} \leqslant \\ \leqslant \|\nabla v\|^2_{L_2(Q_{2T};\mathbb{R}^3)} + \|\nabla v\|^2_{L_2(Q_{-T};\mathbb{R}^3)}\,.$$

Еще раз используя оценку (3.1.12) с $3T$ вместо T, а также оценку (3.1.43) для задачи (3.1.41), приходим к неравенству

$$\Big|\int\limits_{Q_{2T}}\Big((v,\nabla)v, \mathcal{HB}^{x',t}_{\frac{1}{2},\frac{7}{40}}[V^R]\Big)\eta(t)\,dx\,dt\Big| \leqslant C_{18}M^3 \tag{3.1.68}$$

с постоянной $C_{18} > 0$, зависящей только от μ, E, T, и с функционалом $M = M(f, v^0)$ вида (3.1.50).

Оценим теперь последнее слагаемое в правой части (3.1.64). Поскольку $V^R(x,t) \in W_2^1(Q;\mathbb{R}^3)$, то след $V^R(x',0,t) \in W_2^{1/2}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$. А так как $1/2 + 7/40 > 3/8$, то $\mathcal{HB}^{x',t}_{\frac{1}{2},\frac{7}{40}}[V^R(x',0,r)] \in W^{1,3/8}_{2,x',t}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^2)$ и оценка (3.1.62) будет выполняться для вектор-функции $U(x',t)$ с компонентами

$$U_j(x',t) = \mathcal{HB}^{x',t}_{\frac{1}{2},\frac{7}{40}}[V^R_j(x',0,r)], \quad j = 1,2,$$

т.е. согласно (3.1.62) имеем

$$\beta\Big|\sum_{j=1}^{2}\int\limits_{\omega_1^{2T}} v_j(x',0,t)\mathcal{HB}^{x',t}_{\frac{1}{2},\frac{7}{40}}\big[V^R_j(x',0,t)\big]\eta(t)\,dx'\,dt\Big| \leqslant \\ \leqslant C_{14}M(M+1)\,\Big\|\mathcal{HB}^{x',t}_{\frac{1}{2},\frac{7}{40}}\big[V^R(x',0,t)\big]\Big\|_{W_{2,x',t}^{1,3/8}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)} \quad \forall\,\beta, R > 0 \tag{3.1.69}$$

с постоянной C_{14} из (3.1.62) и с функционалом $M = M(f, v^0)$ вида (3.1.50).

И наконец, оценим правую часть (3.1.64), используя ограниченность оператора $\mathcal{HB}^{x',t}_{\rho',\sigma}\colon L_2(\mathbb{R}^3) \to L_2(\mathbb{R}^3)$ при $\rho', \sigma > 0$ и оценки (3.1.68), (3.1.69). Снова прибегая к оценке (3.1.12) с $3T$ вместо T, а также к оценке (3.1.43) для задачи (3.1.41), находим

$$\|V^R\|^2_{W_{2,x,t}^{1,0}(Q;\mathbb{R}^3)} + \int\limits_Q \frac{|\xi_0||\chi_R\widehat{\eta v}|^2\,d\xi_0\,d\xi'\,dx_3}{1+|\xi'|^{1/2}+|\xi_0|^{7/40}} \leqslant C_{19}M^2 + (2\pi)^3C_{18}M^3 + \\ + (2\pi)^3C_{14}M(M+1)\,\Big\|\mathcal{HB}^{x',t}_{\frac{1}{2},\frac{7}{40}}[V^R(x',0,t)]\Big\|_{W_{2,x',t}^{1,3/8}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)} \quad \forall\,\beta, R > 0 \tag{3.1.70}$$

с положительными постоянными C_{14} , C_{18} и C_{19} , зависящими только от μ, E и T.

При любых значениях $\rho', \sigma > 0$ норма в анизотропном пространстве Соболева–Слободецкого $W_{2,x',t}^{\rho',\sigma}(\mathbb{R}^n)$ эквивалентна сумме норм в $W_{2,x',t}^{0,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ и в $W_{2,x',t}^{\rho',0}(\mathbb{R}^n)$. Поэтому

$$C_{20}\left\|\mathcal{HB}^{x',t}_{\frac{1}{2},\frac{7}{40}}\left[V_j^R(x',0,t)\right]\right\|_{W_{2,x',t}^{1,3/8}(\mathbb{R}^3)} \leqslant \left\|\mathcal{HB}^{x',t}_{\frac{1}{2},\frac{7}{40}}\left[V_j^R(x',0,t)\right]\right\|_{W_{2,x',t}^{1,0}(\mathbb{R}^3)} + \\ + \left\|\mathcal{HB}^{x',t}_{\frac{1}{2},\frac{7}{40}}\left[V_j^R(x',0,t)\right]\right\|_{W_{2,x',t}^{0,3/8}(\mathbb{R}^3)} \leqslant \left\|V_j^R(x',0,t)\right\|_{W_{2,x',t}^{1/2,0}(\mathbb{R}^3)} + \\ + \left\|V_j^R(x',0,t)\right\|_{W_{2,x',t}^{0,1/5}(\mathbb{R}^3)} \leqslant C_{21}\left\|V_j^R(x',0,t)\right\|_{W_{2,x',t}^{1/2,1/5}(\mathbb{R}^3)},$$

откуда и из теоремы 3.1.3 следует, что

$$\left\|\mathcal{HB}^{x',t}_{\frac{1}{2},\frac{7}{40}}\left[V_j^R(x',0,t)\right]\right\|_{W_{2,x',t}^{1,3/8}(\mathbb{R}^3)} \leqslant C_{22}\left\|V_j^R(x,t)\right\|_{W_{2,x,t}^{1,2/5}(Q)} \tag{3.1.71}$$

с некоторой абсолютной постоянной $C_{22} > 0$.

Для всех неотрицательных a, b выполняется неравенство Юнга $ab \leqslant a^p/p + b^{p'}/p'$, согласно которому при $p = 5/4$ имеем

$$5|\xi_0|^{4/5} = 5\left(\frac{|\xi_0|}{1+|\xi'|^{1/2}+|\xi_0|^{7/40}}\right)^{4/5}\left(1+|\xi'|^{1/2}+|\xi_0|^{7/40}\right)^{4/5} \leqslant \\ \leqslant \frac{4\delta^{-1}|\xi_0|}{1+|\xi'|^{1/2}+|\xi_0|^{7/40}} + \delta\left(1+|\xi'|^{1/2}+|\xi_0|^{7/40}\right)^4 \quad \forall\,\delta > 0.$$

Из неравенства Гельдера для сумм находим

$$\left(1+|\xi'|^{1/2}+|\xi_0|^{7/40}\right)^4 \leqslant 27\left(1+|\xi'|^2+|\xi_0|^{7/10}\right),$$

а из неравенства Юнга $ab \leqslant a^p/p + b^{p'}/p'$ с показателем $p = 8/7$ следует, что $8|\xi|^{7/10} \leqslant 7|\xi_0|^{4/5} + 1$. Таким образом,

$$|\xi_0|^{4/5} \leqslant \frac{C_\varepsilon|\xi_0|}{1+|\xi'|^{1/2}+|\xi_0|^{7/40}} + \varepsilon(1+|\xi'|^2+|\xi_0|^{4/5}) \quad \forall\,\varepsilon > 0$$

с постоянной $C_\varepsilon > 0$, зависящей только от ε. В таком случае

$$\int_Q |\xi_0|^{4/5}\,|\chi_R\widehat{\eta v}|^2\;d\xi_0\,d\xi'\,dx_3 \leqslant C_\varepsilon\int_Q \frac{|\xi_0||\chi_R\widehat{\eta v}|^2\,d\xi_0\,d\xi'\,dx_3}{1+|\xi'|^{1/2}+|\xi_0|^{7/40}} + \\ + \varepsilon\int_Q\left(1+|\xi'|^2+|\xi_0|^{4/5}\right)|\chi_R\widehat{\eta v}|^2\,d\xi_0\,d\xi'\,dx_3\,. \tag{3.1.72}$$

В силу определения вектор-функции $V^R(x,t)$ имеем

$$\mathcal{F}_{\substack{x'\to\xi' \\ t\to\xi_0}}\bigl[V^R(x,t)\bigr] = \chi_R(\xi_0)\widehat{\eta v}.$$

Выбирая и фиксируя подходящее значение параметра $\varepsilon > 0$, из (3.1.70)–(3.1.72) находим

$$\|V^R\|^2_{W^{1,2/5}_{2,x,t}(Q;\mathbb{R}^3)} \leqslant C'M(M+1)\Big(M + 2\,\|V^R\|_{W^{1,2/5}_{2,x,t}(Q;\mathbb{R}^3)}\Big) \tag{3.1.73}$$

для всех $\beta, R > 0$ с постоянной $C' > 0$, зависящей только от μ, E, T, и где функционал $M = M(f, v^0)$ имеет вид (3.1.50).

Из квадратичного неравенства (3.1.73) сразу же следует оценка

$$\|V^R\|_{W^{1,2/5}_{2,x,t}(Q;\mathbb{R}^3)} \leqslant CM(M+1) \quad \forall\,\beta, R > 0$$

с постоянной $C = 2C' + 1/2$. Переходя к пределу при $R \to \infty$, заключаем, что $\eta v \in W^{1,2/5}_{2,x,t}(Q;\mathbb{R}^3)$ и имеет место оценка

$$\|\eta v\|_{W^{1,2/5}_{2,x,t}(Q;\mathbb{R}^3)} \leqslant CM(M+1) \quad \forall\,\beta \geqslant 0.$$

Заменив теперь нелокальную норму пространства Соболева–Слободецкого на эквивалентную ей локальную и воспользовавшись тем, что $\eta(t) = 1$ при $t \in [0,T]$, получим

$$\sup_{\beta\geqslant 0} \|v\|_{W^{1,2/5}_{2,x,t}(Q_T;\mathbb{R}^3)} \leqslant CM(M+1). \tag{3.1.74}$$

Таким образом, установлена не зависящая от β оценка нормы обобщенного решения регуляризованной задачи в $W^{1,2/5}_{2,x,t}(Q_T;\mathbb{R}^3)$.

Предельный переход

В силу оценки (3.1.74) семейство обобщенных решений регуляризованной задачи (3.1.1), (3.1.2), (3.1.9), (3.1.10) ограничено в рефлексивном банаховом пространстве $W^{1,2/5}_{2,x,t}(Q_T;\mathbb{R}^3)$, что означает слабую относительную компактность этого семейства в $W^{1,2/5}_{2,x,t}(Q_T;\mathbb{R}^3)$. Поэтому найдется неограниченно возрастающая последовательность положительных чисел $\{\beta_k\}$ такая, что при $\beta_k \to \infty$ последовательность соответствующих обобщенных решений $\{v^k(x,t)\}$ будет слабо сходиться в $W^{1,2/5}_{2,x,t}(Q_T;\mathbb{R}^3)$ к некоторому элементу $v(x,t) \in W^{1,2/5}_{2,x,t}(Q_T;\mathbb{R}^3) \cap \dot{V}(Q_T)$ с нулевым следом на граничном подмножестве ω_1^T, так как (3.1.12) означает, что

$$\lim_{\beta_k\to\infty} \bigl\|v_j^k(x',0,t)\bigr\|_{L_2(\omega_1^T)} = 0 \quad j = 1,2.$$

Следовательно, слабый предел $v(x,t) \in W_{2,x,t}^{1,2/5}(Q_T;\mathbb{R}^3) \cap \overset{\circ}{\widehat{V}}(Q_T)$.

По теореме 9.6.2 из [33] при $2 \leqslant q \leqslant 22/7$ имеет место вложение

$$W_{2,x,t}^{1,2/5}(Q_T;\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L_q(Q_T;\mathbb{R}^3).$$

При $q < 22/7$ это вложение характеризуется неравенством 26.3.1(15) из [4] с параметром $\varepsilon > 0$, поэтому в силу теоремы 26.3.5 из [4] ограниченность (3.1.74) при $2 \leqslant q < 22/7$ означает относительную компактность $\{v^k(x,t)\}$ в $L_q(Q_T^R;\mathbb{R}^3)$ с любым $R > 0$ для цилиндра $Q_T^R = \{(x,t) \in Q_T \colon |x| < R\}$. А тогда ввиду слабой сходимости $\{v^k(x,t)\}$ имеем

$$\lim_{\beta_k \to \infty} \left\| v - v^k \right\|_{L_q(Q_T^R;\mathbb{R}^3)} = 0 \quad \forall\, R > 0$$

при $2 \leqslant q < 22/7$, откуда и из той же слабой сходимости следует, что слабый предел $v(x,t) \in W_{2,x,t}^{1,2/5}(Q_T;\mathbb{R}^3)$ является обобщенным решением задачи (3.1.1)–(3.1.4) из класса Хопфа в смысле определения 3.1.1 и удовлетворяет неравенству (3.1.8). Основная теорема 3.1.1 доказана.

Замечание 3.1.1. При нашем подходе улучшить оценку (3.1.8) не позволяет нелинейность системы Навье–Стокса. Однако для линеаризованной задачи (3.1.1)–(3.1.4) без $(v,\nabla)v$ наш итерационный метод позволяет дотянуть оценку нормы обобщенного решения в $W_{2,x,t}^{1,s}(Q_T)$ до любого порядка $s < 1/2$ без каких-либо предположений о гладкости эволюции, кроме измеримости подмножества $\omega_1^T \subset \Pi_T$. При этом с приближением к порядку $s = 1/2$ число итераций неограниченно возрастает.

3.2. L_p-теория нестационарной системы Стокса

В этом разделе строится L_p-теория начально-краевых задач для линейной нестационарной системы Стокса. Для ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с гладкой границей устанавливается существование и единственность сильного решения начально-краевой задачи. Для неограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ устанавливается условие на Ω, необходимое и достаточное для однозначной разрешимости в классе сильных решений. Предварительно будут доказаны несколько вспомогательных лемм.

В цилиндре $Q_T = \Omega \times (0,T)$ рассмотрим начально-краевую задачу для линейной нестационарной системы Стокса

$$\begin{cases} v_t - \nu\Delta v + \nabla q = f, \\ \operatorname{div} v = 0, \quad (x,t) \in Q_T, \\ v|_{t=0} = 0, \quad v|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{3.2.1}$$

Для часто используемых функциональных пространств удобно ввести следующие обозначания:

$$\hat{V}_p(Q_T) = \{u \in W_p^{2,1}(Q_T;\mathbb{R}^n)\colon u(x,t) \in \overset{\circ}{\hat{J}}{}_p^1(\Omega)\,\dot{\forall}\, t \in (0,T)\}, \tag{3.2.2}$$

$$V_p(Q_T) = \{u \in W_p^{2,1}(Q_T;\mathbb{R}^n)\colon u(x,t) \in \overset{\circ}{J}{}_p^1(\Omega)\,\dot{\forall}\, t \in (0,T)\}, \tag{3.2.3}$$

где квантор с точкой $\dot{\forall}$ означает «для почти всех». Условимся рассматривать $V_p(Q_T)$ и $\hat{V}_p(Q_T)$ как банаховы пространства с индуцированной нормой неизотропного пространства Соболева $W_p^{2,1}(Q_T;\mathbb{R}^n)$.

Отметим, что для банахова пространства B функциональное пространство $L_p\big((0,T);B\big)$ часто определяют как L_p-пространство измеримых по Бохнеру функций на $(0,T)$ со значениями в B — подробности можно найти в учебнике [79]. Но если B является пространством Соболева, то такой подход представляется нерациональным, особенно при наличии гладкости по $t \in (0,T)$. Технически намного проще и естественней использовать здесь хорошо развитую теорию неизотропных пространств Соболева. Даже в случае отсутствия гладкости по $t \in (0,T)$ мы будем пользоваться более простыми определениями функциональных пространств:

$$L_p\big((0,T);\overset{\circ}{\hat{J}}_p(\Omega)\big) = \{u \in L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)\colon u(x,t) \in \overset{\circ}{\hat{J}}_p(\Omega)\,\dot{\forall}\, t \in (0,T)\}, \tag{3.2.4}$$

$$L_p\big((0,T);\overset{\circ}{J}_p(\Omega)\big) = \{u \in L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)\colon u(x,t) \in \overset{\circ}{J}_p(\Omega)\,\dot{\forall}\, t \in (0,T)\}, \tag{3.2.5}$$

$$L_p\big((0,T);\hat{G}_p(\Omega)\big) = \{u \in L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)\colon u(x,t) \in \hat{G}_p(\Omega)\,\dot{\forall}\, t \in (0,T)\}, \tag{3.2.6}$$

$$L_p\big((0,T);G_p(\Omega)\big) = \{u \in L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)\colon u(x,t) \in G_p(\Omega)\,\dot{\forall}\, t \in (0,T)\}, \tag{3.2.7}$$

которые эквивалентны их определениям как L_p-пространств измеримых по Бохнеру функций на $(0,T)$ со значениями в соответствующих банаховых пространствах. При этом в случае $B = W_p^{-1}(\Omega)$ определим банахово пространство $L_p\big((0,T);W_p^{-1}(\Omega)\big)$ как двойственное к неизотропному пространству Соболева

$$L_{p'}\big((0,T);\overset{\circ}{W}{}_{p'}^1(\Omega)\big) = \text{ \textit{замыкание в} } W_{p'}^{0,1}(Q_T) \text{ \textit{подпространства} } \overset{\circ}{C}{}^\infty(Q_T),$$

где верхние индексы $\{0,1\}$ означают порядки гладкости по x и t соответственно.

Сильным решением начально-краевой задачи (3.2.1) будем называть упорядоченную пару

$$\{v,\nabla q\}\in \hat{V}_p(Q_T)\times L_p\big((0,T);\hat{G}_p(\Omega)\big), \tag{3.2.8}$$

для которой система (3.2.1) выполняется почти всюду в Q_T, а начальные и граничные условия (3.2.1) выполняются в смысле равенств соответствующих следов. Отметим, что в силу определения

$$\hat{G}_p(\Omega)=\{u=\nabla_x\psi\colon\ \psi\in W^1_{p,loc}(\Omega)\},$$

запись (3.2.8) эквивалентна записи

$$\{v,\nabla q\}\in \hat{V}_p(Q_T)\times L_p(Q_T;\mathbb{R}^n). \tag{3.2.9}$$

Таким образом, начально-краевая задача (3.2.1) в классе сильных решений может быть записана в виде

$$\begin{cases} v_t-\nu\Delta v+\nabla q=f, \quad v|_{t=0}=0,\\ v\in\hat{V}_p(Q_T), \quad \nabla q\in L_p\big((0,T);\hat{G}_p(\Omega)\big). \end{cases} \tag{3.2.10}$$

Отметим, что соленоидальность v и краевое условие $v|_{\partial\Omega}=0$ входят в постановку (3.2.10) неявно через принадлежность $v\in\hat{V}_p(Q_T)$.

Через $\mathcal{E}_{p,\nu}(Q_T;\mathbb{R}^n)$ обозначим пространство векторных полей

$$\{u\in W^{2,1}_{p,loc}(Q_T;\mathbb{R}^n)\colon u_t\in L_p(Q_T;\mathbb{R}^n),\ D^\alpha_x\in L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)\ ,|\alpha|=2\}$$

с полунормой

$$\|u\|_{\mathcal{E}_{p,\nu}(Q_T;\mathbb{R}^n)}=\|u_t\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)}+\nu\sum_{|\alpha|=2}\|D^\alpha_x u\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)}\,. \tag{3.2.11}$$

Сразу же отметим, что на подпространстве

$$\{u\in\hat{V}_p(Q_T),\ u|_{t=0}\}$$

банахова пространства $\hat{V}_p(Q_T)$ полунорма (3.2.11) эквивалентна норме

$$\|u\|_{V_p(Q_T)}=\|u_t\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)}+\sum_{|\alpha|=2}\|D^\alpha_x u\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)} \tag{3.2.12}$$

при любых положительных ν и T. Полунорма (3.2.11) введена лишь с целью уточнения зависимости постоянных в оценках сильных решений от параметров ν и T.

Слабым решением начально-краевой задачи (3.2.1) класса $L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)$ будем называть векторное поле

$$v \in L_p\big((0,T);\hat{\mathring{J}}_p(\Omega)\big),$$

удовлетворяющее интегральному тождеству

$$\int\limits_{Q_T}(v, u_t+\nu\Delta u)\,dx\,dt = -\int\limits_{Q_T}(f,u)\,dx\,dt \quad \forall\, u\in V_{p'}(Q_T):\ u|_{t=T}=0 \quad (3.2.13)$$

с сопряженным показателем $p' = p/(p-1)$, $1<p<\infty$. Нетрудно убедиться, что всякое сильное решение будет слабым.

Для полупространства $\Omega=\mathbb{R}^n_+$ имеем

$$\hat{\mathring{J}}{}^1_p(\Omega) = \mathring{J}{}^1_p(\Omega), \quad \hat{G}_p(\Omega)=G_p(\Omega) \quad p\in(1,\infty),\ n\geqslant 2,$$

— подробности см. в статье [31]. Поэтому в случае $Q_T=\mathbb{R}^n_+\times(0,T)$ имеем $\hat{V}_p(Q_T)=V_p(Q_T)$, при этом без какого-либо ограничения общности сильное решение оказывается решением класса

$$\{v,\nabla q\}\in V_p(Q_T)\times L_p\big((0,T);G_p(\Omega)\big), \qquad (3.2.14)$$

Справедлива следующая

Лемма 3.2.1. *Пусть* $\Omega=\mathbb{R}^n_+$, $n\geqslant 2$, $\nu>0$, $T>0$, $1<p<\infty$. *Для любого векторного поля* $f\in L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)$ *существует единственное сильное решение* (3.2.14) *начально-краевой задачи* (3.2.1). *Это решение удовлетворяет неравенству*

$$\|v\|_{\mathcal{E}_{p,\nu}(Q_T;\mathbb{R}^n)}+\|\nabla q\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)}\leqslant C_0\|f\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)} \qquad (3.2.15)$$

с постоянной $C_0>0$, *зависящей только от* n *и* p.

Доказательство. Так как $\hat{G}_p(\mathbb{R}^n_+)=G_p(\mathbb{R}^n_+)$, то в силу (2.1.48) имеем разложение в прямую сумму

$$L_p(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n)=\mathring{J}_p(\mathbb{R}^n_+)\oplus G_p(\mathbb{R}^n_+)$$

при $1 < p < \infty$ и $n \geqslant 2$, откуда вытекает справедливость разложения в прямую сумму

$$L_p(Q_T;\mathbb{R}^n) = L_p\big((0,T);\overset{\circ}{J}_p(\mathbb{R}^n_+)\big) \oplus L_p\big((0,T);G_p(\mathbb{R}^n_+)\big) \tag{3.2.16}$$

при $1 < p < \infty$ и $n \geqslant 2$ для любых $T > 0$. Поэтому утверждение леммы достаточно доказать для $f \in L_p\big((0,T);\overset{\circ}{J}_p(\mathbb{R}^n_+)\big)$.

Предположим, что $f \in \overset{\circ}{C}{}^\infty\big((0,T);\overset{\circ}{J}_p(\mathbb{R}^n_+)\big)$, и доопределим f нулем при $t \in \mathbb{R}^1\backslash(0,T)$, т. е. теперь $f \in \overset{\circ}{C}{}^\infty\big(\mathbb{R}^1;\overset{\circ}{J}_p(\mathbb{R}^n_+)\big)$. Предположим также, что $\nu = 1$. Для функции $v_n = v_n(x',x_n,t)$ рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} \Delta_x\Big(\dfrac{\partial v_n}{\partial t} - \Delta_x v_n\Big) = \Delta_x f_n, \quad x \in \mathbb{R}^n_+,\ t \in \mathbb{R}^1, \\ v_n|_{x_n=0} = \dfrac{\partial v_n}{\partial x_n}\Big|_{x_n=0} = 0, \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1},\ t \in \mathbb{R}^1, \\ \lim\limits_{x_n\to\infty} v_n(x',x_n,t) = 0. \end{cases} \tag{3.2.17}$$

Применяя к задаче (3.2.17) преобразование Фурье $\mathcal{F}$ относительно переменных $(x',t) \in \mathbb{R}^n$, получим краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\begin{cases} \Big(\dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2} - |\xi|^2\Big)\Big[-\dfrac{\partial^2 \hat{v}_n}{\partial x_n^2} + (i\xi_0 + |\xi|^2)\hat{v}_n\Big] = \Big(\dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2} - |\xi|^2\Big)\hat{f}_n\,, \quad x_n > 0, \\ \hat{v}_n|_{x_n=0} = \dfrac{\partial \hat{v}_n}{\partial x_n}\Big|_{x_n=0} = 0, \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1},\ t \in \mathbb{R}^1, \\ \lim\limits_{x_n\to\infty} \hat{v}_n(x',x_n,t) = 0, \end{cases} \tag{3.2.18}$$

где используются обозначения

$$\hat{v} = \hat{v}(\xi',x_n,\xi_0) = \mathcal{F}\big[v(x',x_n,t)\big], \quad \hat{f} = \hat{f}(\xi',x_n,\xi_0) = \mathcal{F}\big[f(x',x_n,t)\big],$$

ξ' — переменная, двойственная к $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, а ξ_0 — переменная, двойственная к $t \in \mathbb{R}^1$.

Вводя обозначение

$$\psi(\xi',\xi_0) = \frac{\partial^2 \hat{v}_n}{\partial x_n^2}\Big|_{x_n=0} \tag{3.2.19}$$

и решая краевую задачу (3.2.18), находим

$$\psi(\xi',\xi_0) = \frac{i\xi_0}{\sqrt{i\xi_0 + |\xi'|^2} - |\xi'|} \int\limits_0^\infty e^{-y_n\sqrt{i\xi_0+|\xi'|^2}}\,\hat{f}_n(\xi',y_n,\xi_0)\,dy_n\,, \tag{3.2.20}$$

где $\sqrt{z}$ — ветвь корня, принимающая вещественные положительные значения на полуоси $\{z\colon \operatorname{Im} z = 0,\ \operatorname{Re} z > 0\}$.

Функцию q определим через ее преобразование Фурье

$$\hat{q}(\xi', x_n, \xi_0) = \mathcal{F}[q(x', x_n, t)]$$

с помощью равенства

$$\hat{q}(\xi', x_n, \xi_0) = -\frac{\psi(\xi', \xi_0)}{|\xi'|} e^{-x_n|\xi'|}, \quad x_n > 0. \tag{3.2.21}$$

Функцию φ тоже определим через ее преобразование Фурье

$$\hat{\varphi}(\xi', x_n, \xi_0) = \mathcal{F}[\varphi(x', x_n, t)]$$

с помощью равенства

$$\begin{gathered}\hat{\varphi}(\xi', x_n, \xi_0) = \Big[\sqrt{i\xi_0 + |\xi'|^2} \int\limits_0^\infty e^{-y_n\sqrt{i\xi_0+|\xi'|^2}} \hat{f}_n(\xi', y_n, \xi_0)\, dy_n + \\ + |\xi'| \int\limits_0^\infty e^{-y_n\sqrt{i\xi_0+|\xi'|^2}} \hat{f}_n(\xi', y_n, \xi_0)\, dy_n\Big] e^{-x_n|\xi'|}, \quad x_n > 0.\end{gathered} \tag{3.2.22}$$

Тогда из (3.2.20)–(3.2.22) получаем

$$\begin{aligned} &i\xi'\hat{q}(\xi', x_n, \xi_0) = -\frac{i\xi'}{|\xi'|} e^{-x_n|\xi'|} \hat{\varphi}(\xi', x_n, \xi_0), \\ &\frac{\partial \hat{q}_n}{\partial x_n}(\xi', x_n, \xi_0) = \hat{\varphi}(\xi', x_n, \xi_0) \end{aligned} \tag{3.2.23}$$

для всех $x_n > 0$. Функцию F определим через ее преобразование Фурье с помощью равенства

$$\hat{F}(\xi', x_n, \xi_0) = \hat{f}_n(\xi', x_n, \xi_0) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{i\xi_k}{|\xi'|} \hat{f}_k(\xi', x_n, \xi_0), \quad x_n > 0. \tag{3.2.24}$$

В силу теоремы о мультипликаторах преобразования Фурье [27] имеем

$$\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |F(x', x_n, t)|^p dx' dt\Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant C_1 \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x', x_n, t)|^p dx' dt\Big)^{\frac{1}{p}} \tag{3.2.25}$$

для всех $x_n > 0$ при $1 < p < \infty$, $n \geqslant 2$, с постоянной $C_1 > 0$, зависящей только n и p. Причем в силу той же теоремы о мультипликаторах преобразования Фурье имеем $F \in W^l_s(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ для любых целых $l \geqslant 0$ и любых вещественных $s \in (1, \infty)$, так как векторное поле $f \in \overset{\circ}{C}{}^\infty\big(\mathbb{R}^1; \overset{\circ}{J}_p(\mathbb{R}^n_+)\big)$.

Поскольку векторное поле f соленоидально, имеем

$$\frac{\partial \hat{f}_n}{\partial x_n}(\xi', x_n, \xi_0) = -\sum_{k=1}^{n-1} i\xi_k \hat{f}_k(\xi', x_n, \xi_0). \tag{3.2.26}$$

А тогда из (3.2.22),(3.2.24) находим

$$\hat{\varphi}(\xi', x_n, \xi_0) = |\xi'| e^{-x_n|\xi'|} \int\limits_0^\infty e^{-y_n\sqrt{i\xi_0 + |\xi'|^2}} \hat{F}_n(\xi', y_n, \xi_0)\, dy_n\,.$$

Функцию φ удобно представить в виде

$$\varphi(x', x_n, t) = \varphi_1(x', x_n, t) + \varphi_2(x', x_n, t), \tag{3.2.27}$$

где функции φ_j, $j = 1, 2$, определяются через свои преобразования Фурье

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_1(\xi', x_n, \xi_0) &= |\xi'| e^{-x_n|\xi'|} \int\limits_0^{x_n} e^{-y_n\sqrt{i\xi_0 + |\xi'|^2}} \hat{F}_n(\xi', y_n, \xi_0)\, dy_n\,, \\ \hat{\varphi}_2(\xi', x_n, \xi_0) &= |\xi'| e^{-x_n|\xi'|} \int\limits_{x_n}^\infty e^{-y_n\sqrt{i\xi_0 + |\xi'|^2}} \hat{F}_n(\xi', y_n, \xi_0)\, dy_n \end{aligned} \tag{3.2.28}$$

для всех $x_n > 0$. Вводя обозначения

$$\begin{aligned} m_1(\xi', \xi_0, x_n, y_n) &= x_n|\xi'| e^{-x_n|\xi'|} e^{-y_n\sqrt{i\xi_0 + |\xi'|^2}}, \\ m_2(\xi', \xi_0, x_n, y_n) &= y_n|\xi'| e^{-x_n|\xi'|} e^{-y_n\sqrt{i\xi_0 + |\xi'|^2}}, \end{aligned}$$

перепишем равенства (3.2.28) для всех $x_n > 0$ в виде

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_1(\xi', x_n, \xi_0) &= \frac{1}{x_n} \int\limits_0^{x_n} m_1(\xi', \xi_0, x_n, y_n) \hat{F}_n(\xi', y_n, \xi_0)\, dy_n\,, \\ \hat{\varphi}_2(\xi', x_n, \xi_0) &= \int\limits_{x_n}^\infty m_2(\xi', \xi_0, x_n, y_n) \hat{F}_n(\xi', y_n, \xi_0) \frac{dy_n}{y_n}. \end{aligned} \tag{3.2.29}$$

Нетрудно убедиться, что функции $m_j(\xi', \xi_0, x_n, y_n)$, $j = 1, 2$, при любых значениях x_n , $y_n > 0$ будут мультипликаторами преобразования Фурье (см. [27]). В силу теоремы [27] о мультипликаторах преобразования Фурье функции $\varphi_j \in W_s^l(\mathbb{R}_+^{n+1})$ для любых целых $l \geqslant 0$ и любых вещественных $s \in (1, \infty)$. При этом

$$\begin{aligned} &\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi_1(x', x_n, t)|^p dx'dt\Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{M_1}{x_n} \int\limits_0^{x_n} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |F(x', y_n, t)|^p dx'dt\Big)^{\frac{1}{p}} dy_n\,, \\ &\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi_2(x', x_n, t)|^p dx'dt\Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant M_2 \int\limits_{x_n}^{\infty} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |F(x', y_n, t)|^p dx'dt\Big)^{\frac{1}{p}} \frac{dy_n}{y_n} \end{aligned} \tag{3.2.30}$$

для всех $x_n > 0$ при $1 < p < \infty$, $n \geqslant 2$, с положительными постоянными M_1, M_2 , зависящими только от n и p. Из (3.2.25),(3.2.30) и неравенств Харди (см. [43], с. 319) получаем

$$\Big(\int\limits_0^{\infty} dx_n \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi_j(x', x_n, t)|^p dx'dt\Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant C_2 \Big(\int\limits_0^{\infty} dx_n \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x', x_n, t)|^p dx'dt\Big)^{\frac{1}{p}} \tag{3.2.31}$$

при $j = 1, 2$ с постоянной $C_2 = C_1 \max\{p'M_1, pM_1\}$, $1 < p < \infty$. Из (3.2.23),(3.2.27) и теоремы о мультипликаторах преобразования Фурье [27] следует, что $\nabla_x q \in W_s^l(\mathbb{R}_+^{n+1}; \mathbb{R}^n)$ для любых целых $l \geqslant 0$ и для любых вещественных $s \in (1, \infty)$. При этом в силу (3.2.31) имеем

$$\|\nabla_x q\|_{L_p(\mathbb{R}_+^{n+1}; \mathbb{R}^n)} \leqslant C_3 \|f\|_{L_p(\mathbb{R}_+^{n+1}; \mathbb{R}^n)} \tag{3.2.32}$$

с постоянной $C_3 > 0$, зависящей только от n и p. Рассмотрим теперь начально-краевую задачу

$$\begin{cases} v_t - \nu \Delta v = f - \nabla_x q, \quad x\mathbb{R}_+^n\,,\ t \in \mathbb{R}_+^1\,, \\ v|_{t=0} = 0, \quad x\mathbb{R}_+^n\,, \\ v|_{x_n=0} = 0 \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1},\ t \in \mathbb{R}_+^1\,, \\ \lim\limits_{x_n \to \infty} v_n(x', x_n, t) = 0 \end{cases} \tag{3.2.33}$$

для векторного поля v, где $\nabla_x q$ уже найдено. Методом отражений относительно переменной x_n задача (3.2.33) в полупространстве $\mathbb{R}_+^n$ сводится к задаче Коши для $\mathbb{R}^n$. Доопределяя решение задачи Коши нулем при $t < 0$, применяя преобразование Фурье по всем переменным и пользуясь теоремой [27] о мультипликаторах преобразования Фурье, заключаем, что существует единственное решение v начально-краевой задачи (3.2.33), имеющее гладкость

$$v_t \in W_s^m\big(\mathbb{R}_+^1; W_s^l(\mathbb{R}_+^n;\mathbb{R}^n)\big), \quad D_x^\alpha v \in W_s^m\big(\mathbb{R}_+^1; W_s^l(\mathbb{R}_+^n;\mathbb{R}^n)\big) \quad \forall\, \alpha\colon |\alpha| = 2$$

для любых целых $l, m \geqslant 0$ и любого вещественного $s \in (1,\infty)$. При этом найдется постоянная $C_4 > 0$, зависящая только n и p, такая, что для решения v задачи (3.2.33) при $1 < p < \infty$, $n \geqslant 2$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} &\|v_t\|_{L_p(Q_\infty;\mathbb{R}^n)} + \sum_{|\alpha|=2} \|D_x^\alpha v\|_{L_p(Q_\infty;\mathbb{R}^n)} \leqslant \\ &\leqslant C_4\big[\|f\|_{L_p(Q_\infty;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla_x q\|_{L_p(Q_\infty;\mathbb{R}^n)}\big], \end{aligned} \tag{3.2.34}$$

где $Q_\infty = \mathbb{R}_+^n \times (0,\infty)$ — полубесконечный цилиндр с основанием $\mathbb{R}_+^n$.

