ПРИОРИТЕТНЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ПРОЕКТ «ОБРАЗОВАНИЕ»
РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

**О.Э. ЗУБЕЛЕВИЧ**

# ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

**Учебное пособие**

**Москва**

**2008**

*Инновационная образовательная программа*
*Российского университета дружбы народов*

**«Создание комплекса инновационных образовательных программ и формирование инновационной образовательной среды, позволяющих эффективно реализовывать государственные интересы РФ через систему экспорта образовательных услуг»**

Экспертное заключение –

доктор физико-математических наук, профессор *В.А. Кондратьев*

**Зубелевич О.Э.**

Функциональные методы в нелинейных задачах математической физики: Учеб. пособие. – М.: РУДН, 2008. – 253 с.

В учебном пособии рассматриваются функционально-дифференциальные уравнения методами современного функционального анализа. Излагаются актуальные вопросы, возникающие в приложениях. Курс носит теоретический характер и рекомендуется для бакалавров физико-математических факультетов вузов и университетов, обучающихся по направлению «Математика».

***Учебное пособие выполнено в рамках инновационной образовательной программы Российского университета дружбы народов, направление «Комплекс экспортоориентированных инновационных образовательных программ по приоритетным направлениям науки и технологий», и входит в состав учебно-методического комплекса, включающего описание курса, программу и электронный учебник.***

# Оглавление

# Глава 1

# Введение

Термином "математическая физика" обычно называют раздел теории дифференциальных уравнений, который изучает задачи, пришедшие из физики и техники. Имеются и другие источники задач, связанных с дифференциальными уравнениями, например, дифференциальная геометрия.

Исследование нелинейных дифференциальных уравнений методами классического анализа началось в 19 веке, по-видимому, с работ Коши о разрешимости квазилинейных дифференциальных уравнений в множестве аналитических функций. Отметим знаменитую теорему Ковалевской о разрешимости задачи Коши и теорему Пуанкаре о существовании решений уравнения

$$\Delta u = e^u.$$

Дальнейший прогресс в теории уравнений в частных производных стал возможным только благодаря созданию функционального анализа и использованию его методов и терминологии.

Систематическое построение теории нелинейных дифференциальных уравнений и тесно связанного с ней нелинейного функционального анализа началось лишь в начале 20 века с работ Бернштейна, Шаудера и Лере.

С тех пор эта теория превратилась в огромный, интенсивно развивающийся раздел, который использует методы практически всех ветвей математики: дифференциальной геометрии, общей топологии, теории меры, действительного и комплексного анализа, теории вероятностей, общей алгебры, теории чисел и ряда других. Прекрасный исторический очерк по истории развития предмета в 20 веке имеется в [27].

Характерная особенность нелинейных уравнений в частных производных состоит в том, что каждое уравнение, будь то уравнение Навье – Стокса, или уравнение Монжа – Ампера, или какое-нибудь другое, представляет собой огромный и очень индивидуальный мир эффектов, исследование которого надо каждый раз начинать заново: искать функциональное пространство, в котором уравнение корректно решается, изучать свойства решений и т. д.

Общих методов для исследования различных уравнений в частных производных мало, есть общие идеи, связанные с использованием тех или иных фактов функционального анализа. Видимо, ситуация эта вызвана не столько несовершенством нашего математического аппарата или сравнительной молодостью самой дисциплины, сколько разнообразием природных процессов, которые моделируются дифференциальными уравнениями.

Любой автор учебника по нелинейным дифференциальным уравнениям стоит перед выбором: какой материал включить в книжку, ибо новые результаты приводят часто к переосмыслению казалось бы уже классических разделов. Так, например, теорема Ковалевской об аналитической разрешимости задачи Коши оказалась следствием результатов о разрешимости квазилинейных гиперболических систем [37], [38]. Даже такое классическое понятие, как обобщенная функция, не является безальтернативным [62]. Поэтому никакой учебник по нелинейным дифференциальным уравнениям не может быть полным и подбор материала в нем во многом определяется научными интересами автора.

Данный учебник посвящен вопросам существования решений в различных нелинейных задачах. Основное внимание уделено методам нелинейного функционального анализа и их приложению к конкретным уравнениям в частных производных. Эти методы условно можно поделить на два типа: топологические и аналитические.

В этом учебнике к топологическим методам относятся методы, основанные на применении теорем о неподвижной точке типа теоремы Шаудера, вариационные методы. Методы, связанные с монотонностью и коэрцитивностью операторов, тоже можно отнести к топологическим, так как в основе их лежат соображения компактности и степени отображения.

Важная черта топологических методов состоит в том, что с их помощью получаются лишь так называемые "чистые" теоремы существования. Это означает, что доказательство существования решения ведется, по существу, от противного и не использует каких-либо процедур конструктивного построения этого решения, например с помощью сходящейся последовательности приближений. Кроме того, вопросы единственности при топологическом подходе часто остаются за кадром.

К аналитическим методам мы относим всевозможные итерационные методы типа метода последовательных приближений или метода Ньютона. Характерной чертой этих методов является то, что для доказательства сходимости итерационной процедуры требуется наличие малого параметра.

В заключение, я хочу выразить благодарность моему учителю Дмитрию Валерьевичу Трещеву, оказавшему основное влияние на формирование моих научных интересов, а также Юлию Андреевичу Дубинскому, его внимание и поддержка всегда были для меня очень важны, и, конечно, Александру Леонидовичу Скубачевскому, общение с которым открыло для меня мир функционально-дифференциальных уравнений.

# Глава 2

# Очень короткий справочник по пространствам Соболева

## 1 Пространства $L^p$

Рассмотрим ограниченную область $M \subset \mathbb{R}^m$ с гладкой границей $\partial M = \overline{M} \backslash M$. Пусть, как обычно, $L^p(M), \quad p \geq 1$ – пространство измеримых относительно стандартной меры Лебега в $M$ функций, для которых норма

$$\|u\|^p_{L^p(M)} = \int_M |u(x)|^p \, dx$$

конечна. Через $dx$ мы обозначаем стандартный элемент объема в $\mathbb{R}^m$.

Пространство $L^p(M)$ с этой нормой является банаховым пространством, а в случае $p = 2$ – гильбертовым со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_M u(x)v(x) \, dx.$$

Здесь и далее мы рассматриваем действительнозначные функции.

Пространство $L^\infty(M)$ состоит из измеримых функций, модуль которых ограничен почти всюду. Число

$$M = \inf\{c \in \mathbb{R} \mid |u(x)| \leq c \quad \text{почти всюду в } M\}$$

является нормой элемента $u \in L^\infty(M)$. Пространство $L^\infty(M)$ тоже является банаховым.

Справедливо неравенство

$$\|uv\|_{L^r(M)} \le \|u\|_{L^p(M)}\|v\|_{L^q(M)}, \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}, \quad p, q, r \in [1, \infty].$$

Отсюда, в частности, следуют непрерывные вложения

$$L^{p''}(M) \subset L^{p'}(M), \quad 1 \le p' < p'' \le \infty.$$

Пространства $L^p(M), \quad 1 < p < \infty$ рефлексивны, причем

$$(L^p(M))^* = L^q(M), \quad 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

Действие элемента $f \in L^q(M)$, понимаемого как линейный функционал, на элемент $u \in L^p(M)$ задается формулой

$$(f, u) = \int_M f(x)v(x)\, dx.$$

Отметим две важные теоремы о пространствах $L^p$, которые используются в дальнейшем. Через $\mu$ мы обозначаем меру Лебега в $\mathbb{R}^m$.

**Теорема 2.1 (Егоров)** *Пусть $\{f_k\}$ – последовательность измеримых в $M$ функций, сходящаяся почти всюду к функции $f$. Предположим, что функции $\{f_k\}$ и $f$ принимают почти всюду конечные значения. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется измеримое множество*

$$B \subseteq M, \quad \mu(M \backslash B) < \varepsilon$$

*такое, что последовательность $\{f_k\}$ сходится на $B$ к $f$ равномерно.*

**Теорема 2.2 (Неравенство Чебышева)** *Для любой измеримой в $M$ функции $f$ справедливо неравенство*

$$\mu(x \in M \mid |f(x)| \ge \varepsilon) \le \frac{1}{\varepsilon}\int_M |f(x)|\, d\mu,$$

*здесь $\varepsilon$ – произвольное положительное число.*

## 2 Интерполяция

Рассмотрим непрерывно вложенные друг в друга банаховы пространства $F$ и $E$, $\quad F \subseteq E$. Пусть

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$$

– полоса в комплексной плоскости. Через $\mathcal{H}_{E,F}(\Omega)$ обозначим линейное пространство непрерывных и ограниченных в $\overline{\Omega}$, а также голоморфных в $\Omega$ функций со значениями в $E$. Кроме того, для всякой функции $u$, принадлежащей $\mathcal{H}_{E,F}(\Omega)$, справедливо включение $u(1+iy) \in F$, $\quad y \in \mathbb{R}$, и выполняется неравенство $\sup_{y\in\mathbb{R}} \|u(1+iy)\|_F < \infty$.

Пространство $\mathcal{H}_{E,F}(\Omega)$ является банаховым пространством с нормой

$$\|u\|_{\mathcal{H}_{E,F}(\Omega)} = \sup_{z\in\overline{\Omega}} \|u(z)\|_E + \sup_{y\in\mathbb{R}} \|u(1+iy)\|_F.$$

Неформально говоря, интерполяционное пространство

$$[E,F]_\theta, \quad \theta \in [0,1]$$

состоит из элементов $u(\theta)$, где $u$ пробегает все $\mathcal{H}_{E,F}(\Omega)$. Если бы мы не собирались ввести в $[E,F]_\theta$ структуру банахова пространства, этого было бы достаточно. Но для того, чтобы превратить пространство $[E,F]_\theta$ в банахово, придется усложнить конструкцию.

Отметим, что каждому элементу $u(z) \in \mathcal{H}_{E,F}(\Omega)$ соответствует элемент $u(\theta) \in [E,F]_\theta$. Обратное, однако, неверно: одному $v \in [E,F]_\theta$ могут отвечать различные элементы $\mathcal{H}_{E,F}(\Omega)$, принимающие в точке $\theta$ значение $v$. Поэтому если мы отождествим элементы пространства $\mathcal{H}_{E,F}(\Omega)$, принимающие в $\theta$ одно и то же значение, мы получим множество, изоморфное множеству $[E,F]_\theta$. Технически это делается так.

Зафиксируем действительное число $0 \leq \theta \leq 1$ и введем линейный непрерывный оператор $\Phi_\theta : \mathcal{H}_{E,F}(\Omega) \to E$ по формуле

$$\Phi_\theta u = u(\theta).$$

**Определение 2.1** *Интерполяционным пространством $[E, F]_\theta$ называется фактор-пространство $\mathcal{H}_{E,F}(\Omega)/\ker \Phi_\theta$.*

В соответствии со стандартными теоремами из функционального анализа фактор-пространство банахова пространства по замкнутому подпространству само является банаховым пространством.

Будем использовать следующее соглашение: $[F, E]_\theta = [E, F]_{1-\theta}$.

Отметим две важные теоремы об интерполяционных пространствах.

**Теорема 2.3** *Пусть $F \subseteq E$, $\quad F' \subseteq E'$ – непрерывно вложенные друг в друга банаховы пространства. Имеется непрерывный линейный оператор $T : E \to E'$ и $T : F \to F'$.*

*Тогда для всех $\theta \in [0, 1]$ оператор $T$ действует на интерполяционных пространствах*

$$T : [E, F]_\theta \to [E', F']_\theta$$

*и непрерывен.*

**Теорема 2.4** *Пусть $H$ – гильбертово пространство, $D(A) \subseteq H$ – область определения положительного самосопряженного оператора $A : D(A) \to H$.*

*Тогда справедливо равенство*

$$[H, D(A)]_\theta = D(A^\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

# 3 Пространства $H^{s,p}$

Через $H^{k,p}(M), \quad p > 1$ мы будем обозначать пространство Соболева, которое состоит из функций, все обобщенные частные производные которых, начиная с нулевого порядка и до порядка $k$ включительно, принадлежат пространству $L^p(M)$. Пространство $H^{k,p}(M)$ является банаховым пространством с нормой

$$\|u\|^p_{H^{k,p}(M)} = \sum_{|j|\le k} \left\| \frac{\partial^{|j|}}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_m^{j_m}} u \right\|^p_{L^p(M)},$$

здесь

$$x = (x_1, \dots, x_m) \in M, \quad j = (j_1, \dots, j_m) \in \mathbb{N}^m \bigcup \{0\}, \quad |j| = j_1 + \ldots + j_m.$$

В пространстве $H^{k,p}(M)$ имеется эквивалентная норма (мы будем обозначать ее тем же символом):

$$\|u\|^p_{H^{k,p}(M)} = \|u\|^p_{L^p(M)} + \sum_{|j|=k} \left\| \frac{\partial^{|j|}}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_m^{j_m}} u \right\|^p_{L^p(M)}.$$

Вообще, есть весьма полезная теорема, описывающая некоторый класс эквивалентных норм в $H^{l,p}(M), \quad l \in \mathbb{N}$.

**Теорема 2.5** *Пусть линейные ограниченные в $H^{l,p}(M)$ функционалы $f_k(u), \quad k = 1, \dots, N$ таковы, что они не обращаются одновременно в $0$ ни на одном отличном от тождественного нуля полиноме степени не выше $l-1$.*

*Тогда в $H^{l,p}(M)$ имеется эквивалентная норма, заданная следующим образом:*

$$\|u\|^p = \sum_{k=1}^{N} |f_k(u)|^p + \sum_{|j|=l} \left\| \frac{\partial^{|j|}}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_m^{j_m}} u \right\|^p_{L^p(M)}.$$

По определению, положим $H^{0,p}(M) = L^p(M)$. Пространства $H^{k,2}(M)$ мы будем обозначать символом $H^k(M)$. Эти пространства гильбертовы, скалярное произведение в них задается формулой

$$(u,v) = \sum_{|j|\le k} \Big( \frac{\partial^{|j|}}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_m^{j_m}} u, \frac{\partial^{|j|}}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_m^{j_m}} v \Big).$$

В силу теоремы 2.5 функции пространства $H^1(M)$ удовлетворяют неравенству Пуанкаре:

$$\int_M u^2(x)\,dx \le C\Big( \int_M \sum_{k=1}^m |\nabla u|^2\,dx + \Big( \int_M u(x)\,dx \Big)^2 \Big),$$

константа $C$ не зависит от $u$, через $\nabla u$ обозначен стандартный градиент функции.

Определим пространство $H^{s,p}(M)$ для любого действительного $s > 0$, положив

$$H^{k\theta,p}(M) = [L^p(M), H^{k,p}(M)]_\theta, \quad \theta \in (0,1), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Пространства $H^{s,p}(M)$ сепарабельны и рефлексивны.

## 3.1 След функции

В различных задачах математической физики требуется найти функцию, которая бы удовлетворяла определенным условиям на границе области $M$, например, равнялась бы там нулю. Функции из пространств Соболева, как и из $L^p$, определены с точностью до множества меры нуль, каковыми, в не очень "диких" случаях, являются границы областей. Поэтому в буквальном понимании требование того, чтобы функция из $H^{s,p}$ равнялась нулю на $\partial M$, бессмысленно.

Однако сузить функцию из пространства Соболева на границу в определенном смысле все-таки можно.

**Теорема 2.6** *Существует линейный непрерывный оператор*

$$\mathrm{Tr} : H^{s,p}(M) \to H^{s-1,p}(\partial M), \quad s \geq 1,$$

*такой, что для всякой функции* $u \in C(\overline{M}) \bigcap H^{s,p}(M)$ *справедливо соотношение*

$$\mathrm{Tr}\, u = u \mid_{\partial M} .$$

Этот оператор называется следом; сужение функции из пространства Соболева на границу области мы будем понимать в смысле действия этого оператора.

Сделаем несколько замечаний относительно пространства $H^{1,p}$.

В силу теоремы 2.5 функции пространства $H^1(M)$ удовлетворяют неравенству Фридрихса:

$$\int_M u^2(x)\, dx \leq C\Big( \int_M \sum_{k=1}^m |\nabla u|^2\, dx + \int_{\partial M} u^2(x)\, dx \Big).$$

Мы будем использовать следующее обозначение:

$$H_0^{1,p}(M) = \{u \in H^{1,p}(M) \mid \mathrm{Tr}\, u = 0\}.$$

В пространстве $H_0^{1,p}(M)$ имеется норма

$$\|u\|^p_{H_0^{1,p}(M)} = \sum_{k=1}^m \Big\| \frac{\partial u}{\partial x_k} \Big\|^p_{L^p(M)}.$$

Эта норма, как следует из теоремы 2.5, эквивалентна стандартной норме пространства $H^{1,p}(M)$.

В частности, в пространстве $H_0^1(M)$ можно определить эквивалентным образом скалярное произведение:

$$(u,v)=\sum_{k=1}^{m}\Big(\frac{\partial u}{\partial x_k},\frac{\partial v}{\partial x_k}\Big).$$

## 3.2 Теоремы вложения Соболева

Здесь мы перечислим основные свойства пространств Соболева.

1) Имеет место следующее компактное вложение:

$$H^{s'',p}(M)\subset H^{s',p}(M),\quad 0\le s'<s''.$$

2) Если $sp<m$, то $H^{s,p}(M)\subset L^{\frac{mp}{m-sp}}(M)$.

3) Если $sp>m$, то $H^{s,p}(M)\subset C(\overline{M})$. В этом случае пространство $H^{s,p}(M)$ является банаховой алгеброй относительно операции умножения функций.

Во всех перечисленных утверждениях оператор вложения ограничен.

## 3.3 Доказательство теоремы 2.5

Неравенство $\|\cdot\|\le c\|\cdot\|_{H^{l,p}(M)}$ очевидно.

Покажем, что найдется такая положительная константа $c$, при которой для любой функции $u\in H^{l,p}(M)$ верно неравенство $\|u\|\ge c\|u\|_{H^{l,p}(M)}$. Будем рассуждать от противного. Допустим, найдутся последовательность функций $\{u_j\}\subset H^{l,p}(M)$ и последовательность чисел

$$c_j,\quad c_j\to 0,\quad j\to\infty,$$

такие, что

$$\|u_j\|\le c_j\|u_j\|_{H^{l,p}(M)}. \tag{3.1}$$

Последовательность $\{u_j\}$, очевидно, можно отнормировать так, что

$$\|u_j\|_{H^{l,p}(M)} = 1. \tag{3.2}$$

Мы будем считать это равенство выполненным. Тогда неравенство (3.1) означает, что

$$\|u_j\| \to 0 \quad \text{при} \quad j \to \infty. \tag{3.3}$$

Так как последовательность $\{u_j\}$ ограничена в $H^{l,p}(M)$, из нее можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность, а из той, в силу теорем вложения, – сильно сходящуюся в $H^{l-1,p}(M)$. Полученную подпоследовательность мы будем обозначать тем же символом. Итак, имеем

$$u_j \to u \in H^{l,p}(M)$$

слабо в $H^{l,p}(M)$ и сильно в $H^{l-1,p}(M)$.

Функция $u$ не может равняться нулю. Действительно, $u_j$ сходится к $u$ в $L^p(M)$, и в силу формулы (3.3) все производные порядка $l$ от $u_j$ сходятся к нулю в $L^p(M)$. Получается, что если функция $u$ равна нулю, то последовательность $\{u_j\}$ сходится к нулю в $H^{l,p}(M)$. Но это противоречит (3.2).

В силу соотношения (3.3) мы получаем, что

$$l_s(u_j) \to 0 \text{ и } l_s(u) = 0, \quad s = 1, \dots, N.$$

Следовательно, $u$ не является полиномом степени меньшей или равной $l-1$.

С другой стороны, опять же в силу (3.3), для всех $r$, $\quad |r| = l$, имеем

$$\left\| \frac{\partial^{|r|}}{\partial x_1^{r_1} \dots \partial x_m^{r_m}} u_j \right\|_{L^p(M)} \to 0.$$

Это означает, что для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(M)$ верно следующее:

$$\Big(\frac{\partial^{|r|}}{\partial x_1^{r_1}\dots\partial x_m^{r_m}}u_j, \varphi\Big) = -\Big(\frac{\partial^{|r|-1}}{\partial x_1^{i_1}\dots\partial x_m^{i_m}}u_j, \frac{\partial}{\partial x_q}\varphi\Big)$$
$$\to -\Big(\frac{\partial^{|r|-1}}{\partial x_1^{i_1}\dots\partial x_m^{i_m}}u, \frac{\partial}{\partial x_q}\varphi\Big) = 0.$$

Предельный переход в этой формуле возможен благодаря тому, что последовательность $\{u_j\}$ сильно сходится в $H^{l-1,p}(M)$.

Возвращая обратно производную, находим

$$\Big(\frac{\partial^{|r|}}{\partial x_1^{r_1}\dots\partial x_m^{r_m}}u, \varphi\Big) = 0.$$

Обобщенная функция, все производные порядка $l$ от которой равны нулю, является многочленом степени не выше $l-1$. Следовательно, $u$ – это многочлен указанной степени. Противоречие.

Теорема доказана.

## 4 Задачи

**Задача 2.1** *Для $p_1, p_2 > 1$ докажите формулу*

$$[L^{p_1}(M), L^{p_2}(M)]_\theta = L^q(M), \quad 0 < \theta < 1, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{p_1} + \frac{\theta}{p_2}.$$

**Задача 2.2** *Пусть $1 < p < q < r$. Докажите, что для всех $\theta \in (0,1)$, удовлетворяющих уравнению*

$$\frac{1}{q} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{r},$$

*справедлива формула*

$$\|u\|_{L^q(M)} \le \|u\|^{\theta}_{L^p(M)} \cdot \|u\|^{1-\theta}_{L^r(M)}.$$

**Задача 2.3** *Докажите формулу*

$$[H^{s_1,p}(M), H^{s_2,p}(M)]_\theta = H^{\theta s_2+(1-\theta)s_1,p}(M).$$

**Задача 2.4** *Какому пространству Соболева принадлежит интерполяционное пространство*

$$[H^{k,p}(M), H^{k,q}(M)]_\theta, \quad k \in \mathbb{N}?$$

**Задача 2.5** *Докажите, что оператор дифференцирования*

$$\frac{\partial}{\partial x_j} : H^{s,p}(M) \to H^{s-1,p}(M)$$

*ограничен.*

**Задача 2.6** *Докажите неравенство Пуанкаре.*

**Задача 2.7** *Докажите неравенство Фридрихса.*

Глава 3

# Линейные топологические пространства

## 1 Линейные топологические пространства

В этом разделе мы рассмотрим элементы теории локально выпуклых линейных топологических пространств. Прекрасное систематическое изложение этой теории имеется в [14].

Мы будем рассматривать линейные пространства над полем действительных чисел.

Формальное определение локально выпуклого топологического пространства звучит так. Линейное топологическое пространство называется локально выпуклым, если оно имеет базис, состоящий из выпуклых окрестностей нуля.

Всякая локально выпуклая топология может быть задана с помощью специальных функций – полунорм.

**Определение 3.1** *Пусть задано множество произвольной природы* $\mathcal{I}$. *Предположим, что в линейном пространстве* $E$ *имеется семейство* *функций*

$$p_i : E \to \mathbb{R}, \quad i \in \mathcal{I},$$

*обладающих следующими свойствами:*

*1) для любого $x \in E$ имеем $p_i(x) \geq 0$,*

*2) $p_i(\lambda x) = |\lambda| p_i(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}$,*

*3) $p_i(x + y) \leq p_i(x) + p_i(y)$.*

*Тогда пространство $E$ называется полунормированным и обозначается $(E, \{p_i\}_{i \in \mathcal{I}})$, или коротко $(E, p_i)$. Функции, обладающие свойствами 1)-3), называются полунормами.*

Легко видеть, что $p_i(0) = 0$.

Всякое полунормированное пространство является локально выпуклым линейным топологическим пространством с базисом замкнутых выпуклых окрестностей

$$U_{J,\varepsilon} = \{x \in E \mid \sup_{i \in J} p_i(x) \leq \varepsilon\},$$

здесь $J$ – произвольное конечное подмножество $\mathcal{I}$ и $\varepsilon > 0$. И обратно, во всяком локально выпуклом линейном топологическом пространстве топология может быть введена с помощью полунорм. Поэтому всякое локально выпуклое линейное топологическое пространство может рассматриваться как полунормированное.

Полунормы $p_i$ мы будем часто обозначать $\| \cdot \|_i$. Если даже все полунормы $p_i$ являются нормами, мы будем называть пространство $E$ полунормированным.

Тривиальным примером полунормированного пространства является нормированное пространство. Действительно, всякая норма является полунормой, и множество $\mathcal{I}$ в данном случае состоит из одного элемента.

Полунормированное пространство $E$ является отделимым (в топологическом смысле) тогда и только тогда, когда для любых различных элементов $x, y \in E$ найдется индекс $i \in \mathcal{I}$ такой, что $\|x-y\|_i \neq 0$. В дальнейшем мы будем рассматривать только отделимые пространства.

В полунормированном пространстве $E$ можно определить не только топологические понятия, но и понятия, связанные с метрическими свойствами $E$.

Например, пусть даны два полунормированных пространства

$$(E, \{p_i\}_{i \in \mathcal{I}}) \text{ и } (V, \{q_j\}_{j \in \mathcal{A}}).$$

Отображение $f : E \to V$ называется непрерывным в точке $x_0$ (чисто топологическое понятие), если для любого $\varepsilon > 0$ и любого $j \in \mathcal{A}$ существует $\delta > 0$ и $i \in \mathcal{I}$ такие, что для всех $x, \quad p_i(x - x_0) \leq \delta$ имеем $q_j(f(x) - f(x_0)) \leq \varepsilon$.

Наряду с этим определением можно дать определение равномерной непрерывности. Отображение $f : G \to V$ называется равномерно непрерывным на множестве $G \subseteq E$, если для любого $\varepsilon > 0$ и любого $j \in \mathcal{A}$ существует $\delta > 0$ и $i \in \mathcal{I}$ такие, что для всех

$$x, y \in G, \quad p_i(x - y) \leq \delta$$

имеем $q_j(f(x) - f(y)) \leq \varepsilon$.

Основные результаты, касающиеся поведения непрерывных отображений, переносятся на случай полунормированных пространств. В частности, непрерывная функция, определенная на компактном подмножестве полунормированного пространства, равномерно непрерывна.

Однако понятие равномерной непрерывности, как и другие понятия, отражающие метрическую природу полунормированных пространств, не являются топологически инвариантными.

Поясним, что имеется в виду. Предположим, на пространстве $E$ заданы две системы полунорм: система $\{p_i, \quad i \in \mathcal{I}\}$ и система $\{q_j, \quad j \in \mathcal{A}\}$, и эти системы задают в $E$ эквивалентные топологии. Такие системы полунорм мы будем называть эквивалентными. Тогда всякая функция $f : E \to \mathbb{R}$, непрерывная относительно одной системы полунорм, непрерывна и относительно другой системы (ибо непрерывность – это понятие топологическое), но из того, что функция равномерно непрерывна в одной системе полунорм, не следует, вообще говоря, что она равномерно непрерывна в другой системе. Определение равномерной непрерывности нельзя дать, пользуясь только топологическими терминами.

Неприятности такого сорта устраняются, если потребовать, чтобы системы полунорм были равномерно эквивалентными. По определению это означает, что тождественное отображение

$$\mathrm{id} : (E, \{p_i\}_{i\in\mathcal{I}}) \to (E, \{q_j\}_{j\in\mathcal{A}})$$

равномерно непрерывно.

В полунормированном пространстве можно ввести понятие полноты.

Последовательность $\{x_l\}_{l\in\mathbb{N}} \subset (E, \{\|\cdot\|_i\}_{i\in\mathcal{I}})$ называется сходящейся, если существует элемент $a \in E$ такой, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого $i \in \mathcal{I}$ найдется такой номер $N$, что если $n > N$, то

$$\|x_n - a\|_i \leq \varepsilon.$$

**Определение 3.2** *Последовательность* $\{x_l\}_{l\in\mathbb{N}} \subset (E, \{\|\cdot\|_i\}_{i\in\mathcal{I}})$ *называется последовательностью Коши, если для любого* $\varepsilon > 0$ *и любого*

*$i \in \mathcal{I}$ найдется такой номер $N$, что если $m, n > N$, то*

$$\|x_n - x_m\|_i \leq \varepsilon.$$

*Пространство $(E, \{\|\cdot\|_i\}_{i\in\mathcal{I}})$ называется секвенциально полным, если всякая последовательность Коши в нем имеет предел.*

Термин "секвенциально полное пространство" введен для того, чтобы подчеркнуть, что свойство пространства быть полным не является топологическим инвариантом. Это свойство инвариантно только относительно равномерно эквивалентных систем полунорм. Поскольку других определений полноты мы не используем, будем называть секвенциально полные пространства полными.

Рассмотрим пример. Пусть $D$ – область в $\mathbb{C}^m$. Через $\mathcal{O}(D)$ обозначим множество функций $f : D \to \mathbb{C}$, голоморфных в $D$. Пространство $\mathcal{O}(D)$ является полным полунормированным пространством относительно системы полунорм

$$\|f\|_K = \max_{z\in D} |f(z)|,$$

здесь $K$ – произвольное компактное подмножество $D$. Заданная этими полунормами топология называется топологией компактной сходимости или топологией равномерной сходимости на компактах.

Подмножество $G$ полунормированного пространства $(E, \{\|\cdot\|_i\}_{i\in\mathcal{I}})$ называется ограниченным, если для всех $i \in \mathcal{I}$ имеем $\sup_{x\in G} \|x\|_i < \infty$.

**Определение 3.3** *Говорят, что пространство $(E, \{\|\cdot\|_i\}_{i\in\mathcal{I}})$ удовлетворяет аксиоме Монтеля, или является пространством Монтеля, если всякое замкнутое и ограниченное подмножество $E$ компактно.*

Как известно из курсов комплексного анализа [19], пространством Монтеля является $\mathcal{O}(D)$.

Пространства Монтеля показывают принципиальное отличие топологии полунормированных пространств от топологии нормированных пространств. Как известно из курсов функционального анализа [6], нормированное пространство является пространством Монтеля тогда и только тогда, когда оно конечномерно.

Сформулируем критерий компактности для непрерывных отображений со значениями в полунормированном пространстве. Пусть $T$ – некоторое топологическое пространство. Обозначим через $C(T, E)$ пространство непрерывных отображений из $T$ в полунормированое пространство $(E, \{\|\cdot\|_i\}_{i\in\mathcal{I}})$. Само пространство $C(T, E)$ является полунормированным пространством с топологией компактной сходимости

$$\|u(\cdot)\|_{K,i} = \max_{x\in K} \|u(x)\|_i,$$

здесь $K$ – произвольное компактное множество из $T$.

**Определение 3.4** *Множество $G \subseteq C(T, E)$ называется равностепенно непрерывным, если для любого $\varepsilon > 0$ и любого $i \in \mathcal{I}$ у любой точки $a \in T$ найдется окрестность $U_a$ такая, что если $x \in U_a$, то*

$$\sup_{f\in G} \|f(x) - f(a)\|_i \le \varepsilon.$$

**Теорема 3.1 (теорема Асколи)** *Для того чтобы множество*

$$G \subseteq C(T, E)$$

*было компактным достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:*

*1) множество $G$ равностепенно непрерывно,*

*2) для каждого $x \in T$ множество $G(x) = \{f(x) \mid f \in G\}$ компактно в $E$.*

Многие банаховы пространства образуют параметрические семейства и вложены друг в друга.

Обозначим через $M$ ограниченную область с гладкой границей в $\mathbb{R}^m$, и через $H^{s,p}(M), \quad p > 1,$ – пространство Соболева функций, обобщенные производные которых, до порядка $s$ включительно, принадлежат пространству $L^p(M)$. Мы не будем сейчас воспроизводить стандартные рассуждения, которые позволяют определить пространства $H^{s,p}(M)$ для всех $s \in \mathbb{R}$.

Как известно, если $s' < s''$, то имеют место следующие вложения:

$$H^{s'',p}(M) \subset H^{s',p}(M), \tag{1.1}$$

и справедливы неравенства

$$\| \cdot \|_{H^{s',p}(M)} \leq c \| \cdot \|_{H^{s'',p}(M)}.$$

Здесь $c$ – положительная константа.

Аналогичным свойством обладают пространства

$$E_s = H_0^{1+s,p}(M) = \{u \in H^{1+s,p}(M) \mid u \mid_{\partial M} = 0\}.$$

Смоделируем эту ситуацию аксиоматически.

**Определение 3.5** *Множество банаховых пространств $E_s$, $0 < s < 1$, с нормами $\| \cdot \|_s$ называется шкалой банаховых пространств, если для всех $s' < s''$*

$$E_{s''} \subseteq E_{s'}, \quad \| \cdot \|_{s'} \leq \| \cdot \|_{s''}. \tag{1.2}$$

Иногда удобно считать, что параметр $s$ в этом определении принадлежит какому-нибудь другому подмножеству $\mathbb{R}$. Каждый раз область определения параметра, задающего шкалу, мы будем оговаривать отдельно.

Шкала банаховых пространств порождает отделимое полунормированное пространство

$$E = \bigcap_{s\in(0,1)} E_s$$

с полунормами $\|\cdot\|_s$. Отметим, что если вложения (1.2) компактны, как, например, в случае (1.1), то пространство $E$ является пространством Монтеля.

Если пространства $E_s$ определены при $s \in (0,1]$, то пространство

$$E = \bigcap_{s\in(0,1]} E_s$$

совпадает с банаховым пространством $E_1$.

## 2 Задачи

**Задача 3.1** *Докажите, что всякое конечномерное отделимое локально выпуклое линейное топологическое пространство нормируемо, т.е. его топология может быть задана с помощью нормы.*

**Задача 3.2** *Сформулировать и доказать критерий секвенциальной компактности в терминах $\varepsilon$-сетей для полунормированного пространства.*

**Задача 3.3** *Докажите, что если вложения (1.2) компактны, то пространство*

$$E = \bigcap_{s\in(0,1)} E_s$$

*с полунормами $\|\cdot\|_s$ является пространством Монтеля.*

**Задача 3.4** *Докажите, что пространство $E$ из предыдущей задачи обладает первой аксиомой счетности.*

**Задача 3.5** *Докажите, что пространство* $\mathcal{O}(D)$ *ненормируемо.*

**Задача 3.6** *Пусть* $D$ – *открытое выпуклое подмножество локально выпуклого линейного топологического пространства* $E$. *Определим границу множества* $D$ *формулой* $\partial D = \overline{D} \backslash D$. *Верно ли, что*

$$\partial D = \bigcup_{E' \subseteq E} \partial(E' \bigcap D)?$$

*Здесь объединение берется по всем конечномерным подпространствам* $E'$ *пространства* $E$.

**Задача 3.7** *Рассмотрим банахово пространство* $(B, \|\cdot\|_B)$ *и его сопряженное* $B^*$. *Введем в пространстве* $B$ *локально выпуклую топологию с помощью семейства полунорм*

$$p_f(x) = |f(x)|, \quad f \in B^*.$$

*Является ли пространство* $B$ *с такой топологией секвенциально полным? Является ли оно пространством Монтеля?*

**Задача 3.8** *Обозначим через* $\mathbb{T}^m = \mathbb{R}^m/(2\pi\mathbb{Z})^m$ $m$*-мерный тор. Пусть* $\mathbb{T}^m_s = \{z = x + iy \in \mathbb{C}^m \mid x \in \mathbb{T}^m, \quad |y_j| < s, \quad j = 1, \ldots, m\}$ – *комплексная окрестность этого тора. Здесь*

$$z = (z_1, \ldots, z_m), \quad x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m, \quad y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m.$$

*Зафиксируем положительное число* $S$ *и рассмотрим пространство функций* $f : \mathbb{T}^m_S \to \mathbb{C}$, *представляющихся рядом Фурье*

$$f(z) = \sum_{k=(k_1,\ldots,k_m)\in\mathbb{Z}^m} f_k e^{i(z,k)},$$

*где* $(z,k) = z_1k_1 + \ldots + z_mk_m$. *Через* $E$ *обозначим пространство, для которого конечны нормы*

$$\|f\|_s = \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} |f_k|e^{s|k|}, \quad 0 < s < S.$$

*Эти нормы задают локально выпуклую топологию на* $E$.

*Доказать, что* $E$ *состоит из функций, голоморфных в* $\mathbb{T}^m_S$, *и только из них.*

*Выяснить, гомеоморфны ли пространства* $E$ *и* $\mathcal{O}(\mathbb{T}^m_S)$.

*Выяснить, является ли введенное семейство норм равномерно эквивалентным следующему:*

$$\|f\|'_s = \sup_{z\in\mathbb{T}^m_s} |f(z)|, \quad 0 < s < S.$$

**Задача 3.9** *Определим пространство* $H^s(\mathbb{T}^m)$, $\quad s \in \mathbb{R}$, *как банахово пространство, состоящее из функций*

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} f_k e^{i(x,k)},$$

*для которых конечна норма*

$$\|f\|^2_{H^s(\mathbb{T}^m)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} |f_k|^2|k|^{2s}.$$

*Доказать, что это определение эквивалентно стандартному определению пространства* $H^s(\mathbb{T}^m)$.

**Задача 3.10** *Доказать, что в конечномерном пространстве любые две нормы* $\|\cdot\|$ *и* $\|\cdot\|'$ *эквивалентны: существуют такие положительные константы* $m, M$, *что*

$$m\|\cdot\| \le \|\cdot\|' \le M\|\cdot\|.$$

**Задача 3.11** *Пусть* $D' \Subset D'' \Subset D$ *– ограниченные области в* $\mathbb{C}^m$ *с гладкой границей, причем*

$$\delta = \min_{z' \in \partial D',\, z'' \in \partial D''} |z' - z''| > 0,$$

*здесь* $|z|^2 = |z_1|^2 + \ldots + |z_m|^2$, *символ* $\Subset$ *означает компактную принадлежность, т. е.* $\overline{D'} \subseteq D''$ *и* $\overline{D''} \subseteq D$.

*Получить оценку Коши: существует такая константа* $C > 0$, *что для любой функции* $f \in \mathcal{O}(D)$ *справедливо неравенство*

$$\sup_{z \in D'} \left| \frac{\partial f(z)}{\partial z_j} \right| \leq \frac{C}{\delta} \sup_{z \in D''} |f|.$$

*Доказать, что отображение* $\frac{\partial}{\partial z_j} : \mathcal{O}(D) \to \mathcal{O}(D)$ *непрерывно.*

Глава 4

# Топологическая степень и ее приложения

## 1 Определение и основные свойства степени

Рассмотрим два гладких ($C^1$) ориентированных многообразия $X$ и $Y$, оба размерности $m$. Предположим, что многообразие $X$ открыто, $\overline{X}$ компактно, а многообразие $Y$ не имеет границы. Зададим гладкое отображение $\varphi : \overline{X} \to Y$, понимая под этим, что $\varphi$ один раз непрерывно дифференцируемо во всех внутренних точках многообразия $X$ и продолжается непрерывно на границу $\partial X$.

Через $\varphi(X)$ мы обозначим образ многообразия $X$ при отображении $\varphi$:

$$\varphi(X) = \{y \in Y \mid \varphi(x) = y, \quad x \in X\}.$$

Через $\varphi^{-1}(y)$ мы обозначим полный прообраз точки $y \in Y$:

$$\varphi^{-1}(y) = \{x \in X \mid \varphi(x) = y\}.$$

**Определение 4.1** *Точка $x_0$ называется регулярной точкой отображе-*

*ния $\varphi$, если якобиан отображения $\varphi$ в этой точке имеет ранг $m$:*

$$J_\varphi(x_0) = \det\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0) \neq 0.$$

*Если точка $x_0$ не является регулярной, то она называется критической.*

*Точка $y_0$ называется критическим значением отображения $\varphi$, если полный прообраз $\varphi^{-1}(y_0)$ содержит критическую точку, в противном случае точка $y_0$ называется регулярным значением.*

Как показывает следующая теорема, регулярные значения отображения составляют "случай общего положения" в том смысле, что наугад взятое значение с вероятностью 1 окажется регулярным, и в любой окрестности критического значения отображения найдется сколько угодно регулярных значений.

**Теорема 4.1 (Сард)** *Предположим, что многообразия $X$ и $Y$ открыты и паракомпактны*[1]*. Тогда множество критических значений отображения $\varphi$ имеет лебегову меру нуль в $Y$.*

Эта теорема является частным случаем теоремы Сарда, в которой формулируется соответствующий результат для случая многообразий $X$ и $Y$ различной размерности [9] .

Определим сперва степень регулярного значения отображения $\varphi$.

Пусть точка $y_0 \in Y\backslash\varphi(\partial X)$ является регулярным значением отображения $\varphi$. Тогда по теореме о неявной функции прообраз $\varphi^{-1}(y_0)$ состоит из изолированных точек, и потому, в силу компактности $\overline{X}$, множество $\varphi^{-1}(y_0)$ конечно:

[1] Топологическое пространство называется паракомпактным, если для любого открытого покрытия существует подчиненное ему разбиение единицы.

$\varphi^{-1}(y_0) = \{x_1, \dots, x_j\}$.

**Определение 4.2** *Число*

$$\deg(\varphi, X, y_0) = \sum_{k=1}^{j} \operatorname{sign} J_\varphi(x_k)$$

*называется топологической степенью (или просто степенью, когда это не вызывает недоразумений) отображения $\varphi$ в точке $y_0$.*

*Степень отображения в точках, не принадлежащих образу $\varphi$, по определению полагается равной нулю.*

Таким образом, степень отображения в точке – это алгебраическое число прообразов этой точки при данном отображении.

Пусть, как и выше, точка $y_0 \in Y \setminus \varphi(\partial X)$ является регулярным значением отображения $\varphi$.

**Предложение 4.1** *Возьмем достаточно малую окрестность $\Omega$ точки $y_0$ и рассмотрим $m$-форму $\omega$ такую, что:*

$$\operatorname{supp} \omega \subset \Omega, \quad \int_Y \omega = 1.$$

*Справедливо равенство*

$$\deg(\varphi, X, y_0) = \int_X \varphi_* \omega. \tag{1.1}$$

*Доказательство.* Выберем окрестности $N_1, \dots, N_j$ точек

$$x_1, \dots, x_j$$

соответственно настолько малыми, что $N_i \bigcap N_k = \emptyset$ при $i \neq k$, и

$$N_i \bigcap \partial X = \emptyset, \quad i = 1, \dots k,$$

и кроме того, сужения $\varphi\mid_{N_i}$ взаимно однозначны со своими образами, $J_\varphi(x) \neq 0$ в $N_i$.

Возьмем $\Omega \subset \bigcap_{k=1}^{j} \varphi(N_k)$, тогда

$$\int_X \varphi_* \omega = \sum_{i=1}^{j} \int_{N_i} \varphi_* \omega = \sum_{i=1}^{j} \operatorname{sign} J_\varphi(x_i) \int_\Omega \omega.$$

Предложение доказано.

**Следствие 4.1** *Если регулярные значения $y_1, y_2 \in Y \backslash \varphi(\partial X)$ отображения $\varphi$ достаточно близки, то*

$$\deg(\varphi, X, y_1) = \deg(\varphi, X, y_2).$$

Действительно, близкие точки $y_1$ и $y_2$ лежат в окрестности $\Omega$, и степень отображения в них вычисляется по формуле (1.1).

Таким образом, степень отображения одинакова для любых двух регулярных значений, лежащих в одной и той же связной компоненте множества $Y \backslash \varphi(\partial X)$. Поэтому степень отображения $\varphi$ зависит не от точки, а от связной компоненты указанного множества. Соответственно, мы иногда вместо $\deg(\varphi, X, y_0)$ будем писать $\deg(\varphi, X, C)$, где $C$ – связная компонента множества $Y \backslash \varphi(\partial X)$, содержащая $y_0$.

В соответствии с этим, если точка $y_0 \in Y \backslash \varphi(\partial X)$ – критическая, то по определению мы будем считать, что $\deg(\varphi, X, y_0) = \deg(\varphi, X, C)$, где $C$ – связная компонента множества $Y \backslash \varphi(\partial X)$, содержащая $y_0$.

## 1.1 Поведение степени при гомотопиях

Рассмотрим гладкие отображения $\varphi_0, \varphi_1 : X \to Y$.

**Определение 4.3** *Отображения $\varphi_0, \varphi_1$ называются гомотопными, если существует непрерывное отображение*

$\psi : [0,1] \times X \to Y$ *такое, что*

*1)* $\psi(t, \cdot) : X \to Y$ *– гладкое отображение при всех* $t \in [0,1]$,

*2)* $\psi(0, \cdot) = \varphi_0, \quad \psi(1, \cdot) = \varphi_1$.

*Отображение $\psi$ называется гомотопией.*

В этом разделе мы докажем следующую теорему.

**Теорема 4.2** *Предположим, что отображения*

$\varphi_0, \varphi_1 : X \to Y$ *гомотопны. Фиксируем точку $y_0$.*

*Если при всех $t \in [0,1]$ точка $y_0 \in Y \backslash \psi(t, \partial X)$, то справедливо следующее равенство:*

$$\deg(\varphi_0, X, y_0) = \deg(\varphi_1, X, y_0).$$

Сперва докажем одну техническую лемму.

Будем называть координатную окрестность $\Theta$ точки $y_0 \in Y$ "хорошей", если существуют такие координаты (т. е. отображение $g : \Theta \to \mathbb{R}^m$), в которых $g(\Theta)$ является кубом.

**Лемма 4.1** *Пусть $\mu$ – гладкая $m$-форма на $Y$, причем*

$$\operatorname{supp} \mu \subset \Theta \ \ \textit{и} \ \ \int_Y \mu = 0.$$

*Тогда существует гладкая $(m-1)$-форма $\rho$,* $\quad \operatorname{supp} \rho \subset \Theta$ *такая, что* $d\rho = \mu$.

*Доказательство.* Достаточно провести доказательство в предположении, что $\operatorname{supp} \mu$ содержится в некотором кубе

$$K^m = \{(y^1, \ldots, y^m) \mid |y^j| \le r\}$$

пространства $\mathbb{R}^m$. Итак, нам надо показать, что для формы $\mu = f(y)dy$, $dy = dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^m$ с $\int_Y \mu = 0$ функцию $f$ можно представить в виде $f(y) = \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\partial g_j}{\partial y^j}(y)$, где носители функций $g_j$ содержатся в $K^m$ при всех $j$. Проведем доказательство индукцией по размерности $m$. При $m = 1$ функция $g_1(y) = \int\limits_{-r}^{y} f(s)\, ds$ удовлетворяет условию $f dy = dg_1$.

Предположим теперь, что лемма верна в $m$-мерном случае; мы хотим доказать ее справедливость для $(m+1)$-мерного случая. Положим

$$y^{m+1} = t,\ (y,t) = (y^1, \ldots, y^m, t) \in K^{m+1} \text{ и}$$

$$h(y) = \int\limits_{-r}^{r} f(y,t)dt.$$

Поскольку $\int_{K^m} h(y)dy = 0$, то по предположению индукции

$$h(y) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g_j(y)}{\partial y^j},$$

где $\operatorname{supp} g_j \subset K^m$.

Пусть $\tau(t)$ является гладкой функцией, носитель которой лежит в $K^1$, и

$$\int\limits_{-r}^{r} \tau(t)dt = 1.$$

Рассмотрим разность $f(y,t) - \tau(t)h(y)$. Очевидно,

$$\int_{-r}^{r} f(y,t) - \tau(t)h(y)\, dt = 0,$$

и поэтому носитель функции

$$g(y,t) = \int\limits_{-r}^{t} (f(y,s) - \tau(s)h(y))ds$$

лежит в $K^{m+1}$. Кроме того,

$$\frac{\partial g}{\partial t} = f(y,t) - \tau(t)h(y).$$

Следовательно,

$$f(y, y^{m+1}) = \frac{\partial g}{\partial y^{m+1}} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial (g_j(y)\tau(y^{m+1}))}{\partial y^j}.$$

Лемма доказана.

**Предложение 4.2** *Пусть $\alpha$ – $m$-форма с носителем в некоторой хорошей окрестности $U$ точки $y_0$, и $U \subset Y\backslash\varphi(\partial X)$. Тогда, если $\int_Y \alpha = 1$, то*

$$\deg(\varphi, X, y_0) = \int_X \varphi_* \alpha.$$

Это предложение является усиленной версией предложения 4.1: теперь мы не требуем, чтобы окрестность $U$ была достаточно малой, т.е. зависела, по существу, от того, как устроен прообраз точки $y_0$.

Докажем предложение 4.2. Для этого возьмем окрестность $\Omega \subset U$ и форму $\omega$ – как в предложении 4.1. Очевидно, форма $\mu = \omega - \alpha$ удовлетворяет условиям леммы 4.1. По формуле Стокса имеем

$$\int_X \varphi_*\omega - \int_X \varphi_*\alpha = \int_X \varphi_*\mu = \int_X d\,\varphi_*\rho = \int_{\partial X} \varphi_*\rho = 0,$$

так как $\operatorname{supp}\rho \subset U \subset Y\backslash\varphi(\partial X)$. Предложение 4.2 доказано.

Теперь мы готовы доказать теорему 4.2. В силу предложения 4.2 имеем

$$\deg(\psi(t,\cdot), X, y_0) = \int_X \psi_*(t,\cdot)\alpha,$$

где $\psi(t,x)$ гомотопия формы $\varphi_0$ в форму $\varphi_1$. Отсюда видно, что функция $\deg(\psi(t,\cdot), X, y_0)$ непрерывна по $t$. Поэтому, будучи целым числом, она не зависит от $t$. Теорема 4.2 доказана.

## 1.2 Степень непрерывных отображений

Важным результатом теории степени является тот факт, что понятие степени можно распространить на случай отображений $\varphi$, которые всего лишь непрерывны. Это делается при помощи аппроксимации отображения $\varphi$ посредством $C^1$-отображений $\varphi_n$, равномерно сходящихся к $\varphi$ на $X$. Используя свойство гомотопической инвариантности (теорема 4.2), можно показать, что для достаточно больших $n$ и для $y_0 \notin \varphi(\partial X)$ степень $\deg(\varphi_n, X, y_0)$ не зависит от $n$, и ее значение по определению берется в качестве $\deg(\varphi, X, y_0)$. В случае, когда $Y \subseteq \mathbb{R}^m$, нужные аппроксимации построить легко (например, применяя сглаживающие операторы).В общем случае это сделать труднее. Опираясь на теорему Уитни о вложении, можно, например, предположить, что $Y$ вложено как регулярное подмногообразие в некоторое пространство $\mathbb{R}^m$. Тогда при помощи сглаживающих операторов можно аппроксимировать $\varphi$ гладкими отображениями $\psi_n$ в $\mathbb{R}^m$. Проектируя эти отображения на $Y$, мы получим $\varphi_n$.

Мы не будем здесь вдаваться в подробности, а просто предположим, что наша теория степени справедлива для непрерывных отображений. Для таких отображений сохраняют силу утверждения этой главы, формулировка которых имеет для них смысл. Для доказательства надо аппроксимировать непрерывные отображения гладкими.

## 1.3 Дальнейшие свойства степени

Укажем несколько простых фактов, позволяющих в ряде случаев находить степень отображения.

