ОРДЕНА ДРУЖБЫ НАРОДОВ
УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ имени ПАТРИСА ЛУМУМБЫ

На правах рукописи

БУБЯКИН Игорь Витальевич

ГЕОМЕТРИЯ ПЯТИМЕРНЫХ КОМПЛЕКСОВ ДВУМЕРНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ P^5

01.01.04 – геометрия и топология

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 1991

Работа выполнена в Московском ордена Октябрьской революции и ордена Трудового Красного Знамени институте стали и сплавов.

Научный руководитель –
доктор физико-математических наук, профессор М.А.Акивис

Официальные оппоненты :
доктор физико-математических наук, профессор М.И.Граев
кандидат физико-математических наук Е.В.Ферапонтов

Ведущая организация – Московский педагогический государственный университет имени В.И.Ленина

Защита диссертации состоится 16 января 1992 года в 15 часов 30 мин на заседании специализированного совета К 053.22.23 по присуждению ученой степени кандидата физико-математических наук в Университете дружбы народов имени Патриса Лумумбы по адресу: 117 302, Москва, ул. Орджоникидзе, 3, ауд. 485.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Университета дружбы народов по адресу: 117 198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6.

Автореферат разослан 10 декабря 1991 года.

Ученый секретарь
специализированного совета
кандидат физико-математических наук,
доцент М.В.Драгнев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Исследованию семейств m-мерных плоскостей в пространствах различной размерности посвящено большое число работ советских и зарубежных геометров. Основная задача исследования состоит в изучении строения, свойств и классификации таких семейств.

Семейство m-мерных плоскостей называется к о м п л е к с о м , если через каждую точку некоторой области многомерного пространства проходит бесконечное число плоскостей семейства. Теория комплексов многомерных плоскостей возникла в результате обобщений из трехмерных теорий конгруэнций[1] и комплексов[2] прямых. Комплексам многомерных плоскостей посвящена работа Л.Э.Гербсоммер, Л.З.Круглякова и А.Г.Мизина[3]. Комплексы прямых и плоскостей исследовались в работе Г.И.Орленко[4]. Теория гиперкомплексов прямых в n-мерном пространстве построена К.И.Гринцевичюсом[5]. И.М.Гельфанд и М.И.Граев[6] при решении основной задачи интегральной геометрии /восстановление функции в комплексном пространстве C^n на основе значений ее интегралов по прямым комплекса/ выделили класс комплексов прямых, на котором эта задача имеет решение. Такие комплексы были названы допустимыми. Допустимым комплексам прямых в прост-

---

[1]Фиников С.П. Теория конгруэнций. - М.-Л.:ГИТТЛ, 1950.-528 с.
[2]Кованцов Н.И. Теория комплексов. - Киев:КГУ, 1963. -292 с.
[3]Гербсоммер Л.Э., Кругляков Л.З., Мизин А.Г.О комплексах многомерных плоскостей // ДАН СССР. - 1980. - Т.255, № 5. - С.1039-1042.
[4]Орленко Г.И. К метрической теории семейств прямых и плоскостей в многомерном евклидовом пространстве // Тр. Рижского ин-та инж. авиации. - 1966. - Т.97. - С.3-37.
[5]Гринцевичюс К.И. Гиперкомплекс прямых в многомерном проективном пространстве // Тр. 3-го Всес. мат. съезда. - М.,1956.- Т.1. - С.148-149.
[6]Гельфанд И.М., Граев М.И. Комплексы прямых в пространстве C^n // Функцион. анализ и его прил. - 1968. - Т.2, вып.3. - С.39-52.

ранстве C^n посвящена работа А.Б.Гончарова[7]. В работе С.Г. Гиндикина[8] рассматриваются некоторые задачи, приводящие к допустимым комплексам прямых. Геометрическое описание допустимых комплексов m-мерных плоскостей представляет значительные трудности. Попытки такого описания делались Л.З.Кругляковым[9], В.А.Нерсесяном[10].