Вычислим $\operatorname{div} v$. Это удобнее сделать в преобразовании Фурье относительно переменных $(x',t) \in \mathbb{R}^n$. При этом, естественно, предполагается, что решение задачи (3.2.33) доопределено нулем при $t < 0$. Имеем

$$\mathcal{F}[\operatorname{div}_x v(x,t)] = \sum_{k=1}^{n-1} i\xi_k \hat{v}_k(\xi', x_n, \xi_0) + \frac{\partial \hat{v}_n}{\partial x_n}(\xi', x_n, \xi_0). \tag{3.2.35}$$

Как нетрудно убедиться,

$$\frac{\partial^2 \hat{q}}{\partial x_n^2}(\xi', x_n, \xi_0) = |\xi'|^2 \hat{q}(\xi', x_n, \xi_0), \quad x_n > 0, \tag{3.2.36}$$

для $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\xi_0 \in \mathbb{R}^1$. Из явного представления решения задачи (3.2.33) в преобразовании Фурье по переменным x', t, пользуясь (3.2.26),(3.2.35) и (3.2.36), находим

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\operatorname{div}_x v(x,t)] = e^{-x_n\sqrt{i\xi_0+|\xi'|^2}}\Big[\int_0^\infty e^{-y_n\sqrt{i\xi_0+|\xi'|^2}} \hat{f}_n(\xi', y_n, \xi_0)\,dy_n - \\ - \frac{|\xi'|^2}{\sqrt{i\xi_0+|\xi'|^2}} \int_0^\infty e^{-y_n\sqrt{i\xi_0+|\xi'|^2}} \hat{q}_n(\xi', y_n, \xi_0)\,dy_n - \frac{\psi(\xi',\xi_0)}{\sqrt{i\xi_0+|\xi'|^2}}\Big]. \end{aligned} \tag{3.2.37}$$

Подставляя в (3.2.37) равенства (3.2.20) и (3.2.21), получаем

$$\mathcal{F}[\operatorname{div}_x v(x,t)] = 0, \quad x_n > 0,\ \xi' \in \mathbb{R}^{n-1},\ \xi_0 \in \mathbb{R}^1,$$

откуда следует, что

$$\operatorname{div}_x v(x,t) = 0, \quad \forall\, (x,t) \in Q_\infty. \tag{3.2.38}$$

В силу (3.2.33),(3.2.38) пара $\{v, \nabla q\}$ будет решением начально-краевой задачи (3.2.1) с $\nu = 1$. А так как для цилиндра $Q_T = \mathbb{R}^n_+ \times (0,T)$ с основанием $\mathbb{R}^n_+$ при любых $T > 0$ в силу однородности начальных условий имеем

$$\|v\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)} \leqslant T\|v_t\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)}\,, \tag{3.2.39}$$

то заключаем, что

$$v \in W^{l,m}_s(Q_T;\mathbb{R}^n), \quad \nabla q \in W^{l,m}_s(Q_T;\mathbb{R}^n)$$

для любых целых $l, m \geqslant 0$ и любого вещественного $s \in (1,\infty)$. Таким образом, для любого векторного поля $f \in \overset{\circ}{C}{}^\infty\big((0,T); \overset{\circ}{J}_p(\mathbb{R}^n_+)\big)$ существует сильное решение (3.2.14) задачи (3.2.1) с коэффициентом $\nu = 1$, которое в силу (3.2.32), (3.2.34) удовлетворяет неравенству

$$\|v_t\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)} + \sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha_x\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla q\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)} \leqslant C'\|f\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)} \tag{3.2.40}$$

при $1 < p < \infty$, $n \geqslant 2$, с постоянной $C' > 0$, зависящей только от n и p.

При $\nu \neq 1$, делая в задаче (3.2.1) замену переменных $y = x/\sqrt{\nu}$ и пользуясь уже полученными выше результатами для задачи (3.2.1) с коэффициентом $\nu = 1$, а затем делая обратную замену переменных $x = y\sqrt{\nu}$, заключаем, что для любого векторного поля $f \in \overset{\circ}{C}{}^\infty\big((0,T); \overset{\circ}{J}_p(\mathbb{R}^n_+)\big)$ существует сильное решение (3.2.14) задачи (3.2.1) с коэффициентом $\nu > 0$, которое удовлетворяет неравенству

$$\|v_t\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)} + \nu \sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha_x\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla q\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)} \leqslant C'\|f\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)} \tag{3.2.41}$$

при $1 < p < \infty$, $n \geqslant 2$, с той же, что и в (3.2.40), постоянной C', зависящей только от n и p.

Поскольку подпространство $\overset{\circ}{C}{}^\infty\big((0,T); \overset{\circ}{J}_p(\mathbb{R}^n_+)\big)$ всюду плотно в банаховом пространстве $L_p\big((0,T); \overset{\circ}{J}_p(\mathbb{R}^n_+)\big)$, то в силу (3.2.39) и (3.2.41) сильное решение (3.2.14) задачи (3.2.1) с коэффициентом $\nu > 0$ существует для любого векторного поля $f \in L_p\big((0,T); \overset{\circ}{J}_p(\mathbb{R}^n_+)\big)$ и удовлетворяет неравенству

(3.2.41). А тогда ввиду (3.2.16) для любого $f \in L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)$ существует сильное решение (3.2.14) задачи (3.2.1) с произвольным коэффициентом $\nu > 0$, удовлетворяющее неравенству (3.2.15) с некоторой постоянной $C_0 > 0$, зависящей только от n и p.

Докажем единственность решения. Пусть

$$\begin{cases} v_t - \nu\Delta v + \nabla q = f, \quad v|_{t=0} = 0, \\ v \in V_p(Q_T), \quad \nabla_x q \in L_p(Q_T;\mathbb{R}^n). \end{cases} \tag{3.2.42}$$

Напомним, что сильное решение (3.2.42) будет слабым (3.2.13). Уже установлено, что для любого векторного поля $f \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(Q_T;\mathbb{R}^3)$ найдутся векторные поля $u \in V_{p'}(Q_T)$ и $\nabla\psi \in L_{p'}(Q_T;\mathbb{R}^n)$ с показателем $p' = p/(p-1)$, такие, что

$$-u_t - \nu\Delta u + \nabla\psi = f, \quad u|_{t=T} = 0. \tag{3.2.43}$$

В силу (3.2.13) и (3.2.43) имеем

$$\int\limits_{Q_T} (v, f)\, dx\, dt = 0 \quad \forall\, f \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(Q_T;\mathbb{R}^3),$$

откуда следует, что $v(x,t) = 0$ почти всюду в Q_T, т. е. слабое решение (3.2.13), а тем более сильное решение (3.2.42) единственно. Лемма доказана.

Для $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и $Q_T = \Omega\times$ через $\overset{\circ}{E}_{p,\nu}\,(Q_T;\mathbb{R}^n)$ обозначим банахово пространство векторных полей

$$W_p^1\big((0,T); L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)\big) \cap L_p\big((0,T); W_p^2(\Omega;\mathbb{R}^n)\cap \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega;\mathbb{R}^n)\big) \tag{3.2.44}$$

с нормой

$$\|u\|_{\overset{\circ}{E}_{p,\nu}(Q_T;\mathbb{R}^n)} = \|u_t\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)} + \nu \sum_{|\alpha|=2} \|D_x^\alpha u\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)}\,, \tag{3.2.45}$$

которая на $\hat{V}_p(Q_T)$ эквивалентна норме (3.2.12). Норма $\overset{\circ}{E}_{p,\nu}\,(Q_T;\mathbb{R}^n)$ вводится с целью уточнения зависимости постоянных в оценках сильных решений задачи (3.2.14) от ν и T.

Рассмотрим область

$$\Omega = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n\colon\ x_n > \varphi(x')\}, \tag{3.2.46}$$

где предполагается, что вторые производные функции φ удовлетворяют условию Липшица и существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что

$$\sum_{2\leqslant|\alpha|\leqslant 3} |D^\alpha_{x'}\varphi(x')| \leqslant \gamma \quad \forall\, x' \in \mathbb{R}^{n-1}. \tag{3.2.47}$$

Лемма 3.2.2. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *— область вида* (3.2.42), *удовлетворяющая условию* (3.2.47), $n \geqslant 2$, $1 < p < \infty$, ν, $T > 0$, $Q_T = \Omega \times (0, T)$. *Если*

$$\sup_{x'\in\mathbb{R}^{n-1}} |\nabla_{x'}\varphi(x')| \leqslant \frac{1}{2(3C_0+1)} \tag{3.2.48}$$

с постоянной C_0 *из оценки* (3.2.15), *то всякое сильное решение*

$$\{v, \nabla q\} \in V_p(Q_T) \times L_p(Q_T; \mathbb{R}^n)$$

задачи (3.2.1) *с правой частью* $f \in L_p(Q_T; \mathbb{R}^n)$ *удовлетворяет неравенству*

$$\|u\|_{\overset{\circ}{E}_{p,\nu}(Q_T;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla q\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)} \leqslant$$
$$\leqslant C'\big[\|f\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)} + \nu \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \|D^\alpha_x v\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)}\big]$$

с постоянной $C' > 0$, *зависящей только от* n, p *и* γ.

Доказательство. Отображение $y = \Phi(x)$ определим с помощью равенств

$$y' = x', \quad y_n = x_n - \varphi(x').$$

Очевидно, Φ отображает Ω на $\mathbb{R}^n_+$. Обозначим

$$u(y,t) = v\big(\Phi^{-1}(y), t\big), \quad \psi(y,t) = q\big(\Phi^{-1}(y), t\big), \quad y \in \mathbb{R}^n_+\,.$$

Тогда, делая в системе (3.2.1) замену переменных $y = \Phi(x)$, получим

$$\begin{cases} u_t - \nu\Delta_y u + \nabla_y\,\psi = F(y,t), \\ \operatorname{div} u = \Big(\dfrac{\partial u}{\partial y_n}, \nabla_{y'}\varphi(y')\Big), \quad y \in \mathbb{R}^n_+,\ t > 0, \end{cases} \tag{3.2.49}$$

где правая часть F имеет вид

$$F(y,t) = f\big(\Phi^{-1}(y), t\big) + (I - J^*_\Phi)\nabla_y\,\psi +$$
$$+2\nu \sum_{k-1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_n}\frac{\partial\varphi(y')}{\partial y_k} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y_k\partial y_n}|\nabla_{y'}\varphi(y')|^2 + \nu\frac{\partial u}{\partial y_n}\Delta_{y'}\varphi(y')$$

и J_Φ^* — транспонированная матрица Якоби отображения Φ. При этом

$$u|_{t=0} = 0,\ y \in \mathbb{R}^n_+;\quad u|_{y_n=0} = 0,\ t \geqslant 0. \tag{3.2.50}$$

Однако векторное поле $u(y,t)$ не соленоидально по y. Поэтому, чтобы воспользоваться леммой 3.2.1, сделаем замену

$$\begin{aligned} w_k(y,t) &= u_k(y,t), \quad k = 1,\dots,n-1,\\ w_n(y,t) &= u_n(y,t) - \big(u(y,t,\nabla_{y'}\varphi(y')\big). \end{aligned}$$

Тогда из (3.2.49) находим

$$\begin{cases} w_t - \nu\Delta_y u + \nabla_y \psi = \widetilde{F}(y,t),\\ \operatorname{div} w = 0, \quad y \in \mathbb{R}^n_+,\ t > 0, \end{cases} \tag{3.2.51}$$

где правая часть $\widetilde{F}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \widetilde{F}_k(y,t) =& F_k(y,t), \quad k = 1,\dots,n-1,\\ \widetilde{F}_n(y,t) =& F_n(y,t) - \big(u_t, \nabla_{y'}\varphi(y')\big) + \nu\big(\Delta_y u, \nabla_{y'}\varphi(y')\big) +\\ &+ 2\nu \sum_{j=1}^{n-1} \Big(\frac{\partial u}{\partial y_j}, \nabla_{y'} \frac{\partial u}{\partial y_j}(y')\Big) + \big(u, \nabla_{y'}\Delta_{y'}\varphi(y')\big). \end{aligned}$$

А из (3.2.50) находим

$$w|_{t=0} = 0,\ y \in \mathbb{R}^n_+;\quad w|_{y_n=0} = 0,\ t \geqslant 0. \tag{3.2.52}$$

Теперь воспользуемся леммой 3.2.1. Применяя к задаче (3.2.51)–(3.2.52) оценку (3.2.15), получаем

$$\|w\|_{\overset{\circ}{E}_{p,\nu}(\mathcal{R}_T;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla_y \psi\|_{L_p(\mathcal{R}_T;\mathbb{R}^n)} \leqslant C_0 \|\widetilde{F}\|_{L_p(\mathcal{R}_T;\mathbb{R}^n)}\,,$$

где $\mathcal{R}_T = \mathbb{R}^n_+ \times (0,T)$, откуда используя (3.2.47) и (3.2.48), находим

$$\begin{aligned} &\|u\|_{\overset{\circ}{E}_{p,\nu}(\mathcal{R}_T;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla_y \psi\|_{L_p(\mathcal{R}_T;\mathbb{R}^n)} \leqslant\\ &\leqslant 2C_0 \|f\big(\Phi^{-1}(y),t\big)\|_{L_p(\mathcal{R}_T;\mathbb{R}^n)} + 2\nu\gamma(C_0+1) \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \|D_y^\alpha u\|_{L_p(\mathcal{R}_T;\mathbb{R}^n)}\,. \end{aligned}$$

И наконец, делая обратную замену переменных $x = \Phi^{-1}(y)$, получаем оценку из утверждения леммы с некоторой постоянной $C' > 0$, зависящей только от n, p и γ. Лемма доказана.

Заметим, что норму линейного непрерывного на $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$ функционала $f \in W_p^{-1}(\Omega)$ при $1 < p < \infty$ можно определить как

$$\|f\|_{W_p^{-1}(\Omega)} = \sup_{\substack{u \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega) \\ \|u\|_{W^1_{p'}(\Omega)} \neq 0}} \frac{|\langle f, u\rangle|}{\|u\|_{W^1_{p'}(\Omega)}}\,, \tag{3.2.53}$$

если пространство Соболева $\overset{\circ}{W}{}^1_{p'}(\Omega)$ определено как замыкание в $W^1_{p'}(\Omega)$ его подпространства $\overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega)$, $p' = p/(p-1)$. Заметим также, что сужение функционала $f \in W_p^{-1}(\Omega)$ на подпространство

$$\overset{\circ}{C}{}^\infty_\Omega(\omega) = \{u \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega)\colon\ \operatorname{supp} u \subset \overline{\omega}\},$$

где ω — подобласть в Ω, можно считать элементом $W_p^{-1}(\omega)$, так как подпространство сужений на ω функций из $\overset{\circ}{C}{}^\infty_\Omega(\omega)$ всюду плотно в $\overset{\circ}{W}{}^1_{p'}(\omega)$.

Лемма 3.2.3. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — произвольная область, $n \geqslant 2$, $1 < p < \infty$. И пусть $\{\omega_j\}_{j=1}^\infty$ — какое-либо локально-конечное открытое покрытие области Ω, кратность которого не превосходит числа N. Тогда для любого функционала $f \in W_p^{-1}(\Omega)$ справедливо неравенство*

$$\sum_{j=1}^\infty \|f_j\|^p_{W_p^{-1}(\omega_j\cap\Omega)} \leqslant MN\|f\|^p_{W_p^{-1}(\Omega)}\,, \tag{3.2.54}$$

где f_j — сужение функционала f на $\overset{\circ}{C}{}^\infty_\Omega(\omega_j \cap \Omega)$, а постоянная $M > 0$ зависит только от n и p.

Доказательство. Пусть $f \in W_p^{-1}(\Omega)$. Рассматривая $\overset{\circ}{C}{}^\infty_{\mathbb{R}^n}(\Omega)$ как подпространство в $W^1_{p'}(\mathbb{R}^n)$, определим на $\overset{\circ}{C}{}^\infty_{\mathbb{R}^n}(\Omega)$ функционал F с помощью тождества

$$\langle F, u\rangle = \langle F, R_\Omega u\rangle \quad \forall\, u \in \overset{\circ}{C}{}^\infty_{\mathbb{R}^n}(\Omega),$$

где через R_Ω обозначен оператор сужения на Ω функций, определенных в $\mathbb{R}^n$. Поскольку $R_\Omega\Big(\overset{\circ}{C}{}^\infty_{\mathbb{R}^n}(\Omega)\Big)$ и $f \in W_p^{-1}(\Omega)$, то функционал F непрерывен на подпространстве $\overset{\circ}{C}{}^\infty_{\mathbb{R}^n}(\Omega)$. Точнее,

$$|\langle F, u\rangle| \leqslant \|f\|_{W_p^{-1}(\Omega)}\|u\|_{W^1_{p'}(\mathbb{R}^n)} \quad \forall\, u \in \overset{\circ}{C}{}^\infty_{\mathbb{R}^n}(\Omega). \tag{3.2.55}$$

Поэтому в силу теоремы Хана–Банаха (см., например, [36]) существует такой функционал $\widetilde{F} \in W_p^{-1}(\mathbb{R}^n)$, что

$$\langle \widetilde{F}, u\rangle = \langle F, u\rangle \quad \forall\, u \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}_{\mathbb{R}^n}(\Omega).$$

При этом из (3.2.55) и теоремы Хана–Банаха будет следовать, что

$$|\langle \widetilde{F}, u\rangle| \leqslant \|f\|_{W_p^{-1}(\Omega)} \|u\|_{W^1_{p'}(\mathbb{R}^n)} \quad \forall\, u \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}_{\mathbb{R}^n}(\Omega). \tag{3.2.56}$$

Используя теорему об L_p-мультипликаторах преобразования Фурье [27], нетрудно убедиться, что функционал $\widetilde{F} \in W_p^{-1}(\mathbb{R}^n)$ при $1 < p < \infty$ можно представить в виде $\widetilde{F} = v - \Delta v$, где $v \in W_p^1(\mathbb{R}^n)$ и

$$\|v\|^p_{W_p^1(\mathbb{R}^n)} \leqslant M \|\widetilde{F}\|^p_{W_p^{-1}(\mathbb{R}^n)}$$

с некоторой постоянной $M > 0$, зависящей только от n и p. Из (3.2.56) следует тогда, что

$$\|v\|^p_{W_p^1(\mathbb{R}^n)} \leqslant M \|f\|^p_{W_p^{-1}(\Omega)}\,. \tag{3.2.57}$$

Для сужения f_j функционала f на $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}_{\Omega}(\omega_j \cap \Omega)$ имеем

$$\langle f_j\,, R_\Omega u\rangle = \langle \widetilde{F}, u\rangle \quad \forall\, u \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}_{\Omega}(\omega_j \cap \Omega),$$

откуда находим

$$\langle f_j\,, R_\Omega u\rangle = \int\limits_{\omega_j \cap \Omega} \big[v(x)u(x) + \big(\nabla v(x), \nabla u(x)\big)\big]\, dx \quad \forall\, u \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}_{\Omega}(\omega_j \cap \Omega),$$

где $(\,.\,,\,.\,)$ — скалярное произведение $\mathbb{R}^n$. Поэтому в силу (3.2.53) имеем

$$\|f_j\|^p_{W_p^{-1}(\omega_j \cap \Omega)} \leqslant \|v\|^p_{W_p^1(\omega_j \cap \Omega)}\,.$$

А так как

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|v\|^p_{W_p^1(\omega_j \cap \Omega)} \leqslant N \|v\|^p_{W_p^1(\Omega)}\,,$$

то из (3.2.53) получаем неравенство (3.2.54). Лемма доказана.

Замечание. В лемме 3.2.3 область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ может быть как ограниченной, так и неограниченной, причем без каких-либо ограничений на $\partial\Omega$. То же самое можно сказать и о подобластях ω_j . Случай конечного покрытия тривиален. Как для неограниченной, так и для ограниченной Ω представляет интерес только случай бесконечного покрытия.

Теперь все готово для доказательства априорной оценки сильного решения начально-краевой задачи (3.2.1) в произвольной области с гладкой границей. А именно, справедлива

Лемма 3.2.4. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — любая ограниченная или неограниченная область с границей из класса C^3, $n \geqslant 2$, $1 < p < \infty$, $\nu > 0$, $Q_T = \Omega \times (0, T)$. Существует такая постоянная $C > 0$, зависящая только от n, p и Ω, что всякое сильное решение*

$$\{v, \nabla q\} \in V_p(Q_T) \times L_p(Q_T; \mathbb{R}^n)$$

задачи (3.2.1) *с правой частью $f \in L_p(Q_T; \mathbb{R}^n)$ удовлетворяет неравенству*

$$\begin{aligned} \|u\|_{\overset{\circ}{E}_{p,\nu}(Q_T;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla_x q\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)} \leqslant C\big[\|f\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)}+ \\ +\nu\|v\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla_x q\|_{L_p((0,T);W_p^{-1}(\Omega))}\big]. \end{aligned} \tag{3.2.58}$$

Доказательство. Достаточно доказать лемму для случая неограниченной $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Пусть $\{B_j\}_{j=1}^{\infty}$ — локально-конечное покрытие области Ω открытыми шарами B_j радиуса $\delta > 0$ с равномерно ограниченной числом N кратностью покрытия и такое, что центр шара B_j лежит на $\partial\Omega$, если $B_j \cap \partial\Omega \neq \varnothing$, причем открытые шары B'_j радиуса $\delta/2$, центры которых совпадают с центрами шаров B_j , также образуют покрытие области Ω. Очевидно, кратность покрытия $\{B'_j\}_{j=1}^{\infty}$ равномерно ограничена тем же числом N, которое зависит от Ω и δ. Таким образом,

$$\overline{\Omega} \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\,, \quad \overline{\Omega} \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B'_j\,.$$

Так как граница $\partial\Omega \in C^3$, то найдется такое число $\delta_0 > 0$, что множество $B_j \cap \Omega$ связно для каждого $j \geqslant 1$ при любом значении радиуса $\delta \leqslant \delta_0$. Пусть $\{\eta_j\}_{j=1}^{\infty}$ — разбиение единицы в области Ω, обладающее следующими свойствами:

(a) $\eta_j \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\Omega; \mathbb{R}^n)$, $j \geqslant 1$;

(б) $\operatorname{supp}\eta_j = \overline{B}_j\,,\ j \geqslant 1;$

(в) $0 \leqslant \eta_j \leqslant 1,\ j \geqslant 1;$

(г) $\eta_j(x) = 1,\ x \in \overline{B'}_j\,,\ j \geqslant 1;$

(д) $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \eta_j(x) = 1,\ x \in \overline{\Omega};$

(е) $\sup\limits_{\substack{x\in B_j\\ j\geqslant 1}} \sum\limits_{|\alpha|\leqslant 3} |D_x^\alpha \eta_j(x)| \leqslant M_\delta\,;$

(ж) $\dfrac{\partial\eta_j}{\partial\nu_0}\Big|_{\partial\Omega} = 0$, если $B_j \cap \partial\Omega \neq \varnothing,\ \ j \geqslant 1;$

где постоянная $M_\delta > 0$ зависит только от Ω и δ, ν_0 — единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Разбиение единицы $\{\eta_j\}_{j=1}^{\infty}$ с перечисленными свойствами существует для любого $\delta \leqslant \delta_0$,так как граница $\partial\Omega \in C^3$. Причем найдется такое положительное число $\delta_1 \leqslant \delta_0$, что при условии $B_j \cap \partial\Omega \neq \varnothing$ область $B_j \cap \Omega$ для любого $\delta \leqslant \delta_1$ будет звездна относительно некоторого открытого шара $K_j \subset B_j$ радиуса, центр которого лежит на внутренней нормали к $\partial\Omega$, проведенной из центра шара B_j , а расстояние между центрами шаров B_j и K_j равно $\delta/2$.

Если $B_j \cap \partial\Omega \neq \varnothing$, то область $B_j \cap \Omega$ конгруэнтна области

$$b_j = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n\colon\ x_n > \varphi_j(x'),\ |x| < \delta\},$$

где функция $\varphi_j \in C^3(\mathbb{R}^{n-1})$, $\varphi_j(0) = 0$ и $\varphi_j(x') = 0$ при $|x'| \geqslant 2\delta$, а касательная к ∂b_j в точке $x = 0$ гиперплоскость совпадает с гиперплоскостью $x_n = 0$, т. е. $\nabla_{x'}\varphi_j(0) = 0$.

Обозначим $b'_j = b_j \cap \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ |x| < \delta/2\}$. Ввиду того, что граница $\partial\Omega$ из класса C^3 и $\nabla_{x'}\varphi_j(0) = 0$, найдется такое положительное число $\delta_2 \leqslant \delta_1$, что каждая из областей b_j будет удовлетворять условию

$$\sup_{x'\in\mathbb{R}^{n-1}} |\nabla_{x'}\varphi_j(x')| \leqslant \frac{1}{2(3C_0+1)} \tag{3.2.59}$$

при $\delta \leqslant \delta_2$, где C_0 — постоянная из оценки (3.2.54). При этом

$$\sup_{x'\in\mathbb{R}^{n-1}} \sum_{2\leqslant|\alpha|\leqslant 3} |D_{x'}^\alpha \varphi(x')| \leqslant \gamma \tag{3.2.60}$$

для всех областей b_j, где постоянная γ зависит только от Ω и δ. В дальнейшем будем считать, что $\delta = \delta_2$, т. е. в оставшейся части доказательства леммы число δ будет фиксированным.

Умножая обе части системы (3.2.1) на функцию η_j, получим

$$\begin{cases} (v\eta_j)_t - \nu\Delta(v\eta_j) + \nabla(q_j\eta_j) = f\eta_j + \\ +q_j\nabla\eta_j - \nu v\Delta\eta_j - 2\nu(\nabla\eta_j, \nabla)v, \\ \operatorname{div}(v\eta_j) = (v, \nabla\eta_j), \end{cases} \tag{3.2.61}$$

где введено обозначение

$$q_j(x,t) = q(x,t) - \frac{1}{\operatorname{mes}(B_j \cap \Omega)} \int\limits_{B_j\cap\Omega} q(y,t)\,dy, \ x \in B_j \cap \Omega, \ t \in (0,T), \ j \geqslant 1.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{B_j\cap\Omega} q(x,t)\,dx = 0, \quad t \in (0,T), \ j \geqslant 1. \tag{3.2.62}$$

Функцию $\rho_0 \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ выберем таким образом, чтобы

$$\operatorname{supp}\rho_0 \subset \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ |x| < 1\}, \qquad \int\limits_{|x|<1} \rho_0(x)\,dx = 1.$$

Функции ρ_j, $j \geqslant 1$ определим через ρ_0 с помощью равенств

$$\rho_j(x) = \begin{cases} \Bigl(\dfrac{2}{\delta}\Bigr)^n \rho_0\Bigl(\dfrac{x-a^j}{\delta/2}\Bigr), \ a^j \text{ — центр } B_j, \ B_j \cap \Omega = \varnothing, \\ \Bigl(\dfrac{4}{\delta}\Bigr)^n \rho_0\Bigl(\dfrac{x-a^j}{\delta/4}\Bigr), \ a^j \text{ — центр } K_j, \ B_j \cap \Omega \neq \varnothing. \end{cases}$$

Используя теорему 1.2.1 из первой главы, линейные операторы

$$T_j\colon\ \overset{\circ}{W}{}^l_p(B_j \cap \Omega) \to \overset{\circ}{W}{}^{l+1}_p(\Omega \cap B_j; \mathbb{R}^n), \quad j \geqslant 1,$$

определим с помощью равенств

$$T_j\,g(x) = \int\limits_{B_j\cap\Omega} g(y) \Bigl\{ \frac{x-y}{|x-y|^n} \int\limits_{|x-y|}^{\infty} \rho_j\Bigl(y + \xi\frac{x-y}{|x-y|}\Bigr)\xi^{n-1}\,d\xi \Bigr\} dy, \ j \geqslant 1.$$

Нормы операторов таких T_j ограничены в совокупности постоянной, зависящей только от n, p, δ и l, при этом

$$\mathrm{div} T_j\, g(x) = g(x), \quad x \in B_j \cap \Omega,\ j \geqslant 1,$$

если функция g удовлетворяет условию

$$\int\limits_{B_j \cap \Omega} g(x)\, dx = 0, \quad j \geqslant 1.$$

Обозначим $v^j = v\eta_j - T_j\,(v, \nabla\eta_j)$, тогда

$$\begin{cases} v^j_t - \nu\Delta v^j + \nabla(q_j\eta_j) = f^j(x,t), \\ \mathrm{div}\, v^j = 0, \quad x \in B_j \cap \Omega,\ t \in (0,T),\ j \geqslant 1, \end{cases} \tag{3.2.63}$$

где векторные поля f^j имеют вид

$$\begin{aligned} f^j(x,t) = f\eta_j + q_j\nabla\eta_j - \nu v\Delta\eta_j - \nu(\nabla\eta_j\, \nabla)v - T_j\,(f, \nabla\eta_j) + \\ + T_j\,\mathrm{div}(q_j\nabla\eta_j) - T_j(q_j\Delta\eta_j) + \nu[\Delta_x\, T_j](v, \nabla\eta_j) + \\ + \nu T_j\,(v^j, \nabla\Delta\eta_j) + 2\nu\sum_{k=1}^{n} T_j\Big(\frac{\partial v}{\partial x_k}, \frac{\partial\nabla\eta_j}{\partial x_k}\Big), \end{aligned} \tag{3.2.64}$$

а через $[.\,,.]$ обозначен коммутатор операторов.

Далее рассмотрим отдельно два случая: $B_j \cap \Omega \neq \varnothing$ и $B_j \cap \Omega = \varnothing$.

1. Пусть $B_j \cap \Omega \neq \varnothing$. Поскольку система (3.2.1) инвариантна относительно сдвигов и ортогональных преобразований по пространственным переменным, будем считать, не теряя общности, что область $B_j \cap \Omega$ совпадает с некоторой областью b_j.

Обозначим $\mathcal{B}_j = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n\colon\ x_n > \varphi_j(x')\},.\ j \geqslant 1$. Очевидно,

$$b_j = \mathcal{B}_j \cap \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ |x| < \delta\}.$$

Заметим, что $v^j \in V_p(\mathcal{B}_j^T)$ и $\nabla(q_j\eta_j) \in L_p(Q_T; \mathbb{R}^n)$, где $\mathcal{B}_j^T = \mathcal{B}_j \times (0,T)$, $b_j^T = b_j \times (0,T)$. При этом из начальных условий (3.2.1) следует, что

$$v^j\big|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathcal{B}_j\,.$$

В силу (3.2.59),(3.2.60) к системе (3.2.63) применима лемма 3.2.2, согласно которой

$$\begin{aligned} \nu\sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha_x v^j\|_{L_p(\mathcal{B}_j^T;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla_x\,(q_j\eta_j)\|_{L_p(\mathcal{B}_j^T;\mathbb{R}^n)} \leqslant \\ \leqslant C_1\big[\|f^j\|_{L_p(\mathcal{B}_j^T;\mathbb{R}^n)} + \nu\sum_{|\alpha|\leqslant 1} \|D^\alpha_x v^j\|_{L_p(\mathcal{B}_j^T;\mathbb{R}^n)}\big] \end{aligned} \tag{3.2.65}$$

с постоянной $C_1 > 0$, зависящей только от n, p и γ. Причем $\mathcal{B}_j^T$ в (3.2.65) можно заменить на b_j^T.