Если отображение $\varphi$ взаимно однозначно и сохраняет (соответственно, меняет) ориентацию многообразия $X$, то

$$\deg(\varphi, X, y_0) = 1$$

(соответственно, $-1$) для любой точки $y_0 \in \varphi(X), \quad y_0 \notin \varphi(\partial X)$. Это непосредственно вытекает из определения степени отображения $\varphi$. В частности, если $X$ и $Y$ лежат в $\mathbb{R}^n$, а $\varphi = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ (соответственно, $-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$), то для $y_0 \in \varphi(X) \cap \{Y \setminus \varphi(\partial X)\}$

$$\deg(\varphi, X, y_0) = 1$$

(соответственно, $(-1)^n$).

Предположим, что $X$ – компактное многообразие без края, а многообразие $Y$ некомпактно и связно. Тогда степень $\deg(\varphi, X, y)$ определена для всякой точки $y$ из $Y$. Мы утверждаем, что эта степень равна 0. Действительно, в силу компактности $\varphi(X)$ найдется точка $y_0 \in Y$, не лежащая в $\varphi(X)$. Но для нее $\deg(\varphi, X, y_0) = 0$, и наше утверждение следует из того, что $\deg(\varphi, X, y)$ не зависит от $y$.

Пусть, как и выше, $\overline{X}$ – ориентированное компактное многообразие размерности $m$, и $H, K : X \to \mathbb{R}^m$ – непрерывные отображения. Обозначим через $\| \cdot \|$ норму в $\mathbb{R}^m$.

**Теорема 4.3 (Руше)** *Пусть $a$ – некоторая точка из $\mathbb{R}^m$. Предположим, что $a \notin H(\partial X)$ и $a \notin (H+K)(\partial X)$, и пусть в каждой точке $x \in \partial X$ справедливо неравенство*

$$\|K(x)\| \leq \|H(x) - a\|. \tag{1.2}$$

*Тогда* $\deg(H+K, X, a) = \deg(H, X, a)$.

*Доказательство.* Отображения $H$ и $H+K$ гомотопны, гомотопия задается формулой $\varphi(t,x) = H(x)+tK(x), \quad 0 \le t \le 1$. Если мы покажем, что при всех $t \in [0,1]$ точка $a$ не принадлежит множеству $(H+tK)(\partial X)$, то наше утверждение будет следовать из теоремы 4.2.

Предположим противное: при некотором $x \in \partial X$ и при некотором $t \in [0,1]$ справедливо равенство $H(x) + tK(x) = a$. Если $t < 1$, то это противоречит (1.2), ибо тогда $\|H(x) - a\| = t\|K(x)\|$. Если $t = 1$, то $a \in (H+K)(\partial X)$, что тоже противоречит условию теоремы.

Теорема доказана.

Неформально говоря, Теорема Руше означает, что степень отображения $H$ в точке не изменится, если мы добавим к этому отображению малое возмущение $K$. Малость здесь понимается в смысле неравенства (1.2).

Рассмотрим гладкие отображения $F, G : X \to \mathbb{R}^m$.

**Теорема 4.4** *Предположим, что при всех $x \in \partial X$ справедливо неравенство*

$$\|G(x)\|F(x) + \|F(x)\|G(x) \neq 0. \tag{1.3}$$

*Тогда* $\deg(F, X, 0) = \deg(G, X, 0)$.

Сперва докажем лемму.

**Лемма 4.2** *Рассмотрим непрерывное отображение*

$$F : X \to \mathbb{R}^m$$

*и непрерывную скалярную функцию*

$$\rho : X \to \mathbb{R}, \quad \rho(x) \ge 0.$$

*Пусть при всех $x \in \partial X$ функция $\rho(x)F(x)$ не обращается в ноль.*

*Тогда* $\deg(\rho F, X, 0) = \deg(F, X, 0)$.

*Доказательство.* Достаточно доказать лемму для гладких функций $\rho$ и $F$ в предположении, что 0 – регулярное значение $F$.

Не сужая общности, будем считать, что

$$\rho(x) > 0 \ \text{ при } \ x \in \partial X.$$

В противном случае надо вместо отображения $\rho F$ взять гомотопное ему отображение $(\rho(x) + t)F(x)$ с некоторым числом $t > 0$.

Пусть $\{x_1, \dots, x_k\} \subset X$ – прообразы нуля при отображении $F$. По свойствам определителя имеем

$$\deg(\rho F, X, 0) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{sign} \det \left( \frac{\partial \rho}{\partial x}(x_i) F(x_i) + \rho(x_i) \frac{\partial F}{\partial x}(x_i) \right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \operatorname{sign} \det \left( \rho(x_i) \frac{\partial F}{\partial x}(x_i) \right) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{sign} \Big( \rho^m(x_i) \det \left( \frac{\partial F}{\partial x}(x_i) \right) \Big) =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \operatorname{sign} \Big( \det \left( \frac{\partial F}{\partial x}(x_i) \right) \Big) = \deg(F, X, 0).$$

Лемма доказана.

*Доказательство теоремы 4.4.* Заметим, что в условиях теоремы

$$F(x) \neq 0 \ \text{ и } G(x) \neq 0 \ \text{ при } x \in \partial X.$$

Теперь теорема 4.4 следует из теоремы Руше и доказанной леммы. Действительно, возьмем

$$H(x) = \|G(x)\| F(x) \quad \text{ и } \ K(x) = \|F(x)\| G(x).$$

Тогда, очевидно, при $x \in \partial X$ имеем $\|K(x)\| \leq \|H(x)\|$. Отсюда по теореме Руше получаем

$$\deg(\|G(x)\| F(x), X, 0) = \deg(\|G(x)\| F(x) + \|F(x)\| G(x), X, 0).$$

Меняя местами $K$ и $H$, находим

$$\deg(\|F(x)\|G(x), X, 0) = \deg(\|G(x)\|F(x) + \|F(x)\|G(x), X, 0).$$

По лемме 4.2 имеем

$$\deg(\|F(x)\|G(x), X, 0) = \deg(G(x), X, 0),$$
$$\deg(\|G(x)\|F(x), X, 0) = \deg(F(x), X, 0).$$

Теперь утверждение теоремы следует из всех этих равенств. Теорема доказана.

Если в пространстве $\mathbb{R}^m$ задано скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ и норма $\|\cdot\|$ с ним согласована, то теорема 4.4 допускает

**Следствие 4.2** *Предположим, что при всех $x \in \partial X$ выполнено неравенство*

$$(F(x), G(x)) + \|F(x)\|\|G(x)\| \neq 0. \tag{1.4}$$

*Тогда* $\deg(F(x), X, 0) = \deg(G(x), X, 0)$.

Доказательство этого следствия мы оставляем читателю в качестве простого упражнения.

Можно также показать, что если норма согласована со скалярным произведением, то неравенства (1.3) и (1.4) эквивалентны.

## 2 Нелинейные уравнения в конечномерном пространстве

Через

$$B_r(y) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x - y\| < r\}$$

обозначим открытый шар пространства $\mathbb{R}^m$ радиуса $r$ с центром в 0. Зафиксируем $R > 0$.

**Теорема 4.5 (Брауэр)** *Непрерывное отображение*

$$F : \overline{B_R(0)} \to \overline{B_R(0)}$$

*имеет в* $\overline{B_R(0)}$ *неподвижную точку:* $F(\widehat{x}) = \widehat{x}, \quad \widehat{x} \in \overline{B_R(0)}$.

*Доказательство.* Вычислим степень отображения

$$\varphi(x) = x - F(x)$$

в точке 0. Для этого воспользуемся теоремой Руше с $H(x) = x$ и $K(x) = -F(x)$. Очевидно, $0 \notin H(\partial B_R(0))$. Если $0 \in (H + K)(\partial B_R(0))$, то это означает, что

$$H(\widehat{x}) + K(\widehat{x}) = 0, \quad \widehat{x} \in \partial B_R(0),$$

и теорема доказана.

Допустим, что $0 \notin (H + K)(\partial B_R(0))$. Так как отображение $F$ переводит шар в себя, имеем $\|K(x)\| \le \|H(x)\|$ при $x \in \partial B_R(0)$. Таким образом,

$$\deg(\varphi, B_R(0), 0) = \deg(H, B_R(0), 0).$$

Степень отображения $H$, как легко показать, равна 1, следовательно, $\deg(\varphi, B_R(0), 0) = 1$, а значит, прообраз нуля при отображении $\varphi$ не пуст.

Теорема доказана.

Несмотря на то, что в формулировке теоремы Брауэра мы использовали шар, сама по себе эта теорема имеет чисто топологический характер.

А именно справедливо следующее утверждение. Пусть множество $W$ гомеоморфно замкнутому шару. Тогда всякое непрерывное отображение $F : W \to W$ имеет неподвижную точку.

Действительно, если $g : W \to \overline{B_R(0)}$ – упомянутый гомеоморфизм, то композиция $u = gFg^{-1}$ является непрерывным отображением шара $\overline{B_R(0)}$ в себя и, по теореме Брауэра, имеет неподвижную точку, скажем $\widehat{x}$. Но тогда отображение $F$ тоже имеет неподвижную точку – $g^{-1}(\widehat{x})$.

В качестве следствий теоремы 4.4 и ее следствия 4.2 приведем некоторые результаты из [12].

**Теорема 4.6** *Предположим, отображение $\varphi : \overline{B_R(0)} \to \mathbb{R}^m$ таково, что при всех $x \in \partial B_R(0)$ выполнено неравенство $R\varphi(x) + x\|\varphi(x)\| \neq 0$. Тогда уравнение $\varphi(x) = 0$ имеет решение в $B_R(0)$.*

Для доказательства этой теоремы надо положить в условии теоремы 4.4 $X = B_R(0)$, $F(x) = \varphi(x)$, $G(x) = x$ и заметить, что $\deg(x, B_R(0), 0) = 1$.

Аналогично, если в условиях следствия 4.2 взять

$$X = B_R(0), \quad F(x) = \varphi(x), \quad G(x) = x,$$

то получится

**Теорема 4.7** *Пусть непрерывное отображение*

$$\varphi : \overline{B_R(0)} \to \mathbb{R}^m$$

*таково, что для всех $x \in \partial B_R(0)$ выполнено неравенство*

$$(\varphi(x), x) + R\|\varphi(x)\| \neq 0.$$

*Тогда уравнение $\varphi(x) = 0$ имеет решение в $B_R(0)$.*

Если в условиях этой теоремы заменить $\varphi(x)$ на $\varphi(x) - y$ и перейти к пределу при $R \to \infty$, то получится

**Теорема 4.8** *Пусть непрерывное отображение $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ таково, что*

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \frac{(\varphi(x), x)}{\|x\|} = +\infty.$$

*Тогда уравнение $\varphi(x) = y$ имеет решение при любом $y$.*

## 3 О периодических решениях одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

В качестве первого приложения теоремы Брауэра рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_k = -x_k^{2n-1} + f_k(t, x), \quad k = 1, \dots, m \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

Вектор-функция $f(t, x) = (f_1, \dots, f_m)(t, x)$ определена на пространстве $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$, локально липшицева по $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, непрерывна и периодична по $t \geq 0$ с периодом $\omega > 0$.

**Теорема 4.9** *Предположим, что при всех $t$ и $x$ выполнена оценка*

$$\|f(t, x)\| \leq c_1 + c_2 \|x\|^{2n-2}, \tag{3.2}$$

*где $c_1$ и $c_2$ – положительные постоянные.*

*Тогда система (3.1) имеет $\omega-$периодическое решение.*

Эта простая теорема, как мы сейчас увидим, является прямым следствием теоремы Брауэра. Так же, как и теорема Брауэра, этот результат по существу своему является глобальным и не может быть получен с помощью итерационных методов типа принципа сжатых отображений.

Перейдем к доказательству теоремы 4.9. Обозначим через

$$T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$$

отображение за период системы (3.1). Напомним, что отображение за период строится следующим образом. Пусть $x(t, x_0)-$ решение системы (3.1) с начальным условием $x_0$: $x(0, x_0) = x_0$. Тогда по определению $T(y) = x(\omega, y)$.

Мы не будем сейчас специально останавливаться на вопросе о том, почему отображение за период для данной системы определено, то есть почему любое решение этой системы с начальным условием при $t = 0$ продолжается до значения $t = \omega$. Отметим только, что этот факт вытекает из оценок, приведенных ниже. Подробности по этому поводу см. в [2].

Доказательство нашей теоремы основано на том, что начальным условием для $\omega-$периодического решения является неподвижная точка отображения за период. Покажем, что она существует.

Рассмотрим функцию $G(x) = \sum_{k=1}^{m} x_k^2 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Поверхностями уровня этой функции являются стандартные евклидовы сферы

$$S_R = \partial B_R(0) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid G(x) = R^2\}.$$

Покажем, что если число $R$ достаточно велико, то всякое решение системы (3.1) с начальным условием, лежащим в шаре $\overline{B_R(0)}$, не покинет его при всех $t > 0$.

Возьмем $R$ настолько большим, что для любого $x \notin \overline{B_R(0)}$ и $t \geq 0$ выполнена оценка

$$-\sum_{k=1}^{m} x_k^{2n} + \sum_{k=1}^{m} x_k f_k(t,x) < 0. \tag{3.3}$$

Такое число $R$ существует в силу неравенства (3.2).

Пусть $x(t,x_0)$ – решение нашей системы, и $x_0 \in \overline{B_R(0)}$. Предположим, что это решение покинуло шар. Тогда найдутся такие числа $t' < t''$, что $x(t',x_0) \in S_R$ и $x(t'',x_0) \notin \overline{B_R(0)}$. Это означает, что функция

$$g(t) = G(x(t,x_0))$$

возрастает на некотором подмножестве интервала $(t',t'')$, и, в частности, для некоторых $t$ из этого интервала $\dot g(t) \geq 0$. Но это противоречит неравенству (3.3), ибо

$$\begin{aligned}\dot g(t) &= \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial G}{\partial x_k}(x(t,x_0))\dot x_k(t,x_0) = \\ &= 2\Big(-\sum_{k=1}^{m}(x_k(t,x_0))^{2n} + \sum_{k=1}^{m} x_k(t,x_0) f_k(t,x(t,x_0))\Big) < 0.\end{aligned}$$

Следовательно, $T(\overline{B_R(0)}) \subseteq \overline{B_R(0)}$ и неподвижная точка отображения $T$ существует по теореме Брауэра.

## 4 Задачи

**Задача 4.1** *Пусть* $\overline{B_R(0)}$ *– шар пространства* $\mathbb{R}^m$*. Рассмотрим непрерывное отображение* $f : \overline{B_R(0)} \to \mathbb{R}^m$*; предположим, что для всех* $x \in \partial\overline{B_R(0)}$ *и всех* $\lambda \geq 0$ *справедливо неравенство*

$$f(x) + \lambda x \neq 0.$$

*Докажите, что уравнение* $f(x) = 0$ *имеет решение в данном шаре.*

**Задача 4.2** *Обозначим через* $K$ *выпуклое замкнутое подмножество* $\mathbb{R}^m$, *и пусть* $f : K \to \mathbb{R}^m$ *– непрерывное отображение.*

*Предположим, что для каждого* $u \in \partial K$ *найдутся элемент* $v \in K$ *и число* $\lambda > 0$ *такие, что*

$$f(u) - u = \lambda(v - u).$$

*Докажите, что тогда отображение* $f$ *имеет неподвижную точку в* $K$.

*Аналогичное утверждение имеет место и для отрицательных* $\lambda$.

*Предположим, что для каждого* $u \in \partial K$ *найдутся элемент* $v \in K$ *и число* $\lambda < 0$ *такие, что*

$$f(u) - u = \lambda(v - u).$$

*Докажите, что тогда отображение* $f$ *имеет неподвижную точку в* $K$.

**Задача 4.3** *Докажите, что существует треугольник с биссектрисами заданной длины.*

**Задача 4.4** *Докажите основную теорему алгебры. (Всякий многочлен над полем комплексных чисел имеет корень.)*

**Задача 4.5** *Пусть функция* $f : D \to \mathbb{C}$ *голоморфна во всех точках области* $D \subseteq \mathbb{C}$ *и непрерывна на* $\partial D$. *Докажите, что степень отображения* $f$ *в точке* $c \notin f(\partial D)$ *равна количеству корней уравнения* $f(z) = c$, *причем каждый корень засчитывается столько раз, какова его кратность.*

**Задача 4.6** *Сформулировать и доказать лемму, аналогичную лемме 4.2, в которой условие* $\rho(x) \geq 0$ *заменено на* $\rho(x) \leq 0$.

**Задача 4.7** *Пусть непрерывное отображение* $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *монотонно:*

$$(f(x) - f(y), x - y) \geq 0, \quad x, y \in \mathbb{R}^m$$

*и коэрцитивно:*

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \frac{(f(x), x)}{\|x\|} = +\infty.$$

*Найти степень отображения* $f$.

Глава 5

# Нелинейные уравнения в пространствах Банаха

## 1 Некоторые следствия теории топологической степени

Рассмотрим банахово пространство $V$ с нормой $\|\cdot\|_V$. Через

$$B_r(y) = \{x \in V \mid \|x - y\|_V < r\},$$

как и раньше, обозначим открытый шар пространства $V$ с центром в точке $y$ и радиусом $r$.

**Определение 5.1** *Пусть $U$ – подмножество в $V$. Отображение $g : U \to V$ называется компактным, если для любого ограниченного множества $W \subseteq U$ множество $\overline{g(W)}$ компактно.*

Отметим, что всякий компактный линейный оператор

$$A : V \to V$$

непрерывен, однако в случае нелинейных операторов это утверждение, вообще говоря, неверно.

Напомним, что множество $\Omega \subseteq V$ называется выпуклым, если вместе с любыми двумя точками $x, y \in \Omega$ оно содержит принадлежащий $\Omega$ отрезок $tx + (1-t)y$, соединяющий эти точки (здесь $t \in [0,1]$).

Выпуклой оболочкой множества $X \subseteq V$ называется множество

$$\operatorname{conv} X = \{\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n \mid \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1,$$
$$\alpha_j \geq 0, \quad x_j \in X, \quad n \in \mathbb{N}.\}$$

Следующая теорема является одним из центральных результатов нелинейного функционального анализа.

**Теорема 5.1 (Теорема Шаудера о неподвижной точке)** *Пусть $f : \Omega \to \Omega$ – непрерывное компактное отображение выпуклого замкнутого множества $\Omega \subset V$ в себя. Тогда отображение $f$ имеет неподвижную точку: $f(\widehat{x}) = \widehat{x} \in \Omega$.*

Прежде докажем одну лемму, представляющую самостоятельный интерес.

**Лемма 5.1** *Пусть $\Omega$ – замкнутое ограниченное подмножество в $V$. Непрерывное отображение $f : \Omega \to V$ компактно тогда и только тогда, когда оно является равномерным пределом непрерывных компактных конечномерных отображений (т. е. отображений, образы которых лежат в конечномерных подпространствах).*

*Доказательство.* Предположим, что $f$ компактно. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует покрытие множества $\overline{f(\Omega)}$ открытыми шарами

$$B_{r_1}(x_1), \ldots, B_{r_j}(x_j), \quad r_i < \varepsilon,$$

причем $\{x_1, \dots, x_j\} \subset \overline{f(\Omega)}$. Точки $x_1, \dots, x_j$ являются $\varepsilon$-сетью компакта $\overline{f(G)}$. Пусть непрерывные функции $\psi_i(x)$ образуют разбиение единицы, подчиненное указанному покрытию:

$$\psi_i(x) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{j} \psi_i(x) = 1$$

при $x \in \overline{f(\Omega)}$, и $\psi_i(x) = 0$ вне $B_{r_i}(x_i)$. Тогда функции

$$f_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{j} \psi_i(f(x)) x_i \tag{1.1}$$

образуют искомую систему конечномерных приближений для $h$. Действительно,

$$\|f(x) - f_\varepsilon(x)\|_V = \Big\| \sum_{i=1}^{j} \psi_i(f(x))(x_i - f(x)) \Big\|_V.$$

Если $\psi_i(f(x)) > 0$, то $f(x) \in B_{r_i}(x_i)$ и $\|x_i - f(x)\|_V < \varepsilon$, значит, $\|f(x) - f_\varepsilon(x)\|_V < \varepsilon$ равномерно по $x$.

Компактность отображений $f_\varepsilon$ вытекает из ограниченности и конечномерности их образов.

Обратно, предположим, что отображение $f$ может быть равномерно приближено компактными отображениями, т. е.

$$\|f(x) - f_\varepsilon(x)\|_V < \varepsilon$$

для любого $\varepsilon > 0$. Возьмем замкнутое ограниченное множество $W \subseteq \Omega$. Так как образы $f_\varepsilon(\Omega)$ компактны, мы можем построить для каждого из них конечную $\varepsilon$-сеть. Легко показать, что эти $\varepsilon$-сети будут $2\varepsilon$-сетями для образа $f(W)$.

Лемма доказана.

Теперь докажем теорему Шаудера о неподвижной точке. Пусть, как в лемме, $f_\varepsilon$ – конечномерные приближения отображения $f$. Отметим, что по формуле (1.1) образы $f_\varepsilon(\Omega)$ принадлежат выпуклой оболочке множества $\Omega$, но так как $\Omega$ само выпукло, получаем $f_\varepsilon(\Omega) \subseteq \Omega$.

Обозначим через $N_\varepsilon$ линейную оболочку множества $f_\varepsilon(\Omega)$, и пусть $K_\varepsilon = N_\varepsilon \bigcap \Omega$. Множество $K_\varepsilon$ выпукло и, ввиду конечномерности пространства $N_\varepsilon$, конечномерно. Так как множество $K_\varepsilon$ выпукло, оно гомеоморфно шару, и поэтому по теореме Брауэра отображение $f_\varepsilon |_{K_\varepsilon}\colon K_\varepsilon \to K_\varepsilon$ имеет неподвижную точку $x_\varepsilon \in K_\varepsilon$. Так как все неподвижные точки $x_\varepsilon$ лежат в компактном множестве $\Omega$, то мы можем выделить сходящуюся последовательность $x_{\varepsilon_i} \to \widehat{x} \in \Omega$, где $\varepsilon_i \to 0$ при $i \to \infty$.

Проверку равенства $f(\widehat{x}) = \widehat{x}$ мы оставляем читателю в качестве несложного упражнения.

Имеется другая, эквивалентная формулировка теоремы Шаудера.

**Теорема 5.2** *Пусть $f : K \to K$ – непрерывное отображение выпуклого компакта в себя. Тогда $f$ имеет неподвижную точку: $f(\widehat{x}) = \widehat{x} \in K$.*

Так как образ компактного множества при непрерывном отображении компактен, то теорема 5.2 является следствием теоремы 5.1. Но верно и обратное. Действительно, положим

$$K = \operatorname{conv}(f(\Omega)), \quad K \subseteq \Omega,$$

здесь через conv обозначена выпуклая оболочка. С помощью $\varepsilon$-сетей легко проверить, что выпуклая оболочка компактного множества сама является компактным множеством, и, применив теорему 5.2 к отображению $f |_K\colon K \to K$, мы получим теорему 5.1.

В теореме Шаудера переход от конечномерной задачи к бесконечномерной осуществляется с помощью предположения о компактности отображения.

Сейчас мы изучим другие условия, позволяющие делать такой переход.

Рассмотрим отображение $A : V \to V^*$. Дадим несколько определений.

**Определение 5.2** *Отображение $A$ называется семинепрерывным, если для любых $u, v \in V, \quad w \in V^*$ функция*

$$f(\lambda) = (A(u + \lambda v), w) \in C(\mathbb{R}).$$

**Определение 5.3** *Отображение $A$ называется монотонным, если для любых $u, v \in V$ верно неравенство*

$$(A(u) - A(v), u - v) \geq 0.$$

*Если знак неравенства в этой формуле строгий, то отображение называется строго монотонным.*

**Определение 5.4** *Отображение $A$ называется коэрцитивным, если*

$$\lim_{\|x\|_V \to \infty} \frac{(A(x), x)}{\|x\|_V} \to +\infty. \tag{1.2}$$

Теперь сформулируем основной результат.

**Теорема 5.3 ([47])** *Предположим, что пространство $V$ сепарабельное. Тогда если оператор $A : V \to V^*$ ограничен (то есть переводит ограниченные множества в ограниченные), семинепрерывен, монотонен и коэрцитивен, то уравнение*

$$A(x) = y \tag{1.3}$$

*имеет решение при любом $y \in V^*$.*

Очевидно, что если в условиях этой теоремы отображение $A$ строго монотонно, то решение уравнения (1.3) единственно.

*Доказательство теоремы 5.3.* Пусть $w_1, \dots, w_m, \dots$ – "базис" в $V$[1]; ищется функция $u_m \in \mathrm{span}(w_1, \cdots, w_m)$, удовлетворяющая равенствам

$$(A(u_m), w_j) = (f, w_j), \quad 1 \le j \le m. \tag{1.4}$$

Существование $u_m$ следует из теоремы 4.8, если заметить, что в силу (1.2)

$$\lim_{\|w\|_V \to \infty} \frac{(A(w), w)}{\|w\|_V} \to +\infty, \quad w \in \mathrm{span}(w_1, \cdots, w_m).$$

Можно показать, что из монотонности и семинепрерывности следует, что $A$ непрерывен как отображение из $V$ с сильной топологией в $V^*$ со слабой топологией. Поэтому функция $v \to (A(v), v)$ непрерывна на $\mathrm{span}(w_1, \cdots, w_m)$.

Согласно (1.4), получим

$$(A(u_m), u_m) = (f, u_m) \le \|f\|_{V^*} \|u_m\|_V,$$

откуда в силу коэрцитивности $A$ имеем $\|u_m\|_V \le C$.

Так как оператор $A$ ограничен, то $\|A(u_m)\|_{V^*} \le C$.

Итак, мы можем выделить такую последовательность $u_\mu$, что

$$u_\mu \to u \quad \text{слабо в} \quad V, \quad A(u_\mu) \to \chi \quad \text{слабо в} \quad V^*. \tag{1.5}$$

Переходя к пределу в (1.4) (при $m = \mu$, $j$ фиксировано), мы увидим, что

$$(\chi, w_j) = (f, w_j) \quad \forall j,$$

[1] Систему векторов $w_1, \dots, w_m, \dots$ мы называем "базисом" в банаховом пространстве, если любая конечная подсистема этой системы линейно независима, и всевозможные конечные линейные комбинации векторов из этой системы образуют всюду плотное в $V$ множество.

и, следовательно,

$$\chi = f. \tag{1.6}$$

С другой стороны, в силу (1.4) $(A(u_\mu), u_\mu) = (f, u_\mu) \to (f, u)$ и, следовательно, в силу (1.6)

$$(A(u_\mu), u_\mu) \to (\chi, u). \tag{1.7}$$

Ниже мы покажем, что из (1.5), (1.7) и предположений теоремы следует, что

$$\chi = A(u). \tag{1.8}$$

Это равенство вместе с (1.6) доказывает теорему.

Имеем

$$(A(u_\mu) - A(v), u_\mu - v) \geq 0 \quad \forall v \in V. \tag{1.9}$$

Воспользовавшись (1.5), (1.7), мы сможем перейти к пределу в (1.9) и получить

$$(\chi - A(v), u - v) \geq 0 \quad \forall v \in V. \tag{1.10}$$

Взяв $v = u - \lambda w, \quad \lambda > 0, \quad w \in V$, мы из (1.10) получим

$$\lambda(\chi - A(u - \lambda w), w) \geq 0.$$

Следовательно,

$$(\chi - A(u - \lambda w), w) \geq 0,$$

и, устремляя $\lambda$ к 0, найдем $(\chi - A(u), w) \geq 0 \quad \forall w \in V$, откуда следует (1.8). Теорема доказана.

Пусть $H$ – сепарабельное действительное гильбертово пространство. Зафиксируем шар $B_R(0), \quad R > 0$ в $H$. Определения монотонности и семинепрерывности переносятся на случай отображения $F : B_R(0) \to H^*$ практически дословно, надо только элементы $u, v$ в этих определениях брать из шара, а не из всего пространства.

**Теорема 5.4** *Пусть семинепрерывное отображение*

$$F : \overline{B_R(0)} \to H^*$$

*монотонно ограничено и таково, что при всех $x \in \partial\overline{B_R(0)}$ выполнено неравенство*

$$(F(x), x) \geq 0.$$

*Тогда уравнение $F(x) = 0$ имеет решение в $\overline{B_R(0)}$.*

*Доказательство.* Пусть $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ – ортонормированный базис в $H$. Рассмотрим подпространство $H^m = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_m\}$ и шар

$$B_R^m(0) = H^m \bigcap B_R(0).$$

Через $\psi : H^* \to H$ обозначим стандартный изоморфизм. Отображение $\psi \circ F : H \to H$ будем обозначать той же буквой $F$.

Разложим оператор $F$ следующим образом:

$$F(x) = F^m(x) + F^{\perp}(x), \quad F^m(x) \in H^m, \quad F^{\perp}(x) \perp H^m.$$

Проверим, что для оператора $F^m : \overline{B_R^m(0)} \to H^m$ выполнены условия теоремы 4.7. Действительно, для $x \in \partial B_R^m(0)$ имеем

$$(F^m(x), x) = (F(x), x) \geq 0.$$

Поэтому уравнение $F^m(x) = 0$ имеет решение в шаре $\overline{B_R^m(0)}$. Назовем это решение $\widehat{x}^m$. Так как последовательность $\{\widehat{x}^m\}$ принадлежит шару $\overline{B_R^m(0)}$, то из нее можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность. Дальше повторяются рассуждения из доказательства предыдущей теоремы.

Теорема доказана.

## 2 Об одном приложении теоремы Шаудера

В этом разделе мы рассмотрим пример применения теоремы Шаудера и докажем теорему типа теоремы Пеано для обыкновенного дифференциального уравнения в банаховом пространстве.

Пусть, как и выше, $V$ – банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_V$.

Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\dot{x} = f(t, x) \in C([0, T] \times V, V), \quad x(0) = x_0 \in V. \tag{2.1}$$

**Теорема 5.5** *Предположим, что существует постоянная $M$ такая, что для всех $t \in [0, T]$ и $x \in \overline{B_R(x_0)}$ верна оценка*

$$\|f(t, x)\|_V \leq M,$$

*и для любого фиксированного $t \in (0, T]$ отображение*

$$F_t : C([0, t], V) \to V, \quad F_t(x(\cdot)) = \int_0^t f(s, x(s))\, ds$$

*компактно. Тогда существует такое $t' \in (0, T]$, что задача (2.1) имеет решение $x(t) \in C^1([0, t'], V)$.*

В качестве примера возьмем $V = l_2$ – пространство бесконечных последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$ с нормой $\|x\|_{l_2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$. Зададим правую часть задачи (2.1) следующим образом:

$$f(t, x) = (f_1, f_2, \ldots)(t, x), \quad f_k(t, x) = x_k/k.$$

Легко показать, что функция $f$ удовлетворяет условиям теоремы 5.5.

Отметим, что в теореме не предполагается локальной липшицевости отображения $f$.

Когда банахово пространство бесконечномерно, непрерывности отображения $f$ недостаточно для разрешимости задачи Коши, и теорема Пеано неверна. Это видно из следующего примера, принадлежащего Дедоне [33].

Пусть $V = l_0$ – пространство бесконечных последовательностей

$$x = (x_1, x_2, \dots) \text{ с нормой } \|x\|_{l_0} = \sup_i \{|x_i|\}.$$

Зададим правую часть нашей задачи следующим образом:

$$f(t,x) = (f_1, f_2, \dots)(t,x), \quad f_k(t,x) = |x_k|^{1/2} + 1/k.$$

Непосредственным интегрированием мы убеждаемся в том, что эта система обыкновенных дифференциальных уравнений не имеет решений с начальным условием $x_0 = 0$ в $l_0$.

Поэтому в бесконечномерной задаче условие липшицевости обязательно приходится заменять каким-либо другим условием.

Теорема 5.5 будет доказана, если мы найдем неподвижную точку отображения

$$F(x(\cdot)) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))\, ds.$$

Это отображение переводит пространство $C([0,T],V)$ в себя. Однако искать неподвижную точку мы будем в пространстве $C([0,t'],V)$, где положительная константа $t' \leq T$ подлежит определению и играет роль малого параметра.

С помощью стандартных оценок можно показать, что найдутся такие положительные константы $t'$ и $r$, что отображение $F$ переводит в себя замкнутый шар

$$U = \{u \in C([0,t'],V) \mid \|u - x_0\|_{C([0,t'],V)} \leq r\}$$

пространства $C([0,t'],V)$. Более того, для любых $t_1,t_2 \in [0,t']$ и любого элемента $u \in U$ справедливо неравенство

$$\|F(u)(t_1) - F(u)(t_2)\|_V \leq M|t_1 - t_2|.$$

По теореме Асколи из этого неравенства и предположения теоремы вытекает, что $F$ является компактным отображением шара $U$ в себя, и поэтому, в силу теоремы Шаудера, имеет в этом шаре неподвижную точку: $F(u) = u, \quad u(t) \in U$.

## 3 Об одном приложении теоремы 5.3

Нелинейный оператор

$$\Delta_p u = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right), \quad p > 0$$

называется $p$-лапласианом.

Пусть $\Omega$ – компактная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей. Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\Delta_p u = f \in H^{-1,p'}(\Omega), \quad u\mid_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \tag{3.1}$$

Функция $u \in H_0^{1,p}(\Omega)$ называется слабым решением поставленной задачи, если для любого $\psi \in H_0^{1,p}(\Omega)$ выполнено равенство

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\, dx = f(\psi).$$

Оказывается, если $p > 1$, то задача (3.1) имеет слабое решение, и это решение единственно.

Легко проверить, что оператор $\Delta_p : H_0^{1,p}(\Omega) \to H^{-1,p'}(\Omega)$ удовлетворяет условиям теоремы 5.3, откуда следует существование решения.

Покажем, что это решение единственно. Пусть $u_1,\ u_2$ – два возможных решения. Тогда

$$u_1 - u_2 \in H_0^{1,p}(\Omega)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}&(\Delta_p u_1 - \Delta_p u_2, u_1 - u_2) = 0 = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \left( \left| \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} - \left| \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_i} - \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \right) dx,\end{aligned}$$

откуда вытекает, что

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_i} = \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \quad \forall i,$$

а так как $u_1 - u_2 = 0$ на $\partial\Omega$, то $u_1 = u_2$.

# 4 Вариационные методы

В этом и следующем разделе мы докажем несколько общих теорем, которые иллюстрируют некоторые из основных идей, использующихся в вариационном анализе.

## 4.1 Общие соображения

Отметим один простой факт, полезный при изучении условных экстремумов.

Пусть $L$ – произвольное линейное пространство над полем действительных чисел (не обязательно конечномерное, не обязательно банахово, не обязательно нормированное и т.п.!), и $f, f_1, \ldots, f_n : L \to \mathbb{R}$ – линейные функционалы.

**Предложение 5.1 (Теорема о множителях Лагранжа)** *Если*

$$\bigcap_{i=1}^{n} \ker f_i \subseteq \ker f,$$

*то найдутся такие $n$ чисел $\lambda_i$, что*

$$f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i. \tag{4.1}$$

*Доказательство.* Зададим линейный оператор $F : L \to \mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$F(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))^T.$$

Возьмем произвольный элемент $u$ из образа $F$ : $F(y) = u$. Определим линейный функционал $\lambda : \operatorname{im} F \to \mathbb{R}$, положив $\lambda(u) = f(y)$. Это определение корректно в том смысле, что если элемент $u$ имеет еще один прообраз относительно $F$, например $F(z) = u$, то

$$z - y \in \ker F = \bigcap_{i=1}^{n} \ker f_i \subseteq \ker f,$$

а значит, $f(z) = f(y)$.

Итак, $f = \lambda F$. Но поскольку $\lambda$ – линейный функционал на конечномерном пространстве, то последнее равенство может быть записано в виде (4.1). Предложение доказано.

Пусть $V$ – банахово пространство. Функция $f : V \to \mathbb{R}$ называется дифференцируемой по Гато, или слабо дифференцируемой, в точке $x_0$, если найдется такой элемент $f'(x_0) \in V^*$, что для любого $h \in V$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0) - (f'(x_0), h)}{t} = 0.$$

Элемент $f'(x_0)$ называется производной Гато в точке $x_0$. Таким образом, производная Гато отображает точку $x_0 \in V$ в пространство $V^*$ по правилу $x_0 \mapsto f'(x_0)$.

В банаховых пространствах справедлива обобщенная версия теоремы Ферма: если функция $f : V \to \mathbb{R}$ достигает своего минимума (или максимума) на открытом множестве $U \subseteq V$ в точке $x_0 \in U$, то

$$f'(x_0) = 0. \tag{4.2}$$

Действительно, в условиях обобщенной теоремы Ферма функция

$$\varphi(t) = f(x_0 + th)$$

достигает своего минимума (максимума) в точке $t = 0$, и по стандартной теореме Ферма

$$\varphi'(0) = (f'(x_0), h) = 0.$$

В вариационных методах уравнение (4.2) обычно называется уравнением Эйлера. Оно может оказаться обыкновенным дифференциальным уравнением или уравнением в частных производных в зависимости от того, какой вид имеет функционал $f$, и того, какое функциональное пространство $V$ выбрано.

Вариационный метод доказательства теорем существования для дифференциальных уравнений (при условии, что мы имеем дело с дифференциальным уравнением, которое является уравнением Эйлера для некоторого функционала) состоит в том, что мы доказываем, что функционал имеет минимум, и вследствие этого, по обобщенной теореме Ферма, соответствующее уравнение Эйлера имеет решение.

В бесконечномерном случае возникают задачи об отыскании условных максимумов и минимумов функционалов. Как и в конечномерном анализе, эти задачи приводят к уравнениям Эйлера с множителями Лагранжа. Метод множителей Лагранжа в бесконечномерных задачах, как и в конечномерном случае, основан на предложении 5.1. Мы не будем формулировать здесь абстрактные теоремы об условных экстремумах, а разберем соответствующую технику на конкретных примерах в последующих главах.

## 4.2 Выпуклая теория

Так мы будем называть теоремы существования минимумов, основанные на выпуклости функций или областей. Имеется и другая техника, не опирающаяся на выпуклость и связанная с результатами типа теоремы Икланда (Ekeland) и теорией управления. Эти методы выходят за рамки нашей книги. Мы также не обсуждаем здесь теоремы о переходе перевала.

Напомним некоторые определения. Пусть $V$ – банахово пространство, и $U \subseteq V$ – некоторое подмножество. Последовательность $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq U$ мы будем называть минимизирующей для функции $f : V \to \mathbb{R}$, если $f(x_k) \to \inf_U f$ при $k \to \infty$. Сама функция $f$ называется ограниченной снизу на $U$, если $\inf_U f > -\infty$, то есть если найдется число $c$ такое, что $f(x) \geq c$ при всех $x \in U$.

**Определение 5.5** *Функция $f : U \to \mathbb{R}$ называется полунепрерывной снизу в точке $x_0 \in U$, если для любой последовательности*

$$x_k \to x_0, \{x_k\} \subseteq U$$

*справедливо неравенство*

$$\liminf f(x_k) \geq f(x_0). \tag{4.3}$$

*Функция $f$ называется слабо полунепрерывной снизу, если для любой последовательности $\{x_k\} \subseteq U$, слабо сходящейся к $x_0$, справедливо неравенство (4.3).*

Функция $f : U \to \mathbb{R}$ называется выпуклой в $U$, если

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y), \quad t \in [0,1], \quad x, y \in U.$$

Это определение предполагает, очевидно, выпуклость множества $U$.

Множество $U \subseteq V$ называется слабо замкнутым, если из того, что $x_k \to x$ слабо при $k \to \infty$ и $\{x_k\} \subseteq U$, следует включение $x \in U$.

**Теорема 5.6 (Мазур, Шаудер)** *Пусть банахово пространство $V$ рефлексивно и множество $U \subseteq V$ слабо замкнуто. Тогда если слабо полунепрерывная снизу функция $f : U \to \mathbb{R}$ имеет ограниченную минимизирующую последовательность в $U$, то эта функция достигает своего минимума в $U$.*

Действительно, пусть $\{x_k\}$ – ограниченная минимизирующая последовательность. Тогда найдется подпоследовательность

$$\{x'_k\} \subseteq \{x_k\},$$

такая, что $x'_k \to x_0$ слабо в $V$ при $k \to \infty$ и $x_0 \in U$. Заметим, что любая подпоследовательность минимизирующей последовательности сама является минимизирующей. Поэтому

$$f(x_0) \leq \liminf f(x'_k) = \inf_U f.$$

Значит, функция $f$ достигает минимума в точке $x_0$. Теорема доказана.

В приложениях теорему Мазура – Шаудера приходится комбинировать еще с некоторыми фактами, которые мы сейчас перечислим.

**Предложение 5.2** *Выпуклое подмножество банахова пространства сильно замкнуто тогда и только тогда, когда оно слабо замкнуто.*

Действительно, пусть множество $W \subseteq V$ выпукло и сильно замкнуто. Не сужая общности, можно считать, что $0 \in W$, в противном случае следует сдвинуть множество $W$ надлежащим образом. Рассмотрим последовательность $\{x_k\} \subseteq W$, слабо сходящуюся к элементу $x_0$. Предположим от противного, что $x_0 \notin W$, тогда, по теореме Мазура [3], найдется линейный функционал $f \in V^*$ такой, что $f(x) \leq 1$, если $x \in W$, и $f(x_0) > 1$. Это очевидно приводит к противоречию, ибо $f(x_k) \to f(x_0)$ при $k \to \infty$, а значит, $f(x_0) \leq 1$. В обратную сторону предложение доказывается тривиально.

**Предложение 5.3** *Пусть множество $U \subseteq V$ – выпукло. Выпуклая функция $f : U \to \mathbb{R}$ на банаховом пространстве слабо полунепрерывна снизу в точке $y$ тогда и только тогда, когда она полунепрерывна снизу в $y$.*

Предположим, $f$ полунепрерывна снизу в точке $y$. Пусть последовательность $\{x_k\} \subset U$ слабо сходится к $y$. Предположим, от противного, что

$$\liminf f(x_k) < f(y).$$

Это значит, что при некотором $c < f(y)$ множество

$$U_c = \{x \mid f(x) \leq c\}$$

содержит бесконечное подмножество элементов последовательности $\{x_k\}$. В силу полунепрерывности и выпуклости $f$ множество $U_c$ замкнуто и выпукло. По предложению 5.2 оно слабо замкнуто и, значит, $y \in U_c$. Противоречие.

В качестве примера установим два следствия теоремы 5.6.

**Следствие 5.1** *Пусть банахово пространство $V$ рефлексивно и множество $U \subseteq V$ выпукло и замкнуто. Предположим, что отображение $f : U \to \mathbb{R}$ слабо полунепрерывно снизу и имеет ограниченную минимизирующую последовательность.*

*Тогда функция $f$ достигает минимума в $U$.*

Так как для выпуклого множества слабая замкнутость эквивалентна сильной, мы попадаем в условия теоремы 5.6. Следствие доказано.

Аналогично устанавливается двойственное утверждение.

**Следствие 5.2** *Пусть банахово пространство $V$ рефлексивно и множество $U \subseteq V$ выпукло и слабо замкнуто. Предположим, что отображение $f : U \to \mathbb{R}$ выпукло и полунепрерывно снизу.*

*Тогда если у функции $f$ имеется ограниченная минимизирующая последовательность, то она достигает минимума в $U$.*

**Замечание 5.1** *Существование ограниченной минимизирующей последовательности следует, например, из условия коэрцитивности функции $f$:*

$$\lim_{\|x_k\|_V \to \infty} f(x_k) = +\infty, \tag{4.4}$$

*где $\{x_k\} \subset U$ – произвольная последовательность.*

Изучим более общую ситуацию.

Рассмотрим отображение $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$.

**Определение 5.6** *Функция $\Phi$ называется полувыпуклой, если выполнены следующие три условия.*

*1) Для любых $v \in V$ и $c \in \mathbb{R}$, множество*

$$W_{c,v} = \{u \mid u \in V, \quad \Phi(u,v) \le c\} \text{ выпукло.}$$

*2) Отображение $\Phi(\cdot, v)$ сильно непрерывно.*

*3) Для любого ограниченного множества $G \subseteq V$ и слабо сходящейся последовательности $v_j \to v$ имеем*

$$\Phi(u, v_j) \to \Phi(u, v),$$

*равномерно по $u \in G$.*

**Теорема 5.7 (Браудер)** *Предположим, что банахово пространство $V$ рефлексивно и отображение $\Phi$ полувыпукло. Пусть множество*

$$C \subseteq V$$

*слабо замкнуто и ограничено в $V$.*

*Тогда функция $f(v) = \Phi(v, v)$ достигает своего минимума в $C$.*

*Доказательство.* Пусть $\{u_j\} \in C$ – минимизирующая последовательность:

$$f(u_j) \to \inf_C f = c_0.$$

Так как множество $C$ ограничено, оно слабо компактно и поэтому из последовательности $\{u_j\}$ можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность. Обозначим ее так же – $\{u_j\}$. Итак, $u_j \to \widehat{u}$ слабо в $V$. В силу условий теоремы $\widehat{u} \in C$.

Так как по условию теоремы $\Phi(u_j, u_j) - \Phi(u_j, \widehat{u}) \to 0$, получаем

$$\Phi(u_j, \widehat{u}) \to c_0.$$

Возьмем теперь произвольное число $c > c_0$, тогда, начиная с некоторого $j_c$, будем иметь $u_j \in W_{c,\widehat{u}}, \quad j \geq j_c$. По предложению 5.2 множество $W_{c,\widehat{u}}$ слабо замкнуто и поэтому $\widehat{u} \in W_{c,\widehat{u}}$, другими словами, $f(\widehat{u}) \leq c$. Но так как $c$ – это любое число, большее $c_0$, получаем $f(\widehat{u}) = c_0$.

Теорема доказана.

Повторяя использованные выше рассуждения, получаем следующий результат.

**Теорема 5.8** *Предположим, что отображение $\Phi$ полувыпукло на рефлексивном банаховом пространстве $V$ и функция $f(v) = \Phi(v, v)$ коэрцитивна: $f(v) \to +\infty$ при $\|v\|_V \to \infty$. Тогда $f$ достигает своего минимума в $V$.*

## 5 Задачи

**Задача 5.1** *Доказать, что замыкание выпуклой оболочки компактного подмножества банахова пространства компактно.*

**Задача 5.2** *Доказать, что всякий компактный линейный оператор непрерывен.*

**Задача 5.3** *В доказательстве теоремы Шаудера о неподвижной точке проверьте, что $f(\widehat{x}) = \widehat{x}$, где $x_{\varepsilon_i} \to \widehat{x}$.*

**Задача 5.4** *Докажите, что теорема Шаудера остается справедливой, если вместо выпуклого и компактного множества взять множество, гомеоморфное выпуклому компакту.*

**Задача 5.5** *Линейное пространство $E$ называется квазинормированным, если на нем определена функция $\|\cdot\|$, обладающая следующими свойствами:*

*1)* $\|x\| \geq 0$ *и* $\|x\| = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = 0$*,*

*2)* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$*,*

*3)* $\|-x\| = \|x\|, \quad \lim_{\alpha_n \to 0} \|\alpha_n x\| = 0, \quad \lim_{\|x_n\| \to 0} \|\alpha x_n\| = 0.$

*Выяснить, справедлива ли теорема Шаудера о неподвижной точке для полного квазинормированного пространства.*

**Задача 5.6** *В условиях теоремы 5.3 проверить, что оператор $A$ непрерывен как отображение из $V$ с сильной топологией в $V^*$ со слабой топологией.*

**Задача 5.7** *Доказать, что оператор $\Delta_p$ (см. раздел 5.3) удовлетворяет условиям теоремы 5.3.*

**Задача 5.8** *Доказать, что если отображение $A$ в теореме 5.3 строго монотонно, то решение уравнения (1.3) единственно.*

Глава 6

# Нелинейные эллиптические уравнения

## 1 Вариационные методы

В этом разделе мы будем изучать существование минимума функционала следующего вида:

$$I(u) = \int\limits_{\Omega} F(x, u, \nabla u) dV(x),$$

на некотором множестве функций $\{u \in B : u = g \text{ на } \partial\Omega\}$, где $\Omega$ – открытая ограниченная область пространства $\mathbb{R}^N$ с гладкой границей, $B$ – подходящее банахово пространство функций на $\Omega$, принимающих возможные значения в $\mathbb{R}^N$, и $g$ – гладкая функция на $\partial\Omega$. Предположим, что отображение

$$F : \mathbb{R}^N \times (\mathbb{R}^N \times T^*\overline{\Omega}) \to \mathbb{R} \tag{1.1}$$

непрерывно. Положим

$$V = \{u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^N) : u = g \text{ на } \partial\Omega\}. \tag{1.2}$$

Пусть для каждого $x \in \overline{\Omega}$ отображение

$$F(x,\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^N \times (\mathbb{R}^N \times T_x^*\overline{\Omega}) \to \mathbb{R} \tag{1.3}$$

выпукло, и для некоторых положительных констант $A_0, B_0, C_0, C$ выполнены неравенства

$$A_0|\xi|^2 - B_0|u| - C_0 \leq F(x,u,\xi), \tag{1.4}$$

и

$$|F(x,u,\xi) - F(x,\nu,\zeta)| \leq C(|u-\nu| + |\xi - \zeta|)(|\xi| + |\zeta| + 1). \tag{1.5}$$

Эти предположения в дальнейшем будут ослаблены.

**Предложение 6.1** *Предположим, что множество $\Omega$ связное с непустой границей, и пусть $I(u) < \infty$ для некоторого $u \in V$. Тогда в предположениях (1.1) – (1.5) $I$ имеет минимум на $V$.*

*Доказательство.* Очевидно, что отображение $I : V \to \mathbb{R}$ является липшицевым, ограничено снизу и выпукло. Поэтому если $\alpha_0 = \inf\limits_V I(u)$, то для каждого $\varepsilon \in (0,1]$ множество $K_\varepsilon = \{u \in V : \alpha_0 \leq I(u) \leq \alpha_0 + \varepsilon\}$ является непустым замкнутым выпуклым подмножеством $V$. Следовательно, $K_\varepsilon$ слабо компактно в $H^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Значит, $\bigcap\limits_{\varepsilon>0} K_\varepsilon = K_0 \neq \emptyset$, и $\inf I(u)$ лежит в $K_0$.

Сформулируем более общий результат, доказательство которого основано на приведенных выше аргументах.

**Предложение 6.2** *Пусть $V$ является замкнутым выпуклым подмножеством рефлексивного банахова пространства $W$, и пусть $\Phi : V \to \mathbb{R}$ непрерывное отображение, удовлетворяющее следующим условиям:*

*A)* $\inf\limits_V \Phi = \alpha_0 \in (-\infty, \infty)$,

*B)* $\exists b > \alpha_0$ *такое, что* $\Phi^{-1}([\alpha_0, b])$ *ограничено в* $W$,

*C)* $\forall y \in (\alpha_0, b] \quad \Phi^{-1}([\alpha_0, y])$ *выпукло.*

*Тогда существует* $\nu \in V$ *такое, что* $\Phi(\nu) = \alpha_0$.

