На правах рукописи

РУСИНА Надежда Владимировна

МЕТОДЫ АНАЛИЗА ВЕРОЯТНОСТНО-ВРЕМЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК МОДЕЛЕЙ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ПАССИВНОЙ ОПТИЧЕСКОЙ СЕТИ

05.13.17− теоретические основы информатики

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2015

Работа выполнена на кафедре прикладной информатики и теории вероятностей Российского университета дружбы народов.

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор
Башарин Гелий Павлович.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Автоматизированные системы управления» Московского государственного университета путей сообщения (МГУПС)
Ивницкий Виктор Аронович,

кандидат физико-математических наук, доцент, директор департамента пакетных сетей и услуг ОАО «Интеллект Телеком»
Ефимушкин Владимир Александрович.

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук (ИПУ РАН).

Защита состоится «11» декабря 2015 г. в 16 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.203.28 на базе Российского университета дружбы народов, расположенного по адресу: Москва, ул. Орджоникидзе, дом 3, ауд. 110.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Российского университета дружбы народов по адресу: 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, дом. 6 (отзывы на автореферат просьба направлять по указанному адресу) или на официальном сайте диссоветов РУДН по адресу: http://dissovet.rudn.ru/.

Автореферат разослан « ___ » _________ 2015 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета С.А. Васильев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность исследования. На сегодняшний день вследствие бурного развития сетей связи, быстрого роста числа пользователей, увеличения числа предоставляемых услуг и их качества телекоммуникационная индустрия осуществляет переход от голосовых систем передачи к системам передачи данных. Развитие телекоммуникационных сетей осуществляется по следующим основным направлениям: предоставление услуг с высоким показателем качества обслуживания за счет увеличения скорости передачи данных и сокращение доли медного кабеля при строительстве локальных сетей. Доминирующее положение занимает трафик данных, который в свою очередь требует создание сетей связи с высокой пропускной способностью. В связи с этим сети связи, построенные на оптических и оптоэлектронных компонентах, приобретают все большую популярность.

Многие известные российские ученые: Башарин Г.П., Бочаров П.П., Вишневский В.М., Гайдамака Ю.В., Гнеденко Б.В., Гольдштейн Б.С., Ефимушкин В.А., Ивницкий В.А., Климов Г.П., Коваленко И.Н., Наумов В.А., Нейман В.И., Печинкин А.В., Пшеничников А.П., Самуйлов К.Е., Севастьянов Б.А., Степанов С.Н., Харкевич А.Д., Шнепс-Шнеппе М.А., Яновский Г.Г. и др., а также зарубежные ученые: Iversen V.B., Kelly F.P., Kleinrock L., Mukherjee B., Siva Ram Murthy C. и др. – принимали участие в разработках математических моделей, методов численного анализа, широко использующихся в настоящее время при проектировании и строительстве телекоммуникационных сетей. В свою очередь применение оптических технологий при построении телекоммуникационных сетей ставит ряд задач перед теорией телетрафика. Такие задачи ранее не возникали, их решение невозможно без проведения современных исследований.

Широкое внедрение информационных технологий и растущий спрос на услуги связи требуют от операторов постоянного увеличения пропускной способности своих сетей. Повышение пропускной способности обеспечивается строительством волоконно-оптических сетей связи. Технология пассивных оптических сетей является быстроразвивающейся и одной из наиболее перспективных технологий высокоскоростного мультисервисного множественного доступа по оптическому волокну, которая использует в своей архитектуре только пассивные оптические компоненты, исключающие преобразование сигнала из электрической формы в оптическую и обратно.

На сегодняшний день модели теории телетрафика и теории массового обслуживания (ТМО), которые можно было бы применить при анализе производительности пассивной оптической сети и ее качества обслуживания, нуждаются в дальнейшем развитии. В основном они описаны в работах зарубежных авторов. В российской научной литературе на эту тематику публикаций немного.

Построение математических моделей функционирования пассивной оптической сети и их дальнейший анализ необходим для компаний-производителей оборудования, операторам сетей связи для организации эффективного управления сетевыми ресурсами и обеспечения предоставления услуг с требуемым уровнем качества. Исходя из этого, математический анализ пассивных оптических сетей является весьма актуальной задачей современной индустрии связи.

Целью диссертационной работы является построение математических моделей для анализа показателей эффективности функционирования пассивной оптической сети с временным и частотным разделением канального ресурса и динамическим распределением длин волн, с учетом периодов неактивности абонентских узлов и наличия приоритетного трафика.

Результаты, выносимые на защиту.

1. Построена модель совместного функционирования абонентских узлов пассивной оптической сети в виде многолинейной мультисервисной системы массового обслуживания (СМО), и получена формула для расчета основного показателя эффективности сети - вероятности блокировки передачи данных на абонентском узле из-за отсутствия свободной длины волны.
2. Построены бесприоритетная и приоритетная модели передачи трафика нескольких типов от одного абонентского узла с учетом блокировки передачи данных из-за отсутствия свободной длины волны. Для бесприоритетной модели получено в мультипликативном виде стационарное распределение, а для приоритетной модели показано, что стационарное распределение не имеет мультипликативного представления.
3. Для бесприоритетной модели получены формулы для расчета вероятности блокировки передачи данных на абонентском узле из-за ограниченной емкости буферного накопителя, а для приоритетной модели получены формулы для расчета вероятности блокировки потока с наивысшим приоритетом. Для бесприоритетной модели и для потока с наивысшим приоритетом в приоритетной модели получен метод расчета нормирующей константы стационарного распределения.
4. Для бесприоритетной и приоритетной моделей с трафиком от нескольких абонентских узлов подтвержден результат о мультипликативности, полученный для модели с одним абонентским узлом. Для бесприоритетной модели получен метод расчета нормирующей константы и формулы для вероятности блокировки из-за ограниченной емкости буферного накопителя для потока трафика каждого типа. Для приоритетной модели выписана система уравнений равновесия и получена в общем виде формула для вероятности блокировки из-за ограниченной емкости буферного накопителя для потоков каждого приоритета и трафика каждого типа.

Научная новизна диссертации состоит в следующем.