В настоящей работе изучаются пятимерные комплексы двумерных плоскостей в пятимерном проективном пространстве. Выбор размерности образующего элемента, комплекса и пространства обуславливается следующими обстоятельствами. Комплексы двумерных плоскостей пространства P^5 являются обобщением комплексов прямых пространства P^3 в том смысле, что элемент такого комплекса зависит от того же числа параметров, что и точка пространства. Это обстоятельство имеет важное значение для интегральной геометрии. Семейство двумерных плоскостей в пространстве P^5 будет самодвойственным так же, как и семейство прямых в пространстве P^3, поскольку при коррелятивном преобразовании ему соответствует семейство того же вида. В проективном пространстве P^5 четырехмерным, шестимерным, семимерным, а также гиперкомплексам двумерных плоскостей посвящены соответственно работы Л.З.Круглякова, А.Г.Мизина и Е.С.Никитиной[11],

---

[7] Гончаров А.Б. Допустимые семейства K-мерных подмногообразий // ДАН СССР. - 1988. - Т.300, № 3. - С.535-539.

[8] Гиндикин С.Г. Редукции многообразий рациональных кривых и связанные задачи теории дифференциальных уравнений // Функцион. анализ и его прил. - 1984. - Т.18, вып.4. - С.14-39.

[9] Кругляков Л.З. О некоторых комплексах многомерных плоскостей в проективном пространстве // Функцион. анализ и его прил. - 1982. - Т.16, вып.3. - С.66-67.

[10] Нерсесян В.А. Допустимые комплексы K-мерных плоскостей в P^n // Ученые зап. ЕГУ. - 1986. - № 2. - С.34-38.

[11] Кругляков Л.З., Мизин А.Г., Никитина Е.С. Комплексы индекса один плоскостей в пространстве P_5 // Геом. сб. - Томск, 1977. - Вып.18. - С.47-58.

С.А.Лактионова[12] и А.Г.Мизина[13]. В пространстве P^5 остались не исследованными лишь пятимерные комплексы двумерных плоскостей.

Таким образом, исследование пятимерных комплексов двумерных плоскостей в проективном пространстве P^5 является актуальной задачей многомерной проективно-дифференциальной геометрии.

<u>Целью диссертационной работы</u> является исследование пятимерных комплексов двумерных плоскостей в пространстве P^5, построение их классификации, а также изучение их свойств и строения.

<u>Научная новизна исследования</u> заключается в том, что предложен новый принцип классификации пятимерных комплексов двумерных плоскостей в пространстве P^5 и проведена такая классификация. Для этого использовано грассманово отображение[14] многообразия двумерных плоскостей пространства P^5 на девятимерное алгебраическое многообразие пространства P^{19}.

В работе применяется <u>метод</u> подвижного репера и внешних дифференциальных форм Э.Картана. Исследования носят локальный характер, и все встречающиеся функции предполагаются достаточное число раз дифференцируемыми.

<u>Практическое и теоретическое значение работы.</u> Результаты, полученные в диссертационной работе, дополняют общую теорию семейств многомерных плоскостей. Эти результаты и развитые в работе методы могут быть использованы для изучения комплексов плоскостей произвольной размерности, а также поверхно-

---

[12] Лактионов С.А. Классификация комплексов K_0 плоскостей в проективном пространстве P_3 // Геом. сб. - Томск, 1985. - Вып.26. - С.65-76.

[13] Мизин А.Г. Комплексы коразмерности один и два двумерных плоскостей в пятимерном проективном пространстве: Дисс. канд.физ.-мат. наук. - Томск, 1983. - 145 с.

[14] Ходж У.В.Д. и Пидо Д. Методы алгебраической геометрии. - М.: ИЛ, 1954. - Т.I. - 462 с.

стей с плоскими образующими. Полученные результаты могут быть использованы при чтении лекций по проективно-дифференциальной геометрии семейств многомерных плоскостей.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на X /1987г./, XI /1988г./ и XII /1989г./ научных конференциях молодых ученых факультета физико-математических и естественных наук Университета дружбы народов им. П.Лумумбы, на заседании семинара по классической дифференциальной геометрии под руководством профессора Л.Е.Евтушика в Московском государственном университете им.М.В.Ломоносова/1989г., а также неоднократно на заседаниях геометрического семинара под руководством профессора М.А.Акивиса в Московском институте стали и сплавов.