Как и выше, доказательство опирается на тот факт, что для $0 < \varepsilon \leq b - \alpha_0 \quad K_\varepsilon$ является семейством вложенных подмножеств $W$, компактных в слабой топологии $W$.

Возьмем $p \in (1, \infty), \quad g \in C^\infty(\partial\Omega, \mathbb{R}^N)$, и пусть

$$V = \{u \in H^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^N) : u = g \text{ на } \partial\Omega\}. \tag{1.6}$$

Сохраним предположение (1.3), но заменим условия (1.4) и (1.5) на следующие:

$$A_0|\xi|^p - B_0|u| - C_0 \leq F(x, u, \xi) \tag{1.7}$$

для некоторых положительных $A_0, B_0, C_0$, и

$$|F(x, u, \xi) - F(x, \nu, \zeta)| \leq C(|u - \nu| + |\xi - \zeta|)(|\xi| + |\zeta| + 1)^{p-1}. \tag{1.8}$$

Тогда мы получим

**Предложение 6.3** *Пусть множество* $\Omega$ *связное с непустой границей. Предположим, что* $I(u) < \infty$ *для некоторого* $u \in V$. *Тогда в предположениях (1.1), (1.3) и (1.6) – (1.8)* $I$ *имеет минимум на* $V$.

В предложениях 6.1 и 6.3 можно заменить условие (1.3) на условие выпуклости только по последней переменной.

**Предложение 6.4** *Пусть выполнены условия предложения 6.3, но предположение (1.3) заменим на следующее:*

$$F(x, u, \cdot) : \mathbb{R}^N \times T_x^*\overline{\Omega} \to \mathbb{R} \tag{1.9}$$

*– выпуклое отображение для каждых* $(x,u) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N$. *Тогда* $I$ *имеет минимум на* $V$.

*Доказательство.* Пусть $\alpha_0 = \inf\limits_V I(u)$. Из условия (1.1) и неравенства Фридрихса следует, что $\alpha_0 > -\infty$, а также, что множество

$$B = \{u \in V : I(u) \leq \alpha_0 + 1\} \tag{1.10}$$

ограничено в $H^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Выберем последовательность $u_j \in B$ так, что $I(u_j) \to \alpha_0$. Переходя к подпоследовательностям, мы можем считать, что

$$u_j \to u \quad \text{слабо в } H^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^N),$$

и, значит, $u_j \to u$ сильно в $L^p(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Нам надо показать, что

$$I(u) = \alpha_0. \tag{1.11}$$

Введем обозначение

$$\Phi(u, \nu) = \int\limits_\Omega F(x, u, \nu) dV(x). \tag{1.12}$$

Имеем

$$\Phi(u_j, \nu_j) \to \alpha_0, \quad \nu_j = \nabla u_j. \tag{1.13}$$

Кроме того, $\nu_j$ сходится к $\nu = \nabla u$ слабо в $L^p(\Omega, \mathbb{R}^N \times T^*)$.

Очевидно, условие (1.11) выполняется, если только мы покажем, что

$$\Phi(u, \nu) \leq \alpha_0. \tag{1.14}$$

Согласно предположению (1.8), мы имеем

$$\begin{aligned} |\Phi(u_j, \nu_j) - \Phi(u, \nu_j)| \leq C \int\limits_\Omega |u_j - u|(|\nu_j| + 1)^{p-1} dV(x) \ &\leq \\ \leq C' \|u_j - u\|_{L^p(\Omega)}, & \end{aligned} \tag{1.15}$$

поэтому

$$\Phi(u, \nu_j) \to \alpha_0. \tag{1.16}$$

На основании (1.4), (1.5) и (1.9) получаем, что для каждого $\varepsilon \in (0, 1]$ множество

$$\mathcal{K}_\varepsilon = \{w \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^N \times T^*) : \Phi(u, w) \leq \alpha_0 + \varepsilon\} \tag{1.17}$$

является замкнутым выпуклым подмножеством $L^p(\Omega, \mathbb{R}^N \times T^*)$. Следовательно, множество $\mathcal{K}_\varepsilon$ слабо компактно. Кроме того, согласно (1.16), $\nu_j \in \mathcal{K}_\varepsilon$ при $\varepsilon_j \to 0$, поэтому $\nu \in \mathcal{K}_0$. Отсюда следует (1.14), и предложение доказано.

Следующее обобщение предложения 6.4 применяется к некоторым задачам о нахождении условного минимума.

**Предложение 6.5** *Пусть $p \in (1, \infty)$ и функция $F(x, u, \xi)$ удовлетворяет условиям предложения 6.4. Тогда если $S$ – какое-нибудь подмножество $V$ (см. формулу (1.6)), замкнутое в слабой топологии*

$$H^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^N),$$

*то $I\,|_S$ имеет минимум на $S$.*

*Доказательство.* Пусть $\alpha_0 = \inf\limits_S I(u)$, возьмем последовательность

$$u_j \in S$$

такую, что $I(u_j) \to \alpha_0$. Так как выполнено (1.10), мы можем выбрать подпоследовательность $u_j$, сходящуюся к $u$ слабо в $H^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, так, что $u \in S$. Мы хотим показать, что $I(u) = \alpha_0$. Действительно, если мы определим $\Phi(u, \nu)$ как в формуле (1.12), то формулы (1.13) – (1.17) останутся верными и наше утверждение доказано.

Например, если $X \subset \mathbb{R}^N$ – замкнутое множество, мы можем положить

$$S = \{u \in V : u(x) \in X \text{ для почти всех } x \in \Omega\}.$$

Тогда, в силу предложения 6.5, функционал $I$ достигает минимума на $S$. К примеру, $X$ может быть компактным римановым многообразием, изометрически вложенным в $\mathbb{R}^N$. Тогда если взять $p = 2,\ F(x, u, \nabla u) = |\nabla u|^2$, то минимум $I(u)$ является гармоническим отображением $\overline{\Omega}$ в $X$. Если $u : \Omega \to X$ – гармоническое отображение, то оно удовлетворяет уравнению в частных производных

$$\Delta u - \Gamma(u)(\nabla u, \nabla u) = 0,$$

где $\Gamma(u)(\nabla u, \nabla u)$ – квадратичная форма от $\nabla u$.

**Теорема 6.1** *Пусть $\Omega$ – связная область с непустой границей. Возьмем $p \in (1, \infty)$. Зададим множество $V$ следующим образом:*

$$V = \{u \in H^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^N) : u = g \text{ на } \partial\Omega\}.$$

*Предположим, что $I(u) < \infty$ для некоторого $u \in V$, и пусть функция $F(x, u, \xi)$ гладкая по своим аргументам, отображение $F(x, u, \cdot) : \mathbb{R}^N \times T^*_x\overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ выпукло для каждого $(x, u) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N$, и для всех $\xi$ выполнено неравенство*

$$A_0|\xi|^p \leq F(x, u, \xi). \tag{1.18}$$

*Здесь $A_0$ – положительная постоянная.*

*Тогда $I$ достигает минимума на $V$. Если $S$ – подмножество $V$, замкнутое в слабой топологии $H^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, тогда $I\ |_S$ достигает минимума на $S$.*

*Доказательство.* Очевидно, $\alpha_0 = \inf_S I(u) \geq 0$. Возьмем $B = \{u \in V : I(u) \leq \alpha_0 + 1\}$ и выберем $u_j \in B \cap S$ так, что

$$I(u_j) \to \alpha_0,\ u_j \to u \text{ слабо в } H^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^N). \tag{1.19}$$

Переходя к подпоследовательностям, мы можем считать, что $u_j \to u$ почти всюду на $\Omega$. Нам нужно показать, что

$$\int\limits_\Omega F(x, u, \nabla u) dV \leq \alpha_0. \tag{1.20}$$

По теореме Егорова существуют измеримые множества $E_\nu \supset E_{\nu+1} \supset \cdots$ в $\Omega$, мерой меньше $2^{-\nu}$, такие, что $u_j \to u$ равномерно на $\Omega \setminus E_\nu$. В силу неравенства Чебышева имеет место оценка $|u(x)| + |\nabla u(x)| \leq C \cdot 2^\nu$ для $x \in \Omega \setminus E_\nu$ . Итак,

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega\setminus E_\nu} F(x, u, \nabla u)\, dV = \int\limits_{\Omega\setminus E_\nu} F(x, u_j, \nabla u_j)\, dV \ &+ \\ + \int\limits_{\Omega\setminus E_\nu} [F(x, u_j, \nabla u) - F(x, u_j, \nabla u_j)]\, dV \ &+ \\ + \int\limits_{\Omega\setminus E_\nu} [F(x, u, \nabla u) - F(x, u_j, \nabla u)]\, dV.&\end{aligned} \tag{1.21}$$

Чтобы оценить второй интеграл в правой части этой формулы, мы воспользуемся предположением выпуклости и напишем

$$F(x, u_j, \nabla u) - F(x, u_j, \nabla u_j) \leq D_\xi F(x, u_j, \nabla u) \cdot (\nabla u - \nabla u_j).$$

Теперь для каждого $\nu$

$$D_\xi F(x, u_j, \nabla u) \to D_\xi F(x, u, \nabla u)$$

равномерно на $\Omega \setminus E_\nu$, а поскольку $\nabla u - \nabla u_j \to 0$ слабо в $L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$, то

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_{\Omega\setminus E_\nu} [F(x, u_j, \nabla u) - F(x, u_j, \nabla u_j)] dV = 0.$$

Для оценки последнего интеграла в формуле (1.21) заметим, что

$$F(x,u,\nabla u) - F(x,u_j,\nabla u) \to 0 \text{ равномерно на } \Omega \setminus E_\nu.$$

По формуле (1.21) имеем

$$\int\limits_{\Omega\setminus E_\nu} F(x,u,\nabla u)dV \leq \limsup_{j\to\infty} \int\limits_{\Omega\setminus E_\nu} F(x,u_j,\nabla u_j)dV \leq \alpha_0$$

для всех $\nu$. Переходя к пределу $\nu \to \infty$, мы получим (1.20).

Теорема доказана.

Имеются и другие результаты в этом направлении. Отметим один из них.

**Предложение 6.6** *Предположим, что функция $F$ гладкая по переменным $(x,u,\xi)$, $F(x,u,\xi) \geq 0$ и отображение*

$$F(x,u,\cdot) : \mathbb{R}^N \times T_x^*\overline{\Omega} \to \mathbb{R}$$

*выпукло для каждого $x,u$. Пусть*

$$u_\nu \to u \quad \textit{слабо в } H^{1,1}_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^N). \tag{1.22}$$

*Тогда $I(u) \leq \liminf\limits_{\nu\to\infty} I(u_\nu)$.*

Доказательство этого факта и другие обобщения изложены в работах [39] и [32]. Серрин (J. Serrin) в работе [69] доказал, что если $u$ – скалярная функция, то предположение (1.22) можно ослабить до

$$u_\nu, u \in H^{1,1}_{loc}(\Omega), \quad u_\nu \to u \text{ в } L^1_{loc}(\Omega).$$

В работе [48] делается попытка обобщить результат Серрина на системы, но, как показано в [34], сделанное обобщение неверно.

В работе [32] обсуждается возможность замены условия выпуклости на условие квази выпуклости, принадлежащее Моррею (Morrey). В работах [71] и [40] исследуются вопросы существования не минимума функционала, а так называемой седловой точки.

## 2 Тождество Похожаева

Пусть $M$ – ограниченная область $m$-мерного пространства с гладкой границей $\partial M$. Для точек $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ мы будем использовать евклидову норму $|x|^2 = \sum_{i=1}^m x_i^2$.

В этом разделе мы рассмотрим вопрос о существовании слабых решений полулинейной задачи Дирихле следующего вида:

$$-\Delta u = f(u), \quad u\,|_{\partial M} = 0, \tag{2.1}$$

где скалярная функция $f$ непрерывна на множестве действительных чисел.

**Теорема 6.2 ([58])** *Пусть $u \in H_0^1(M) \bigcap H^2(M)$ – решение задачи (2.1). Тогда справедливо тождество*

$$-\frac{1}{2}\int_{\partial M} |\nabla u|^2 (x, \nu)\, ds = \int_M \frac{m-2}{2} u f(u) - mF(u)\, dx,$$

*где $F(u) = \int_0^u f(t)\, dt$, единичный вектор $\nu$ является внешней нормалью к поверхности $\partial M$ и $ds$ – элемент площади этой поверхности.*

Тождество из теоремы 6.2 называется тождеством Похожаева. В ряде случаев оно позволяет установить неразрешимость задачи (2.1).

Докажем теорему 6.2.

Почти всюду на $\partial M$ справедливо тождество

$$(\nabla u(x),\nu(x))\nabla u(x)=|\nabla u(x)|^2\nu(x),\quad x\in\partial M. \tag{2.2}$$

Этот факт следует из того, что $\partial M$ является поверхностью уровня для $u$, а значит, векторы $\nu$ и $\nabla u$ параллельны почти всюду.

Домножим скалярно левую и правую часть равенства (2.2) на $x$ и проинтегрируем по $\partial M$:

$$\int_{\partial M}(\nabla u,\nu)(\nabla u,x)\,ds=\int_{\partial M}|\nabla u|^2(\nu,x)\,ds. \tag{2.3}$$

По формуле Стокса находим

$$\int_{\partial M}(\nabla u,\nu)(\nabla u,x)\,ds=\int_M \operatorname{div}((\nabla u,x)\nabla u)\,dx. \tag{2.4}$$

Преобразуем правую часть этой формулы:

$$\int_M \operatorname{div}((\nabla u,x)\nabla u)\,dx=\int_M x_k u_{x_i x_k}u_{x_i}+|\nabla u|^2+x_k u_{x_k}\Delta u\,dx. \tag{2.5}$$

Здесь, как обычно, по повторяющимся индексам ведется суммирование. Каждое слагаемое, стоящее в правой части последней формулы, мы обработаем по отдельности.

Домножая левую и правую часть уравнения (2.1) на $u$ и интегрируя по частям, находим

$$\int_M|\nabla u|^2\,dx=\int_M uf(u)\,dx.$$

Замечая, что

$$\frac{\partial F(u(x))}{\partial x_j}=f(u)u_{x_j}=-u_{x_j}\Delta u,$$

получаем

$$\int_M x_k u_{x_k}\Delta u\,dx=-\int_M (F(u))_{x_k}x_k\,dx=m\int_M F(u)\,dx.$$

Здесь мы проинтегрировали по частям, воспользовавшись тем, что

$$F(u)\mid_{\partial M}= 0.$$

Выполним еще одно интегрирование по частям:

$$\begin{aligned}\int_M x_k u_{x_i x_k} u_{x_i}\,dx &= \int_{\partial M}(x,\nu)|\nabla u|^2\,ds - \int_M u_{x_i}(x_k u_{x_i})_{x_k}\,dx = \\ &= \int_{\partial M}(x,\nu)|\nabla u|^2\,ds - \int_M m|\nabla u|^2 - \\ &- x_k u_{x_i} u_{x_i x_k}\,dx.\end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\int_M x_k u_{x_i x_k} u_{x_i}\,dx = \frac{1}{2}\Big(\int_{\partial M}(x,\nu)|\nabla u|^2\,ds - m\int_M |\nabla u|^2\,dx\Big).$$

Подставляя полученные результаты в правую часть формулы (2.5), формулу (2.5) – в формулу (2.4), а формулу (2.4) – в формулу (2.3), получаем утверждение теоремы.

Предположим теперь, что область  звездна. Не сужая общности, мы будем считать, что она звездна относительно начала координат:

$$(x,\nu(x)) \geq 0 \ \text{ при } x \in \partial M.$$

Тогда из тождества Похожаева следует неравенство

$$\int_M \frac{m-2}{2} u f(u) - mF(u)\,dx \leq 0. \tag{2.6}$$

Рассмотрим пример. Пусть $f(t) = t|t|^{p-1}, \quad p > 1$. Тогда неравенство (2.6) приобретает вид

$$\Big(\frac{m-2}{2} - \frac{m}{p+1}\Big)\int_M |u|^{p+1}\,dx \leq 0.$$

Отсюда следует, что при

$$p > p_k = \frac{m+2}{m-2}$$

задача (2.1) не имеет решений в $H_0^1(M) \bigcap H^2(M)$, отличных от тождественного нуля. С другой стороны, можно показать, что при $p < p_k$ задача (2.1) с указанной функцией $f$ имеет нетривиальные решения из $H_0^1(M)$ [61], и всякое решение из $H_0^1(M)$ принадлежит $H^2(M)$. Поэтому число $p_k$ называется критическим показателем.

В заключение мы покажем, что при $p < p_k$ всякое решение задачи (2.1) из $H_0^1(M)$ принадлежит $H^2(M)$. Действительно, мы знаем, что $u \in H_0^1(M) \subset L^{p_k+1}(M)$. Вообще говоря, если $u \in L^q(M)$, то $u|u|^{p-1} \in L^{q/p}(M)$, и в силу уравнения (2.1) $u \in H^{2,q/p}(M) \subset L^s(M)$, где

$$\frac{1}{s} = \frac{p}{q} - \frac{2}{m}.$$

Продолжая так дальше, мы получим, что $u \in L^{q_j}(M)$, где

$$\frac{1}{q_{j+1}} = \frac{p}{q_j} - \frac{2}{m}, \quad q_1 = p_k + 1.$$

Легко показать, что при $p < p_k$ у нас $q_1 > (p-1)m/2$ и найдется такой номер $j'$, что

$$q_{j'} \geq mp/2,$$

и, значит, $u \in H^{2,mp/2}(M) \subset L^\infty(M)$, в частности $u \in H^2(M)$.

## 3 Принцип сравнения и его следствия

Рассмотрим ограниченную открытую область $M \subset \mathbb{R}^m$ с гладкой границей $\partial M$. Для точек $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ мы будем использовать два типа норм: стандартная евклидова норма $|x|^2 = \sum_{i=1}^m x_i^2$ и норма $\|x\| = \max_i |x_i|$. В дальнейшем нам будет удобно считать, что область $M$ содержится в шаре радиуса $R$:

$$M \subseteq B_R^m(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^m : |x - x_0| < R\}.$$

Принцип сравнения для эллиптических уравнений основан на одном предложении типа $H^1$-принципа максимума.

Пусть функция $v \in H^1(M)$. По определению положим, что $\Delta v \geq 0$ в $M$, если

$$\int_M (\nabla v, \nabla w)\, dx \leq 0$$

для любой функции $w \in H_0^1(M)$ такой, что $w(x) \geq 0$ почти всюду (для краткости будем иногда писать п. в.) в $M$.

**Предложение 6.7 ([73])** *Предположим, что $v \in H^1(M)$ и $\Delta v \geq 0$. Тогда если $v(x) \leq 0$ п. в. на $\partial M$, то $v(x) \leq 0$ п. в. в $M$.*

*Доказательство.*Положим $v_+(x) = \max(0, v(x))$. Поскольку функция $v$ неположительна на $\partial M$, имеем $v_+ \in H_0^1(M)$.

Заметим, что

$$\int_M (\nabla v_+, \nabla v_+)\, dx = \int_M (\nabla v, \nabla v_+)\, dx \leq 0,$$

следовательно, $\nabla v_+ = 0$ п. в., из чего вытекает, что $v_+ = 0$ п. в.

Предложение доказано.

Мы изучим принцип сравнения на примере одной, весьма общей, эллиптической системы с нулевыми условиями Дирихле на границе.

Введем пространство

$$C_0^1(\overline{M}) = \{v \in C^1(\overline{M}) : v\big|_{\partial M} = 0\},$$

оно состоит из функций, непрерывно дифференцируемых в $M$ и непрерывных в $\overline{M}$. Пусть

$$f : (C_0^1(\overline{M}))^n \to (L^\infty(M))^n$$

непрерывное отображение. Здесь через $X^n$ мы обозначаем прямое $n$-кратное произведение $X^n = X \times \ldots \times X$. Основным объектом нашего исследования является следующая система:

$$-\Delta u = f(u), \quad u\big|_{\partial M} = 0, \tag{3.1}$$

где $f = (f_1, \ldots, f_n), \quad u = (u_1, \ldots, u_n)$.

**Теорема 6.3** *Предположим, что найдется такая константа $\lambda \geq 0$, что для любой функции $v \in (C_0^1(\overline{M}))^n$, удовлетворяющей неравенству $\|v(x)\| \leq \lambda$ оценка*

$$\|f(v)\| \leq \frac{2m\lambda}{R^2} \tag{3.2}$$

*верна п. в. в $M$. Тогда при всяком $r > m$ система (1.7) имеет слабое решение $u = (u_1, \ldots, u_n)$ такое, что $\|u(x)\| \leq \lambda$ п. в. в $M$ и*

$$u_j \in \widetilde{H}^{2,r}(M) := H_0^{1,r}(M) \bigcap H^{2,r}(M) \quad j = 1, \ldots, n.$$

Как следует из теорем вложения, в условиях теоремы $\widetilde{H}^{2,r}(M) \subset C(M)$.

Вообще будем обозначать

$$\widetilde{H}^{s,r}(M) := H_0^{1,r}(M) \bigcap H^{s,r}(M).$$

Например, мы можем взять $n = 1$ и $f(u) = (2 + \cos(|\nabla u|^2))e^u$.

Мы докажем эту теорему в следующем разделе, а сейчас рассмотрим некоторые ее следствия.

Пусть $M_m \subset \mathbb{R}^m$ – последовательность ограниченных областей с гладкими границами, и каждая область, в своем пространстве, находится внутри евклидова шара радиуса $R$. Возьмем какую-нибудь непрерывную функцию $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и зададим отображение $f$ следующим образом: $f(v) = g(v(x))$.

Мы утверждаем, что задача (3.1) с данной функцией $f$ имеет слабое решение в области $M_m$ , если только размерность $m$ достаточно велика. Действительно, зафиксируем положительную постоянную $\lambda$ и заметим, что функция $\|g(y)\|$ ограничена в $n$-мерном кубе $\{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\| \leq \lambda\}$, теперь неравенство (3.2) очевидно выполнено, если только $m$ достаточно велико.

Этот неожиданный, на первый взгляд, эффект, когда размерность области не мешает, а, наоборот, способствует разрешимости задачи, связан с граничными условиями и не имеет места, если условия Дирихле заменить какими-нибудь другими. Например, если $M_m = \mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m$, т. е. мы ищем решения, которые являются 1-периодическими функциями по каждому аргументу, то описанный эффект не имеет места. Действительно, скалярная задача

$$\Delta u = 1, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m),$$

не имеет решения ни при каком $m$, поскольку в левой ее части стоит функция, равная нулю в среднем: $\int_{\mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m} \Delta u(x)\, dx = 0$, а справа – нет.

Таким образом, наибольшую сложность (и физическую актуальность) представляет собой исследование полулинейных эллиптических задач именно в малых размерностях, где не применима теорема 6.3.

## 3.1 Доказательство теоремы 6.3

Обозначим через $\Delta^{-1}h$ решение следующей линейной задачи Дирихле:

$$\Delta w = h \in H^{s,p}(M), \quad w\big|_{\partial M} = 0, \quad s \geq 0,\ p > 1.$$

Хорошо известно, что линейный оператор $\Delta^{-1} : H^{s,p}(M) \to \widetilde{H}^{s+2,p}(M)$ ограничен. Мы будем искать решение нашей задачи как неподвижную точку отображения

$$G(v) = -\Delta^{-1} f(v).$$

В силу условий теоремы отображение

$$G : (C_0^1(\overline{M}))^n \to (\widetilde{H}^{2,r}(M))^n$$

непрерывно. Рассмотрим функцию

$$U(x) = \frac{\lambda}{R^2}(R^2 - |x - x_0|^2).$$

Эта функция положительна при $x \in B_R^m(x_0)$, достигает максимума в точке $x_0$:

$$\max_{B_R^m(x_0)} U = U(x_0) = \lambda$$

и удовлетворяет уравнению Пуассона:

$$-\Delta U = \frac{2m\lambda}{R^2}. \tag{3.3}$$

Принцип сравнения состоит в том, что мы получаем априорные оценки решений задачи (3.1), сравнивая ее с модельной задачей (3.3), про которую все известно. Модельная задача может выбираться разными способами, исходя из специфики исходной задачи.

**Лемма 6.1** *Функция $G$ переводит множество*

$$W = \{w \in (C_0^1(\overline{M}))^n \mid \|w(x)\| \le \lambda, \quad x \in M\}$$

*в себя. Отображение $G\,|_W : W \to W$ непрерывно и компактно.*

*Доказательство.* Отметим следующие вложения:

$$\widetilde{H}^{2,r}(M) \sqsubset \widetilde{H}^{2-\delta,r}(M) \subset C_0^1(\overline{M}), \quad 0 < \delta < 1,\ (1-\delta)r > m, \tag{3.4}$$

(через $\sqsubset$ обозначено компактное вложение)

Отсюда сразу следует, что отображение $G : (C_0^1(\overline{M}))^n \to (C_0^1(\overline{M}))^n$ непрерывно.

Поскольку $-\Delta G_j(w) = f_j(w), \quad j = 1, \ldots, n$, то по формуле (3.3) имеем

$$\Delta(G_j(w) - U) = -f_j(w) + \frac{2m\lambda}{R^2} \geq 0$$

п. в. в $M$. Замечая, что $(G_j(w) - U)\big|_{\partial M} = -U\big|_{\partial M} \leq 0$, в силу предложения 6.7 найдем, что $G_j(w) \leq U$ п. в. в $M$. Из тех же соображений выводим, что $-U \leq G_j(w)$ п. в. в $M$. Итак, п. в. в $M$ справедлива оценка

$$\|G(w)\| \leq U \leq \max_{B_R^m(x_0)} U = \lambda.$$

По предположению теоремы, множество $f(W)$ ограничено в $(L^\infty(M))^n$: $\|f(w)\| \leq 2m\lambda/R^2, \quad w \in W$. Следовательно, множество $\Delta^{-1} f(W)$ ограничено в $(\widetilde{H}^{2,r}(M))^n$, а значит, ввиду вложений (3.10), относительно компактно в $(C_0^1(\overline{M}))^n$.

Лемма доказана.

Нам остается только заметить, что множество $W$ выпукло в $(C_0^1(\overline{M}))^n$, и, основываясь на лемме 6.1, применить теорему Шаудера о неподвижной точке к отображению $G$.

Теорема доказана.

## 4 Функционально-дифференциальное уравнение

В этой главе мы рассмотрим краевую задачу для уравнения с $p$-лапласианом, содержащим функциональный оператор в главной части, и докажем теорему существования слабого решения.

$p$-лапласиан встречается при изучении течений сквозь пористую среду

$(p = 3/2)$, нелинейной эластичности $(p \geq 2)$ и гляциологии (в этом случае $p \in (1, 4/3])$. За подробностями мы отсылаем читателя к [47] .

Для уравнения с $p$-лапласианом с однородной правой частью теоремы существования и несуществования были получены многими авторами, например [41], [55], [47], [72]. Вариационные методы были применены в работе [56] и других для нахождения положительных решений.

Функционально-дифференциальные операторы, помещенные в лапласиан, включая операторы растяжения/сжатия (см. ниже), были изучены в работах [31], [43].

Рассмотрим эллиптическое уравнение с нелокальным линейным оператором под лапласианом:

$$\Delta_p Au = f(x) \in H^{-1,p^*}(M), \quad u \mid_{\partial M} = 0, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1, \qquad (4.1)$$

где $A$ – некоторый ограниченный линейный оператор. Если оператор $A$ является малым возмущением тождественного оператора, то задача остается коэрцитивной, но свойство монотонности нарушается. Заметим, что в линейном случае $(p = 2)$ малое возмущение не может разрушить монотонность.

Линейная версия уравнения (4.1) с нелокальным оператором растяжения и сжатия аргумента

$$Au = \sum_{i=-k}^{k} a_i u(q^i x), \quad q > 1, \quad a_j \in \mathbb{R},$$

была изучена в [65], [63]. Случай, когда коэффициенты $a_k$ зависят от $x$, был рассмотрен в работе [64] в линейной постановке.

Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений были изучены в статьях [25], [60] и других.

Краевые задачи для эллиптических уравнений со сдвигами в пространстве переменных были рассмотрены в работах [54], [75].

Теория краевых задач для эллиптических дифференциально-разностных уравнений в ограниченной области была построена в работе [70].

## 4.1 Основная теорема

Пусть $M$ – ограниченная область в $\mathbb{R}^m$ с гладкой границей $\partial M$, и $x = (x_1, \ldots, x_m)$ – координаты в $\mathbb{R}^m$. Через $\partial_i$ обозначим частную производную по переменной $x_i$. Предположим, что область $M$ является звездной относительно начала координат. Рассмотрим области

$$sM = \{sx \mid x \in M\}$$

с различными $s > 0$. Если $s' < s''$, то очевидно, что $s'M \subset s''M$.

Для любых $v \in L^r(sM)$, $\quad r \geq 1$ и $w \in L^{r^*}(sM)$, $\quad 1/r + 1/r^* = 1$ положим

$$(v, w) = \int_{sM} v(x)w(x)\, dx.$$

Пусть $b < 1$ – положительная константа. Через $\mathcal{W}$ обозначим пространство ограниченных линейных операторов

$$G : H_0^{1,p}(M) \to H_0^{1,p}(b^{-1}M),\ p > 1,$$

со следующими свойствами.

Для любого оператора $G \in \mathcal{W}$ существует ограниченный оператор $G^+ : L^p(M) \to L^p(b^{-1}M)$ такой, что:

$$\partial_i G = G^+ \partial_i, \quad \|G^+ w\|_{L^p(b^{-1}M)} \geq c_0 \|w\|_{L^p(M)}. \tag{4.2}$$

Положительная константа $c_0$ зависит только от $G$. Для сопряженного оператора

$$G^{+*} : L^{p^*}(b^{-1}M) \to L^{p^*}(M), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1,$$

имеется ограниченный оператор

$$G^{+*+} : H^{-1,p^*}(b^{-1}M) \to H^{-1,p^*}(M)$$

такой, что

$$\partial_i G^{+*} = G^{+*+} \partial_i. \tag{4.3}$$

Через $\mathcal{L}(H_0^{1,p}(M))$ обозначим пространство ограниченных линейных операторов, переводящих $H_0^{1,p}(M)$ в себя и таких, что для любого $T$ из $\mathcal{L}(H_0^{1,p}(M))$ имеем

$$\|Tv\|_{H_0^{1,p}(M)} \geq c_5 \|v\|_{H_0^{1,p}(M)}, \tag{4.4}$$

где $c_5$ – другая положительная константа, зависящая только от $T$.

Определим оператор $A : H_0^{1,p}(M) \to H_0^{1,p}(b^{-1}M)$ по формуле

$$A = GT, \quad G \in \mathcal{W}, \quad T \in \mathcal{L}(H_0^{1,p}(M)), \tag{4.5}$$

и зададим оператор $B : H^{-1,p^*}(b^{-1}M) \to H^{-1,p^*}(M)$ следующим образом: $B = T^* G^{+*+}$.

Определим $p$-лапласиан формулой

$$\Delta_p v = \sum_{i=1}^{m} \partial_i (|\partial_i v|^{p-2} \partial_i v), \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Основным объектом нашего изучения будет следующая эллиптическая задача:

$$\Delta_p A u = f(x) \in L^{p^*}(b^{-1}M), \quad u\mid_{\partial M} = 0. \tag{4.6}$$

**Теорема 6.4** *Если* $Bf \in L^{p^*}(M)$ *и* $\ker B = 0$*, то задача* (4.6) *имеет слабое решение* $u \in H_0^{1,p}(M)$*, то есть для любого* $\psi \in H_0^{1,p}(b^{-1}M)$ *имеем*

$$-\sum_{i=1}^{m}(|\partial_i Au|^{p-2}\partial_i Au, \partial_i\psi) = (f, \psi). \tag{4.7}$$

Интегрирование в формуле (4.7) ведется по области $b^{-1}M$. Так как $M \subset b^{-1}M$, то пробные функции $\psi$ в этой формуле можно брать из $H_0^{1,p}(M)$ и продолжать их нулем до функций из $H_0^{1,p}(b^{-1}M)$. Поэтому можно считать, что интегралы в формуле (4.7) берутся по области $M$ и задача 4.6 решается в области $M$.

## 4.2 Приложение: операторы растяжения и сжатия

Зададим оператор $\sigma : L^r(M) \to L^r(\mathbb{R}^m), \quad r \geq 1$, формулой

$$\sigma v = \begin{cases} v(x), & \text{если} \quad x \in M, \\ 0, & \text{если} \quad x \in \mathbb{R}^m \backslash \overline{M}. \end{cases}$$

С помощью этого оператора мы построим оператор растяжения/сжатия: $R_a v = (\sigma v)(ax), \quad a > 0$. Этот оператор растягивает график функции $v(x)$, если константа $a < 1$, и сжимает график, если $a > 1$.

Нетрудно показать, что $R_a \in \mathcal{L}(H_0^{1,p}(M))$ – ограниченный оператор в случае $a > 1$, и если $a < 1$, то

$$R_a : H_0^{1,r}(M) \to H_0^{1,r}(a^{-1}M), \quad R_a : L^r(M) \to L^r(a^{-1}M)$$

также ограничен.

Легко показать, что

$$\|R_a\|_{H_0^{1,p}(M) \to H_0^{1,p}(M)} \leq a^{1-m/p}, \quad a > 1. \tag{4.8}$$

Покажем, что $R_b \in \mathcal{W} \quad (b < 1)$. Действительно, этот оператор коммутирует с частной производной следующим образом:

$$\partial_i R_b = R_b^+ \partial_i, \quad R_b^+ = b R_b.$$

Прямым вычислением получаем, что

$$\|R_b\|_{L^p(M)\to L^p(b^{-1}M)} = b^{-m/p}, \quad \|R_b^+\|_{L^p(M)\to L^p(b^{-1}M)} = b^{1-m/p}.$$

Оператор $R_b^* : L^{p^*}(b^{-1}M) \to L^{p^*}(M)$ может быть также записан в явном виде: полагая $R_b^* = b^{-m} R_{b^{-1}}$, мы заменим переменную $x \mapsto b^{-1}x$ в интеграле и получим, что $(R_b v, w) = (v, R_b^* w)$.

Итак, имеем $R_b^{+*} = b^{1-m} R_{b^{-1}}$ и

$$R_b^{+*+} = b^{-m} R_{b^{-1}} = R_b^*.$$

Эта формула позволяет упростить определение оператора

$$R_b^{+*+} : H^{-1,p^*}(b^{-1}M) \to H^{-1,p^*}(b^{-1}M).$$

Для того чтобы сделать это, напомним теорему.

**Теорема 6.5 ([21])** *Всякий элемент $g \in H^{-1,p^*}(b^{-1}M)$ представляется в следующем виде:*

$$g = g_0 + \sum_{i=1}^{m} \partial_i g_i, \quad g_j \in L^{p^*}(b^{-1}M), \quad j = 0, \ldots, m. \tag{4.9}$$

*Более того,*

$$\|g\|^{p^*}_{H^{-1,p^*}(b^{-1}M)} = \min \sum_{i=0}^{m} \|g_i\|^{p^*}_{L^{p^*}(b^{-1}M)}.$$

*Минимум берется на множестве всех функций $g_i$, $i = 0, \ldots, m$, для которых выполнено (4.9), и этот минимум достигается.*

Теперь положим по определению

$$(R_b^{+*+}g\,,h)=(g_0,R_bh)-\sum_{i=1}^{m}(g_i,\partial_iR_bh),\quad h\in H_0^{1,p}(M).\tag{4.10}$$

Так как $R_b:H_0^{1,p^*}(M)\to H_0^{1,p^*}(b^{-1}M)$ является биекцией, то из формулы (4.10) следует, что

$$\ker R_b^{+*+}=0.$$

С помощью теоремы 6.5 находим

$$\|R_b^{+*+}\|_{H^{-1,p^*}(b^{-1}M)\to H^{-1,p^*}(M)}\le\max\{b^{-\frac{m}{p}},b^{1-\frac{m}{p}}\}.$$

В качестве оператора $T$ возьмем следующую композицию операторов:

$$H=\prod_{j=0}^{l}(\mathrm{id}_{H_0^{1,p}(M)}-\lambda_jR_{a_j}),\quad a_j>1,\tag{4.11}$$

где числа $\lambda_j$ для простоты будем считать действительными.

Очевидно, что если $|\lambda_j|\cdot\|R_{a_j}\|_{H_0^{1,p}(M)\to H_0^{1,p}(M)}<1,\quad j=1,\dots,l,$ то оператор $H$ является ограниченной биекцией $H_0^{1,p}(M)$. По формуле (4.8) это неравенство выполнено при условии

$$|\lambda_j|<a_j^{m/p-1},\quad j=1,\dots,l.\tag{4.12}$$

В результате мы получим следующее следствие из теоремы 6.4.

**Предложение 6.8** *В задаче (4.6) положим $A=R_bH$. Тогда если неравенства (4.12) выполнены, то задача (4.6) имеет слабое решение.*

## 4.3 Доказательство теоремы 6.4

Зададим функции $J:H_0^{1,p}(M)\to\mathbb{R}$ и $F:H_0^{1,p}(M)\to\mathbb{R}$ формулами

$$J(v)=(Bf,v),\quad F(v)=\int_{b^{-1}M}\sum_{i=1}^{m}|\partial_iAv|^p\,dx.$$

Далее мы покажем, что условный минимум линейной функции $J$ на поверхности уровня функции $F$ достигается и является решением нашей задачи.

**Лемма 6.2** *Найдутся положительные константы $c_2, c_4$ такие, что для любого $v \in H_0^{1,p}(M)$ верно следующее:*

$$c_4 \|v\|^p_{H_0^{1,p}(M)} \geq F(v) \geq c_2 \|v\|^p_{H_0^{1,p}(M)}.$$

Действительно, в силу ограниченности оператора $A$ имеем

$$F(v) \leq \|Av\|^p_{H_0^{1,p}(b^{-1}M)} \leq c_4 \|v\|^p_{H_0^{1,p}(M)}.$$

Используя формулы (4.2), (4.4), получаем, что

$$\sum_{j=1}^m \int_{b^{-1}M} |\partial_j GTu|^p \, dx = \sum_{j=1}^m \int_{b^{-1}M} |G^+ \partial_j Tu|^p \, dx \geq c_0^p \|Tu\|^p_{H_0^{1,p}(M)} \geq$$
$$\geq c_0^p c_5^p \|u\|^p_{H_0^{1,p}(M)}.$$

**Следствие 6.1** *Функция*

$$\nu(v) = (F(v))^{\frac{1}{p}}$$

*является нормой, эквивалентной стандартной норме пространства $H_0^{1,p}(M)$, и поэтому множество*

$$S = \{v \in H_0^{1,p}(M) \mid F(v) = 1\}$$

*является единичной сферой в $H_0^{1,p}(M)$ в смысле нормы $\nu$.*

**Лемма 6.3** *Функция $J \mid_S$ достигает своего минимума на $S$. Обозначим этот минимум через $\widehat{v}$.*

*Доказательство.* Согласно предположениям теоремы, функция $J$ может быть непрерывно продолжена в пространство $L^p(M)$.

**Теорема 6.6 ([73])** *Пусть $V, W$ – банаховы пространства, и пусть пространство $V$ рефлексивно. Если линейный оператор $Q : V \to W$ компактен, тогда образ замкнутого единичного шара $O \subset V$ при отображении $Q$ компактен.*

Применяя эту теорему к вложению $H_0^{1,p}(M) \subset L^p(M)$, мы видим, что шар

$$O = \{v \in H_0^{1,p}(M) \mid \nu(v) \leq 1\}$$

является компактным подмножеством в $L^p(M)$. Поэтому функция $J$ достигает своего минимума в $O$, обозначим его через $\widehat{v}$. В силу линейности функции $J$ имеем $\widehat{v} \in S = \partial O$.

Лемма доказана.

Рассмотрим слабые производные:

$$J'h = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} J(\widehat{v} + sh) = (Bf, h) = J(h), \quad h \in H_0^{1,p}(M), \tag{4.13}$$

$$F'(\widehat{v})h = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} F(\widehat{v} + sh) = p\sum_{i=1}^{m}(|\partial_i A\widehat{v}|^{p-2}\partial_i A\widehat{v}, \partial_i Ah). \tag{4.14}$$

**Лемма 6.4** *Имеют место следующие включения:*

$$\ker F'(\widehat{v}) \subseteq \ker J'. \tag{4.15}$$

*Доказательство.* Пусть

$$h \in \ker F'(\widehat{v}). \tag{4.16}$$

Определим функцию двух действительных аргументов по формуле

$$\varphi(y, t) = F(y\widehat{v} + th).$$

Мы хотим показать, что для некоторого положительного $t_0$ существует функция $y(t) \in C^1(-t_0, t_0), \quad y(0) = 1$, такая, что

$$\varphi(y(t), t) = 1. \tag{4.17}$$

Если это верно, тогда множество $\{y(t)\widehat{v} + th \mid |t| < t_0\}$ является кривой на многообразии $S$. Эта кривая проходит через точку $\widehat{v}$, и $h$ является ее касательным вектором в этой точке.

Заметим, что $\varphi(1, 0) = F(\widehat{v}) = 1$ и

$$\begin{aligned} \varphi_y(y, t)\mid_{(y,t)=(1,0)} &= F'(y\widehat{v} + th)\widehat{v}\mid_{(y,t)=(1,0)} = \\ &= F'(\widehat{v})\widehat{v} = pF(\widehat{v}) = p \neq 0. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Теперь применим теорему о неявной функции к уравнению (4.17) и найдем функцию $y(t)$.

Производная функции $y(t)$ принимает нулевое значение в нуле:

$$y_t(0) = 0. \tag{4.19}$$

Действительно, так как $F(y(t)\widehat{v} + th) = 1$ при $|t| < t_0$, мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(y(t)\widehat{v} + th) &= F'(y(0)\widehat{v})(y_t(0)\widehat{v} + h) = \\ &= y_t(0)F'(\widehat{v})\widehat{v} + F'(\widehat{v})h = 0. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Используя формулу (4.20) вместе с (4.16) и (4.18), мы получим (4.19).

Так как $y(t)\widehat{v} + th \in S$ при $|t| < t_0$ и, в силу леммы 6.3, функция $\rho(t) = J(y(t)\widehat{v} + th)$ достигает локального минимума в $t = 0$, поэтому

$$\rho_t(0) = J'(y_t(0)\widehat{v} + h) = 0.$$

Из этой формулы, а также из формулы (4.19) следует, что $J'h = 0$.

Согласно теореме о множителях Лагранжа, из формулы (4.15) вытекает существование константы $\lambda$ такой, что $\lambda F'(\widehat{v}) = J'$. Иными словами, для всех $h \in H_0^{1,p}(M)$ формулы (4.13), (4.14) дают следующее:

$$p\lambda \sum_{i=1}^{m} (|\partial_i A\widehat{v}|^{p-2}\partial_i A\widehat{v}, \partial_i Ah) = (Bf, h). \tag{4.21}$$

Введем обозначение $w_i = |\partial_i A\widehat{v}|^{p-2}\partial_i A\widehat{v}$ и запишем

$$(w_i, \partial_i Ah) = (w_i, \partial_i GTh). \tag{4.22}$$

В силу формул (4.2), (4.3) получим

$$(w_i, \partial_i GTh) = (w_i, G^{+}\partial_i Th) = (G^{+*}w_i, \partial_i Th) =$$
$$= -(\partial_i G^{+*}w_i, Th) = -(G^{+*+}\partial_i w, Th) = -(T^{*}G^{+*+}\partial_i w_i, h).$$

Из этого, а также формулы (4.22) следует, что

$$(w_i, \partial_i Ah) = -(B\partial_i w_i, h). \tag{4.23}$$

Подставляя (4.23) в (4.21), имеем

$$-p\lambda \sum_{i=1}^{m} B\partial_i(|\partial_i A\widehat{v}|^{p-2}\partial_i A\widehat{v}) = Bf. \tag{4.24}$$

Согласно предположению теоремы $\ker B = 0$, поэтому уравнение (4.24) эквивалентно следующему:

$$-p\lambda \sum_{i=1}^{m} \partial_i(|\partial_i A\widehat{v}|^{p-2}\partial_i A\widehat{v}) = f. \tag{4.25}$$

Обозначим через $\tau$ корень уравнения $-p\lambda|\tau|^{p-2}\tau = 1$. Функция $u = \widehat{v}/\tau$ является решением (4.6). Для проверки этого достаточно подставить выражение $\widehat{v} = \tau u$ в (4.25).

Теорема доказана.

## 5 Задачи

**Задача 6.1** *Доказать, что оценка (3.2) в теореме 6.3 неулучшаема.*

**Задача 6.2** *Сформулировать краевую задачу, которой удовлетворяет минимум функционала из предложения 6.1.*

**Задача 6.3** *Доказать предложение 6.2.*

**Задача 6.4** *Сформулировать краевую задачу, которой удовлетворяет минимум функционала из предложения 6.3.*

**Задача 6.5** *Пусть* $M = \overline{B_R(0)} \subset \mathbb{R}^m$. *Каким условиям должны удовлетворять числа* $m, R$, *чтобы задача*

$$\Delta u = e^x u + u^2 - \|u\|_{L^2(M)} + \operatorname{ess}\sup_{x \in \overline{B_{R/3}(0)}} u^3(x), \quad u\mid_{\partial M} = 0,$$

*имела слабое решение? (См. раздел 6.3.) Через* $\operatorname{ess\,sup} f$ *обозначается нижняя грань чисел* $c$, *для которых* $f \le c$ *почти всюду.*

## Глава 7

# Нелинейные уравнения в локально-выпуклых линейных топологических пространствах

## 1 Абстрактная схема теории возмущений

Мы начнем с исследования нелинейного уравнения с малым параметром в шкале банаховых пространств.

Сперва рассмотрим некоторую модельную задачу. Предположим, мы имеем дело с отображением $f : X \to X$ некоторого банахова пространства $X$. Отображение $f$ является липшицевым в шаре $B_R(0)$, т.е. для любых $x, y \in B_R(0)$ справедливо неравенство

$$\|f(x) - f(y)\|_X \leq C\|x - y\|_X,$$

где положительная постоянная $C$ не зависит от $x, y$.

Основным объектом регулярной теории возмущений является уравнение

$$x = \varepsilon f(x), \tag{1.1}$$

в котором число $\varepsilon$ играет роль параметра, а решения уравнения исследуются при малых значениях $\varepsilon \neq 0$. Заметим, что при $\varepsilon = 0$ это уравнение имеет тривиальное решение $x = 0$.

Легко видеть, что при такой постановке задачи отображение $\varepsilon f$ является сжатием шара, если только $\varepsilon$ достаточно мало, и, соответственно, наше уравнение имеет единственное решение $x(\varepsilon)$.

Однако уравнение (1.1) обладает еще одним важным свойством. Допустим, для простоты, что $X = \mathbb{C}^m$ и отображение $f$ голоморфно в шаре $B_R(0)$. Тогда, рассуждая аналогично, мы можем заключить, что функция $x(\varepsilon)$ голоморфна по $\varepsilon$ в нуле. Более того, если мы станем искать ее в виде ряда

$$x(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \varepsilon^k, \tag{1.2}$$

то, подставляя этот ряд в уравнение (1.1), мы получим рекуррентные уравнения на коэффициенты Тейлора функции $x(\varepsilon)$, которые позволят последовательно, один за другим, найти все $x_k$. Другими словами, мы не просто имеем "чистую" теорему существования для уравнения (1.1), но можем еще выписать формулу, которая будет приближать наше решение с любой наперед заданной точностью при малых $\varepsilon$:

$$x(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n} x_k \varepsilon^k + O(\varepsilon^{n+1}). \tag{1.3}$$

Этот ряд называется рядом теории возмущений.

Вернемся к случаю произвольного банахова пространства $X$ и откажемся от предположения о липшицевости $f$. Но будем, однако, считать, что если функция $x(\varepsilon)$ голоморфна в нуле по $\varepsilon$, то и функция $f(x(\varepsilon))$ тоже голоморфна в нуле по $\varepsilon$.

Имеется две возможности. Первая возможность: решение уравнения

(1.1) существует и представляется сходящимся рядом по $\varepsilon$. И вторая возможность: мы подставили разложение (1.2) в уравнение, нашли все $x_k$, но оказалось, что ряд (1.2) расходится.

В последнем случае говорят, что уравнение (1.1) имеет формальное решение в виде степенного ряда. Именно этот случай весьма распространен в задачах физики. В типичной ситуации, когда уравнение (1.1) имеет лишь формальное решение, мы по-прежнему можем выразить его в виде формулы, похожей на формулу (1.3), но с одним принципиальным отличием:

$$\tilde{x}(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n} x_k \varepsilon^k + O(n, \varepsilon^{n+1}).$$

Здесь функция $O(n, \varepsilon^{n+1})$ является $O(\varepsilon^{n+1})$ при фиксированном $n$, но при увеличении $n$ эта функция растет и ряд теории возмущений расходится. Сама же функция $\tilde{x}(\varepsilon)$ оказывается так называемым приближенным решением уравнения (1.1):

$$\|\tilde{x}(\varepsilon) - \varepsilon f(\tilde{x}(\varepsilon))\|_X = o(\varepsilon).$$

В приложениях важно уметь как можно более точно оценивать невязку $o(\varepsilon)$. К изучению этой задачи мы и переходим.

Пусть $\{(E_s, \|\cdot\|_s)\}_{0<s\leq 1}$ – шкала нормированных линейных пространств над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$:

$$E_{s+\delta} \subseteq E_s, \quad \|\cdot\|_s \leq \|\cdot\|_{s+\delta}, \quad 0 < \delta \leq 1 - s.$$

Через

$$B_s(R) = \{x \in E_s \mid \|x\|_s \leq R\}$$

обозначим шар пространства $E_s$ с центром в нуле. Отметим очевидное включение: $B_{s+\delta}(R) \subseteq B_s(R)$.

Будем считать, что параметр $\varepsilon$ принадлежит интервалу $\mathcal{E}_\rho = \{\varepsilon \in \mathbb{R} \mid 0 < \varepsilon < \rho\}$.

Рассмотрим отображение

$$P(\cdot, \varepsilon) : E_{s+\delta} \to E_s, \quad \varepsilon \in \mathcal{E}_\rho, \tag{1.4}$$

которое при любых $\varepsilon \in \mathcal{E}_\rho$ и $x', x'' \in B_{s+\delta}(R)$ удовлетворяет неравенствам:

$$\begin{aligned} \|P(0,\varepsilon)\|_s &\leq L, \quad s < 1, && (1.5)\\ \|P(x',\varepsilon) - P(x'',\varepsilon)\|_s &\leq \frac{M}{\delta^p}\|x' - x''\|_{s+\delta}, \quad p > 0. && (1.6) \end{aligned}$$

В этих формулах константы $M, L$ и $p$ не зависят от $s$ и $\varepsilon$.

Уравнение

$$x = \varepsilon P(x, \varepsilon), \tag{1.7}$$

вообще говоря, не имеет решений при $\varepsilon > 0$, но справедлива следующая теорема.