1. Для модели совместного функционирования абонентских узлов пассивной оптической сети введена вероятность блокировки передачи данных на абонентском узле из-за отсутствия свободной длины волны и получена формула для ее расчета.
2. В отличие от известных ранее, модели передачи трафика от абонентских узлов построены в виде однолинейных мультисервисных СМО, что позволило получить стационарное распределение для бесприоритетной модели и для

потока с наивысшим приоритетом в приоритетной модели с трафиком от одного абонентского узла в мультипликативном виде.
3. Для бесприоритетной модели и для потока с наивысшим приоритетом в приоритетной модели с трафиком от одного абонентского узла получен рекуррентный алгоритм для расчета нормирующей константы стационарного распределения.
4. Для потока с наивысшим приоритетом в приоритетной модели с трафиком от одного абонентского узла получена рекуррентная формула для расчета вероятности блокировки из-за ограниченной емкости буферного накопителя.

Методы исследования. В диссертации применяются методы исследования следующих дисциплин: теория вероятностей, ТМО, теория телетрафика, теория случайных процессов.

Обоснованность и достоверность результатов. Теоретические результаты, полученные в диссертационной работе, обоснованы математическими доказательствами с использованием строгих и апробированных математических методов исследования. Теоретические результаты подтверждаются проведенными численными исследованиями на базе исходных данных, близких к реальности.

Теоретическая значимость. Разработаны математические модели передачи бесприоритетного и приоритетного трафика в пассивной оптической сети в виде мультисервисных СМО с буферными накопителями конечной емкости, учитывающих вероятность блокировки передачи данных для абонентского узла. Получены алгоритмы типа Бузена для расчета данной вероятности, а также для расчета вероятности блокировки заявок различного типа и приоритета.

Практическая значимость. Математические модели, прямые и алгоритмические формулы расчета ВВХ позволяют произвести оценку показателей качества обслуживания и эффективно управлять ресурсами пассивных оптических сетей. Результаты диссертации используются в учебном процессе на кафедре прикладной информатики и теории вероятностей РУДН для студентов, обучающихся по направлению «Фундаментальная информатика и информационные технологии», а также в курсовых и дипломных работах.

Апробация работы. Результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались на

- Отраслевой научно-технической конференции «Технологии информационного общества» (Москва, 2013, 2014);
- Всероссийской конференции с международным участием «Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем» (Москва, 2013, 2014,2015);
- Международной конференции «Распределенные компьютерные и коммуникационные сети: управление, вычисление, связь» (Москва, 2013, 2015);
- межвузовском научном семинаре «Современные телекоммуникации и математическая теория телетрафика» (Москва, 2015).

Публикации. Всего по теме диссертации опубликовано 12 работ, из них [1-4] – в изданиях, рекомендованных ВАК РФ, а [6-12] – в трудах международных и всероссийских научных конференций.

В совместно опубликованных работах [1, 8, 9] соискателю принадлежит разработка математической модели передачи трафика от одного абонентского узла; в [2, 3, 5, 7] – разработка математической модели совместного функционирования и обобщенной модели совместной передачи трафика от нескольких абонентских узлов; в [4] – разработка алгоритма расчета ВВХ совместного функционирования абонентских узлов; в [6] – постановка задачи разработки математической модели передачи трафика от одного абонентского узла; [10] – постановка задачи разработки обобщенной модели совместной передачи трафика от нескольких абонентских узлов; [11] – разработка моносервисной математической модели передачи приоритетного трафика от одного абонентского узла.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из оглавления, списка сокращений, списка условных обозначений, введения, трех глав, заключения, библиографии и списка иллюстративного материала. Объем диссертационной работы - 101 страница. Библиография состоит из 124 наименований. Диссертация содержит 31 рисунок и 11 таблиц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** изложена актуальность темы диссертации, научная новизна и практическая ценность исследований, сформулирована цель диссертационной работы и дана общая характеристика основных результатов по главам, сформулированы новые задачи исследований.

В **главе 1** представлены особенности построения пассивных оптических сетей, постановка задачи исследований и математическая модель совместного функционирования оптических абонентских узлов. В **разделе 1.1** описаны особенности построения пассивной оптической сети (PON, Passive Optical Network). В **разделе 1.2** представлена постановка задач исследований.

В **разделе 1.3** строится и анализируется математическая модель совместного функционирования оптических абонентских узлов (ONU, Optical Network Unit), которые используют перенастраиваемые лазеры и осуществляют передачу данных к оптическому линейному терминалу (OLT, Optical Line Terminal) в выделенном диапазоне длин волн через пассивный оптический мультиплексор (MUX)/ демультиплексор (DEMUX), который объединяет/ разделяет спектральные каналы в одном оптоволокне. Спектральный канал – это канал передачи данных, устанавливаемый между абонентским узлом и линейным терминалом, по которому осуществляется передача данных на выделенной длине волны. Архитектура пассивной оптической сети представлена на рисунке 1.

Линейный терминал располагается в центральном модуле (CO, Central Office), соединяя PON с городской региональной сетью (MAN, Metropolitan Area Network), с глобальной сетью (WAN, Wide Area Network). Абонентский узел размещается на стороне абонента сети или в зоне разветвления.

В соответствии с технологией временного разделения канального ресурса, абонентский узел может находиться либо в активном состоянии, когда осуществляется передача/получение данных к/от линейного терминала в выделенном ему временном домене, либо в пассивном состоянии, в котором передача/получение данных к/от линейного терминала не осуществляется. Если в момент включения абонентского узла на линейном терминале нет свободной длины волны, происходит блокировка передачи данных во временном домене, выделенном абонентскому узлу, и абонентский узел остается в пассивном состоянии.

Согласно принципам технологии частотного разделения канального ресурса и динамического распределения длин волн для передачи восходящего трафика от абонентского узла к линейному терминалу выделено конечное число W длин волн, $\omega_1, \dots, \omega_W$. Таким образом, необходимо распределить ограниченное число $W \le L$ длин волн между конечным числом L абонентских узлов.