Публикации. По результатам диссертации опубликовано шесть статей, список которых представлен в конце реферата.

Структура и объем диссертации. Работа состоит из введения, трех глав и изложена на 115 страницах машинописного текста. Библиография содержит 55 наименований литературы.

ОБЗОР СОДЕРЖАНИЯ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность темы, намечены цель и задачи работы, указано значение полученных результатов, изложена история вопроса и приведено краткое содержание диссертации.

В первой главе изучаются общие свойства пятимерных комплексов K двумерных плоскостей в проективном пространстве P^5. При этом используется отображение μ грассманова многообразия $G(2,5)$ двумерных плоскостей пространства P^5 на девятимерное алгебраическое многообразие $\Omega(2,5)$ пространства P^{19}, называемое грассмановым отображением.

В § I рассматривается изображение пятимерных комплексов K на алгебраическом многообразии $\Omega(2,5)$. Пусть ℓ - точка на многообразии $\Omega(2,5)$, соответствующая двумерной плоскости L пространства P^5. Многообразие $\Omega(2,5)$ в каждой точке ℓ имеет девятимерную касательную плоскость $T_\ell\Omega(2,5)$, которая выскает из самого многообразия конус $B_e(2)$ асимптотических направлений второго порядка[15]. Проективизация этого конуса с центром в точке e представляет собой многообразие Сегре[16] $S_e(2,2)=PB_e(2)$, которое является четырехмерной алгебраической поверхностью шестого порядка[17], несущей два семейства двумерных плоских образующих.

С точкой e многообразия $\Omega(2,5)$ наряду с конусом $B_e(2)$ связан конус $B_e(3)$ асимптотических направлений третьего порядка[15] с вершиной в точке e. Проективизация конуса $B_e(3)$ с центром в точке e представляет собой кубическую гиперповерхность $PB_e(3)$ пространства $P^8=PT_e\Omega(2,5)$, несущую два семейства пятимерных плоских образующих.

Комплекс K двумерных плоскостей L в пространстве P^5 задается четырьмя линейно независимыми уравнениями

$$\Lambda^{\alpha i}_{p}\omega_i^p=0, \qquad (*)$$

$$(\alpha=1,2,3,4\ ,\ i=0,1,2\ ,\ p=3,4,5),$$

где I-формы ω_i^p определяют перемещение плоскости L. Этому комплексу при грассмановом отображении μ соответствует пятимерное многообразие $V\subset\Omega(2,5)$. Многообразие V имеет в точке e пятимерную касательную плоскость, определяемую в касательном пространстве $T_e\Omega(2,5)$ уравнениями $(*)$. Проективизация этой плоскости представляет собой четырехмерную плоскость PT_eV. Различным видам взаимного расположения плоскости PT_eV с многообразием Сегре $S_e(2,2)$ и кубической гиперповерхностью $PB_e(3)$ соответствуют различные классы комплексов K. В общем случае плоскость PT_eV пересекает многообразие $S_e(2,2)$ в шести точках. В каждой точке e они определяют шесть

---

[15]Акивис М.А. К дифференциальной геометрии грассманова многообразия // Tensor . - 1982. - .38. - P.273-282.

[16]Акивис М.А. Ткани и почти грассмановы структуры // Сиб.мат. журн. - 1982. - Т.23, № 6. - С.6-15.

[17]Room T.G. The geometry of determinantal loci. - Cambridge : 1938. - 484 p.

направлений, интегральным кривым которых на комплексе K соответствуют шесть семейств торсов. При этом через каждую образующую L комплекса проходит шесть торсов, по одному из каждого семейства. Каждый торс комплекса K, проходящий через плоскость L, определяет на L характеристическую прямую и трехмерную характеристическую плоскость, проходящую через L. Если на плоскости L никакие три характеристические прямые не принадлежат одному пучку и никакие три трехмерные характеристические плоскости, проходящие через плоскость L, не лежат в одной гиперплоскости, то такой комплекс K является комплексом общего вида. Эти комплексы определяются с произволом четырех функций пяти аргументов.