**Теорема 7.1** *Найдутся такие положительные постоянные $C_1$, $C_2$, $C_3$, $\varepsilon_0$ (зависящие только от $L, M, p, \rho$), что для любого $\varepsilon \in \mathcal{E}_{\varepsilon_0}$ существует точка $\widehat{x} = \widehat{x}(\varepsilon) \in B_{1/2}(R)$, такая, что*

$$\|\widehat{x} - \varepsilon P(\widehat{x}, \varepsilon)\|_{1/2 - C_1\varepsilon^{1/p}} \leq C_2 \exp\left(-\frac{C_3}{\varepsilon^{1/p}}\right). \tag{1.8}$$

То есть уравнение (1.7) имеет "приближенное решение" в описанном выше смысле, и невязка, которую дает это приближенное решение, меньше любой степени $\varepsilon$.

Отметим также, что теорема 7.1 носит чисто алгебраический характер: пространства $E_s$ не наделены какой-либо топологией, а при доказательстве самой теоремы не делается ни одного предельного перехода.

**Замечание 7.1** *Теорема 7.1 остается справедливой, если мы будем считать, что* $\delta \in [(2M\varepsilon)^{\frac{1}{p}}, 2(2M\varepsilon)^{\frac{1}{p}}]$ *в (1.4) и (1.6).*

## 1.1 Доказательство теоремы 7.1

Подставим $x' = x, \quad x'' = 0$ в (1.6), и, используя оценку (1.5), найдем

$$\|P(x,\varepsilon)\|_s \le \frac{M}{\delta^p}\|x\|_{s+\delta} + L. \tag{1.9}$$

Последнее неравенство выполняется для всех $x \in B_{s+\delta}(R)$ и $\varepsilon \in \mathcal{E}_\rho$.

Введем обозначение $\gamma = 2^p \cdot M$.

**Лемма 7.1** *Для достаточно малых положительных* $\varepsilon$ *существует число* $\alpha_\varepsilon$ *такое, что*

$$\frac{1}{2(2\gamma)^{1/p}} \le \alpha_\varepsilon \le \frac{1}{(2\gamma)^{1/p}}, \tag{1.10}$$

*и* $n = \alpha_\varepsilon/\varepsilon^{1/p} \in \mathbb{N}$.

Действительно, утверждение леммы мгновенно следует из того, что для любого, достаточно малого, $\varepsilon$ длина интервала

$$\left[\frac{1}{2(2\gamma\varepsilon)^{1/p}}, \frac{1}{(2\gamma\varepsilon)^{1/p}}\right]$$

больше 1.

До конца доказательства теоремы мы будем считать, что число $n$ определено леммой 7.1. В формулах (1.6), (1.9) $\delta$ берется равным $1/(2n)$. Поэтому замечание 7.1 следует из оценки (1.10).

Рассмотрим последовательность $\{x_k\}$:

$$x_0 = 0, \quad x_{k+1} = \varepsilon P(x_k, \varepsilon), \quad k = 0, \ldots, n-1. \tag{1.11}$$

Эта последовательность такая же, как и в методе последовательных приближений, на котором основан принцип сжатых отображений, но у нас она состоит из конечного числа элементов, и число это увеличивается с уменьшением $\varepsilon$.

Суть доказательства очень простая. Если мы возьмем слишком мало элементов этой последовательности, то не получим достаточной точности приближения к "приближенному решению". Если мы возьмем слишком много членов этой последовательности, то невязка "почувствует", что метод последовательных приближений расходится, ведь уравнение (1.7) не обязано иметь решения.

**Лемма 7.2** *Для достаточно малых положительных* $\varepsilon$ *и* $k = 1, \ldots, n$ *имеет место следующее включение:*

$$x_k \in B_{1-\frac{k}{2n}}(R).$$

*Доказательство.* Мы покажем, что утверждение леммы справедливо при $\varepsilon \leq R/(2L)$.

Проверим, что $x_1 \in B_{1-\frac{1}{2n}}(R)$. Действительно, по формуле (1.5) имеем

$$\|x_1\|_{1-\frac{1}{2n}} = \varepsilon \|P(0, \varepsilon)\|_{1-\frac{1}{2n}} \leq \varepsilon L \leq R.$$

Теперь нам надо показать, что если $x_j \in B_{1-\frac{j}{2n}}(R)$, то

$$x_{j+1} \in B_{1-\frac{j+1}{2n}}(R), \quad \text{где} \quad j = 1, \ldots, n-1.$$

Используя формулу (1.9) и лемму 7.1, выполним оценки:

$$\|x_{j+1}\|_{1-\frac{j+1}{2n}} = \varepsilon \|P(x_j, \varepsilon)\|_{1-\frac{j+1}{2n}} \leq$$
$$\leq \varepsilon(\gamma n^p \|x_j\|_{1-\frac{j}{2n}} + L) \leq \frac{R}{2} + \varepsilon L \leq R.$$

Лемма доказана.

**Лемма 7.3** *Для достаточно малых положительных $\varepsilon$ справедливо неравенство*

$$\|x_k - \varepsilon P(x_k,\varepsilon)\|_{1-\frac{k+1}{2n}} \le L\varepsilon(\varepsilon\gamma n^p)^k, \quad k = 1,\ldots,n. \tag{1.12}$$

*Доказательство.* По формуле (1.6) найдем

$$\|x_1 - \varepsilon P(x_1,\varepsilon)\|_{1-\frac{1}{n}} = \|\varepsilon P(0,\varepsilon) - \varepsilon P(\varepsilon P(0,\varepsilon),\varepsilon)\|_{1-\frac{1}{n}} \le \varepsilon^2\gamma n^p L.$$

Предположим, что (1.12) выполнено для $k = j$, $j = 1,\ldots,n-1$. Используя лемму 7.2, покажем, что оно выполнено и для $k = j+1$. Действительно,

$$\begin{aligned}
&\|x_{j+1} - \varepsilon P(x_{j+1},\varepsilon)\|_{1-\frac{j+2}{2n}} = \\
&= \|\varepsilon P(x_j,\varepsilon) - \varepsilon P(\varepsilon P(x_j,\varepsilon),\varepsilon)\|_{1-\frac{j+2}{2n}} \le \\
&\le \varepsilon\gamma n^p\|x_j - \varepsilon P(x_j,\varepsilon)\|_{1-\frac{j+1}{2n}} \le L\varepsilon(\varepsilon\gamma n^p)^{j+1}.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Теперь подставим $k = n$ в (1.12). С помощью леммы 7.1 оценим правую часть этой формулы:

$$L\varepsilon(\varepsilon\gamma n^p)^n \le L\varepsilon\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha_\varepsilon/\varepsilon^{1/p}} \le L\varepsilon\exp\left(-\frac{\log 2}{2(2\gamma)^{1/p}\varepsilon^{1/p}}\right).$$

Для завершения доказательства теоремы остается положить $\widehat{x} = x_n$.

Теорема 7.1 доказана.

## 1.2 Теорема Нейштадта

В качестве приложения теоремы 7.1 мы рассмотрим задачу об усреднении быстрой фазы. Эта задача принадлежит к теории возмущений обыкновенных дифференциальных уравнений.

Введем обозначения для функций, зависящих от аргумента $t$. Положим
$$< f(\cdot) >= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt, \quad [f](t) = f(t)- < f(\cdot) > .$$
Пусть $M$ – $m$-мерное вещественно-аналитическое многообразие, и

$$M_s = \{x + iy \mid x \in M, \quad |y| < s\}$$

– его комплексная окрестность. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \varepsilon f(t, x, \varepsilon). \tag{1.13}$$

Отображение $f$ является гладким и $2\pi$-периодическим по первому аргументу, аналитическим в $M_S$, $\quad S > 0$ по второму аргументу и гладким по третьему аргументу на интервале $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$. С помощью стандартной схемы теории возмущений [10] можно подобрать близкую к тождественной, $2\pi$-периодическую по времени замену переменных на многообразии $M$ такую, что члены, содержащие время в правой части системы (1.13), будут иметь порядок малости $\varepsilon^k$ с любым натуральным $k$. Оказывается, и это связано с аналитичностью нашей задачи, надлежащей заменой переменных зависимость от времени можно очень сильно ослабить и сделать ее экспоненциально малой по параметру возмущения $\varepsilon$. Это наблюдение принадлежит А. И. Нейштадту [49].

**Теорема 7.2 (А. И. Нейштадт)** *На многообразии $M$ существует замена координат*

$$x = y + \varepsilon\Big(\int_0^t [f](s, y, 0)\,ds + u(t, y, \varepsilon)\Big),$$

*в которой функция $u$ – гладкая и $2\pi$-периодическая по первому аргументу, аналитическая в $M_{s'}$, $\quad 0 < s' \leq S$ по второму аргументу и гладкая по третьему аргументу на интервале $(-\varepsilon', \varepsilon')$, $\quad 0 < \varepsilon' \leq \varepsilon_0$.*

*В координатах $(y)$ система (1.13) имеет вид*

$$\dot{y} = \varepsilon(< f(\cdot, y, 0) > +\varepsilon a(y, \varepsilon) + b(t, y, \varepsilon)),$$

*функция $a$ – аналитическая в $M_{s'}$, $\quad 0 < s' \leq S$, по первому аргументу и гладкая по второму аргументу на интервале $(-\varepsilon', \varepsilon')$, $\quad 0 < \varepsilon' \leq \varepsilon_0$.*

*Функция $b$ – гладкая и $2\pi$-периодическая по первому аргументу, аналитическая в $M_{s'}$, $\quad 0 < s' \leq S$ по второму аргументу и гладкая по третьему аргументу на интервале $(-\varepsilon', \varepsilon')$, $\quad 0 < \varepsilon' \leq \varepsilon_0$, более того, для всех $(t, x, \varepsilon) \in \mathbb{R} \times M_{s'} \times (-\varepsilon', \varepsilon')$ справедливо неравенство*

$$|b(t, x, \varepsilon)| \leq c_1 e^{-\frac{c_2}{|\varepsilon|}},$$

*где $c_1, c_2$ – положительные постоянные.*

Схема доказательства этой теоремы приведена в разделе 7.4.

## 2 Теорема о неявной функции

В этом разделе, следуя [12], мы докажем теорему о неявной функции в шкале банаховых пространств.

Введем три шкалы банаховых пространств:

$$\{X_\sigma\}, \quad \{Y_\sigma\}, \quad \{Z_\sigma\}, \quad 0 \leq \sigma \leq 1.$$

Нормы во всех шкалах обозначим одним и тем же символом – $\|\cdot\|_\sigma$. Для $0 \leq \sigma' \leq \sigma \leq 1$ имеют место вложения

$$X_1 \subseteq X_\sigma \subseteq X_{\sigma'} \subseteq X_0$$

и $\|\cdot\|_{\sigma'} \le \|\cdot\|_\sigma$. То же справедливо и для шкал $\{Y_\sigma\}, \quad \{Z_\sigma\}$.

Пусть $F$ – отображение с областью определения в $X_0 \times Y_0$ и значениями в $Z_0$ такое, что

$$F(f_0, u_0) = 0,$$

где $(f_0, u_0) \in X_1 \times Y_1$. Чтобы задать область определения отображения $F$, введем в рассмотрение открытые шары:

$$B_\sigma = \{(f, u) \in X_\sigma \times Y_\sigma \mid \|f - f_0\|_\sigma < N, \quad \|u - u_0\|_\sigma < R\},$$

где $N > 0, \quad 0 < R \le 1$ – некоторые фиксированные константы. Предположим, что $F$ определено для $(f, u) \in B_0$ и $F(B_\sigma) \subseteq Z_\sigma$ для всех $0 \le \sigma \le 1$, причем отображение

$$F : B_\sigma \to Z_\sigma$$

непрерывно для каждого $0 \le \sigma \le 1$. Наша задача состоит в том, чтобы при каждой паре $(f, u) \in B_\sigma, \quad \sigma > 0$ разрешить уравнение $F(f, v) = 0$ относительно $v$ для $v$, достаточно близких к $u$ в некотором большем пространстве $Y_{\sigma'}, \quad \sigma' < \sigma$, – в предположении, что норма $\|F(f, u)\|_\sigma$ достаточно мала. Рассмотрим три условия, в которых

$$M \ge 1, \quad \gamma > 0, \quad \alpha \ge 0$$

– некоторые фиксированные константы.

(H1) Оценка Тейлора.

Для каждого $\sigma, \quad 0 < \sigma \le 1$, и каждого $f \in X_\sigma \cap B_\sigma$ отображение $F(f, \cdot) : Y_\sigma \cap B_\sigma \to Z_{\sigma'}, \quad \sigma' < \sigma$, дифференцируемо по Фреше. Обозначим его производную в точке $(f, u) \in B_\sigma$ через $dF(f, u)$.

Для $(f, u), (f, v) \in B_\sigma$ величина

$$Q(f; u, v) \equiv F(f, u) - F(f, v) - dF(f, v)(u - v)$$

удовлетворяет оценке

$$\|Q(f;u,v)\|_{\sigma'} \leq \frac{M}{(\sigma-\sigma')^{2\alpha}}\|u-v\|_\sigma^2 \quad \text{для всех} \quad \sigma' < \sigma.$$

(H2) Равномерное условие Липшица по первому аргументу.

Для каждого $\sigma$, $\quad 0 < \sigma \leq 1$, при любых $(f,u)$, $\quad (g,u) \in B_\sigma$

$$\|F(f,u) - F(g,u)\|_\sigma \leq M\|f-g\|_\sigma.$$

(H3) Приближенное правое обратное отображение с показателем потери $\gamma$.

Для каждого $\sigma$, $\quad 0 < \sigma \leq 1$, и каждой точки $(f,u) \in B_\sigma$ существует при всех $\sigma' < \sigma$ такое линейное отображение $\eta(f,u) \in L(Z_\sigma, Y_{\sigma'})$, что для всех $z \in Z_\sigma$

$$\|\eta(f,u)(z)\|_{\sigma'} \leq \frac{M}{(\sigma-\sigma')^\gamma}\|z\|_\sigma$$

и

$$\|(dF(f,u)\circ\eta(f,u) - 1)(z)\|_{\sigma'} \leq \frac{M}{(\sigma-\sigma')^{2(\alpha+\gamma)}}\|F(f,u)\|_\sigma\|z\|_\sigma.$$

**Теорема 7.3 (Нэш, Мозер)** *Пусть отображение $F$ удовлетворяет условиям (H1) и (H3). Тогда существует такая константа $C > 0$, зависящая от $M, \alpha$ и $\gamma$, что если точка $(f,u) \in B_\sigma$ при некотором $\sigma > 0$ удовлетворяет условиям $\|u-u_0\|_\sigma \leq r \leq R$ и*

$$\|F(f,u)\|_\sigma \leq C(R-r)\sigma^q$$

*для некоторого $q \geq 2(\alpha+\gamma)$, то существует точка $u_f \in Y_{\sigma/2} \cap B_{\sigma/2}$, для которой*

$$F(f,u_f) = 0,$$

*и*

$$\|u_f - u\|_{\sigma/2} \leq C^{-1}\|F(f,u)\|_\sigma \sigma^{-\gamma}.$$

## 2.1 Доказательство теоремы 7.3

Мы воспользуемся итерационным методом Ньютона, но при этом будем применять приближенное правое обратное $\eta(f,u)$ из условия (H3) вместо точного обратного к $dF(f,u)$, которого может и не существовать. Определим по индукции последовательность $(u_n)$, $\quad n \geq 0$, которая сходится в $Y_{\sigma/2}$ к некоторому решению уравнения $F(f,u) = 0$. Начнем с $u_0 = u$ (где $u$ – то самое, которое фигурирует в формулировке теоремы) и положим при $n = 0, 1, \dots$

$$u_{n+1} = u_n - \eta(f, u_n) F(f, u_n). \tag{2.1}$$

Чтобы ниже выполнить шаг индукции, введем заранее последовательность малых чисел $(\varepsilon_n)$, $\quad n \geq 0$, следующим образом:

$$\varepsilon_{n+1} = a b^n \varepsilon_n^{\varkappa}, \quad 1 < \varkappa \leq 2, \tag{2.2}$$

где $a = M^3 2^{6(\alpha+\gamma)+2}$, а $b = 2^{2(\alpha+\gamma)}$. Если $\varepsilon_0$ достаточно мало, эта последовательность экспоненциально сходится к нулю. Действительно, если положить $\delta_n = a^{(\varkappa-1)^{-1}} b^{n(\varkappa-1)^{-1}+(\varkappa-1)^{-2}} \varepsilon_n$, то $\delta_{n+1} = \delta_n^{\varkappa}$, так что $\delta_n = \delta_0^{\varkappa^n}$, и мы имеем

$$\varepsilon_n = a^{-(\varkappa-1)^{-1}} b^{-n(\varkappa-1)^{-1}-(\varkappa-1)^{-2}} \delta_0^{\varkappa^n};$$

в доказательстве значение $\varepsilon_0$ будет выбрано достаточно малым. Мы воспользуемся также следующей оценкой:

$$\varepsilon_n^2 \leq a b^n \varepsilon_n^2 \leq \varepsilon_{n+1} < 1. \tag{2.3}$$

Для того чтобы помечать наши пространства, введем для $\sigma > 0$ последовательности $(\sigma_n)_{n\geq 0}$ и $(\tau_n)_{n\geq 1}$ формулами $\sigma_n = \sigma(1+2^{-n})/2$ и $\tau_{n+1} = (\sigma_{n+1} + \sigma_n)/2$, $\quad n = 0, 1, \dots$. Заметим, что $\sigma_0 = \sigma$, $\quad \lim \sigma_n = \sigma/2 \quad$ и $\sigma_{n+1} < \tau_{n+1} < \sigma_n$.

Выберем $q \geq 2(\alpha+\gamma)$. Мы докажем теперь, что существует такая константа $C > 0$, что если

$$\|F(f,u)\|_\sigma \leq \nu(R-r)\sigma^q C$$

для некоторого $0 \leq \nu \leq 1$, то при всяком $n \geq 0$ справедлива следующая тройка $S(n)$ утверждений относительно последовательности $(u_n)_{n\geq 0}$, индуктивно заданной формулой (2.1):

$S(n1)$ $(f,u_n) \in \mathrm{B}_{\sigma_n}$, $\quad \|F(f,u_n)\|_{\sigma_n} \leq \nu(R-r)\sigma^q\varepsilon_n^4$,

$S(n2)$ $(f,u_{n+1}) \in \mathrm{B}_{\tau_{n+1}}$, $\quad \|u_{n+1}-u_n\|_{\tau_{n+1}} \leq \nu(R-r)\sigma^{q-\gamma}\varepsilon_n^3$,

$S(n3)$ $\|u_{n+1}-u\|_{\tau_{n+1}} \leq (R-r)(1-\varepsilon_n)$.

Параметр $\nu$ введен по следующей причине: если $\|F(f,u)\|_\sigma \leq (R-r)C\sigma^q$, то существует такое $0 < \nu \leq 1$, что $\|F(f,u)\|_\sigma = \nu(R-r)C\sigma^q$; это равенство позволит нам оценить решение через $\|F(f,u)\|_\sigma$. Из $S(n1)$ видно, что $F(f,u_n) \to 0$ в $Z_{\sigma/2}$ при $n \to \infty$. В силу $S(n2)$ последовательность $(u_n)_{n\leq 0}$ является последовательностью Коши в пространстве $Y_{\sigma/2}$. Положив $u_f = \lim u_n$, в силу непрерывности $F$, имеем $F(f,u_f) = 0$. Утверждение $S(n3)$ гарантирует нам, что мы остаемся в области определения отображения $F$ и можем продолжить индукцию, то есть

$$\|u_{n+1}-u_0\|_{\tau_{n+1}} \leq \|u_{n+1}-u\|_{\tau_{n+1}} + \|u-u_0\|_{\tau_{n+1}} \leq$$
$$\leq (R-r)(1-\varepsilon_n) + r < R.$$

Утверждения S(n) доказываются по индукции. Утверждения $S(0)$ следуют из условия малости $\|F(f,u)\|_\sigma$, а именно из того, что $\|F(f,u)\|_\sigma \leq \nu(R-r)C\sigma^q$, если $C \leq \varepsilon_0^4$. Здесь используются те же оценки, что и ниже – на очередном шаге индукции. Предположим теперь, что утверждения справедливы для $1 \leq j \leq n$, и докажем утверждения $S(n+1)$. Мы знаем, что $(f,u_n), (f,u_{n+1}) \in B_{\tau_{n+1}} \subset B_{\sigma_{n+1}}$. Используя определение (2.1) приближения $u_{n+1}$, мы можем записать

$$F(f,u_{n+1}) = -(dF(f,u_n)\circ\eta(f,u_n)-1)(F(f,u_n)) + Q(f,u_{n+1},u_n). \quad (2.4)$$

В силу условий (H3) и (H1) мы получаем следующую оценку (в которой опущена зависимость от $f$):

$$\|F(u_{n+1})\|_{\sigma_{n+1}} \le \tfrac{M}{(\sigma_n-\sigma_{n+1})^{2(\alpha+\gamma)}}\|F(u_n)\|^2_{\sigma_n} +$$
$$+\tfrac{M}{(\tau_{n+1}-\sigma_{n+1})^{2\alpha}}\|\eta(u_n)(F(u_n))\|^2_{\tau_{n+1}} \le$$
$$\le (\tfrac{M}{(\sigma_n-\sigma_{n+1})^{2(\alpha+\gamma)}} + \tfrac{M^3}{(\tau_{n+1}-\sigma_{n+1})^{2\alpha}(\sigma_n-\tau_{n+1})^{2\gamma}})\|F(u_n)\|^2_{\sigma_n}.$$

Подставляя сюда выражения для $\sigma_n$, $\tau_n$ из определения этих последовательностей, мы находим, что

$$\|F(u_{n+1})\|_{\sigma_{n+1}} \le \sigma^{-2(\alpha+\gamma)}ab^n\nu^2(R-r)\sigma^{2q}\varepsilon_n^8.$$

Поскольку $R,\nu,\sigma \le 1$ и $q \ge 2(\alpha+\gamma)$, это выражение можно оценить так: $\nu(R-r)\sigma^q ab^n\varepsilon_n^8 \le \nu(R-r)\sigma^q\varepsilon_{n+1}^4$; здесь мы воспользовались неравенствами (2.3). Таким образом, утверждения $S(n+1,1)$ доказаны.

Введя обозначение $u_{n+2}-u_{n+1} \equiv v_{n+1}$, мы с учетом формулы (2.1) и условия (H3) получаем оценку

$$\|v_{n+1}\|_{\tau_{n+2}} \le \frac{M}{(\sigma_{n+1}-\tau_{n+2})^\gamma}\|F(u_{n+1})\|_{\sigma_{n+1}}.$$

Используя утверждение $S(n+1,1)$ и формулу (2.2), находим, что

$$\|v_{n+1}\|_{\tau_{n+2}} \le \nu(R-r)\sigma^{q-\gamma}ab^n\varepsilon_{n+1}^4\nu(R-r)\sigma^{q-\gamma}\varepsilon_{n+1}^3.$$

Этим доказано утверждение $S(n+1,2)$. Тот факт, что элемент $(f,u_{n+2})$ лежит в $B_{\tau_{n+2}}$, легко следует из оценки

$$\|u_{n+2}-u\|_{\tau_{n+2}} \le \|u_{n+1}-u\|_{\tau_{n+1}} + \|v_{n+1}\|_{\tau_{n+2}} \le$$
$$\le (R+r)(1-\varepsilon_n+\varepsilon_{n+1}^3) < (R-r)(1-\varepsilon_{n+1}),$$

справедливой, если $\varepsilon_0$ достаточно мало; здесь использовано утверждение $S(n3)$.

Чтобы доказать вторую оценку нашей теоремы, заметим, что из утверждения $S(n2)$ вытекает, что для всех $n \geq 1$

$$\|u_n - u\|_{\sigma/2} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|v_n\|_{\sigma/2} \leq \nu(R-r)\sigma^{q-\gamma} \sum_{n\geq 0} \varepsilon_n^3.$$

Последнюю величину можно оценить величиной $\nu(R-r)\sigma^{q-\gamma}$, выбрав $\varepsilon_0$ настолько малым, чтобы $\sum\limits_{n\geq 0} \varepsilon_n^3 < 1$. Поэтому $\|u_f - u\|_{\sigma/2} \leq \nu(R-r)\sigma^{q-\gamma}$. Наконец, возьмем $\mathrm{C} = \varepsilon_0^4$. Если теперь $\|F(f,u)\|_\sigma < (R-r)C\sigma^q$, то положим $\nu = \|F(f,u)\|_\sigma \times C^{-1}(R-r)^{-1}\sigma^{-q}$ и найдем, что $\|u_f - u\|_{\sigma/2} \leq C^{-1}\|F(f,u)\|_\sigma \sigma^{-\gamma}$.

Теорема доказана.

Главное отличие теоремы Нэша – Мозера от стандартных теорем о неявной функции состоит в том, что в ее основе лежит не метод последовательных приближений, а метод Ньютона. Итерационная процедура Ньютона сходится быстрее процедуры последовательных приближений и позволяет подавить малые знаменатели $\sigma - \sigma'$, которые стоят в формулах условий $H1 - H3$.

К уравнению в шкале банаховых пространств метод Ньютона впервые был применен Колмогоровым [5] при доказательстве теоремы о сохранении инвариантных торов с диофантовым набором частот в гамильтоновой системе, близкой к интегрируемой. Данная работа является одной из центральных в теории динамических систем. Подробное обсуждение этого круга вопросов содержится в [17].

## 2.2 Лемма Картана

Характерные особенности сходимости метода Ньютона иллюстрирует следующая модельная лемма, принадлежащая Картану [29]. Статья [29] является одной из первых работ, основанных на применении ньютоновских приближений в анализе.

Пусть, как и выше, $X_s, \|\cdot\|_s, \quad 0 < s \le 1$ – шкала банаховых пространств:

$$X_{s+\delta} \subseteq X_s, \quad \|\cdot\|_s \le \|\cdot\|_{s+\delta}, \quad \delta > 0.$$

Рассмотрим отображение $f : X_s \to X_{s+\delta}$. Предположим, что найдутся такие положительные константы $C, R$ и $\gamma$, что для любого элемента

$$u \in X_s, \quad \|u\|_s \le R,$$

справедлива оценка

$$\|f(u)\|_s \le \frac{C}{\delta^\gamma}\|u\|^2_{s+\delta}. \tag{2.5}$$

**Теорема 7.4 (Лемма Картана)** *Зафиксируем элемент $g \in E_1$. Если число $\|g\|_1$ достаточно мало, то ряд*

$$\sum_{i=1}^{\infty} f^i(g) \tag{2.6}$$

*сходится в $E_s$ при некотором $s > 0$.*

Докажем эту теорему.

Из формулы (2.5) по индукции находим

$$\|f^{k+1}(g)\|_s \le \frac{C^{2^{k+1}-1}}{\prod_{j=0}^{k}\delta_{k-j+1}^{\gamma 2^j}}\|g\|^{2^{k+1}}_{s+\sum_{j=1}^{k+1}\delta_j}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.7}$$

Для того чтобы эта оценка имела смысл при любых натуральных $k$, должен сходиться ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \delta_j$. С другой стороны, знаменатели в правой части формулы (2.7) не должны уменьшаться слишком быстро с ростом $k$, иначе мы не сможем доказать сходимость ряда (2.6).

Исходя из этого, положим $\delta_j = \delta j^{-3/2}, \quad j \in \mathbb{N}$, число $\delta > 0$ выберем так, чтобы $s = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j > 0$. Теперь формула (2.7) приобретает вид

$$\|f^{k+1}(g)\|_s \leq C_1^{2^{k+1}} \|g\|_1^{2^{k+1}}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{2.8}$$

где $C_1$ положительная константа. Что и доказывает теорему.

## 3 Теорема Браудера о неподвижной точке

В этой главе мы докажем теорему Браудера [28] о существовании неподвижной точки у непрерывного отображения. Эта теорема обобщает теорему Шаудера в двух направлениях. Во-первых, в теореме Браудера рассматриваются не банаховы пространства, а локально выпуклые. Во-вторых, на область значений отображения накладываются куда менее ограничительные условия. В теореме Браудера не требуется, чтобы отображение переводило выпуклый компакт, на котором оно определено, в себя.

Через $E$ обозначим локально выпуклое линейное топологическое пространство.

**Определение 7.1** *Рассмотрим замкнутое подмножество $C$ пространства $E$. Точка $x \in C$ по определению считается принадлежащей множеству $\delta(C)$, если $x \in F \bigcap C$ для любого конечномерного пространства $F \subseteq E$.*

**Теорема 7.5** *Обозначим через $K$ выпуклое компактное подмножество локально выпуклого линейного топологического пространства $E$, и пусть $f : K \to E$ – непрерывное отображение.*

*Предположим, что для каждого $u \in \delta(K)$ найдутся элемент $v \in K$ и число $\lambda > 0$ такие, что*

$$f(u) - u = \lambda(v - u). \tag{3.1}$$

*Тогда отображение $f$ имеет неподвижную точку в $K$.*

**Теорема 7.6** *Пусть, как и в предыдущей теореме, $E$ – локально выпуклое линейное топологическое пространство, $K$ – выпуклое компактное подмножество $E$, $f$ – непрерывное отображение из $K$ в $E$. Предположим, что для каждого $u \in \delta(K)$ найдутся элемент $v \in K$ и число $\lambda < 0$ такие, что*

$$f(u) - u = \lambda(v - u). \tag{3.2}$$

*Тогда отображение $f$ имеет неподвижную точку в $K$.*

**Следствие 7.1 (Теорема Шаудера – Тихонова)** *Пусть $E$ – локально выпуклое линейное топологическое пространство, и $K$ – его выпуклое компактное подмножество. Тогда всякое непрерывное отображение $f : K \to K$ имеет неподвижную точку.*

Действительно, для доказательства этого утверждения достаточно положить в теореме 7.5 $\lambda = 1$ и $v = f(u)$.

**Теорема 7.7** *Пусть $E$ – локально выпуклое линейное топологическое пространство, $K$ – выпуклое компактное подмножество $E$, $T$ – непре-*

*рывное отображение из $K$ в $E^*$. Тогда найдется элемент $u_0 \in K$ такой, что для любого $u \in K$*

$$(T(u_0), u - u_0) \geq 0 \tag{3.3}$$

Нам понадобится следующее следствие теоремы 7.7.

**Теорема 7.8** *Пусть $E$ – локально выпуклое линейное топологическое пространство, $K$ – выпуклое компактное подмножество $E$, $f$ – непрерывное отображение из $K$ в $E$. Обозначим через $R$ непрерывное отображение из множества $(I - f)(K)$ в $E^*$ (где $I$ – тождественное отображение). Тогда найдется элемент $u_0 \in K$ такой, что*

$$(R(u_0 - f(u_0)), u - u_0) \geq 0 \tag{3.4}$$

*для любого $u \in K$.*

Начнем доказательство теоремы 7.7 со следующей простой леммы.

**Лемма 7.4** *Пусть $E$ – локально выпуклое линейное топологическое пространство, $K$ – компактное подмножество $E$, $T$ – непрерывное отображение из $K$ в $E^*$, $y$ – произвольный элемент $E$. Тогда функция*

$$g_y(x) = (T(x), y - x) \tag{3.5}$$

*является непрерывным отображением из $K$ в множество действительных чисел.*

*Доказательство.* Поскольку множество $K$ компактно, оно ограничено в $E$. Предположим, что $x_1$ – произвольный элемент $K$ и задано произвольное $\varepsilon > 0$. В силу непрерывности отображения $T$ мы можем выбрать окрестность $V$ элемента $x_1$ в $E$ такую, что для всех $x \in K \cap V$ и любой пары элементов $y$ и $z$ из $K$ имеем

$$|(T(x) - T(x_1), y - z)| < \varepsilon/2.$$

Более того, мы можем найти окрестность $V_1$ элемента $x_1$ в $E$ такую, что для всех $x$ из $V_1$ справедливо неравенство

$$|(T(x_1), x - x_1)| < \varepsilon/2.$$

Следовательно, для $x \in K \cap V \cap V_1$ получим

$$|(T(x), y - x) - (T(x_1), y - x_1)| \leq$$
$$\leq |(T(x_1), x_1 - x)| + |(T(x) - T(x_1), y - x)| < \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 7.7.

Предположим, что утверждение теоремы ложно. Тогда для каждого $u_0 \in K$ найдется по крайней мере один $y \in K$ такой, что

$$(T(u_0), y - u_0) < 0. \tag{3.6}$$

Для каждого фиксированного $y \in K$ определим подмножество $N_y \subset K$ следующим образом:

$$N_y = \{x \mid x \in K, (T(x), y - x) < 0\}. \tag{3.7}$$

Согласно лемме 7.4, множество $N_y$ открыто в $K$ для всех $y \in K$, и, соответственно, семейство подмножеств $\{N_y \mid y \in K\}$ является открытым покрытием множества $K$, и из него можно выделить конечное подпокрытие $\{N_{y_j}\}, \quad j = 1, \ldots, n$, такое, что $K = \bigcup_{j=1}^{n} N_{y_j}$.

Рассмотрим разложение единицы $\{\beta_1, \dots, \beta_n\} \subset C(K)$, подчиненное покрытию $\{N_{y_j}\}$: $\beta_j(x) = 0$ при $x \neq N_{y_j}$, и

$$\beta_j(x) \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{n} \beta_j(x) = 1.$$

Используя это разложение единицы, мы построим отображение $p : K \to E$ следующим образом:

$$p(x) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j(x) y_j.$$

Отображение $p$ непрерывно и переводит выпуклую оболочку точек $\{y_1, \dots, y_n\}$ в себя. Следовательно, по теореме Брауэра, найдется элемент $u_0 \in K$ такой, что $p(u_0) = u_0$. Рассмотрим функцию

$$q(x) = (T(x), x - p(x)), \quad x \in K.$$

По определению $p$ имеем

$$q(x) = (T(x), x - p(x)) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j(x)(T(x), x - y_j).$$

В правой части этой формулы для каждого $x \in K$ найдется слагаемое, для которого $\beta_j(x) > 0$, и так как $(T(x), x - y_j) > 0$, то $q(x) > 0$ для всех $x \in K$. Но поскольку $u_0 - p(u_0) = 0$, имеем $q(u_0) = 0$.

Полученное противоречие доказывает теорему.

Докажем теорему 7.8. Определим отображение $T : K \to E^*$ следующим образом: $T(u) = R(u - f(u))$. Так как $R$ – непрерывное отображение из $(I - f)(K)$ в $E^*$, то $T$ – непрерывное отображение из $K$ в $E^*$, и утверждение теоремы 7.8 следует из теоремы 7.7.

Для доказательства теорем 7.5 и 7.6 мы построим отображение $R$ и применим к нему теорему 7.8. Нам потребуется следующая лемма.

**Лемма 7.5** *Пусть $K_0$ – компактное подмножество локально выпуклого линейного топологического пространства $E$, не содержащее 0. Тогда существует непрерывное отображение $R : K_0 \to E^*$ такое, что*

$$(R(u), u) > 0, \quad u \in K_0 \tag{3.8}$$

*Доказательство.* Поскольку 0 не является элементом $K_0$, то для каждого $u \in K_0$ найдется хотя бы один $w \in E^*$ такой, что $(w, u) > 0$. Для фиксированного $w \in E^*$ множество

$$U_w = \{u \mid u \in K_0, \quad (w, u) > 0\}$$

является открытым подмножеством $K_0$, и семейство $\{U_w \mid w \in E^*\}$ – открытое покрытие $K_0$. В силу компактности $K_0$ существует конечное подпокрытие, то есть конечное множество $\{w_1, \dots, w_r\} \in E^*$ такое, что $K_0 = \bigcup\limits_{j=1}^{r} U_{w_j}$. Используя это конечное подпокрытие, мы можем найти разложение единицы $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$, где каждая непрерывная скалярная функция $\alpha_j \in K_0$ равна нулю вне соответствующего множества $N_{w_j}, \quad 0 \le \alpha_j(x) \le 1$ для всех $x$ и $j$, причем

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_j(x) = 1, \quad x \in K_0.$$

Определим отображение $R$ следующим образом:

$$R(x) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j(x) w_j.$$

Тогда $R$ является непрерывным отображением из $K_0$ в $E^*$, при этом для всех $u \in K_0$

$$(R(u), u) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(u)(w_j, u) > 0,$$

так как все не равные нулю слагаемые положительны и найдется по крайней мере одно ненулевое слагаемое. Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 7.5.

Предположим, что при выполнении условий теоремы 7.5 $f$ не имеет неподвижной точки в $K$. Тогда $K_0 = (I - f)(K)$ является компактным подмножеством $E$, не содержащим 0, и мы можем применить лемму 7.5, чтобы получить отображение $R : K_0 \to E^*$ такое, что для всех $u$, принадлежащих $K_0$, $\quad (R(u), u) > 0$. В частности, $R(u) \neq 0$ для всех $u \in K_0$.

Применив теорему 7.8 к отображению $R$, находим элемент $x_0 \in K$ такой, что для всех $x \in K$

$$(R(x_0 - f(x_0)), x - x_0) \geq 0. \tag{3.9}$$

Рассмотрим две возможности:

(A) $x_0 \notin \delta(K)$, то есть $x_0$ – внутренняя точка $K$,

(B) $x_0 \in \delta(K)$.

В случае (A), когда $x_0$ является внутренней точкой $K$, для каждого $v \in E$ найдется положительная константа $\xi$ (зависящая от $v$) такая, что $x = x_0 + \xi v$ является точкой $K$. Подставив эту точку в неравенство (3.9), мы найдем, что

$$\xi(R(x_0 - f(x_0)), v) \geq 0.$$

Поскольку по предположению $\xi > 0$, то отсюда следует, что

$$(R(x_0 - f(x_0)), v) \geq 0, \quad v \in E.$$

Следовательно, $R(x_0 - f(x_0)) = 0$, а это противоречит тому, что $R(u) \neq 0$ для $u \in (I - f)(K)$.

В случае (B), если $x_0$ – точка $\delta(K)$, то найдется точка $x_1 \in K$ такая, что для соответствующей константы $\lambda > 0$ имеем

$$f(x_0) - x_0 = \lambda(x_1 - x_0),$$

то есть

$$x_1 - x_0 = -\lambda^{-1}(x_0 - f(x_0)).$$

Подставив $x_1$ в неравенство (3.9), получаем

$$0 \leq (R(x_0 - f(x_0)), x_1 - x_0) = -\lambda^{-1}(R(x_0 - f(x_0)), x_0 - f(x_0)) < 0. \quad (3.10)$$

Итак, оба возможных случая ведут к противоречию с предположением того, что $f$ не имеет неподвижной точки.

Теорема 7.5 доказана.

Докажем теперь теорему 7.6.

В этом случае мы выберем отображение $R_1 = -R$. Используя те же аргументы, что и при доказательстве теоремы 7.5, мы получим противоречие в случае (A).

В случае (B) мы имеем

$$f(x_0) - x_0 = \lambda(x_1 - x_0), \quad \lambda < 0,$$

при этом

$$(R(x_0 - f(x_0)), x_1 - x_0) \leq 0.$$

Следовательно,

$$0 \geq (R(x_0 - f(x_0)), x_1 - x_0) = -\lambda^{-1}(R(x_0 - f(x_0)), x_0 - f(x_0)) > 0.$$

Это противоречие доказывает теорему 7.6.

## 4 Задачи

**Задача 7.1** *Доказать по индукции формулу (2.5).*

План доказательства теоремы 7.2 представим в виде задач.

**Задача 7.2** *Написать уравнение на функцию $u$ и убедиться, что это уравнение имеет вид (1.7).*

**Задача 7.3** *Ввести шкалу банаховых пространств $(E_s, \|\cdot\|_s)$. Пространства $E_s$ состоят из функций, аналитических в $M_s$ и непрерывных на $\overline{M_s}$, и*

$$\|u\|_s = \max_{z \in M_s} |u(z)|.$$

*Применить теорему 7.1 и найти функцию $u$ как приближенное решение уравнения, построенного при решении задачи 7.2.*

**Задача 7.4** *Убедиться, что с найденной функцией $u$ в новых координатах система (1.13) имеет вид, описанный в теореме 7.2.*

Глава 8

# Усреднение квазипериодического потока на торе

## 1 Предварительные замечания

В качестве приложения теоремы 7.3 мы рассмотрим одну модельную задачу КАМ теории.

Прежде чем приводить сам результат, напомним один результат противоположного характера, относящийся к векторному полю на двумерном торе $T$. Для любого гладкого векторного поля $X$ на торе $\mathbb{T}^2$, которое: 1) не имеет особенностей (т.е. $X(x) \neq 0,\ x \in \mathbb{T}^2$), 2) не имеет периодических орбит, – существует гомеоморфизм тора, отображающий поток без параметризации, порожденный полем $X$, в линейный поток, то есть существует такая функция $h \in C^\infty(\mathbb{T}^2),\ h > 0$, что поток $\varphi_s$, порожденный полем $hX$, топологически сопряжен посредством некоего гомеоморфизма $\psi$ линейному потоку:

$$\psi^{-1} \circ \varphi_s \circ \psi : (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + s, x_2 + \rho s), \tag{1.1}$$

где $\rho$ – так называемое число вращения поля $X$, являющееся топологическим инвариантом[1]. Доказательство сводится к применению теоремы Данжуа о гомеоморфизме окружности. Гомеоморфизм $\psi$ определен однозначно с точностью до линейного отображения, и имеет смысл вопрос, является ли он гладким. Можно показать, что существуют такие иррациональные числа $\rho$, что гомеоморфизм $\psi$ даже не абсолютно непрерывен, несмотря на гладкость потока $\varphi_s$.

Обратимся теперь к обещанному результату, отличному от только что описанного. Рассмотрим задачу о возмущении векторного поля на торе $\mathbb{T}^n$, $n \geq 2$, заданного выражением

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) \frac{\partial}{\partial x_k}\,, \tag{1.2}$$

где $\varphi_k$ – периодические функции на $\mathbb{R}^n$ с периодами $2\pi$. Нас интересуют векторные поля, близкие к постоянному полю

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k \frac{\partial}{\partial x_k}\,, \quad \omega \in \mathbb{R}^n. \tag{1.3}$$

Ставится вопрос о структурной устойчивости такого постоянного векторного поля относительно действия группы диффеоморфизмов тора $\mathbb{T}^n$. Иными словами, мы ставим такой вопрос: для заданного векторного поля $\varphi = \omega + f$, где $f$ мало, существует ли диффеоморфизм $g$ тора $\mathbb{T}^n$, $x = g(\xi) = \xi + v(\xi)$, где $v$ – периодическая векторная функция на $\mathbb{R}^n$ с периодом $2\pi$, который переводит $\varphi$ в постоянное векторное поле $\omega$? Последнее означает, что

$$dg(\xi)^{-1} \varphi \circ g(\xi) = \omega. \tag{1.4}$$

[1] Точнее, топологическим инвариантом является не само число $\rho$, а класс чисел, получающихся друг из друга дробно-линейными преобразованиями вида $\rho' = (a + b\rho)/(c + d\rho)$, где $a, b, c, d$ – целые и $ad - bc = \pm 1$.

Ясно, что в общем случае ответ отрицателен по следующей простой причине. Даже постоянное векторное поле $\beta$, близкое к $\omega$, можно перевести в $\omega$, только когда $\beta = \omega$. Действительно, если это возможно сделать, то поток $\xi = \beta t$ можно перевести в поток, порождаемый полем $\omega$, преобразованием $\omega t + const = \beta t + v(\beta t)$, и так как $t > 0$ произвольно, а функция $v$ периодична, то $\omega = \beta$.

Поэтому мы допустим дополнительно возможность изменения данного векторного поля $\varphi$ на постоянный вектор $\lambda \in \mathbb{R}^n$ и поставим видоизмененный и искусственный вопрос: существуют ли для данного поля $\varphi = \omega + f$, где $f$ мало, такой постоянный вектор $\lambda \in \mathbb{R}^n$ и такой диффеоморфизм $g \in \mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n)$, что

$$dg(\xi)^{-1}(\omega + f + \lambda) \circ g(\xi) = \omega. \tag{1.5}$$

Переформулируем задачу в терминах функционалов. Запишем, что $g(\xi) = \xi + v(\xi)$. При заданном $f$ мы ищем решение $u = (v, \lambda)$ уравнения $F(f, u) = 0$, где

$$F(f, u) = f \circ (\mathrm{Id} + v) + \lambda - \partial v; \tag{1.6}$$

здесь $\partial$ – следующий дифференциальный оператор в частных производных с постоянными коэффициентами:

$$\partial = \sum_{k=1}^{n} \omega_k \frac{\partial}{\partial x_k}. \tag{1.7}$$

Напомним некоторые обозначения. Через $E_s$, $\quad 0 < s \leq 1$, обозначим пространство функций голоморфных в комплексной окрестности

$$\mathbb{T}^n_s = \{x + iy \mid x \in \mathbb{T}^n, \quad |\mathrm{Im}\, y| < rs, \quad r > 0\}$$

действительного $n$-мерного тора $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/(2\pi\mathbb{Z})^n$, и непрерывных в замыкании $\overline{\mathbb{T}^n_s}$. Норму в $E_s$ введем следующим образом:

$$\|u\|_s = \sup_{z\in\mathbb{T}^n_s} |u(z)|.$$

Мы будем использовать следующие пространства:

$$X_\sigma = E_{2\sigma}, \quad Y_\sigma = E_\sigma \times \mathbb{R}, \quad Z_\sigma = E_s.$$

Нормы в этих пространствах мы будем обозначать через $|\cdot|_\sigma$, недоразумений это единое обозначение не вызовет.

Отметим, что все функции, которые мы рассматриваем, являются вещественно-аналитическими, т. е. действительные числа они переводят в действительные:

$$\overline{v(z)} = v(\overline{z}).$$

Ясно, что $F(0,0) = 0$.

Чтобы применить какую-либо теорему о неявной функции, мы должны рассмотреть $D_2F(f,u)$ при $(f,u) = (0,0)$. Здесь и далее через $D_i$ мы обозначаем дифференциал по $i$-му аргументу.

Действуя пока формально, имеем

$$D_2F(0,0)\widehat{u} = \widehat{\lambda} - \partial\widehat{v}, \tag{1.8}$$

где $\widehat{u} = (\widehat{v},\widehat{\lambda})$. Хорошо известная лемма о малых знаменателях гласит, что для определенных векторов $\omega \in \mathbb{R}^n$ у оператора (1.8) имеется правый обратный, который, однако, неограничен.

**Лемма 8.1** *Пусть $\omega$ удовлетворяет следующей бесконечной системе неравенств:*

$$|(\omega,k)|^{-1} \le C_0|k|^\tau \tag{1.9}$$

*для всех целочисленных векторов* $k$ *с* $|k| = \sum_{i=1}^{n} |k_i| > 0$, *где* $C_0$ *– некоторая положительная константа, а* $\tau$ *– некоторое число, большее* $n-1$. *Предположим, что функция* $g \in Z_\sigma$ *имеет среднее значение*

$$< g >= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} g\,(x)\, dx = 0.$$

*Тогда для каждого* $\sigma' < \sigma$ *существует единственная функция* $v \in Z_{\sigma'}$ *такая, что* $< v >= 0$, *удовлетворяющая уравнению*

$$\partial v = g\,.$$

*При этом*

$$|v|_{\sigma'} \leq \frac{C}{(\sigma - \sigma')^\nu} |g\,|_\sigma$$

*для всех* $\sigma' < \sigma$ *и* $\nu = \tau + 1 > n$. *Здесь* $C$ *обозначает константу, зависящую только от* $\tau, n$ *и* $C_0$.

*Доказательство.* Мы докажем это утверждение только в случае, когда $\nu = \tau + n$. Оценка, приведенная в формулировке леммы, значительно тоньше и основана на том наблюдении, что на самом деле лишь немногие знаменатели малы. Решение легко найти с помощью разложения в ряд Фурье. Пусть $g\,(x) = \sum_{k \neq 0} g_k e^{i(k,x)}$, тогда решением будет $v(x) = \sum_{k \neq 0} v_k e^{i(k,x)}$, где

$$v_k = \frac{g_k}{i(\omega, k)}. \tag{1.10}$$

Чтобы оценить $v$, воспользуемся тем, что $g \in Z_\sigma$. Это дает для коэффициентов Фурье оценку $|g_k| \leq e^{-|k|\sigma} |g\,|_\sigma$ – ее можно получить, сдвинув поверхность интегрирования в плоскости $|\mathrm{Im} x_\nu| = \pm\sigma$. Поэтому при

$|\mathrm{Im} x| \le \sigma' < \sigma$ решение $v$ можно оценить с учетом неравенств (1.9) так:

$$
\begin{aligned}
|v(x)| &\le \sum_{k\neq 0} \frac{|g_k|}{|(\omega,k)|} e^{|k|\sigma'} \le \\
&\le C_0 \left( \sum_{k\neq 0} |k|^\tau e^{|-k|(\sigma-\sigma')} \right) |g|_\sigma \le \\
&\le C_0 \left( \int\limits_{\mathbb{R}^n} |x|^\tau e^{-|x|(\sigma-\sigma')} dx \right) |g|_\sigma \le \\
&\le C_1 (\sigma-\sigma')^{-(\tau+n)} |g|_\sigma .
\end{aligned}
$$

Далее, функция $v$ вещественно-аналитична. Действительно, $\bar{g}_k = g_{-k}$ и, значит, в силу (1.10), $\bar{v}_k = v_{-k}$. Лемма доказана.

## 2 Теорема Колмогорова

Поскольку спектр оператора $\partial$ имеет 0 точкой сгущения, совсем не ясно, будет ли оператор $D_2F(f,u)$ при $(f,u) \neq 0$ иметь (хотя бы неограниченный) правый обратный. Здесь и вступает в игру приближенный правый обратный. Прежде всего сформулируем результат.

**Теорема 8.1 (Колмогоров)** *Пусть $\omega$ удовлетворяет условиям (1.9), и пусть $q = 2\tau + 6$, $\gamma = \tau + 2$. Тогда существуют такая открытая окрестность нуля $D \subset X_1$ и такое отображение $\psi : D \mapsto Y_\sigma$, что $F(f, \psi(f)) = 0$ для всех $f \in D$;*

*Доказательство.* Нам надо показать, что $F$ укладывается в общую схему теоремы 7.3 и удовлетворяет условиям (H1 – H3) из этой теоремы с $\alpha = 1$, $\gamma = \tau + 2$.