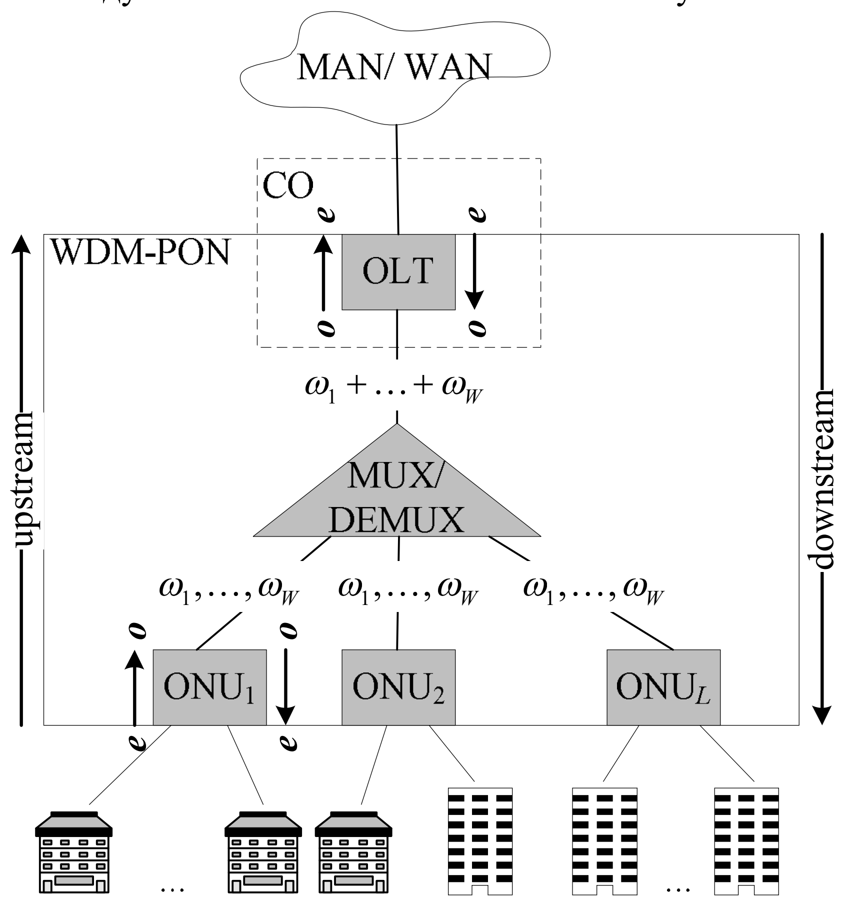

Рис. 1 – Архитектура пассивной оптической сети, $W \le L$

На линейный терминал поступают пуассоновские потоки l-запросов на выделение длины волны ONU_l с постоянными интенсивностями κ_l, $0 < \kappa_l < \infty$, $l = \overline{1, L}$, которые независимы в совокупности.

Если в момент поступления l-запроса, $l = \overline{1, L}$, на линейном терминале нет свободной длины волны, то l-запрос блокируется, не влияя на интенсивность пуассоновского потока, породившего его.

Время занятия длины волны, выделенной ONU_l, соответствует времени пребывания ONU_l в активном состоянии, при котором осуществляется передача и/или получение данных, и распределено по экспоненциальному закону с параметром v_l, $0 < v_l < \infty$, $l = \overline{1,L}$.

$$\Omega := \{\boldsymbol{n} \mid n_{\bullet} \in \{0,1,\ldots,W\}, W \le L\}, \quad \boldsymbol{n} := (n_l)_{l=\overline{1,L}}, \quad n_l \in \{0,1\}, \quad n_{\bullet} := \boldsymbol{1}^T \boldsymbol{n} = \sum_{i=1}^{L} n_i \quad -$$

пространство состояний абонентских узлов, подключенных к одному линейному терминалу, где компоненты вектора $\boldsymbol{n}$ отражают выделение длины волны для каждого абонентского узла.

Совместное функционирование абонентских узлов описывается с помощью ступенчатого марковского процесса (СтМП) $\boldsymbol{X}(t) = (X_l(t))_{l=\overline{1,L}}$ с пространством состояний Ω и конечной матрицей интенсивностей переходов, которая принимается неразложимой. Здесь $X_l(t)$ - состояние l-го абонентского узла в момент времени $t > 0$: $X_l(t) = 1$ - абонентский узел активен; $X_l(t) = 0$ - абонентский узел пассивен.

В соответствии с теоремой 1.3 диссертации у СтМП $\boldsymbol{X}(t)$ существует стационарное распределение вероятностей, не зависящее от начального и имеющее мультипликативный вид, справедливо

$$p(\boldsymbol{n}) = G^{-1} \prod_{l=1}^{L} \mathrm{a}_l^{n_l}, \; G = \frac{1}{p(\boldsymbol{0})} = \sum_{\boldsymbol{n} \in \Omega} \prod_{l=1}^{L} \mathrm{a}_l^{n_l}, \; \boldsymbol{n} \in \Omega; \; \mathrm{a}_l := \kappa_l / v_l, \; l = \overline{1,L}. \tag{1}$$

Вероятность отсутствия блокировки передачи данных на l-м абонентском узле имеет вид

$$\begin{gathered} p(\Omega_{l,\mathrm{ON}}) = \sum_{\boldsymbol{n} \in \Omega_{l,\mathrm{ON}}} p(\boldsymbol{n}) := \alpha_l, \\ \Omega_{l,\mathrm{ON}} := \{\boldsymbol{n} \in \Omega \mid n_l = 1\} \cup \{\boldsymbol{n} \in \Omega \mid n_l = 0, n_{\bullet} < W\}, \; l = \overline{1,L}. \end{gathered} \tag{2}$$

<u>Лемма 1</u>. *Нормирующая константа G (1) вычисляется по формулам*

$$G = \sum_{\mathrm{w}=0}^{W} g(L,\mathrm{w}), \; g(l,\mathrm{w}) = \begin{cases} 0, & l = 0, \quad \mathrm{w} = \overline{1,W}, \\ 1, & l = \overline{0,L}, \mathrm{w} = 0, \\ g(l-1,\mathrm{w}) + \mathrm{a}_l g(l-1,\mathrm{w}-1), & l = \overline{1,L}, \mathrm{w} = \overline{1,W}, \end{cases} \tag{3}$$

где $\mathrm{a}_l := \kappa_l / v_l$, $l = \overline{1,L}$, $g(l,\mathrm{w})$ - ненормированная вероятность того, что первыми l абонентскими узлами занято w длин волн.