Учитывая, что $v^j = v\eta_j - T_j(v, \nabla\eta_j)$, получаем в силу теорем 1.1.1,1.2.1 первой главы

$$\sum_{|\alpha|=2} \|D_x^\alpha(v\eta_j)\|_{L_p(b_j^T;\mathbb{R}^n)} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{|\alpha|=2} \|D_x^\alpha v^j\|_{L_p(b_j^T;\mathbb{R}^n)} + C_2 \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \|D_x^\alpha v\|_{L_p(b_j^T;\mathbb{R}^n)}, \tag{3.2.66}$$
$$\sum_{|\alpha|\leqslant 1} \|D_x^\alpha v^j\|_{L_p(b_j^T;\mathbb{R}^n)} \leqslant C_3 \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \|D_x^\alpha v\|_{L_p(b_j^T;\mathbb{R}^n)},$$

где положительные постоянные C_2 и C_3 зависят только от n, p, δ и M_δ. Из (3.2.65),(3.2.66) находим

$$\nu \sum_{|\alpha|=2} \|D_x^\alpha(v\eta_j)\|_{L_p(b_j^T;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla_x (q_j\eta_j)\|_{L_p(b_j^T;\mathbb{R}^n)} \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \big[\|f^j\|_{L_p(b_j^T;\mathbb{R}^n)} + \nu \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \|D_x^\alpha v\|_{L_p(b_j^T;\mathbb{R}^n)}\big]$$

с постоянной $C_4 > 0$, зависящей только от n, p, γ, δ и M_δ, откуда и из (3.2.61) получаем

$$\|\eta_j v_t\|_{L_p(b_j^T;\mathbb{R}^n)} + \nu \sum_{|\alpha|=2} \|\eta_j D_x^\alpha v\|_{L_p(b_j^T;\mathbb{R}^n)} + \|\eta_j \nabla_x q_j\|_{L_p(b_j^T;\mathbb{R}^n)} \leqslant$$
$$\leqslant C_5 \big[\|f\|_{L_p(b_j^T;\mathbb{R}^n)} + \|f^j\|_{L_p(b_j^T;\mathbb{R}^n)} + \nu \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \|D_x^\alpha v\|_{L_p(b_j^T;\mathbb{R}^n)} + \|q_j\|_{L_p(b_j^T)}\big] \tag{3.2.67}$$

с постоянной $C_5 > 0$, зависящей только от n, p, γ, δ и M_δ. Из (3.2.64) и теорем 1.1.1,1.2.2,1.2.3 первой главы следует, что

$$\|f\|_{L_p(b_j^T;\mathbb{R}^n)} \leqslant C_6 \big[\|f\|_{L_p(b_j^T;\mathbb{R}^n)} + \nu \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \|D_x^\alpha v\|_{L_p(\sigma_j^T;\mathbb{R}^n)} + \|q_j\|_{L_p(b_j^T)}\big]$$

с постоянной $C_6 > 0$, зависящей только от n, p, δ и M_δ, где

$$\sigma_j^T = \big(\partial\mathcal{B}_j \cap \{x \in \mathbb{R}^n : ,\ |x| < \delta\}\big) \times (0, T),$$

откуда и из (3.2.67) находим

$$\|v_t\|_{L_p((b_j')^T;\mathbb{R}^n)} + \nu \sum_{|\alpha|\leqslant 2} \|D_x^\alpha v\|_{L_p((b_j')^T;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla_x q\|_{L_p((b_j')^T;\mathbb{R}^n)} \leqslant$$
$$\leqslant C_7 \big[\|f\|_{L_p(b_j^T;\mathbb{R}^n)} + \nu \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \|D_x^\alpha v\|_{L_p(\sigma_j^T;\mathbb{R}^n)} + \|q_j\|_{L_p(b_j^T)}\big] \tag{3.2.68}$$

с постоянной $C_7 > 0$, зависящей только от n, p, γ, δ и M_δ.

Пользуясь теоремой вложения $W_p^1(b_j) \hookrightarrow L_p(\partial b_j)$, интерполяционной теоремой 5.25 из [50], неравенство (3.2.68) можно переписать в виде

$$\|v_t\|_{L_p((b'_j)^T;\mathbb{R}^n)} + \nu \sum_{|\alpha|\leqslant 2} \|D_x^\alpha v\|_{L_p((b'_j)^T;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla_x q\|_{L_p((b'_j)^T;\mathbb{R}^n)} \leqslant$$
$$\leqslant C_8\big[\|f\|_{L_p(b_j^T;\mathbb{R}^n)} + \nu \sum_{|\alpha|=1} \|D_x^\alpha v\|_{L_p(\sigma_j^T;\mathbb{R}^n)} +$$
$$+\nu\|v\|_{L_p(b_j^T;\mathbb{R}^n)} + \|q_j\|_{L_p(b_j^T)}\big]$$

с постоянной $C_8 > 0$, зависящей только от n, p, γ, δ и M_δ, откуда в силу (3.2.62) и следствия из теоремы 1.1.1 первой главы (см. с. 18) получаем

$$\|v_t\|_{L_p((b'_j)^T;\mathbb{R}^n)} + \nu \sum_{|\alpha|\leqslant 2} \|D_x^\alpha v\|_{L_p((b'_j)^T;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla_x q\|_{L_p((b'_j)^T;\mathbb{R}^n)} \leqslant$$
$$\leqslant C_9\big[\|f\|_{L_p(b_j^T;\mathbb{R}^n)} + \nu \sum_{|\alpha|=1} \|D_x^\alpha v\|_{L_p(\sigma_j^T;\mathbb{R}^n)} + \qquad (3.2.69)$$
$$+\nu\|v\|_{L_p(b_j^T;\mathbb{R}^n)} + \|q_j\|_{L_p((0,T);W_p^{-1}(b_j;\mathbb{R}^n))}\big]$$

с постоянной $C_9 > 0$, зависящей только от n, p, γ, δ и M_δ.

Ввиду инвариантности неравенства (3.2.69) относительно сдвигов и ортогональных преобразований по пространственным переменным получаем окончательно

$$\|v_t\|^p_{L_p((\Omega'_j)^T;\mathbb{R}^n)} + \nu^p \sum_{|\alpha|\leqslant 2} \|D_x^\alpha v\|^p_{L_p((\Omega'_j)^T;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla_x q\|^p_{L_p((\Omega'_j)^T;\mathbb{R}^n)} \leqslant$$
$$\leqslant C_{10}\big[\|f\|_{L_p(\Omega_j^T;\mathbb{R}^n)} + \nu^p \sum_{|\alpha|=1} \|D_x^\alpha v\|^p_{L_p(S_j^T;\mathbb{R}^n)} + \qquad (3.2.70)$$
$$+\nu^p\|v\|^p_{L_p(\Omega_j^T;\mathbb{R}^n)} + \|q_j\|^p_{L_p((0,T);W_p^{-1}(\Omega_j;\mathbb{R}^n))}\big]$$

с постоянной $C_{10} > 0$, зависящей только от n, p, γ, δ и M_δ, где используются обозначения:

$$\Omega_j = B_j \cap \Omega, \quad \Omega'_j = B_j \cap \Omega';$$
$$S_j = B_j \cap \partial\Omega, \quad S_j^T = S_j \times (0,T);$$
$$\Omega_j^T = \Omega_j \times (0,T), \quad (\Omega'_j)^T = \Omega'_j \times (0,T).$$

Осталось рассмотреть более простой случай, когда шар B_j целиком содержится в области Ω.

2. Пусть $B_j \cap \partial\Omega = \varnothing$. Поскольку система (3.2.1) инвариантна относительно сдвигов пространственным переменным, можно считать, не ограничивая общности, что шар B_j лежит в полупространстве $\mathbb{R}^n$. Применяя к системе (3.2.63) оценку (3.2.15) и повторяя рассуждения пункта 1, получаем

$$\begin{gathered} \|v_t\|^p_{L_p((B'_j)^T;\mathbb{R}^n)} + \nu^p \sum_{|\alpha|\leqslant 2} \|D^\alpha_x v\|^p_{L_p((B'_j)^T;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla_x q\|^p_{L_p((B'_j)^T;\mathbb{R}^n)} \leqslant \\ \leqslant C_{11}\big[\|f\|_{L_p(B^T_j;\mathbb{R}^n)} + \nu^p \|v\|^p_{L_p(B^T_j;\mathbb{R}^n)} + \|q_j\|^p_{L_p((0,T);W_p^{-1}(\Omega_j;\mathbb{R}^n))}\big] \end{gathered} \tag{3.2.71}$$

с постоянной $C_{11} > 0$, зависящей только от n, p, γ, δ и M_δ, где используются обозначения

$$B^T_j = B_j \times (0,T), \quad (B'_j)^T = B'_j \times (0,T).$$

Таким образом, из полученных в пунктах 1,2 оценок (3.2.70), (3.2.71) и леммы 3.2.3 следует, что

$$\begin{gathered} \|v_t\|^p_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)} + \nu^p \sum_{|\alpha|\leqslant 2} \|D^\alpha_x v\|^p_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla_x q\|^p_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)} \leqslant \\ \leqslant C_{12} N\big[\|f\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)} + \nu^p \sum_{|\alpha|=1} \|D^\alpha_x v\|^p_{L_p(S_T;\mathbb{R}^n)} + \\ + \nu^p \|v\|^p_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)} + M\|q_j\|^p_{L_p((0,T);W_p^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^n))}\big], \end{gathered} \tag{3.2.72}$$

где $S_T = \partial\Omega \times (0,T)$ — боковая поверхность цилиндра Q_T, постоянная $C_{12} = \max\{C_{10}, C_{11}\}$, M — постоянная из оценки (3.2.54). Но для любого числа $\sigma > 0$ найдется (см. [4]) постоянная $K_\sigma > 0$, зависящая только от σ, n, p и Ω, такая, что

$$\sum_{|\alpha|=1} \|D^\alpha_x v\|_{L_p(S_T;\mathbb{R}^n)} \leqslant \sigma \sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha_x v\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)} + K_\sigma \|v\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)}\,. \tag{3.2.73}$$

Из (3.2.72),(3.2.73) следует оценка (3.2.58), что завершает доказательство леммы в случае неограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Приведенное выше доказательство проходит и для ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, с той лишь разницей, что покрытие шарами $\{B_j\}$ будет не локально-конечным, а просто конечным. Лемма доказана.

Для области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с гладкой границей единственность сильного решения начально-краевой задачи (3.2.1) эквивалентна единственности слабого решения той же задачи. Точнее, справедлива следующая

Теорема 3.2.1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ - любая ограниченная или неограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^3$, $1 < p < \infty$, $n \geqslant 2$, $\nu > 0$, $T > 0$. Для начально-краевой задачи* (3.2.1) *сильное решение* $\{v, \nabla q\} \in V_p(Q_T) \times L_p(Q_T; \mathbb{R}^n)$ *единственно тогда и только тогда, когда единственно слабое решение*

$$v \in L_p\big((0,T); \overset{\circ}{J}_p(\Omega)\big). \tag{3.2.74}$$

Доказательство. Предположим, что векторное поле (3.2.74) удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_{Q_T} (v, u_t + \nu\Delta u)\, dx\, dt = 0 \quad \forall\, u \in V_{p'}(Q_T):\ u|_{t=T} = 0. \tag{3.2.75}$$

Функцию $\rho \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\mathbb{R}^1)$ выберем таким образом, чтобы $\operatorname{supp}\rho = [0,1]$, $\rho(t) > 0$ при $t \in (0,1)$ и

$$\int\limits_0^1 \rho(t)\, dt = 1.$$

Векторное поле v^ε определим как интеграл Лебега

$$v^\varepsilon(x,t) = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^T v(x,\tau)\rho\Big(\frac{t-\tau}{\varepsilon}\Big)\, d\tau \quad \dot{\forall}\, x \in \Omega,\ t \in (0,T), \tag{3.2.76}$$

где $0 < \varepsilon < T$. В силу (3.2.74) имеем

$$\frac{\partial^m v^\varepsilon}{\partial t^m} \in L_p\big((0,T); \overset{\circ}{J}_p(\Omega)\big)$$

для любого целого $m \geqslant 0$. Более того, векторные поля v^ε и v^ε_t сильно непрерывны по $t \in \mathbb{R}^1$ в норме $L_p(\Omega; \mathbb{R}^n)$ и $v^\varepsilon(x,t) = 0$, когда $t \leqslant 0$.

Тождество (3.2.76) выполняется, в частности, для всех u вида

$$u(x,t) = \frac{1}{\varepsilon} w(x)\int\limits_0^T g(\tau)\rho\Big(\frac{t-\tau}{\varepsilon}\Big)\, d\tau \tag{3.2.77}$$

с произвольными

$$w \in W^2_{p'}(\Omega; \mathbb{R}^n) \cap \overset{\circ}{J}{}^1_{p'}(\Omega), \quad g \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(0,T).$$

А так как $u \in V_{p'}(Q_T)$ и $u(x,t) = 0$ при $t \geqslant T$, то, подставляя (3.2.77) в (3.2.75) и меняя порядок интегрирования, получим, учитывая (3.2.76),

$$\int_0^T g(\tau)\,d\tau \int_\Omega \big[(v_t^\varepsilon, w) - \nu(v^\varepsilon, \Delta w)\big]\,dx = 0 \quad \forall\, g \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(0,T).$$

Поэтому

$$\int_\Omega \big[(v_t^\varepsilon, w) - \nu(v^\varepsilon, \Delta w)\big]\,dx = 0 \quad \forall\, w \in V_{p'}(Q_T)$$

при $0 \leqslant t \leqslant T$, откуда находим

$$\int_\Omega (v^\varepsilon, w - \nu\Delta w)\,dx = (F^\varepsilon, w)\,dx \quad \forall\, w \in V_{p'}(Q_T)$$

при $0 \leqslant t \leqslant T$, где векторное поле имеет F^ε вид

$$F^\varepsilon(x,t) = v^\varepsilon(x,t) - v_t^\varepsilon(x,t).$$

Очевидно, $F^\varepsilon(x,t)$ сильно непрерывно по $t \in \mathbb{R}^1$ в норме $L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)$.

Будем считать теперь, что $t \in [0,T]$ — фиксированный параметр. Тогда при каждом значении $t \in [0,T]$ векторное поле $v^\varepsilon \in \overset{\circ}{J}_p(\Omega)$ будет слабым решением стационарной задачи (2.2.3)–(2.2.4) с правой частью $F^\varepsilon \in L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)$. Из теоремы 2.2.1 следует, что

$$v^\varepsilon \in W_p^2(\Omega;\mathbb{R}^n) \cap \overset{\circ}{J}{}_p^1(\Omega) \quad \forall\, t \in [0,T].$$

Поэтому $v^\varepsilon \in V_p(Q_T)$ и при любых $t \in [0,T]$ имеем

$$\int_\Omega (v^\varepsilon - \nu\Delta v^\varepsilon - F^\varepsilon, w)\,dx = 0 \quad \forall\, w \in \overset{\circ}{J}{}^\infty(\Omega),$$

откуда по теореме де Рама [35] вытекает существование векторного поля $\nabla_x q^\varepsilon \in L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)$, такого, что $v^\varepsilon - \nu\Delta v^\varepsilon - F^\varepsilon = -\nabla_x q^\varepsilon$. А это означает, что пара $\{v^\varepsilon, \nabla_x q^\varepsilon\}$ будет сильным решением

$$\begin{gathered} v_t^\varepsilon - \nu\Delta v^\varepsilon + \nabla_x q^\varepsilon = 0,\ v^\varepsilon|_{t=0} = 0, \\ v^\varepsilon \in V_p(Q_T), \quad \nabla_x q^\varepsilon \in L_p(Q_T;\mathbb{R}^n). \end{gathered}$$

Из предположения теоремы о единственности сильного решения задачи (3.2.1) следует теперь, что $v^\varepsilon(x,t) = 0$ почти всюду в Q_T при любом значении $\varepsilon \in (0,T)$. В силу (3.2.76) имеем

$$\int\limits_{t-T}^{t} v(x,t-\tau)\rho\Big(\frac{\tau}{\varepsilon}\Big)\,d\tau = 0 \qquad \forall\, t \in [0,T]$$

почти всюду в Ω. Заметим, что $t - T \leqslant 0$, а $\rho(t) = 0$ при $t \leqslant 0$. Следовательно, свертка

$$\int\limits_{0}^{t} v(x,t-\tau)\rho\Big(\frac{\tau}{\varepsilon}\Big)\,d\tau = 0 \qquad \forall\, t \in [0,T]$$

почти всюду в Ω, откуда согласно теореме 152 из [45] (см. с. 415) следует, что $v(x,t) = 0$ почти всюду в Q_T.

Таким образом, из единственности сильного решения вытекает единственность слабого решения. Но в силу теоремы де Рама [35] и рефлексивности L_p при $1 < p < \infty$ имеем

$$\overset{\circ}{J}_p(\Omega)^\perp = \hat{G}_{p'}(\Omega), \quad \hat{G}_p(\Omega)^\perp = \overset{\circ}{J}_{p'}(\Omega), \quad p' = p/(p-1). \tag{3.2.78}$$

Поэтому сильное решение будет слабым, а тогда из единственности слабого решения вытекает единственность сильного решения. Теорема доказана.

Критерием однозначной разрешимости начально-краевой задачи (3.2.1) в классе сильных решений служит разложение $L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ в прямую сумму

$$L_p(\Omega;\mathbb{R}^n) = \overset{\circ}{J}_p(\Omega) \oplus \hat{G}_p(\Omega). \tag{3.2.79}$$

Чтобы сформулировать этот критерий, нам понадобится следующая

Теорема 3.2.2. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *— ограниченная или неограниченная область с границей* $\partial\Omega \in C^3$, $1 < p < \infty$, $n \geqslant 2$, $\nu \geqslant 0$, $T > 0$. *Если для области справедливо разложение* (3.2.79), *то существует постоянная* $C > 0$, *зависящая только от* n, p *и* Ω, *такая, что всякое сильное решение* $\{v, \nabla q\} \in V_p(Q_T) \times L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)$ *начально-краевой задачи* (3.2.1) *с правой частью* $f \in L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)$ *удовлетворяет неравенству*

$$\|u\|_{\overset{\circ}{E}_{p,\nu}(Q_T;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla_x\, q\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)} \leqslant Ce^{C\nu T}\|f\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)}\,. \tag{3.2.80}$$

Доказательство. Как установлено во второй главе,

$$L_p(\Omega;\mathbb{R}^n) = \overset{\circ}{J}_p(\Omega) \oplus \hat{G}_p(\Omega) \iff L_{p'}(\Omega;\mathbb{R}^n) = \overset{\circ}{J}_{p'}(\Omega) \oplus \hat{G}_{p'}(\Omega)$$

для любой $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ при $1 < p < \infty$, $n \geqslant 2$, где $p' = p/(p-1)$ — подробности см. в лемме 2.1.1 на с. 29. По предположению, справедливо разложение (3.2.79), а это значит, что всякое векторное поле $F \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p'}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ можно представить в виде

$$\begin{gathered} F(x) = u(x) + \nabla\psi(x), \quad x \in \Omega, \\ u \in W^1_{p'}(\Omega;\mathbb{R}^n) \cap \overset{\circ}{J}_{p'}(\Omega), \ \nabla\psi \in W^1_{p'}(\Omega;\mathbb{R}^n), \end{gathered} \tag{3.2.81}$$

с оценкой

$$\|\nabla\psi\|_{W^1_{p'}(\Omega;\mathbb{R}^n)} \leqslant C_1 \|F\|_{W^1_{p'}(\Omega;\mathbb{R}^n)}\,, \tag{3.2.82}$$

где постоянная $C_1 > 0$ зависит только от n, p и Ω.

Поскольку $\nabla_x q \in L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)$, то почти для всех $t \in (0,T)$ имеем

$$\|\nabla_x q(x,t)\|_{W_p^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^n)} = \sup_{\|F\|_{W^1_{p'}(\Omega;\mathbb{R}^n)}=1} \left| \int_\Omega \big(\nabla_x q(x,t), F(x)\big)\, dx \right|. \tag{3.2.83}$$

А из (3.2.81), учитывая, что $u \in \hat{\overset{\circ}{J}}_p(\Omega)$, получаем

$$\int_\Omega \big(\nabla_x q(x,t), F(x)\big)\, dx = \int_\Omega \big(\nabla_x q(x,t), \nabla\psi(x)\big)\, dx,$$

откуда и из (3.2.1) для почти всех $t \in (0,T)$ находим

$$\int_\Omega \big(\nabla_x q(x,t), F(x)\big)\, dx = \int_\Omega (f, \nabla\psi)\, dx + \nu \int_\Omega (\Delta_x v, \nabla\psi)\, dx, \tag{3.2.84}$$

так как $v_t \in \hat{\overset{\circ}{J}}_p(\Omega)$ почти для всех $t \in (0,T)$.

Ввиду соленоидальности v имеем

$$\int_\Omega (\Delta_x v, \nabla\psi)\, dx = \sum_{k=1}^n \int_\Omega \operatorname{div}_x\Big(\nabla_x v_k - \frac{\partial v}{\partial x_k}\Big) \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x_k}\, dx \tag{3.2.85}$$

почти для всех $t \in (0,T)$. Заметим, что

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_k \partial x_j} = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_k \partial x_j}\,,$$

откуда получаем равенство почти для всех $t \in (0,T)$. Заметим, что

$$\sum_{j,k=1}^{n} \Big(\frac{\partial v_k}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_k}\Big) \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_k \partial x_j} = 0,$$

которое можно переписать в виде

$$\sum_{k=1}^{n} \Big(\nabla_x v_k - \frac{\partial v}{\partial x_k}\,, \nabla \frac{\partial \psi}{\partial x_k}\Big) = 0,$$

где $(.\,,.)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Поэтому, интегрируя в правой части (3.2.85) по частям, получим

$$\Big|\int\limits_{\Omega} (\Delta_x v, \nabla \psi)\, dx\Big| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \Big|\nabla v_k - \frac{\partial v}{\partial x_k}\Big| \cdot \Big|\frac{\partial \psi}{\partial x_k}\Big|\, ds_x \tag{3.2.86}$$

почти для всех $t \in (0,T)$.

Из (3.2.82),(3.2.86) и теоремы вложения $W^1_{p'}(\Omega) \hookrightarrow L_{p'}(\partial\Omega)$ с учетом равенства $\|F\|_{W^1_{p'}(\Omega;\mathbb{R}^n)} = 1$ следует, что

$$\Big|\int\limits_{\Omega} (\Delta_x v, \nabla \psi)\, dx\Big| \leqslant C_2 \sum_{k=1}^{n} \|D^\alpha_x v\|_{L_{p'}(\Omega;\mathbb{R}^n)} \tag{3.2.87}$$

почти для всех $t \in (0,T)$ с постоянной $C_2 > 0$, зависящей только n, p и Ω. А из (3.2.83),(3.2.84) и (3.2.87) находим

$$\|\nabla_x\, q(x,t)\|_{W^{-1}_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} \leqslant C_1 \|f(x,t)\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} + C_2 \nu \sum_{|\alpha|=1} \|D^\alpha_x v\|_{L_p(\partial\Omega;\mathbb{R}^n)}$$

почти для всех $t \in (0,T)$. Поэтому

$$\begin{gathered} \|\nabla_x\, q(x,t)\|_{L_p\left((0,T);W^{-1}_p(\Omega;\mathbb{R}^n)\right)} \leqslant \\ \leqslant C_1 \|f(x,t)\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)} + C_2 \nu \sum_{|\alpha|=1} \|D^\alpha_x v\|_{L_p(S_T;\mathbb{R}^n)}\,, \end{gathered} \tag{3.2.88}$$

где $S_T = \partial\Omega \times (0,T)$. В силу (3.2.73),(3.2.88) и леммы 3.2.4 имеем

$$\|v\|_{\overset{\circ}{E}_{p,\nu}(Q_T;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla_x q\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)} \leqslant C\big[\|f\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)} + \|v\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)}\big] \qquad (3.2.89)$$

для всех $T > 0$ с постоянной $C > 0$, зависящей только от n, p и Ω. В частности,

$$\|v_t\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)} \leqslant C\big[\|f\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)} + \|v\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)}\big] \qquad (3.2.90)$$

для всех $T > 0$.

Заметим, что для всех $t \in (0,T)$ выполняется неравенство

$$\|v(x,t)\|^p_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} = \int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial\tau}\|v(x,\tau)\|^p_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} d\tau \leqslant$$

$$\leqslant p\int\limits_0^t \|v(x,\tau)\|^{p-1}_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} \|\frac{\partial v}{\partial\tau}(x,\tau)\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} d\tau \leqslant p\|v\|^{p-1}_{L_p(Q_t;\mathbb{R}^n)}\|v_t\|_{L_p(Q_t;\mathbb{R}^n)}\,,$$

откуда и из (3.2.90) находим

$$\|v(x,t)\|^p_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} \leqslant Cp\|v\|^{p-1}_{L_p(Q_t;\mathbb{R}^n)}\|f\|_{L_p(Q_t;\mathbb{R}^n)} + Cp\nu\|v\|^p_{L_p(Q_t;\mathbb{R}^n)} \qquad (3.2.91)$$

для всех $t \in (0,T)$. Обозначим

$$z(t) = \|v\|^p_{L_p(Q_t;\mathbb{R}^n)}\,, \quad \beta(t) = \|f\|_{L_p(Q_t;\mathbb{R}^n)}\,.$$

Очевидно, $z \in W^1_1(0,T)$. В частности, $z \in C[0,T]$, причем $z(0) = 0$. Теперь (3.2.91) можно переписать в виде

$$z'(t) \leqslant Cp\big(z(t)\big)^{\frac{1}{p'}}\beta(t) + Cp\nu_0(t), \quad t \in (0,T),$$

что эквивалентно неравенству

$$\frac{d}{dt}\big(z(t)e^{-Cp\nu t}\big) \leqslant Cp\big(z(t)\big)^{\frac{1}{p'}}\beta(t)e^{-Cp\nu t}, \quad t \in (0,T). \qquad (3.2.92)$$

Обозначим $y(t) = z(t)e^{-Cp\nu t}$. Очевидно, $y \in W^1_1(0,T)$ и, в частности, $y \in C[0,T]$, причем $y(0) = 0$. Из (3.2.92) находим

$$y'(t) \leqslant Cp\big(y(t)\big)^{\frac{1}{p'}}\beta(t)e^{-C\nu t}, \quad t \in (0,T),$$

откуда получаем

$$\frac{d}{dt}\big(y(t)\big)^{\frac{1}{p}} \leqslant Ce^{-C\nu t}\beta(t), \quad t \in (0,T).$$

Поскольку $y(0) = 0$, то в силу последнего неравенства имеем

$$\big(y(t)\big)^{\frac{1}{p}} \leqslant C\int\limits_0^T e^{-C\nu t}\beta(t)\,dt.$$

Но $\beta(t) \leqslant \beta(T)$ для всех $t \in (0,T)$, поэтому

$$\big(y(t)\big)^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{1-e^{-C\nu t}}{\nu}\beta(T),$$

что эквивалентно неравенству

$$\big(z(t)\big)^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{e^{C\nu t}-1}{\nu}\beta(T),$$

которое можно переписать в виде

$$\nu\|v\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)} \leqslant (e^{C\nu t}-1)\|f\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)}\,,$$

откуда и из (3.2.89) следует оценка (3.2.80). Теорема доказана.

Замечание 3.2.1. Условие (3.2.79) в теореме 3.2.2 можно немного ослабить. А именно, утверждение теоремы 3.2.2 останется справедливым, если вместо (3.2.79) потребовать, чтобы

$$L_{p'}(\Omega;\mathbb{R}^n) = \overset{\circ}{J}_{p'}(\Omega) + \hat{G}_{p'}(\Omega). \tag{3.2.93}$$

Действительно, из (3.2.93) и теоремы 5.20 из [36] (см. с. 156) для любого $F \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p'}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ следует (3.2.81), удовлетворяющих неравенству

$$\|u\|_{L_{p'}(\Omega;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla\psi\|_{L_{p'}(\Omega;\mathbb{R}^n)} \leqslant C_3\|F\|_{L_{p'}(\Omega;\mathbb{R}^n)} \tag{3.2.94}$$

с постоянной$C_3 > 0$, зависящей только от n, p и Ω. Из (3.2.93), (3.2.94) и схемы доказательства леммы 2.1.3 на с. 38 следует, что $\nabla\psi \in W^1_{p'}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ и имеет место (3.2.82).

Из теорем 3.2.1, 3.2.2 и замечания 3.2.1 вытекает

Следствие 3.2.1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная или неограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^3$, $1 < p < \infty$, $n \geqslant 2$, $\nu > 0$, $T > 0$. Для единственности слабого решения $v \in L_p\big((0,T);\overset{\circ}{J}_p(\Omega)\big)$ начально-краевой задачи(3.2.1) достаточно, чтобы область Ω удовлетворяла условию (3.2.93).

Как видно из §1 этой главы, не всякая область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, даже со сколь угодно гладкой $\partial\Omega$, удовлетворяет условию (3.2.93) при определенных значениях показателя p. Таким образом, в зависимости от значения показателя p условие (3.2.93) разделяет области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с гладкими границами на два класса: удовлетворяющие и не удовлетворяющие (3.2.93). К классу областей $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих (3.2.93) при любых значениях $n \geqslant 2$ и $p \in (1,\infty)$, относятся области с компактными границами.

Теорема 3.2.3. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная или неограниченная область с компактной границей $\partial\Omega \in C^3$, $1 < p < \infty$, $n \geqslant 2$, $\nu > 0$, $T > 0$. Для любого $f \in L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)$ существует единственное сильное решение $\{v,\nabla q\} \in V_p(Q_T) \times L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)$ начально-краевой задачи*(3.2.1)*. Это решение удовлетворяет неравенству* (3.2.80).

Доказательство. Напомним (см. §1 этой главы), что как для ограниченной, так и для неограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с компактной границей $\partial\Omega \in C^1$ разложение в прямую сумму (3.2.79) справедливо при любых $n \geqslant 2$ и $p \in (1,\infty)$. Обозначим

$$\mathfrak{L}_p(Q_T;\mathbb{R}^n) = \{f = u_t - \nu\Delta_x u + \nabla_x \psi \colon u \in V_p(Q_T),\ u|_{t=0},\ \nabla_x \psi \in L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)\}.$$

В силу теоремы 3.2.2 подпространство $\mathfrak{L}_p(Q_T;\mathbb{R}^n)$ замкнуто в $L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)$. Покажем, что подпространство $\mathfrak{L}_p(Q_T;\mathbb{R}^n)$ всюду плотно в $L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)$. Действительно, пусть векторное поле $w \in L_{p'}(Q_T;\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_{Q_T} (w,f)\,dxdt = 0 \quad \forall\, f \in \mathfrak{L}_p(Q_T;\mathbb{R}^n). \tag{3.2.95}$$

В частности, интегральное тождество (3.2.95) будет выполняться для всех $f = \nabla_x \psi \in L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)$, откуда следует, что $w \in L_{p'}\big((0,T);\overset{\circ}{J}_p(\Omega)\big)$. А тогда

$$\int\limits_{Q_T} (w, u_t - \nu\Delta_x u)\,dxdt = 0 \quad \forall\, u \in V_p(Q_T) \colon u|_{t=0} = 0. \tag{3.2.96}$$

Пусть $v(x,t) = w(x, T-t)$. Тогда $v \in L_{p'}\big((0,T); \overset{\circ}{J}_p(\Omega)\big)$. Делая в тождестве (3.2.96) замену переменной интегрирования t, получим

$$\int\limits_{Q_T} (v, u_t + \nu\Delta_x u)\, dxdt = 0 \quad \forall\, u \in V_p(Q_T)\colon\, u|_{t=T} = 0. \tag{3.2.97}$$

Поэтому $v \in V_p(Q_T)$ является слабым решением задачи (3.2.1).

В силу следствия 3.2.1 слабое решение $v \in L_{p'}\big((0,T); \overset{\circ}{J}_p(\Omega)\big)$ задачи (3.2.1) будет единственным, т. е. из (3.2.97) следует, что $w(x,t) = 0$ почти всюду в Q_T. Тогда из (3.2.95) следует, что подпространство $\mathfrak{L}_p(Q_T;\mathbb{R}^n)$ всюду плотно в $L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)$. Но подпространство $\mathfrak{L}_p(Q_T;\mathbb{R}^n)$ замкнуто, поэтому $\mathfrak{L}_p(Q_T;\mathbb{R}^n) = L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)$. Таким образом, для любого $f \in L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)$ существует единственное сильное решение $\{v, \nabla q\} \in V_p(Q_T) \times L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)$ начально-краевой задачи (3.2.1). В силу теоремы 3.2.2 это решение удовлетворяет неравенству (3.2.80). Теорема доказана.

Теперь можно сформулировать критерий однозначной разрешимости задачи (3.2.1) в классе сильных решений для неограниченных областей $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с гладкими некомпактными границами. А именно, справедлива

Теорема 3.2.4. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — неограниченная область с некомпактной границей $\partial\Omega \in C^3$, $1 < p < \infty$, $n \geqslant 2$, $\nu > 0$, $T > 0$. Задача* (3.2.1) *однозначно разрешима в классе сильных решений $\{v, \nabla q\} \in V_p(Q_T) \times L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)$ с любым $f \in L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда для области Ω справедливо разложение $L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ в прямую сумму* (3.2.79).

Доказательство. Предположим сначала, что для области Ω справедливо разложение (3.2.79). Буквально повторяя рассуждения из доказательства теоремы 3.2.3, заключаем, что для любого $f \in L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)$ существует единственное сильное решение $\{v, \nabla q\} \in V_p(Q_T) \times L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)$ начально-краевой задачи (3.2.1), которое согласно теореме 3.2.2 удовлетворяет неравенству (3.2.80).