Отображение $F$ переводит аналитические функции в аналитические, но нам надо еще продолжить $F$ на семейства $(X_\sigma), (Y_\sigma), (Z_\sigma)$. Мы знаем, что $F(0,0) = 0$. Зададим открытые окрестности $B_\sigma$ элемента $(0,0)$ следующим образом:

$$B_\sigma = \{(f,u) \in X_\sigma \times Y_\sigma : \ |f|_\sigma < 1, \ |u|_\sigma < R < \frac{1}{3n}\}. \tag{2.1}$$

Покажем, что $F : B_\sigma \mapsto Z_\sigma$ при $\sigma \geq 0$ и что это отображение непрерывно. Прежде всего ясно, что $\partial v \in Z_\sigma$, если $v \in Y_\sigma$. Далее докажем, что если $f \in X_\sigma$, а $v \in Y_\sigma$, то $f \circ (\mathrm{Id} + v) \in Z_\sigma$. Это вопрос области определения. Мы утверждаем, что $|\mathrm{Im}(\xi + v(\xi))| < (3/2)\sigma$, если $|\mathrm{Im}\xi| < \sigma$. Достаточно показать, что $|\mathrm{Im}v(\xi)| < \sigma/2$ при $|\mathrm{Im}\xi| < \sigma$. Для этого воспользуемся вещественностью $v$:

$$\mathrm{Im}v(\xi) = \frac{1}{2i}(v(\xi) - \overline{v(\xi)}) = \frac{1}{2i}(v(\xi) - v(\bar{\xi})).$$

Применяя теорему о среднем значении и учитывая оценку $|dv(\xi)| < 1/2$, вытекающую из (2.1), получаем

$$|\mathrm{Im}v(\xi)| = \left| \int\limits_0^1 d\mu dv(\bar{\xi} + \mu(\xi - \bar{\xi}))\mathrm{Im}\xi \right| < \frac{1}{2}|\mathrm{Im}\xi|. \tag{2.2}$$

Чтобы проверить выполнение условия (H1), заметим, что отображение $F(f, \circ) : B_\sigma \mapsto Z_{\sigma'}, \ \sigma' < \sigma$, дифференцируемо и[2]

$$D_2 F(f,u)\widehat{u} = df_{\circ(\mathrm{Id}+v)}\widehat{v} + \widehat{\lambda} - \partial\widehat{v}, \tag{2.3}$$

где $\widehat{u} = (\widehat{v}, \widehat{\lambda})$. Согласно оценке Коши

$$|df_{\circ(Id+v)}\widehat{v}|_{\sigma'} \leq |f|_{\sigma'}|\widehat{v}|_\sigma \leq (\sigma - \sigma')^{-1}|f|_\sigma|\widehat{v}|_\sigma \leq (\sigma - \sigma')^{-1}|\widehat{v}|_\sigma.$$

[2] Ниже $df_{\circ w}\widehat{w}$ обозначает функцию $\xi \mapsto ((df \circ w)(\xi)) \cdot (\widehat{w}(\xi)) = f'(w(\xi)) \cdot \widehat{w}(\xi)$, где $df \equiv f'$ —производная отображения $f$.

Чтобы оценить $Q(f;u,v) = F(f,u) - F(f,v) - D_2(F)(f,v)(u-v)$, мы воспользуемся формулой Тейлора для функций и тогда получим, что для $(f,u),\ (f,v) \in B_\sigma$

$$|Q(f,u,v)|_{\sigma'} =$$
$$= \sup_{|\mathrm{Im}\xi|<\sigma'} \left| \frac{1}{2} \int\limits_0^1 d\mu(1-\mu) d^2 f(\xi + \mu v(\xi) + (1-\mu)u(\xi))(u(\xi) - v(\xi))^2 \right| \leq$$
$$\leq \frac{1}{2} |f|_{\sigma',C^2} |v-u|_\sigma^2 \leq (\sigma - \sigma')^{-2} |v-u|_\sigma^2.$$

Таким образом, условие (H1) выполнено.

Справедливость условия (H2) очевидна.

Чтобы построить для отображения $D_2F(f,u)$ приближенное правое обратное, докажем сначала следующее простое, но играющее решающую роль функциональное тождество для производной (2.3):

$$D_2F(f,u)\widehat{u} = -(1+dv)\partial(1+dv)^{-1}\widehat{v} + \widehat{\lambda} + dF(f,u)(1+dv)^{-1}\widehat{v}, \qquad (2.4)$$

здесь $d$ обозначает (обычное) дифференцирование функций по $x$. Дифференцирование функции $F(f,u)$ дает

$$dF(f,u) = df_{\circ(\mathrm{Id}+v)}(1+dv) - \partial dv,$$

поскольку $\partial$ – оператор с постоянными коэффициентами. Далее, для произвольной векторной функции $\widehat{\omega}$ имеем

$$(\partial dv)\widehat{\omega} = \partial(1+dv)\widehat{\omega} = \partial((1+dv)\widehat{\omega}) - (1+dv)\partial\widehat{\omega}.$$

Поэтому

$$dF(f,u)\cdot(1+dv)^{-1}\widehat{v} = df_{\circ(\mathrm{Id}+v)}\widehat{v} - d\widehat{v} + (1+dv)\partial(1+dv)^{-1}\widehat{v} =$$
$$= D_2F(f,u)\widehat{u} - \widehat{\lambda} + (1+dv)\partial(1+dv)^{-1}\widehat{v},$$

откуда и следует формула (2.4).

Существование тождества не случайно – оно связано с тем, что мы имеем дело с задачей сопряжения. Это — важное алгебраическое свойство нашей задачи, которое делает ее разрешимой. Запишем

$$D_2F(f,u)\widehat{u} = L_u(\widehat{u}) + \mathcal{R}_{(f,u)}(\widehat{u}), \tag{2.5}$$

где $L_u(\widehat{u}) = -(1+dv)\partial(1+dv)^{-1}\widehat{v} + \lambda$ и $\mathcal{R}_{(f,u)}(\widehat{u}) = dF(f,u)(1+dv)^{-1}\widehat{v}$. По лемме 8.1 о малых знаменателях оператор $L_u$ имеет неограниченный правый обратный $\eta_u = L_u^{-1} \in L(Z_\sigma, Y_{\sigma'})$ с показателем потери $\gamma = \tau + 2$, задаваемый соотношениями

$$\begin{aligned}
&\eta_u(z) = (\widehat{v}, \widehat{\lambda}),\\
&\qquad \widehat{v} = -(1+dv)\eta((1+dv)^{-1}\{z - [(1+dv)^{-1}]^{-1}[(1+dv)^{-1}z]\}),\\
&\qquad \widehat{\lambda} = [(1+dv)^{-1}]^{-1}[(1+dv)^{-1}z]
\end{aligned} \tag{2.6}$$

при всех $z \in Z_\sigma$. Здесь через $\eta$ обозначен правый обратный к $\partial$ в пространстве функций с нулевым средним, существование которого гарантируется упомянутой леммой. Постоянный вектор $\widehat{\lambda}$ использован для того, чтобы сбалансировать средние значения. Из (2.6) с помощью той же леммы и оценки Коши выводим, что

$$|\eta_u(z)|_{\sigma'} \leq \frac{M}{(\sigma-\sigma')^{\tau+2}}|z|_\sigma, \tag{2.7}$$

если $(f,u) \in B_\sigma$, где $M$ – некоторая константа, не зависящая от $u$. Отображение $u \mapsto \eta_u,\ B_\sigma \to (Z_\sigma, Y_{\sigma'})$, очевидно, непрерывно для всех $\sigma' < \sigma$. Пока мы установили, что

$$D_2F(f,u) \circ \eta_u(z) - z = \mathcal{R}_{(f,u)}(\eta_u(z)). \tag{2.8}$$

Используя (2.7) и оценки Коши, правую часть можно оценить так:

$$\begin{aligned}|\mathcal{R}_{(f,u)}\eta_u(z)|_{\sigma'} &\leq |dF(f,u)|_{\sigma'}|(1+dv)^{-1}|_{\sigma'}|\eta_u(z)|_{\sigma'} \leq \\ &\leq M(\sigma-\sigma')^{-(\tau+3)}|F(f,u)|_{\sigma}|z|_{\sigma} \leq \\ &\leq M(\sigma-\sigma')^{-2(\alpha+\gamma)}|F(f,u)|_{\sigma}|z|_{\sigma}.\end{aligned}$$

Таким образом, оператор $\eta_u$ является приближенным правым обратным, удовлетворяющим условию (H3) для всех $(f,u) \in B_\sigma$ при некотором $M > 0$. Теорема доказана.

# Глава 9

# Абстрактная задача Коши – Ковалевской

## 1 Классическая задача Коши – Ковалевской и теорема Овсянникова

Классический подход к задаче Коши – Ковалевской изложен во многих замечательных учебниках. Мы постараемся сделать так, чтобы этот раздел дополнял существующие тексты как по методам, так и по содержанию теорем.

Введем обозначения
$$D_t^m = \frac{\partial^m}{\partial t^m},$$
положим $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \cup \{0\}$ и $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Тогда
$$D_x^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \ldots \partial^{\alpha_n} x_n}.$$
Рассмотрим систему уравнений вида
$$D_t^m u = \sum_{|\alpha|+j\leq m; j\leq m-1} a_{\alpha,j}(t,x) D_x^\alpha D_t^j u + f(t,x). \tag{1.1}$$

Здесь $u = (u_1, \ldots, u_N)$, $f = (f_1, \ldots, f_N)$, $a_{\alpha,j}$ – матрицы порядка $N$. Система уравнений такого типа называется системой типа Ковалевской. Будем искать решение этой системы, удовлетворяющее следующим начальным условиям:

$$D_t^j u = \varphi_j, \quad j = 0, \ldots, m-1 \quad \text{при } t = 0. \tag{1.2}$$

**Теорема 9.1** *Если функции $a_{\alpha,j}$, $f$ аналитичны в окрестности*

$$\Omega = \{(t, x) \in \mathbb{C}^{n+1}, \quad |x| < \delta, \quad |t| < T\}$$

*начала координат и функции $\varphi_j$ аналитичны в $\Omega \cap \{t = 0\}$, то существует одна и только одна вектор-функция $u(t, x)$, аналитическая в некоторой окрестности $\Omega' = \{(t, x) \in \mathbb{C}^{n+1}, \quad |x| < \delta', \quad |t| < T'\}$ начала координат и удовлетворяющая в $\Omega'$ уравнению (1.1) и условиям (1.2), $0 < \delta' \leq \delta$, $\quad 0 < T' \leq T$.*

**Теорема 9.2** *Пусть $a_{\alpha,j}$, $f$ являются непрерывными функциями от $t$ при $|t| \leq T$ со значениями в пространстве вектор-функций, голоморфных в окрестности $\omega = \{x \in \mathbb{C}^n, \ |x| < \delta\}$ начала координат в $\mathbb{C}^n$, и функции $\varphi_j$ аналитичны в $\omega$. Тогда существует одна и только одна вектор-функция $u(t, x)$, $m$-раз непрерывно дифференцируемая по $t$ при $|t| < T'$ $(0 < T' \leq T)$ со значениями в пространстве вектор-функций, голоморфных в окрестности $\omega' = \{x \in \mathbb{C}^n, \ |x| < \delta'\}$ начала координат в $\mathbb{C}^n$, $0 < \delta' \leq \delta$, удовлетворяющая уравнению (1.1) при $x \in \omega'$, $|t| < T'$ и условиям (1.2) при $x \in \omega'$, $t = 0$.*

Начнем с некоторых упрощений.

**Лемма 9.1** *Задача Коши (1.1), (1.2) эквивалентна задаче Коши для системы уравнений первого порядка*

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\sum_{j=1}^{n}A^j(t,x)\frac{\partial U}{\partial x^j}+B(t,x)U+f(t,x), \tag{1.3}$$

$$U(0,x)=U_0(x),$$

*где* $U=(U_1,\ldots,U_M)$, $f=(f_1,\ldots,f_M)$, $A^j$, $B$ *– квадратные матрицы порядка* $M$, $M$ *– некоторое большое число. При этом свойства коэффициентов и решений быть голоморфными или непрерывными сохраняются.*

Доказательство этой леммы оставим как упражнение, произведя необходимую замену функций. Пусть $u$ – решение задачи (1.1), (1.2). Положим

$$u_0=u,\ u_j=D_{x_j}u,\ 1\le j\le n,\ u_{n+1}=D_tu, \tag{1.4}$$

и пусть $v=(u_0,u_1,\ldots,u_{n+1})$ – вектор в $(n+2)N$-мерном пространстве. Очевидно, что

$$D_t^{m-1}u_0=D_t^{m-2}u_{n+1},$$

$$D_t^{m-1}u_j=D_t^{m-2}D_{x_j}u_{n+1},\quad j=1,\ldots,n, \tag{1.5}$$

$$D_t^{m-1}u_{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{|\alpha|=0}^{m-1-j}b_{k,j,\alpha}D_x^\alpha D_t^ju_k+f(t,x),$$

где последнее уравнение переходит в (1.1), если выразить $u_k$ через $u$ по формулам (1.4). Существует много способов написания этого уравнения. Например, условия (1.2) порождают при $t=0$ условия

$$D_t^ju_0=\varphi_j,$$

$$D_t^j u_k = D_{x_j}\varphi_j,\ k = 1,\ldots,n, \tag{1.6}$$

$$D_t^j u_{n+1} = \varphi_{j+1},\ j = 0,1,\ldots,m-2.$$

Уравнения (1.5) и условия (1.6) могут теперь быть записаны в виде системы уравнений

$$D_t^{m-1} v = \sum_{j=0}^{m-2}\sum_{|\alpha|=0}^{m-1-j} b_{\alpha,j}(t,x) D_x^\alpha D_t^j v + g(t,x), \tag{1.7}$$

$$D_t^j v = \psi_j,\ j = 0,1,\ldots,m-2;\ t = 0.$$

Достаточно доказать эквивалентность этих задач. То, что коэффициенты, начальные условия и решения в исходной и в новой задаче имеют одинаковую гладкость, очевидно из построения. Поскольку процесс редукции к системе уравнений меньшего порядка может быть продолжен, доказательство леммы завершается без труда.

Теоремы 9.1 и 9.2 будут получены как следствие общей абстрактной теоремы типа Коши – Ковалевской.

Пусть $E_s$, $0 \le s \le 1$, – банаховы пространства, такие, что если $s' < s \Rightarrow E_s \subset E_{s'}$ и

$$\|u\|_{s'} \le \|u\|_s, \quad u \in E_s. \tag{1.8}$$

Рассмотрим множество $L_\alpha$ линейных операторов $A$, действующих из $E_s$ в $E_{s'}$, $\quad 0 \le s' < s \le 1$, и удовлетворяющих условию

$$\|Au\|_{s'} \le \frac{\alpha}{s-s'}\|u\|_s. \tag{1.9}$$

**Теорема 9.3 (Л.В. Овсянников)** *Пусть*

$$u_0 \in E_1,\ f \in \mathrm{C}([-T,T];E_1),\ A(t) \in \mathrm{C}([-T,T];L_\alpha).$$

*Тогда:*

*A) Существует функция* $u \in \mathrm{C}^1((-T,T);E_0)$, *причем*

$$u \in \mathrm{C}^1((-T_s,T_s);E_s),$$

*где* $T' = 1/\alpha e$, $T_s = T'(1-s)$, *для которой*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(t)u + f(t), \quad u(0) = u_0. \tag{1.10}$$

*B) Если для некоторого* $T'$, $0 < T' \le T$, *и некоторого* $s$, $0 < s \le 1$, *существует две функции из* $\mathrm{C}^1((-T',T');E_s)$, *удовлетворяющие (1.10), то они совпадают.*

Докажем сначала пункт A). Пусть

$$v_0(t) = \int\limits_0^t f(\tau)d\tau + u_0,$$

$$v_{k+1}(t) = u_0 + \int\limits_0^t f(\tau)d\tau + \int\limits_0^t A(\tau)v_k(\tau)d\tau, \quad k = 0,1,\ldots.$$

Очевидно, что $v_k \in C([-T,T],E_s)$, $\quad 0 \le s \le 1$. Пусть $w_0 = v_0$ и $w_{k+1} = v_{k+1} - v_k$. Тогда

$$w_{k+1}(t) = \int\limits_0^t A(\tau)w_k(\tau)d\tau.$$

Покажем, что

$$\|w_k(t)\|_s \le M(t)\Big(\frac{\alpha e|t|}{1-s}\Big)^k, \ |t| < T, \tag{1.11}$$

где $M(t) = \|u_0\|_1 + \left|\int\limits_0^t \|f(\tau)\|_1 d\tau\right|$, $\quad 0 \le s < 1$.

Неравенство (1.11) тривиально для $k = 0$. Пусть оно верно для $k$, проверим его для $k+1$. Если $0 \le s' < s < 1$, то

$$\begin{aligned}\|w_{k+1}(t)\|_{s'} &\le \tfrac{\alpha}{s-s'}\left|\int\limits_0^t \|w_k(\tau)\|_s d\tau\right| \le \\ &\le M(t)\tfrac{\alpha}{s-s'}\left(\tfrac{\alpha e}{1-s}\right)^k \tfrac{|t|^{k+1}}{k+1}.\end{aligned}$$

Пусть $(s-s')(k+1)=1-s$. Тогда $(1-s)/(1-s')=(k+1)/(k+2)$ и поэтому

$$\|w_{k+1}(t)\|_{s'} \le M(t)\left(\frac{\alpha e|t|}{1-s'}\right)^{k+1}\left(\frac{k+2}{(k+1)e}\right)^{k+1} \le M(t)\left(\frac{\alpha e|t|}{1-s'}\right)^{k+1}.$$

Так как $M(t)\le M$, то из (1.11) следует абсолютная сходимость ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} w_k(t)$ в $E_s$, равномерная на каждом замкнутом отрезке, лежащем внутри интервала $|t|<\frac{1-s}{\alpha e}$. Его сумма $u(t)$ удовлетворяет условиям теоремы и

$$u(t)=u_0+\int\limits_0^t f(\tau)d\tau+\int\limits_0^t A(\tau)u(\tau)d\tau.$$

Докажем теперь пункт B) – единственность.

Пусть $v\in \mathrm{C}^1((-T',T');E_s)$ при некотором $s,\ 0<s\le 1$, и

$$v_t=A(t)v,\quad v(0)=0.$$

Покажем, что $v=0$ в $(-T',T')$. Имеем

$$v(t)=\int\limits_0^t A(\tau)v(\tau)d\tau.$$

Пусть $s'<s$ и $M(t)=\sup\|v(\tau)\|_s$ при $0\le\tau\le t$. Проверим, что

$$\|v(t)\|_{s'} \le M(t)\left(\frac{\alpha e|t|}{s-s'}\right)^k,\ k=0,1,\ldots. \tag{1.12}$$

Для $k=0$ это тривиально. Если это верно для некоторого $k\ge 0$, то при $s''<s'$

$$\|v(t)\|_{s''} \le \frac{\alpha}{s'-s''}\left|\int\limits_0^t \|v(\tau)\|_{s'}d\tau\right| \le \frac{\alpha M(t)}{s'-s''}\left(\frac{\alpha e}{s-s'}\right)^k\frac{|t|^{k+1}}{k+1}.$$

Пусть $(s'-s'')(k+1)=s-s'$. Тогда $(s-s')/(s-s'')=(k+1)/(k+2)$ и поэтому

$$\|v(t)\|_{s''} \le M(t)\left(\frac{\alpha|t|}{s-s''}\right)^{k+1}e^k\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1} \le M(t)\left(\frac{e\alpha|t|}{s-s''}\right)^{k+1}.$$

Таким образом, оценка (1.12) верна при всех $k$. Но отсюда следует, что $v(t) = 0$ при $|t| < (s - s')/\alpha e$. По непрерывности $v(t) = 0$ при $|t| \leq (s-s')/\alpha e$. Повторяя это рассуждение, можно показать, что $v(t) = 0$ при $\frac{s-s'}{\alpha e} \leq t \leq 2\frac{s-s'}{\alpha e}$ и т.д. За конечное число шагов мы исчерпаем любой отрезок $[-t_0, t_0]$, содержащийся в $(-T', T')$. Отсюда следует, что $v(t) = 0$ в $(-T', T')$. Теорема 9.3 доказана.

Докажем теперь теорему 9.2. Она получается из теоремы 9.3, если в качестве $E_s$ взять пространство вектор-функций, голоморфных в

$$\Omega_s = \{z \in \mathrm{C}^n,\ |z| < s\delta\}, \quad 0 < s \leq 1,$$

с нормой $\|u\|_s = \sup\limits_{\Omega_s} |u(z)|$. Проверим справедливость неравенства (1.9). Для простоты пусть $n = 1$. Тогда для комплекснозначной скалярной функции $u$ при $z_0 \in \Omega_{s'},\ s' < s$, имеем

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = (s-s')\delta} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial}{\partial z_0} u(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = (s-s')\delta} \frac{u(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} d\zeta,$$

и потому

$$\left|\frac{\partial u(z_0)}{\partial z_0}\right| \leq \frac{1}{\delta(s - s')} \|u\|_s.$$

Таким образом,

$$\|D_{z_0} u\|_{s'} \leq \frac{1}{\delta(s - s')} \|u\|_s. \tag{1.13}$$

Эта важная формула называется оценкой Коши.

Для вектор-функции $u$ со значениями в $\mathbb{C}^N$ очевидно выполнено неравенство

$$\|D_{z_0} u\|_{s'} \leq \frac{\sqrt{N}}{\delta(s - s')} \|u\|_s.$$

В случае $n > 1$ имеем

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} A^j(t,z) \frac{\partial u}{\partial z^j} + B(t,z)u \right\|_{s'} \leq \frac{\alpha}{s-s'} \|u\|_s$$

с некоторой постоянной $\alpha$, зависящей от $N$ и максимума модулей элементов матриц $A^j$ и $B$.

По лемме (9.1) задача (1.1), (1.2) эквивалентна задаче (1.4), (1.5). Из теоремы 9.3 вытекает существование и единственность решения задачи (1.4), (1.5), непрерывно дифференцируемого по $t$. Из доказательства леммы 9.1 видно, что в таком случае задача (1.1), (1.2) имеет решение, $m$ раз непрерывно дифференцируемое по $t$.

Теперь перейдем к доказательству теоремы 9.1. Вначале заметим, что решение $u(t)$ задачи (1.10), построенное в теореме 9.3, будет аналитичным по $t$, если $A(t)$, $f(t)$ являются аналитическими функциями по $t$. В самом деле, при этом условии аналитическими будут функции $v_k$, $w_k$, построенные в ходе доказательства. Из оценок (1.11) вытекает равномерная при $|t| \leq q(1-s)/\alpha e$ сходимость ряда $\sum w_k(t)$ (здесь $q < 1$ – произвольное число). Так как сумма равномерно сходящегося ряда аналитических функций является аналитической функцией, то решение $u(t)$ задачи (1.11) будет аналитической по $t$ функцией со значениями в $E_s$ при $|t| \leq (1-s)/\alpha e$. Отсюда следует, что задача (1.4), (1.5) имеет аналитическое по $t$ и $x$ решение $U(t,x)$, если $A^j$, $B$, $f$ являются аналитическими по $t$ и $x$ функциями. В силу леммы 9.1 отсюда вытекает справедливость теоремы 9.1.

# 2 Обобщенный мажорантный метод

## 2.1 Введение

Мажорантный метод доказательства существования и единственности аналитических решений начальной задачи для линейных уравнений в частных производных впервые был применен О. Коши в 1842 году. В 1874 году с помощью усовершенствованной версии этого метода С. Ковалевская решила задачу Коши в нелинейной постановке[1].

Поясним суть мажорантного метода на примере скалярной задачи:

$$\begin{cases} u_t & = & f(u, u_z, z, t), \\ u\,|_{t=0} & = & u_0(z), \end{cases} \tag{2.1}$$

где функция $u_0$ аналитична по $z$ в нуле:

$$u_0(z) = \sum_k u_{0k} z^k,$$

функция $f(u, v, z, t)$ аналитична в точке $(u_0, v_0, 0, 0)$:

$$f(u, v, z, t) = \sum_{i,j,m,n} f_{i,j,m,n} (u - u_0)^i (v - v_0)^j z^m t^n,$$

где $u_0 = u_0(0)$ и $v_0 = (u_0)_z(0)$. Будем искать решение задачи (2.1) в виде ряда по степеням $z$ и $t$:

$$u(t, z) = \sum_{i,j} u_{i,j} z^i t^j. \tag{2.2}$$

Подставляя этот ряд в (2.1), мы получим рекуррентную систему алгебраических уравнений, из которой последовательно и однозначно находятся коэффициенты $u_{i,j}$. Для доказательства сходимости ряда (2.2) Ко-

[1] С разными версиями истории теоремы Коши – Ковалевской можно познакомиться по книгам [7, 4].

валевская, пользуясь мажорантными функциями, предложенными Вейерштрассом, построила мажорантную задачу

$$\begin{cases} U_t &= F(U, U_z, z, t), \\ U\mid_{t=0} &= U_0(z), \end{cases} \tag{2.3}$$

решение которой $U(t,z)$ находится в явном виде. Здесь $U_0(z) = \sum_k U_{0k} z^k$,

$$F(U, V, z, t) = \sum_{i,j,m,n} F_{i,j,m,n}(U-U_0)^i (V-V_0)^j z^m t^n,$$

и $U_0 = U_0(0), \quad V_0 = (U_0)_z(0)$. Функции $F$ и $U_0$ таковы, что $|u_{0k}| \leq U_{0k}$ и $|f_{i,j,m,n}| \leq F_{i,j,m,n}$. Соответствующий ряд

$$U(t,z) = \sum_{i,j} U_{i,j} t^i z^j \tag{2.4}$$

сходится в некотором бикруге. Сравнивая рекуррентные формулы для коэффициентов $u_{i,j}$ и $U_{i,j}$, убеждаемся, что $|u_{i,j}| \leq U_{i,j}$, поэтому ряд (2.2) сходится в том же бикруге.

В силу своей универсальности мажорантная система (2.3) дает лишь очень грубые оценки области сходимости ряда (2.2). Для улучшения этих оценок можно, следуя Пуанкаре, строить каждый раз свою систему (2.3), учитывая специфику задачи (2.1). Если же нужно получить точные оценки действительного промежутка времени существования решения, этот способ не подходит, так как круг в плоскости комплексного времени, в котором сходится решение, может оказаться ограниченным из-за комплексных особенностей, в то время как в действительном направлении решение можно продолжать и дальше. Для этого естественно раскладывать решение задачи (2.1) в ряд лишь по пространственной переменной $z$ с коэффициентами, зависящими от $t$, и строить мажоранты для такого ряда (мажоранты по пространственной переменной $z$). Однако это приводит к системе из бесконечного числа обыкновенных дифференциальных уравнений на эти коэффициенты, которая не является рекуррентной, и поэтому техника доказательства соответствующих утверждений совершенно иная.

Теоремы существования и единственности, освобожденные от требования аналитичности правых частей задачи (2.1) по времени, при различных предположениях получены в работах [12, 66]. Однако указанные результаты по-прежнему локальны по $t$.

В ряде задач динамики [17, 59] возникает необходимость в доказательствах теорем существования решений для систем из бесконечного числа уравнений в частных производных, а также в получении довольно точных оценок (не вытекающих, в частности, из общих результатов вида [12, 66]) действительных промежутков времени существования решений в конкретных системах. Кроме того, необходимыми оказываются мажорантные оценки этих решений.

Настоящая глава посвящена одному из возможных путей получения таких оценок. В ней обосновывается метод мажорант по пространственным переменным в приложении к системам из счетного числа уравнений в частных производных, правые части которых представляют собой непрерывные отображения пространства аналитических функций в себя. В более классической постановке (уравнений – конечное число, правые части – аналитические функции по всем своим аргументам, кроме времени) мажорантный метод рассматривался в [8]. Отметим, что ниже получена теорема существования, единственность же решения в конкретных задачах может быть доказана с помощью результатов работы [66].

## 2.2 Определения.

Введем в $\mathbb{C}^n = \{z = (z_1, \ldots, z_n)\}$ норму формулой $\|z\| = \max_k |z_k|$. Через $B_R$ обозначим открытый поликруг в $\mathbb{C}^n$ с радиусом $R$ и центром в нуле:

$$B_R = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| < R\}.$$

Через $\mathcal{H}$ обозначим множество голоморфных в $B_R$ функций $u : B_R \to \mathbb{C}$. Зададим в $\mathcal{H}$ семейство норм по формуле

$$\|u\|_r = \sup_{z \in B_r} |u(z)|, \quad 0 < r < R.$$

Пространство $\mathcal{H}$ полунормированное [68]. Топология в нем определяется следующим образом: будем говорить, что последовательность $\{u_k\}$ сходится к $u$ при $k \to \infty$ (обозначается $u_k \to u$), если $\{u_k\}$ сходится к $u$ по любой норме $\|\cdot\|_r, \quad r < R$. Так, например, множество $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ компактно, если из любой его бесконечной последовательности можно извлечь сходящуюся по любой норме $\|\cdot\|_r$ подпоследовательность и предел этой подпоследовательности лежит в $\mathcal{K}$.

Ниже используются следующие полунормированные пространства:

пространство

$$\mathcal{H}^N = \{u(z) = (u^{-N}(z), \ldots, u^0(z), \ldots, u^N(z)) \mid u^k \in \mathcal{H}\}$$

с нормами $\|u\|_r^N = \sum_{|k| \le N} \|u^k\|_r$,

пространство

$$\mathcal{H}^\infty = \{u(z) = \{u^k(z)\}_{k \in \mathbb{Z}} \mid u^k \in \mathcal{H}\}$$

с нормами $\|u\|_r^\infty = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|u^k\|_r$, пространство $\mathcal{C}$ непрерывных отображений отрезка $I = [0, T]$ в $\mathcal{H}$ с нормами $\|u(t,z)\|_{r,c} = \sup_{t\in I} \|u(t,z)\|_r$,

пространство

$$\mathcal{C}^N = \{u(t,z) = (u^{-N}(t,z), \dots, u^0(t,z), \dots, u^N(t,z)) \mid u^k \in \mathcal{C}\}$$

с нормами $\|u\|_{r,c}^N = \sum_{|k|\le N} \|u^k\|_{r,c}$,

пространство

$$\mathcal{C}^\infty = \{u(t,z) = \{u^k(t,z)\}_{k\in\mathbb{Z}} \mid u^k \in \mathcal{C}\}$$

с нормами $\|u\|_{r,c}^\infty = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|u^k\|_{r,c}$, а также банахово пространство над полем действительных чисел $\mathcal{C}_r$ с нормой $\|\cdot\|_{r,c}^\infty$, состоящее из бесконечномерных векторов $\{u^k(t,z)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, где функции $u^k(t,z)$ со значениями в $\mathbb{C}$ непрерывны на множестве $I \times \overline{B}_r$ (чертой обозначено замыкание) и голоморфны в $B_r$ при всех $t \in I$.

Непрерывность отображений, рассматриваемых ниже, понимается в смысле топологии тех пространств, на которых они определены.

Рассмотрим две функции из $\mathcal{C}$:

$$f(t,z) = \sum_{i_1,\dots,i_n\ge 0} f_{i_1,\dots,i_n}(t) z^{i_1}, \dots, z^{i_n},$$
$$F(t,z) = \sum_{i_1,\dots,i_n\ge 0} F_{i_1,\dots,i_n}(t) z^{i_1}, \dots, z^{i_n}.$$

**Определение 9.1** *Будем говорить, что $F$ мажорирует $f$ ($f \ll F$), если неравенство $|f_{i_1,\dots,i_n}(t)| \le F_{i_1,\dots,i_n}(t)$ справедливо для любого $t \in I$ и любого набора индексов $i_1, \dots, i_n$.*

*Если $\tilde{f} = \{f^k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $\tilde{F} = \{F^k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{C}^\infty$, то запись $\tilde{f} \ll \tilde{F}$ означает, что $f^k \ll F^k$ для любого $k \in \mathbb{Z}$.*

*Рассмотрим два отображения $f(u)$ и $F(u)$ пространства $\mathcal{C}^\infty$ в себя.*

*Будем говорить, что $F$ мажорирует $f$ ($f \ll F$), если для любых $v, V \in \mathcal{C}^\infty$, таких, что $v \ll V$, верно отношение $f(v) \ll F(V)$.*

Заметим, что если $f \ll F$, то $\|f\|_r \leq \|F\|_r$ для любого $r < R$.

## 2.3 Основные результаты

Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} u_t & = & f(u), \\ u\mid_{t=0} & = & u_0(z), \end{cases} \tag{2.5}$$

где $u_0 \in \mathcal{H}^\infty$, а отображение $f : \mathcal{C}^\infty \to \mathcal{C}^\infty$ непрерывно. В частности, $f$ может быть непрерывной функцией от производных $u_{z_{k_1}^{j_1},\dots,z_{k_s}^{j_s}}$. Пусть непрерывное отображение $F : \mathcal{C}^\infty \to \mathcal{C}^\infty$ мажорирует $f$: $f \ll F$, и существует функция $U(t,z) \in \mathcal{C}^\infty$, удовлетворяющая следующим отношениям:

$$\begin{aligned} U(0,z) &\gg u_0(z), \\ U(t,z) &\gg U(0,z) + \int\limits_0^t F(U)ds, \quad \text{при} \quad t \in I. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Функцию $U$ будем называть мажорантной функцией для задачи (2.5). В частности, если функция $U$ является решением задачи Коши:

$$U_t = F(U), \quad U\mid_{t=0} = U_0(z) \gg u_0(z), \tag{2.7}$$

то она удовлетворяет отношениям (2.6), причем в формулах (2.7) вместо знака "="может стоять знак "$\gg$".

Рассмотрим множество

$$\begin{aligned} W = \{w(t,z) \in \mathcal{C}^\infty \mid w &\ll U, \\ \|w(t',z) - w(t'',z)\|_r^\infty &\leq \|F(U)\|_{r,c}^\infty \cdot |t' - t''|, \quad t', t'' \in I\}. \end{aligned}$$

**Теорема 9.4** *Если задача (2.5) допускает мажорантную функцию, то она имеет решение $u(t,z) \in W$.*

Рассмотрим отображение $P : \mathcal{C}^\infty \to \mathcal{C}^\infty$, заданное формулой

$$P(u) = u_0(z) + \int\limits_0^t f(u)ds. \tag{2.8}$$

**Теорема 9.5** *Пусть выполнены условия теоремы 9.4 и множество $D \subseteq W$ замкнуто в $\mathcal{C}^\infty$ и выпукло в $\mathcal{C}_r$, тогда если $P(D) \subseteq D$, то задача (2.5) имеет решение $v(t,z) \in D$.*

Для приложений полезно следующее

**Предложение 9.1** *Множество $W$ замкнуто в $\mathcal{C}^\infty$ и выпукло в $\mathcal{C}_r$.*

## 2.4 Приложения

В качестве примера мы рассмотрим дифференциальные уравнения, возникающие при решении задачи о вложении диффеоморфизма в поток с помощью метода непрерывного усреднения. Подробное изложение этой теории и полные доказательства содержатся в [17].

### Метод непрерывного усреднения

Пусть рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dz}{dt} = \widehat{a}(t,z), \quad z \in M^m,$$

где $M^m$ – гладкое $n$-мерное многообразие. Мы ищем зависящую от времени замену переменных:

$$z \mapsto Z \tag{2.9}$$

так, чтобы в переменных $Z$ векторное поле $\widehat{a}$ записывалось в более удобном виде $a(t,Z)$. Предлагается искать замену (2.9) среди преобразований многообразия $M^m$, принадлежащих фазовому потоку $\{g_b^\delta(z)\}$ некоторой другой системы:

$$\frac{dz}{d\delta} = b(\delta, t, z).$$

Таким образом, $a$ оказывается явно зависящим от $\delta$. Векторное поле $b$ определяется полем $a$ и характером рассматриваемой задачи. Аналитически это можно выразить так: $b = \xi a$, где $\xi$ – некоторый оператор на пространстве векторных полей. Легко показать, что векторное поле $a$ должно быть решением задачи Коши

$$a_\delta = (\xi a)_t - [\xi a, a], \quad a\,|_{\delta=0} = \widehat{a}. \tag{2.10}$$

Через $[\cdot,\cdot]$, как обычно, обозначен коммутатор.

Ниже мы будем считать многообразие $M^m$ компактным и вещественно-аналитическим, все векторные поля на нем – вещественно-аналитическими по $z$, гладкими и $2\pi$-периодичными по $t$. Оператор $\xi$ строится следующим образом. Разложим поле $a(t,z,\delta)$ в ряд Фурье:

$$a = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a^k(z,\delta)e^{ikt}, \tag{2.11}$$

тогда

$$\xi a = i\sum_{k\in\mathbb{Z}} \operatorname{sign}(k) a^k(z,\delta)e^{ikt}. \tag{2.12}$$

### Задача о вложении диффеоморфизма в поток

Пусть $T : M^m \to M^m$ – вещественно-аналитический диффеоморфизм компактного многообразия $M^m$. Возникает вопрос: можно ли построить динамическую систему с вещественно-аналитическим по $z$ и $t$

и $2\pi$-периодическим по $t$ векторным полем $a(t,z)$, для которой диффеоморфизм $T$ являлся бы отображением за период? Ответ на этот вопрос оказывается положительным при условии, что диффеоморфизм $T$ изотопен тождественному, т.е. существует вещественно-аналитический диффеоморфизм $T_t$, непрерывно зависящий от параметра $t$, такой, что:

$$T_0 = \mathrm{id}_{M^m}, \quad T_{2\pi} = T.$$

Доказывается эта теорема следующим образом[1]. Можно показать, что изотопия $T_t$ может быть выбрана класса $C^3$ по $t$, и построить динамическую систему с векторным полем $\widehat{a}(t,z)$, фазовый поток которой совпадает с $T_t$. Поле $\widehat{a}(t,z)$ можно выбрать $2\pi$-периодичным и $C^2$-гладким по $t$, а также вещественно-аналитическим по $z$ (подробности см. в [17]). С помощью метода непрерывного усреднения строится вещественно-аналитическая замена переменных (2.9) такая, что в новых координатах поле $\widehat{a}(t,z)$ приобретает вид $a(t,Z,\delta)$, $\quad \delta > 0$, где $a$ – вещественно-аналитично по $t$ и $Z$.

Далее в этом параграфе мы докажем аналитичность векторного поля $a(t,Z,\delta)$, а затем обсудим вопрос о возможности вложения диффеоморфизма, принадлежащего некоторой группе Ли, в поток, порожденный векторным полем из соответствующей алгебры Ли.

Подставляя формулы (2.11), (2.12) в (2.10) и делая замену $a^k = v^k e^{-|k|\delta}$, получаем следующую систему:

$$v^k_\delta = i\,\mathrm{sign}(k)[v^0, v^k] - 2i\sum_{l,n}[v^l, v^n]e^{-(|l|+|n|)\delta}, \tag{2.13}$$

$$v^k(z,0) \ll \frac{A}{(|k|+1)^2(B-\zeta)}\mathbf{1}, \qquad k\in\mathbb{Z}. \tag{2.14}$$

[1] Приводимый здесь анализ сообщил автору Д. В. Трещев.

Здесь $v^k(\delta, z)$ – $m$-мерное векторное поле, $z = (z_1, \dots, z_m)$, через $[\cdot, \cdot]$ обозначен коммутатор, в котором дифференцирование производится по переменным $z_j$,

$$\zeta = z_1 + \dots + z_m, \quad \mathbf{1} = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^m,$$

$A, B$ – некоторые положительные константы. Суммирование производится по целым числам $l, n$ таким, что $l + n = k, \quad l > 0, \quad n < 0$. Формула (2.14) вытекает из общих теорем об оценках коэффициентов Фурье конечно-гладких функций (см., например, [18]).

**Лемма 9.2** *Существуют такие положительные постоянные $A, B, C$, что для любого $\delta \in \left[0, \frac{B^2}{4AC}\right)$ решение задачи Коши (2.13)–(2.14) существует и удовлетворяет отношениям*

$$v^k(z, \delta) \ll \frac{G(\zeta, \delta)}{(|k| + 1)^2},$$

*где*

$$G(\zeta, \delta) = \frac{2A}{B - \zeta + \sqrt{(B - \zeta)^2 - 4AC\delta}}. \tag{2.15}$$

**Предложение 9.2** $v^k(z, \delta) \ll w^k(\zeta, \delta)\mathbf{1}$, *где $w^k$ – скалярные функции, удовлетворяющие системе*

$$w^k_\delta = m(w^0 w^k)_\zeta + 2m \textstyle\sum_{l,n} (w^l w^n)_\zeta, \tag{2.16}$$

$$w^k(\zeta, 0) = \tfrac{A}{(|k|+1)^2 (B - \zeta)}, \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{2.17}$$

Доказательство этого предложения вытекает из того, что начальные значения (2.17) и правые части системы (2.16) мажорируют соответственно начальные значения (2.14) и правые части системы (2.13).

**Предложение 9.3** *$w^k(\zeta,\delta) \ll \mathbf{w}^k(\zeta,\delta) \equiv \frac{G(\zeta,\delta)}{(|k|+1)^2}$, где*

$$G_\delta = CGG_\zeta, \quad G(\zeta,0) = \frac{A}{B-\zeta}, \quad C = 2m\Big(\frac{\pi^2}{3} - 1\Big).$$

**Замечание 9.1** *Решая явно уравнение на $G$, получаем формулу (2.15). Таким образом, лемма 9.2 вытекает из предложений 9.2 и 9.3.*

*Доказательство предложения 9.3.*

Так как $\mathbf{w}^k(\zeta,0) = w^k(\zeta,0)$, то по теореме 9.4 нам достаточно проверить, что для любого $k \in \mathbb{Z}$

$$\mathbf{w}^k_\delta \gg m(\mathbf{w}^0\mathbf{w}^k)_\zeta + 2m \sum_{l+n=k,l>0,n<0} (\mathbf{w}^l\mathbf{w}^n)_\zeta. \tag{2.18}$$

Правая часть этого выражения равна

$$\frac{2m}{(|k|+1)^2}GG_\zeta + 4mGG_\zeta \sum_{l+n=k,l>0,n<0} \frac{1}{(|l|+1)^2(|n|+1)^2}.$$

Последняя сумма не превосходит

$$\frac{1}{(|k|+1)^2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(|j|+1)^2} = \frac{1}{(|k|+1)^2}\Big(\frac{\pi^2}{6} - 1\Big),$$

и мы получаем, что правая часть (2.18) не превосходит ($\ll$)

$$\frac{C}{(|k|+1)^2}GG_\zeta = \mathbf{w}^k_\delta.$$

Предложение 9.3 доказано.

Рассмотрим некоторые варианты задачи о вложении диффеоморфизма в поток. Приведенные ниже теоремы уточняют формулировки соответствующих результатов из [17].

Пусть $M^m_{\mathbb{C}}$ – комплексная окрестность многообразия $M^m$. На множестве голоморфных на $M^m_{\mathbb{C}}$ функций со значениями в $\mathbb{C}$ зададим семейство норм по формуле

$$\|f\|_K = \max_{z\in K}|f(z)|,$$

где $K \subset M^m_{\mathbb{C}}$ – произвольный компакт.

Пусть $\mathcal{L}$ – алгебра Ли аналитических векторных полей на $M^m_{\mathbb{C}}$ (роль умножения играет операция коммутирования). Введем в $\mathcal{L}$ семейство норм следующим образом.

Если $v = (v_1, ..., v_m) \in \mathcal{L}$, то

$$\|v\|_K = \max_j \|v_j\|_K. \tag{2.19}$$

Следует отметить, что такие нормы не инвариантны относительно замен координат на $M^m_{\mathbb{C}}$, поэтому будем считать, что система координат фиксирована.

Назовем подалгебру $L \subseteq \mathcal{L}$ замкнутой, если из того, что последовательность $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L$ сходится в смысле любой из норм (2.19), следует, что предел этой последовательности принадлежит $L$. Свойство подалгебры быть замкнутой не зависит от выбора системы координат.

**Теорема 9.6** *Пусть подалгебра $L \subseteq \mathcal{L}$ замкнута.*

*Тогда если поле $\widehat{a}(t, z) \in L$ при любом $t$ и дважды дифференцируемо по $t$, то задача (2.10) имеет решение $a(t, z, \delta) \in L$, которое является вещественно-аналитичным и $2\pi$-периодичным по $t$ при $\delta > 0$.*

Как и выше, мы рассмотрим решение задачи (2.13)-(2.14) лишь в окрестности произвольной точки многообразия $M^m$, локальные координаты которой можно считать нулевыми.

Через $\widehat{L}$ обозначим множество последовательностей

$$\{v^k(\delta, z)\}_{k\in\mathbb{Z}}, \quad v^k(\delta, z) \in L.$$

Зависимость векторных полей $v^k$ от $\delta$ считается произвольной.

Легко показать, что все коэффициенты Фурье разложения векторного поля $\widehat{a}(t,z)$ по $t$ лежат в $L$. Остается применить теорему 9.5 к задаче (2.13)-(2.14). Здесь множество $W$ определено леммой 9.2,

$$P^k(\{v^j\}) = v^k(0,z) + \int_0^\delta i\,\mathrm{sign}(k)[v^0, v^k] - 2i\sum_{l,n}[v^l, v^n]e^{-(|l|+|n|)s}\,ds,$$

где $l+n=k, \quad l>0, \quad n<0$, а $D = W\cap \widehat{L}$.

Рассмотрим еще один пример применения теоремы 9.5. Пусть $g$ – аналитический диффеоморфизм многообразия $M^m$, продолжаемый до аналитического отображения $M^m_{\mathbb{C}}$ в себя. Будем говорить, что векторное поле $u(t,z)\in\mathcal{L}$ $g$-обратимо, если выполнено равенство

$$u(t,z) = -\Big(dg(z)\Big)^{-1}u(-t, g(z)). \tag{2.20}$$

Множество $g$-обратимых векторных полей обозначим через $R_g$.

**Теорема 9.7** *Если поле $\widehat{a}(t,z)\in R_g$ при любом $t$ и дважды дифференцируемо по $t$, то задача (2.10) имеет решение $a(t,z,\delta)\in R_g$, которое является вещественно-аналитичным и $2\pi$-периодичным по $t$ при $\delta>0$.*

Через $\widehat{R_g}$ обозначим множество последовательностей

$$\{u^k(\delta,z)\},\quad u^k(\delta,z)\in\mathcal{L}$$

(зависимость векторных полей от $\delta$ считается произвольной), удовлетворяющих цепочке уравнений

$$u^k(\delta,z) + \Big(dg(z)\Big)^{-1}u^{-k}(\delta, g(z)) = 0,\quad k\in\mathbb{Z},$$

которая получается, если разложить в ряд Фурье левую и правую части формулы (2.20). Как и выше, $D = W\cap\widehat{R_g}$.

## 2.5 Доказательство теорем раздела 2.3

Множество $W$ не пусто, так как ему принадлежит вектор, целиком состоящий из нулей.

Ниже используются следующие вложения: $\mathcal{H}^N \subset \mathcal{C}^N \subset \mathcal{C}^\infty \subset \mathcal{C}_r$. Первое вложение получается, если элементы множества $\mathcal{H}^N$ формально считать зависящими от $t$, второе – если доопределить каждый элемент множества $\mathcal{C}^N$ нулями до бесконечного вектора:

$$(u^{-N}, \ldots, u^0, \ldots, u^N) \mapsto (\ldots, 0, u^{-N}, \ldots, u^0, \ldots, u^N, 0, \ldots),$$
$$(u^{-N}, \ldots, u^0, \ldots, u^N) \in \mathcal{C}^N,$$
$$(\ldots, 0, u^{-N}, \ldots, u^0, \ldots, u^N, 0, \ldots) \in \mathcal{C}^\infty.$$

**Лемма 9.3** *Если $u(t,z) \in \mathcal{C}$, то $u_{z_{k_1}^{j_1}, \ldots, z_{k_s}^{j_s}}(t,z) \in \mathcal{C}$.*

Действительно, непрерывность по $t$ функции $u_{z_{k_1}^{j_1}, \ldots, z_{k_s}^{j_s}}$ в точке $t_0 \in I$ вытекает из оценки Коши:

$$\|u_{z_{k_1}^{j_1}, \ldots, z_{k_s}^{j_s}}(t_0, z) - u_{z_{k_1}^{j_1}, \ldots, z_{k_s}^{j_s}}(t, z)\|_r \leq$$
$$\leq \left(\frac{K}{\sigma}\right)^{j_1+\ldots+j_s} \|u(t_0, z) - u(t, z)\|_{r+\sigma}.$$

Ниже, для краткости, мы не всегда будем явно указывать аргументы функций.

Обозначим

$$V = \{u(t,z) \in \mathcal{C} \mid u \ll S \in \mathcal{C}\}.$$

**Лемма 9.4** *Если последовательность $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq V$ сходится в смысле нормы $\|\cdot\|_{r,c}$, то предельная функция $u \in V$, и указанная последовательность сходится к $u$ в смысле любой нормы $\|\cdot\|_{r',c}$, $\quad r' < R$.*

*Доказательство.* По теореме Вейерштрасса функция $u$ голоморфна в $B_r$ и непрерывна в $\overline{B}_r$ при любом $t \in I$. Обозначим

$$\begin{aligned} u_k(t,z) &= \sum_{i_1,\ldots,i_n \geq 0} u_{ki_1,\ldots,i_n}(t) z_1^{i_1}, \ldots, z_n^{i_n}, \\ u(t,z) &= \sum_{i_1,\ldots,i_n \geq 0} u_{i_1,\ldots,i_n}(t) z_1^{i_1}, \ldots, z_n^{i_n}, \\ S(t,z) &= \sum_{i_1,\ldots,i_n \geq 0} S_{i_1,\ldots,i_n}(t) z_1^{i_1}, \ldots, z_n^{i_n}. \end{aligned}$$

Функции $u_{ki_1,\ldots,i_n}(t)$ непрерывны на отрезке $I$ по лемме 9.3.

В силу оценок Коши:

$$\sup_{t \in I} |u_{ki_1,\ldots,i_n}(t) - u_{i_1,\ldots,i_n}(t)| \leq i_1!, \ldots, i_n! \left(\frac{K}{r}\right)^{i_1+\ldots+i_n} \|u_k - u\|_{r,c}$$

последовательности соответствующих коэффициентов в рядах Тейлора сходятся равномерно по $t$ на отрезке $I$:

$$u_{ki_1,\ldots,i_n}(t) \to u_{i_1,\ldots,i_n}(t), \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{2.21}$$

Из этого следует, что функции $u_{i_1,\ldots,i_n}(t)$ непрерывны, и при всех $t \in I$ справедливы неравенства $|u_{i_1,\ldots,i_n}(t)| \leq S_{i_1,\ldots,i_n}(t)$, поэтому $u \in V$.

Покажем, что $u_k$ сходится к $u$ в смысле нормы $\|\cdot\|_{r',c}$. Выберем $p$ так, что

$$\begin{aligned} &\|\textstyle\sum_{i_1,\ldots,i_n \geq p+1} u_{i_1,\ldots,i_n} z_1^{i_1}, \ldots, z_n^{i_n}\|_{r',c} + \\ &+ \|\textstyle\sum_{i_1,\ldots,i_n \geq p+1} u_{ki_1,\ldots,i_n} z_1^{i_1}, \ldots, z_n^{i_n}\|_{r',c} < \tfrac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Это возможно, так как $u_k, u \in V$. Выберем $N$ так, что при $k > N$ верна оценка:

$$\|\sum_{i_1,\ldots,i_n \leq p} u_{i_1,\ldots,i_n} z_1^{i_1}, \ldots, z_n^{i_n} - \sum_{i_1,\ldots,i_n \leq p} u_{ki_1,\ldots,i_n} z_1^{i_1}, \ldots, z_n^{i_n}\|_{r',c} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Это возможно в силу (2.21). Отсюда при $k > N$ имеем $\|u_k - u\|_{r',c} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Лемма доказана.

Лемма 9.4 легко обобщается на пространство

$$T = \{u(t,z) \in \mathcal{C}^\infty \mid u \ll U \in \mathcal{C}^\infty\}.$$

Отметим, что $W \subseteq T$.