В соответствии с теоремой 1.4 диссертации формулы расчета вероятности отсутствия блокировки передачи данных на l-м абонентском узле имеют вид

$$\alpha_l = 1 - G^{-1} g_{l,\mathrm{OFF}}(W), \; g_{l,\mathrm{OFF}}(\mathrm{w}) = \begin{cases} 1, & \mathrm{w} = 0, \\ g(L,\mathrm{w}) - \mathrm{a}_l g_{l,\mathrm{OFF}}(\mathrm{w}-1), & \mathrm{w} = \overline{1,W}, \end{cases} \tag{4}$$

где $\mathrm{a}_l := \kappa_l / v_l$, $l = \overline{1,L}$, $g_{l,\mathrm{OFF}}(\mathrm{w})$ - ненормированная вероятность того, что абонентскими узлами занято w длин волн, и l-й абонентский узел находится в пассивном состоянии. Величина $1 - \alpha_l$ называется вероятностью блокировки передачи данных на l-м абонентском узле из-за отсутствия свободной длины волны и является одним из основных показателей эффективности функционирования пассивной оптической сети.

В **главе 2** строятся и анализируются математические модели функционирования пассивной оптической сети с бесприоритетным трафиком, приведен численный анализ ВВХ построенных моделей.

В **разделе 2.1** строится и анализируется математическая модель передачи восходящего потока трафика от одного абонентского узла. Модель абонентского узла представляет собою однолинейную СМО с БН емкостью R, $0<R<\infty$, условных единиц. Исследуемая система обслуживает K типов заявок. Поступают пуассоновские потоки k-заявок с постоянными интенсивностями λ_k, $0<\lambda_k<\infty$, $k=\overline{1,K}$, которые независимы в совокупности. При этом k-заявка требует b_k, $0<b_k\le R$, условных единиц в БН. b_k условных единиц занимаются в БН на время обслуживания k-заявки и освобождаются вместе с прибором, как только завершилось ее обслуживание. Дисциплина выбора заявок из очереди - в порядке поступления (FCFS, First Come First Served).

Если в момент поступления k- заявки, $k=\overline{1,K}$, в системе занято более чем $R-b_k$ мест в БН, то k-заявка блокируется, не влияя на интенсивность пуассоновского потока, породившего ее.

Примем, что время обслуживания k-заявки в системе распределено по экспоненциальному закону с интенсивностью μ_k, $0<\mu_k<\infty$, $k=\overline{1,K}$. Т.к. в момент включения абонентского узла на линейном терминале может не быть свободной длины волны, интенсивность обслуживания примет вид

$$\alpha\mu_k,\ k=\overline{1,K}, \tag{5}$$

где α, $0<\alpha<1$, - вероятность отсутствия блокировки передачи данных на абонентском узле.

$\mathrm{S}:=\{\boldsymbol{m}\,|\,0\le \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{m}\le R\}$, $\boldsymbol{m}:=(m_k)_{k=\overline{1,K}}$, $m_k\in\{0,1,\ldots,\lfloor R/b_k\rfloor\}$ - пространство состояний абонентского узла, где компоненты вектора $\boldsymbol{m}$ соответствуют числу заявок каждого типа в БН абонентского узла.

Функционирование СМО опишем с помощью СтМП $\boldsymbol{Y}(t)=(Y_k(t))_{k=\overline{1,K}}$ с пространством состояний S и конечной матрицей интенсивностей переходов, которая принимается неразложимой. Здесь $Y_k(t)$ - число k-заявок в абонентском узле в момент времени $t>0$.

Модель функционирования абонентского узла и схема соответствующей СМО представлены на рисунках 2а и 2б.

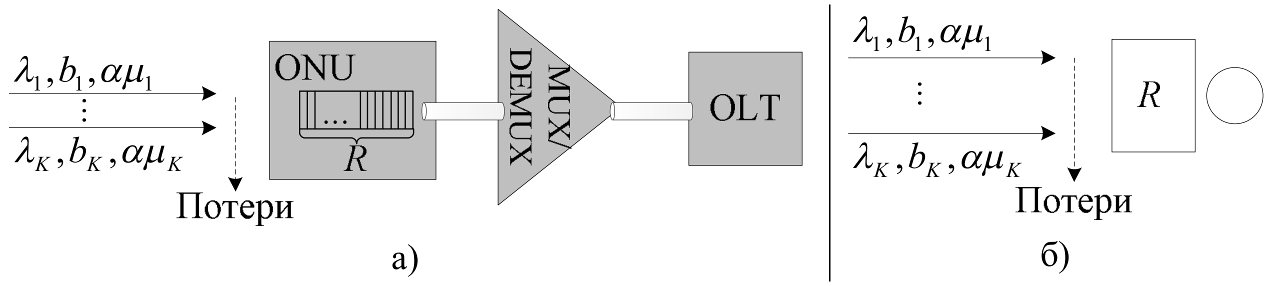

Рис. 2 – а) Модель абонентского узла; б) Схема СМО

В соответствии с теоремой 2.1 диссертации у СтМП $\boldsymbol{Y}(t)$ существует стационарное распределение вероятностей, не зависящее от начального и имеющее мультипликативный вид, справедливо

$$p(\boldsymbol{m}) = G^{-1} \frac{1}{\alpha^{m_\bullet}} \prod_{k=1}^{K} \rho_k^{m_k}, \; G = \frac{1}{p(\boldsymbol{0})} = \sum_{\boldsymbol{m} \in \mathrm{S}} \frac{1}{\alpha^{m_\bullet}} \prod_{k=1}^{K} \rho_k^{m_k}, \; \boldsymbol{m} \in \mathrm{S};$$
$$\rho_k := \lambda_k / \mu_k, \; k = \overline{1,K}, \; m_\bullet := \sum_{k=1}^{K} m_k. \tag{6}$$

Вероятность блокировки k-заявок из-за ограниченной емкости буферного накопителя рассчитывается по формуле

$$\pi_k = \frac{1}{G} \sum_{\boldsymbol{m} \in \mathrm{S}_k} \frac{1}{\alpha^{m_\bullet}} \prod_{k=1}^{K} \rho_k^{m_k}, \; \mathrm{S}_k = \{\boldsymbol{m} \in S \mid \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{m} > R - b_k\}, \; k = \overline{1,K}. \tag{7}$$

<u>Теорема 1</u>. *Нормирующая константа* G *(6) вычисляется по формулам*

$$G = \sum_{r=0}^{R} g(K,r), \; g(k,r) = \begin{cases} 0, & k = 0, \quad r = \overline{1,R}, \\ 0, & k = \overline{0,K}, \; r < 0, \\ 1, & k = \overline{0,K}, \; r = 0, \\ g(k-1,r) + \dfrac{\rho_k}{\alpha} g(k, r - b_k), & k = \overline{1,K}, r = \overline{1,R}, \end{cases} \tag{8}$$