В § 2 изучаются некоторые общие свойства комплексов. Рассматривается гиперконус C, образованный плоскостями комплекса, проходящими через неособую точку плоскости L. Проективизация гиперконуса C с центром в его вершине представляет собой трехмерную линейчатую поверхность PC. Поверхность PC называется фокальной или полуфокальной, если ее прямолинейные образующие касаются соответственно двух или одной двумерных поверхностей. Показано, что вершина гиперконуса принадлежит характеристической прямой или совпадает с пересечением двух характеристических прямых тогда и только тогда, когда для этой вершины линейчатая поверхность PC является соответственно полуфокальной или фокальной.

Комплекс K двумерных плоскостей называется специальным, если для каждой его образующей L характеристические прямые и трехмерные характеристические плоскости имеют специальную конфигурацию. Во второй главе для всех классов специальных комплексов выясняется их строение и изучается изображение этих комплексов на алгебраическом многообразии $\Omega(2,5)$.

В § 1 рассматриваются комплексы K, у которых в каждой образующей имеются тройки характеристических прямых, проходящих через одну точку, а соответствующие трехмерные характеристические плоскости находятся в общем положении. Если число таких троек равно α, то комплекс обозначается через K_α.

При этом число $\alpha \leq 4$.

Показано, что комплекс K является комплексом K_α тогда и только тогда, когда его плоскости L касаются α тангенциально невырожденных гиперповерхностей. Доказано, что комплексы K_α являются самодвойственными комплексами.

В § 2 изучаются специальные комплексы C_1, через каждую образующую которых проходят два торса с общей характеристической прямой. Доказывается, что комплекс K является комплексом C_1 тогда и только тогда, когда его плоскости L касаются трех тангенциально невырожденных гиперповерхностей в точках, принадлежащих одной прямой. Рассматриваются также комплексы, двойственные комплексам C_1. Эти комплексы характеризуются тем, что через каждую их образующую проходит два торса с общей трехмерной характеристической плоскостью.

В § 3 исследуются комплексы K, через каждую образующую которых проходят две пары торсов, имеющих общие характеристические прямые. Они обозначаются через C_2. Доказано, что для каждой образующей комплекса K, трехмерные характеристические плоскости торсов, имеющих общую характеристическую прямую, не могут совпадать. Поэтому их линейная оболочка четырехмерна. Обозначим через σ_1 и σ_2 линейные оболочки трехмерных характеристических плоскостей двух имеющихся пар торсов. В зависимости от взаимного расположения этих гиперплоскостей выделяются два вида комплексов C_2, а именно: комплексы C_2 первого вида, когда гиперплоскости σ_1 и σ_2 имеют трехмерное пересечение, и комплексы C_2 второго вида, когда гиперплоскости σ_1 и σ_2 совпадают. Показано, что комплекс K является комплексом C_2 первого вида тогда и только тогда, когда его плоскости L пересекают некоторую кривую и касаются двух тангенциально невырожденных гиперповерхностей. Комплекс K является комплексом C_2 второго вида тогда и только тогда, когда его плоскости L пересекают некоторую кривую и принадлежат гиперплоскостям однопараметрического семейства. Рассматриваются также комплексы, двойственные комплексам C_2. Эти комплексы характеризуются тем, что через каждую их образующую проходят две пары торсов, имеющие общие трехмерные характеристические плоскости.

<u>В третьей главе</u> изучаются N-допустимые комплексы, определенные В.А.Нерсесяном[10] и K-допустимые комплексы, определенные Л.З.Кругляковым[9].