Предположим теперь, что для любого $f \in L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)$ существует единственное сильное решение задачи (3.2.1). Покажем, что из этого предположения вытекает справедливость разложения $L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ в прямую сумму (3.2.79). Если задача (3.2.1) однозначно разрешима для $T = T_0 > 0$, то та же задача будет однозначно разрешима и для любого положительного $T \neq T_0$. Действительно, если $0 < T < T_0$, то однозначная разрешимость в Q_T очевидна. Если $T = 2T_0$, то продолжим решение $v \in V_p(Q_{T_0})$ четным образом по t в область $\Omega \times (T_0\,, 2T_0)$, т. е. положим

$$\widetilde{v}(x,t) = v(x, 2T_0 - t), \quad T_0 \leqslant t < 2T_0\,,$$

а затем рассмотрим задачу

$$\begin{cases} u_t - \nu\Delta u + \nabla\psi = f(x,t) - \widetilde{v}_t(x,t) + \nu\Delta_x\widetilde{v}(x,t), \\ \operatorname{div} u = 0, \quad u|_{t=T_0} = 0, \end{cases} \tag{3.2.98}$$

для цилиндра $\Omega \times (T_0\,, 2T_0)$. Ввиду предположения об однозначной разрешимости задачи (3.2.1) в Q_{T_0}, задача (3.2.98) имеет единственное сильное решение $\{u, \nabla_x\,\psi\}$ в цилиндре $\Omega \times (T_0\,, 2T_0)$. Пусть

$$v(x,t) = \begin{cases} v(x,t), \quad 0 < t < T_0\,, \\ u(x,t) + \widetilde{v}(x,t), \quad T_0 \leqslant t < 2T_0\,, \end{cases}$$

$$\nabla_x\, q(x,t) = \begin{cases} \nabla_x\, q(x,t), \quad 0 < t < T_0\,, \\ \nabla_x\,\psi(x,t), \quad T_0 \leqslant t < 2T_0\,. \end{cases}$$

Тогда $\{v, \nabla_x\, q\}$ будет сильным решением задачи (3.2.1) в Q_{2T_0}. Единственность такого решения очевидным образом вытекает из предположения об однозначной разрешимости задачи (3.2.1) в Q_{T_0}. Продолжая указанный процесс, легко убедиться в однозначной разрешимости задачи (3.2.1) в Q_T для любого $T > T_0$.

Таким образом, при любых $T > 0$ для произвольного $f \in L_p(Q_T; \mathbb{R}^n)$ существует единственное сильное решение

$$\{v, \nabla_x\, q\} \in V_p(Q_T) \times L_p(Q_T; \mathbb{R}^n) \tag{3.2.99}$$

задачи (3.2.1) с фиксированным $\nu = \nu_0 > 0$. Применяя к системе (3.2.1) преобразование растяжения по t с коэффициентом ν/ν_0, заключаем, что при любых $T > 0$ для произвольного $f \in L_p(Q_T; \mathbb{R}^n)$ существует единственное сильное решение (3.2.99) задачи (3.2.1). Это означает (см., например, [13], с. 524), что найдется постоянная $C = C(\nu, T) > 0$, зависящая только от ν, T и n, p, Ω, такая, что

$$\|v\|_{\overset{\circ}{E}_{p,\nu}(Q_T;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla_x\, q\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)} \leqslant C(\nu, T)\|f\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)}\,. \tag{3.2.100}$$

Будем считать, что постоянная $C(\nu, T)$ в (3.2.100) является наилучшей. В таком случае, очевидно, имеем

$$C(\nu, T') \leqslant C(\nu, T) \quad \forall\, T' \in (0, T). \tag{3.2.101}$$

Заметим, что после указанного растяжения по t с коэффициентом ν/ν_0 задача (3.2.1) переходит в задачу

$$\begin{cases} v^\nu_t - \nu_0\Delta v^\nu + \nabla q^\nu = f^\nu(x,t), \\ \operatorname{div} v^\nu = 0, \quad v^\nu|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

для цилиндра $Q_{T_\nu} = \Omega\times(0,T_\nu)$, где $T_\nu = \nu T/\nu_0$ и используются обозначения

$$v^\nu(x,t) = v(x,\nu_0 t/\nu), \quad q^\nu(x,t) = \frac{\nu_0}{\nu} q(x,\nu_0 t/\nu), \quad f^\nu(x,t) = \frac{\nu_0}{\nu} f(x,\nu_0 t/\nu).$$

При этом из (3.2.100) получаем

$$\|v^\nu\|_{\overset{\circ}{E}_{p,\nu_0}(Q_{T_\nu};\mathbb{R}^n)} + \|\nabla_x q^\nu\|_{L_p(Q_{T_\nu};\mathbb{R}^n)} \leqslant C(\nu,T)\|f^\nu\|_{L_p(Q_{T_\nu};\mathbb{R}^n)}\,. \tag{3.2.102}$$

Поскольку $C(\nu,T)$ — наилучшая постоянная в (3.2.100), то, как нетрудно убедиться, рассуждая от противного, $C(\nu,T)$ будет также и наилучшей постоянной в (3.2.102). Но, с другой стороны, наилучшая постоянная в (3.2.102) должна равняться $C(\nu_0,T_\nu)$. Следовательно,

$$C(\nu,T) = C(\nu_0\,,T_\nu) = C(\nu_0\,,\nu T/\nu_0) \quad \forall\,\nu>0,\ \forall\,T>0. \tag{3.2.103}$$

Обозначим $C(\nu_0\,,\nu T/\nu_0) = C_0(\nu T)$, где постоянная $C_0(\nu T)$ зависит только от n, p, Ω и произведения νT. Согласно (3.2.103) имеем

$$C(\nu,T) = C_0(\nu T) \quad \forall\,\nu>0,\ \forall\,T>0. \tag{3.2.104}$$

Из (3.2.101),(3.2.104) получаем очевидное неравенство

$$C(\nu,T) \leqslant C_0(T) \quad \forall\,\nu\in(0,1]. \tag{3.2.105}$$

А из (3.2.100),(3.2.105) следует, что при любых положительных $\nu\leqslant 1$ сильное решение (3.2.99) задачи (3.2.1) удовлетворяет неравенству

$$\|v\|_{\overset{\circ}{E}_{p,\nu}(Q_T;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla_x q\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)} \leqslant C_0(\nu T)\|f\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)}\,. \tag{3.2.106}$$

Чтобы подчеркнуть зависимость решения задачи (3.2.1) от ν, будем писать $v = v(x,t,\nu)$ и $\nabla_x q = \nabla_x q(x,t,\nu)$. Отметим, что правая часть системы (3.2.1) от ν не зависит. Так как неравенство (3.2.106) справедливо при $0<\nu\leqslant 1$, то найдутся векторные поля

$$u\in L_p\big((0,T);\overset{\circ}{J}_p(\Omega)\big), \quad \nabla_x\psi\in L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)\,, \quad w^\alpha\in L_p(Q_T;\mathbb{R}^n) \quad \forall\,\alpha\colon |\alpha|=2,$$

и числовая последовательность $\{\nu_j\}$, $\nu_j\in(0,1)$, такие, что

$$\begin{aligned}
&\lim_{\nu_j\to 0}\int\limits_{Q_T}\big(v_t(x,t,\nu_j),g(x,t)\big)\,dxdt = \int\limits_{Q_T}\big(u(x,t),g(x,t)\big)\,dxdt,\\
&\lim_{\nu_j\to 0}\int\limits_{Q_T}\big(\nabla_x\psi(x,t,\nu_j),g(x,t)\big)\,dxdt = \int\limits_{Q_T}\big(\nabla_x\psi(x,t),g(x,t)\big)\,dxdt,
\end{aligned} \tag{3.2.107}$$

для всех $g \in L_{p'}(Q_T;\mathbb{R}^n)$ в силу рефлексивности $L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)$ при $1 < p < \infty$. Кроме того, при любых мультииндексах $\alpha\colon |\alpha| = 2$ имеем

$$\lim_{\nu_j \to 0} \int\limits_{Q_T} \big(\nu_j D_x^\alpha v(x,t,\nu_j), g(x,t)\big)\, dxdt = \int\limits_{Q_T} \big(w^\alpha(x,t), g(x,t)\big)\, dxdt \tag{3.2.108}$$

для всех $g \in L_{p'}(Q_T;\mathbb{R}^n)$ и, в частности, для всех $g \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(Q_T;\mathbb{R}^3)$. При этом

$$\int\limits_{Q_T} \big(\nu D_x^\alpha v(x,t,\nu), g(x,t)\big)\, dxdt = \int\limits_{Q_T} \big(\nu v(x,t,\nu), D_x^\alpha g(x,t)\big)\, dxdt \tag{3.2.109}$$

для всех $g \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(Q_T;\mathbb{R}^3)$, $|\alpha| = 2$. Но $v|_{t=0} = 0$, поэтому

$$\|v\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)} \leqslant T\|v_t\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)}\,. \tag{3.2.110}$$

Из (3.2.106),(3.2.109),(3.2.110) следует, что

$$\begin{gathered} \Big|\int\limits_{Q_T} \big(\nu D_x^\alpha v(x,t,\nu), g(x,t)\big)\, dxdt\Big| \leqslant \\ \leqslant \nu T C_0(T)\|f\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)}\|D_x^\alpha g\|_{L_{p'}(Q_T;\mathbb{R}^n)} \quad \forall\, g \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(Q_T;\mathbb{R}^3) \end{gathered} \tag{3.2.111}$$

при $0 < \nu \leqslant 1$, $|\alpha| = 2$.

На основании (3.2.108),(3.2.111) заключаем, что $w^\alpha(x,t) = 0$ почти всюду в Q_T при каждом $\alpha\colon |\alpha| = 2$. Следовательно,

$$\lim_{\nu_j \to 0} \int\limits_{Q_T} \big(\nu_j \Delta_x v(x,t,\nu_j), g(x,t)\big)\, dxdt = 0 \quad \forall\, g \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(Q_T;\mathbb{R}^3) \tag{3.2.112}$$

Из (3.2.1),(3.2.107) и (3.2.112) находим

$$f(x,t) = u(x,t) + \nabla_x \psi(x,t) \quad \dot{\forall}\,(x,t) \in Q_T\,, \tag{3.2.113}$$

т. е. всякое векторное поле $f \in L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)$ можно представить в виде (3.2.113), где

$$u \in L_p\big((0,T); \overset{\circ}{J}_p(\Omega)\big), \quad \nabla_x \psi \in L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)\,.$$

Это означает, что

$$L_p(Q_T;\mathbb{R}^n) = L_p\big((0,T); \overset{\circ}{J}_p(\Omega)\big) + L_p\big((0,T); \hat{G}_p(\Omega)\big), \tag{3.2.114}$$

откуда получаем
$$L_p(\Omega;\mathbb{R}^n) = \overset{\circ}{J}_p(\Omega) + \hat{G}_p(\Omega). \tag{3.2.115}$$
Таким образом, из предположения об однозначной разрешимости задачи (3.2.1) мы вывели (3.2.115).

Учитывая замечание 3.2.1 на с. 143, заключаем на основании (3.2.115), что подпространство $\mathfrak{L}_{p'}(Q_T;\mathbb{R}^n)$ замкнуто в $L_{p'}(Q_T;\mathbb{R}^n)$, а сильное решение $\{v, \nabla_x q\} \in V_{p'}(Q_T) \times L_{p'}(Q_T;\mathbb{R}^n)$ задачи (3.2.1) единственно. В то же время, согласно сделанному предположению, единственно и сильное решение $\{v, \nabla_x q\} \in V_p(Q_T) \times L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)$ задачи (3.2.1), поэтому в силу теоремы 3.2.1 слабое решение $v \in L_p\big((0,T); \overset{\circ}{J}_p(\Omega)\big)$ будет единственным.

Используя единственность слабого решения $v \in L_p\big((0,T); \overset{\circ}{J}_p(\Omega)\big)$ и повторяя приведенные выше рассуждения, заключаем, что подпространство $\mathfrak{L}_{p'}(Q_T;\mathbb{R}^n)$ всюду плотно в $L_{p'}(Q_T;\mathbb{R}^n)$. Следовательно, в силу уже установленной замкнутости подпространство $\mathfrak{L}_{p'}(Q_T;\mathbb{R}^n)$ совпадает со всем пространством $L_{p'}(Q_T;\mathbb{R}^n)$. Поэтому для любого $f \in L_{p'}(Q_T;\mathbb{R}^n)$ существует единственное сильное решение $\{v, \nabla_x q\} \in V_{p'}(Q_T) \times L_{p'}(Q_T;\mathbb{R}^n)$ задачи (3.2.1), а отсюда, как уже было установлено, вытекает, что
$$L_{p'}(\Omega;\mathbb{R}^n) = \overset{\circ}{J}_{p'}(\Omega) + \hat{G}_{p'}(\Omega). \tag{3.2.116}$$
Ввиду (2.1.5), из (3.2.116) находим
$$\overset{\circ}{J}_p(\Omega) \cap \hat{G}_p(\Omega) = \{0\}. \tag{3.2.117}$$
Наконец, из (3.2.115) и (3.2.117) следует справедливость разложения пространства $L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ в прямую сумму (3.2.79). Теорема доказана.

Замечание 3.2.2. Если для какой-либо области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ разложение пространства $L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ в прямую сумму (3.2.79) не имеет места, то для такой области сильное решение $\{v, \nabla_x q\} \in V_p(Q_T) \times L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)$ задачи (3.2.1) либо не существует, либо неединственно. Пример неограниченной области $\Omega \in \mathbb{R}^2$, имеющей сколь угодно гладкую некомпактную границу, для которой разложение $L_p(\Omega;\mathbb{R}^2)$ в прямую сумму (3.2.79) не имеет места, содержится в замечании 2.1.3 на с. 54.

Для неограниченных областей с некомпактными границами представляют интерес сильные решения $\{v, \nabla_x q\} \in \hat{V}_p(Q_T) \times L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)$ задачи (3.2.1). В этот класс попадают сильные решения, недостаточно быстро стремящиеся к нулю на бесконечности. Для таких решений возникает дополнительная проблема — а именно, проблема единственности решений.

Критерием единственности сильных решений в таком случае служит совпадение пространств

$$\hat{\overset{\circ}{J}}{}^1_p(\Omega) = \overset{\circ}{J}{}^1_p(\Omega). \tag{3.2.118}$$

При этом согласно теореме 2 из [31] имеем

$$\hat{\overset{\circ}{J}}_p(\Omega) = \overset{\circ}{J}_p(\Omega) \iff \hat{\overset{\circ}{J}}{}^1_p(\Omega) = \overset{\circ}{J}{}^1_p(\Omega) \iff \hat{\overset{\circ}{J}}{}^2_p(\Omega) = \overset{\circ}{J}{}^2_p(\Omega). \tag{3.2.119}$$

Для сильных решений справедлива следующая

Лемма 3.2.5. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *— неограниченная область с некомпактной границей* $\partial\Omega \in C^3$, $1 < p < \infty$, $n \geqslant 2$, $\nu > 0$, $T > 0$. *Если для* Ω *справедливо разложение* (3.2.79), *то сильное решение* $\{v, \nabla_x q\} \in \hat{V}_p(Q_T) \times L_p(Q_T; \mathbb{R}^n)$ *задачи* (3.2.1) *будет единственным тогда и только тогда, когда совпадают пространства* (3.2.118).

Доказательство. В силу определения пространств $V_p(Q_T)$ и $\hat{V}_p(Q_T)$ на с. 116 имеем

$$\hat{V}_p(Q_T) = V_p(Q_T) \iff \hat{\overset{\circ}{J}}{}^1_p(\Omega) = \overset{\circ}{J}{}^1_p(\Omega).$$

Поэтому из предположения о совпадении (3.2.118) в силу теоремы 3.2.4 следует единственность сильного решения $\{v, \nabla_x q\} \in \hat{V}_p(Q_T) \times L_p(Q_T; \mathbb{R}^n)$ задачи (3.2.1).

Предположим теперь, что (3.2.118) не выполняется, но при этом сильное решение $\{v, \nabla_x q\} \in \hat{V}_p(Q_T) \times L_p(Q_T; \mathbb{R}^n)$ задачи (3.2.1), единственно. Используя схему доказательства теоремы 2 из [31], нетрудно убедиться, найдется векторное поле $u \in \hat{\overset{\circ}{J}}{}^2_p(\Omega)$ такое, что $u \notin \overset{\circ}{J}{}^1_p(\Omega)$. Пусть $w(x,t) = tu(x)$ в Q_T. Очевидно, $w \in \hat{V}_p(Q_T)$ и $w|_{t=0}$. В силу теоремы 3.2.4 существует единственное сильное решение $\{\widetilde{v}, \nabla_x \widetilde{q}\} \in \hat{V}_p(Q_T) \times L_p(Q_T; \mathbb{R}^n)$ задачи (3.2.1) с правой частью

$$f(x,t) = w_t(x,t) - \nu\Delta_x w(x,t), \quad (x,t) \in Q_T\,.$$

А тогда получаем в Q_T начально-краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(\widetilde{v} - w) - \nu\Delta_x(\widetilde{v} - w) + \nabla_x \widetilde{q} = 0, \\ \operatorname{div}_x(\widetilde{v} - w) = 0, \quad (\widetilde{v} - w)|_{t=0} = 0, \end{cases} \tag{3.2.120}$$

где $\widetilde{v} - w \in \hat{V}_p(Q_T)$. Но из (3.2.120) и единственности сильного решения $\{v, \nabla_x q\} \in \hat{V}_p(Q_T) \times L_p(Q_T; \mathbb{R}^n)$ задачи (3.2.1) следует, что $\widetilde{v} = w$, т. е.

$\widetilde{v}(x,t) = tu(x)$ почти всюду в Q_T, что невозможно, так как $\widetilde{v} \in V_p(Q_T)$, а $u \notin \overset{\circ}{J}{}_p^1(\Omega)$. Из полученного противоречия следует выполнение (3.2.120). Лемма доказана.

Критерием единственности слабых решений $v \in L_p\big((0,T); \hat{\overset{\circ}{J}}_p(\Omega)\big)$ для неограниченных областей с некомпактными границами служит совпадение пространств

$$\hat{\overset{\circ}{J}}_p(\Omega) = \overset{\circ}{J}_p(\Omega). \tag{3.2.121}$$

Для слабых решений справедлива следующая

Лемма 3.2.6. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — неограниченная область с некомпактной границей $\partial\Omega \in C^3$, $1 < p < \infty$, $n \geqslant 2$, $\nu > 0$, $T > 0$. Если для Ω справедливо разложение* (3.2.79), *то слабое решение $v \in L_p\big((0,T); \hat{\overset{\circ}{J}}_p(\Omega)\big)$ задачи* (3.2.1) *будет единственным тогда и только тогда, когда совпадают пространства* (3.2.121).

Доказательство леммы 3.2.6 для случая слабых ничем не отличается от доказательства леммы 3.2.5 для случая сильных решений.

В заключение параграфа отметим, что для неограниченных областей $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с некомпактными границами первые контрпримеры, свидетельствующие о несовпадении пространств

$$\hat{\overset{\circ}{J}}{}_2^1(\Omega) \neq \overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega),$$

были построены Джоном Хейвудом в его знаменитой статье [65], заставшей всех врасплох и наделавшей много шума. Напомним, что

$$\hat{\overset{\circ}{J}}{}_2^1(\Omega) = \{u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega;\mathbb{R}^n) :\ \operatorname{div} u = 0\};$$
$$\overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega) = \textit{замыкание в } \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega;\mathbb{R}^n) \textit{ подпространства } \overset{\circ}{J}{}^\infty(\Omega).$$

Очевидно, $\overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega) \subset \hat{\overset{\circ}{J}}{}_2^1(\Omega)$, и вопрос о совпадении этих двух пространств является, по существу, задачей аппроксимации соленоидальных векторных полей в пространстве Соболева $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$ финитными бесконечно дифференцируемыми соленоидальными векторными полями. О важности этого вопроса для гидродинамики говорит, например, тот факт, что к этому вопросу сводится проблема единственности классического решения линейной нестационарной задачи Стокса в неограниченной области с некомпактной границей. Дальнейшие примеры, но уже для общего случая показателя $p \in [1, \infty)$ можно найти в работе [31], где была построена более или менее полная теория аппроксимации соленоидальных и потенциальных векторных полей в пространствах Соболева $W_p^l(\Omega; \mathbb{R}^n)$ для областей $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с липшицевыми границами.

3.3. Сильные решения нелинейной нестационарной задачи

В этом параграфе будут исследованы вопросы существования и единственности сильных решений начально-краевой задачи для нелинейной нестационарной системы уравнений Навье–Стокса в ограниченных и неограниченных областях с гладкими границами при некоторых ограничениях на исходные данные задачи. Разрешимость задач с подобными ограничениями принято называть разрешимостью в малом или локальной разрешимостью. Предварительно будут доказаны пять вспомогательных лемм.

В цилиндре $Q_T = \Omega \times (0, T)$ рассмотрим начально-краевую задачу для нелинейной нестационарной системы Навье–Стокса

$$\begin{cases} v_t + (v, \nabla)v - \nu\Delta v + \nabla q = f, \\ \operatorname{div} v = 0, \quad (x, t) \in Q_T, \\ v|_{t=0} = 0, \quad v|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{3.3.1}$$

В случае, когда $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — неограниченная область с некомпактной границей, в этом параграфе всегда предполагается выполнение условия

$$L_p(\Omega; \mathbb{R}^n) = \overset{\circ}{J}_p(\Omega) \oplus \hat{G}_p(\Omega), \tag{3.3.2}$$

которое необходимо и достаточно для однозначной разрешимости линейной нестационарной задачи Стокса в классе сильных решений

$$\{v, \nabla_x q\} \in V_p(Q_T) \times L_p(Q_T; \mathbb{R}^n).$$

Условие (3.3.2) выполнено для всех ограниченных и неограниченных областей $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с компактной границей $\partial\Omega \in C^1$ при любых значениях показателя $p \in (1, \infty)$ и размерности $n \geqslant 2$. При $p = 2$ условию (3.3.2) удовлетворяет любая область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ без каких бы то ни было ограничений. При $p \neq 2$ условие (3.3.2) может не выполняться для неограниченных областей со сколь угодно гладкими, но некомпактными границами. Условие

(3.3.2) накладывает некоторые ограничения геометрического характера на поведение границы $\partial\Omega$ в окрестности бесконечности в зависимости от значений показателя p и размерности n.

Необходимо отметить, что однородность начальных условий используется лишь как методический прием, позволяющий неспециалисту быстрее и с меньшими усилиями приблизиться к существу фундаментальных проблем, связанных с уравнениями Навье–Стокса. Несмотря на нелинейность задачи, однородность начальных условий ничуть не ограничивает общности постановки задачи в классе сильных решений, на который, как будет показано в этом параграфе, распространяется теорема единственности.

Случай неоднородных начальных условий легко сводится к случаю однородных. Действительно, ограничившись для краткости случаем $p = 2$, заметим, что для неоднородных начальных данных

$$v|_{t=0} = v^0(x), \quad x \in \Omega, \quad v^0 \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega),$$

существует соленоидальное продолжение $u \in V_2(Q_{-1})$ «вниз» в цилиндр $Q_{-1} = \Omega \times (-1, 0)$, такое, что $u|_{t=-1} = 0$. Краевое условие $u|_{\partial\Omega} = 0$ при этом содержится неявно в определении пространства V_p (см. с. 116). Такое продолжение можно построить, например, в виде $u(x,t) = \eta(t)w(x,t)$ с подходящей срезающей функцией $\eta \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\mathbb{R}^1)$, где w — сильное решение «вниз» линейной задачи

$$\begin{cases} w_t + \Delta w + \nabla\psi = 0, \\ \operatorname{div} w = 0, \ (x,t) \in Q_{-1}, \\ w\big|_{t=0} = v^0(x), \ w\big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Задача для цилиндра Q_T с неоднородными начальными данными $v|_{t=0} = v^0$ сводится таким образом к задаче для цилиндра $\Omega \times (-1, T)$ с однородными начальными данными $v|_{t=-1} = 0$ и с правой частью f, доопределенной «вниз» с помощью равенства

$$f(x,t) = u_t + (u, \nabla)u - \nu\Delta u, \ (x,t) \in Q_{-1}. \tag{3.3.3}$$

Это следует из единственности сильного решения, означающей, что сильное решение v для цилиндра $\Omega \times (-1, T)$ будет иметь вид $v(x,t) = u(x,t)$ почти всюду в цилиндре Q_{-1} и будет, в частности, удовлетворять нужному неоднородному условию $v|_{t=0} = v^0(x)$.

Займемся теперь решением нелинейной задачи (3.3.1). Напомним, что определение банахова пространства $\overset{\circ}{E}_{p,\nu} (Q_T; \mathbb{R}^n)$ было дано на с. 125. Для краткости удобно обозначить $\overset{\circ}{E}_{p,\nu}(Q_T) = \overset{\circ}{E}_{p,\nu}(Q_T;\mathbb{R}^1)$. Нам понадобится следующая точная мультипликативная оценка для конвективных членов. А именно, справедлива

Лемма 3.3.1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — любая неограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^2$, $n \geqslant 2$, $(n+2)/3 \leqslant p < \infty$, $\nu > 0$, $T > 0$. Тогда существует постоянная $C_0 > 0$, зависящая только от n, p и Ω, такая, что*

$$\Big(\int\limits_{Q_T} |u|^p |\nabla_x v|^p dxdt\Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant C_0 \nu^{-\frac{n+p}{2p}} T^{\frac{3}{2}-\frac{n+2}{2p}} \|u\|_{\overset{\circ}{E}_{p,\nu}(Q_T)} \|v\|_{\overset{\circ}{E}_{p,\nu}(Q_T)} \tag{3.3.4}$$

для всех $u, v \in \overset{\circ}{E}_{p,\nu}(Q_T)$ с начальными условиями $u|_{t=0} = v|_{t=0} = 0$.

Доказательство. Утверждение леммы докажем сначала для случая, когда $\Omega = \mathbb{R}^n$ и $Q_T = \mathbb{R}^n \times (0,T)$. Пусть $u, v \in \overset{\circ}{E}_{p,\nu}(Q_T)$ и $u|_{t=0} = v|_{t=0} = 0$ в смысле равенства соответствующих следов. Условимся, что в доказательстве леммы для всякого векторного поля $w\colon Q_T \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющего условию $w|_{t=0} = 0$, через $\widetilde{w}$ будет обозначено его продолжение с Q_T в $\mathbb{R}^{n+1}$ следующего вида

$$\widetilde{w}(x,t) = \begin{cases} w(x,t),\ 0 < t < T, \\ 0, \quad t \leqslant 0,\ t \geqslant 2T, \\ w(x, 2T-t),\ T \leqslant t < 2T, \end{cases}$$

Тогда $\widetilde{u}$, $\widetilde{v} \in W_p^{2,1}(\mathbb{R}^{n+1})$, где $W_p^{2,1}(\mathbb{R}^{n+1})$ — неизотропное пространство Соболева с нормой

$$\|f\|_{W_p^{2,1}(\mathbb{R}^{n+1})} = \|f_t\|_{L_p(\mathbb{R}^{n+1})} + \sum_{|\alpha| \leqslant 2} \|D_x^\alpha f\|_{L_p(\mathbb{R}^{n+1})}.$$

Известно, что $W_p^{2,1}(\mathbb{R}^{n+1}) = \mathbb{L}_p^{2,1}(\mathbb{R}^{n+1})$ при $1 < p < \infty$, где $\mathbb{L}_p^{2,1}(\mathbb{R}^{n+1})$ — неизотропный лиувиллевский класс (см. [27, 33]).

1. Рассмотрим сначала частный случай $T = \nu = 1$. Легко проверить, что найдется постоянная $C_1 > 0$, зависящая только от n и p, такая, что

$$\begin{gathered} \int\limits_{Q_1} |u|^p |\nabla_x v|^p dxdt \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} |u|^p |\nabla_x v|^p dxdt \leqslant \\ \leqslant C_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|\widetilde{u}(x,t)\|_{L_n(\mathbb{R}^n)}^p \sum_{|\alpha| \leqslant 2} \|D_x^\alpha \widetilde{v}(x,t)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^p dt \end{gathered} \tag{3.3.5}$$

при $1 < p < n$ в силу неравенства Гёльдера и теоремы вложения

$$W_p^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_{\frac{np}{n-p}}(\mathbb{R}^n).$$

Заметим, что $\varkappa = \frac{3}{2} - \frac{n+2}{2p} \geqslant 0$ при $(n+2)/3 \leqslant p < \infty$, поэтому справедлива теорема вложения $\mathbb{L}_p^{2,1}(\mathbb{R}^{n+1}) \hookrightarrow \mathbb{L}_n^{2\varkappa,\varkappa}$ (см. [33], с. 361), в силу которой

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^1} \|\widetilde{u}(x,t)\|_{L_n(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_2 \|\widetilde{u}\|_{W_p^{2,1}(\mathbb{R}^{n+1})}$$

с постоянной $C_2 > 0$, зависящей только от n и p, откуда и из (3.3.5) находим

$$\int\limits_{Q_1} |u|^p |\nabla_x v|^p dxdt \leqslant C_3 \|\widetilde{u}\|^p_{W_p^{2,1}(\mathbb{R}^{n+1})} \|\widetilde{v}\|^p_{W_p^{2,1}(\mathbb{R}^{n+1})} \tag{3.3.6}$$

при $(n+2)/3 \leqslant p < n$ с постоянной $C_3 > 0$, зависящей только от n и p.

При $n < p < \infty$ справедлива теорема вложения $W_p^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C(\mathbb{R}^n)$, где $C(\mathbb{R}^n)$ — банахово пространство равномерно непрерывных в $\mathbb{R}^n$ функций с sup-нормой. Поэтому при $n < p < \infty$ имеем

$$\int\limits_{Q_1} |u|^p |\nabla_x v|^p dxdt \leqslant C_4 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|\widetilde{u}(x,t)\|^p_{L_n(\mathbb{R}^n)} \sum_{|\alpha|\leqslant 2} \|D_x^\alpha \widetilde{v}(x,t)\|^p_{L_p(\mathbb{R}^n)} dt \tag{3.3.7}$$

с постоянной $C_4 > 0$, зависящей только от n и p, откуда и из априорного включения $W_p^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_p(\mathbb{R}^n)$ получаем

$$\int\limits_{Q_1} |u|^p |\nabla_x v|^p dxdt \leqslant C_5 \|\widetilde{u}\|^p_{W_p^{2,1}(\mathbb{R}^{n+1})} \|\widetilde{v}\|^p_{W_p^{2,1}(\mathbb{R}^{n+1})} \tag{3.3.8}$$

при $n < p < \infty$ с постоянной $C_5 > 0$, зависящей только от n и p.

При $p = n$, в силу неравенства Гёльдера имеем

$$\int\limits_{Q_1} |u|^p |\nabla_x v|^p dxdt \leqslant \|\widetilde{u}\|^n_{L_{n(n+1)}(\mathbb{R}^{n+1})} \|\widetilde{v}\|^n_{L_{n+1}(\mathbb{R}^{n+1})}. \tag{3.3.9}$$

Из теоремы вложения $W_p^1(\mathbb{R}^{n+1}) \hookrightarrow L_{n(n+1)}(\mathbb{R}^{n+1})$ следует, что

$$\|\widetilde{u}\|_{L_{n(n+1)}(\mathbb{R}^{n+1})} \leqslant C_6 \|\widetilde{u}\|_{W_n^{2,1}(\mathbb{R}^{n+1})} \tag{3.3.10}$$

с постоянной $C_6 > 0$, зависящей только от n. Полагая $\varkappa = \frac{2n^2+n-2}{2n(n+1)}$, заметим, что условие $2\varkappa > 1$ выполнено при любой размерности $n \geqslant 2$. Поэтому согласно теореме вложения $\mathbb{L}_n^{2,1}(\mathbb{R}^{n+1}) \hookrightarrow \mathbb{L}_{n+1}^{2\varkappa,\varkappa}(\mathbb{R}^{n+1})$ (см. [33], с. 361) будем иметь неравенство

$$\|\nabla_x \widetilde{v}\|_{L_{n+1}(\mathbb{R}^{n+1})} \leqslant C_7 \|\widetilde{v}\|_{W_n^{2,1}(\mathbb{R}^{n+1})}$$

с постоянной $C_7 > 0$, зависящей только от n, откуда с учетом (3.3.9),(3.3.10) получим

$$\int\limits_{Q_1} |u|^n |\nabla_x v|^n dxdt \leqslant C_8 \|\widetilde{u}\|^n_{W_p^{2,1}(\mathbb{R}^{n+1})} \|\widetilde{v}\|^n_{W_p^{2,1}(\mathbb{R}^{n+1})} \tag{3.3.11}$$

с постоянной $C_8 > 0$, зависящей только от n.

Учитывая определение $\widetilde{u}(x,t)$ и пользуясь интерполяционным неравенством для производных по x первого порядка, находим

$$\|\widetilde{u}\|_{W_p^{2,1}(\mathbb{R}^{n+1})} \leqslant C_9 \big[\|u_t\|_{L_p(Q_1)} + \sum_{|\alpha|=2} \|D_x^\alpha u\|_{L_p(Q_1)} + \|u\|_{L_p(Q_1)}\big]$$

при $1 < p < \infty$, $n \geqslant 2$, с постоянной $C_9 > 0$, зависящей только от n и p. Но для цилиндра $Q_1 = \mathbb{R}^n \times (0,1)$ имеем

$$\|u\|_{L_p(Q_1)} \leqslant \|u_t\|_{L_p(Q_1)}\,,$$

поскольку $u|_{t=0} = 0$. Поэтому

$$\|\widetilde{u}\|_{W_p^{2,1}(\mathbb{R}^{n+1})} \leqslant 2C_9 \big[\|u_t\|_{L_p(Q_1)} + \sum_{|\alpha|=2} \|D_x^\alpha u\|_{L_p(Q_1)}\big]. \tag{3.3.12}$$

Аналогичным образом получаем

$$\|\widetilde{v}\|_{W_p^{2,1}(\mathbb{R}^{n+1})} \leqslant 2C_9 \big[\|v_t\|_{L_p(Q_1)} + \sum_{|\alpha|=2} \|D_x^\alpha v\|_{L_p(Q_1)}\big]. \tag{3.3.13}$$

Наконец, из (3.3.6),(3.3.8),(3.3.11)–(3.3.13) следует существование постоянной $C_0' > 0$, зависящей только от n и p, такой, что при $n \geqslant 2$, $(n+2)/3 \geqslant p < \infty$ для всех $u, v \in \overset{\circ}{E}_{p,\nu}\ (Q_T; \mathbb{R}^1)$ с начальными условиями $u|_{t=0} = v|_{t=0} = 0$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{Q_1} |u|^p |\nabla_x v|^p dxdt \leqslant C_0' \|u\|^p_{\mathcal{E}_{p,1}(Q_1)} \|v\|^p_{\mathcal{E}_{p,1}(Q_1)}\,, \tag{3.3.14}$$

где через $\mathcal{E}_{p,1}(Q_1)$ обозначено пространство $\mathcal{E}_{p,\nu}(Q_T) = \mathcal{E}_{p,\nu}(Q_T;\mathbb{R}^1)$ при значениях $T=\nu=1$. Напомним, что определение пространства $\mathcal{E}_{p,\nu}(Q_T;\mathbb{R}^n)$ с полунормой (3.2.11) было дано на с. 117. А так как

$$\|f\|_{\mathcal{E}_{p,\nu}(Q_T)} \leqslant \|f\|_{\overset{\circ}{E}_{p,\nu}(Q_T)},$$

то из (3.3.14) следует оценка (3.3.4) с $T=\nu=1$. Таким образом, в случае $T=\nu=1$ и $\Omega=\mathbb{R}^n$ утверждение леммы доказано.