где $\rho_k := \lambda_k / \mu_k$, $k = \overline{1,K}$, $g(k,r)$ *- ненормированная вероятность того, что первыми* $(1,\ldots,k)$ *типами заявок занято все* r *единиц емкости БН.*

С учетом (8) вероятность блокировки k-заявок из-за ограниченной емкости буферного накопителя рассчитывается по формуле

$$\pi_k = \frac{1}{G} \sum_{r=R-b_k+1}^{R} g(K,r), \; k = \overline{1,K}. \tag{9}$$

В **разделе 2.2** строится и анализируется обобщенная математическая модель совместной передачи восходящего потока трафика от L абонентских узлов в сети, в которой выделено конечное число $W \le L$ длин волн. Модель представляет собою совокупность L однолинейных СМО с БН емкостью R_l, $0 < R_l < \infty$, $l = \overline{1,L}$, условных единиц, соответственно. Исследуемая система обслуживает K типов заявок. Поступают пуассоновские потоки k-заявок на соответствующий абонентский узел с постоянными интенсивностями $\lambda_{l,k}$, $0 < \lambda_{l,k} < \infty$, $l = \overline{1,L}$, $k = \overline{1,K}$, которые независимы в совокупности для каждого абонентского узла. При этом k-заявка требует b_k, $0 < b_k \le \min\limits_{l=\overline{1,L}} R_l$, $k = \overline{1,K}$, условных единиц в БН. b_k условных единиц занимаются в БН на время обслуживания k-заявки и освобождаются, как только завершилось ее обслуживание, вместе с освобождением прибора. Алгоритм постановки в очередь и блокировок, а также алгоритм выбора из очереди соответствуют алгоритмам, описанным в разделе 2.1.

Примем, что время обслуживания k-заявки в каждом абонентском узле распределено по экспоненциальному закону с интенсивностью μ_k, $0 < \mu_k < \infty$, $k = \overline{1,K}$. Т.к. в момент включения абонентского узла на линейном терминале может не быть свободной длины волны, интенсивность обслуживания примет вид

$$\alpha_l \mu_k,\ l = \overline{1,L},\ k = \overline{1,K}, \tag{10}$$

где α_l, $0 < \alpha_l < 1$, - вероятности отсутствия блокировки передачи данных на l-м абонентском узле.

Модель совместного функционирования нескольких абонентских узлов с бесприоритетным трафиком и схема соответствующей СМО представлены на рисунках 3а и 3б.

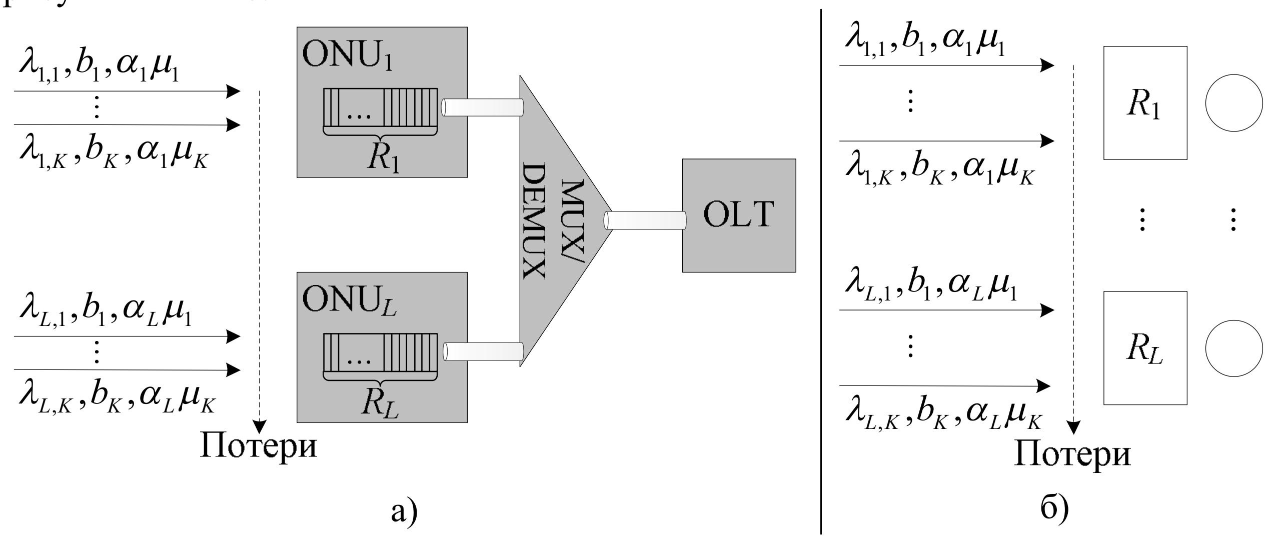

Рис. 3 – а) Модель фрагмента PON с бесприоритетным трафиком;
б) Схема СМО

$$\mathrm{S} := \{\mathbf{M} \mid 0 \le \sum_{k=1}^{K} b_k m_{l,k} \le R_l,\ l = \overline{1,L}\},\quad \mathbf{M} := \left(m_{l,k}\right)_{l=\overline{1,L},k=\overline{1,K}},\quad m_{l,k} \in \{0,1,\ldots,\lfloor R_l/b_k \rfloor\}\ -$$

пространство состояний модели, где компоненты $m_{l,k}$ матрицы $\mathbf{M}$ соответствуют числу k-заявок в БН l-го абонентского узла.

Функционирование СМО опишем с помощью СтМП $\mathbf{Y}(t) := \left(Y_{l,k}(t)\right)_{l=\overline{1,L},k=\overline{1,K}}$ с пространством состояний S и конечной матрицей интенсивностей переходов, которая принимается неразложимой. Здесь $Y_{l,k}(t)$ - число k-заявок в ONU$_l$ в момент времени $t > 0$.