В § I рассматриваются N-допустимые комплексы. Как уже было сказано выше, через неособую точку M плоскости L проходит двупараметрическая совокупность плоскостей комплекса, образующих гиперконус C. Комплекс K называется N-допустимым, если гиперконус C является тангенциально вырожденным, и касательная плоскость к этому конусу вдоль образующей L не меняется при перемещении точки M в плоскости L. В работе находится изображение N-допустимых комплексов K на алгебраическом многообразии $\Omega(2,5)$. Рассматриваются также комплексы, двойственные N-допустимым комплексам. Они определяются следующим образом. Рассмотрим произвольную корреляцию в пространстве P^5, переводящую двумерную плоскость $L \subset K$ в себя. При этой корреляции неособой точке M соответствует неособая гиперплоскость α, проходящая через плоскость L. Гиперконусу C, состоящему из плоскостей комплекса K с вершиной в точке M при этой корреляции будет соответствовать конгруэнция C^* плоскостей L комплекса, принадлежащая гиперплоскости α. Дуально N-допустимые комплексы характеризуются тем, что конгруэнция C^* образована двумерными плоскостями L, касающимися двумерной поверхности, описываемой некоторой точкой $N \in L$, при этом точка N не зависит от положения гиперплоскости α.

В § 2 изучаются комплексы, для которых понижается ранг $R_p(\Lambda_p^{\alpha_i})$, где указанный индекс означает номер строки, а остальные индексы - номера столбцов. Такие комплексы называются K-допустимыми. Выясняется строение этих комплексов и их изображение на алгебраическом многообразии $\Omega(2,5)$. Доказано, что комплекс K является K-допустимым тогда и только тогда, когда его плоскости L принадлежат трехмерным плоскостям некоторой конгруэнции. Рассматриваются также комплексы, двойственные K-допустимым комплексам. Они характеризуются тем, что для них понижается ранг $R_i(\Lambda_p^{\alpha_i})$.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

I. Построено грассманово отображение пятимерных комплексов двумерных плоскостей в пространстве P^5 и с его помощью изучены свойства таких комплексов.

2. Дана классификация пятимерных комплексов двумерных плоскостей, основанная на классификации конфигураций характеристических прямых в плоскости L комплекса и трехмерных характеристических плоскостей, проходящих через плоскость L.

3. Для каждого из выделенных классов комплексов дано полное геометрическое описание.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

I. Бубякин И.В. Об одном специальном классе пятимерных комплексов двумерных плоскостей в проективном пространстве P^5 // Материалы X конф. мол. ученых Ун-та дружбы народов, Москва, I3-I9 апр., I987г./ Ун-т дружбы народов. - М., I987. - Ч.3.- С.I69-I72: ил. - Библиогр.: 4 назв. - Рус. - Деп. в ВИНИТИ 29.I2.87, № 9I53-В87.

2. Бубякин И.В. K-допустимые комплексы K^5 двумерных плоскостей в проективном пространстве P^5 / Московский ин-т стали и сплавов. - М., I987. - 2I с.:ил.- Деп. в ВИНИТИ I7.I2.87, № 356-В88.

3. Бубякин И.В. О некоторых свойствах N-допустимых пятимерных комплексов двумерных плоскостей в проективном пространстве P^5 // Материалы XI конф. мол. ученых Ун-та дружбы народов , Москва, I5-I9 марта, I988г./ Ун-т дружбы народов. - М., I988. - Ч.2. - С.I26-I29: ил.-Библиогр.: 4 назв.- Рус.- Деп. в ВИНИТИ 01.07.88, № 5305-В88.

4. Бубякин И.В. О классификации пятимерных комплексов K^5 двумерных плоскостей в проективном пространстве P^5 // Материалы XII конф. мол. ученых Ун-та дружбы народов, Москва, 18-22 апр., 1989г./ Ун-т дружбы народов. - М., 1989. - Ч.2. - С.24-26:ил. - Библиогр.: 2 назв. - Рус. - Деп. в ВИНИТИ 12.07.89, № 4616-В89.

5. Бубякин И.В. О некоторых свойствах пятимерных комплексов двумерных плоскостей в проективном пространстве P^5 // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. - Калининград, 1990. - Вып.21. - С.12-16.

6. Бубякин И.В. О геометрии пятимерных комплексов двумерных плоскостей в проективном пространстве P^5 // Функцион. анализ и его прил. - 1991. - Т.25, вып.3. - С.73-76.

Бубякин