2. Пусть теперь T, ν — произвольные положительные числа, а Ω по-прежнему совпадает с $\mathbb{R}^n$. Для произвольных $u, v \in \overset{\circ}{E}_{p,\nu}(Q_T)$ с начальными условиями $u|_{t=0} = v|_{t=0} = 0$ положим

$$u(x,t) = U\Big(\frac{x}{\sqrt{\nu T}}, \frac{t}{T}\Big), \quad v(x,t) = V\Big(\frac{x}{\sqrt{\nu T}}, \frac{t}{T}\Big).$$

Делая замену переменных, находим

$$\begin{gathered}\int\limits_{Q_T} |u(x,t)|^p |\nabla_x v(x,t)|^p dxdt = \\ = T(\nu T)^{\frac{n-p}{2}} \int\limits_{Q_1} |U(y,\tau)|^p |\nabla_y V(y,\tau)|^p dyd\tau,\end{gathered} \tag{3.3.15}$$

откуда и из (3.3.14) получаем

$$\int\limits_{Q_T} |u(x,t)|^p |\nabla_x v(x,t)|^p dxdt \leqslant C_0' T(\nu T)^{\frac{n-p}{2}} \|U\|^p_{\mathcal{E}_{p,1}(Q_1)} \|V\|^p_{\mathcal{E}_{p,1}(Q_1)}. \tag{3.3.16}$$

С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned}\|U\|^p_{\mathcal{E}_{p,1}(Q_1)} &= T^{p-1}(\nu T)^{-\frac{n}{2}} \|u\|^p_{\mathcal{E}_{p,\nu}(Q_T)}, \\ \|V\|^p_{\mathcal{E}_{p,1}(Q_1)} &= T^{p-1}(\nu T)^{-\frac{n}{2}} \|v\|^p_{\mathcal{E}_{p,\nu}(Q_T)},\end{aligned}$$

откуда и из (3.3.16) находим

$$\begin{gathered}\int\limits_{Q_T} |u(x,t)|^p |\nabla_x v(x,t)|^p dxdt \leqslant \\ \leqslant C_0' \nu^{-\frac{n+p}{2}} T^{\frac{3}{2}p - \frac{n+2}{2}} \|u\|^p_{\mathcal{E}_{p,\nu}(Q_T)} \|v\|^p_{\mathcal{E}_{p,\nu}(Q_T)}.\end{gathered} \tag{3.3.17}$$

А из (3.3.17) следует оценка (3.3.4) для любых положительных ν, T. Таким образом, в случае $\Omega = \mathbb{R}^n$ утверждение леммы доказано.

Пусть теперь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — произвольная неограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^2$. Рассмотрим область $\omega \subset \mathbb{R}^n$ вида

$$\omega = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n \colon x_n > \varphi(x')\},$$

где функция $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^{n-1})$ удовлетворяет неравенству

$$\sup_{x' \in \mathbb{R}^{n-1}} \sum_{1 \leqslant |\alpha| \leqslant 2} |D_{x'}^{\alpha'} \varphi(x')| \leqslant M$$

с некоторой постоянной $M > 0$. Пусть $f \in \overset{\circ}{E}_{p,\nu}(Q_T)$, где $Q_T = \omega \times (0, T)$, и обозначим

$$\widetilde{f}(x,t) = \begin{cases} f(x,t), \quad x \in \omega,\ 0 < t < T, \\ -f(x', 2\varphi(x') - x_n\,, t), \quad x \in \mathbb{R}^n \backslash \omega,\ 0 < t < T. \end{cases}$$

Поскольку $f|_{\partial\omega=0}$, то $\widetilde{f} \in \overset{\circ}{E}_{p,\nu}(Q_T)\big(\mathbb{R}^n \times (0,T)\big)$. Оценивая первые производные по x с помощью интерполяционного неравенства, при условии $f|_{t=0} = 0$ получим

$$\|\widetilde{f}\|_{\mathcal{E}_{p,\nu}(\mathbb{R}^n \times (0,T))} \leqslant C_{10} \|f\|_{\mathcal{E}_{p,\nu}(Q_T)}$$

с постоянной $C_{10} > 0$, зависящей только от n, p и M. Поэтому, если $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — произвольная ограниченная или неограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^2$, то, используя подходящее бесконечно дифференцируемое разбиение единицы в Ω, можно для любой функции $f \in \overset{\circ}{E}_{p,\nu}(Q_T)$ с начальным условием $f|_{t=0} = 0$ построить продолжение

$$\widetilde{f} \in \mathcal{E}_{p,\nu}\big(\mathbb{R}^n \times (0,T)\big) \colon \widetilde{f}|_\Omega = f,\ \widetilde{f}|_{t=0} = 0,$$

с области Ω на все $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющее неравенству

$$\|\widetilde{f}\|_{\mathcal{E}_{p,\nu}(\mathbb{R}^n \times (0,T))} \leqslant C_{11} \|f\|_{\mathcal{E}_{p,\nu}(Q_T)}$$

с постоянной $C_{11} > 0$, зависящей только от n, p и Ω, откуда и из (3.3.17) вытекает справедливость утверждения леммы для произвольной ограниченной или неограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с границей $\partial\Omega \in C^2$ при любых положительных ν, T. Лемма доказана.

Лемма 3.3.2. *Пусть* β, γ *— заданные вещественные положительные числа, и пусть* $\{\beta_m\}_{m=1}^{\infty}$ *— любая последовательность вещественных неотрицательных чисел таких, что* $\beta_1 = \beta$ *и*

$$\beta_m \leqslant \gamma \sum_{j=1}^{m-1} \beta_j \beta_{m-j} \quad \forall\, m \geqslant 2.$$

Тогда степенные ряды $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \beta_m z^m$ *и* $\sum\limits_{m=2}^{\infty} \Big(\sum\limits_{j=1}^{m-1} \beta_j \beta_{m-j}\Big) z^m$ *сходятся в круге* $4\beta\gamma|z| < 1$ *с оценками сумм:*

$$\Big|\sum_{m=1}^{\infty} \beta_m z^m\Big| \leqslant \frac{1 - \sqrt{1 - 4\beta\gamma|z|}}{2\gamma}\,,$$

$$\Big|\sum_{m=2}^{\infty} \Big(\sum_{j=1}^{m-1} \beta_j \beta_{m-j}\Big) z^m\Big| \leqslant \frac{1 - \sqrt{1 - 4\beta\gamma|z|} - 2\beta\gamma|z|}{2\gamma^2}\,.$$

Доказательство. Выделяя ветвь корня $\sqrt{1 - 4\beta\gamma z}$, принимающую вещественные положительные значения на вещественной полуоси

$$\{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Im} z = 0,\ 4\beta\gamma \operatorname{Re} z < 1\},$$

заметим, что функция

$$h(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\beta\gamma z}}{2\gamma}$$

комплексной переменной z голоморфна в круге $4\beta\gamma|z| < 1$. Пусть $\{\alpha_m\}_{m=0}^{\infty}$ — коэффициенты разложения функции $h(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$. Очевидно, $\alpha_0 = 0$ и $\alpha_1 = \beta$, при этом

$$\gamma h^2(z) + \beta z = h(z), \quad 4\beta\gamma|z| < 1. \tag{3.3.18}$$

Приравнивая коэффициенты разложения в ряды Тейлора левой и правой частей (3.3.18), получим

$$\alpha_m = \gamma \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j \alpha_{m-j} \quad \forall\, m \geqslant 2. \tag{3.3.19}$$

А так как $\alpha_1 = \beta_1 = \beta$, то все числа α_m будут вещественными положительными при $m \geqslant 1$. Опираясь на равенства (3.3.19), легко доказать по индукции, что $\beta_m \leqslant \alpha_m$ при любых $m \geqslant 2$. Поэтому ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \alpha_m |z|^m = h(|z|)$ будет мажорировать ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \beta_m z^m$ в круге $4\beta\gamma|z| < 1$. Аналогично, сходящийся при $4\beta\gamma|z| < 1$ ряд $\sum\limits_{m=2}^{\infty}\Bigl(\sum\limits_{j=1}^{m-1} \alpha_j\alpha_{m-j}\Bigr)|z|^m = h^2(|z|)$ будет мажорировать ряд $\sum\limits_{m=2}^{\infty}\Bigl(\sum\limits_{j=1}^{m-1} \beta_j\beta_{m-j}\Bigr)z^m$ в круге $4\beta\gamma|z| < 1$. Лемма доказана.

Замечание 3.3.1. Не будет большим преувеличением сказать, что с какой-либо из всевозможных вариаций на тему, связанную с утверждением леммы 3.3.2, можно столкнуться практически в любой работе, где решается задача с квадратичной нелинейностью (см., например, [60]).

Лемма 3.3.3. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная или неограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^3$, $n \geqslant 2$, $(n+2)/3 \leqslant p < \infty$, $\nu > 0$, $T > 0$. И пусть $\{v, \nabla_x q\} \in V_p(Q_T) \times L_p(Q_T; \mathbb{R}^n)$ — сильное решение задачи* (3.3.1)*. Если область Ω удовлетворяет условию* (3.3.2) *и $f(x,t) = 0$ почти всюду в Q_T, то $v(x,t) = \nabla_x q(x,t) = 0$ почти всюду в Q_T.*

Доказательство. Пусть m — натуральное число, $t_0 = 0$ и $t_j = t_{j-1} + T/m$ при $j = 1, \ldots, m$. Обозначим $\tau_j = (t_{j-1}, t_j)$, $Q_{\tau_j} = \Omega \times \tau_j$, $j = 1, \ldots, m$, и выберем m настолько большим, чтобы выполнялось условие

$$\|v\|_{\overset{\circ}{E}_{p,\nu}(Q_{\tau_j};\mathbb{R}^n)} \leqslant \frac{e^{-C\nu T}}{2CC_0} \cdot \nu^{\frac{n+p}{2p}} T^{\frac{n+2}{2p} - \frac{3}{2}}, \ j = 1, \ldots, m, \tag{3.3.20}$$

где C — постоянная из оценки (3.2.80), а C_0 — постоянная из оценки (3.3.4).

В системе (3.3.1) перенесем член $(v, \nabla)v$ в правую часть и применим к Q_{τ_1} теорему 3.2.2, лемму 3.3.1 и неравенство (3.3.20). Тогда

$$\|v\|_{\overset{\circ}{E}_{p,\nu}(Q_{\tau_1};\mathbb{R}^n)} \leqslant CC_0 e^{C\nu T} \nu^{-\frac{n+p}{2p}} T^{\frac{3}{2} - \frac{n+2}{2p}} \|v\|^2_{\overset{\circ}{E}_{p,\nu}(Q_{\tau_1};\mathbb{R}^n)} \leqslant \frac{1}{2} \cdot \|v\|_{\overset{\circ}{E}_{p,\nu}(Q_{\tau_1};\mathbb{R}^n)},$$

откуда следует, что $\|v\|_{\overset{\circ}{E}_{p,\nu}(Q_{\tau_1};\mathbb{R}^n)} = 0$. Это означает, что $v|_{t=t_1} = 0$. Повторяя те же рассуждения, заключаем, что $\|v\|_{\overset{\circ}{E}_{p,\nu}(Q_{\tau_j};\mathbb{R}^n)} = 0$, $j = 1, \ldots, m$. Таким образом, $v(x,t) = 0$, а следовательно, и $\nabla_x q(x,t) = 0$ почти всюду в цилиндре Q_T. Лемма доказана.

Лемма 3.3.4. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная или неограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^3$, $n \geqslant 2$, $(n+2)/3 \leqslant p < \infty$, $\nu > 0$, $T > 0$. И пусть $\{v, \nabla_x q\} \in V_p(Q_T) \times L_p(Q_T; \mathbb{R}^n)$ — сильное решение задачи* (3.3.1)*. Если* *область* Ω *удовлетворяет условию* (3.3.2), *а векторное поле* f *удовлетворяет условию*

$$4C^2C_0e^{C\nu T}\nu^{-\frac{n+p}{2p}}T^{\frac{3}{2}-\frac{n+2}{2p}}\|f\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)} < 1, \tag{3.3.21}$$

где C *— постоянная из* (3.2.80), *а* C_0 *— постоянная из* (3.3.4), *то*

$$\|v\|_{\overset{\circ}{E}_{p,\nu}(Q_T;\mathbb{R}^n)} \leqslant 2Ce^{C\nu T}\|f\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)}\,. \tag{3.3.22}$$

Доказательство. Если $\|f\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)} = 0$, то оценка (3.3.22) следует из леммы 3.3.3. Поэтому будем считать, что $\|f\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)} \neq 0$. В системе (3.3.1) перенесем член $(v,\nabla)v$ в правую часть. Тогда согласно теореме 3.2.2 и лемме 3.3.1 имеем

$$\|v\|_{\overset{\circ}{E}_{p,\nu}(Q_t;\mathbb{R}^n)} \leqslant Ce^{C\nu T}\big[\|f\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)} + C_0\nu^{-\frac{n+p}{2p}}T^{\frac{3}{2}-\frac{n+2}{2p}}\|v\|^2_{\overset{\circ}{E}_{p,\nu}(Q_t;\mathbb{R}^n)}\big] \tag{3.3.23}$$

для всех $t \in (0,T)$. Обозначим

$$\sigma_+ = \frac{1+\sqrt{1-4C^2C_0e^{2C\nu T}\nu^{-\frac{n+p}{2p}}T^{\frac{3}{2}-\frac{n+2}{2p}}\|f\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)}}}{2CC_0e^{C\nu T}\nu^{-\frac{n+p}{2p}}T^{\frac{3}{2}-\frac{n+2}{2p}}},$$

$$\sigma_- = \frac{1-\sqrt{1-4C^2C_0e^{2C\nu T}\nu^{-\frac{n+p}{2p}}T^{\frac{3}{2}-\frac{n+2}{2p}}\|f\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)}}}{2CC_0e^{C\nu T}\nu^{-\frac{n+p}{2p}}T^{\frac{3}{2}-\frac{n+2}{2p}}}.$$

Очевидно, $\sigma_+ > \sigma_-$ ввиду (3.3.21).

Заметим, что $\Phi(t) = \|v\|_{\overset{\circ}{E}_{p,\nu}(Q_t;\mathbb{R}^n)}$ — непрерывная функция на $[0,T]$, причем $\Phi(0) = 0$. А из (3.3.23) следует, что для каждого $t \in [0,T]$ выполняется либо неравенство

$$\Phi(t) \geqslant \sigma_+\,, \tag{3.3.24}$$

либо неравенство

$$\Phi(t) \leqslant \sigma_-\,. \tag{3.3.25}$$

В частности, функция Φ не принимает значений между σ_- и σ_+. Если бы для какого-то $t \in [0,T]$ выполнялось неравенство (3.3.24), то в силу непрерывности на $[0,T]$ функция Φ должна была бы принимать все промежуточные значения между $\Phi(0) = 0$ и σ_+ и, в частности, все значения между $\sigma_- > 0$ и $\sigma_+ > \sigma_-$, что невозможно. Следовательно, неравенство (3.3.24) для $t \in [0,T]$ выполняться не может. А тогда для всех $t \in [0,T]$ выполняется неравенство (3.3.25). Из (3.3.25) находим

$$\Phi(t) \leqslant \sigma_- = \frac{\sigma_+\sigma_-}{\sigma_+} \leqslant 2Ce^{C\nu T}\|f\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)} \quad \forall\, t \in [0,T],$$

что завершает доказательство леммы.

Лемма 3.3.5. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная или неограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^3$, $n \geqslant 2$, $(n+2)/3 \leqslant p < \infty$, $\nu > 0$, $T > 0$. И пусть*

$$\{v, \nabla_x q\} \in V_p(Q_T) \times L_p(Q_T; \mathbb{R}^n),$$
$$\{\widetilde{v}, \nabla_x \widetilde{q}\} \in V_p(Q_T) \times L_p(Q_T; \mathbb{R}^n)$$

— два сильных решения задачи (3.3.1) с правыми частями $f \in L_p(Q_T; \mathbb{R}^n)$ и $\widetilde{f} \in L_p(Q_T; \mathbb{R}^n)$ соответственно. Если область Ω удовлетворяет условию (3.3.2), а векторные поля f, $\widetilde{f}$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} &8C^2C_0e^{2C\nu T}\nu^{-\frac{n+p}{2p}}T^{\frac{3}{2}-\frac{n+2}{2p}}\|f\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)} \leqslant 1,\\ &8C^2C_0e^{2C\nu T}\nu^{-\frac{n+p}{2p}}T^{\frac{3}{2}-\frac{n+2}{2p}}\|\widetilde{f}\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)} \leqslant 1, \end{aligned} \tag{3.3.26}$$

где C — постоянная из (3.2.80), а C_0 — постоянная из (3.3.4), то

$$\|v-\widetilde{v}\|_{\overset{\circ}{E}_{p,\nu}(Q_T;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla_x q - \nabla_x \widetilde{q}\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)} \leqslant 2Ce^{C\nu T}\|f-\widetilde{f}\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)}. \tag{3.3.27}$$

Доказательство. Разность решений удовлетворяет системе

$$\begin{cases} (v-\widetilde{v})_t - \nu\Delta(v-\widetilde{v}) + \nabla_x(q-\widetilde{q}) = \\ \qquad = f - \widetilde{f} - (v-\widetilde{v},\nabla)v - (\widetilde{v},\nabla)(v-\widetilde{v}), \\ \operatorname{div}(v-\widetilde{v}) = 0, \quad (v-\widetilde{v})|_{t=0} = 0 \ (v-\widetilde{v})|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{3.3.28}$$

Применяя к системе (3.3.28) теорему 3.2.2 и лемму 3.3.1, получим

$$\begin{gathered} \|v-\widetilde{v}\|_{\overset{\circ}{E}_{p,\nu}(Q_T;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla_x q - \nabla_x \widetilde{q}\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)} \leqslant Ce^{C\nu T}\|f-\widetilde{f}\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)} + \\ + CC_0e^{C\nu T}\nu^{-\frac{n+p}{2p}}T^{\frac{3}{2}-\frac{n+2}{2p}}\Big(\|v\|_{\overset{\circ}{E}_{p,\nu}(Q_T;\mathbb{R}^n)} + \|\widetilde{v}\|_{\overset{\circ}{E}_{p,\nu}(Q_T;\mathbb{R}^n)}\Big)\cdot\|v-\widetilde{v}\|_{\overset{\circ}{E}_{p,\nu}(Q_T;\mathbb{R}^n)}, \end{gathered}$$

откуда и из леммы 3.3.4 следует, что

$$\begin{aligned} &\|v-\widetilde{v}\|_{\overset{\circ}{E}_{p,\nu}(Q_T;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla_x q - \nabla_x \widetilde{q}\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)} \leqslant \\ &\leqslant Ce^{C\nu T}\|f-\widetilde{f}\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)} + M(f,\widetilde{f})\cdot\|v-\widetilde{v}\|_{\overset{\circ}{E}_{p,\nu}(Q_T;\mathbb{R}^n)}, \end{aligned} \tag{3.3.29}$$

где для краткости введено обозначение

$$M(f,\widetilde{f}) = 2C^2C_0e^{2C\nu T}\nu^{-\frac{n+p}{2p}}T^{\frac{3}{2}-\frac{n+2}{2p}}\left[\|f\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)} + \|\widetilde{f}\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)}\right].$$

Подставляя (3.3.26) в (3.3.29), получаем оценку (3.3.27). Лемма доказана.

Теорема 3.3.1. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *— ограниченная или неограниченная область с границей* $\partial\Omega \in C^3$, $n \geqslant 2$, $(n+2)/3 \leqslant p < \infty$, $\nu > 0$, $T > 0$. *Если область* Ω *удовлетворяет условию* (3.3.2), *то для любого* $f \in L_p(Q_T; \mathbb{R}^n)$ *такого, что*

$$8C^2 C_0 e^{2C\nu T} \nu^{-\frac{n+p}{2p}} T^{\frac{3}{2}-\frac{n+2}{2p}} \|f\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)} \leqslant 1, \tag{3.3.30}$$

где C *— постоянная из* (3.2.80), *а* C_0 *— постоянная из* (3.3.4), *существует единственное сильное решение* $\{v, \nabla_x q\} \in V_p(Q_T) \times L_p(Q_T; \mathbb{R}^n)$ *задачи* (3.3.1). *Это решение непрерывно зависит от* f *в смысле оценки* (3.3.27).

Доказательство. Рассмотрим несколько более общую, чем (3.3.1) задачу с комплексным параметром

$$\begin{cases} v_t + (v, \nabla)v - \nu\Delta v + \nabla q = zf(x,t), \\ \operatorname{div} v = 0, \quad (x,t) \in Q_T, \\ v|_{t=0} = 0, \quad v|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{3.3.31}$$

Предположим (а потом и докажем), что сильное решение задачи (3.3.31) аналитично по z в окрестности точки $z = 0$, т. е. $v = v(x,t,z)$ — аналитическое по z векторное поле со значениями в банаховом пространстве $V_p(Q_T)$, а $\nabla_x q(x,t,z)$ — аналитическое по z векторное поле со значениями в банаховом пространстве $L_p\big((0,T); \hat{G}_p(\Omega)\big)$. Обозначим

$$\frac{\partial^m v}{\partial z^m}(x,t,z)\Big|_{z=0} = v^{(m)}(x,t), \qquad \frac{\partial^m \nabla_x q}{\partial z^m}(x,t,z)\Big|_{z=0} = \nabla_x q^{(m)}(x,t)$$

для целых $m \geqslant 0$. Тогда

$$\begin{cases} v_t^{(0)} + (v^{(0)}, \nabla)v^{(0)} - \nu\Delta v^{(0)} + \nabla q^{(0)} = 0, \\ \operatorname{div} v^{(0)} = 0, \quad (x,t) \in Q_T, \\ v^{(0)}|_{t=0} = 0, \quad v^{(0)}|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{3.3.32}$$

Применяя к задаче (3.3.32) лемму 3.3.3, заключаем, что $v^{(0)}(x,t) = 0$ и $\nabla_x q^{(0)}(x,t) = 0$ почти всюду в Q_T.

Дифференцируя в (3.3.31) по z, получаем ввиду предположения об аналитичности решения

$$\begin{cases} v_t^{(1)} - \nu\Delta v^{(1)} + \nabla q^{(1)} = f(x,t), \\ \operatorname{div} v^{(1)} = 0, \quad (x,t) \in Q_T, \\ v^{(1)}|_{t=0} = 0, \quad v^{(1)}|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{3.3.33}$$

Применяя к задаче (3.3.33) теорему 3.2.4, заключаем, что существует единственное сильное решение

$$\{v^{(1)}, \nabla_x q^{(1)}\} \in V_p(Q_{\scriptscriptstyle T}) \times L_p(Q_{\scriptscriptstyle T}; \mathbb{R}^n)$$

задачи (3.3.33). При этом в силу теоремы 3.2.2 имеем

$$\|v^{(1)}\|_{\overset{\circ}{E}_{p,\nu}(Q_{\scriptscriptstyle T};\mathbb{R}^n)} + \|\nabla_x q^{(1)}\|_{L_p(Q_{\scriptscriptstyle T};\mathbb{R}^n)} \leqslant Ce^{C\nu T}\|f\|_{L_p(Q_{\scriptscriptstyle T};\mathbb{R}^n)}\,. \tag{3.3.34}$$

Дифференцируя в (3.3.31) $m \geqslant 2$ раз по z, получаем ввиду предположения об аналитичности решения

$$\begin{cases} v_t - \nu\Delta v^{(m)} + \nabla q^{(m)} = f^{(m)}(x,t), \\ \operatorname{div} v^{(m)} = 0, \quad (x,t) \in Q_{\scriptscriptstyle T}, \\ v^{(m)}|_{t=0} = 0, \quad v^{(m)}|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{3.3.35}$$

где введено обозначение

$$f^{(m)}(x,t) = -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{m!}{j!(m-j)!}\big(v^{(j)}(x,t), \nabla\big)v^{(m-j)}(x,t), \quad m \geqslant 2. \tag{3.3.36}$$

Применяя к задаче (3.3.35) теорему 3.2.4, заключаем, что существует единственное сильное решение $\{v^{(m)}, \nabla_x q^{(m)}\} \in V_p(Q_{\scriptscriptstyle T}) \times L_p(Q_{\scriptscriptstyle T}; \mathbb{R}^n)$ задачи (3.3.35). При этом в силу теоремы 3.2.2 имеем

$$\|v^{(m)}\|_{\overset{\circ}{E}_{p,\nu}(Q_{\scriptscriptstyle T};\mathbb{R}^n)} + \|\nabla_x q^{(m)}\|_{L_p(Q_{\scriptscriptstyle T};\mathbb{R}^n)} \leqslant Ce^{C\nu T}\|f^{(m)}\|_{L_p(Q_{\scriptscriptstyle T};\mathbb{R}^n)} \tag{3.3.37}$$

для всех $m \geqslant 2$.

Из (3.3.36),(3.3.37) и леммы 3.3.1 следует, что

$$\begin{gathered} \|v^{(m)}\|_{\overset{\circ}{E}_{p,\nu}(Q_{\scriptscriptstyle T};\mathbb{R}^n)} \leqslant \\ \leqslant C_{\scriptscriptstyle 1} \sum_{j=1}^{m-1} \frac{m!}{j!(m-j)!}\|v^{(j)}\|_{\overset{\circ}{E}_{p,\nu}(Q_{\scriptscriptstyle T};\mathbb{R}^n)}\|v^{(m-j)}\|_{\overset{\circ}{E}_{p,\nu}(Q_{\scriptscriptstyle T};\mathbb{R}^n)} \end{gathered} \tag{3.3.38}$$

при $m \geqslant 2$, где

$$C_{\scriptscriptstyle 1} = C_{\scriptscriptstyle 1}(\nu, T) = CC_0 e^{C\nu T}\nu^{-\frac{n+p}{2p}}T^{\frac{3}{2}-\frac{n+2}{2p}}\,. \tag{3.3.39}$$

Обозначим

$$\beta_1 = \|v^{(1)}\|_{\overset{\circ}{E}_{p,\nu}(Q_{\scriptscriptstyle T};\mathbb{R}^n)}\,,\ \beta_m = \frac{1}{m!}\|v^{(m)}\|_{\overset{\circ}{E}_{p,\nu}(Q_{\scriptscriptstyle T};\mathbb{R}^n)}\,,\ m \geqslant 2.$$

Тогда (3.3.38) можно переписать в виде

$$\beta_m \leqslant C_1(\nu, T) \sum_{j=1}^{m-1} \beta_j \beta_{m-j} \quad \forall\, m \geqslant 2.$$

Поэтому ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|z|^m}{m!} \cdot \|v^{(m)}\|_{\overset{\circ}{E}_{p,\nu}(Q_T;\mathbb{R}^n)} < \infty \tag{3.3.40}$$

сходится в силу леммы 3.3.2, если

$$4|z| C_1(\nu, T) \|v^{(1)}\|_{\overset{\circ}{E}_{p,\nu}(Q_T;\mathbb{R}^n)} < 1. \tag{3.3.41}$$

Ввиду (3.3.30) и (3.3.34) ряд (3.3.40) будет сходиться в круге $|z| < 2$. Для суммы абсолютно сходящегося ряда введем обозначение

$$v(x, t, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m!} \cdot v^{(m)}(x, t). \tag{3.3.42}$$

Очевидно, $v \in V_p(Q_T)$ в круге $|z| < 2$ ввиду сходимости ряда (3.3.40).

В силу (3.3.36) и леммы 3.3.1 имеем

$$\frac{C}{m!} \cdot \|f^{(m)}\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)} \leqslant C_1(\nu, T) e^{-C\nu T} \sum_{j=1}^{m-1} \beta_j \beta_{m-j} \quad \forall\, m \geqslant 2.$$

Поэтому в силу (3.3.30),(3.3.34),(3.3.41) и леммы 3.3.2 ряд

$$\sum_{m=2}^{\infty} \frac{|z|^m}{m!} \cdot \|f^{(m)}\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)} < \infty$$

будет сходиться в круге $|z| < 2$. А тогда из (3.3.35) следует сходимость ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|z|^m}{m!} \cdot \|\nabla_x\, q^{(m)}\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)} < \infty$$

при $|z| < 2$. Для суммы абсолютно сходящегося ряда введем обозначение

$$\nabla_x\, q(x, t, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m!} \cdot \nabla_x\, q^{(m)}(x, t).$$

Очевидно, $\nabla_x q \in L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)$ в круге $|z| < 2$.

В силу построения пара векторных полей, составленная из $v(x,t,z)$ и $\nabla_x q(x,t,z)$, являются решением задачи (3.3.31) с искусственно введенным комплексным параметром z в круге $|z| < 2$. Таким образом, доказано существование при $|z| < 2$ сильного решения $\{v, \nabla_x q\} \in V_p(Q_T) \times L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)$ задачи (3.3.31), являющегося аналитическим по z в круге $|z| < 2$. Единственность этого решения и его непрерывная зависимость от z при $|z| < 2$ в классе сильных решений гарантированы леммой 3.3.5. Полагая $z = 1$, получаем утверждение теоремы 3.3.1, так как при $z = 1$ равенства (3.3.31) переходят в равенства (3.3.1). Теорема доказана.

В заключение остановимся на критерии единственности сильных решений начально-краевой задачи для нелинейной системы Навье–Стокса в неограниченной области с гладкой некомпактной границей. Критерием единственности сильных решений, как и в линейном случае, здесь выступает условие совпадения пространств (3.2.118). Напомним о связи (3.2.119) между пространствами соленоидальных векторных полей для неограниченных областей с гладкими некомпактными границами.

Лемма 3.3.6. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — неограниченная область с некомпактной границей $\partial\Omega \in C^3$, $n \geqslant 2$, $(n+2)/3 \leqslant p < \infty$, $\nu > 0$, $T > 0$. Если для области Ω имеет место разложение* (3.3.2)*, то сильное решение $\{v, \nabla_x q\} \in \hat{V}_p(Q_T) \times L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)$ задачи* (3.3.1) *будет единственным тогда и только тогда, когда совпадают пространства* (3.2.118).

Доказательство. В силу определения пространств $V_p(Q_T)$ и $\hat{V}_p(Q_T)$ на с. 116 имеем

$$\hat{V}_p(Q_T) = V_p(Q_T) \quad \Longleftrightarrow \quad \overset{\hat{\circ}}{J}{}^1_p(\Omega) = \overset{\circ}{J}{}^1_p(\Omega).$$

Подчеркнем, что в лемме 3.3.6 речь идет о единственности сильных решений «в целом». Докажем сначала, что в случае совпадения пространств (3.2.118) из уже установленной локальной единственности следует глобальная единственность сильного решения $\{v, \nabla_x q\} \in \hat{V}_p(Q_T) \times L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)$ нелинейной задачи (3.3.1).

1. Если $\overset{\hat{\circ}}{J}{}^1_p(\Omega) = \overset{\circ}{J}{}^1_p(\Omega)$, то $\hat{V}_p(Q_T) = V_p(Q_T)$. Число $\tau \in (0,T)$ выберем настолько малым, чтобы выполнялось условие

$$8C^2 C_0 e^{2C\nu\tau} \nu^{-\frac{n+p}{2p}} \tau^{\frac{3}{2}-\frac{n+2}{2p}} \|f\|_{L_p(Q_\tau;\mathbb{R}^n)} \leqslant 1.$$

Тогда сильное решение $\{v, \nabla_x q\}$ единственно в Q_τ согласно лемме 3.3.5. Пусть T_0 — максимальное значение $\tau \in (0,T]$, при котором сильное решение $\{v, \nabla_x q\}$ единственно в Q_τ. Очевидно, $0 < T_0 \leqslant T$. Покажем, что

$T_0 = T$. Действительно, если $T_0 < T$, то существуют хотя бы два сильных решения

$$\{v, \nabla_x q\} \in V_p(Q_T) \times L_p(Q_T; \mathbb{R}^n), \qquad \{\widetilde{v}, \nabla_x \widetilde{q}\} \in V_p(Q_T) \times L_p(Q_T; \mathbb{R}^n)$$

задачи (3.3.1), которые совпадают тождественно при $t \leqslant T_0$ и не совпадают при $t > T_0$.