В соответствии с теоремой 2.3 диссертации у СтМП $\mathbf{Y}(t)$ существует стационарное распределение вероятностей, не зависящее от начального и имеющее мультипликативный вид, справедливо

$$p(\mathbf{M}) = G^{-1}\prod_{l=1}^{L}\frac{1}{\alpha_l^{m_{l,\bullet}}}\prod_{k=1}^{K}\rho_{l,k}^{m_{l,k}}\ ,\ G = \frac{1}{p(\mathbf{0})} = \sum_{\mathbf{M}\in \mathrm{S}}\prod_{l=1}^{L}\frac{1}{\alpha_l^{m_{l,\bullet}}}\prod_{k=1}^{K}\rho_{l,k}^{m_{l,k}}\ ,\ \mathbf{M}\in \mathrm{S};$$
$$\rho_{l,k} := \lambda_{l,k}/\mu_k\ ,\ k=\overline{1,K}\ ,\ m_{l,\bullet} := \sum_{k=1}^{K} m_{l,k}\ ,\ l=\overline{1,L}\ . \qquad (11)$$

Вероятность блокировки k-заявок в l-м абонентском узле из-за ограниченной емкости БН рассчитывается по формуле

$$\pi_{l,k} = \sum_{\mathbf{M}\in \overline{\mathrm{S}}_{l,k}} p(\mathbf{M}),\ \overline{\mathrm{S}}_{l,k} = \{\mathbf{M}\in \mathrm{S}\mid \sum_{k=1}^{K} b_k m_{l,k} > R_l - b_k\},\ l=\overline{1,L},\ k=\overline{1,K}\ . \qquad (12)$$

<u>Теорема 2</u>. *Нормирующая константа G (11) вычисляется по формулам*

$$G = \prod_{l=1}^{L}\sum_{r=0}^{R_l} g_l(K,r),\ g_l(k,r) = \begin{cases} 0, & k=0,\quad r=\overline{1,R_l},\\ 0, & k=\overline{0,K},\ r<0,\\ 1, & k=\overline{0,K},\ r=0,\\ g_l(k-1,r) + \dfrac{\rho_{l,k}}{\alpha_l} g_l(k, r-b_k), & k=\overline{1,K}, r=\overline{1,R_l}, \end{cases} \qquad (13)$$

где $l=\overline{1,L}$, $\rho_{l,k} := \lambda_{l,k}/\mu_k$, $k=\overline{1,K}$, $g_l(k,r)$ - ненормированная вероятность того, что первыми $(1,\ldots,k)$ типами заявок занято все r единиц емкости БН в l-м абонентском узле.

С учетом (13) вероятность блокировки k-заявок в l-м абонентском узле из-за ограниченной емкости БН рассчитывается по формуле

$$\pi_{l,k} = \frac{1}{G}\sum_{r=R_l-b_k+1}^{R_l} g_l(K,r)\prod_{i=1}^{l-1}\sum_{r=0}^{R_i} g_i(K,r)\prod_{i=l+1}^{L}\sum_{r=0}^{R_i} g_i(K,r),\ l=\overline{1,L},\ k=\overline{1,K}\ . \qquad (14)$$

В **разделе 2.3** приведен численный анализ ВВХ моделей, представленных в разделах 1.3, 2.1 и 2.2 диссертации.

В **главе 3** строятся и анализируются математические модели функционирования пассивной оптической сети с приоритетным трафиком, приведен численный анализ ВВХ построенных моделей.

В **разделе 3.1** строится и анализируется математическая модель передачи восходящего трафика от одного абонентского узла в сети с заявками различного приоритета. Количество приоритетов J определяется параметрами качества обслуживания сети. Модель представляет собою однолинейную СМО с J БН, емкость которых составляет R_j, $0<R_j<\infty$, $j=\overline{1,J}$, условных единиц. Здесь и далее $j=1$ - заявки наивысшего приоритета, $j=J$ - заявки наименьшего приоритета. Исследуемая система обслуживает K типов заявок. Поступают пуассоновские потоки (j,k)-заявок с постоянными интенсивностями $\lambda_{j,k}$, $0<\lambda_{j,k}<\infty$, $j=\overline{1,J}$, $k=\overline{1,K}$, которые независимы в совокупности. При этом (j,k)-заявка требует b_k, $0<b_k\le \min\limits_{j=\overline{1,J}}(R_j)$, условных единиц в j-м БН. b_k условных единиц занимаются в j-м БН на время обслуживания (j,k)-заявки и

освобождаются, как только завершилось ее обслуживание, вместе с освобождением прибора. Алгоритм постановки в очередь и блокировок, а также алгоритм выбора из очереди соответствуют алгоритмам, описанным в разделе 2.1. Обслуживание заявок осуществляется с относительным приоритетом.

Примем, что время обслуживания (j,k)-заявки в системе распределено по экспоненциальному закону с интенсивностью μ_k, $0<\mu_k<\infty$, $k=\overline{1,K}$. Т.к. в момент включения абонентского узла на линейном терминале может не быть свободной длины волны, интенсивность обслуживания примет вид (5).

Модель функционирования абонентского узла с приоритетным трафиком и схема соответствующей СМО представлены на рисунках 4а и 4б.