**Лемма 9.5** *Если последовательность $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq T$ сходится в смысле нормы $\|\cdot\|^\infty_{r,c}$, то предельная функция $u \in T$, и указанная последовательность сходится к $u$ в смысле любой нормы $\|\cdot\|^\infty_{r',c}$, $\quad r' < R$.*

*Доказательство.* Пусть

$$u_k = \{u_k^n(t,z)\}_{n\in\mathbb{Z}}, \quad u = \{u^n(t,z)\}_{n\in\mathbb{Z}}, \quad U = \{U^n(t,z)\}_{n\in\mathbb{Z}}.$$

По условию леммы последовательность $\{u_k^n\}$ сходится к $u^n$ по норме $\|\cdot\|_{r,c}$, следовательно, по лемме 9.4 $u^n \in \mathcal{C}$, $\quad u^n \ll U^n$, поэтому $u \in T$, и последовательность $\{u_k^n\}$ сходится к $u^n$ по любой норме $\|\cdot\|_{r',c}$, $\quad r' < R$.

Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N$, зависящий от $\varepsilon$ и от $r'$, такой, что при $k > N$ выполнено неравенство: $\|u_k - u\|^\infty_{r',c} < \varepsilon$. Действительно, в силу того, что $u_k, u \in T$, существует такой номер $m$, что при всех $k \in \mathbb{N}$ справедлива оценка:

$$\sum_{|n|>m} \|u_k^n\|_{r',c} + \sum_{|n|>m} \|u^n\|_{r',c} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Выберем номер $N$ так, чтобы при $k > N$ выполнялось неравенство:

$$\sum_{|n|\le m} \|u_k^n - u^n\|_{r',c} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Утверждение леммы вытекает из последних двух неравенств.

Лемма доказана.

С помощью леммы 9.5 получается

**Лемма 9.6** *Множество $W$ замкнуто в $\mathcal{C}^\infty$.*

Отметим еще одно утверждение, которое следует из леммы 9.5, если в качестве функции $U$ взять элемент пространства $\mathcal{H}^N$. Пусть

$$Q = \{u(z) \in \mathcal{H}^N \mid u \ll G \in \mathcal{H}^N\}.$$

**Лемма 9.7** *Если последовательность $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq Q$ сходится в смысле нормы $\|\cdot\|_r^N$, то предельная функция $u \in Q$, и указанная последовательность сходится к $u$ в смысле любой нормы $\|\cdot\|_{r'}^N, \quad r' < R$.*

**Лемма 9.8** *Пусть $f : T \to T$ – непрерывное (в смысле топологии полунормированных пространств) отображение. Тогда отображение $f$ непрерывно по любой норме $\|\cdot\|_{r,c}^\infty$.*

*Доказательство.* Пусть $u_n \to u$ при $n \to \infty$ по норме $\|\cdot\|_{r,c}^\infty$. Из леммы 9.5 следует, что $u_n \to u$ по любой норме $\|\cdot\|_{r',c}^\infty, \quad r' < R$. Поэтому $f(u_n) \to f(u)$ по любой норме $\|\cdot\|_{\rho,c}^\infty \quad (\rho < R)$, в частности, по норме $\|\cdot\|_{r,c}^\infty$.

Лемма доказана.

**Лемма 9.9** *Множество $W$ выпукло и компактно в $\mathcal{C}_r, \quad r < R$.*

*Доказательство.* Выпуклость множества $W$ проверяется прямым вычислением.

Проверим, что проекция $W_n$ множества $W$ в пространство $\mathcal{C}^n$ компактна. Проекция задается отображением

$$\{w^k\}_{k\in\mathbb{Z}} \mapsto (w^{-n}, \dots, w^n).$$

Действительно, множество $W_n$ равностепенно непрерывно: для любых $r < R$ и $\varepsilon > 0$ существует $\delta$, зависящее от $r$ и $\varepsilon$, что если $|t' - t''| < \delta$, то $\sup_{y \in W_n} \|y(t', z) - y(t'', z)\|_r^n < \varepsilon$. Это следует непосредственно из определения множества $W$. Можно считать, что $\delta = \varepsilon / \|F(U)\|_{r,c}^{\infty}$.

Замыкание множества $W_n(t) = \{x(t, z) \in W_n\} \subseteq \mathcal{H}^n$ ограничено[1] при всех $t \in I$ по лемме 9.7, так как все элементы множества $W_n(t)$ мажорируются вектором $(U^{-n}(t, z), \ldots, U^n(t, z))$. Следовательно, по теореме Монтеля (см. Дополнение) множества $\overline{W}_n(t)$ (чертой обозначено замыкание) компактны при всех $t \in I$. По теореме Асколи (см. Дополнение) множество $\overline{W}_n$ компактно в $\mathcal{C}^n$.

Множество $W_n$ вложено в $W$: каждый вектор из $W_n$ доопределяется нулями до бесконечного вектора, который принадлежит $W$. Используя этот факт и лемму 9.6, получаем, что множество $W_n$ замкнуто: $\overline{W}_n = W_n$, и, следовательно, в соответствии с доказанным выше, компактно.

Из определения множества $W$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ множество $W_n$ является $\varepsilon$-сетью в $W$ при некотором $n$. То есть для любого $r < R$ и $\varepsilon > 0$ найдется число $n$ такое, что при всех $w \in W$ выполнено неравенство $\|w_n - w\|_{r,c}^{\infty} < \varepsilon$, где $w_n \in W_n$ является проекцией элемента $w$.

Заметим, что из компактности какого-либо множества в $\mathcal{C}^n$ вытекает его компактность в $\mathcal{C}_r$, поэтому множество $W_n$ компактно в $\mathcal{C}_r$. Таким образом, множество $W_n$ является компактной $\varepsilon$-сетью в $W$ в смысле пространства $\mathcal{C}_r$, поэтому $W$ компактно [16].

Лемма доказана.

[1] Множество $V \subseteq \mathcal{H}^n$ называется ограниченным, если $\sup_{v \in V} \|v\|_r^n \leq L_r$, где $L_r$ – некоторые константы.

Докажем теорему 9.4. Проверим, что $P(W) \subseteq W$ (см. (2.8)). Действительно, пусть $w \in W$, тогда из определения мажорантной функции имеем $P(w) \ll U$. Обозначим $b(t, z) = P(w)$ и выполним оценку:

$$\|b(t', z) - b(t'', z)\|_r^\infty = \left\| \int_{t''}^{t'} f(w) ds \right\|_r^\infty \leq \|F(U)\|_{r,c}^\infty \cdot |t' - t''|.$$

Отображение $P$ непрерывно на $W$ в смысле пространства $\mathcal{C}_r$ по лемме 9.8. По теореме Шаудера (см. Дополнение) и лемме 9.9 отображение $P$ имеет неподвижную точку в $W$. Эта неподвижная точка является искомым решением задачи (2.5).

Теорема 9.4 доказана.

Проверим, что множество $D$ замкнуто в $\mathcal{C}_r$. Действительно, пусть последовательность $\{u_k\} \subset D$ сходится в $\mathcal{C}_r$ при $k \to \infty$, значит, по лемме 9.5 она сходится и в $\mathcal{C}^\infty$. Так как $D$ замкнуто в $\mathcal{C}^\infty$, то предел этой последовательности лежит в $D$.

Множество $D$ компактно в $\mathcal{C}_r$ как замкнутое подмножество компакта $W$. Доказательство завершается применением теоремы Шаудера к отображению $P$ и множеству $D$.

Теорема 9.5 доказана.

## 2.6 Дополнение

В применении к рассматриваемым задачам использованные в доказательстве теоремы можно сформулировать следующим образом.

**Теорема 9.8 (Монтель)** *Если множество $V \subseteq \mathcal{H}^N$ замкнуто и ограничено, то оно компактно.*

**Теорема 9.9 (Асколи)** *Если множество* $V \subseteq \mathcal{C}^N$ *равностепенно непрерывно, и замыкание множества* $V(t) = \{u(t,z) \in V\} \subseteq \mathcal{H}^N$ *компактно при любом* $t \in I$, *то замыкание множества* $V$ *компактно.*

**Теорема 9.10 (Шаудер)** *Непрерывное отображение выпуклого компактного подмножества банахова пространства в себя имеет неподвижную точку.*

## 3 Абстрактная теорема типа Пеано

В теории обыкновенных дифференциальных уравнений имеется две наиболее стандартных теоремы существования: теорема существования и единственности Коши – Пикара и теорема существования Пеано. Теорема Коши – Пикара утверждает, что если правая часть уравнения удовлетворяет условию Липшица, то задача Коши имеет единственное решение. Доказательство этой теоремы основано на принципе сжатых отображений. Теорема Пеано утверждает, что для существования решения достаточно, чтобы правая часть уравнения была непрерывной. Эта теорема доказывается из соображений компактности с помощью теоремы Арцела – Асколи.

Задача Коши для дифференциальных уравнений в частных производных в абстрактной постановке изучалась многими авторами в предположении того, что правые части уравнений удовлетворяют условиям Липшица.

Впервые в линейном варианте эта задача была рассмотрена в работах Яманаки [76] и Овсянникова [57], и, в несколько иной постановке, в работе Трева [74].

В работе [50] Ниренберг получил теорему существования и единственности для нелинейной задачи Коши – Ковалевской. Для доказательства Ниренберг использовал итерационную процедуру ньютоновского типа (см. теорему Нэша – Мозера), технически это доказательство близко к результатам КАМ-теории. В теореме Ниренберга правая часть уравнения считается сильно дифференцируемым отображением.

Нисида [52] упростил итерационную процедуру Ниренберга и показал, что сильную дифференцируемость можно заменить условиями типа Липшица.

В статье [66] Сафонов показал, что в подходящем банаховом пространстве теорема Ниренберга – Нисиды выводится из принципа сжатых отображений. Построение такого банахова пространства по исходной шкале является весьма тонкой задачей.

В этом разделе мы докажем теорему существования для абстрактной задачи Коши – Ковалевской без использования условий Липшица.

Мы предположим, что правая часть уравнений зависит от двух аргументов: она ограничена и непрерывна по первому аргументу (условия теоремы Пеано) и выпукла по второму аргументу. Как частный случай, эта постановка задачи включает в себя квазилинейные уравнения, правая часть которых зависит линейно от производных искомых функций и лишь непрерывно от самих функций.

## 3.1 Основная теорема

Пусть $\{(E_s, \|\cdot\|_s)\}_{0<s<1}$ – шкала банаховых пространств:

$$E_{s+\delta} \subseteq E_s, \quad \|\cdot\|_s \le \|\cdot\|_{s+\delta}, \quad s+\delta<1, \quad \delta>0. \tag{3.1}$$

Мы предполагаем, что все вложения (3.1) компактны. Такое предположение всегда выполнено для шкал аналитических функций.

Пусть $B_s(r) = \{u \in E_s \mid \|u\|_s < r\}$ – открытый шар в $E_s$, и пусть $\overline{B}_s(r)$ его замыкание. Основным объектом нашего изучения будет следующая задача Коши – Ковалевской:

$$u_t = A(t, u, u) + h(t, u), \quad u\,|_{t=0} = 0. \tag{3.2}$$

Для некоторых положительных констант $T, R, M, K$ отображения

$$A : [0, T] \times \overline{B}_{s+\delta}(R) \times \overline{B}_{s+\delta}(R) \to E_s,$$
$$h : [0, T] \times \overline{B}_{s+\delta}(R) \to E_s, \quad \delta > 0, \quad s + \delta < 1,$$

непрерывны, и если $u, v \in \overline{B}_{s+\delta}(R)$, то выполнены следующие неравенства:

$$\|A(t, u, v)\|_s \leq \frac{M\|v\|_{s+\delta}}{\delta}, \quad \|h(t, u)\|_s \leq K, \quad \delta > 0, \quad s + \delta < 1. \tag{3.3}$$

Пусть отображение $A$ выпукло по третьему аргументу: для всех $u, v, w \in \overline{B}_{s+\delta}(R)$ и $0 \leq \lambda \leq 1$ мы имеем

$$\|A(t, u, \lambda v + (1 - \lambda)w)\|_s \leq \lambda\|A(t, u, v)\|_s + (1 - \lambda)\|A(t, u, w)\|_s. \tag{3.4}$$

Например, если отображение $A$ линейно по третьему аргументу, то приведенное выше неравенство выполнено.

**Теорема 9.11** *Существует константа $a > 0$, настолько большая, что задача (3.2) имеет решение*

$$u(t) \in \bigcap_{1-s-\tau a>0} C^1([0, \tau], E_s).$$

Эта теорема не сводится к результатам Нисиды [52]. В теореме Нисиды накладываются некоторые условия типа условий Липшица:

$$\|f(t,u') - f(t,u'')\|_s \le \frac{M}{\delta}\|u' - u''\|_{s+\delta}, \quad u', u'' \in B_{s+\delta}(R), \quad s + \delta < 1,$$

где $f$ – правая часть дифференциального уравнения.

В нашем случае отображение $A$ зависит от трех аргументов. Первый аргумент – время, вместо второго и третьего аргумента подставляется искомая функция. Отображение $A$ ограничено по второму аргументу и неограничено по третьему. Поэтому достаточно предположить только непрерывность по второму аргументу и линейность или выпуклость по третьему.

Если отображение $A$ тождественно равно нулю, то теорема 9.11 является непосредственным обобщением конечномерного случая теоремы существования Пеано для шкал банаховых пространств.

В качестве примера рассмотрим шкалу аналитических функций в окрестности действительного $m$-мерного тора

$$\mathbb{T}^m_s = \{z = x + iy \in \mathbb{C}^m \mid x \in \mathbb{R}^m/(2\pi\mathbb{Z}^m), \quad |y| < s\}.$$

Пусть $E_s$ – пространство функций, аналитических в $\mathbb{T}^m_s$ и продолжаемых в замыкание $\overline{\mathbb{T}}^m_s$. В пространствах $E_s$ введены нормы равномерной сходимости. Если взять

$$A(t,u,v) = \sqrt{|u(0)|}\frac{\partial v(x)}{\partial x_1}, \quad h(t,u) = 1,$$

то соответствующая задача имеет решение по теореме 9.11, но результат Ниренберга – Нисиды не применим.

Единственности в теореме 9.11 может и не быть. Даже в случае одного дифференциального уравнения существуют системы с непрерывной (но нелипшицевой) правой частью, не имеющие единственности.

Переходим к доказательству теоремы 9.11.

## 3.2 Предварительные замечания

Введем треугольник:

$$\Delta = \{(\tau, s) \in \mathbb{R}^2 \mid \tau > 0, \quad 0 < s < 1, \quad 1 - s - \tau a > 0\}.$$

Рассмотрим полунормированное пространство $E = \bigcap_{(\tau,s)\in\Delta} C([0,\tau], E_s)$ с семейством норм:

$$\|u\|_{\tau,s} = \max_{0\le t\le\tau} \|u(t)\|_s.$$

Очевидно, что эти нормы удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\|\cdot\|_{\tau,s} \le \|\cdot\|_{\tau+\delta,s}, \quad \|\cdot\|_{\tau,s} \le \|\cdot\|_{\tau,s+\delta}, \quad \delta > 0. \tag{3.5}$$

Пространство $E$ является топологическим пространством с базисом топологии, определяемым открытыми шарами:

$$B_{\tau,s}(R) = \{u \in E \mid \|u\|_{\tau,s} < R\}.$$

**Определение 9.2** *Будем говорить, что множество $G \subseteq E$ равномерно непрерывно, если для всех $\varepsilon > 0$ и для всех $(\tau, s) \in \Delta$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, \tau, s) > 0$ такое, что если $t_1, t_2 \in [0, \tau]$ и $|t_1 - t_2| < \delta$, тогда*

$$\sup_{u\in G} \|u(t_1) - u(t_2)\|_s < \varepsilon.$$

*Назовем множество $G \subseteq E$ ограниченным, если существуют такие константы $M_{\tau,s}$, что для всех $u \in G$ мы имеем $\|u\|_{\tau,s} \le M_{\tau,s}$.*

Напомним лемму Арцела – Асколи [68]:

**Лемма 9.10** *Пусть $H \subset C([0,T],X)$ – множество в пространстве непрерывных функций со значениями в банаховом пространстве $X$. Предположим, что множество $H$ замкнуто, ограничено, равностепенно непрерывно и для каждого $t \in [0,T]$ множество $\{u(t) \in X\}$ является компактом в пространстве $X$. Тогда множество $H$ компактно в пространстве $C([0,T],X)$.*

Очевидно, подобный критерий компактности имеется и в пространстве $E$.

**Лемма 9.11** *Если замкнутое множество $G \subseteq E$ равностепенно непрерывно и ограничено, то оно является компактом.*

*Доказательство.* Пусть $(\tau, s)$ – произвольная точка в $\Delta$.

Так как множество $G$ ограничено и равностепенно непрерывно в пространстве $C([0,\tau],E_{s+\delta})$, то по лемме 9.10 оно компактно в пространстве $C([0,\tau],E_s)$. Следовательно, каждая последовательность $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset G$ содержит подпоследовательность, которая сходится по норме $\|\cdot\|_{\tau,s}$. Итак, остается доказать, что найдется подпоследовательность последовательности $\{u_k\}$, которая сходится по всем нормам $\|\cdot\|_{\tau,s}$ сразу.

Рассмотрим множество $\Delta_{\mathbb{Q}} = \Delta \bigcap \mathbb{Q}^2$. Это множество счетно, и пусть $\gamma : \mathbb{N} \to \Delta_{\mathbb{Q}}$ – соответствующая биекция.

Пусть $\{u_k^1\} \subseteq \{u_k\}$ – подпоследовательность, сходящаяся по норме $\|\cdot\|_{\gamma(1)}$. В силу приведенных выше рассуждений, существует подпоследовательность $\{u_k^2\} \subseteq \{u_k^1\}$, сходящаяся по норме $\|\cdot\|_{\gamma(2)}$ и т.д. Диагональная последовательность $\{u_k^k\}$ сходится по норме $\{\|\cdot\|_{\gamma(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$. Следовательно, благодаря неравенствам (3.5) она сходится по всем нормам.

## 3.3 Доказательство теоремы 9.11

Задача (3.2) очевидно эквивалентна следующей задаче о неподвижной точке :

$$u(t) = F(u) = \int_0^t A(\xi, u(\xi), u(\xi)) + h(\xi, u(\xi))\, d\xi. \tag{3.6}$$

Если решение уравнения (3.6) непрерывно по переменной $t$, то оно и дифференцируемо по $t$.

Пусть $S \subset E$ – множество, состоящее из таких элементов $v$, которые удовлетворяют следующим условиям:

1)

$$\|v(t)\|_s \leq R, \tag{3.7}$$

2) неравенство

$$\|A(t, u(t), v(t))\|_s \leq \frac{1}{\sqrt{1 - at - s}} \tag{3.8}$$

для всех $u \in E$ таких, что $\|u(t)\|_s \leq R$,

3) для $t_1, t_2 \in [0, \tau]$, $\quad (\tau, s) \in \Delta$ справедлива оценка

$$\|v(t_1) - v(t_2)\|_s \leq \left(K + \frac{1}{\sqrt{1 - s - a\tau}}\right)|t_1 - t_2|. \tag{3.9}$$

Заметим, что множество $S$ непусто: $0 \in S$.

Множество $S$ выпукло в силу условия (3.4) и компактно по лемме 9.11.

Если мы покажем, что

$$F(S) \subseteq S, \tag{3.10}$$

то доказательство теоремы 9.11 будет завершено применением теоремы Браудера о неподвижной точке к отображению $F$ и множеству $S$.

Итак, пусть $v \in S$. Проверим включение (3.10). Заметив, что

$$t < \frac{1}{a},$$

покажем, что отображение $F$ сохраняет неравенство (3.7):

$$\|F(v)\|_s \leq \int_0^t \|A(\xi, u, v(\xi)\|_s + \|h(\xi, v(\xi))\|_s \, d\xi \leq$$
$$\leq \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1 - a\xi - s}} + K \, d\xi = \frac{2}{a}\Big(\sqrt{1-s} - \sqrt{1 - at - s}\Big) + Kt \leq$$
$$\leq \frac{2+K}{a}. \tag{3.11}$$

Таким образом, неравенство (3.7) сохраняется отображением $F$, если мы возьмем в (3.11) $a \geq (2+K)/R$.

Для проверки неравенства (3.8) введем обозначение:

$$w(t) = A(t, v(t), v(t)) + h(t, v(t)).$$

С помощью неравенств (3.4), (3.3) и неравенства Йенсена [68] получим

$$\Big\|A(t, u, \int_0^t w(\xi)\, d\xi)\Big\|_s \leq \frac{1}{t}\int_0^t \|A(t, u, tw(\xi))\|_s \, d\xi \leq$$
$$\leq \frac{M}{t}\int_0^t \frac{\|tw(\xi)\|_{s+\delta}}{\delta}\Big|_{\delta = \frac{1-a\xi-s}{2}} d\xi \leq M\int_0^t \frac{\|w(\xi)\|_{s+\delta}}{\delta}\Big|_{\delta=\frac{1-a\xi-s}{2}} d\xi. \tag{3.12}$$

Последний член в (3.12) не больше, чем

$$M\int_0^t \frac{\|A(\xi, v(\xi), v(\xi))\|_{s+\delta} + \|h(\xi, v(\xi))\|_{s+\delta}}{\delta}\Big|_{\delta=\frac{1-a\xi-s}{2}} d\xi \leq$$
$$\leq M\int_0^t \Big(\frac{1}{\delta\sqrt{1 - a\xi - s - \delta}} + \frac{K}{\delta}\Big)\Big|_{\delta=\frac{1-a\xi-s}{2}} d\xi \leq \frac{C}{a\sqrt{1 - at - s}}, \tag{3.13}$$

где положительная константа $C$ не зависит от $s, t, a$. Взяв в (3.13) $a \geq C$, мы видим, что отображение $F$ сохраняет неравенство (3.8).

Проверим теперь условие (3.9). Предположим для определенности, что $t_2 \geq t_1$. Тогда неравенство (3.8) дает

$$\begin{aligned}\|F(v)(t_2) - F(v)(t_1)\|_s &\leq \int_{t_1}^{t_2} \|A(\xi, v(\xi), v(\xi))\|_s + \|h(\xi, v(\xi))\|_s \, d\xi \leq \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\sqrt{1 - a\xi - s}} + K \, d\xi \leq \\ &\leq \Big(K + \frac{1}{\sqrt{1 - s - a\tau}}\Big)(t_2 - t_1).\end{aligned}$$

Теорема 9.11 доказана.

## 4 Дальнейшие обобщения задачи Коши – Ковалевской

В этом разделе мы рассмотрим задачу Коши – Ковалевской с многомерным временем. Несмотря на некоторую провокационность такого названия, речь пойдет о классе дифференциальных уравнений, отдельные представители которого часто встречаются в задачах дифференциальной геометрии и теории групп Ли [67, 13]. В частности, это проблемы типа Пфаффа или Фробениуса об интегрируемости распределений. Почему мы говорим здесь о многомерном времени, станет ясно из формы самих уравнений.

Введем обозначения. Пусть

$$x = (x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{C}^m, \quad u = (u^1, \dots, u^p), \quad t = (t^1, \dots, t^n) \in \mathbb{C}^n.$$

Далее мы будем пользоваться Эйнштейновским соглашением о суммировании.

Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial u^j}{\partial t^k} = f^{j,s}_{k,l}(t, x, u)\frac{\partial u^l}{\partial x^s} + g^j_k(t, x, u), \quad u^j \mid_{t=0} = 0. \tag{4.1}$$

Функции $f^{j,s}_{k,l}, g^j_k$ голоморфны в окрестности нуля пространства

$$\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^p.$$

При $n = 1$ мы получаем стандартную задачу Коши – Ковалевской в квазилинейной постановке. При $f^{j,s}_{k,l}(t, x, u) \equiv 0$ получается задача, эквивалентная задаче Фробениуса об интегрируемости распределений.

Функционал, стоящий в правой части системы, будем обозначать через $A^j_k$:

$$A^j_k\Big(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\Big) = f^{j,s}_{k,l}(t, x, u)\frac{\partial u^l}{\partial x^s} + g^j_k(t, x, u),$$

где $\frac{\partial u}{\partial x} = \Big(\frac{\partial u^l}{\partial x^s}\Big)$.

Прежде чем переходить к формулировке результата, дадим определение полной производной по $t$ в силу системы (4.1). Рассмотрим функцию $h = h\Big(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\Big)$, и пусть $\eta = (\eta^\rho_\tau) = \Big(\frac{\partial u^\rho}{\partial x^\tau}\Big)$.

Производной в силу системы (4.1) от $h$ назовем следующий набор функций:

$$D_k h(t, x, u, \eta) = \frac{\partial h}{\partial t^k} + \frac{\partial h}{\partial u^j} A^j_k(t, x, u, \eta) + \frac{\partial h}{\partial \eta^\rho_\tau}\frac{\partial}{\partial x^\tau} A^\rho_k(t, x, u, \eta).$$

Пусть $q = m + n$, обозначим через

$$B_r = \{z = (z_1, \dots, z_q) \in \mathbb{C}^q \mid |z| < r\}, \quad |z| = \max_i |z_i|$$

поликруг в $\mathbb{C}^q$.

Введем множество

$$W = \Big\{u(t, x) \in \bigcup_{0<s} \mathcal{O}(B_s) \mid D_k A^j_i\Big(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\Big) = D_i A^j_k\Big(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\Big)\Big\},$$

состоящее из ростков аналитических функций $u(t, x)$, удовлетворяющих равенству

$$D_k A^j_i\Big(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\Big) = D_i A^j_k\Big(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\Big). \tag{4.2}$$

Всевозможные "условия интегрируемости" в известных задачах дифференциальной геометрии эквивалентны тому, чтобы это равенство было выполнено тождественно для всех ростков.

Рассмотрим дифференциальные формы

$$\omega^j = A_i^j\Big(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\Big)dt^i.$$

С помощью этих форм построим отображение

$$P(u) = (P^1, \dots, P^p)(u), \quad P^j(u) = \int_{[0,t]} \omega^j,$$

где $[0, t]$ – отрезок в $\mathbb{C}^n$.

**Теорема 9.12** *Предположим, что множество $W$ содержит $0$, выпукло и*

$$P(W) \subseteq W. \tag{4.3}$$

*Тогда задача (4.1) имеет решение $u(t, x)$, голоморфное в окрестности начала координат в $\mathbb{C}^q$.*

Эта теорема доказывается по схеме уже полученных ранее результатов. Например, с помощью мажорантного метода, при этом мажорирование надо производить по обоим наборам переменных $(t, x)$. Найденная в результате этого неподвижная точка отображения $P$ является решением поставленной задачи.

Равенства (4.2) – это просто условия замкнутости форм $\omega^j$. Так как эти формы замкнуты, интеграл в определении отображения $P$ не зависит от пути, и поэтому отображение $P$ определено корректно.

Обсудим неформально мажорантный метод для задачи (4.1). Мы будем действовать в русле доказательства классической теоремы Коши –

Ковалевской [15]. Пусть $\tau = t^1 + \ldots + t^n$ и $\xi = x^1 + \ldots + x^m$. Тогда решение $u(t,x)$ будем мажорировать функцией $U(\tau,\xi)$. Пусть теперь

$$f_{k,l}^{j,s}(t,x,u) \ll F(\tau,\xi,U), \quad g_k^j(t,x,u) \ll G(\tau,\xi,U).$$

Тогда мажорантная задача имеет вид

$$U_\tau = F(\tau,\xi,U)U_\xi + G(\tau,\xi,U), \quad U\mid_{\tau=0} = 0.$$

Решение этой мажорантной задачи существует в силу стандартной теоремы Коши – Ковалевской. Таким образом, нам следует искать неподвижную точку отображения $P$ на множестве

$$V = \{u(t,x) \in \mathcal{O}(B_r) \mid u \ll U\} \bigcap W.$$

В силу условия теоремы и по свойствам мажорант $P(V) \subseteq V$. Кроме того, множество $V$ компактно в $\mathcal{O}(B_r)$, выпукло и непусто: $0 \in V$. Следовательно, по теореме Браудера отображение $P$ имеет в $V$ неподвижную точку.

## 5 Задачи

Рассмотрим локально выпуклое линейное пространство периодических функций

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^m} f_n e^{i(n,x)}$$

с нормами

$$\|f\|_{s,\rho} = \sum_{n\in\mathbb{Z}^m} |f_n| e^{s|n|^\rho}, \quad s \in (s_1,s_2), \quad \rho \in (\rho_1,\rho_2).$$

Обозначим его через $E$.

**Задача 9.1** *Выяснить, является ли оператор частного дифференцирования $\partial/\partial x_j$ непрерывным в этом пространстве. Для этого получить оценки типа оценок Коши (1.13).*

**Задача 9.2** *С помощью теоремы Овсянникова исследовать разрешимость задачи Коши – Ковалевской в шкале банаховых пространств*

$$\{E_{s,\rho}\}_{s\in(s_1,s_2)},$$

*которые состоят из функций с конечными нормами $\|\cdot\|_{s,\rho}$. Параметр $\rho$ фиксирован.*

**Задача 9.3** *Выяснить, при каких значениях $s, \rho$ пространство $E_{s,\rho}$ является банаховой алгеброй относительно операции умножения рядов Фурье.*

**Задача 9.4** *Выяснить, обладает ли пространство $E$ свойством Монтеля.*

**Задача 9.5** *Оценить время существования решения в системе*

$$u_t(t,z) = be^{-at}(u_z(t,z))^2 + \sqrt{|u(t,0)|}, \quad u(0,z) = \frac{1}{1-z}, \quad t \geq 0.$$

*в зависимости от значений констант $a, b \geq 0$. Пространственная переменная $z \in \mathbb{C}$ принадлежит окрестности нуля.*

**Задача 9.6** *Предложить достаточные условия единственности решения в теореме 9.11.*

**Задача 9.7** *Докажите, что нелинейная задача Коши – Ковалевской*

$$u_t = f(t,x,u,u_x), \quad u\,|_{t=0} = u_0(x)$$

*эквивалентна квазилинейной задаче типа*

$$v_t = g(t, x, v)v_x + h(t, x, v), \quad v\,|_{t=0} = v_0(x),$$

*здесь* $u, v$ *– векторнозначные функции, оператор* $g(t, x, v)v_x$ *линеен по* $v_x$.

*Какие предположения относительно* $f$ *нужно сделать?*

**Задача 9.8** *Можно ли доказать теорему 9.12 с помощью классической мажорантной техники?*

**Задача 9.9** *Является ли условие выпуклости множества* $W$ *в теореме 9.12 необходимым?*

**Задача 9.10** *Предположим, что* $f_{k,l}^{j,s} = 0$. *Можно ли доказать теорему существования в задаче 4.1, отказавшись от предположения аналитичности?*

# Глава 10

# Параболические уравнения

## 1 Теорема типа Пеано для параболического уравнения

Этот раздел посвящен квазилинейным параболическим уравнениям с нелипшицевыми нелинейностями. В классической постановке квазилинейная начальная параболическая задача ставится следующим образом:

$$u_t = f(t, u, \nabla^k u) + Au, \quad u|_{t=0} = \widehat{u}. \tag{1.1}$$

Здесь $A$ – линейный эллиптический оператор порядка $n$, а член $\nabla^k u$ обозначает производные функции $u$ до порядка $k$ включительно. Кроме того, к уравнению (1.1) нужно добавить граничные условия.

Если функция $\widehat{u}$ принадлежит подходящему пространству, отображение $f$ является липшицевым (в некотором смысле) и $k < n$, то задача (1.1) имеет единственное локальное по времени решение. Это легко выводится при помощи принципа сжимающих отображений.

Мы рассматриваем случай, когда функция $f$ не является липшицевой. Хорошо известно (см. [33, 1, 77]), что в общем случае бесконечномерного банахового пространства начальная задача для дифференциального уравнения с нелипшицевой правой частью не имеет решений. Тем не менее начальная задача, как правило, ставится не в одном банаховом пространстве, а в шкале таких пространств. Более того, пространства в шкале вполне непрерывно вложены. Таковы, например, шкала соболевских пространств, шкала пространств аналитических функций. Это подсказывает нам, что искать решение надо изучая задачу во всей шкале.

Отметим еще одно свойство уравнений вида (1.1). Если мы опустим предположение о липшицевости $f$, то получим класс систем, для которых теорема существования справедлива даже в случае $k \geq n$. Системы такого типа остаются параболическими (в некотором обобщенном смысле).

Этот эффект имеет место не только для параболических уравнений. Если рассмотреть задачу Коши – Ковалевской в нелипшицевой постановке (см. [78]), то найдутся такие уравнения, что порядок производных в их правой части выше, чем в левой, а решение тем не менее существует.

Такие задачи относятся не к теории классических уравнений в частных производных, а к теории функционально-дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с нелокальными членами.

Основные методы исследования, применяемые в данной работе, – это теорема Шаудера о неподвижной точке для локально выпуклых пространств и теория шкал банаховых пространств. Другие подходы к абстрактным параболическим задачам в липшицевой постановке можно найти в [26, 30].

## 1.1 Основная теорема

Рассмотрим две шкалы банаховых пространств

$$\left\{E_s, \|\cdot\|_s^E\right\}_{s>0} \quad \text{и} \quad \left\{G_s, \|\cdot\|_s^G\right\}_{s>0}$$

такие, что $E_s \subseteq G_s$ для всех $s > 0$. Все вложения $E_{s+\delta} \subseteq E_s,\ \delta > 0$, вполне непрерывны и

$$\|\cdot\|_s^E \leq \|\cdot\|_{s+\delta}^E. \tag{1.2}$$

Параметр $s$ не обязательно пробегает всю положительную вещественную полуось. Мы не используем пространства $E_s, G_s$ с большими значениями $s$, поэтому можно, например, считать, что $s \in (0,1)$. Лишь для простоты мы считаем $s$ положительным.

Введем константы $C, T, R > 0$ и $\phi, \alpha \geq 0$.

Пусть $S^t : G_s \to E_s,\ t > 0$ есть сильно непрерывная линейная полугруппа в том смысле, что для любого элемента $u \in E_s$ выполнены следующие соотношения:

$$\|S^t u - u\|_s^E \to 0 \quad \text{при} \quad t \searrow 0,$$
$$\|S^t u\|_s^E \leq C\|u\|_s^E.$$

**Определение 10.1** *Полугруппа $S^t$ называется параболической, если существует такая постоянная $\gamma > 1$, что неравенство*

$$\|S^t u\|_{s+\delta}^E \leq \frac{C}{t^\phi}\|u\|_s^G \tag{1.3}$$

*выполняется при любых $\delta, t > 0,\ \delta^\gamma < t < T$.*

Пусть $B_s(r)$ – открытый шар радиуса $r$ с центром в начале координат в пространстве $E_s$. Пусть $f : (0,T] \times \overline{B}_{s+\delta}(R) \to G_s$ – такая непрерывная функция, что неравенство

$$\|f(t,u)\|_s^G \le \frac{C}{\delta^\alpha} \tag{1.4}$$

выполняется при $(s+\delta)^\gamma < t \le T$ и $u \in \overline{B}_{s+\delta}(R)$.

**Замечание 10.1** *Случай*

$$\|f(t,u)\|_s^G \le \frac{C}{t^\beta \delta^\alpha}, \quad \beta > 0,$$

*довольно распространен, однако, поскольку $\delta^\gamma < t$, он сводится к (1.4): $C/(t^\beta\delta^\alpha) \le C/\delta^{\beta\gamma+\alpha}$.*

Далее мы рассмотрим две постановки рассматриваемой задачи. Первая – классическая (и мы находим классические решения), а вторая – обобщенная (в этом случае получаем обобщенные решения).

В обобщенной постановке мы ищем решения следующего интегрального уравнения:

$$u(t) = \int_0^t S^{(t-\xi)} f(\xi, u(\xi))\, d\xi. \tag{1.5}$$

В классической постановке мы накладываем несколько дополнительных условий. А именно пусть $G_s = E_s$. Введем линейный оператор $A : E_{s+\delta} \to E_s$ и предположим, что полугруппа $S^t = e^{At}$, генерируемая этим оператором, такова, что

$$\lim_{h\to 0+} \left\| \frac{1}{h}\left(e^{Ah} - \mathrm{id}_{E_{s+\delta}}\right)u - Au \right\|_s^E = 0 \tag{1.6}$$

для любого $u \in E_{s+\delta}$.

В классической постановке рассматриваемая задача имеет вид

$$u_t = f(t,u) + Au, \tag{1.7}$$

$$u\,|_{t=0} = 0. \tag{1.8}$$

Смысл начального условия (1.8) будет прояснен ниже.

Теперь дадим определение.

**Определение 10.2** *Будем называть задачу (1.7) или (1.5) параболической, если полугруппа $S^t$ — параболическая и*

$$\chi = \phi + \frac{\alpha}{\gamma} < 1.$$

В случае, указанном в замечании 10.1, имеем $\chi = \phi + \beta + \alpha/\gamma$.

Пусть пространство $E^1(T),\ T > 0$ задано формулой

$$E^1(T) = \bigcap_{0<s^\gamma<\tau<T} C^1((\tau, T), E_s). \tag{1.9}$$

Это пространство состоит из всех функций $u$, отображающих любое число $t \in (0, T)$ в элемент $u(t) \in \bigcap_{0<s^\gamma<t} E_s$, а сужение $u\,|_{(\tau,T)}$ принадлежит пространству $C^1((\tau, T), E_s)$ для всех $s \in (0, \tau^{1/\gamma})$.

**Теорема 10.1**

1. Классическая постановка. *Пусть задача (1.7) — параболическая. Тогда существует такая постоянная $T_* > 0$, что эта задача имеет решение $u(t) \in E^1(T_*)$ и для любой постоянной $c \in (0, 1)$ справедливо соотношение*

$$\|u(t)\|^E_{ct^{1/\gamma}} \to 0 \quad \text{при} \quad t \searrow 0. \tag{1.10}$$

*Функция $u(t)$ удовлетворяет и уравнению (1.5).*

2. Обобщенная постановка. *Пусть задача (1.5) — параболическая. Тогда существует такая постоянная $T_* > 0$, что эта задача имеет решение*

$$u(t) \in E(T_*) = \bigcap_{0<s^\gamma<\tau<T_*} C((\tau, T_*), E_s).$$

*В обоих случаях постоянная $T_*$ зависит только от $C, \alpha, \gamma, \phi$.*

Теорема 10.1 доказывается в разделах 1.2 и 1.3.

Затем, чтобы продемонстрировать эффект, о котором говорилось во введении, теорема 10.1 применяется к нелокальным параболическим задачам. Чтобы сравнить наш результат с результатами, полученными ранее, мы также рассматриваем уравнение Навье – Стокса.

Если $A$ – это классический оператор Лапласа, а параболическое уравнение рассматривается в подходящей области, то $\gamma = 2$, а неравенство из формулы (1.9) принимает вид $0 < s^2 < \tau$.

Параметр $s$ обозначает пространственную переменную, поэтому последнее неравенство определяет параболическую область в плоскости $(\tau, s)$. Это придает новый смысл термину «параболическое уравнение».

Отметим, что, если $G_s = E_s = \mathbb{R}^m$, $\|\cdot\|_s^E = |\cdot|$, $s > 0$, $A = 0$, то теорема 10.1 обобщает классическую теорему Пеано на случай, когда правая часть уравнения удовлетворяет (1.4) с $s = \delta = (t/3)^{1/\gamma}$.

## 1.2 Предварительные сведения из функционального анализа

В этом разделе приведены некоторые факты из функционального анализа. Они будут использованы в разделе 1.3 при доказательстве теоремы 10.1.

Рассмотрим пространства

$$C([\tau, T], E_{\mu\tau^{1/\gamma}}), \quad 0 < \mu < 1, \quad 0 < \tau < T,$$

со стандартными нормами, и построим проективный предел этих пространств. Определим пространство $E(T)$ следующим образом:

$$E(T) = \bigcap_{0<\mu<1} \bigcap_{0<\tau<T} C([\tau, T], E_{\mu\tau^{1/\gamma}}).$$

Есть и другое, эквивалентное определение пространства $E(T)$:

$$E(T) = \bigcap_{0<s^\gamma<\tau<T} C([\tau, T], E_s).$$

Пространство $E(T)$, снабженное набором полунорм

$$\|u\|_{\tau,\mu} = \max_{\tau\le\xi\le T} \|u(\xi)\|^E_{\mu\tau^{1/\gamma}}, \quad u \in E(T), \tag{1.11}$$

становится локально выпуклым топологическим пространством.

Очевидно, эти полунормы удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\|u\|_{\tau,\mu} \le \|u\|_{\tau,\mu+\delta}, \quad \delta > 0, \tag{1.12}$$

$$\|u\|_{\tau,r\mu} \le \|u\|_{r^\gamma\tau,\mu}, \quad 0 < r \le 1. \tag{1.13}$$

Действительно, формула (1.12) непосредственно следует из (1.2). Формула (1.13) вытекает из оценки

$$\|u\|_{\tau,r\mu} = \max_{\tau\le\xi\le T} \|u(\xi)\|^E_{\mu(r^\gamma\tau)^{1/\gamma}} \le \max_{r^\gamma\tau\le\xi\le T} \|u(\xi)\|^E_{\mu(r^\gamma\tau)^{1/\gamma}} = \|u\|_{r^\gamma\tau,\mu}.$$

Из формул (1.12), (1.13) следует, что $E(T)$ — это топологическое пространство, удовлетворяющее первой аксиоме счетности: топология этого пространства может быть задана полунормами (1.11) только при $\mu, \tau \in \mathbb{Q}$.

Напомним теорему Арцела – Асколи (см. [68]).

**Теорема 10.2** *Пусть $H \subset C([0, T], X)$ есть множество в пространстве непрерывных функций со значениями в банаховом пространстве $X$. Пусть множество $H$ замкнуто, ограничено и равномерно непрерывно, а множество $\{u(t) \in X : u \in H\}$ компактно в пространстве $X$*

*для любого* $t \in [0, T]$. *Тогда множество* $H$ *компактно в пространстве* $C([0, T], X)$.

Теперь установим один из аналогов этого результата.

**Предложение 10.1** *Пусть множество* $K \subset E(T)$ *замкнуто. Тогда* $K$ *компактно, если выполнены два следующих условия*:

1. *Множество* $K$ *ограничено.*

2. *Для любых* $\varepsilon > 0$, $\tau \in (0, T)$, $\mu \in (0, 1)$ *существует такая константа* $\delta > 0$, *что если* $t', t'' \in [\tau, T]$ *и* $|t' - t''| < \delta$, *то*

$$\sup_{u \in K} \|u(t') - u(t'')\|^E_{\mu\tau^{1/\gamma}} < \varepsilon$$

(*это означает, что* $K$ – *равномерно непрерывное множество*).

Прежде всего докажем следующую лемму.

**Лемма 10.1** *Пусть* $\{v_j\} \subseteq K$ – *последовательность. Тогда для любого* $\tau \in (0, T)$ *эта последовательность содержит подпоследовательность, сходящуюся во всех нормах*

$$\| \cdot \|_{\tau, \mu}, \ \ \mu \in (0, 1).$$

*Доказательство.* Действительно, возьмем возрастающую последовательность $\mu_k \to 1$, $\mu_1 > 0$, и зафиксируем любое значение $\tau \in (0, T)$. Поскольку последовательность $\{v_j\}$ ограничена и равномерно непрерывна в $C([\tau, T], E_{\mu_2\tau^{1/\gamma}})$, то в силу теоремы 10.2 она содержит подпоследовательность $\{v_j^1\}$, сходящуюся в $C([\tau, T], E_{\mu_1\tau^{1/\gamma}})$.

Далее, последовательность $\{v_j^1\}$ ограничена и равномерно непрерывна в $C([\tau, T], E_{\mu_3\tau^{1/\gamma}})$. Значит, можно выбрать такую подпоследовательность

$\{v_j^2\} \subseteq \{v_j^1\}$, что последовательность $\{v_j^2\}$ сходится в $C([\tau, T], E_{\mu_2 \tau^{1/\gamma}})$ и т. д.

В силу неравенства (1.12) диагональная последовательность $\{v_j^j\}$ сходится во всех нормах $\| \cdot \|_{\tau,\mu}$, $\mu \in (0,1)$, при выбранном фиксированном $\tau$.

*Доказательство предложения* 10.1. Множество $P = \mathbb{Q} \cap (0, T)$ счетно. Следовательно, его элементы можно занумеровать следующим образом: $P = \{\tau_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.

Мы должны показать, что любая последовательность $\{u_j\} \subseteq K$ содержит сходящуюся подпоследовательность $\{u_{j_k}\}$.

По лемме 10.1 существует подпоследовательность $\{u_j^1\} \subseteq \{u_j\}$, сходящаяся во всех нормах $\| \cdot \|_{\tau_1,\mu}$, $\mu \in (0,1)$. Точно так же доказывается, что существует последовательность $\{u_j^2\} \subseteq \{u_j^1\}$, сходящаяся во всех нормах $\| \cdot \|_{\tau_2,\mu}$, $\mu \in (0,1)$, и т. д.

Диагональная последовательность $\{u_j^j\}$ сходится во всех нормах

$$\| \cdot \|_{\tau_k,\mu}, \ k \in \mathbb{N}, \ \mu \in (0,1).$$

В силу неравенства (1.13) последовательность $\{u_j^j\}$ сходится во всех нормах $\| \cdot \|_{\tau,\mu}$, $\tau \in (0,T)$, $\mu \in (0,1)$.

Предложение 10.1 доказано.

**Лемма 10.2** *Пусть $X$ и $Y$ – банаховы пространства. Предположим, что $A_a : X \to Y$, $a' > a > 0$, – такой набор ограниченных линейных операторов, что для любого $x \in X$ справедливы соотношения*

$$\sup_{a' > a > 0} \|A_a x\|_Y < \infty,$$

$$\|A_a x\|_Y \to 0 \quad \text{при} \quad a \to 0.$$

*Тогда*

$$\sup_{x\in B}\|A_a x\|_Y \to 0 \quad \textit{при} \quad a\to 0$$

*для любого компактного множества $B\subset X$.*

Этот результат непосредственно следует из теоремы Банаха – Штейнгауза (см. [68]).

Напомним обобщенную версию теоремы Шаудера о неподвижной точке.

**Теорема 10.3 (см. [28])** *Пусть $W$ – замкнутое выпуклое подмножество локально выпуклого пространства $E$. Тогда всякое компактное непрерывное отображение $f : W \to W$ имеет неподвижную точку $\widehat{u}$, т. е. $f(\widehat{u}) = \widehat{u}$.*

## 1.3 Доказательство теоремы 10.1

Положим

$$W(T_*) = \{u\in E(T_*) \mid \|u\|_{\tau,\nu} \le R,\ 0<\tau<T_*,\ 0<\nu<1\}.$$

Постоянная $T_*>0$ будет определена ниже.

Прежде всего, найдем неподвижную точку отображения

$$F(u) = \int_0^t S^{t-\xi} f(\xi, u(\xi))\, d\xi.$$

Эта неподвижная точка и будет обобщенным решением, о существовании которого говорится во второй части утверждения теоремы. Затем, используя формулу (1.6), мы покажем, что эта неподвижная точка есть искомое решение задачи (1.7).

**Лемма 10.3** *Если постоянная $T_*$ достаточно мала, то отображение $F$ переводит $W(T_*)$ в себя.*

*Доказательство.* Пусть постоянные $t$ и $s$ таковы, что $0 < s < t^{1/\gamma}$ и $t \leq T_*$. Пусть $u \in W(T_*)$. Оценим функцию $v(t) = F(u)$:

$$\|v(t)\|_s^E \leq \int\limits_0^t \|S^{t-\xi} f(\xi, u(\xi))\|_s^E \, d\xi = X + Y, \tag{1.14}$$

где

$$X = \int\limits_0^{t-s^\gamma} \|S^{t-\xi} f(\xi, u(\xi))\|_s^E \, d\xi, \quad Y = \int\limits_{t-s^\gamma}^t \|S^{t-\xi} f(\xi, u(\xi))\|_s^E \, d\xi.$$

Чтобы оценить слагаемое $X$, выберем постоянные $\varepsilon$ и $\mu$ так, чтобы

$$0 < \varepsilon < \frac{s}{t^{1/\gamma}} < \mu < 1 \tag{1.15}$$

($\varepsilon$ выбирается достаточно малым, а $\mu$ — достаточно близким к единице).

Введем переменные $\delta$ и $\delta'$:

$$\delta = s - \varepsilon\xi^{1/\gamma}, \quad \delta' = \xi^{1/\gamma}(\mu - \varepsilon).$$

Учитывая, что $\xi \in (0, t - s^\gamma]$, получаем, что $\delta, \delta'$ положительны и

$$s - \delta > 0, \quad s - \delta + \delta' < \xi^{1/\gamma}, \quad \delta < (t - \xi)^{1/\gamma}. \tag{1.16}$$

Из среднего неравенства следует, что

$$u(\xi) \in \overline{B}_{s-\delta+\delta'}(R), \tag{1.17}$$

а значит, слагаемое $X$ оценивается следующим образом:

$$X \le C \int\limits_0^{t-s^\gamma} (t-\xi)^{-\phi} \|f(\xi, u(\xi))\|_{s-\delta}^G \, d\xi \le C^2 \int\limits_0^{t-s^\gamma} \frac{1}{\delta'^\alpha (t-\xi)^\phi} \, d\xi \le$$
$$\le \frac{C^2}{(\mu-\varepsilon)^\alpha} \int\limits_0^{t-s^\gamma} \frac{d\xi}{(t-\xi)^\phi \xi^{\alpha/\gamma}}\Big|_{\xi=yt} = \tag{1.18}$$
$$= \frac{C^2 t^{1-\chi}}{(\mu-\varepsilon)^\alpha} \int\limits_0^{1-s^\gamma/t} \frac{dy}{(1-y)^\phi y^{\alpha/\gamma}} \le \frac{C^2 J t^{1-\chi}}{(\mu-\varepsilon)^\alpha},$$

где

$$J = \int\limits_0^1 \frac{dy}{(1-y)^\phi y^{\alpha/\gamma}}.$$

Оценим теперь слагаемое $Y$. Введем функцию $\psi$:

$$\psi(y) = y^{1/\gamma} + (1-y)^{1/\gamma} - 1.$$

В интервале $(0,1)$ эта функция положительна. Определим константу $I$ следующим образом:

$$I = \int\limits_0^1 \frac{dy}{(1-y)^\phi (\psi(y))^\alpha}.$$

Константа $\mu$ определена выше. Переопределим переменные $\delta$, $\delta'$ следующим образом:

$$\delta = \mu(t-\xi)^{1/\gamma}, \quad \delta' = \mu\xi^{1/\gamma} + \delta - s.$$

Теперь переменная $\xi$ принадлежит $[t-s^\gamma, t]$, а значит, переменные $\delta$ и $\delta'$ положительны и удовлетворяют неравенствам (1.16).

Единственным нетривиальным моментом является доказательство положительности переменной $\delta'$. Вначале заметим, что

$$\delta' = \mu\xi^{1/\gamma} + \mu(t-\xi)^{1/\gamma} - s = t^{1/\gamma}\Big(\mu y^{1/\gamma} + \mu(1-y)^{1/\gamma} - \frac{s}{t^{1/\gamma}}\Big) \tag{1.19}$$

(напомним, что $y = \xi/t$). Из (1.19) следует, что

$$\delta' > t^{1/\gamma}\mu\psi(y). \tag{1.20}$$

Как и раньше, включение (1.17) выполнено для новых $\delta$, $\delta'$.