Число $\delta > 0$ выберем настолько малым, чтобы выполнялось условие

$$Ce^{C\nu\delta}\nu^{-\frac{n+p}{2p}}\delta^{\frac{3}{2}-\frac{n+2}{2p}}\Big(\|v\|_{\overset{\circ}{E}_{p,\nu}(Q_\delta;\mathbb{R}^n)} + \|\widetilde{v}\|_{\overset{\circ}{E}_{p,\nu}(Q_\delta;\mathbb{R}^n)}\Big) \leqslant \frac{1}{2}\,, \tag{3.3.43}$$

где $Q_\delta = \Omega \times (T_0\,, T_0 + \delta)$. Но $(v - \widetilde{v})|_{t=T_0} = 0$ и

$$(v - \widetilde{v})_t - \nu\Delta(v - \widetilde{v}) + \nabla_x\,(q - \widetilde{q}) = -(v - \widetilde{v}, \nabla)v - (\widetilde{v}, \nabla)(v - \widetilde{v}),$$

откуда и из (3.3.43), пользуясь теоремой 3.2.2 и леммой 3.3.1, получим, что $\|v - \widetilde{v}\|_{\overset{\circ}{E}_{p,\nu}(Q_\delta;\mathbb{R}^n)} = 0$, т. е. $\widetilde{v}(x,t) = v(x,t)$ и $\nabla_x \widetilde{q}(x,t) = \nabla_x q(x,t)$ почти всюду в Q_δ. Следовательно, неравенство $T_0 < T$ выполняться не может. Это означает, что $T_0 = T$. И таким образом, предположение о совпадении пространств (3.2.118) влечет за собой глобальную единственность сильного решения $\{v, \nabla_x q\} \in V_p(Q_T) \times L_p(Q_T; \mathbb{R}^n)$ нелинейной задачи (3.3.1).

2. Если $\hat{\overset{\circ}{J}}{}^1_p(\Omega) \neq \overset{\circ}{J}{}^1_p(\Omega)$, то в силу леммы 3.2.5 существует сильное решение $\{u, \nabla_x \psi\} \in \hat{V}_p(Q_T) \times L_p(Q_T; \mathbb{R}^n)$ задачи

$$\begin{cases} u_t - \nu\Delta u + \nabla\psi = 0, \\ \operatorname{div} u = 0, \; (x,t) \in Q_T\,, \\ u|_{t=0} = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

такое, что $\|v\|_{\overset{\circ}{E}_{p,\nu}(Q_T;\mathbb{R}^n)} = 1$.

Пусть $v^{(1)}(x,t) = u(x,t)$, $\nabla_x q^{(1)}(x,t) = \nabla_x \psi(x,t)$. При $m \geqslant 2$ векторные поля $\{v^{(m)}, \nabla_x q^{(m)}\} \in V_p(Q_T) \times L_p(Q_T; \mathbb{R}^n)$ определим как сильные решения задач (3.3.35) и заметим, что ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|z|^m}{m!} \cdot \big(\|v^{(m)}\|_{\overset{\circ}{E}_{p,\nu}(Q_T;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla_x q^{(m)}\|_{L_p(Q_T;\mathbb{R}^n)}\big) < \infty$$

сходится, если $4|z|C_1(\nu, T) < 1$, где $C_1(\nu, T)$ имеет вид (3.3.39). Для сумм абсолютно сходящихся рядов введем обозначения

$$v(x,t,z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m!} \cdot v^{(m)}(x,t),$$
$$\nabla_x q(x,t,z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m!} \cdot \nabla_x q^{(m)}(x,t).$$

Тогда $\{v, \nabla_x q\} \in \hat{V}_p(Q_T) \times L_p(Q_T; \mathbb{R}^n)$, если $0 < 4|z|C_1(\nu,T) < 1$. При этом $\{v, \nabla_x q\}$ будет сильным решением нелинейной задачи (3.3.1) с правой частью $f = 0$, т. е. $z \neq 0$ не входит явно в постановку задачи (3.3.31).

Заметим, что равенство $\|v\|_{\overset{\circ}{E}_{p,\nu}(Q_T;\mathbb{R}^n)} = 0$ не может выполняться сразу для всех z в круге $4|z|C_1(\nu,T) < 1$. Действительно, в противном случае из равенства $\|v\|_{\overset{\circ}{E}_{p,\nu}(Q_T;\mathbb{R}^n)} = 0$ в силу аналитичности по z следовало бы равенство $\|v^{(1)}\|_{\overset{\circ}{E}_{p,\nu}(Q_T;\mathbb{R}^n)} = 0$. Но

$$\|v^{(1)}\|_{\overset{\circ}{E}_{p,\nu}(Q_T;\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{\overset{\circ}{E}_{p,\nu}(Q_T;\mathbb{R}^n)} = 1.$$

Поэтому в круге $4|z|C_1(\nu,T) < 1$ найдутся такие z, что $\|v\|_{\overset{\circ}{E}_{p,\nu}(Q_T;\mathbb{R}^n)} \neq 0$.

В то же время задача (3.3.1) с правой частью $f = 0$ имеет, очевидно, еще и тривиальное решение $v = \nabla_x q = 0$. Это означает неединственность сильных решений $\{v, \nabla_x q\} \in \hat{V}_p(Q_T) \times L_p(Q_T; \mathbb{R}^n)$ задачи (3.3.1). Таким образом, совпадение пространств (3.2.118) необходимо для единственности сильных решений $\{v, \nabla_x q\} \in \hat{V}_p(Q_T) \times L_p(Q_T; \mathbb{R}^n)$ нелинейной начально-краевой задачи (3.3.1). Лемма доказана.

Замечание 3.3.2. Лемму 3.3.6 можно усилить, отбросив предположение о выполнении условия (3.3.2). Без этого условия существенно усложняется доказательство необходимости совпадения пространств (3.2.118) для единственности сильных решений нелинейной задачи (3.3.1). При этом на доказательство достаточности предположение о выполнении условия (3.3.2), по существу, никакого влияния не оказывает.

Глава 4

Аппроксимация решений в пространствах Соболева

Эта глава посвящена методам численного решения краевых и начально-краевых задач для нелинейной нестационарной системы Навье–Стокса. Для решения нелинейной задачи наиболее эффективным оказывается итерационный метод Ньютона, известный своей сверхсходимостью. Практическое применение метода Ньютона наталкивается на две серьезные проблемы: обращение производной Фреше нелинейного отображения и выбор начального приближения.

В первом параграфе разработан на дифференциальном уровне эффективный метод обращения производной Фреше нелинейного отображения, соответствующего первой начально-краевой задаче для нестационарной системы Навье–Стокса. При этом решение соответствующей линейной начально-краевой задачи с переменными коэффициентами выписывается в виде ряда, члены которого образуют рекуррентную последовательность, строящуюся с помощью разрешающего оператора линейной начально-краевой задачи Стокса без конвективных членов. Установлена сходимость такого ряда со скоростью геометрической прогрессии в норме сильного решения. Метод перспективен для разработки практической численной реализации метода Ньютона для нестационарных уравнений Навье–Стокса.

Кроме того, в первом параграфе разработан новый подход к построению начального приближения для метода Ньютона при решении начально-краевой задачи для системы Навье–Стокса. Подход позволяет построить начальное приближение в гарантированно малой окрестности искомого сильного решения и основан на использовании известной регуляризации Варнхорна уравнений Навье–Стокса с параметром регуляризации, представляющим собой величину запаздывания по времени в конвективном члене. Регуляризованное решение, отвечающее любому ненулевому значению параметра регуляризации, выписывается в виде ряда, члены которого образуют рекуррентную последовательность и строятся с помощью разрешающего оператора линейной начально-краевой задачи Стокса без конвективных членов. Установлена сходимость такого ряда со скоростью геометрической прогрессии в норме сильного решения.

Таким образом, в первом параграфе задача создания высокоэффективных и высокоточных алгоритмов численного решения начально-краевой задачи для нелинейной системы Навье–Стокса сводится к созданию таких алгоритмов для линейной системы Стокса без конвективных членов.

Во втором параграфе рассматриваются методы численного решения линейных краевых и начально-краевых задач, в основе которых лежит аппроксимация решениями. При этом решение ищется в виде линейной комбинации по заранее построенной базисной системе решений. Неизвестными являются коэффициенты линейных комбинаций, которые определяются из условия минимизации невязки краевых и начальных данных. При таком подходе первостепенную важность приобретают вопросы построения базисных систем решений. Эти вопросы и разбираются во втором параграфе в первую очередь на примере более простых эллиптических краевых задач.

В третьем параграфе подробно разбирается адаптированное для студентов доказательство теоремы Браудера об аппроксимации решений однородного эллиптического уравнения в пространствах Соболева решениями того же уравнения в более широкой области. При этом на части границы более широкой области можно потребовать выполнения каких-либо однородных граничных условий, что открывает широкие возможности построения базисных систем решений, например, с помощью разделения переменных. Теорема Браудера легко переносится на стационарную и нестационарную системы Стокса.

4.1. Метод Ньютона для уравнений Навье–Стокса

В этом параграфе выводится представление оператора, обратного к производной по Фреше для нелинейной системы Навье–Стокса в виде операторного ряда, члены которого образуют рекуррентную последовательность и выражаются через разрешающие операторы для линейной нестационарной системы Стокса. Исследуется сходимость построенного ряда в норме неизотропного пространства Соболева. Строится начальное приближение при решении методом Ньютона начально-краевой задачи для нелинейной системы Навье–Стокса. Такое приближение строится в виде ряда, сходящегося со скоростью геометрической прогрессии в норме сильного решения к известному приближению Варнхорна. Члены ряда образуют рекуррентную последовательность и строятся с помощью разрешающего оператора линейной нестационарной задачи Стокса.

Как известно, при численном решении начально-краевых задач для нелинейной системы уравнений Навье–Стокса реализация знаменитого своей сверхсходимостью метода Ньютона осложняется двумя сугубо практическими проблемами: обращением производной Фреше соответствующего нелинейного отображения и выбором начального приближения из достаточно малой окрестности искомого решения. В этом разделе излагается новый эффективный подход к обращению производной Фреше. Проблема выбора начального приближения является темой следующего раздела.

В ограниченной или неограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с компактной границей $\partial\Omega \in C^2$ рассматривается начально-краевая задача для нелинейной системы Навье–Стокса

$$\begin{cases} v_t + (v, \nabla)v - \nu\Delta v + \nabla q = f(x,t), \\ \operatorname{div} v = 0, \ (x,t) \in Q_T = \Omega \times (0,T), \\ v|_{t=0} = a(x), \ \operatorname{div} a = 0, \ x \in \Omega, \\ v|_{\partial\Omega} = 0, \ t \in (0,T), \ a|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{4.1.1}$$

Сильное решение задачи (4.1.1) определяется как упорядоченная пара

$$\{v, \nabla q\} \in W_{2,x,t}^{2,1}(Q_T;\mathbb{R}^3) \times L_2(Q_T;\mathbb{R}^3)$$

с анизотропным пространством Соболева $W_{2,x,t}^{2,1}$ векторных полей $v : Q_T \to \mathbb{R}^3$, имеющих квадратично суммируемые обобщенные производные по Соболеву v_t, $D_x^\alpha v \in L_2(Q_T;\mathbb{R}^3)$ для всех мультииндексов α таких, что $|\alpha| \leqslant 2$. Случай некомпактной границы $\partial\Omega$ здесь не затрагивается лишь по той причине, что определение сильного решения в этом случае нуждается в уточнении и требует особого внимания ввиду возможной неединственности сильного решения.

Подпространство $H_T = \{v(x,t) \in W_{2,x,t}^{2,1}(Q_T;\mathbb{R}^3)\colon \operatorname{div} v = 0, \ v|_{\partial\Omega} = 0\}$ рассматривается как гильбертово пространство с индуцированной нормой. Аналогичным образом через G_T обозначим замкнутое подпространство всех потенциальных векторных полей $\nabla_x \psi \in L_2(Q_T;\mathbb{R}^3)$, считая его гильбертовым пространством с индуцированной нормой. Для нелинейного отображения, соответствующего начально-краевой задаче (1), обращение производной Фреше на элементе $\{v, \nabla q\} \in H_T \times G_T$ при любом заданном фиксированном $v \in H_T$ требует решения линейной задачи

$$\begin{cases} u_t + (u,\nabla)v + (v,\nabla)u - \nu\Delta u + \nabla\psi = g, \\ u|_{t=0} = b,\ \{u, \nabla\psi\} \in H_T \times G_T\,, \end{cases} \tag{4.1.2}$$

для всех $g \in L_2(Q_T; \mathbb{R}^3)$, $b \in J(\Omega)$, где

$$J(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \{w(x) \in W_2^1(\Omega; \mathbb{R}^3)\colon \operatorname{div} w = 0,\ w|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Искусственно вводя комплексный параметр $z \in \mathbb{C}$, рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{cases} u_t + z\cdot(u,\nabla)v + z\cdot(v,\nabla)u - \nu\Delta u + \nabla\psi = z\cdot g, \\ u|_{t=0} = z\cdot b,\ \{u, \nabla\psi\} \in H_T \times G_T\,. \end{cases} \tag{4.1.3}$$

Решение задачи (4.1.2) в силу своей единственности совпадет с решением задачи (4.1.3) при $z = 1$. Справедлива следующая

Теорема 4.1.1. *Для каждого $g \in L_2(Q_T; \mathbb{R}^3)$, $b \in J(\Omega)$, $z \in \mathbb{C}$ существует единственное решение задачи* (3). *Это решение является целой функцией $z \in \mathbb{C}$ со значениями в $H_T \times G_T$.*

В силу теоремы 4.1.1 сильное решение задачи (4.1.3) представимо в виде ряда Тейлора

$$\{u(x,t,z), \nabla\psi(x,t,z)\} = \sum_{k=1}^{\infty} \{u^k(x,t), \nabla\psi^k(x,t)\}\frac{z^k}{k!},\ z \in \mathbb{C}, \tag{4.1.4}$$

сходящегося в норме $H_T \times G_T$ на любом компакте в $\mathbb{C}$. Очевидно, члены ряда (4.1.4) образуют рекуррентную последовательность, которая строится с помощью разрешающего оператора линейной задачи Стокса без конвективных членов:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} u_t^1 - \nu\Delta u^1 + \nabla\psi^1 = g, \\ u^1|_{t=0} = b,\ \{u^1, \nabla\psi^1\} \in H_T \times G_T\,, \end{cases} \\ &\begin{cases} u_t^k - \nu\Delta u^k + \nabla\psi^k = -k\cdot(u^{k-1},\nabla)v - k\cdot(v,\nabla)u^{k-1}, \\ u^k|_{t=0} = 0,\ \{u^k, \nabla\psi^k\} \in H_T \times G_T\,,\ k \geqslant 2. \end{cases} \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

Из теоремы 4.1.1 и неравенства Коши (см. [48], с. 348) вытекает, что ряд (4.1.4) сходится в норме $H_T \times G_T$ со скоростью геометрической прогрессии со сколь угодно малым знаменателем.

При решении нелинейной задачи (4.1.1) методом Ньютона для построения подходящего начального приближения оказывается эффективной регуляризация Варнхорна [84] задачи (4.1.1), сводящаяся к введению запаздывания в конвективном члене. Точнее, рассмотрим задачу с малым параметром $\varepsilon > 0$ вида

$$\begin{cases} v_t + (\mathcal{S}_\varepsilon v, \nabla)v - \nu\Delta v + \nabla q = f, \\ v|_{t=0} = a, \ \{v, \nabla q\} \in H_T \times G_T\,, \end{cases} \tag{4.1.6}$$

где $\mathcal{S}_\varepsilon$ — оператор сдвига по t такой, что $\mathcal{S}_\varepsilon v(x,t) = v(x, t-\varepsilon)$ при $t \geq \varepsilon$, тогда как $\mathcal{S}_\varepsilon v(x,t) = a(x)$ при $t < \varepsilon$. Нетрудно убедиться, что всякое сильное решение задачи (4.1.1) при $\varepsilon \to +0$ аппроксимируется в норме $H_T \times G_T$ последовательностью регуляризованных решений (4.1.6).

Вводя по аналогии с (4.1.3) комплексный параметр $z \in \mathbb{C}$, рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{cases} v_t + z\cdot(\mathcal{S}_\varepsilon v, \nabla)v - \nu\Delta v + \nabla q = z\cdot f, \\ v|_{t=0} = z\cdot a, \ \{v, \nabla q\} \in H_T \times G_T\,, \end{cases} \tag{4.1.7}$$

Ввиду единственности сильного решения задачи (4.1.1) оно должно совпасть с решением задачи (4.1.7) при $z = 1$. Справедлива следующая

Теорема 4.1.2. *Для каждого $f \in L_2(Q_T;\mathbb{R}^3)$, $a \in J(\Omega)$, $z \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$ существует единственное решение задачи* (4.1.7)*. Это решение является целой функцией $z \in \mathbb{C}$ со значениями в $H_T \times G_T$.*

В силу теоремы 4.1.2, при $\varepsilon > 0$ сильное решение задачи (4.1.7) представимо в виде ряда Тейлора

$$\{v(x,t,z), \nabla q(x,t,z)\} = \sum_{k=1}^{\infty}\{v^k(x,t), \nabla q^k(x,t)\}\frac{z^k}{k!}, \ z \in \mathbb{C}, \tag{4.1.8}$$

сходящегося в норме $H_T \times G_T$ на любом компакте в $\mathbb{C}$. При этом члены ряда (4.1.8) образуют рекуррентную последовательность, которая строится с помощью разрешающего оператора линейной задачи Стокса без конвективных членов:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} v_t^1 - \nu\Delta v^1 + \nabla q^1 = f, \\ v^1|_{t=0} = a, \ \{v^1, \nabla q^1\} \in H_T \times G_T\,, \end{cases} \\ &\begin{cases} v_t^k - \nu\Delta v^k + \nabla q^k = -k!\displaystyle\sum_{m=1}^{k-2}\frac{(\mathcal{S}_\varepsilon v^m, \nabla)v^{k-1-m}}{m!(k-1-m)!}, \\ v^k|_{t=0} = 0, \ \{v^k, \nabla q^k\} \in H_T \times G_T\,, \ k \geq 3, \end{cases} \end{aligned} \tag{4.1.9}$$

где $\{v^2, \nabla q^2\} = 0$. Из теоремы 4.1.2 и неравенства Коши (см. [48], с. 348) вытекает сходимость ряда (4.1.9) в норме $H_T \times G_T$ со скоростью геометрической прогрессии со сколь угодно малым знаменателем.

4.2. Эллиптические краевые задачи

Для однородных уравнений аналитико-численные методы основываются на аппроксимации искомых решений линейными комбинациями по базисной системе решений рассматриваемых уравнений. Коэффициенты линейных комбинаций определяются из условий минимизации невязки начальных и граничных данных. В качестве примера подробно разбирается проблема определения коэффициентов в задаче Дирихле для оператора Лапласа в плоской области. При этом новый подход к старой проблеме определения коэффициентов обеспечивает равномерную сходимость к решению в замыкании области. В случае неоднородного уравнения в ограниченной области частные решения уравнения удобно аппроксимировать тригонометрическими многочленами. В связи с этим во втором параграфе рассматриваются некоторые вопросы интерполяции и аппроксимации тригонометрическими многочленами, являющиеся важной составной частью аналитико-численных методов решения краевых и начально-краевых задач для линейных уравнений в частных производных.

Важную роль в аналитико-численных методах для линейных уравнений играют теоремы Феликса Браудера об аппроксимации решений гипоэллиптических уравнений в нормах пространств Соболева решениями тех же уравнений в областях, содержащих рассматриваемую область как подобласть. Во втором параграфе излагается новый подход к доказательству теорем Браудера, делающий их вполне доступными для студентов магистратуры. При этом новый подход открывает широкие возможности для усиления теорем Браудера, позволяя требовать от аппроксимирующей последовательности решений выполнения однородных граничных условий на части границы, что очень важно для практической реализации метода, так как открываются широкие возможности построения систем базисных решений с помощью привычного разделения переменных. Новый подход к доказательству теорем Браудера позволяет перенести их на системы уравнений, эллиптических по Дуглису–Ниренбергу, к каковым относится нужная нам стационарная система Стокса, для которой в этой главе приводятся примеры построения базисных систем решений для ограниченных и неограниченных областей в $\mathbb{R}^2$ и в $\mathbb{R}^3$. Особо выделяется случай неограниченных областей с компактными границами, т. е. случай задач обтекания. При этом в качестве примера рассматриваются хорошо известные классические базисные системы решений Ламба.

Одним из основоположников рассматриваемого подхода можно считать Жана Батиста Жозефа Фурье, кто первым попробовал искать коэффициенты ряда по ортогональному базису

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx, \quad x \in (0, \pi), \tag{4.2.1}$$

решая линейную алгебраическую систему бесконечного порядка

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi r_k) = u(\pi r_k), \quad k \geqslant 1, \tag{4.2.2}$$

где $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ — все рациональные числа на интервале $(0, 1)$. Задача об определении коэффициентов $\{c_n\}$ из системы (4.2.2) была им успешно решена в явном виде и ее решение можно найти в «Аналитической теории тепла», опубликованной Фурье в 1822 г. В то время еще не были известны пространства Лебега $L_2(0, \pi)$, и тем более никто не знал, что система $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ образует ортогональный базис в $L_2(0, \pi)$. Но уже были хорошо известны коэффициенты Эйлера

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(x) \sin nx \, dx, \quad n \geqslant 1, \tag{4.2.3}$$

и свойство ортогональности системы $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ на интервале $(0, 1)$.

Конечно, с точки зрения чистой математики решение Эйлера (4.2.3) выглядит предпочтительнее. Но с точки зрения практических вычислений с конечной разрядной сеткой интегралы (4.2.3) от быстро осциллирующих функций вовсе не так привлекательны, как простой для программирования метод Фурье решения системы (4.2.2).

Способ нахождения коэффициентов разложения (4.2.1) имеет самое непосредственное отношение к численному решению краевых задач. В качестве простого примера рассмотрим краевую задачу Дирихле для уравнения Лапласа на плоскости

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \ x \in K_1, \\ u|_{\partial K_1} = \psi \end{cases} \tag{4.2.4}$$

в единичном круге $K_1 = \{x \in \mathbb{R}^2\colon |x| < 1\}$. Решение задачи (4.2.4) легко строится методом разделения переменных. Опуская хорошо известные подробности, выпишем решение в полярных координатах

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n r^{|n|} e^{in\varphi},\ r < 1,\ \varphi \in [0, 2\pi]. \tag{4.2.5}$$

Для определения коэффициентов a_n имеем равенство

$$\psi(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{in\varphi},\ \varphi \in [0, 2\pi]. \tag{4.2.6}$$

Построим интерполяционный тригонометрический многочлен для функции ψ на отрезке $[0, 2\pi]$. Выберем равноотстоящие узлы

$$\varphi_k = \frac{2\pi k}{2N+1},\ k = 0, \ldots, 2N \tag{4.2.7}$$

и рассмотрим линейную алгебраическую систему

$$\sum_{n=-2N}^{2N} a_n e^{in\varphi_k} = \psi(\varphi_k),\ k = 0, \ldots, 2N, \tag{4.2.8}$$

которую удобно переписать в векторном виде

$$\sum_{n=-2N}^{2N} a_n H^n = b,\ k = 0, \ldots, 2N, \tag{4.2.9}$$

где H^n, b — вектор-столбцы с компонентами $H^n_k = e^{in\varphi_k}$, $b_k = \psi(\varphi_k)$, $k = 0, \ldots, 2N$.

Обозначим через $(.\,,.)$ скалярное произведение в $\mathbb{C}^{2N+1}$. Хорошо известно (см., например, [15]) следующее утверждение

Лемма 4.2.1. *Пусть $N \geqslant 1$. Тогда $(H^n, H^m) = 0$ при $n \neq m$.*

Доказательство. Заметим, что

$$(H^n, H^m) = \sum_{k=0}^{2N} H^n_k \overline{H^m_k} = \sum_{k=0}^{2N} e^{i(n-m)\varphi_k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{2N} e^{i(n-m)\frac{2\pi k}{2N+1}} = \sum_{k=0}^{2N} q^k = \frac{q^{2N+1}-1}{q-1},$$

где знаменатель геометрической прогрессии

$$q = e^{\frac{2\pi i(n-m)}{2N+1}}.$$

Очевидно, равенство $q = 1$ невозможно, так как $n \neq m$ и $n - m \neq 2N + 1$. При этом $q^{2N+1} = e^{2\pi i(n-m)} = 1$, т. е. $(H^n, H^m) = 0$, что и требовалось доказать.

Из только что доказанной леммы вытекает

Следствие 4.2.1. Система $\{H^n\}_{n=-N}^{N}$ образует ортогональный базис в $\mathbb{C}^{2N+1}$, при этом $|H^n|^2 = 2N + 1$.

Теперь линейная алгебраическая система (4.2.9) решается в явном виде. А именно,

$$a_n = \frac{(b, H^n)}{2N+1} = \frac{1}{2N+1}\sum_{k=0}^{2N}\psi(\varphi_k)e^{-in\varphi_k},\ |n| \leqslant N \tag{4.2.10}$$

Очевидно, тригонометрический многочлен

$$P_N(\varphi) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{in\varphi} = \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} e^{in\varphi}\sum_{k=0}^{2N}\psi\Big(\frac{2\pi k}{2N+1}\Big)e^{-\frac{2\pi ink}{2N+1}} \tag{4.2.11}$$

будет интерполяционным для функции φ на $[0, 2\pi]$, так как

$$P_N(\varphi_j) = \psi(\varphi_j), \quad j = 0, \ldots, 2N. \tag{4.2.12}$$

В монографии А. Зигмунда [15] приведены примеры непрерывных и периодических с периодом 2π функций ψ, для которых нет равномерной сходимости $P_N(\varphi)$ к $\psi(\varphi)$ при $N \to \infty$. Тем не менее имеет место более слабая сходимость в $L_2(0, 2\pi)$. Точнее, справедлива следующая

Теорема 4.2.1. *Если $\psi \in C[0, 2\pi]$, то интерполяционные многочлены $P_N(\psi) \to \psi$ при $N \to \infty$ слабо в $L_2(0, 2\pi)$.*

Из слабой сходимости интерполяционных многочленов в $L_2(0, 2\pi)$ выводится их сильная сходимость. А именно, справедлива

Теорема 4.2.2. *Если $\psi \in C[0, 2\pi]$, то интерполяционные многочлены $P_N(\psi) \to \psi$ при $N \to \infty$ сильно в $L_2(0, 2\pi)$.*

Дальнейшее усиление сходимости в общем случае невозможно. В главе 10 второго тома «Тригонометрических рядов» А. Зигмунда имеется раздел 8, озаглавленный «Расходимость интерполяционных многочленов», где приводится пример непрерывной функции ψ, для которой ряд Фурье сходится равномерно, а последовательность интерполяционных многочленов $P_N(\psi)$ расходится почти всюду.

Вернемся к краевой задаче (4.2.4). Обозначим

$$u_N = \sum_{n=-N}^{N} a_n r^{|n|} e^{in\varphi}. \tag{4.2.13}$$

Частичную сумму u_N будем называть приближенным решением.

Теорема 4.2.3. *Если $\psi \in W_2^1(0, 2\pi)$ и $\psi(0) = \psi(2\pi)$, то последовательность u_N при $N \to \infty$ сходится в $W_2^{3/2}(0, 2\pi)$.*

Из теоремы 4.2.3 вытекает сильная сходимость последовательности приближенных решений в норме $C(\overline{K}_1)$ и даже в норме класса Гёльдера. Если для односвязной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ известно конформное отображение на круг, то для области Ω строится базисная система решений, коэффициенты линейных комбинаций по которым определяются из условия интерполяции граничных данных. При этом узлы интерполяции определяются с помощью того же конформного отображения как образы равноотстоящих узлов на окружности.

4.3. Теоремы Браудера

Для линейного дифференциального оператора в частных производных $\mathcal{A}$ в статье Ф. Браудера [55] изучалась возможность аппроксимации решений уравнения

$$\mathcal{A}\, u = 0, \quad x \in \omega,$$

для области $\omega \in \mathbb{R}^n$ решениями того же уравнения

$$\mathcal{A}\, u = 0, \quad x \in \Omega,$$

для какой-либо области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, подобластью которой является ω, где $n \geqslant 2$. Возможность такой аппроксимации установлена в [55] для различных функциональных пространств, включая пространства Соболева и двойственные к ним пространства функционалов. Проблема описания классов линейных дифференциальных операторов в частных производных, обладающих такими свойствами аппроксимации решений, представляется весьма важной и интересной, но выходящей за рамки данного учебного пособия. Отметим только, что такая аппроксимация возможна для всех уравнений и систем типа Ковалевской, которые, однако, далеко не исчерпывают класс всех тех уравнений и систем, для которых такая аппроксимация возможна. В упомянутой статье Ф. Браудера [55] возможность такой аппроксимации была установлена лишь для класса гипоэллиптических операторов в функциональных пространствах W_p^l и C^l.

До статьи Ф. Браудера [55] о возможности такой аппроксимации решений было известно только для оператора Лапласа $\mathcal{A} = \Delta$ и только в случае $n = 2$. При этом задача аппроксимации формулировалась, как правило, для аналитических функций комплексной переменной, и аппроксимация понималась как равномерная сходимость на каких-то заданных подмножествах. Именно в таких формулировках эта задача аппроксимации изучалась М. А. Лаврентьевым, М. В. Келдышем, С. Н. Мергеляном и Дж. Уолшем (см. [30, 47, 66]). Поэтому в [55] эта задача была названа задачей аппроксимации Лаврентьева–Келдыша–Мергеляна–Уолша. После статьи Браудера [55] эту задачу аппроксимации для гипоэллиптических операторов в $\mathbb{R}^n$ было бы естественно называть задачей аппроксимации Лаврентьева–Келдыша–Мергеляна–Уолша–Браудера.

Важным приложением такой задачи аппроксимации является численное решение краевых задач для линейных гипоэллиптических уравнений и систем, когда для какой-либо области известна некоторая система решений однородного уравнения (соответственно однородной системы) с линейной оболочкой, всюду плотной в подпространстве решений однородного уравнения (соответственно однородной системы). Такую систему решений естественно назвать базисной. Конечными линейными комбинациями по базисной системе можно аппроксимировать решение краевой гипоэллиптической задачи для любой подобласти, удовлетворяющей легко проверяемым условиям геометрического характера. Коэффициенты линейных комбинаций находятся при этом из условия минимизации невязки заданных граничных данных.

Например, для любой ограниченной односвязной области $\omega \in \mathbb{R}^n$ с липшицевой границей $\partial\omega$, т. е. для ограниченной области $\omega \in \mathbb{R}^n$ со связной липшицевой границей $\partial\omega$, всякую гармоническую в ω функцию $u \in W_p^l(\omega)$ можно аппроксимировать в норме пространства Соболева $W_p^l(\omega)$ функциями, гармоническими в любом шаре, содержащем ω, т. е. однородными гармоническими многочленами. Такая аппроксимация возможна при любых значениях показателя $p \in [1, \infty)$ и любых натуральных l. Чем ближе геометрически область ω к шару, тем устойчивее аппроксимация однородными гармоническими многочленами в том смысле, что коэффициенты в линейных комбинациях многочленов достаточно быстро стремятся к нулю с ростом степени соответствующих многочленов. Если область ω сильно отличается от шара, то для аппроксимации гармонических функций лучше выбрать не гармонические многочлены, а систему функций, гармонических в некоторой области Ω, достаточно близкой к заданной $\omega \subset \Omega$. Так, гармоническую в сильно вытянутой области ω функцию можно аппроксимировать в ω функциями, гармоническими в близком к ω параллелепипеде $\Omega \supset \omega$ и имеющими нулевые краевые условия Дирихле или Неймана на части границы $\partial\Omega$, например, на всех гранях параллелепипеда Ω, за исключением какой-либо одной.

Для неограниченной области гармонические многочлены уже не годятся и используются их инверсии, т. е. функции, полученные из гармонических многочленов с помощью преобразования Кельвина относительно какой-либо точки, лежащей вне рассматриваемой области. Точнее, если область $\omega \in \mathbb{R}^n$ со связной липшицевой границей является неограниченной, то гармоническую в ω функцию $u \in W_p^l(\omega)$ можно аппроксимировать в $W_p^l(\omega)$ инверсиями гармонических многочленов относительно какой-либо точки, выбранной вне ω.

Для ограниченной двусвязной области $\omega \in \mathbb{R}^n$ с липшицевой границей, т. е. для области вида $\omega = \omega_1 \backslash \overline{\omega}_2$, где ω_1 и ω_2 — какие-либо ограниченные односвязные области, $\overline{\omega}_2 \subset \omega_1$, всякая гармоническая в ω функция $u \in W_p^l(\omega)$ аппроксимируется в $W_p^l(\omega)$ линейными комбинациями гармонических многочленов и их инверсий относительно какой-либо выбранной точки из ω_2. Указанный принцип построения базисной системы решений для оператора Лапласа $\mathcal{A} = \Delta$ легко обобщается с двусвязных областей на многосвязные.

Для удобства ниже приводятся формулировки упомянутых аппроксимационных теорем М. А. Лаврентьева, М. В. Келдыша, С. Н. Мергеляна, Дж. Уолша и Ф. Браудера. Первые пять теорем касаются только аппроксимации аналитических функций на комплексной плоскости.