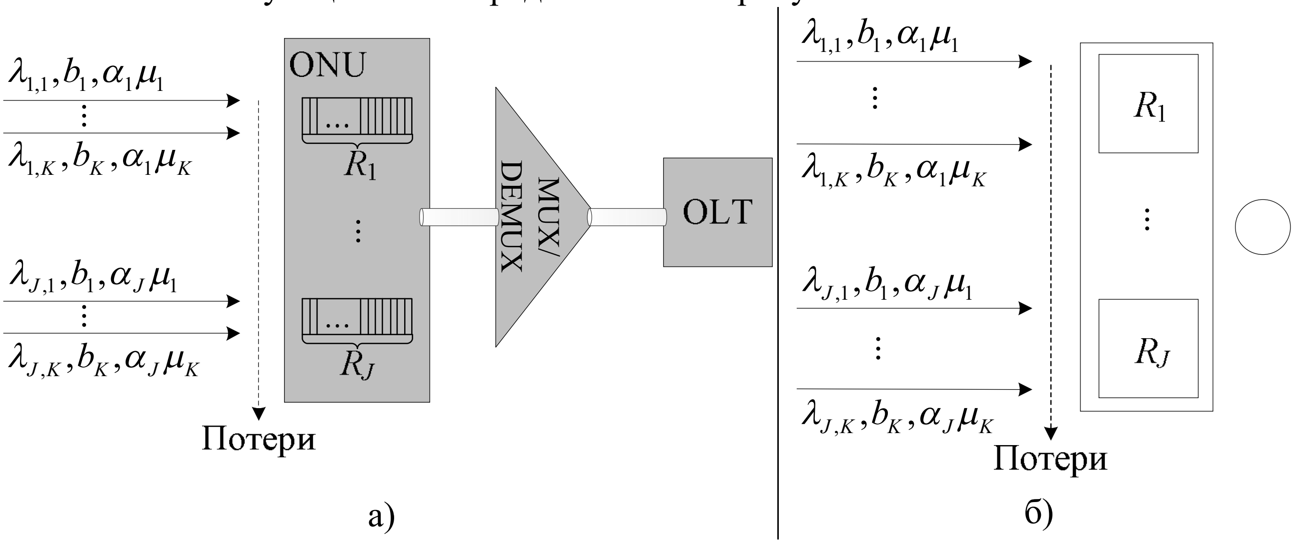

Рис. 4 – а) Модель абонентского узла с приоритетным трафиком;
б) Схема СМО

$$\Psi := \{\mathbf{H} \mid 0 \le \sum_{k=1}^{K} b_k h_{j,k} \le R_j\ ,\ j=\overline{1,J}\},\quad \mathbf{H} := \left(h_{j,k}\right)_{j=\overline{1,J},k=\overline{1,K}},\quad h_{j,k} \in \left\{0,1,\ldots,\lfloor R_j/b_k \rfloor\right\}\ -$$

пространство всех возможных состояний, где компоненты $h_{j,k}$ матрицы $\mathbf{H}$ соответствуют числу (j,k)-заявок в БН абонентского узла.

Функционирование СМО опишем с помощью СтМП $\mathbf{Z}(t) := \left(Z_{j,k}(t)\right)_{j=\overline{1,J},k=\overline{1,K}}$ с пространством состояний Ψ и конечной матрицей интенсивностей переходов, которая принимается неразложимой. Здесь $Z_{j,k}(t)$ - число (j,k)-заявок в абонентском узле в момент времени $t>0$.

Вероятность блокировки (j,k)–заявок из-за ограниченной емкости БН рассчитывается по формуле

$$\pi_{j,k} = \sum_{\mathbf{H}\in\overline{\Psi}_{j,k}} p(\mathbf{H}),\ \overline{\Psi}_{j,k} = \{\mathbf{H}\in\Psi \mid \sum_{k=1}^{K} b_k h_{j,k} > R_j - b_k\},\ j=\overline{1,J},\ k=\overline{1,K}. \qquad (15)$$

СМО, описанная выше, разделяется на две подсистемы:

– подсистема для $(1,k)$-заявок, которая работает независимо (СМО_1);

– подсистема для (j,k)-заявок, $j=\overline{2,J}$, $k=\overline{1,K}$, обслуживание которых зависит от состояния всей СМО в целом.

$\Psi_1 := \{\boldsymbol{h}_1 \mid 0 \le \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{h}_1 \le R_1\}$, $\boldsymbol{h}_1 := \left(h_{1,k}\right)_{k=\overline{1,K}}$, $h_{1,k} \in \{0,1,\ldots,\lfloor R_1/b_k \rfloor\}$ - пространство состояний СМО_1, где компоненты $h_{1,k}$ вектора $\boldsymbol{h}_1$ соответствуют числу $(1,k)$-заявок в БН абонентского узла.

Функционирование СМО_1 опишем с помощью СтМП $\boldsymbol{Z}_1(t) := \left(Z_{1,k}(t)\right)_{k=\overline{1,K}}$ с пространством состояний Ψ_1 и конечной матрицей интенсивностей переходов, которая принимается неразложимой. $Z_{1,k}(t)$ - число $(1,k)$-заявок в СМО_1, в момент времени $t > 0$.

В соответствии с теоремой 3.2 диссертации у СтМП $\boldsymbol{Z}_1(t)$ существует стационарное распределение вероятностей, не зависящее от начального и имеющее мультипликативный вид, справедливо

$$p^{(1)}(\boldsymbol{h}_1) = G_1^{-1} \frac{1}{\alpha^{h_{1,\bullet}}} \prod_{k=1}^{K} \rho_{1,k}^{h_{1,k}}, \; G_1 = \frac{1}{p^{(1)}(\boldsymbol{0})} = \sum_{\boldsymbol{h}_1 \in \Psi_1} \frac{1}{\alpha^{h_{1,\bullet}}} \prod_{k=1}^{K} \rho_{1,k}^{h_{1,k}}, \; \boldsymbol{h}_1 \in \Psi; \quad (16)$$
$$\rho_{1,k} := \lambda_{1,k}/\mu_k, \; k = \overline{1,K}, \; h_{1,\bullet} := \sum_{k=1}^{K} h_{1,k}.$$

Распределение $p^{(1)}(\boldsymbol{h}_1)$, $\boldsymbol{h}_1 \in \Psi$ является маргинальным распределением числа $(1,k)$-заявок в рамках всей СМО.

Вероятность блокировки $(1,k)$-заявок из-за ограниченной емкости БН рассчитывается по формуле

$$\pi_{1,k} = \frac{1}{G_1} \sum_{\boldsymbol{h}_1 \in \overline{\Psi}_{1,k}} \frac{1}{\alpha^{h_{1,\bullet}}} \prod_{k=1}^{K} \rho_{1,k}^{h_{1,k}}, \; \overline{\Psi}_{1,k} = \{\boldsymbol{h}_1 \in \Psi_1 \mid \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{h}_1 > R_1 - b_k\}, \; k = \overline{1,K}. \quad (17)$$

Теорема 3. *Нормирующая константа G_1 (17) вычисляется по формулам*

$$G_1 = \sum_{r=0}^{R_1} g(K,r), \; g(k,r) = \begin{cases} 0, & k = 0, \quad r = \overline{1,R_1}, \\ 0, & k = \overline{0,K}, \; r < 0, \\ 1, & k = \overline{0,K}, \; r = 0, \\ g(k-1,r) + \dfrac{\rho_{1,k}}{\alpha} g(k, r-b_k), & k = \overline{1,K}, r = \overline{1,R_1}, \end{cases} \quad (18)$$

где $\rho_{1,k} := \lambda_{1,k}/\mu_k$, $k = \overline{1,K}$, $g(k,r)$ - ненормированная вероятность того, что первыми $(1,\ldots,k)$ типами заявок занято все r единиц емкости БН.