Теперь можно оценить слагаемое $Y$. Из (1.20) следует, что

$$\begin{aligned} Y &\le C \int\limits_{t-s^\gamma}^{t} (t-\xi)^{-\phi} \|f(\xi, u(\xi))\|^G_{s-\delta} d\xi \le C^2 \int\limits_{t-s^\gamma}^{t} \frac{d\xi}{(t-\xi)^\phi \delta'^\alpha} \le \\ &\le \frac{C^2 t^{1-\chi}}{\mu^\alpha} \int\limits_{1-s^\gamma/t}^{1} \frac{dy}{(1-y)^\phi (\psi(y))^\alpha} \le \frac{C^2 I}{\mu^\alpha} t^{1-\chi}. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Теперь утверждение леммы следует из формул (1.14), (1.18), (1.21).

**Следствие 10.1** *Из формул (1.18), (1.21) следует, что если* $0 < s^\gamma < t \le T_*$ *и* $v(t) = F(u)$, $u \in W(T_*)$, *то найдется такая положительная постоянная* $c_2$, *не зависящая от* $u, t, s$, *что*

$$\|v(t)\|^E_s \le c_2 t^{1-\chi}.$$

**Лемма 10.4** *Множество* $F(W(T_*))$ *предкомпактно в* $E(T_*)$.

*Доказательство.* В силу предложения 10.1 достаточно доказать, что множество $F(W(T_*))$ равномерно непрерывно.

Пусть $u \in W(T_*)$, $v(t) = F(u)$. Мы должны показать, что если $t', t'' \ge \tau$, $\tau \in (0, T_*)$, то

$$\sup_{u \in W(T_*)} \|v(t') - v(t'')\|^E_{\mu\tau^{1/\gamma}} \to 0 \quad \text{при} \quad |t' - t''| \to 0$$

для любого $\mu \in (0,1)$.

Действительно, предположим для определенности, что $t'' > t'$. Тогда

$$v(t'') - v(t') = \int\limits_{t'}^{t''} S^{t''-\xi} f(\xi, u)\, d\xi + \tag{1.22}$$

$$+ \left(S^{t''-t'} - \mathrm{id}_{E_s}\right) \int\limits_{0}^{t'} S^{t'-\xi} f(\xi, u)\, d\xi, \quad s^\gamma < \tau.$$

Выбирая положительную постоянную $\delta$ так, что $(s+\delta)^\gamma < \tau$, и используя параболичность полугруппы $S^t$, оценим первое слагаемое правой части последнего равенства:

$$\left\| \int\limits_{t'}^{t''} S^{t''-\xi} f(\xi, u)\, d\xi \right\|_s^E \leq C \int\limits_{t'}^{t''} (t'' - \xi)^{-\phi} \|f(\xi, u)\|_s^G \, d\xi \leq$$

$$\leq C^2 \int\limits_{t'}^{t''} \frac{d\xi}{\delta^\alpha (t'' - \xi)^\phi} = \frac{C^2}{\delta^\alpha (1 - \phi)} (t'' - t')^{1-\phi}.$$

Таким образом, первое слагаемое правой части (1.22) равномерно стремится к нулю.

Рассмотрим множество

$$U = \bigcup_{\tau \leq t' \leq T_*} \left\{ \int\limits_{0}^{t'} S^{t'-\xi} f(\xi, u)\, d\xi \;\middle|\; u \in W(T_*) \right\}.$$

По лемме 10.3 множество $U$ ограничено в любом пространстве $E_{\mu' \tau^{1/\gamma}}$ с $1 > \mu' > \mu$. Значит, оно компактно в $E_{\mu \tau^{1/\gamma}}$. По лемме 10.2 имеем

$$\sup_{w \in U} \|S^{t''-t'} w - w\|_{\mu \tau^{1/\gamma}}^E \to 0 \quad \text{при} \quad t'' - t' \to 0.$$

Отсюда следует, что и второе слагаемое правой части (1.22) равномерно стремится к нулю.

**Следствие 10.2** *Множество $F(W(T_*))$ равномерно непрерывно относительно переменной $t$.*

**Лемма 10.5** *Отображение $F : W(T_*) \to W(T_*)$ непрерывно в топологии пространства $E(T_*)$.*

*Доказательство.* Пусть последовательность $\{v_l\} \subset W(T_*)$ сходится к $v \in W(T_*)$ при $l \to \infty$. Нам нужно показать, что для любого $s^\gamma < \tau < T_*$ последовательность

$$\sup_{\tau \le t \le T_*} \left\| \int\limits_0^t S^{t-\xi} f(\xi, v_l(\xi))\, d\xi - \int\limits_0^t S^{t-\xi} f(\xi, v(\xi))\, d\xi \right\|_s^E$$

стремится к нулю при $l \to \infty$.

В силу следствия 10.2 последовательность

$$\left\{ \int\limits_0^t S^{t-\xi} f(\xi, v_l(\xi))\, d\xi \right\} \tag{1.23}$$

равномерно непрерывна в интервале $[\tau, T_*]$. Равномерная сходимость такой последовательности эквивалентна ее поточечной сходимости (см. [68]). Таким образом, достаточно доказать, что последовательность (1.23) сходится в $E_s$ для любого $t \in [\tau, T_*]$.

Зафиксируем $t \in [\tau, T_*]$. Пусть константы $\varepsilon, \mu$ удовлетворяют неравенству (1.15). Повторяя рассуждения леммы 10.3, будем иметь

$$\left\| \int_0^t S^{t-\xi}(f(\xi, v_l(\xi)) - f(\xi, v(\xi)))\, d\xi \right\|_s^E \leq$$
$$\leq \int_0^{t-s^\gamma} (t-\xi)^{-\phi} \| f(\xi, v_l(\xi)) - f(\xi, v(\xi))\|^G_{\varepsilon\xi^{1/\gamma}}\, d\xi + \tag{1.24}$$
$$+ \int_{t-s^\gamma}^t (t-\xi)^{-\phi} \| f(\xi, v_l(\xi)) - f(\xi, v(\xi))\|^G_{s-\mu(t-\xi)^{1/\gamma}}\, d\xi.$$

Поскольку функция $f$ непрерывна, для фиксированного $\xi$ получаем следующие соотношения:

$$(t-\xi)^{-\phi} \| f(\xi, v_l(\xi)) - f(\xi, v(\xi))\|^G_{\varepsilon\xi^{1/\gamma}} \to 0, \quad \xi \in [0, t-s^\gamma],$$
$$(t-\xi)^{-\phi} \| f(\xi, v_l(\xi)) - f(\xi, v(\xi))\|^G_{s-\mu(t-\xi)^{1/\gamma}} \to 0, \quad \xi \in [t-s^\gamma, t),$$

при $l \to \infty$.

Более того, в силу (1.18) и (1.21) оба эти выражения мажорируются $L^1$-интегрируемой функцией:

$$(t-\xi)^{-\phi} \| f(\xi, v_l(\xi)) - f(\xi, v(\xi))\|^G_{\varepsilon\xi^{1/\gamma}} \leq$$
$$\leq (t-\xi)^{-\phi} (\| f(\xi, v_l(\xi))\|^G_{\varepsilon\xi^{1/\gamma}} + \| f(\xi, v(\xi))\|^G_{\varepsilon\xi^{1/\gamma}}) \leq$$
$$\leq \frac{2C^2}{(\mu-\varepsilon)^\alpha \xi^{\alpha/\gamma} (t-\xi)^\phi},$$

$$(t-\xi)^{-\phi} \| f(\xi, v_l(\xi)) - f(\xi, v(\xi))\|^G_{s-\mu(t-\xi)^{1/\gamma}} \leq$$
$$\leq \frac{2C^2}{t^{\alpha/\gamma} \mu^\alpha (\psi(\xi/t))^\alpha (t-\xi)^\phi}.$$

Следовательно, в силу теоремы о мажорированной сходимости, интегралы в правой части (1.24) стремятся к нулю при $l \to \infty$.

Итак, по теореме 10.3 и леммам 10.3–10.5 мы получаем неподвижную точку отображения $F$; обозначим ее через $u$:

$$F(u) = u \in W(T_*).$$

Это доказывает вторую часть теоремы 10.1.

Чтобы доказать первую часть, покажем, что эта неподвижная точка есть решение задачи (1.7). Пусть $t, t+h > s^\gamma$. Сначала рассмотрим случай положительного $h$. Продифференцируем функцию $u(t)$ явно:

$$\begin{aligned}
&u_t(t) = \\
&= \lim_{h\to 0} h^{-1} \left( \int\limits_0^{t+h} e^{A(t+h-\xi)} f(\xi, u(\xi))\, d\xi - \int\limits_0^{t} e^{A(t-\xi)} f(\xi, u(\xi))\, d\xi \right) = \\
&= \lim_{h\to 0} h^{-1} \int\limits_t^{t+h} e^{A(t+h-\xi)} f(\xi, u(\xi))\, d\xi + \\
&+ \lim_{h\to 0} h^{-1} (e^{Ah} - \mathrm{id}_{E_s}) \int\limits_0^{t} e^{A(t-\xi)} f(\xi, u(\xi))\, d\xi.
\end{aligned} \tag{1.25}$$

Из леммы 10.3 следует, что $\int\limits_0^t e^{A(t-\xi)} f(\xi, u(\xi))\, d\xi \in E_{s'}$ с $s^\gamma < s'^\gamma < t, t+h$. Следовательно, формула (1.6) дает следующее соотношение:

$$h^{-1}(e^{Ah} - \mathrm{id}_{E_s}) \int\limits_0^t e^{A(t-\xi)} f(\xi, u(\xi))\, d\xi \to A \int\limits_0^t e^{A(t-\xi)} f(\xi, u(\xi))\, d\xi \tag{1.26}$$

в $E_s$ при $h \to 0$.

Докажем, что

$$h^{-1} \int\limits_t^{t+h} e^{A(t+h-\xi)} f(\xi, u(\xi))\, d\xi \to f(t, u(t)) \tag{1.27}$$

в $E_s$ при $h \to 0$.

Для этого заметим, что

$$h^{-1}\int\limits_t^{t+h} e^{A(t+h-\xi)}f(\xi,u(\xi))\,d\xi - f(t,u(t)) =$$
$$= h^{-1}\left(\int\limits_t^{t+h} e^{A(t+h-\xi)}(f(\xi,u(\xi)) - f(t,u(t)))\,d\xi + \right.$$
$$\left. + \int\limits_t^{t+h}(e^{A(t+h-\xi)} - \mathrm{id}_{E_s})f(t,u(t))\,d\xi\right).$$

Первый интеграл в правой части этой формулы оценивается следующим образом:

$$\left\|\int\limits_t^{t+h} e^{A(t+h-\xi)}(f(\xi,u(\xi)) - f(t,u(t)))\,d\xi\right\|_s^E \le$$
$$\le Ch\max_{t\le\xi\le t+h}\|f(\xi,u(\xi)) - f(t,u(t))\|_s^E = o(h).$$

Поскольку полугруппа $e^{At}$ сильно непрерывна, для второго интеграла получаем, что

$$\left\|\int\limits_t^{t+h}(e^{A(t+h-\xi)} - \mathrm{id}_{E_s})f(t,u(t))\,d\xi\right\|_s^E \le$$
$$\le h\max_{t\le\xi\le t+h}\left\|\left(e^{A(t+h-\xi)} - \mathrm{id}_{E_s}\right)f(t,u(t))\right\|_s^E = o(h).$$

Если $h<0$, то вместо (1.25) нужно использовать соотношение

$$u_t(t) = \lim_{h\to 0} h^{-1}\Big(\left(\mathrm{id}_{E_s} - e^{-Ah}\right)\int\limits_0^{t+h} e^{A(t+h-\xi)}f(\xi,u(\xi))\,d\xi -$$
$$-\int\limits_{t+h}^{t} e^{A(t-\xi)}f(\xi,u(\xi))\,d\xi\Big).$$

В этом случае новым является лишь доказательство равенства

$$\lim_{h\to 0} h^{-1}\left(\mathrm{id}_{E_s} - e^{-Ah}\right)\int\limits_0^{t+h} e^{A(t+h-\xi)} f(\xi, u(\xi))\, d\xi =$$
$$= A\int\limits_0^{t} e^{(t-\xi)} f(\xi, u(\xi))\, d\xi.$$

Докажем его. Очевидно,

$$\begin{aligned}&\left(\mathrm{id}_{E_s} - e^{-Ah}\right)\int\limits_0^{t+h} e^{A(t+h-\xi)} f(\xi, u(\xi))\, d\xi = \\ &= (\mathrm{id}_{E_s} - e^{-Ah})u(t) + (\mathrm{id}_{E_s} - e^{-Ah})(u(t+h) - u(t)).\end{aligned} \tag{1.28}$$

Множество

$$V = \left\{ \frac{u(t+h) - u(t)}{\|u(t+h) - u(t)\|_{s'}^{E}} \;\middle|\; h \in (h', 0) \right\},$$

где $h'$ отрицательно и близко к нулю, ограничено в $E_{s'}$, $s^\gamma < s'^\gamma < t + h'$. Следовательно, $V$ – компактное множество в $E_s$. По лемме 10.2 множество

$$(A_{-h} - A)V, \quad A_{-h} = \frac{1}{h}\Big(\mathrm{id}_{E_s} - e^{-Ah}\Big),$$

ограничено в $E_s$. Значит, множество $A_{-h}V$ тоже ограничено.

Таким образом, учитывая непрерывность функции $u(t)$, получаем

$$\left\|\frac{1}{h}\Big(\mathrm{id}_{E_s} - e^{-Ah}\Big)(u(t+h) - u(t))\right\|_s^E =$$
$$= \|u(t+h) - u(t)\|_{s'}^E \cdot \left\| A_{-h}\frac{u(t+h) - u(t)}{\|u(t+h) - u(t)\|_{s'}^E}\right\|_s^E = o(1).$$

Отсюда вытекает следующая оценка для второго слагаемого правой части (1.28):

$$\left\|\left(\mathrm{id}_{E_s} - e^{-Ah}\right)(u(t+h) - u(t))\right\|_s^E = o(h).$$

Первое слагаемое правой части (1.28) оценивается следующим образом:

$$\left\|(\mathrm{id}_{E_s} - e^{-Ah})u(t) - hAu(t)\right\|_s^E = o(h).$$

Подставляя (1.26) и (1.27) в (1.25), мы видим, что функция $u$ есть решение уравнения (1.7).

Формула (1.10) вытекает из следствия 10.1.

Теорема 10.1 доказана.

## 2 Приложения

В дальнейшем мы будем обозначать все несущественные положительные константы одной и той же буквой $c$.

### Параболические уравнения с градиентными нелинейностями

В этом разделе мы рассмотрим модельный пример.

Пусть $M \subset \mathbb{R}^m$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial M$.

Рассмотрим следующую задачу:

$$u_t = f(\nabla u) + \Delta u, \quad u|_{t=0} = \widehat{u} \in H_0^{1,q}(M), \quad u(t, \partial M) = 0, \quad t > 0. \tag{2.1}$$

Здесь $q > 1$.

Функция $f$ непрерывна в $\mathbb{R}^m$ и $|f(z)| \le c(|z|^p + 1)$, $q \ge p \ge 1$, для всех $z \in \mathbb{R}^m$. Отметим, что функция $f$ не обязательно липшицева.

Покажем, что если

$$m(p-1) < q, \tag{2.2}$$

то задача (2.1) имеет обобщенное решение из $C([0,T], H_0^{1,q}(M))$, где положительная константа $T$ зависит от $\widehat{u}$.

Если функция $f$ липшицева, то неравенство (2.2) хорошо известно: оно соответствует докритическому случаю в смысле Фуджиты.

После замены неизвестной функции $u = e^{\Delta t}\widehat{u} + v$ рассматриваемая задача принимает вид

$$v_t = g(t, x, \nabla v) + \Delta v, \quad v\,|_{t=0} = 0, \quad g(t, x, \nabla v) = f(\nabla(e^{\Delta t}\widehat{u} + v)). \quad (2.3)$$

Рассмотрим задачу (2.3) в шкалах

$$E_s = H_0^{1+s_0+s,q}(M), \quad \|\cdot\|_s = \|\cdot\|_{H_0^{1+s_0+s,q}(M)}, \quad s \in (0, S),$$

и

$$G_s = H^{-\lambda,q}(M), \quad \|\cdot\|^G = \|\cdot\|_{H^{-\lambda,q}(M)}.$$

Здесь все пространства $G_s$ совпадают друг с другом, а константы $S > 0$, $s_0 \geq 0$, $0 \leq \lambda < m(1 - 1/q)$ подлежат определению.

Введем константу

$$r = \frac{qm}{m + \lambda q} \in (1, q].$$

Затем, используя известные факты из теории соболевских пространств, оценим функцию $g$:

$$\begin{aligned} \|g(t, x, \nabla v)\|^G &\leq c\|g(t, x, \nabla v)\|_{L^r(M)} \leq \\ &\leq c\left(\|\nabla(e^{\Delta t}\widehat{u} + v)\|^p_{L^{pr}(M)} + 1\right) \leq \\ &\leq c\left(\|e^{\Delta t}\widehat{u}\|^p_{H^{1,pr}(M)} + \|v\|^p_{H^{1,pr}(M)} + 1\right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Выберем константу $s_0$ следующим образом:

$$s_0 = m\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{rp}\right).$$

Тогда условие $H_0^{1+s_0,q}(M) \subseteq H_0^{1,pr}(M)$ выполнено.

Здесь мы выбираем $\lambda$ так, чтобы выполнялось неравенство $q < rp$. Отметим, что

$$\|e^{\Delta t}\widehat{u}\|^p_{H^{1,pr}(M)} \leq ct^{-\beta}\|\widehat{u}\|^p_{H^{1,q}(M)}, \quad \beta = \frac{m}{2}\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{r}\right).$$

Если $v \in B_s = \left\{h \in E_s \mid \|h\|^E_s \leq 1\right\}$, то в силу вышеизложенного из формулы (2.4) следует неравенство

$$\|g\,(t, x, \nabla v)\|^G \leq \frac{c}{t^\beta}.$$

Кроме этого, нам потребуется неравенство

$$\|e^{\Delta t}w\|_s \leq ct^{-\phi}\|w\|^G, \quad \phi = \frac{1 + s_0 + s + \lambda}{2},$$

которое тоже следует из классической теории соболевских пространств.

**Предложение 10.2** *Отображение* $(t, v) \mapsto g\,(t, x, \nabla v)$ *непрерывно переводит* $(0, T) \times B_s$ *в* $G_s$.

*Доказательство.* Предположим противное: существует такая последовательность $(t_k, v_k)$, что $t_k \to t \in (0, T)$, $v_k \to v$ в $E_s$ при $k \to \infty$, $v, v_k \in B_s$ и

$$\|g_k(x) - g\,(x)\|^G \geq c > 0, \tag{2.5}$$

где $g_k(x) = g\,(t_k, x, \nabla v_k)$, $g\,(x) = g\,(t, x, \nabla v)$.

Как и выше, из (2.5) следует, что

$$\|g_k(x) - g\,(x)\|_{L^r(M)} \geq c > 0.$$

Поскольку $\nabla v_k \to \nabla v$ в $L^{pr}(M)$, существует такая подпоследовательность $\{v_{k'}\} \subseteq \{v_k\}$, что $\nabla v_{k'} \to \nabla v$ почти всюду в $M$. Значит, $|g_{k'}(x) - g\,(x)|^r \to 0$ почти всюду в $M$. Следовательно, $|g_{k'}(x) - g\,(x)|^r \to 0$ по мере.

Остается показать, что последовательность $|g_{k'}(x) - g(x)|^r$ равномерно интегрируема. В этом случае, в силу теоремы сходимости Витали (см. [35]), будем иметь $\|g_{k'}(x) - g(x)\|_{L^r(M)} \to 0$, и полученное противоречие завершит доказательство.

Отметим, что поскольку $v_k, v \in E_s$, $s > 0$, для малых $\sigma > 0$ справедливо соотношение $\nabla v_k \to \nabla v$ в $L^{pr+\sigma}(M)$. Таким образом, функции $g_{k'}(x) - g(x)$ принадлежат не только $L^r(M)$, но и $L^{r+\varepsilon}(M)$ с малыми $\varepsilon > 0$, а последовательность $\|g_{k'}(x) - g(x)\|_{L^{r+\varepsilon}(M)}$ ограничена (что доказывается точно так же, как и выше). Это можно записать в следующем виде:

$$\sup_{k'} \int\limits_M |g_{k'}(x) - g(x)|^r \omega(|g_{k'}(x) - g(x)|)\, dx =$$
$$= \sup_{k'} \|g_{k'}(x) - g(x)\|^{r+\varepsilon}_{L^{r+\varepsilon}(M)} < \infty,$$

где $\omega(y) = y^\varepsilon$. Поскольку функция $\omega$ монотонна и неограниченна в $\mathbb{R}_+$, это доказывает равномерную интегрируемость последовательности $|g_{k'}(x) - g(x)|^r$. Предложение доказано.

Таким образом, $\alpha = 0$. Значит, чтобы применить теорему 10.1, нам потребуется неравенство $\chi = \phi + \beta < 1$. Его легко вывести из (2.2), если постоянная $S$ достаточно мала, а постоянная $\lambda$ выбрана так, чтобы $pr$ было достаточно близко к $q$.

### Шкала аналитических функций

Через $\mathbb{T}^m$ обозначим $m$-мерный тор $\mathbb{R}^m/(2\pi\mathbb{Z})^m$. Вся развиваемая ниже техника может быть перенесена (почти без изменений) на задачу в $m$-мерном кубе с нулевыми краевыми условиями.

Обозначим элемент пространства $\mathbb{R}^m$ через $x = (x_1, \dots, x_m)$.

Пусть $\mathbb{T}^m_s = \{z = x + iy \in \mathbb{C}^m \mid x \in \mathbb{T}^m,\ |y_j| < s,\ j = 1, \dots, m\}$ – комплексная окрестность тора $\mathbb{T}^m$.

Определим множество $E_s,\ s > 0$, следующим образом: $E_s = C(\overline{\mathbb{T}}^m_s) \cap \mathcal{O}(\mathbb{T}^m_s)$. Здесь $\mathcal{O}(\mathbb{T}^m_s)$ обозначает множество функций, аналитических в $\mathbb{T}^m_s$.

Множество $E_s$ является банаховым пространством с нормой $\|u\|_s = \max_{z\in\overline{\mathbb{T}}^m_s} |u(z)|$. По теореме Монтеля вложения $E_{s+\delta} \subset E_s,\ \delta > 0$, вполне непрерывны. Положим $E_0 = C(\mathbb{T}^m)$, $\|\cdot\|_0 = \|\cdot\|_{C(\mathbb{T}^m)}$.

Пусть $\Delta$ обозначает оператор Лапласа,

$$\Delta = \sum_{j=1}^m \partial_j^2, \quad \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

**Лемма 10.6** *Существует такая положительная постоянная $c$, что следующее неравенство справедливо для любых $u \in E_s,\ s \geq 0$ :*

$$\|e^{t\Delta}u\|_{s+\delta} \leq c \exp\left(\frac{\delta^2}{4t}\right) \|u\|_s, \quad t, \delta > 0.$$

*Постоянная $c$ зависит только от $m$.*

*Доказательство.* Утверждение леммы легко выводится из хорошо известной формулы

$$(e^{t\Delta}u)(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{m/2}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-(\xi_1 - x_1)^2/(4t)}\, d\xi_1 \dots \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-(\xi_m - x_m)^2/(4t)}\, d\xi_m u(\xi).$$

Во всех этих интегралах нужно сдвинуть контур интегрирования в комплексную плоскость, тогда последнее неравенство следует из стандартных оценок. Лемма доказана.

По лемме 10.6 полугруппа $e^{t\Delta}$ параболична с $\gamma = 2$.

**Лемма 10.7** *Возьмем константу $\rho \in (0, 1/2]$. Для любого $\varepsilon \in (0, 2\rho)$ существует такая положительная постоянная $c = c(\varepsilon)$, что выполнены неравенства (при $u \in E_{s+\delta}$)*

$$\|(-\Delta)^{-\rho}\partial_j u\|_s \le \frac{c}{\delta^{1-2\rho+\varepsilon}}\|u\|_{s+\delta}, \quad s \ge 0, \quad \delta > 0, \tag{2.6}$$

$$\|(-\Delta)^{\rho} u\|_s \le \frac{c}{\delta^{2\rho+\varepsilon}}\|u\|_{s+\delta}. \tag{2.7}$$

*Доказательство.* Докажем формулу (2.6). Используя известные факты из теории соболевских пространств, получаем

$$\|(-\Delta)^{-\rho}\partial_j u\|_s \le c\|(-\Delta)^{-\rho}\partial_j u\|_{H^{\varepsilon,p}(\mathbb{T}^m_s)} \le$$
$$\le c\|u\|_{H^{\varepsilon+1-2\rho,p}(\mathbb{T}^m_s)}, \quad \varepsilon p > 2m.$$

Тогда (2.6) следует из интерполяционной формулы и неравенства Коши:

$$\|u\|_{H^{\varepsilon+1-2\rho,p}(\mathbb{T}^m_s)} \le c\|u\|^{\varepsilon+1-2\rho}_{H^{1,p}(\mathbb{T}^m_s)}\|u\|^{2\rho-\varepsilon}_{L^p(\mathbb{T}^m_s)},$$

$$\|u\|_{H^{1,p}(\mathbb{T}^m_s)} \le \frac{c}{\delta}\|u\|_{s+\delta}.$$

Формула (2.7) выводится таким же образом. Лемма доказана.

**Предложение 10.3 (см. [73])** *Для любых $a \ge r \ge 0$ справедлива оценка*

$$\|e^{t\Delta}u\|_{H^a(\mathbb{T}^m)} \le \frac{c}{t^{(a-r)/2}}\|u\|_{H^r(\mathbb{T}^m)}.$$

*Если $a > m/2$, то $\|u\|_0 \le c\|u\|_{H^a(\mathbb{T}^m)}$.*

Первый из следующих двух примеров иллюстрирует эффект, описанный во введении, второй приводится для сравнения нашего результата с результатами, полученными ранее.

### Интегродифференциальные параболические уравнения

В этом разделе используются шкалы

$$G_s = E_s = C(\overline{\mathbb{T}}_s^m) \cap \mathcal{O}(\mathbb{T}_s^m).$$

Основное внимание будет уделено одномерным системам ($m = 1$).

Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} u_t &= \|(-\Delta)^n u \mid_{\mathbb{T}^m} \|_{L^2(\mathbb{T})}^\lambda + \Delta u, \\ u|_{t=0} &= \widehat{u}(x) = \sum_{|k|\geq 2} \frac{e^{ikx}}{|k|^{1/2}\log|k|} \in L^2(\mathbb{T}). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Здесь $\lambda$ – положительный параметр, $n \in \mathbb{N}$.

Параболические уравнения с правыми частями, зависящими от $L^p$-норм неизвестной функции, возникают в теории несжимаемой вязкой жидкости (см. [53]).

После замены переменных $u = e^{t\Delta}\widehat{u} + v$ рассматриваемая задача принимает вид

$$\begin{aligned} v_t = f(t, v) + \Delta v, \quad v \mid_{t=0} = 0, \\ f(t, v) = \|(-\Delta)^n e^{t\Delta}\widehat{u} + (-\Delta)^n v\|_{L^2(\mathbb{T})}^\lambda. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Можно показать, что функция $f$ – липшицева:

$$|f(t, v') - f(t, v'')| \leq \frac{c}{t^n s^{2n}} \|v' - v''\|_s.$$

Однако это свойство не облегчает задачу: знаменатель $t^n s^{2n}$ слишком мал, чтобы решение можно было найти посредством того или иного итерационного процесса. Удобнее проигнорировать это неравенство Липшица и применить более эффективные оценки.

Покажем, что при $n\lambda < 1$ задача (2.8) имеет решение в смысле теоремы 10.1.

Тогда получим оценку

$$|f(t,v)| \le c(\|e^{t\Delta}\widehat{u}\|^{\lambda}_{H^{2n}(\mathbb{T})} + \|(-\Delta)^n v\|^{\lambda}_{L^2(\mathbb{T})}).$$

Предложение 10.3 приводит к оценке

$$\|e^{t\Delta}\widehat{u}\|_{H^{2n}(\mathbb{T})} \le ct^{-n}\|\widehat{u}\|_{L^2(\mathbb{T})},$$

а неравенство Коши – к оценке

$$\|(-\Delta)^n v\|_{L^2(\mathbb{T})} \le c\|(-\Delta)^n v\|_s \le c\delta^{-2n}\|v\|_{s+\delta}, \quad \delta > 0.$$

Объединяя эти неравенства и учитывая, что $(s+\delta)^2 < t$, имеем

$$|f(t,v)| \le c\delta^{-2n\lambda}(\|\widehat{u}\|^{\lambda}_{L^2(\mathbb{T})} + \|v\|^{\lambda}_{s+\delta}).$$

Таким образом, $\chi = n\lambda$, и по теореме 10.1 при $n\lambda < 1$ задача имеет хотя бы одно аналитическое решение.

Рассмотрим случай $\lambda = 1$, и пусть (для простоты) $n = 1$.

Обозначим коэффициенты Фурье функции $u$ через $u_k$:

$$u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k e^{ikx}.$$

Отметим, что норму в $L^2(\mathbb{T})$ можно представить следующим образом:

$$\|u\|^2_{L^2(\mathbb{T})} = c\sum_{k\in\mathbb{Z}} |u_k|^2.$$

Тогда, разделяя переменные в задаче (2.8), получаем, что

$$u_0 = c\int\limits_0^t \left(\sum_{|k|\ge 2} \frac{|k|^3 e^{-2\xi|k|^2}}{(\log|k|)^2}\right)^{\frac{1}{2}} d\xi, \quad u_k = \begin{cases} 0 & \text{при } |k| = 1, \\ \dfrac{e^{-t|k|^2}}{|k|^{1/2}\log|k|} & \text{при } |k| \ge 2. \end{cases} \tag{2.10}$$

Нетрудно показать, что

$$\left(\sum_{|k|\geq 2} \frac{|k|^3 e^{-2\xi|k|^2}}{(\log|k|)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \geq -\frac{c}{\xi\log\xi}, \quad \xi\in(0,1).$$

Значит, интеграл в формуле (2.10) не существует. Поэтому в рассматриваемом случае решений не существует.

### Трехмерное уравнение Навье – Стокса

В этом разделе используется шкала $G_s = E_s = C(\overline{\mathbb{T}}^m_s)\cap\mathcal{O}(\mathbb{T}^m_s)$.

Рассмотрим уравнение Навье – Стокса со свободной дивергенцией. Проекция Лере приведет это уравнение к известной форме

$$\begin{aligned} &(u^k)_t = A^k_l\partial_j(u^j u^l) + \Delta u^k, \quad A^k_l = (\Delta^{-1}\partial_k\partial_l - \delta_{kl}),\\ &u^k|_{t=0} = \widehat{u}^k \in H^r(\mathbb{T}^3), \end{aligned} \tag{2.11}$$

где $\delta_{kl}$ равно единице при $k=l$ и нулю в противном случае, $k,l,j=1,2,3$ и используется эйнштейновское обозначение суммирования.

Из [44, 36] следует, что при $r = 1/2$ задача (2.11) имеет решение $u^i(t,x)$, которое регулярно по пространственным переменным для всех $t\in(0,T_*)$. Здесь $T_*$ – малая положительная постоянная.

Покажем, что из теоремы 10.1 следует существование аналитического решения при любом $r>1/2$, т. е., используя терминологию [26], теорема 10.1 пригодна лишь для докритического случая. Отметим, что это вполне естественно, поскольку теорема 10.1 – очень общая.

Предположим, что параметр $\rho\in(0,1/2)$ близок к $1/2$ и заменим переменные в (2.11):

$$u^k = e^{t\Delta}\widehat{u}^k + (-\Delta)^\rho v^k.$$

Задача примет форму

$$v_t^k = f^k(t,v) + \Delta v^k, \quad v^k \mid_{t=0} = 0,$$

где

$$f^k(t,v) = A_l^k \partial_j (-\Delta)^{-\rho} (e^{t\Delta}\widehat{u}^j e^{t\Delta}\widehat{u}^l + e^{t\Delta}\widehat{u}^j (-\Delta)^\rho v^l + \\ + (-\Delta)^\rho v^j e^{t\Delta}\widehat{u}^l + (-\Delta)^\rho v^j (-\Delta)^\rho v^l).$$

Оценим каждое слагаемое. Используя лемму 10.7, получим

$$\|A_l^k \partial_j (-\Delta)^{-\rho}((-\Delta)^\rho v^j (-\Delta)^\rho v^l)\|_s \le \\ \le \frac{c}{\delta^{\varepsilon+1-2\rho}} \sum_{j,l=1}^{3} \|(-\Delta)^\rho v^j (-\Delta)^\rho v^l\|_{s+\delta/2} \le \\ \le \frac{c}{\delta^{\varepsilon+1-2\rho}} \sum_{j,l=1}^{3} \|(-\Delta)^\rho v^j\|_{s+\delta/2} \|(-\Delta)^\rho v^l\|_{s+\delta/2} \le \\ \le \frac{c}{\delta^{\varepsilon+1+2\rho}} \sum_{j,l=1}^{3} \|v^j\|_{s+\delta} \|v^l\|_{s+\delta}.$$

Теперь нужно выбрать параметры $\varepsilon > 0$ и $\rho \in (0, 1/2)$ так, чтобы

$$\frac{\varepsilon + 1 + 2\rho}{2} < 1. \tag{2.12}$$

Применяя леммы 10.6, 10.7 и предложение 10.3 ($(s+\delta)^2 < t$), оценим другое слагаемое функции $f$:

$$\|A_l^k\partial_j(-\Delta)^{-\rho}(e^{t\Delta}\widehat{u}^j e^{t\Delta}\widehat{u}^l)\|_s \le$$
$$\le \frac{c}{\delta^{1+\varepsilon-2\rho}}\sum_{j,l=1}^{3}\|e^{t\Delta}\widehat{u}^j\|_{s+\delta}\|e^{t\Delta}\widehat{u}^l\|_{s+\delta} \le$$
$$\le \frac{c}{\delta^{1+\varepsilon-2\rho}}\sum_{j,l=1}^{3}\|e^{t\Delta/2}\widehat{u}^j\|_{0}\|e^{t\Delta/2}\widehat{u}^l\|_{0} \le$$
$$\le \frac{c}{\delta^{1+\varepsilon-2\rho}}\sum_{j,l=1}^{3}\|e^{t\Delta/2}\widehat{u}^j\|_{H^a(\mathbb{T}^3)}\|e^{t\Delta/2}\widehat{u}^l\|_{H^a(\mathbb{T}^3)} \le$$
$$\le \frac{c}{\delta^{1+\varepsilon-2\rho}t^{a-r}}\sum_{j,l=1}^{3}\|\widehat{u}^j\|_{H^r(\mathbb{T}^3)}\|\widehat{u}^l\|_{H^r(\mathbb{T}^3)},$$

где $a > 3/2$. Значит, нам нужно, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{1+\varepsilon-2\rho}{2}+a-r<1. \tag{2.13}$$

Точно так же получаем оценку

$$\|A_l^k\partial_j(-\Delta)^{-\rho}(e^{t\Delta}\widehat{u}^j(-\Delta)^{\rho}v^l)\|_s \le$$
$$\le \frac{c}{\delta^{\varepsilon+1}t^{(a-r)/2}}\sum_{j,l=1}^{3}\|\widehat{u}^j\|_{H^r(\mathbb{T}^3)}\|v^l\|_{s+\delta}.$$

Значит, нам нужно, чтобы выполнялось еще и неравенство

$$\varepsilon+1+a-r<2. \tag{2.14}$$

Нетрудно показать, что для любого $r > 1/2$ существуют такое положительное значение малого параметра $\varepsilon > 0$, такое близкое к $3/2$ (и большее чем $3/2$) значение параметра $a$ и такое близкое к $1/2$ (и меньшее чем $1/2$) значение параметра $\rho$, что неравенства (2.12)–(2.14) выполнены.

## Глава 11

# Слабые решения уравнения Навье – Стокса

Результаты раздела 1.1 позволяют получить лишь локальные по времени теоремы существования для эволюционных задач. Это не случайно: теоремы, которые там доказываются, обобщают классические теоремы существования для обыкновенных дифференциальных уравнений. Даже в этом случае легко привести пример, в котором решение определено только на конечном промежутке времени.

Глобальные теоремы существования, т. е. теоремы, которые устанавливают существование решения на сколь угодно большом промежутке времени $t \in [0, T]$, всегда связаны с определенной спецификой задачи. Весьма распространенной причиной существования глобального решения в уравнениях, пришедших из физики, являются законы сохранения.

Например, энергия вязкой несжимаемой жидкости не должна увеличиваться в процессе течения. Математически этот факт выражается в том, что решение уравнения Навье – Стокса (a priori) удовлетворяет некоторому интегральному неравенству. При правильном выборе функционального пространства это неравенство выражается в терминах норм данного пространства и показывает, что решение во все время своего существования должно быть ограничено по норме. Это называется априорной оценкой решения.

В этом случае законы сохранения сами подсказывают выбор пространства для доказательства глобальной теоремы существования.

В качестве примера применения данной техники мы рассмотрим систему уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости – систему Навье – Стокса.

Вкратце, суть доказательства состоит в следующем. Мы аппроксимируем систему Навье – Стокса системами обыкновенных дифференциальных уравнений так, что свойство априорной ограниченности решений этих систем сохраняется, и потому их решения определены глобально. Затем мы выделяем из последовательности этих решений слабо сходящуюся и доказываем, что ее предел и есть искомое решение. Методы такого сорта принято называть методами Галеркина.

Уравнение Навье-Стокса является одним из центральных объектов исследования современного нелинейного анализа, тем не менее основные вопросы, связанные с его решениями, до сих пор остаются открытыми.

Первые результаты в этой области принадлежат Лере [46], [45] и относятся к 30-м годам двадцатого столетия. Лере рассмотрел уравнение Навье – Стокса в трехмерном пространстве и доказал глобальную (по времени) теорему существования. Неформально говоря, решение Лере $u(t,x)$ принадлежит классу $L^2([0,T], H^1_{loc}(\mathbb{R}^3))$ с любым $T > 0$. Такое решение называется слабым. Является ли слабое решение единственным при заданном начальном условии, не установлено до сих пор. Кроме этого, неизвестно, является ли это слабое решение сильным, т. е. принадлежащим пространству

$$L^\infty([0,T], H^1_{loc}(\mathbb{R}^3)) \bigcap L^2([0,T], H^2_{loc}(\mathbb{R}^3)).$$

Оба этих вопроса решены положительно лишь для плоских течений.

Итак, мы переходим к формулировке и доказательству теоремы Лере о существовании слабых решений. В изложении мы следуем в основном монографии [47].

## 1 Постановка задачи. Формулировка результата

Пусть $\Omega$ – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $\quad n \geq 3$ с границей $\Gamma$ (гладкость $\Gamma$ сначала не играет роли). Обозначим через $u$ вектор (вектор скорости)

$$u = \{u_1, \ldots, u_n\}, \tag{1.1}$$

определенный в $Q = \Omega \times (0,T)$. Положим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u' = \{u'_1, \ldots, u'_n\} = \left\{\frac{\partial u_1}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial u_n}{\partial t}\right\},$$
$$D_i u = \{D_i u_1, \ldots, D_i u_n\} = \left\{\frac{\partial u_1}{\partial x_i}, \ldots, \frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right\},$$
$$\Delta u = \{\Delta u_1, \ldots, \Delta u_n\}.$$

Уравнения Навье – Стокса в эволюционном случае имеют следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + \sum_{i=1}^n u_i D_i u = f - \mathrm{grad} p \quad (\nu > 0), \tag{1.2}$$

$$\mathrm{div} u = 0 \quad \Big(\text{т.е. } \sum_{i=1}^n D_i u_i = 0\Big), \tag{1.3}$$

а начальные и граничные условия таковы:

$$u = 0 \text{ на } \Sigma \quad (\text{т.е. } u_i = 0 \text{ на } \Sigma, \quad i = 1, \dots, n), \tag{1.4}$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \text{ на } \Omega \quad (\text{т.е. } u_i(x, 0) = u_{0i}(x), \ x \in \Omega). \tag{1.5}$$

Задача состоит в том, чтобы найти $u$ и $p$ (очевидно, что $p$ определено с точностью до аддитивной постоянной), удовлетворяющие (1.2) – (1.5).

**Замечание 11.1** *Уравнения (1.2), (1.3) не являются уравнениями типа Коши – Ковалевской (поскольку отсутствует производная $\partial p/\partial t$); они становятся уравнениями типа Коши – Ковалевской, если их записать в фактор-пространстве пространства распределений – в пространстве $V'$, определенном ниже.*

Теперь мы определим так называемое слабое решение или, согласно Лере, турбулентное решение задачи (1.2) – (1.5). Для этого нам понадобятся следующие обозначения: положим

$$\mathcal{V} = \{\varphi \mid \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)^n, \ \operatorname{div}\varphi = 0\} \tag{1.6}$$

$$H = \text{замыкание } \mathcal{V} \text{ в } (L^2(\Omega))^n. \tag{1.7}$$

Для $f, g$ из $H$ положим

$$(f, g) = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} f_i g_i dx, \quad |f| = (f, f)^{1/2}. \tag{1.8}$$

Далее мы рассмотрим пространства $H^s(\Omega)$, $s \geq 0$, причем $s$ может быть как целым, так и нецелым; пространство $(H^s(\Omega))^n$ мы снабдим гильбертовым скалярным произведением

$$((u, v))_s = \sum_{i=1}^{n} (u_i, v_i)_{H^s(\Omega)}. \tag{1.9}$$

Затем мы определим

$$V_s = \text{ замыкание } \mathcal{V} \text{ в } (H^s(\Omega))^n, \quad \|u\|_s = ((u,u))_s^{1/2}. \tag{1.10}$$

В частности, положим

$$V_1 = V, \quad \|u\|_1 = \|u\|. \tag{1.11}$$

Тогда

$$V_s \subset V \subset H, \quad \text{если } s > 1, \tag{1.12}$$

причем каждое из этих пространств плотно в последующем.

Мы отождествляем $H$ с его сопряженным: $H' = H$. Мы можем также при том же самом отождествлении отождествить $V'$, $V'_s$ с надпространствами $H$ и, следовательно, пополнить (1.12) включениями

$$V_s \subset V \subset H \subset V' \subset V'_s. \tag{1.13}$$

**Замечание 11.2** *Пространство $V'$ (а также $V'_s$) является фактор-пространством пространства $\mathcal{D}'(\Omega)^n$.*

**Замечание 11.3** *Если $v \in V_s$, то $v_i \in H_0^s(\Omega)$ и, следовательно (при $s > 1/2$), $v_i = 0$ на $\Gamma$. Таким образом, мы можем понимать (1.3), (1.4) как условия принадлежности $u$ к $V$ для почти всех $t$.*

Теперь положим

$$a(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx, \quad u, v \in V, \tag{1.14}$$

$$b(u,v,w) = \sum_{i,k=1}^{n} \int\limits_{\Omega} u_k (D_k v_i) w_i dx \tag{1.15}$$

для тройки таких векторов $u, v, w$, для которых сходятся соответствующие интегралы; в этой связи отметим такую лемму:

**Лемма 11.1** *Трилинейная форма* $u, v, w \to b(u, v, w)$ *непрерывна на* $V \times V \times (V \cap (L^n(\Omega))^n)$[1]

*Доказательство.* В самом деле, если $u \in V$, то $u_i \in H_0^1(\Omega)$ и, следовательно, в силу теоремы Соболева

$$u_i \in L^q(\Omega), \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \tag{1.16}$$

($q$ конечно и произвольно при $n = 2$.)

Заметив, что

$$\left| \int_\Omega u_k(D_k v_i) w_i dx \right| \le \|u_k\|_{L^q(\Omega)} \|D_k v_i\|_{L^2(\Omega)} \|w_i\|_{L^n(\Omega)},$$

мы получим наш результат.[2] Для $n = 2$ отметим, например, что

$$\left| \int_\Omega u_k(D_k v_i) w_i dx \right| \le \|u_k\|_{L^4(\Omega)} \|D_k v_i\|_{L^2(\Omega)} \|w_i\|_{L^4(\Omega)}.$$

Лемма доказана.

Теперь может быть сформулирована

*Задача.* Пусть заданы

$$f \in L^2(0, T; (H^{-1}(\Omega))^n); \tag{1.17}$$

$$u_0 \in H. \tag{1.18}$$

Ищутся такие $u$ и $p$, $p \in \mathcal{D}'(Q)$, что

$$u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H), \tag{1.19}$$

$$u' - \nu \Delta u + \sum_{i=1}^n u_i D_i u = f - \mathrm{grad} p \text{ (совпадает с (1.2))}, \tag{1.20}$$

$$u(0) = u_0. \tag{1.21}$$

[1] Заметим, что $V \cap (L^n(\Omega))^n = V$, если $n \le 4$.

[2] На самом деле установлена непрерывность на $(L^q(\Omega))^n \times V \times (L^n(\Omega))^n$.

В (1.19) условие принадлежности $u$ к $L^\infty(0,T;H)$ может показаться искусственным, и оно на самом деле не существенно для постановки задачи; однако мы докажем существование именно в классе (1.19). Как уже было отмечено в замечании 11.3, условие $u \in L^2(0,T;V)$ в некотором смысле содержит в себе условия (1.3) и (1.4).

Следует отметить, что можно дать два определения пространства $V$, которые a priori в равной мере естественны:

*первое определение:* $V =$ замыкание $\mathcal{V}$ в $(H^1(\Omega))^n$;

*второе определение:* $V = \{v \mid v \in (H_0^1(\Omega))^n,\ \mathrm{div} v = 0\}$.

Эти определения эквивалентны. В самом деле, обозначим на минуту пространство из второго определения через $\tilde{V}$. Ясно, что $V \subset \tilde{V}$; установим обратное включение. Пусть $L$ – непрерывная линейная форма на $\tilde{V}$, равная нулю на $V$; в силу теоремы Хана – Банаха $L$ можно представить (не единственным образом) в виде

$$L(v) = \sum_{i=1}^{n} (L_i, v_i), \quad L_i \in H^{-1}(\Omega).$$

Так как $L$ равна нулю на $V$, а тем более на $\mathcal{V}$, то по теореме двойственности де Рама

$$L_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}, \quad S \in \mathcal{D}'(\Omega).$$

Однако можно показать, что тогда $S \in L^2(\Omega)$, и в этих условиях

$$L(v) = \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial S}{\partial x_i}, v_i \right) = -(S, \mathrm{div} v) = 0 \quad \forall v \in \tilde{V},$$

откуда следует наш результат.

**Замечание 11.4** *Несмотря на кажущуюся точность, формулировка задачи (1.17) – (1.21) содержит одну двусмысленность: у нас нет ни-*

*каких сведений относительно $u'$ и $p$, лишь только соотношение*

$$u' + \mathrm{grad} p = \nu \Delta u - \sum_{i=1}^{n} u_i D_i u + f \text{ на } Q, \tag{1.22}$$

*вследствие чего не очевиден смысл условия (1.21).*

*Если мы возьмем $\varphi \in \mathcal{V}$, то*

$$(\mathrm{grad} p, \varphi) = 0 \quad (\text{в } \mathcal{D}'(0,T)^n),$$

*и (1.22) приводит к равенству*

$$(u', \varphi) = -\nu a(u, \varphi) - b(u, u, \varphi) + (f, \varphi). \tag{1.23}$$

*Без труда можно проверить, что*

$$b(u, u, \varphi) = -b(u, \varphi, u), \tag{1.24}$$

*так что (1.23) эквивалентно*

$$(u', \varphi) = -\nu a(u, \varphi) + b(u, \varphi, u) + (f, \varphi). \tag{1.25}$$

*Пусть $X$ – замыкание $\mathcal{V}$ в $(W^{1,n/2}(\Omega))^n$; имеем*

$$|b(u, \varphi, u)| \leq c_1 \|u\|^2_{(L^q(\Omega))^n} \sum_{i,j=1}^{n} \|D_i \varphi_j\|_{L^{n/2}(\Omega)} \leq c_2 \|u\|^2 \|\varphi\|_X,$$

*и, следовательно,*

$$b(u, \varphi, u) = (g, \varphi), \quad \|g\|_{X'} \leq c\|u\|^2,$$

*откуда $g \in L^1(0, T; X')$.*

*Далее, из (1.25) следует, что*

$$u' \in L^2(0, T; V') + L^1(0, T; X'), \tag{1.26}$$

*так что (1.21) имеет смысл (например, в $X'$).*

Замечание 11.4 естественным образом приводит к другой формулировке задачи (1.17) – (1.21).

*Задача.* Пусть заданы

$$f \in L^2(0,T;V'), \tag{1.27}$$

$$u_0 \in H \quad \text{(совпадает с (1.18))}. \tag{1.28}$$

Ищется такое $u$, что

$$u \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H) \quad \text{(совпадает с (1.19))}, \tag{1.29}$$

$$(u',v) + \nu a(u,v) + b(u,u,v) = (f,v) \quad \forall v \in V \cap (L^n(\Omega))^n, \tag{1.30}$$

$$u(0) = u_0. \tag{1.31}$$

**Замечание 11.5** *Условие (1.31) интерпретируется таким же образом, как в замечании 11.4; лемма 11.1 используется для того, чтобы придать смысл форме $b(u,u,v)$.*

Докажем эквивалентность двух приведенных выше формулировок.

Если $u$ – решение задачи (1.17) – (1.21), то (1.25) выполнено для всех $\varphi \in \mathcal{V}$, откуда (1.30) следует с помощью предельного перехода в $V \cap (L^n(\Omega))^n$; таким образом, $u$ является решением задачи (1.27) – (1.31).

Обратно, пусть $u$ – решение уравнения (1.30). Тогда, если мы положим

$$u' - \nu\Delta u + \sum_{i=1}^{n} u_i D_i u - f = S, \tag{1.32}$$

то $S$ будет принадлежать $(\mathcal{D}'(Q))^n$ и

$$(S,\varphi) = 0 \quad \text{в} \quad (\mathcal{D}'(0,T))^n \quad \forall \varphi \in \mathcal{V}. \tag{1.33}$$

Отсюда следует, что $S$ имеет вид

$$S = -\mathrm{grad} p, \quad p \in \mathcal{D}'(Q), \tag{1.34}$$

что доказывает утверждение об эквивалентности.

**Теорема 11.1 (Лере)** *Существует решение и задачи (1.27) – (1.31) при произвольном конечном* $T > 0$.

# 2 Доказательство теоремы Лере

## 2.1 Предварительные замечания

В дальнейшем мы будем иметь дело с пространством $V_s$, где

$$s = \frac{n}{2}.\text{[3]} \tag{2.1}$$

Мы будем пользоваться следующими леммами:

**Лемма 11.2** *При условии (10) если* $v \in V_s$, *то* $D_i v_j \in L^n(\Omega)$.

*Доказательство.* В самом деле, $D_i v_j \in H^{s-1}(\Omega)$, а $H^{s-1}(\Omega) \subset L^r(\Omega)$, где $\frac{1}{r} = \frac{1}{2} - \frac{s-1}{n} = \frac{1}{n}$, и лемма доказана.