Теорема 4.3.1 (М. А. Лаврентьев, см. [30], с. 104)**.** *Для того чтобы каждую Функцию $\varphi(z)$, непрерывную на континууме K, можно было приблизить на K многочленами с произвольно высокой точностью, необходимо и достаточно, чтобы этот континуум был ограниченным, не имел внутренних точек (т. е. был линейным континуумом) и чтобы дополнение к нему было связным (т. е. чтобы континуум не разбивал плоскость на* *несколько различных областей).*

Теорема 4.3.2 (М. В. Келдыш, см. [30], с. 100). *Для того чтобы каждую функцию, непрерывную в замкнутой области $\overline{G}$ и аналитическую внутри G, можно было приблизить на $\overline{G}$ многочленами с произвольно высокой точностью, необходимо и достаточно, чтобы дополнение к $\overline{G}$ состояло из одной области G_∞, содержащей точку ∞.*

Теорема 4.3.3 (С. Н. Мергелян, см. [30], с. 105). *Пусть E — ограниченное замкнутое множество, дополнение G, к которому относительно комплексной плоскости связно, и $f(z)$ — функция, непрерывная на E и локально аналитическая на множестве $\mathcal{O}$ всех внутренних точек E. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует полином $P(z)$ такой, что всюду на E:*

$$|f(z) - P(z)| < \varepsilon.$$

Теорема 4.3.4 (Дж. Уолш, см. [47], с. 53). *Пусть C — конечная жорданова область плоскости z. Если функция $f(z)$ аналитична в C и непрерывна в замкнутой области $\overline{C}$, то в $\overline{C}$ функция $f(z)$ может быть равномерно приближена полиномами от z.*

Теорема 4.3.5 (Дж. Уолш, см. [47], с. 55). *Пусть C — область расширенной плоскости, ограниченная конечным числом жордановых кривых $J_1, J_2, \ldots, J_\nu$, каждые две из которых не имеют общих точек. Пусть функция $f(z)$ аналитична в C и непрерывна в $\overline{C}$. Тогда в $\overline{C}$ функция $f(z)$ может быть равномерно приближена рациональными функциями от z. Если выбраны точки $z_1, z_2, \ldots, z_\nu$, отделенные от внутренности C соответственно кривыми $J_1, J_2, \ldots, J_\nu$, то можно выбрать эту рациональную функцию так, чтобы все ее полюсы находились в точках $z_1, z_2, \ldots, z_\nu$.*

Следствие 4.3.1 (Дж. Уолш, см. [47], с. 55). В предположениях теоремы 4.3.5 функция $f(z)$ может быть представлена в $\overline{C}$ как сумма ν функций $f_k(z)$, каждая из которых аналитична в C и в соответствующей жордановой области C_k, содержащей C и ограниченной кривой J_k. В области $\overline{C}_k$ функция $f_k(z)$ может быть выражена как предел равномерно сходящейся последовательности полиномов от $1/(z - z_k)$ (или от z, если $z_k = \infty$).

Теоремы 4.3.1–4.3.5 касаются аппроксимации гармонических функций в плоских областях гармоническими многочленами или их инверсиями в метрике соответствующего пространства непрерывных функций. В статье [55] теоремы 4.3.1–4.3.5 были обобщены на гипоэллиптические дифференциальные операторы в частных производных в $\mathbb{R}^n$ при $n \geqslant 2$ с аппроксимацией решений в метрике пространства Соболева W_p^l. Очень важно, что подход Ф. Браудера не зависит от размерности $n \geqslant 2$, так как основным инструментом доказательства теорем аппроксимации у Ф. Браудера становится свойство единственности решения задачи Коши для гипоэллиптического оператора. Мы не будем останавливаться на технических деталях подхода Ф. Браудера, которые достаточно подробно представлены в его статье [55]. Вместо этого разберем основополагающие идеи этого подхода на простейшем примере оператора Лапласа в ограниченной односвязной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, заодно упростив и дополнив доказательства Ф. Браудера, чтобы сделать их легко доступными для студентов.

А именно, разберем простое доказательство теоремы Браудера об аппроксимации гармонических функций в метрике пространства Соболева $W_p^l(\Omega)$ гармоническими многочленами для ограниченной односвязной области. Предварительно будет доказана следующая вспомогательная

Лемма 4.3.1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная односвязная область с липшицевой границей, $n \geqslant 2$, $1 < p < \infty$. Если $u \in L_p(\Omega)$ — гармоническая в Ω функция, т. е.*

$$\int\limits_{\Omega} u(x)\Delta v(x)\,dx = 0 \quad \forall\, v \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\Omega),$$

то найдется последовательность гармонических многочленов $\{h_m\}_{m=1}^{\infty}$ такая, что

$$\lim_{m\to\infty} \|u - h_m\|_{L_p(\Omega)} = 0.$$

Доказательство. Через $\mathcal{H}_p(\Omega)$ обозначим подпространство всех гармонических функций в $L_p(\Omega)$. И пусть

$$\overset{\circ}{\mathcal{D}}_p(\Omega) = \{f = \Delta v \colon v \in \overset{\circ}{W}{}_p^2(\Omega)\},$$

где $\overset{\circ}{W}{}_p^2(\Omega)$ определяется как замыкание в $W_p^l(\Omega)$ его подпространства $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\Omega)$. Нетрудно убедиться, что подпространства $\mathcal{H}_p(\Omega)$ и $\overset{\circ}{\mathcal{D}}_p(\Omega)$ замкнуты в $L_p(\Omega)$ при $1 < p < \infty$ для любой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ без каких-либо предположений о $\partial\Omega$. Кроме того,

$$\begin{cases} \mathcal{H}_p(\Omega)^{\perp} = \overset{\circ}{\mathcal{D}}_{p'}(\Omega), \\ \overset{\circ}{\mathcal{D}}_p(\Omega)^{\perp} = \mathcal{H}_{p'}(\Omega), \end{cases} \qquad p' = p/(p-1),\ 1 < p < \infty,$$

где символом $X^{\perp}$ обозначен аннулятор подпространства $X \subset L_p(\Omega)$. Отметим (см., например, [36]), что при $1 < p < \infty$ аннулятор подпространства $X \subset L_p(\Omega)$ будет сильно замкнутым подпространством в $L_{p'}(\Omega)$.

Рассмотрим теперь ограниченную односвязную область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с липшицевой границей. Выберем и зафиксируем радиус $R > 0$ так, чтобы открытый шар $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| < R\}$ содержал замыкание $\overline{\Omega}$. С помощью растяжений и усреднений легко проверить, что замыкание в $L_p(B_R)$ его подпространства

$$\mathcal{H}^{\infty}(B_R) = \{u \in C^{\infty}(\overline{B}_R) \colon \Delta u = 0\}$$

совпадает с $\mathcal{H}_p(B_R)$. Используя ортогональные разложения по сферическим гармоникам, легко убедиться, что любой элемент подпространства $\mathcal{H}^{\infty}(B_R)$ аппроксимируется гармоническими многочленами в метрике пространства Соболева $W_2^l(B_R)$ для любого $l \geqslant 1$, а следовательно, и в метрике $L_p(B_R)$ для любого $p \in [1, \infty)$. Последнее означает, что замыкание в $L_p(B_R)$ подпространства гармонических многочленов совпадает с $\mathcal{H}_p(B_R)$ при любом $p \in [1, \infty)$.

Таким образом, для доказательства леммы достаточно убедиться, что замыкание подпространства сужений на Ω функций из $\mathcal{H}^{\infty}(B_R)$ совпадает с $\mathcal{H}_p(\Omega)$ при любом $p \in (1, \infty)$. Предположим противное. Тогда для некоторого $p \in (1, \infty)$ по теореме об общем виде линейного непрерывного функционала на $L_p(\Omega)$ найдутся ненулевые элементы $f \in L_{p'}(\Omega)$ и $v \in \mathcal{H}_p(\Omega)$, удовлетворяющие условиям:

$$\int\limits_{\Omega} f(x)v(x)\,dx = 1, \qquad \int\limits_{\Omega} f(x)u(x)\,dx = 0 \quad \forall\, u \in \mathcal{H}^{\infty}(B_R).$$

Доопределяя $f(x) = 0$ при $x \in B_R \backslash \Omega$, получим функцию $f \in L_{p'}(\Omega)$, удовлетворяющую условию

$$\int\limits_{B_R} f(x)u(x)\,dx = 0 \quad \forall\, u \in \mathcal{H}^{\infty}(B_R).$$

Это означает, что $f \in \mathcal{H}_p(B_R)^{\perp} = \overset{\circ}{\mathcal{D}}_{p'}(B_R)$, т. е. найдется $w \in \overset{\circ}{W}{}_p^2(B_R)$, для которой $f(x) = \Delta w(x)$ почти всюду в B_R. При этом w оказывается решением задачи Коши

$$\begin{cases} \Delta w = 0, \quad x \in B_R \backslash \Omega, \\ w|_{\partial B_R} = \dfrac{\partial w}{\partial \nu}\Big|_{\partial B_R} = 0, \end{cases}$$

где ν — единичная внешняя нормаль к ∂B_R. Ввиду единственности решения $w \in \overset{\circ}{W}{}_p^2(B_R)$ задачи Коши для оператора Лапласа имеем

$$w = 0, \quad x \in B_R \backslash \Omega.$$

Последнее означает, что $w \in \overset{\circ}{W}{}_p^2(\Omega)$, так как граница $\partial\Omega$ липшицева. Но тогда $f = \Delta w \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}_{p'}(\Omega) = \mathcal{H}_p(\Omega)^{\perp}$, что противоречит равенству

$$\int\limits_{\Omega} f(x)v(x)\,dx = 1,$$

так как $v \in \mathcal{H}_p(\Omega)$. Полученное противоречие завершает доказательство вспомогательной леммы 4.3.1.

Теорема 4.3.6. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная односвязная область с липшицевой границей, $l \geqslant 2$ — целое, $n \geqslant 2$, $1 < p < \infty$. Если $u \in W_p^l(\Omega)$ — гармоническая в Ω функция, то найдется последовательность гармонических многочленов $\{h_m\}_{m=1}^{\infty}$ такая, что*

$$\lim_{m\to\infty} \|u - h_m\|_{W_p^l(\Omega)} = 0.$$

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{H}_p^l(\Omega)$ замыкание в $W_p^l(\Omega)$ его подпространства гармонических многочленов. И пусть

$$\widehat{\mathcal{H}}_p^l(\Omega) = \{u \in W_p^l(\Omega)\colon \Delta u = 0,\ x \in \Omega\}.$$

Очевидно, что $\mathcal{H}_p^l(\Omega) \subset \widehat{\mathcal{H}}_p^l(\Omega)$. Достаточно доказать, что $\widehat{\mathcal{H}}_p^l(\Omega) \subset \mathcal{H}_p^l(\Omega)$.

Пусть $h \in \widehat{\mathcal{H}}_p^l(\Omega)$. Для ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с липшицевой границей по теореме продолжения из $W_p^l(\Omega)$ в $W_p^l(\mathbb{R}^n)$ (см. [50]) найдется $\widetilde{h} \in W_p^l(\mathbb{R}^n)$ такая, что $\widetilde{h}|_{\Omega} = h$ и

$$\|\widetilde{h}\|_{W_p^l(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|h\|_{W_p^l(\Omega)}$$

с постоянной $C > 0$, зависящей только от n, p и Ω. Выбором подходящей срезающей функции носитель $\operatorname{supp}\widetilde{h}$ можно сделать компактным в $\mathbb{R}^n$.

Обозначим $f(x) = \Delta\,\widetilde{h}(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Очевидно, $f \in W_p^{l-2}(\Omega)$, причем сужение $f|_{\Omega} = 0$ и $\operatorname{supp} f$ компактен в $\mathbb{R}^n$. А так как граница $\partial\Omega$ липшицева, то заключаем, что $f \in \overset{\circ}{W}{}_p^{l-2}(\Omega')$ Ω', где $\Omega' = \mathbb{R}^n \backslash \overline{\Omega}$. Тогда найдется последовательность $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ из $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\Omega')$ такая, что

$$\lim_{m\to\infty} \|f - f_m\|_{W_p^{l-2}(\Omega')} = 0.$$

Доопределим f_m нулем вне Ω', т. е. в $\overline{\Omega}$. Тогда

$$\lim_{m\to\infty} \|f - f_m\|_{W_p^{l-2}(\mathbb{R}^n)} = 0,$$

так как $f|_\Omega = 0$. Поскольку $\operatorname{supp} f$ компактен в $\mathbb{R}^n$, то последовательность $\{f_m\}_{m=1}^\infty$ можно выбрать такой, что

$$\operatorname{supp} f_m \subset K_R = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| < R\} \quad \forall\, m \geqslant 1$$

с некоторым $R > 0$, для которого $\widetilde{h}|_{|x|\geqslant R} = 0$ и $\Omega \subset\subset K_R$.

Рассмотрим задачу Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u_m = f_m(x), \quad x \in K_R\,, \\ u_m|_{\partial K_R} = 0, \end{cases} \tag{4.3.1}$$

где $f_m \in \overset{\circ}{W}{}_p^{l-2}(K_R)$, $m \geqslant 1$. Воспользуемся тем, что при $1 < p < \infty$, $l \geqslant 2$ существует единственное решение $u_m \in W_p^l(K_R)$ задачи Дирихле (4.3.1) и справедлива оценка

$$\|u_m\|_{W_p^l(K_R)} \leqslant C\|f_m\|_{W_p^{l-2}(K_R)}\,, \quad m \geqslant 1, \tag{4.3.2}$$

с постоянной $C > 0$, зависящей только от p, n, l и R. А так как

$$\lim_{m\to\infty} \|f - f_m\|_{W_p^{l-2}(K_R)} = 0,$$

то в силу (4.3.2) найдется такая $u \in W_p^l(K_R)$, что

$$\lim_{m\to\infty} \|u - u_m\|_{W_p^l(K_R)} = 0. \tag{4.3.3}$$

Тогда имеем

$$\begin{cases} \Delta u = f(x), \quad x \in K_R\,, \\ u|_{\partial K_R} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta\, \widetilde{h} = f(x), \quad x \in K_R\,, \\ \widetilde{h}|_{\partial K_R} = 0, \end{cases}$$

откуда следует, что $u(x) = \widetilde{h}(x)$ почти всюду в K_R. А тогда из (4.3.3) получаем

$$\lim_{m\to\infty} \|h - u_m\|_{W_p^l(\Omega)} = 0, \tag{4.3.4}$$

так как $\widetilde{h}|_\Omega = h$.

Заметим, что носитель $\operatorname{supp}\Delta u_m = \operatorname{supp} f_m$ компактен в $\Omega' = \mathbb{R}^n\setminus\overline{\Omega}$. Это значит, что функция u_m будет гармонической в некоторой окрестности области Ω. Обозначим $\delta_m = \operatorname{dist}(\operatorname{supp}\Delta u_m, \partial\Omega)$ и заметим, что $\delta_m > 0$ при любых $m \geqslant 1$.

Предположим теперь, что $h \notin \mathcal{H}_p^l(\Omega)$. Это означает, что найдется такое число $\varepsilon > 0$, что

$$\|h - g\|_{W_p^l(\Omega)} \geqslant \varepsilon \tag{4.3.5}$$

для всех гармонических многочленов g. Выберем и зафиксируем индекс $m \geqslant 1$ так, чтобы

$$\|u_m - g\|_{W_p^l(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{4.3.6}$$

что возможно ввиду (4.3.4). При этом из (4.3.5)–(4.3.6) находим

$$\|u_m - g\|_{W_p^l(\Omega)} > \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.3.7}$$

для всех гармонических многочленов g.

Пусть ω_σ — обычное ядро усреднения, т. е. $\omega_\sigma(x) = \sigma^{-n}\omega(x/\sigma)$, $\sigma > 0$, где $\omega \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp}\omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leqslant 1\}$, причем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega(x)\,dx = 1.$$

Найдется ограниченная область Ω_m с липшицевой границей такая, что

$$\overline{\Omega} \subset \Omega_m \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, \Omega) < \delta_m\} \subset K_R\,.$$

Обозначим $\tau_m = \operatorname{dist}(\Omega, \partial\Omega_m)$ и заметим, что $\tau_m \in (0, \delta_m)$. Рассмотрим усреднение

$$u_{m,\sigma}(x) = \int\limits_{\Omega_m} u_m(y)\omega_\sigma(x - y)\,dy \tag{4.3.8}$$

функции u_m с радиусом $\sigma \in (0, \tau_m)$. При $0 < \sigma < \tau_m/2$ имеем

$$D_x^\alpha u_{m,\sigma}(x) = \int\limits_{\Omega_m} u_m(y) D_x^\alpha \omega_\sigma(x - y)\,dy = \int\limits_{\Omega_m} D_y^\alpha u_m(y)\omega_\sigma(x - y)\,dy, \tag{4.3.9}$$

так как для всех $y \in \partial\Omega_m$ и $x \in \Omega$ при $0 < \sigma < \tau_m/2$ выполняется равенство $\omega_\sigma(x - y) = 0$. Поэтому в силу свойств усреднения получаем

$$\lim_{\sigma\to 0} \|u_m - u_{m,\sigma}\|_{W_p^l(\Omega)} = 0.$$

Выберем и зафиксируем радиус усреднения $\sigma \in (0, \tau_m/2)$ так, чтобы

$$\|u_m - u_{m,\sigma}\|_{W_p^l(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{4},$$

откуда и из (4.3.7) находим

$$\|u_{m,\sigma} - g\|_{W_p^l(\Omega)} > \frac{\varepsilon}{4}, \tag{4.3.10}$$

для всех гармонических многочленов g.

Поскольку $\delta_m = \operatorname{dist}(\operatorname{supp}\Delta u_m, \partial\Omega)$, то $\Delta u_{m,\sigma}(x) = 0$ в $\overline{\Omega}_m$ ввиду (4.3.9) при $0 < \sigma < \tau_m/2 < \delta_m/2$, т. е. $u_m \in \widehat{\mathcal{H}}_p^l(\Omega_m)$, где Ω_m — ограниченная область с липшицевой границей, причем $\overline{\Omega} \subset \Omega_m$. Согласно доказанной выше лемме 4.3.1 найдется последовательность $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ гармонических многочленов такая, что

$$\lim_{k\to\infty} \|u_m - g_k\|_{L_p(\Omega_m)} = 0. \tag{4.3.11}$$

Для выбранного выше радиуса усреднения $\sigma \in (0, \tau_m/2)$ обозначим

$$g_{k,\sigma}(x) = \int\limits_{\Omega_m} g_k(y)\omega_\sigma(x-y)\,dy.$$

При этом для $x \in \Omega$ имеем

$$g_{k,\sigma}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g_k(y)\omega_\sigma(x-y)\,dy = g_{k,\sigma}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g_k(x-y)\omega_\sigma(y)\,dy, \tag{4.3.12}$$

т. е. функция $g_{k,\sigma}(x)$ в области Ω совпадает с многочленом, так как усреднение любого многочлена будет многочленом. По аналогии с (4.3.9) имеем

$$\Delta\, g_{k,\sigma}(x) = \int\limits_{\Omega_m} \Delta\, g_k(y)\omega_\sigma(x-y)\,dy = 0, \quad x \in \Omega,$$

т. е. функция $g_{k,\sigma}(x)$ в области Ω совпадает с некоторым гармоническим многочленом при каждом $k \geqslant 1$.

Для выбранных m, σ из (4.3.8), (4.3.11) следует

$$\lim_{k\to\infty} \|u_{m,\sigma} - g_{k,\sigma}\|_{W_p^l(\Omega)} \leqslant C_{m,\sigma} \lim_{k\to\infty} \|u_m - g_k\|_{L_p(\Omega_m)} = 0,$$

где постоянная $C_{m,\sigma} > 0$ зависит только от u, m и σ. Следовательно, найдется такой номер k, что

$$\|u_{m,\sigma} - g_{k,\sigma}\|_{W_p^l(\Omega)} > \frac{\varepsilon}{4}, \tag{4.3.13}$$

где функция $g_{k,\sigma}|_\Omega$ является гармоническим многочленом. Однако (4.3.13) противоречит (4.3.10). Из полученного противоречия следует, что предположение (4.3.5) неверно. А тогда $h \in \mathcal{H}_p^l(\Omega)$, и таким образом, установлено обратное включение $\widehat{\mathcal{H}}_p^l(\Omega) \subset \mathcal{H}_p^l(\Omega)$. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь неограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с компактной границей, представляющую собой внешность замыкания ограниченной односвязной области $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$ с липшицевой границей. Без ограничения общности будем считать, что Ω' содержит начало координат. В этом случае гармонические функции аппроксимируются в пространстве Соболева $W_p^l(\Omega)$ преобразованиями Кельвина

$$\mathcal{G}_R(x) = \Big(\frac{R}{|x|}\Big)^{n-2} \mathcal{G}\Big(\frac{R^2}{|x|^2} \cdot x\Big), \quad x \neq 0,$$

гармонических многочленов $\mathcal{G}(x)$ относительно сферы любого положительного радиуса R. Без ограничения общности можно считать, что радиус $R = 1$, т. е. можно ограничиться преобразованиями Кельвина

$$\mathcal{G}_1(x) = |x|^{2-n} \mathcal{G}\big(x \cdot |x|^{-2}\big), \quad x \neq 0,$$

гармонических многочленов $\mathcal{G}(x)$ относительно единичной сферы. Обозначим через $\mathcal{H}_p^l(\Omega)$ замыкание в $W_p^l(\Omega)$ его подпространства всех преобразований Кельвина $\mathcal{G}_1 \in W_p^l(\Omega)$ гармонических многочленов $\mathcal{G}$ относительно единичной сферы. И пусть, по-прежнему, через $\widehat{\mathcal{H}}_p^l(\Omega)$ будет обозначено подпространство всех гармонических функций в $W_p^l(\Omega)$.

По аналогии с теоремой 4.3.6 доказывается следующая

Теорема 4.3.7. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — неограниченная область, внешняя к замыканию ограниченной односвязной области с липшицевой границей, $l \geqslant 2$ — целое, $n \geqslant 2$, $1 < p < \infty$. Тогда $\widehat{\mathcal{H}}_p^l(\Omega) = \mathcal{H}_p^l(\Omega)$.*

Теоремы Браудера справедливы также и для систем уравнений, эллиптических по Дуглису–Ниренбергу. В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ рассмотрим стационарную задачу Стокса

$$\begin{cases} -\nu\Delta\, v + \nabla q = 0, \\ \operatorname{div} v = 0,\ x \in \Omega, \end{cases} \tag{4.3.14}$$

с неоднородными краевыми условиями

$$v\big|_{\partial\Omega} = a. \tag{4.3.15}$$

Предполагается, что $\partial\Omega$ липшицева, $n \geqslant 2$, и выполнено условие согласования

$$\int\limits_{\partial\Omega} (a, \nu_0)\, ds = 0, \tag{4.3.16}$$

где ν_0 — единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega$. Пусть $\widetilde{\Omega} \in \mathbb{R}^n$ — какая-либо ограниченная область с липшицевой границей такая, что $\overline{\Omega} \subset \widetilde{\Omega}$. В области $\widetilde{\Omega}$ рассмотрим стационарную систему Стокса

$$\begin{cases} -\nu\Delta\, v + \nabla q = 0, \\ \operatorname{div} v = 0,\ x \in \widetilde{\Omega}. \end{cases} \tag{4.3.17}$$

Справедлива следующая теорема Браудера

Теорема 4.3.8. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с липшицевой границей, $l \geqslant 2$ — целое, $n \geqslant 2$, $1 < p < \infty$. Тогда всякое решение*

$$\{v, q\} \in W^l_{p,loc}(\Omega; \mathbb{R}^n) \times W^{l-1}_p(\Omega)$$

системы (4.3.14) *для области Ω аппроксимируется в норме декартова произведения $W^l_{p,loc}(\widetilde{\Omega}; \mathbb{R}^n) \times W^{l-1}_p(\widetilde{\Omega})$ решениями*

$$\{v, q\} \in W^l_{p,loc}(\widetilde{\Omega}; \mathbb{R}^n) \times W^{l-1}_p(\widetilde{\Omega})$$

системы (4.3.17) *для области $\widetilde{\Omega}$.*

Для доказательства теоремы 4.3.8 достаточно ввести подпространства в $L_p(\Omega; \mathbb{R}^n)$, аналогичные тем, что были введены при доказательстве леммы 4.3.1. А именно, обозначим

$$\overset{\circ}{\mathfrak{D}}_p(\Omega) = \{f = \Delta v + \nabla q \colon v \in \overset{\circ}{J}{}^2_p(\Omega),\ q \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)\},$$

где $\overset{\circ}{J}{}^2_p(\Omega)$ — замыкание в $W^2_p(\Omega; \mathbb{R}^n)$ его подпространства $\overset{\circ}{J}{}^\infty(\Omega)$ и пусть

$$\mathfrak{H}_p(\Omega) = \{u \in \overset{\circ}{J}_p(\Omega) \colon \int\limits_{\Omega} (u, \Delta w)\, dx = 0 \quad \forall\, w \in \overset{\circ}{J}{}^\infty(\Omega)\}.$$

При этом, как нетрудно убедиться, выполняются равенства

$$\begin{cases} \mathfrak{H}_p(\Omega)^\perp = \overset{\circ}{\mathfrak{D}}_{p'}(\Omega), \\ \overset{\circ}{\mathfrak{D}}_p(\Omega)^\perp = \mathfrak{H}_{p'}(\Omega), \end{cases} \qquad p' = p/(p-1),\ 1 < p < \infty,$$

где символом $X^{\perp}$ обозначен аннулятор подпространства $X \subset L_p(\Omega)$. Доказательство теоремы 4.3.8 начинается с доказательства аналога вспомогательной леммы 4.3.1, повторяя почти буквально как схему доказательства леммы 4.3.1, так и схему доказательства теоремы 4.3.7.

Теоремы Браудера [55] справедливы также и для параболических уравнений. Точнее, решения однородного параболического уравнения для цилиндра $Q_T = \Omega \times (0, T)$ аппроксимируются в норме соответствующего неизотропного пространства Соболева решениями того же однородного уравнения для цилиндра $\widetilde{Q}_T = \widetilde{\Omega} \times (0, T)$, где область $\widetilde{\Omega}$ является расширением области Ω, т. е. $\overline{\Omega} \subset \widetilde{\Omega}$. При этом доказательство теоремы Браудера для параболического уравнения, по существу, повторяет доказательство для эллиптического уравнения, опираясь на единственность решения задачи Коши по пространственным переменным.

Хотя линейная нестационарная система Стокса формально не относится к классу гипоэллиптических, для нее тоже справедлива теорема Браудера. Точнее, решения однородной нестационарной системы Стокса для цилиндра $Q_T = \Omega \times (0, T)$ аппроксимируются в соответствующих нормах решениями той же однородной системы для цилиндра $\widetilde{Q}_T = \widetilde{\Omega} \times (0, T)$. При этом в доказательстве теоремы Браудера переход от параболического уравнения к нестационарной системе Стокса аналогичен переходу от эллиптического уравнения к стационарной системе Стокса и сводится лишь к введению соответствующих подпространств в $L_p(Q_T; \mathbb{R}^n)$.

Литература

[1] *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях. I. — М.: ИЛ, 1962.– 205 с.

[2] *Бабенко К.И.* Основы численного анализа. — М.: Наука, 1986.– 744 с.

[3] *Бесов О.В.* Продолжение функций из L_p^l и W_p^l // Труды Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР.– 1967.– Т. 89.– ч. 2.– С. 5–17.

[4] *Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. 2-е изд. — М.: Наука, 1996.– 480 с.

[5] *Боговский М.Е.* Некоторые аспекты применения метода Ньютона к уравнениям Навье–Стокса // Математика в современном мире: Тезисы докладов Росс. конф., посвященной 50-летию Ин-та матем. им. С.Л. Соболева СО РАН (17-23 сент. 2007 г.), Ин-т матем. СО РАН, Новосибирск, 2007.– С. 139–140.

[6] *Боговский М.Е.* Решение первой краевой задачи для уравнения неразрывности несжимаемой среды // Доклады АН СССР.– 1979.– Т. 248.– №5.– С. 1037–1040.

[7] ***Боговский М.Е.***[1] **Некоторые вопросы векторного анализа, связанные с операторами div и grad // Труды семинара С.Л. Соболева, №1.– ИМ СОАН СССР.– Новосибирск, 1980.– С. 5–40.**

[8] *Боговский М.Е.* Разложение $L_p(\Omega; \mathbb{R}^n)$ в прямую сумму подпространств соленоидальных и потенциальных векторных полей // Доклады АН СССР.– 1986.– Т. 286.– №4.– С. 781–786.

[1] Обязательная для чтения основная литература выделена жирным шрифтом.

[9] *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. 3-е изд. — М.: Бином, 2004.– 636 с.

[10] *Буренков В.И.* Об одном способе продолжения дифференцируемых функций // Труды Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР.– 1976.– Т. 140.– С. 27–67.

[11] ***Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. — М.: Наука, 1979.– 319 с.**

[12] *Волевич Л.Р.* Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем // Мат. сборник.– 1965.– Т. 68.– №3.– С. 373–416.

[13] *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы, Т. 1. Общая теория. — М.: ИЛ, 1962.– 896 с.

[14] *Гайер Д.* Лекции по теории аппроксимации в комплексной области. — М.: Мир, 1986.– 216 с.

[15] *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды, Т. 2. — М.: Мир, 1965.– 537 с.

[16] *Иосида К.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967.– 624 с.

[17] *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика. — М.: Мир, 1969.– 448 с.

[18] *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. 7-е изд. — М.: Физматлит, 2004.– 572 с.

[19] *Кондратьев В.А., Олейник О.А.* О неравенствах Корна и их приложениях // Нелинейные граничные задачи, Т. 3, Ин-т прикл. мат. и мех. АН УкрССР, 1991, С. 35–42.

[20] ***Кох Г., Солонников В.А.* L_q -оценки первых производных решений нестационарной задачи Стокса. — В кн.: Нелинейные задачи мат. физики и смежные вопросы (в честь акад. О.А. Ладыженской). Т. 1. — Новосибирск: Т. Рожковская, 2002.– С. 191–205.**

[21] *Коппенфельс В., Штальман Ф.* Практика конформных отображений. — М.: ИЛ, 1963.– 407 с.

[22] *Крылов А.Л.* Обоснование принципа Дирихле для первой краевой задачи нелинейной теории упругости // Доклады АН СССР, 1962.– Т. 146.– №1.– С. 54–57.

[23] ***Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1970.– 288 с.**

[24] ***Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973.– 408 с.**

[25] *Ладыженская О.А., Солонников В.А.* О некоторых задачах векторного анализа и обобщенных постановках краевых задач для уравнений Навье–Стокса.// Записки науч. сем. ЛОМИ, 1976, Т. 59, С. 81–116.

[26] *Ламб Г.* Гидродинамика. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1947.– 928 с.

[27] *Лизоркин П.И.* Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций // Труды Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР.– 1969.– Т. 105.– С. 89–167.

[28] *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. — М.: Наука, 1987.– 840 с.

[29] ***Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. — М.: Наука, 1965.– 520 с.**

[30] *Маркушевич А.И.* Теория аналитических функций, Т. 2. Дальнейшее построение теории. — М.: Наука, 1968.– 624 с.

[31] ***Масленникова В.Н., Боговский М.Е.* Аппроксимация потенциальных и соленоидальных векторных полей // Сиб. мат. журнал.– 1983.– Т. 24.– №5.– С. 149–171.**

[32] *Мосолов П.П., Мясников В.П.* Доказательство неравенства Корна // Доклады АН СССР.– 1971.– Т. 201.– №1.– С. 36–39.

[33] *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. 2-е изд. — М.: Наука.– 1977, 456 с.

[34] *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу. — М.: Мир, 1977.– 232 с.

[35] *де Рам Ж.* Дифференцируемые многообразия. — М.: ИЛ, 1956.– 250 с.

[36] ***Рудин У.*** **Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975.– 445 с.**

[37] *Серрин Дж.* Математические основы классической механики жидкости. — М.: ИЛ, 196.– 256 с.

[38] *Слободецкий Л.Н.* Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их приложение к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных // Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та им. А.И. Герцена.– 1958.– Т. 197.– С. 54–112.

[39] *Соболев С.Л.* Об одной новой задаче математической физики // Известия АН СССР.– 1954.– Т. 18.– №1.– С. 3–50.

[40] *Соболев С.Л.* Плотность финитных функций в пространстве $L_p^{(m)}(E_n)$ и соленоидальных векторных полей // Сиб. мат. журнал.– 1963.– Т. 4.– №3.– С. 673–682.

[41] ***Солонников В.А.*** **Оценки решений нестационарной линеаризованной системы уравнений Навье–Стокса // Труды Математического ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР.– 1964.– Т. 70.– С. 213–317.**

[42] *Солонников В.А.* Оценки решений нестационарной системы Навье–Стокса. // Записки научных семинаров ЛОМИ.– 1973.– Т. 38.– С. 153–231.

[43] ***Стейн И.*** **Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. — М.: Мир, 1973.– 344 с.**

[44] *Темам Р.* Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ. — М.: Мир, 1981.– 408 с.

[45] *Титчмарш Е.* Введение в теорию интеграла Фурье. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1948.– 479 с.

[46] *Турецкий А.Х.* Теория интерполирования в задачах. — Минск: Выш. школа, 1968.– 320 с.

[47] *Уолш Дж.* Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной плоскости. — М.: ИЛ, 1961.– 508 с.

[48] ***Щварц Л.*** **Анализ, Т. 2. — М.: Мир, 1972.– 528 с.**

[49] *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения. — М.: Мир, 1969.– 1072 с.

[50] ***Adams R.A., Fournier J.F.*** **Sobolev spaces. 2nd ed. — Acad. Press — Elsevier, 2003, 305 p.**

[51] ***Agmon S.*** **Lectures on elliptic boundary value problems. — Pinceton: D. Van Nostrand, 1965, 291 p.**

[52] *Agmon S., Douglis A., Nirenberg L.* Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satifying general boundary conditions. II // Comm. Pure Appl. Math., 1964, v. 17, №1, p. 35–92.

[53] ***Ambrosetti A., Prodi G.*** **A primer of nonlinear analysis. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995, 179 p.**

[54] ***Beckert H.*** **Eine bemerkenswerte Eigenschaft der Lösungen des Dirichletschen Problems bei linearen elliptischen Differentialgleichungen // Math. Ann., 1960, Bd. 139, S. 255–264.**

[55] ***Browder F.E.*** **Functional analysis and partial differential equations. 2 // Math. Ann., 1962, Bd. 145, S. 81–226.**

[56] ***Burenkov V.I.*** **Sobolev spaces on domains. — Stuttgart–Leipzig: Teubner, 1998, 312 p.**

[57] *Calderon A.P., Zygmund A.* On singular integrals // Amer. J. Math., 1956, v. 78, №2, p. 289–309.

[58] ***Cattabriga L.*** **Su un problema al contorno relative al sistema di equazioni di Stokes // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 1961, №31, p. 308–340.**

[59] ***DiBenedetto E.*** **Real analysis. — Boston: Birkhäuser Vlg., 2002, 485 p.**

[60] *Finn R.* On the exterior stationary problem for Navier–Stokes equations, and associated perturbation problems // Arch. Rational Mech. Anal., 1965, Vol. 19, p. 363–406.