**Лемма 11.3** *При* $u \in V$, $v \in V_s$ *имеем*

$$b(u, u, v) = -b(u, v, u). \tag{2.2}$$

*Доказательство.* Этот результат очевиден для $u, v \in \mathcal{V}$, затем надо перейти к пределу.

**Лемма 11.4** *При* $u \in V$ *линейная форма* $v \to b(u, u, v)$ *непрерывна на* $V_s$;

$$b(u, u, v) = (g(u), v), \quad g(u) \in V_s', \tag{2.3}$$

[3] Следовательно, при $n = 2$ существование доказывается с использованием только пространства $V_1 = V$.

*причем*

$$\|g(u)\|_{V_s'} \leq c_6 \|u\|^2_{(L^p(\Omega))^n}, \tag{2.4}$$

*где*

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \quad (p < q, \text{ где } q \text{ из } (1.16)). \tag{2.5}$$

*Доказательство.*

$$|b(u,u,v)| = |-b(u,v,u)| \leq c_7 \|u\|^2_{(L^p(\Omega))^n} \sum_{i,j=1}^{n} \|D_i v_j\|_{L^n(\Omega)},$$

откуда ввиду леммы 11.2 следует (2.4).

**Лемма 11.5** *Пусть* $u \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$. *Тогда*

$$u \in L^4(0,T;(L^p(\Omega))^n, \quad p \text{ определено в } (2.5). \tag{2.6}$$

*Доказательство.* Пусть $u = \{u_i\}$. Имеем

$$u_i \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.7}$$

Согласно теореме Соболева, $H_0^1(\Omega) \subset L^q(\Omega), \quad 1/q = 1/2 - 1/n$, и из (2.7) следует, что

$$u_i \in L^2(0,T;L^q(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.8}$$

В силу неравенства Гельдера

$$\|u_i(t)\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u_i(t)\|^{1/2}_{L^q(\Omega)} \|u_i(t)\|^{1/2}_{L^2(\Omega)} \leq c\|u_i(t)\|^{1/2}_{L^q(\Omega)},$$

откуда

$$u_i \in L^4(0,T;L^p(\Omega)),$$

то есть мы приходим к (2.6), и лемма доказана.

**Лемма 11.6** *Вложение* $V_s \to H$ *компактно.*

*Доказательство* очевидно, так как $V_s \subset V_1 = V$ и вложение $V_1 \to H$ компактно ввиду компактности вложения $H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$.

**Следствие 11.1** *Спектральная задача (в обозначениях (1.9))*

$$((w, v))_s = \lambda(w, v) \quad \forall v \in V_s \tag{2.9}$$

*допускает последовательность ненулевых решений $w_j$, отвечающих последовательности собственных значений $\lambda_j$:*

$$((w_j, v))_s = \lambda_j(w_j, v) \quad \forall v \in V_s,\ \lambda_j > 0. \tag{2.10}$$

Мы используем функции $w_j$ в качестве "специального базиса" в методе Фаэдо – Галеркина при доказательстве теоремы Лере.

Можно также использовать пространство $V_s$ для доказательства следующего утверждения:

**Теорема 11.2** *Для любого решения задачи (1.27) – (1.31) имеет место включение*

$$u' \in L^2(0, T; V_s'), \quad s = n/2. \tag{2.11}$$

*Доказательство.* Действительно,

$$a(u, v) = (Au, v), \quad A \in \mathcal{L}(V; V'), \tag{2.12}$$

и используя (2.3), мы выведем из (1.30), что

$$u' = -\nu Au - g\,(u) + f. \tag{2.13}$$

Согласно (2.4) и (2.6), $g\,(u) \in L^2(0, T; V_s')$; так как $Au \in L^2(0, T; V')$, $f \in L^2(0, T; V')$ и $V' \subset V_s'$, то из (2.13) следует (2.11).

**Следствие 11.2** *Всякое решение задачи (1.27) – (1.31) после, быть может, изменения на множестве меры нуль будет непрерывно как функция* $[0,T] \to V'_{(s-1)/2}$, $\phi$ *также слабо непрерывно как функция* $[0,T] \to H$.

*Доказательство.* Воспользуемся теоремой интерполяции: $u$ непрерывно как функция $[0,T] \to [V, V'_s]_{1/2} = V'_{(s-1)/2}$.

Кроме того, для доказательства теоремы Лере нам потребуются следующие утверждения о компактности.

Пусть $B_0$, $B$, $B_1$ – три банаховых пространства, причем

$$B_0 \subset B \subset B_1, \quad B_0, B_1 \text{ рефлексивны,} \tag{2.14}$$

$$\text{вложение } B_0 \to B \text{ компактно.} \tag{2.15}$$

Пусть

$$W = \{v \mid v \in L^{p_0}(0,T;B_0),\ v' = \frac{dv}{dt} \in L^{p_1}(0,T;B_1)\}, \tag{2.16}$$

где $T$ конечно и $1 < p_i < \infty$, $i = 0, 1$. Снабдив $W$ нормой

$$\|v\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + \|v\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)},$$

получим пространство Банаха. Очевидно, что $W \subset L^{p_0}(0,T;B)$.

Имеет место следующая хорошо известная лемма:

**Лемма 11.7** *В предположении (2.15)* $\forall \eta > 0$ *найдется такая константа* $c_\eta$, *что*

$$\|v\|_B \le \eta \|v\|_{B_0} + c_\eta \|v\|_{B_1}. \tag{2.17}$$

*Доказательство.* Предположим, что (2.17) не выполнено. Тогда $\forall \eta > 0$ существуют $v_n \in B_0$ и $c_n \to +\infty$, такие, что

$$\|v\|_B \ge \eta \|v_n\|_{B_0} + c_n \|v_n\|_{B_1}.$$

Полагая $w_n = \frac{v_n}{\|v_n\|_{B_0}}$, мы получим

$$\|w_n\|_B \geq \eta + c\|w_n\|_{B_1} \tag{2.18}$$

и

$$\|w_n\|_B \leq \text{const} \cdot \|w_n\|_{B_0} \leq \text{const}.$$

Но тогда из (2.18) следует, что

$$\|w_n\|_{B_1} \to 0. \tag{2.19}$$

Далее, $\|w_n\|_{B_0} = 1$, а поскольку вложение $B_0 \to B$ компактно, из последовательности $w_n$ можно выделить подпоследовательность $w_\mu$, сильно сходящуюся в $B$; в силу (2.19) $\|w_\mu\|_B \to 0$, что противоречит (2.18). Лемма доказана.

**Теорема 11.3** *В условиях (2.14), (2.15) при* $1 < p_i < \infty$, $i = 0, 1$, *вложение* $W$ *в* $L^{p_0}(0, T; B)$ *компактно.*

*Доказательство.* Если подпоследовательность $v_n$ ограничена в $W$, то можно выделить[4] подпоследовательность $v_\mu$ такую, что $v_\mu \to v$ слабо в $W$. Таким образом, нам надо доказать (изменив обозначения) следующее утверждение: пусть $v_n$ – такая последовательность в $W$, что

$$v_n \to 0 \quad \text{слабо в } W.$$

Тогда $v_n \to 0$ сильно в $L^{p_0}(0, T; B)$.

По лемме 11.7 $\forall \eta > 0$ существует такое $d_\eta$, что

$$\|v_n\|_{L^{p_0}(0,T;B)} \leq \eta\|v_n\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + d_\eta\|v_n\|_{L^{p_0}(0,t;B_1)}. \tag{2.20}$$

[4] Мы здесь пользуемся тем, что пространство $L^{p_i}(0, T; B_i)$ рефлексивно, если $1 < p_i < \infty$ и $B_i$ рефлексивно.

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Поскольку

$$\|v_n\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} \le c,$$

имеем

$$\|v_n\|_{L^{p_0}(0,T;B)} \le \varepsilon/2 + d_\eta \|v_n\|_{L^{p_0}(0,t;B_1)},$$

коль скоро $\eta$ выбрано таким образом, что $\eta c \le \varepsilon/2$.

Теперь остается показать, что

$$v_n \to 0 \quad \text{сильно в } L^{p_0}(0,T;B_1). \tag{2.21}$$

Так как $W \subset C^0([0,T];B_1)$, то $\|v_n(t)\|_{B_1} \le \mathrm{const}$, так что по теореме Лебега (2.21) будет выполнено, если мы покажем, что

$$v_n(s) \to 0 \quad \text{сильно в } B_1 \quad \forall s \in [0,T].$$

Поскольку $s$ не играет никакой специальной роли, нам остается только показать, что

$$v_n(0) \to 0 \quad \text{сильно в } B_1. \tag{2.22}$$

Если мы определим $w_n$ равенством

$$w_n(t) = v_n(\lambda t), \quad \lambda > 0 \text{ фиксировано}, \tag{2.23}$$

то

$$\begin{aligned} &v_n(0) = w_n(0), \\ &\|w_n\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} \le e_1 \lambda^{-1/p_0}, \quad \|w_n'\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)} \le e_2 \lambda^{1-1/p_1}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Если функция $\varphi$ принадлежит $C^1$ на отрезке $[0,T]$, $\varphi(0) = -1$, $\varphi(T) = 0$, то

$$w_n(0) = \int\limits_0^T (\varphi w_n)' dt = \beta_n + \gamma_n,$$

$$\beta_n = \int_0^T \varphi w_n' dt, \quad \gamma_n = \int_0^T \varphi' w_n dt.$$

Из (2.24) следует, что

$$\|v_n(0)\|_{B_1} \le \|\beta_n\|_{B_1} + \|\gamma_n\|_{B_1} \le c_3\lambda^{1-1/p_1} + \|\gamma_n\|_{B_1}. \tag{2.25}$$

Если $\varepsilon > 0$, то выберем $\lambda$ таким образом, чтобы $c_3\lambda^{1-1/p_1} \le \varepsilon/2$; мы придем к (2.22), если покажем, что

$$\gamma_n \to 0 \quad \text{сильно в } B_1. \tag{2.26}$$

Но $w_n \to 0$ слабо в $L^{p_0}(0,T;B_0)$ ($\lambda$ фиксировано, и мы всегда можем считать, что $\lambda \le 1$), и, следовательно, $\gamma_n \to 0$ слабо в $B_0$. Так как вложение $B_0 \to B_1$ компактно, мы получаем (2.26) и утверждение теоремы.

## 2.2 Доказательство теоремы Лере

*Приближенное решение.* Мы воспользуемся "базисом" $w_1, \dots, w_m, \dots$, введенным посредством (2.10).

Определим "приближенное" решение $u_m(t)$ порядка $m$ следующим образом:

$$u_m(t) \in [w_1, \dots, w_m], \quad u_m(t) = \sum_{j=1}^m g_{jm}(t) w_j,$$

$$(u_m'(t), w_j) + \nu a(u_m(t), w_j) + b(u_m(t), u_m(t), w_j) =$$
$$= (f(t), w_j), \quad 1 \le j \le m, \tag{2.27}$$

$$u_m(0) = u_{0m}, \quad u_{0m} \in [w_1, \dots, w_m], \quad u_{0m} \to u_0 \text{ в } H. \tag{2.28}$$

Эта система дифференциальных уравнений (относительно $g_{jm}(t)$) позволяет определить $u_m(t)$ в интервале $[0, t_m]$; мы увидим, что можно взять $t_m = T$.

*Априорная оценка (I).* Умножим (2.27) на $g_{jm}(t)$ и просуммируем по $j$; так как согласно лемме 11.3 $b(u_m, u_m, u_m) = 0$, получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + \nu a(u_m(t), u_m(t)) = (f(t), u_m(t)), \tag{2.29}$$

откуда

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + \nu\|u_m(t)\|^2 \leq \|f(t)\|\|u_m(t)\| \leq \frac{\nu}{2}\|u_m(t)\|^2 + c\|f(t)\|^2,$$

откуда

$$|u_m(t)|^2 + \nu\int\limits_0^t \|u_m(\sigma)\|^2 d\sigma \leq |u_{0m}|^2 + 2c\int\limits_0^t \|f(\sigma)\|^2 d\sigma. \tag{2.30}$$

Используя (2.28), мы получим, что $t_m = T$ и что

$$u_m \text{ ограничены в } L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H). \tag{2.31}$$

*Априорная оценка (II).* Мы теперь собираемся показать – и это центральное место доказательства, – что

$$u_m' \text{ ограничены в } L^2(0,T;V_s'). \tag{2.32}$$

В самом деле, пусть $P_m$ – проектор $H \to [w_1, \ldots, w_m]$, так что

$$O_m h = \sum_{i=1}^m (h, w_i)w_i.$$

В обозначениях (2.12) и (2.3) мы выведем из (2.27), что

$$u_m' = -P_m(g(u_m)) - \nu P_m A u_m + P_m f. \tag{2.33}$$

Однако $\|P_m\|_{\mathcal{L}(V_s;V_s)} \leq 1$ (благодаря нашему выбору $w_j$); тогда из соображений двойственности (поскольку $P*_m = P_m$):

$$\|P_m\|_{\mathcal{L}(V_s';V_s')} \leq 1. \tag{2.34}$$

Из (2.31), (2.4) и (2.6) следует, что $g(u_m)$ ограничены в $L^2(0,T;V_s')$ и, следовательно, $P_m(g(u_m))$ ограничены в $L^2(0,T;V_s')$.

Далее, так как $Au_m$ ограничены в $L^2(0,T;V')$, а тогда и в $L^2(0,T;V_s')$, то (2.32) следует из (2.33).

*Предельный переход.* Мы воспользуемся теоремой о компактности 11.3, полагая

$$B_0 = V, \quad p_0 = 2,$$
$$B_1 = V_s', \quad p_1 = 2,$$
$$B = H.$$

Тогда из последовательности $u_m$ можно выделить такую подпоследовательность $u_\mu$, что

$$u_\mu \to u \quad \text{слабо в } L^2(0,T;V), \tag{2.35}$$
$$u_\mu \to u \quad * \text{-слабо в } L^\infty(0,T;H), \tag{2.36}$$
$$u_\mu \to u \quad \text{сильно в } L^2(0,T;H) \text{ и почти всюду в } Q, \tag{2.37}$$
$$u_\mu' \to u' \quad \text{слабо в } L^2(0,T;V_s'), \tag{2.38}$$

Из (2.35), (2.38) следует, что $u_\mu(0) \to u(0)$ в $V_s'$ слабо (например) и что $u(0) = u_0$.

Согласно лемме 11.5, $u_{\mu i}u_{\mu j}$ ограничены в $L^2(0,T;L^{p/2}(\Omega))$, и, следовательно, можно считать, что

$$u_{\mu i}u_{\mu j} \to \chi_{ij} \quad \text{слабо в } L^2(0,T;L^{p/2}(\Omega)). \tag{2.39}$$

Однако благодаря (2.37) мы имеем

$$\chi_{ij} = u_i u_j \tag{2.40}$$

(чтобы это установить, достаточно заметить, что $u_{\mu i}u_{\mu j} \to u_i u_j$ в $\mathcal{D}'(Q)$; действительно,

$$\int\limits_Q u_{\mu i}u_{\mu j}\varphi dxdt \to \int\limits_Q u_i u_j \varphi dxdt \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(Q),$$

поскольку $u_{\mu i} \to u_i$ слабо в $L^2(Q)$, а $u_{\mu j}\varphi \to u_j\varphi$ сильно в $L^2(Q)$).

Из (2.39), (2.40) следует, что

$$b(u_\mu, u_\mu, w_j) \to b(u, u, w_j) \quad \text{слабо в } L^2(0,T). \tag{2.41}$$

В самом деле, если $\psi \in L^2(0,T)$, то

$$\int\limits_0^T b(u_\mu, u_\mu, w_j)\psi dt = -\int\limits_0^T b(u_\mu, w_j, u_\mu)\psi dt$$

и можно перейти к пределу, используя (2.39).

Между тем

$$(u'_\mu, w_j) \to (u', w_j), \quad \text{скажем, в } \mathcal{D}'(0,T),$$

и, таким образом, равенство (2.27) (при $m = \mu$) в пределе дает равенство

$$(u', w_j) + \nu a(u, w_j) + b(u, u, w_j) = (f, w_j),$$

выполненное для всех $j$. Отсюда вытекает справедливость (1.30) $\forall v \in V_s$ и далее $\forall v \in V \cap (L^n(\Omega))^n$. Теорема доказана.

## 3 Задачи

**Задача 11.1** *Рассмотрим задачу*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + \sum_{i=1}^n u_i D_i u = f, \quad \nu > 0, \quad f \in L^\infty(\Omega)$$

*с такими же начальными и граничными условиями, как для уравнения Навье – Стокса.*

*Докажите, что эта задача имеет решение в* $L^2(0;T,H_0^{1,p}(\Omega))$ *с любым* $p \geq 2$ *и любым* $T > 0$.

**Задача 11.2** *Докажите, что пространство* $L^p(0,T;B)$ *рефлексивно, если* $1 < p < \infty$, *и банахово пространство* $B$ *рефлексивно.*

# Литература


[1] *Годунов А.Н.* Теорема Пеано в банаховых пространствах // Функц. анализ и его прилож. – 1974.-9, – Вып. 1. – С.59-60.

[2] *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967.

[3] *Иосида К.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967.

[4] *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. – Т. 1 – Пер. с нем.; под ред. М. М. Постникова – М.: Наука, 1989.

[5] *Колмогоров А. Н.* О сохранении условно периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // Доклады АН СССР. – 1954 – No 4 (98) – С. 527-530.

[6] *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1972.

[7] *Кочина П. Я.* Софья Васильевна Ковалевская. – М.: Наука, 1981.

[8] *Леднев Н.А.* Новый метод решения дифференциальных уравнений в частных производных // Мат. сб. – 22 (64) – 1948 С. 205-259.

[9] *Милнор Д.* Теория Морса. – Платон, 1996.

[10] *Митропольский Ю.* Метод усреднения в нелинейной механике. – Киев: Наукова Думка, 1971.

[11] *Мозер Ю.* Быстросходящийся метод итераций и нелинейные дифференциальные уравнения. // Успехи математических наук. – Т. XXIII – Вып. 4 (142), 1968.

[12] *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу. – М: Мир, 1977.

[13] *Понтрягин Л.С.* Непрерывные группы: Избр. науч. тр. – Т. 3 – М.: Наука, 1988.

[14] *Робертсон А.П., Робертсон В.Дж.* Топологические векторные пространства. – М.: Мир, 1967.

[15] *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. – Т. 3 – М.: Гос. изд-во физико-математической литературы, 1959.

[16] *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. – Т. 5 – М.: Гос. изд-во физико-математической литературы, 1959.

[17] *Трещев Д. В.* Введение в теорию возмущений гамильтоновых систем. – М: Фазис, 1998 – 192 с.

[18] *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. – Т. 3 – М.: ФИЗМАТГИЗ, 1960.

[19] *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. – Часть 1, 2. – М.: Наука, 1976.

[20] *Шварц Л.* Анализ. – Т. 2 – М.: Мир, 1972.

[21] *Adams R. A.* Sobolev Spaces. – NY: Academic Press, 1975.

[22] *Amann H.* Linear and Quasilinear Parabolic Problems. Abstract Linear Theory. – Birch*ä*user Verlag, 1995.

[23] *Amann H.* Nonhomogeneous linear and quasilinear elliptic and parabolic boundary value problems, in: Schmeisser/ Triebel: Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analisis, Teubner Texte zur Mathematik. – Vol. 133, Teubner, 1993. – P. 9-126.

[24] *Amann H.* On abstract parabolic fundamental solutions. // J.Math.Soc.Japan – 1987 (39), – P. 93-116.

[25] *Antonevich A. B.* The index and normal solvability of general elliptic boundary value problems with a finite group of shifts on the boundary. // Differential Equations. – 1972 (8).

[26] *Arrieta J. M., Carvalho A. N.* Abstract parabolic problems with critical nonlinearities and applications to Navier-Stokes and Heat equations. // Trans. of the Amer. Math. Soc. – V. 352, 1, – P. 285-310.

[27] *Brezis H.* Partial Differential Equations in 20th Century. // Advances in Math. – 1998 (135) – P. 76-144 – Article No. AI971713.

[28] *Browder F. E.* A new generalization of the Schauder fixed point theorem. // Math. Ann. – 1967 (174) – P. 285-290.

[29] *Cartan H.* Sur les matrices holomorphes de $n$ variebles complexes. // J. Math. pures appl. – 1940 (19) – P. 1-26.

[30] *Carvalho A.N., Cholewa J.W., Dlotko T.* Abstract parabolic problems in ordered Banach spaces // Colloq. Math. – 2001 (90) – P. 1-17.

[31] *Cooke K., Wiener J.* Distributional and analytic solutons of functional-differential equations. // J. Math. Anal. Appl. – 1984 (98). – P. 11-129.

[32] *Dacorogna B.* Direct Methods in the Calculus of Variations. – NY: Springer-Verlag, 1989.

[33] *Dieudonné J.* Deux exemples singuliers d'équations différentielles. // Acta Scien. Math. (Szeged). – 1950 (12). – P. 38-40.

[34] *Eisen G.* A counterexample for some lower semicontinuity results. // Math.Zeit. – 1978 (162). – P. 241-243.

[35] *Folland G.* Real analysis: modern techniques and their applications. – 2nd ed. – Chichester: Wiley-Interscience, 1999.

[36] *Fujita H., Kato T.* On the Navier-Stokes initial value problem. // Arch. Ration. Mech. Anal. – 1964 (16) – P. 269-315.

[37] *Garabedian P.* Partial Differential Equations. – NY: Wiley, 1964.

[38] *Garabedian P.* Stability of Cauchy's problem in space for analytic systems of arbitrary type. // J. Math. Mech. – 1960 (9) – P. 905-914.

[39] *Giaquinta M.* Multiple Integrals in the Calculus of Variations and Nonlinear Elliptic Systems. – Princeton, N.J.: – Princeton Univ.Press, 1983.

[40] *Giaquinta M.(ed.)* Topics in Calculus of Variations, LNM 1365. – NY: Springer-Verlag, 1989.

[41] *Guedda M., Veron L.* Local and global properties of solutions of quasilinear elliptic equations. // J. Differential Equations – 1988 (76) – P. 159-189.

[42] *Henry D.* Geometric theory of semilinear parabolic equations. // Lecture Notes in Mathematics – 840 – Berlin: Springer-Verlag, 1981.

[43] *Iserles A., Liu Y.* On functional-differential equations with proportional delays. // J. Math. Anal. Appl. – 1997 (207) – P. 73-95.

[44] *Kato T., Fujita H.* On the nonstationary Navier-Stokse system. // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. – 1962 (32) – P. 243-260.

[45] *Leray J.* Essai sur le mouvement plan d'un liquide visqueux que limitent des parois. // J.Math.Pures Appl. – 1934 (XIII) – P. 331-418.

[46] *Leray J.* Etude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que posent l'hydrodynamique. // J.Math.Pures Appl. – 1933 (XII) – P. 1-82.

[47] *Lions J. L.* Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non-linéaires. – Paris: Dunod, 1969.

[48] *Morrey C.B.* Multiple Integrals in the Calculus of Variations. – NY: Springer-Verlag, 1966.

[49] *Neishtadt A. I.* The separation of motions in systems with rapidly rotating phase. // J. Appl. Math. Mech. – 1984 – V. 48 (2) – P. 133-139.

[50] *Nirenberg L.* An abstract form of the nonlinear Cauchy-Kowalewski theorem. // J. Differential Geometry – 1972 (6) – P. 561-576.

[51] *Nirenberg L.* Topics in Nonlinear Functional Analysis. – New York Univ., 1974.

[52] *Nishida T.* A Note On A Theorem Of Nirenberg. // J. Differential Geometry – 1977 (12) – P. 629-633.

[53] *Ohkitani K., Okamoto H.* Blow-up problems modeled from the strain-vorticity dynamics. – Proceedings of "Tosio Kato's Method and Principles for Evolution Equations in Mathematical Physics"( Eds. H. Fujita, S. T. Kuroda and H. Okamoto). – RIMS Kokyuroku – 2001 (1234) – P. 240–250.

[54] *Onanov G.G., Skubachevskiĭ A. L.* Differential equations with diviating arguments in stationary problems in the mechanics of deforming media. // Soviet Appl. Mech. – 1979 (15) – P. 391-397. – MR 80e:73055.

[55] *Otani M.* Existence and nonexistence of nontrivial solutions of some nonlinear degenerate elliptic equations. // J. Funct. Anal. – 1988 (76) – P. 140-159.

[56] *Otani M., Teshima T.* On the first eigenvalue of some quasilinear elliptic equations. // Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. – 1988 (64) – P. 8-10.

[57] *Ovsjannikov L.* Singular operators in Banach scales. // Dokl. Akad. Nauk. SSSR – 1965 (163) – P. 819-822. – Soviet Math. Dokl. – 1965 (6) – P. 1025-1028.

[58] *Pokhozhaev S.I.* On eigenfunctions of $\Delta u + \lambda f(u) = 0$. // Doklady Acad. Sci. SU. – 1965 (165) – 1 – P. 36-39.

[59] *Pronin A., Treschev D.* Continuous averaging in multi-freqncy slow-fast systems. // Regular and Chaotic Dynamics – 2000 (5:2) – P. 157Ц170.

[60] *Rabinovich V. S.* The solvability of differential-difference equations in $\mathbb{R}^n$ and in a half-space. // Soviet Math. Dokl. – 19 (1978), 1498-1502 (1979). MR 80h:35125.

[61] *Rabinowicz P. H.* Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations. // Regional Conference Series in Mathematics. – American Mathematical Society, 1986.

[62] *Rosinger E.* Generalized Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations. – Elsevier, New York, 1987.

[63] *Rossovskiĭ L.E.* Boundary Value Problems for Elliptic Functional-Differential Equations with Dilatations and Compressions of the Arguments. // Proceedings of Moscow Math. Soc. – Vol. 62 (2001).

[64] *Rossovskiĭ L.E.* On the boundary value problems for the elliptic functional-differential equation with conntractions. // Functional Differential Equations – 2001 (8) – P. 395-406.

[65] *Rossovskiĭ L.E.* The coercivity of functional-differential equations. // Math. Notes – 1996 (59) – P. 75-82, MR 97b:35184.

[66] *Safonov M.V.* The Abstract Cauchy-Kovalevskaya Theorem in a Weighted Banah Space. // Communications on Pure and Applied Mathmatics – 1995 – Vol. 48 – P. 629-643.

[67] *Schouten J.A.* Pfaff's problem and its generalizations. – Oxford, 1949.

[68] *Schwartz L.* Analyse Mathématique. – Hermann, 1967.

[69] *Serrin J.* On a fundamental theorem in the calculus of variations. // Acta Math. – 1959 (102) – P. 1-32.

[70] *Skubachevskiĭ A. L.* Elliptic functional differential equations and applications, Operator Theory, Advances and Applications. – Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser, 1996.

[71] *Struwe M.* Variational Methods. – New York: Springer-Verlag, 1990.

[72] *Szulkin A.* Ljusternik-Schnirelmann theory on $C^1$ manifolds. // Ann. Inst. H. Poincaré. Anal. Non Linéaire – 1988 (5) – P. 119-139.

[73] *Taylor M. E.* Partial Differential Equations. – V. 1-3 – New York: Springer, 1996.

[74] *Treves J.* Ovsjannikov theorem and hyperdiferential operators. // Notas Mat. – 1968 (46) – mimeographed notes.

[75] *Vorontsov M. A., Iroshnikov N. G., Abernathy R. L.* Diffractive patterns in a nonlinear optical two-dimensional fidback system with field rotation. // Chaos, Solitons and Fractals – 1994 (4).

[76] *Yamanaka T.* Note on Kowalevskaja's system of partial differential equations. // Comment. Math. Univ. St. Paul. – 1960 (9) – P. 7-10.

[77] *Yorke J.* A continuous differential equation in Hilbert space without existence // Funkcial. Ekvac. – 1970 (13) – P. 19-21.

[78] *Zubelevich O.* On some topological view on the abstract Cauchy-Kowalewski problem. // Complex Var. Theory Appl. – 2004 (49) – є 10 – P. 703-709.

# ОПИСАНИЕ КУРСА И ПРОГРАММА

***<u>Цели и задачи курса</u>***

- представленный в курсе материал относится к области дифференциальных уравнений
- целью курса является знакомство с методами нелинейного функционального анализа, используемыми для качественного исследования нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, нелинейных функционально-дифференциальных и функциональных уравнений, дискретных бесконечномерных динамических систем, а также динамических систем с дискретным временем.
- курс предназначен для бакалаврской программы обучения
- рекомендуется в качестве спецкурса по выбору для студентов физико-математических факультетов вузов и университетов, обучающихся по направлению *«Математика»*
- курс носит теоретический характер
- курс рассчитан на 144 часа учебной нагрузки (один семестр, 4 кредита), из которых 36 часов отводится на лекции, 36 часов – на практические занятия, 72 часов – на самостоятельную работу студента
- Лекции и практические занятия по данному курсу будут проводиться в мультимедийном классе, что позволяет сочетать изложение новых математических результатов и современных вычислительных средств и средств визуализации для лучшего усвоения знаний студентами.

***Инновационность курса***

- представленный в курсе материал опирается на современные исследования и содержит ряд новых результатов, в том числе и результаты автора, которые до настоящего момента не были отражены в учебно-методической литературе.
- курс готовится с учётом реализации в рамках кредитно-модульной системы

***Структура курса***

**Тема 1. Пространства функционального анализа** (лекции – 2 часа, практические занятия – 2 часа, самостоятельная работа – 4 часа)**.**

Определение полунормы. Свойства полунорм. Функционал Минковского. Теорема о семействе полунорм. Теорема о топологизации пространства с помощью полунорм. Определение локально выпуклого топологического пространства. Теорема о функционале Минковского. Определение бикомпактных носителей. Эквивалентность норм в конечномерном пространстве. Нормируемость и метризуемость топологии. Нормируемость локально выпуклой топологии в конечномерном пространстве. Секвенциально полные полунормированные пространства. Теоремы Асколи.

**Тема 2. Топологическая степень и ее приложения** (лекции – 8 часов, практические занятия – 8 часов, самостоятельная работа – 16 часов).

Определение регулярной точки отображения. Теорема Сарда. Определение топологической степени отображения. Лемма о свойствах степени отображения и ее следствия. Определение гомотопных отображений. Теорема о степенях гомотопных отображений. Степень непрерывных отображений. Теорема Руше. Теорема о свойствах гладких отображений.

Нелинейные уравнения в конечномерном пространстве. Теорема Брауера. Теорема существования решений нелинейных уравнений в конечномерном пространстве.

**Тема 3. Нелинейные уравнения в пространствах Банаха** (лекции – 8 часов, практические занятия – 8 часов, самостоятельная работа – 16 часов).

Определение компактного отображения. Теорема Шаудера о неподвижной точке непрерывного компактного отображения. Теорема о неподвижной точке непрерывного отображения выпуклого компакта в себя. Определение семинепрерывного отображения. Монотонное отображение. Коэрцитивное отображение. Теоремы о существовании решений нелинейных уравнений. Теорема о множителях Лагранжа. Полунепрерывные функции. Теорема Мазура – Шаудера. Замкнутость выпуклого подмножества банахова пространства. Теорема о минимуме коэрцитивной функции. Определение полувыпуклой функции. Теорема Браудера.

**Тема 4. Нелинейные эллиптические уравнения** (лекции – 2 часа, практические занятия – 2 часа, самостоятельная работа – 4 часа).

Тождество Похожаева. Принцип максимума. Теорема о существовании слабого решения. Принцип сравнения. Функционально-дифференциальные уравнения.

**Тема 5. Нелинейные уравнения в локально выпуклых топологических пространствах** (лекции – 6 часов, практические занятия – 6 часов, самостоятельная работа – 12 часов).

Абстрактная схема теории возмущений. Теорема о существовании приближенного решения. Оценка Тейлора. Равномерное условие Липшица.

Приближенное правое обратное отображение. Показатель потери. Теорема Нэша – Мозера. Итерационный метод Ньютона. Теорема Браудера о неподвижной точке. Следствия теоремы Браудера. Лемма о непрерывном отображении.

**Тема 6. Абстрактная задача Коши – Ковалевской** (лекции – 4 часа, самостоятельная работа – 8 часов, практические занятия 4 часа).

Абстрактная линейная теорема Коши – Ковалевской. Теорема Овсянникова. Постановка нелинейной задачи Коши – Ковалевской. Теорема Ниренберга – Нишиды. Метод Мозера. Нелинейная задача Коши. Теорема о неявной функции. Теорема Сафонова. Лемма Арцела – Асколи. Абстрактная теорема типа Пеано.

**Тема 7. Параболические уравнения** (лекции – 6 часов, практические занятия – 6 часов, самостоятельная работа – 12 часов).

Символ функционально-дифференциального оператора. Параболические полугруппы. Теорема Банаха – Штейнгауза. Предкомпактность множеств. Равномерная непрерывность множеств. Свойства параболических полугрупп в различных функциональных пространствах. Параболические уравнения с градиентными нелинейностями. Шкала аналитических функций. Интегродифференциальные параболические уравнения. Трехмерное уравнение Навье – Стокса. Липшицева теория параболических уравнений в шкале банаховых пространств. Нелипшицева теория параболических уравнений в шкале банаховых пространств.

***<u>Система контроля знаний</u>***

включает

- промежуточный контроль в форме письменной контрольной работы
- написание реферата по выбранной теме
- итоговый контроль в форме письменной итоговой работы

На письменную контрольную работу отводится одно практическое занятие на 8-10-й неделе семестра. Целью работы является проверка усвоения материала первой части курса, охватывающего краевые задачи для обыкновенных функционально-дифференциальных уравнений (темы 1-3). Работа выполняется каждым студентом в аудитории, без обращения к конспектам и литературе по предмету. Контрольная работа состоит из трёх задач по темам 2 и 3. Оцениваются как ход решения (чёткость рассуждений, достаточная аргументация), так и правильность полученного ответа. Точное содержание контрольной работы студентам заранее неизвестно. Примерные варианты приведены ниже.

Вариант 1

1) Доказать, что отделимая локально выпуклая топология конечномерного пространства нормируема.

2) Доказать, что проективный предел шкалы банаховых пространств с компактными вложениями является топологическим пространством со свойством Монтеля.

3) Доказать, что компактное множество бесконечномерного банахова пространства не может иметь внутренних точек.

Вариант 2

1) Сформулировать и доказать критерий компактности в терминах $\varepsilon$-сетей для полуметрического пространства.
2) Доказать, что если топология метрического пространства задана счетным количеством полурастояний, то это пространство метризуемо.
3) Привести пример неметризуемого пространства.

Написание реферата является самостоятельной неаудиторной формой работы студента в семестре. Распределение тем рефератов происходит в течение первой недели, а представление рефератов – не позднее, чем за неделю до проведения итогового контроля. Целью написания реферата является более глубокое освоение студентом изучаемого предмета, включая связи с другими областями, а также выработка навыков самостоятельной работы с современной математической литературой. При оценке реферата учитываются стиль и последовательность изложения, соответствие написанного заданной теме, умение выделить главные моменты.

При подготовке реферата недопустимо включать в свою работу выдержки из работ других авторов без указания на это, пересказывать чужую работу близко к тексту без отсылки к ней, использовать чужие идеи без указания первоисточников (это касается и источников, найденных в Интернете). Все случаи плагиата должны быть исключены. В конце работы даётся исчерпывающий список всех использованных источников.

В конце обучения проводится итоговая работа, охватывающая весь материал курса. Задание к итоговой работе включает два теоретических вопроса и одну задачу. Один из вопросов должен отражать темы 1-3, а другой вопрос и задача должны отражать темы 4-7. Перечень вопросов и основные типы задач, выносимых на итоговую работу, даются за неделю до неё. Каждый студент выполняет итоговую работу в аудитории, письменно отвечая по памяти, «своими словами». Время, выделяемое на написание итоговой работы – не более двух академических часов. В ходе итогового контроля проверяются способность свободно ориентироваться в пройденном материале и наличие практических навыков по его применению. Ниже приведены возможные варианты заданий к итоговой работе.

Вариант 1

1) Рассмотрим пространство функций аналитических в окрестности действительного тора. Доказать, что топология, заданная семейством норм $\| u \|_s = \sum_k | u_k | e^{|k|s}$ равномерно эквивалентна топологии равномерной сходимости.

2) Построить пример подпространства в пространстве аналитических функций на торе, в котором операция дифференцирования имеет показатель потери равный 1/2.

3) Найти показатель потери оператора $L_\omega^{-1}$, где $\omega$ -- диофантов вектор.

Вариант 2

1) Доказать, что оператор дифференцирования является компактным оператором на пространстве аналитических функций с топологией равномерной сходимости.

2) Привести пример линейного параболического уравнения, для которого задача Коши с нулевыми условиями Дирихле на границе области не имеет решения, продолжаемого аналитически в окрестность этой области.

3) Какими должны быть начальные условия для параболического уравнения на торе, что бы решение этого уравнения было аналитическим в точке t=0.

Для оценки работы студента применяется балльная система. Наилучшему результату соответствуют 100 баллов, которые распределяются по видам контроля следующим образом:

- промежуточная контрольная работа – от 0 до 30 баллов;
- реферат – от 0 до 20 баллов;
- итоговая работа – от 0 до 50 баллов.

Соответствие суммарного количества набранных баллов итоговой оценке (по пятибалльной шкале и европейскому стандарту) показано в таблицах.

| Баллы | 0-50 | 51-68 | 69-85 | 86-100 |
|---|---|---|---|---|
| Оценка | неуд. | удовл. | хорошо | отлично |

| Баллы | 0-30 | 31-50 | 51-62 | 63-73 | 74-83 | 84-92 | 93-100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Оценка | F | FX | E | D | B | C | A |

Методика выставления и шкала итоговых оценок отвечают принятым в РУДН для теоретических дисциплин.

## Программа курса

***<u>Аннотированное содержание курса</u>***

**Раздел 1.**

**Темы:** 1, 2

**Трудоёмкость:** 1 кредит, 40 часов, из них

**- лекции** – 10 часов,

**- практическия занятия** – 10 часов,

**- самостоятельная работа** – 20 часов.

В этом разделе изучаются две темы: пространства функционального анализа и топологическая степень отображения.

Первая тема дополняет стандартные курсы функционального анализа, в которых рассматривается теория банаховых пространств. В этой теме изучаются локально выпуклые линейные топологические пространства, даются примеры таких пространств, изучаются сходства и различия этих пространств и пространств Банаха. Основным источником получения локально выпуклых линейных топологических пространств в этом курсе, являются шкалы банаховых пространств. Шкалы банаховых пространств возникают в связи с использованием пространств Соболева и пространств аналитических функций.

Вторая тема посвящена степени конечномерных отображений. Целью изучения этой темы является получение теорем существования решений для нелинейных конечномерных уравнений. Эти теоремы существования в дальнейшем обобщаются на случай банаховых пространств и локально выпуклых линейных топологических пространств. Построение теории степени конечномерных отображений является самозамкнутым и не подразумевает знакомство слушателя с методами дифференциальной геометрии.

В качестве приложения теории степени доказываются классические теоремы о существовании решений нелинейных уравнений: Брауэра, теорема существования для монотонного и коэрцитивного отображения.

**Раздел 2.**

**Темы:** 3

**Трудоёмкость:** 1 кредит, 32 часа, из них

**- лекции** – 8 часов,

**- практическия занятия** – 8 часов,

**- самостоятельная работа** – 16 часов.

В этом разделе рассматриваются нелинейные уравнения в пространствах Банаха. Основными результатами раздела являются теорема Шаудера о неподвижной точке, которая получена как бесконечномерное обобщение теоремы Брауэра, доказанной в предыдущем разделе, и теорема существования решения монотонного коэрцитивного отображения, которая тоже является обобщением конечномерных результатов, полученных ранее.

Теорема Шаудера рассмотрена в двух формулировках, одна из которых предполагает компактность области, а другая – компактность отображения. Доказывается эквивалентность этих двух формулировок. При доказательстве теоремы Шаудера используется лемма об аппроксимации компактных отображений конечномерными. Эта лемма представляет самостоятельный интерес и за рамками обсуждаемых в этом разделе вопросов. В последующих главах теорема Шаудера применяется в теории задачи Коши-Ковалевской.

Теорема о решении уравнения с монотонным коэрцитивным отображением используется в этом курсе в приложении к нелинейным эллиптическим уравнениям. С методической точки зрения, сочетание этих двух результатов в последовательном изложении очень полезно, так как дает возможность слушателю почувствовать разнообразие методов и идей, лежащих в основе теорем существования решений уравнений.

**Раздел 3.**
**Темы:** 4, 5
**Трудоёмкость:** 1 кредит, 32 часа, из них
лекции – 8 часов,
практические занятия – 8 часов,
самостоятельная работа – 16 часов.

В этом разделе рассматриваются нелинейные эллиптические уравнения и уравнения в локально выпуклых линейных топологических пространствах.
В теме «Нелинейные эллиптические уравнения» рассматривается несколько методов решения и видов уравнений. Сначала, в качестве вспомогательного аппарата, выводится лемма, которая является ослабленной H^1-версией эллиптического принципа максимума. Оценки, получаемые с помощью этой леммы, позволяют применить теорему Шаудера к одному полулинейному функционально-дифференциальному уравнению весьма общего вида и получить теорему существования слабого решения. Далее в этой теме рассматривается классическое тождество Похожаева, позволяющее получить ряд результатов о несуществовании решения; эти результаты сравниваются с ранее доказанной теоремой. Тема «Нелинейные эллиптические уравнения» носит наименее абстрактный характер и

позволяет слушателю уяснить общие методы решения нелинейных задач на конкретных примерах.

В теме «Нелинейные уравнения в локально выпуклых топологических пространствах» рассмотрены три результата. Абстрактная схема теории возмущений, теорема Нэша-Мозера, теорема Браудера о неподвижной точке. Изучение абстрактной схемы теории возмущений вводит слушателя в круг характерных задач, возникающих при качественном анализе уравнений в шкалах банаховых пространств. Основной результат абстрактной теории возмущений -- это теорема о приближенных решениях уравнения с малым параметром. Методологически эта теорема связана с принципом сжатых отображений и методом последовательных приближений. Далее рассматривается теорема Нэша-Мозера, которая знакомит слушателя с другим итерационным методом – методом Ньютона. Теорема о приближенных решениях уравнения с малым параметром и теорема Нэша-Мозера являются количественными результатами. Как пример качественного результата изучается теорема Браудера о неподвижной точке. Теорема Нэша-Мозера в этом курсе используется в КАМ-теории, а теорема Браудера -- в применении к нелипшицевым версиям задачи Коши-Ковалевской и нелипшицевым квазилинейным параболическим уравнениям.

**Раздел 4.**

**Темы:** 6, 7

**Трудоёмкость:** 1 кредит, 40 часов, из них

лекции – 10 часов,

практическия занятия – 10 часов,

самостоятельная работа – 20 часов.

В этом разделе изучаются локальные теоремы существования для абстрактной задачи Коши-Ковалевской и квазилинейного параболического уравнения. Обе задачи рассматриваются в нелипшицевой постановке и представляют собой обобщения классической теоремы Пеано в различных направлениях. Эти теоремы иллюстрируются примерами функционально-дифференциальных уравнений, возникших в последнее время в различных приложениях.

## ***Список литературы***

**Обязательная литература**

1. *Зубелевич О.Э.* О параболических задачах с нелипшицевыми нелинейностями // Современная математика. Фундаментальные направления – том 21, январь 2007 – стр. 62-76
2. *Иосида К.* Функциональный анализ // Мир – М., 1967
3. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа // Наука – М., 1972 (и последующие издания)
4. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач // Мир – М., 1972

5. *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу // Мир – М., 1977
6. *Шварц Л.* Анализ // Мир – М., 1972
7. *Taylor M.E.* Partial Differential Equations // Springer – New York,1996
8. *Zubelevich O.* Abstract version of the Cauchy – Kowalewski Problem // Central European Journal of Mathematics 2(3) 2004, p. 382-387

**Дополнительная литература**

1. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений // Гостехиздат – М., 1958
2. *Годунов А.Н.* Теорема Пеано в банаховых пространствах // Функц. анализ и его прилож. – 1974 – 9, вып. 1 – С.59-60.
3. *Овсянников Л.В.* Нелинейная задача Коши в шкале банаховых пространств // ДАН, 200 (1971), № 4, 789-792
4. *Овсянников Л.В.* Сингулярный оператор в шкале банаховых пространств // ДАН, 163 (1965), №4, 819-822
5. *Arrieta J.M., Carvalho A.N.* Abstract parabolic problems with critical nonlinearities and applications to Navier – Stokes and Heat equations // Trans. Amer. Math. Soc. – 1999. – 352, № 1 – p. 285-310
6. *Browder* A new generalization of the Schauder fixed point theorem // Math. Ann. – 1967. – 174 – p.285-290
7. *Carvalho A.N., Cholewa J.W., Dlotko T.* Abstract parabolic problems in ordered banach spaces // Colloq. Math. – 2001. – 90. – p.1-17
8. *Diedonné J.* Deux exeples singuliers d'équations différentielles // Acta. Sci. Math. (Szeged). – 1950. –12 – p.38-40

9. *Duchateau P., Treves J.F.* An abstract Cauchy – Kowalewska theorem in scales of Gevrey classes // Symposia Math., v.7, Academic Press, N.Y., 1971, p.135-163
10. *Folland G.* Real analysis: modern techniques and their applications. 2nd ed. // Chichester: Wiley-Interscience, 1999
11. *Fujita H., Kato T.* On the Navier – Stokes initial value problem // Arch. Ration. Mech. Anal. – 1964. – 16. – p.269-315
12. *Kato T., Fujita H.* On the nonstationary Navier – Stokes system // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. – 1962. – 32. – p.243-260
13. *Moser J.* A new technique for the construction of solutions of nonlinear differential equations // Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 47 (1961), p.1824-1831
14. *Moser J.* A rapidly convergent iteration method and nonlinear partial differential equations // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 20 (1966), p.265-315, 499-535
15. *Nagumo M.* Űber das Anfangswertproblem partieller Differentialgleichungen // Japan J. Math., 18 (1941), p.41-47
16. *Nishida T.* A note on Nirenberg`s theorem as an abstract form of the nonlinear Cauchy – Kowalewski theorem in a scale of Banach spaces // J. Diff. Geom.
17. *Nirenberg L.* An abstract form of the nonlinear Cauchy – Kowalewski theorem // J. Diff. Geom. 6 (1972) p.561-576
18. *Nirenberg L.* An application of generalized degree to a class of nonlinear problems // 3rd.Colloq. Analyse Fonctionelle, Liège, Sept. 1970, Math. Vander, 1971, p.57-74
19. *Ohkitani K., Okamoto H.* Blow-up problems modeled from the strain-vorticity dynamics // Proc. of the "Tosio Kato`s Method and Principles for

Evolution Equations in Mathematical Physics”. – RIMS Kokyuroku. – 2001. – 1234. – p.240-250

20. *Schwartz L.* Analyse mathématique // Paris: Hermann, 1967
21. *Schwartz J.T.* Nonlinear functional analysis // Gordon and Breach, N.Y., 1969
22. *Treves J.F.* Ovsjannikov theorem and hyperdifferential operators // Notas Math., 46, 1968,Mimeographed notes
23. *Treves J.F.* An abstract nonlinear Cauchy – Kovalevska theorem // Trans. Amer. Math. Soc., 150 (1970), p.77-92
24. *Yamanaka T.* Note on Kowalewskaja`s system of partial differential equations // Comment. Math. Univ. St. Paul., 9 (1960), p.7-10
25. *Yorke J.* A continuous differential equation in Hilbert space without existence // Funkcial. Ekvac. – 1970 –13 – p.19-21
26. *Zehnder E.* Am implicit function theorem for small divisor problems // Bull. Amer.Math. Soc., 80 (1974), p.174-179
27. *Zubelevich O.* On some topological view on the abstract Cauchy – Kowalewski problem // Complex Var. Theory Appl. – 2004 – 49, № 10. – p.703-709

***Темы рефератов***

1. Степень отображений в банаховых пространствах (отображения вида I+K, K – компактное отображение).
2. Степень отображения и многомерные вычеты.
3. Монотонные операторы и теоремы Минти.
4. Абстрактная задача Коши-Ковалевской: Теорема Сафонова и теорема Ниренберга-Нишиды.
5. Параболические уравнения в банаховых пространствах с отношением частичного порядка.

6. Параболические уравнения в шкалах банаховых пространств: критические показатели.
7. Вариационные обобщения тождества Похожаева.
8. Тождество Похожаева для сильно нелинейного эллиптического уравнения (p-Лаплас).
9. Вариационный принцип Икланда.
10. Полулинейные эллиптические уравнения с монотонной нелинейностью.

**Учебный тематический план курса**

| № | Название разделов и тем | Всего часов | в том числе | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | лекции | практ. занятия | самост. работа |
| **1.** | **Пространства функционального анализа** | **8** | **2** | **2** | **4** |
| **2.** | **Топологическая степень и ее приложения** | **32** | **8** | **8** | **16** |
| 2.1 | Определение и основные свойства степени | 8 | 2 | 2 | 4 |
| 2.2 | Поведение степени при гомотопиях | 8 | 2 | 2 | 4 |
| 2.3 | Степень непрерывных отображений | 8 | 2 | 2 | 4 |
| 2.4 | Нелинейные уравнения в конечномерном пространстве | 8 | 2 | 2 | 4 |
| **3.** | **Нелинейные уравнения в пространствах Банаха** | **32** | **8** | **8** | **16** |
| 3.1 | Некоторые следствия теории топологической степени | 8 | 2 | 2 | 4 |
| 3.2 | Вариационные методы | 8 | 2 | 2 | 4 |
| 3.3 | Выпуклая теория | 8 | 2 | 2 | 4 |
| 3.4 | Условные экстремумы | 8 | 2 | 2 | 4 |
| **4.** | **Нелинейные эллиптические уравнения** | **8** | **2** | **2** | **4** |
| **5.** | **Нелинейные уравнения в локально выпуклых линейных топологических пространствах** | **24** | **6** | **6** | **12** |

| № | Название разделов и тем | Всего часов | в том числе | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | лекции | практ. занятия | самост. работа |
| 5.1 | Абстрактная схема теории возмущений | 8 | 2 | 2 | 4 |
| 5.2 | Приложение к задаче об усреднении в одночастотной динамической системе | 8 | 2 | 2 | 4 |
| 5.3 | Теорема Нэша-Мозера | 8 | 2 | 2 | 4 |
| **6.** | **Абстрактная задача Коши-Ковалевской** | **16** | **4** | **4** | **8** |
| 6.1 | Теорема Ниренберга-Нишиды | 8 | 2 | 2 | 4 |
| 6.2 | Абстрактная теорема типа Пеано | 8 | 2 | 2 | 4 |
| **7.** | **Параболические уравнения** | **24** | **6** | **6** | **12** |
| 7.1 | Символ функционально-дифференциального оператора | 8 | 2 | 2 | 4 |
| 7.2 | Свойства параболической полугруппы в различных функциональных пространствах | 8 | 2 | 2 | 4 |
| 7.3 | Параболические уравнения в шкале банаховых пространств: липшицева теория | 8 | 2 | 2 | 4 |
| **Итог** | | **144** | **36** | **36** | **72** |