[61] ***Fujiwara D., Morimoto H.*** **An L_r-theorem of the Helmholtz decomposition of vector fields // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA Math., 1977, v. 24, №3, p. 685–700.**

[62] *Galdi G.P.* An introduction to the mathematical theory of Navier-Stokes equations. Vol. 1. Linearized steady problems. — New York: Springer-Vlg., 1994, 484 p.

[63] *Galdi G.P.* An introduction to the mathematical theory of Navier-Stokes equations. Vol. 2. Nonlinear steady problems. — New York: Springer-Vlg., 1994, 364 p.

[64] *Hewitt E., Stromberg K.* Real and abstract analysis. — New York: Springer-Vlg., 1975, 476 p.

[65] *Heywood J.G.* On uniqueness questions in the theory of viscous incompressible flow // Acta Math., 1976, Vol. 136, p. 61–102.

[66] ***Келдыш М.В.*** **Sur l'approximation en moyenne quadratique des fonctions analytiques // Мат. сб., 1939, Т. 5, №2, С. 391–401.**

[67] *Lions J.-L.* Sur l'existence de solutions des équations de Navier-Stokes // C.R. Acad. Sci. Paris., 1959, T. 248, p. 2847–2849.

[68] *Lions J.-L.* Quelques résultats d'existence dans des equations aux dérivées partielles non linéaires // Bull. Soc. Math. France., 1959, T. 87, p. 245–273.

[69] *Lions P.-L.* Mathematical topics in fluid mechanics. Vol. 1. Incompressible models // Oxford Univ. Press, 1996, 252 p.

[70] *Maslennikova, V.N., Bogovski, M.E.* On non-closure of range of values of elliptic operator for a plane angle // Ann. Univ. Ferrara, Sez. VII, Sc. Mat., 1993, Vol. 39, p. 65–75.

[71] ***Mikhlin S.G., Prössdorf S.*** **Singular integral operators. — New York: Springer-Vlg., 1986, 528 p.**

[72] *Oseen C.W.* Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik. — Leipzig: Akad. Vlg., 1927, 337 S.

[73] *Phillips G.M.* Interpolation and approximation by polynomials. — New York: Springer Vlg., 2003, 312 p.

[74] *Schechter M.* Introduction to nonlinear analysis. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004, 376 p.

[75] *Schwartz L.* Topologie générale et analyse fonctionnelle. — Paris: Hermann, 1980, 432 p.

[76] *Shinbrot M.* Fractional derivatives of solutions of the Navier–Stokes equations // Arch. Rational Mech. Anal., 1970/1971, Vol. 40, p. 139–154.

[77] ***Smith K.T.* Formulas to represent functions by their derivatives // Math. Ann., 1970, Bd. 188, S. 53–77.**

[78] *Smith K.T.* Primer of modern analysis. — New York: Springer-Vlg., 1983, 446 p.

[79] ***Sohr H.* The Navier-Stokes equations. An elementary functional analytic approach. — Boston: Birkhäuser Vlg., 2001, 367 p.**

[80] *Takahashi S.* On the Poincaré–Bogovski lemma on differential forms // Proc. Japan Acad. Sci., Vol. 68, Ser. A, no. 1, 1992, p. 1–6.

[81] ***Tartar L.* Introduction to Navier-Stokes equation and oceanography. — New York: Springer Vlg., 2006, 247 p.**

[82] *Tartar L.* An introduction to Sobolev spaces and interpolation theory. — New York: Springer-Vlg., 2007, 220 p.

[83] *Truesdell C.A.* Essays in the history of mechanics. — New York: Springer-Vlg., 1968, 384 p.

[84] ***Varnhorn W.* The Stokes equations. — Berlin: Akademie Vlg., 1994, 154 p.**

[85] *Weyl H.* The method of orthogonal projection in potential theory // Duke Math. J., 1940, v. 7, p. 411–444.

[86] *Ziemer W.P.* Weakly differentiable functions. — New York: Springer-Vlg., 1989, 308 p.

Интернет-ресурсы

1. Веб-сайт **CFD-online** — наиболее мощный ресурс по вычислительной гидродинамике (*Computational Fluid Dynamics*). Охватывает широкий круг вопросов, связанных с вычислительной гидродинамикой — от литературы и программного обеспечения до наличия вакансий во всех частях света:
http://www.cfd-online.com/

2. Математическая энциклопедия — энциклопедия в 5 томах, изданная в 1977 г. в Москве издательством *Советская энциклопедия* и переведенная на английский издательством *Kluwer* с комментариями экспертов:
http://eom.springer.de/

3. Navier–Stokes equations — вводная статья по уравнениям Навье–Стокса в *Википедии*, универсальной Интернет-энциклопедии, составляемой и редактируемой всеми желающими (гипертекст с гиперссылками):
http://en.wikipedia.org/wiki/Navier-Stokes_equations

4. Французский оригинал классической статьи Жана Лерэ **Sur le mouvement d'un liquide visqeux emplissant l'espace** (*Acta Math.*, 1934, v. 63, p. 193–248) с параллельным переводом на английский:
http://www.math.cornell.edu/~bterrell/leray.pdf

5. Уравнения Навье–Стокса как **Проблема Тысячелетия** (*Millennium Prize Problem*) — описание и официальная формулировка проблемы:
http://www.claymath.org/millennium/Navier-Stokes_Equations/

6. Учебник С.Г. Михлина и С. Прёссдорфа [71] по сингулярным интегралам для чтения в режиме online:
http://books.google.com/books?hl=ru&id=eaMmy99UTHgC&dq=mikhlin+%22singular+integral+operators%22&printsec=frontcover&source=web&ots=gQykv6Foy6&sig=qD–4fBojz8T6KKKN6WKn26QZtA

ОПИСАНИЕ КУРСА И ПРОГРАММА

Цели и задача курса:

- учебно-методический курс разработан по профилю «Математика», по специальности дифференциальные уравнения;
- учебно-методический курс разработан для студентов 5-го (магистратура);
- учебно-методический курс разработан для студентов, обучающихся по направлению «математика»;
- учебно-методический курс носит теоретический характер;

Целью учебно-методического комплекса «Аналитико-численные методы для уравнений Навье-Стокса» является обучение студентов современным методам численного решения краевых и начально-краевых задач динамики вязкой несжимаемой жидкости, которые описываются нелинейной системой уравнений Навье-Стокса.

Задача курса состоит в том, чтобы продемонстрировать высокую эффективность новых аналитико-численных методов решения краевых и начально-краевых задач для стационарных и нестационарных уравнений Навье-Стокса. Основные идеи курса реализованы в виде новых подходов к применению метода Ньютона, включая новые подходы к построению начального приближения и к обращению производной Фреше соответствующего нелинейного отображения.

Инновационность курса по содержанию.

Фантастический рост вычислительных ресурсов за последние два десятка лет практически никак не отразился на проблемах численного решения начально-краевых задач для уравнений Навье-Стокса. Это связано, во-первых, с неэффективностью сеточных методов в многомерных задачах (три пространственных переменных и четвертая – время), и во-вторых с неэффективностью применяемых методов обращения производной Фреше соответствующего нелинейного отображения при реализации метода Ньютона. Представляемый курс построен на использовании новых аналитико-численных методов решения краевых и начально-краевых задач для нелинейных уравнений Навье-Стокса. Единственным стандартным элементом нового подхода можно считать лишь метод Ньютона, но даже здесь можно встретить новые, не имеющие аналогов детали. Так, производная Фреше обращается с помощью быстро сходящегося в норме сильного решения ряда, члены которого образуют рекуррентную последовательность и строятся с помощью разрешающего оператора линейной задачи без конвективных членов. По-существу, тот же ряд представляет собой весьма эффективную конструкцию для построения начального приближения метода Ньютона. Наиболее важной частью нового подхода является разработанный автором аналитико-численный метод решения начально-краевых задач для линеаризованной системы Навье-Стокса, не содержащей конвективных членов. При этом решение начально-краевой задачи аппроксимируется конечной линейной комбинацией по некоторой базисной системе решений линеаризованной системы. Коэффициенты линейной комбинации являются неизвестными и определяются из условия минимизации невязки начальных и граничных условий. Подавляющее преимущество нового подхода наиболее очевидно при решении трехмерных задач обтекания, когда неограниченная область имеет компактную границу. Инновационный подход существенно опирается на результаты, полученные автором курса.

Инновационность по методике преподавания.

Лекции и практические занятия по данному курсу будут проводиться в мультимедийном классе и в вычислительной лаборатории с использованием мультимедийных средств для визуализации процесса решения задачи, Это повысит эффективность лекций и практических занятий и будет способствовать лучшему усвоению студентами аналитико-численных методов решения краевых и начально-краевых задач для уравнений Навье-Стокса.

Инновационность по литературе.

В учебно-методическом курсе «Аналитико-численные методы для уравнений Навье-Стокса» используются современные результаты, лишь частично отраженные в монографической литературе и в журнальных публикациях. Многие результаты, излагаемые в курсе, были получены самим автором курса.

Инновационность по организации учебного процесса.

Инновационным является использование в учебном процессе не только традиционных форм обучения, таких как лекции и семинарские занятия, но и использование мультимедийных средств, проведение реальных численных экспериментов.

Сведения об авторе учебно-методического курса:

- Боговский Михаил Евгеньевич
- кандидат физико-математических наук
- ученое звание − доцент
- должность − доцент
- кафедра дифференциальных уравнений и математической физики
- научно-педагогический стаж 31 год
- научные публикации – 67.

Структура курса.

Курс рассчитан на 288 часов учебной нагрузки (два семестра, 8 кредитов), из которых 72 часа отводится на лекции, 72 часа – на практические занятия, 144 часа – на самостоятельную работу студента.

<u>Темы лекций.</u>

Тема 1. Вводная тема
*(лекции – 3 часа, практические занятия – 3 часа, самостоятельная работа – 6 часов)***.**

Тема 2. Построение правого обратного для оператора div с условиями Дирихле *(лекции – 3 часа, практические занятия – 3 часа, самостоятельная работа – 6 часа).*

Тема 3. L_2**-оценки для правого обратного к оператору div с условиями Дирихле** *(лекции – 3 часа, практические занятия – 3 часа, самостоятельная работа – 6 часов).*

Тема 4. Слабые решения краевых задач для стационарной системы Стокса и соответствующие ортогональные разложения *(лекции – 3 часа, практические занятия – 3 часа, самостоятельная работа – 6 часов).*

Тема 5. Метод локализации и априорные оценки сильных решений краевых задач для стационарной системы Стокса *(лекции – 3 часа, практические занятия – 3 часа, самостоятельная работа – 6 часов).*

Тема 6. Сильные решения краевых задач для стационарной системы Навье-Стокса *(лекции – 3 часа, практические занятия – 3 часа, самостоятельная работа – 6 часов).*

Тема 7. Метод Галеркина и слабые решения начально-краевых задач для нестационарной системы Стокса *(лекции – 3 часа, практические занятия – 3 часа, самостоятельная работа – 6 часов).*

Тема 8. Сильные решения начально-краевых задач для нестационарной системы Стокса *(лекции – 3 часа, практические занятия – 3 часа, самостоятельная работа – 6 часов).*

Тема 9. Слабые и сильные решения начально-краевых задач для нестационарной системы Навье-Стокса *(лекции – 3 часа, практические занятия – 3 часа, самостоятельная работа – 6 часов).*

Тема 10. Интерполяция тригонометрическими многочленами *(лекции – 3 часа, практические занятия – 3 часа, самостоятельная работа – 6 часов).*

Тема 11. Аппроксимация тригонометрическими многочленами *(лекции – 3 часа, практические занятия – 3 часа, самостоятельная работа – 6 часов).*

Тема 12. Аппроксимация частных решений уравнений в частных производных тригонометрическими многочленами *(лекции – 3 часа, практические занятия – 3 часа, самостоятельная работа – 6 часов).*

Тема 13. Теорема Браудера для эллиптических операторов в пространствах Соболева *(лекции – 3 часа, практические занятия – 3 часа, самостоятельная работа – 6 часов).*

Тема 14. Базисные системы решений для эллиптических операторов *(лекции – 2 часа, практические занятия – 1 час, самостоятельная работа – 3 часа).*

Тема 15. Определение коэффициентов линейных комбинаций по базисной системе и вопросы сходимости для эллиптических уравнений *(лекции – 2 часа, практические занятия – 1 час, самостоятельная работа – 3 часа).*

Тема 16. Теорема Браудера для стационарной системы Стокса *(лекции – 2 часа, практические занятия – 1 час, самостоятельная работа – 3 часа).*

Тема 17. Базисные системы решений для стационарной задачи Стокса *(лекции – 2 часа, практические занятия – 1 час, самостоятельная работа – 3 часа).*

Тема 18. Определение коэффициентов линейных комбинаций по базисной системе и вопросы сходимости для стационарной задачи Стокса *(лекции – 3 часа, практические занятия – 3 часа, самостоятельная работа – 6 часов).*

Тема 19. Теорема Браудера для параболических уравнений *(лекции – 3 часа, практические занятия – 3 часа, самостоятельная работа – 6 часов).*

Тема 20. Базисные системы решений для параболических уравнений *(лекции – 3 часа, практические занятия – 3 часа, самостоятельная работа – 6 часов).*

Тема 21. Определение коэффициентов линейных комбинаций по базисной системе и вопросы сходимости для параболических уравнений *(лекции – 4 часа, практические занятия – 5 часа, самостоятельная работа – 9 часов).*

Тема 22. Аналог теоремы Браудера для нестационарной системы Стокса *(лекции – 4 часа, практические занятия – 5 часа, самостоятельная работа – 9 часов).*

Тема 23. Базисные системы решений для нестационарной задачи Стокса *(лекции – 2 часа, практические занятия – 1 час, самостоятельная работа – 3 часа).*

Тема 24. Определение коэффициентов линейных комбинаций по базисной системе и вопросы сходимости для нестационарной задачи Стокса *(лекции – 2 часа, практические занятия – 1 час, самостоятельная работа – 3 часа).*

Тема 25. Обращение производной Фреше в начально-краевой задаче для нестационарной системы Навье-Стокса *(лекции –*

2 часа, практические занятия – 1 час, самостоятельная работа – 3 часа).

Тема 26. Начальное приближение для метода Ньютона в начально-краевой задаче для нестационарной системы Навье-Стокса *(лекции – 2 часа, практические занятия – 1 час, самостоятельная работа – 3 часа).*

Тема 27. Оценка скорости сходимости метода Ньютона в начально-краевой задаче для нестационарной системы Навье-Стокса *(лекции – 2 часа, практические занятия – 1 час, самостоятельная работа – 3 часа).*

Описание системы контроля знаний.

Виды контроля знаний:

- написание реферата по выбранной теме
- итоговый контроль в форме письменной итоговой работы

Для оценки работы студента применяется балльная система. Наилучшему результату соответствуют 100 баллов, которые распределяются по видам контроля следующим образом:

- реферат – от 0 до 50 баллов;
- итоговая работа – от 0 до 50 баллов.

Соответствие суммарного количества набранных баллов итоговой оценке (по пятибалльной шкале и европейскому стандарту) показано в таблицах.

Баллы	0-50	51-68	69-85	86-100
Оценка	неуд.	удовл.	хорошо	отлично

Баллы	0-30	31-50	51-62	63-73	74-83	84-92	93-100
Оценка	F	FX	E	D	B	C	A

Методика выставления и шкала итоговых оценок отвечают принятым в РУДН для теоретических дисциплин.

Программа курса

Аннотированное содержание курса

Раздел 1. L_2-теория оператора div с краевыми условиями Дирихле

Темы: 1, 2, 3
Трудоёмкость: 1 кредит, 32 часа, из них
- лекции – 8 часов,
- практические занятия – 8 часов,
- самостоятельная работа – 16 часов.

В первом разделе курса в сжатой форме излагается история вывода уравнений Навье-Стокса, вводятся основные понятия механики сплошных сред и приводится адаптированный под математиков современный подход к выводу уравнений Навье-Стокса. Согласно этому подходу уравнения Навье-Стокса рассматривается как простейшая математическая модель динамики вязкой жидкости, которую теперь часто называют жидкостью Навье-Стокса. Основная часть первого раздела посвящена построению

L_2-теории оператора div с краевыми условиями Дирихле. Дается вывод явного представления для правого обратного оператора и устанавливаются коэрцитивные L_2-оценки.

Раздел 2. L_2-теория стационарной системы Навье-Стокса

Темы: 4, 5, 6.

Трудоёмкость: 1 кредит, 32 часа, из них

- лекции – 8 часов,

- практические занятия – 8 часов,

- самостоятельная работа – 16 часов.

Во втором разделе курса изучаются сильные и слабые решения стационарной задачи Стокса. Сначала рассматриваются слабые решения с первыми производными из L_2 в смысле традиционного определения, т.е. в смысле интегрального тождества, в которое входит поле скоростей и не входит давление. Затем вводится новое определение слабого решения того же класса гладкости, которое соответствует ортогональному разложению пространства L_2 симметричных тензорных полей в сумму двух замкнутых подпространств, одно из которых состоит из всех тензоров скоростей деформации с соленоидальными векторными полями, у которых однородные краевые условия того же типа, что и в задаче Стокса.

С помощью метода локализации устанавливаются априорные оценки сильных решений, т.е. оцениваются L_2-нормы вторых производных. С помощью той же локализации устанавливается существование вторых производных у слабого решения, если правая часть системы Стокса из L_2. Метод локализации для стационарной задачи Стокса существенно опирается на L_2-теорию оператора div с краевыми условиями Дирихле, построенную в предыдущем разделе.

Раздел 3. L_2-теория нестационарной системы Навье-Стокса

Темы: 7, 8, 9.

Трудоёмкость: 1 кредит, 40 часов, из них

- лекции – 10 часов,

- практические занятия – 10 часов,

- самостоятельная работа – 20 часов.

Решение линейной начально-краевой задачи для системы Стокса строится методом Галеркина. При подходящем выборе начальных условий для галеркинских приближений устанавливается существование слабых решений с первыми производными по времени из L_2. С помощью результатов предыдущего раздела устанавливается, что слабые решения имеют вторые производные по пространственным переменным, т.е. слабое решение будет сильным. Слабое решение нелинейной начально-краевой задачи для системы Навье-Стокса в классе Хопфа строится тоже методом Галеркина, но уже с оценкой дробной гладкости по времени в L_2-норме. Затем доказываются основные теоремы о существовании в малом сильных решений нелинейной начально-краевой задачи для системы Навье-Стокса. Приводится обзор основных известных результатов, касающихся гладкости слабых решений нелинейной начально-краевой задачи для системы Навье-Стокса.

Раздел 4. Вопросы интерполяции и аппроксимации тригонометрическими многочленами

Темы: 10, 11, 12.

Трудоёмкость: 1 кредит, 32 часа, из них

- лекции – 8 часов,

- практические занятия – 8 часов,

- самостоятельная работа – 16 часов.

Вопросы интерполяции и аппроксимации тригонометрическими многочленами являются важной составной частью аналитико-численных методов решения краевых и начально-краевых задач для линейных уравнений в частных производных. Для однородных уравнений аналитико-численные методы основываются на аппроксимации искомых решений линейными комбинациями решений уравнений. Коэффициенты линейных комбинаций определяются из условий минимизации невязки начальных и граничных данных. В качестве примера подробно разбирается проблема определения коэффициентов в задаче Дирихле для оператора Лапласа в плоской области. При этом новый подход к старой проблеме определения коэффициентов обеспечивает равномерную сходимость к решению в замыкании области. В случае неоднородного уравнения в ограниченной области частные решения уравнения удобно аппроксимировать тригонометрическими многочленами.

Раздел 5. Аналитико-численные методы для эллиптических краевых задач

Темы: 13, 14, 15

Трудоёмкость: 1 кредит, 32 часа, из них

- лекции – 8 часов,

- практические занятия – 8 часов,

- самостоятельная работа – 16 часов.

Важную роль в аналитико-численных методах играют теоремы Феликса Браудера об аппроксимации решений гипоэллиптических уравнений в нормах пространств Соболева решениями тех же уравнений в областях, содержащих рассматриваемую область.

Излагается новый подход к доказательству теорем Браудера, делающий их вполне доступными для студентов 5-го курса. При этом новый подход открывает широкие возможности для усиления теорем Браудера, позволяя требовать от аппроксимирующей последовательности решений выполнения однородных граничных условий на части границы, что очень важно для практической реализации метода, так как открываются широкие возможности построения базисных решений с помощью обычного разделения переменных.

Раздел 6. Аналитико-численные методы для стационарной задачи Стокса

Темы: 16, 17, 18

Трудоёмкость: 1 кредит, 32 часа, из них

- лекции – 8 часов,

- практические занятия – 8 часов,

- самостоятельная работа – 16 часов.

Новый подход к доказательству теорем Браудера позволяет перенести их на системы уравнений, эллиптических по Дуглису-Ниренбергу, к каковым относится нужная нам стационарная система Стокса. Приводятся примеры построения базисных решений для ограниченных и неограниченных областей в R^2 и в R^3. Особо выделяется случай неограниченных областей с компактными границами, т.е. случай задач обтекания. В качестве примера рассматриваются классические базисные решения Ламба.

Раздел 7. Аналитико-численные методы для параболических начально-краевых задач

Темы: 19, 20, 21

Трудоёмкость: 1 кредит, 32 часа, из них

- лекции – 8 часов,

- практические занятия – 8 часов,

- самостоятельная работа – 16 часов.

Практическое применение аналитико-численных методов к начально-краевым задачам следует освоить сначала в более простой ситуации − на примере параболических уравнений. В первую очередь, это касается наиболее интересного для приложений случая неограниченных областей с компактными границами.

Раздел 8. Базисные системы решений для нестационарных уравнений Стокса

Темы: 22, 23, 24

Трудоёмкость: 1 кредит, 32 часа, из них

- лекции – 8 часов,

- практические занятия – 8 часов,

- самостоятельная работа – 16 часов.

Новый подход к доказательству теорем Браудера позволяет перенести их на системы уравнений, близкие к гипоэллиптическим , но не являющиеся таковыми, например, на нестационарную систему Стокса. Приводятся примеры построения базисных решений для ограниченных и неограниченных областей в R^2 и в R^3. Как и в предыдущем раделе особо выделяется случай неограниченных областей с компактными границами, т.е. случай задач обтекания. Именно в этом случае наиболее наглядно проявляется превосходство аналитико-численных методов для уравнений Навье-Стокса. В качестве примера рассматриваются классические базисные решения Озеена.

Раздел 9. Метод Ньютона для нестационарных уравнений Навье-Стокса

Темы: 25, 26, 27

Трудоёмкость: 1 кредит, 32 часа, из них

- лекции – 8 часов,

- практические занятия – 8 часов,

- самостоятельная работа – 16 часов.

Вывод представления оператора, обратного к производной по Фреше для нелинейной системы Навье-Стокса в виде операторного ряда, члены которого образуют рекуррентную последовательность и выражаются через разрешающие операторы для линейной нестационарной системы Стокса. Исследование сходимости построенного ряда в норме неизотропного пространства Соболева. Построение начального приближения при решении методом Ньютона начально-краевой задачи для нелинейной системы Навье-

Стокса. Начальное приближение строится в виде ряда, сходящегося со скоростью геометрической прогрессии в норме сильного решения к приближению Варнхорна. Члены ряда образуют рекуррентную последовательность и строятся с помощью разрешающего оператора линейной нестационарной задачи Стокса.

Список литературы

Основной:

Боговский М.Е. Некоторые аспекты применения метода Ньютона к уравнениям Навье-Стокса. − В кн.: «Математика в современном мире» Тезисы докладов Росс. конф., посвященной 50-летию Ин-та матем. им.

С.Л. Соболева СО РАН (17–23 сент. 2007 г.), Ин-т матем. СО РАН, Новосибирск, 2007, с. 139–140.

Боговский М.Е. Решение первой краевой задачи для уравнения неразрывности несжимаемой среды. // Доклады АН СССР, 1979, т.248, № 5, с. 1037-1040.

Боговский М.Е. Некоторые вопросы векторного анализа, связанные с операторами div и grad. // Труды семинара С.Л. Соболева, № 1, ИМ СОАН СССР, Новосибирск, 1980, с. 5−40.

Боговский М.Е. Разложение $L_p(\Omega; R^n)$ в прямую сумму подпространств соленоидальных и потенциальных векторных полей. // Доклады АН СССР, 1986, т.286, № 4, с. 781−786.

Масленникова В.Н., Боговский М.Е. Аппроксимация потенциальных и соленоидальных векторных полей. // Сиб. мат. журнал, 1983, т.24, № 5, с.149-171.

Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. 3-е изд. − М.: Бином, 2004, 636 с.

Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. − М.: Наука, 1979, 319 с.

Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы, т. 1. Общая теория. − М.: ИЛ, 1962, 896 с.

Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. − М.: Наука, 1970, 288 с.

Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. − М.: Наука, 1965, 520 с.

Маркушевич А.И. Теория аналитических функций, т. 2. Дальнейшее построение теории. − М.: Наука, 1968, 624 с.
Рудин У. Функциональный анализ. − М.: Мир, 1975, 445 с.

Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. − М.: Мир, 1981, 408 с.

Турецкий А.Х. Теория интерполирования в задачах. − Минск: Выш. Школа, 1968, 320 с.

Щварц Л. Анализ, т. 2. − М.: Мир, 1972, 528 с.

Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения. − М.: Мир, 1969, 1072 с.

Adams R.A., Fournier J.F. Sobolev spaces. 2nd ed. − Acad. Press−Elsevier, 2003, 305 p.

Burenkov V.I. Sobolev spaces on domains. − Stuttgart−Leipzig: Teubner, 1998, 312 p.

Ambrosetti A., Prodi G. A primer of nonlinear analysis. − Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995, 179 p.

Browder F.E. Functional analysis and partial differential equations, 2. // Math. Ann., 1962, Bd. 145, S. 81−226.

Phillips G.M. Interpolation and approximation by polynomials. − New York: Springer Vlg., 2003, 312 p.

Schechter M. Introduction to nonlinear analysis. − Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004, 376 p.

Schwartz L. Topologie générale et analyse fonctionnelle. − Paris: Hermann, 1980, 432p.

Sohr H. The Navier-Stokes equations. An elementary functional analytic approach. − Birkhäuser Vlg., 2001, 367 p.

Tartar L. Introduction to Navier-Stokes equation and oceanography. − New York: Springer Vlg., 2006, 247 p.

Varnhorn W. The Stokes equations. − Berlin: Akademie Vlg., 1994, 154 p.

Дополнительный:

Бабенко К.И. Основы численного анализа. − М.: Наука, 1986, 744 с.

Бесов О.В. Продолжение функций из L_p^l и W_p^l. // Труды Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР, 1967, т. 89, ч. 2, с. 5−17.

Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. 2-е изд. − М.: Наука, 1996, 480 с.

Буренков В.И. Об одном способе продолжения дифференцируемых функций. // Труды Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР, 1976, т. 140, с. 27−67.

Гайер Д. Лекции по теории аппроксимации в комплекстной области. − М.: Мир, 1986, 216 с.

Зигмунд А. Тригонометрические ряды, т. 2. − М.: Мир, 1965, 537 с.

Келдыш М.В. Sur l'approximation en moyenne quadratique des fonctions analytiques. // Мат. сб., 1939, т. 5, № 2, с. 391−401.

Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. − М.: Мир, 1969, 448 с.

Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. 7-е изд. − М.: Физматлит, 2004, 572 с.

Коппенфельс В., Штальман Ф. Практика конформных отображений. − М.: ИЛ, 1963, 407 с.

Лизоркин П.И. Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций. // Труды Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР, 1969, т. 105, с. 89−167.

Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. − М.: Наука, 1987, 840 с.

Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. 2-е изд. − М.: Наука, 1977, 456 с.

Ниренберг Л. Лекции по нелинейному функциональному анализу. − М.: Мир, 1977, 232 с.

Слободецкий Л.Н. Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их приложение к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных. // Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та им. А.И. Герцена, 1958, т. 197, с. 54−112.

Соболев С.Л. Об одной новой задаче математической физики. // Известия АН СССР, 1954, т. 18, № 1, с. 3−50.

Солонников В.А. Оценки решений нестационарной линеаризованной системы уравнений Навье-Стокса. // Труды Математического ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР, 1964, т. 70, с. 213−317.

Солонников В.А. Оценки решений нестационарной системы Навье-Стокса. // Записки научных семинаров ЛОМИ, Л., т. 38, с.153−231.

Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. − М., Мир, 1973, 344 с.

Уолш Дж. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной плоскости. − М.: ИЛ, 1961, 508 с.

Beckert H. Eine bemerkenswerte Eigenschaft der Lösungen des Dirichletschen Problems bei linearen elliptischen Differentialgleichungen. // Math. Ann., 1960, Bd. 139, S. 255−264.

Cattabriga L. Su un problema al contorno relative al sistema di equazioni di Stokes. − Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 1961, № 31, p. 308−340.

Fujiwara D., Morimoto H. An L_r-theorem of the Helmholtz decomposition of vector fields. − J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA Math., 1977, v. 24, № 3, p. 685−700.

Galdi G.P. An introduction to the mathematical theory of Navier-Stokes equations. Vol. 1. Linearized steady problems. − New York: Springer-Vlg., 1994, 484 p.

Galdi G.P. An introduction to the mathematical theory of Navier-Stokes equations. Vol. 2. Nonlinear steady problems. − New York: Springer-Vlg., 1994, 364 p.

Lions P.-L. Mathematical topics in fluid mechanics. Vol. 1. Incompressible models. − Oxford Univ. Press, 1996, 252 p.

Tartar L. An introduction to Sobolev spaces and interpolation theory. − New York: Springer-Vlg., 2007, 220 p.

Truesdell C.A. Essays in the history of mechanics. − New York: Springer- Vlg., 1968, 384 p.

Weyl H. The method of orthogonal projection in potential theory. − Duke Math. J., 1940, v. 7, p. 411−444.

Темы рефератов

1. Базисная система решений Ламба для стационарной системы Стокса в ограниченной односвязной области в R^3.
2. Базисная система решений Ламба для стационарной системы Стокса во внешности ограниченной односвязной области в R^3.
3. Базисная система решений Озеена для нестационарной системы Стокса в ограниченной односвязной области в R^3.
4. Базисная система решений Озеена для нестационарной системы Стокса во внешности ограниченной односвязной области в R^3.
5. Построение базисной системы решений уравнения Лапласа для плоской ограниченной области с однородными краевыми условиями на части границы.
6. Построение базисной системы решений уравнения теплопроводности для плоской ограниченной области с однородными краевыми условиями на части границы.

Учебный тематический план курса

№	Название разделов и тем	Всего часов	в том числе		
			лекции	практ. занятия	самост. работа
1.	**L_2-теория оператора div с краевыми условиями Дирихле**				
	Вводная тема	12	3	3	6
	Построение правого обратного для оператора div с условиями Дирихле	12	3	3	6
	L_2-оценки для правого обратного к оператору div с условиями Дирихле	12	3	3	6
2	**L_2-теория стационарной системы Навье-Стокса**				

	Слабые решения краевых задач для стационарной системы Стокса и соответствующие ортогональные разложения	12	3	3	6
	Метод локализации и априорные оценки сильных решений краевых задач для стационарной системы Стокса	12	3	3	6
	Сильные решения краевых задач для стационарной системы Навье-Стокса	12	3	3	6
3	**L_2-теория стационарной системы Навье-Стокса**				

	Метод Галеркина и слабые решения начально-краевых задач для нестационарной системы Стокса	12	3	3	6
	Сильные решения начально-краевых задач для нестационарной системы Стокса	12	3	3	6
	Слабые и сильные решения начально-краевых задач для нестационарной системы Навье-Стокса	12	3	3	6
4	**Вопросы интерполяции и аппроксимации тригонометрическими многочленами**				
	Интерполяция тригонометрическими многочленами	12	3	3	6

	Аппроксимация тригонометрическими многочленами	12	3	3	6
	Аппроксимация частных решений уравнений в частных производных тригонометрическими многочленами	12	3	3	6
5	**Аналитико-численные методы для эллиптических краевых задач**				
	Теорема Браудера для эллиптических операторов в пространствах Соболева	12	3	3	6
	Базисные системы решений для эллиптических операторов	6	2	1	3

	Определение коэффициентов линейных комбинаций по базисной системе и вопросы сходимости для эллиптических уравнений	6	2	1	3
6	**Аналитико-численные методы для стационарной задачи Стокса**				
	Теорема Браудера для стационарной системы Стокса	12	3	3	6
	Базисные системы решений для стационарной задачи Стокса	12	3	3	6

	Определение коэффициентов линейных комбинаций по базисной системе и вопросы сходимости для стационарной задачи Стокса	12	3	3	6
7	**Аналитико-численные методы для параболических начально-краевых задач**				
	Теорема Браудера для параболических уравнений	18	4	5	9
	Базисные системы решений для параболических уравнений	18	3	3	6

	Определение коэффициентов линейных комбинаций по базисной системе и вопросы сходимости для параболических уравнений	18	4	5	9
8	**Базисные системы решений для нестационарных уравнений Стокса**				
	Аналог теоремы Браудера для нестационарной системы Стокса	6	2	1	3
	Базисные системы решений для нестационарной задачи Стокса	6	2	1	3
	Определение коэффициентов линейных комбинаций по базисной системе и вопросы сходимости для нестационарной задачи	6	2	1	3

9	**Метод Ньютона для нестационарных уравнений Навье-Стокса**				
	Обращение производной Фреше в начально-краевой задаче для нестационарной системы Навье-Стокса	6	2	1	3
	Начальное приближение для метода Ньютона в начально-краевой задаче для нестационарной системы Навье-Стокса	6	2	1	3
	Оценка скорости сходимости метода Ньютона в начально-краевой задаче для нестационарной системы Навье-Стокса	6	2	1	3
Итог		**288**	**72**	**72**	**144**