С учетом (18) вероятность блокировки $(1,k)$-заявок из-за ограниченной емкости БН рассчитывается по формуле

$$\pi_{1,k} = \frac{1}{G_1} \sum_{r=R_1-b_k+1}^{R_1} g(K,r), \; k = \overline{1,K}. \quad (19)$$

В **разделе 3.2** строится и анализируется обобщенная математическая модель передачи восходящего потока трафика в сети, которая содержит L абонентских узлов и в которой обслуживается трафик с заявками различного приоритета. Количество приоритетов J определяется параметрами качества обслуживания. Каждый абонентский узел имеет J БН. Модель представляет собою совокупность

L однолинейных СМО с J БН емкостью $R_{l,j}$, $0 < R_{l,j} < \infty$, $l = \overline{1,L}$, $j = \overline{1,J}$, условных единиц, соответственно. Исследуемая система обслуживает K типов заявок. Поступают пуассоновские потоки (j,k)-заявок на соответствующий абонентский узел с постоянными интенсивностями $\lambda_{l,j,k}$, $0 < \lambda_{l,j,k} < \infty$, $l = \overline{1,L}$, $j = \overline{1,J}$, $k = \overline{1,K}$, которые независимы в совокупности для каждого l-го абонентского узла. При этом (j,k)-заявка требует b_k, $0 < b_k \le \min\limits_{\substack{l=\overline{1,L},\\ j=\overline{1,J}}}(R_{l,j})$, условных единиц в j-м БН. b_k условных единиц занимаются в j-м БН l-го абонентского узла на время обслуживания (j,k)-заявки и освобождаются, как только завершилось ее обслуживание, вместе с освобождением прибора. Алгоритм постановки в очередь и блокировок, а также алгоритм выбора из очереди соответствуют алгоритмам, описанным в разделе 3.1.

Если в момент поступления (j,k)-заявки, $j = \overline{1,J}$, $k = \overline{1,K}$, в l-м абонентском узле занято более чем $R_{l,j} - b_k$ мест в j-м БН, то (j,k)-заявка блокируется, не влияя на интенсивность пуассоновского потока, породившего ее.

Примем, что время обслуживания (j,k)-заявки распределено по экспоненциальному закону с интенсивностью μ_k, $0 < \mu_k < \infty$, $k = \overline{1,K}$. Т.к. в момент включения абонентского узла на линейном терминале может не быть свободной длины волны, интенсивность обслуживания принимает вид (10).

Модель функционирования и схема СМО представлены на рисунках 5а и 5б.

$\Psi := \{\mathbf{H} \mid 0 \le \sum_{k=1}^{K} b_k h_{l,j,k} \le R_{l,j}, l = \overline{1,L}, j = \overline{1,J}\}$, $\mathbf{H} := \left(h_{l,j,k}\right)_{l=\overline{1,L}, j=\overline{1,J}, k=\overline{1,K}}$, $h_{l,j,k} \in \{0,1,\ldots,\lfloor R_{l,j}/b_k \rfloor\}$ - пространство состояний, где компоненты $h_{l,j,k}$ матрицы $\mathbf{H}$ соответствуют числу k-заявок в j-м БН l-го абонентского узла.

Функционирование СМО опишем с помощью СтМП $\mathbf{Z}(t) := \left(Z_{l,j,k}(t)\right)_{l=\overline{1,L}, j=\overline{1,J}, k=\overline{1,K}}$ с пространством состояний Ψ и конечной матрицей интенсивностей переходов, которая принимается неразложимой. Здесь $Z_{l,j,k}(t)$ - число (j,k)-заявок в l-м абонентском узле в момент времени $t > 0$.

В соответствии с теоремой 3.4 диссертации у СтМП $\mathbf{Z}(t)$ существует стационарное распределение вероятностей, не зависящее от начального и удовлетворяющее следующей СУГБ:

$$
\begin{cases}
\sum_{l=1}^{L}\sum_{k=1}^{K} p(\mathbf{H}-\mathbf{E}_{l,1,k})\cdot u(h_{l,1,k})\lambda_{l,1,k} + \sum_{l=1}^{L}\alpha_l \sum_{k=1}^{K} p(\mathbf{H}+\mathbf{E}_{l,1,k})\cdot 1(\mathbf{H}\in\Psi_{l,1,k})\mu_k = \\
= p(\mathbf{H})\left(\sum_{l=1}^{L}\sum_{k=1}^{K}\lambda_{l,1,k} 1(\mathbf{H}\in\Psi_{l,1,k}) + \sum_{l=1}^{L}\alpha_l \sum_{k=1}^{K}\mu_k\right), \\
\sum_{l=1}^{L}\sum_{j=2}^{J}\sum_{k=1}^{K} p(\mathbf{H}-\mathbf{E}_{l,j,k})\cdot u(h_{l,j,k})\lambda_{l,j,k} + \\
+\sum_{l=1}^{L}\alpha_l \sum_{j=2}^{J} 1\left(\sum_{i=1}^{j-1}\sum_{k=1}^{K} h_{l,i,k}=0\right)\cdot \sum_{k=1}^{K} p(\mathbf{H}+\mathbf{E}_{l,j,k})\cdot 1(\mathbf{H}\in\Psi_{l,j,k})\mu_k = \\
= p(\mathbf{H})\left(\sum_{l=1}^{L}\sum_{j=2}^{J}\sum_{k=1}^{K}\lambda_{l,j,k} 1(\mathbf{H}\in\Psi_{l,j,k}) + \alpha_l \sum_{j=2}^{J} 1\left(\sum_{i=1}^{j-1}\sum_{k=1}^{K} h_{l,i,k}=0\right)\sum_{k=1}^{K}\mu_k\right), \ \mathbf{H}\in\Psi.
\end{cases} \tag{20}
$$

Здесь $1(A)$ - функция-индикатор выполнения события A.

Вероятность блокировки (j,k)–заявок для l-го абонентского узла рассчитывается по формуле

$$
\pi_{l,j,k} = \sum_{\mathbf{H}\in\overline{\Psi}_{l,j,k}} p(\mathbf{H}),\ \overline{\Psi}_{l,j,k} = \{\mathbf{H}\in\Psi \mid \sum_{k=1}^{K} b_k h_{l,j,k} > R_{l,j} - b_k\},
$$
$$
l=\overline{1,L},\ j=\overline{1,J},\ k=\overline{1,K}. \tag{21}
$$

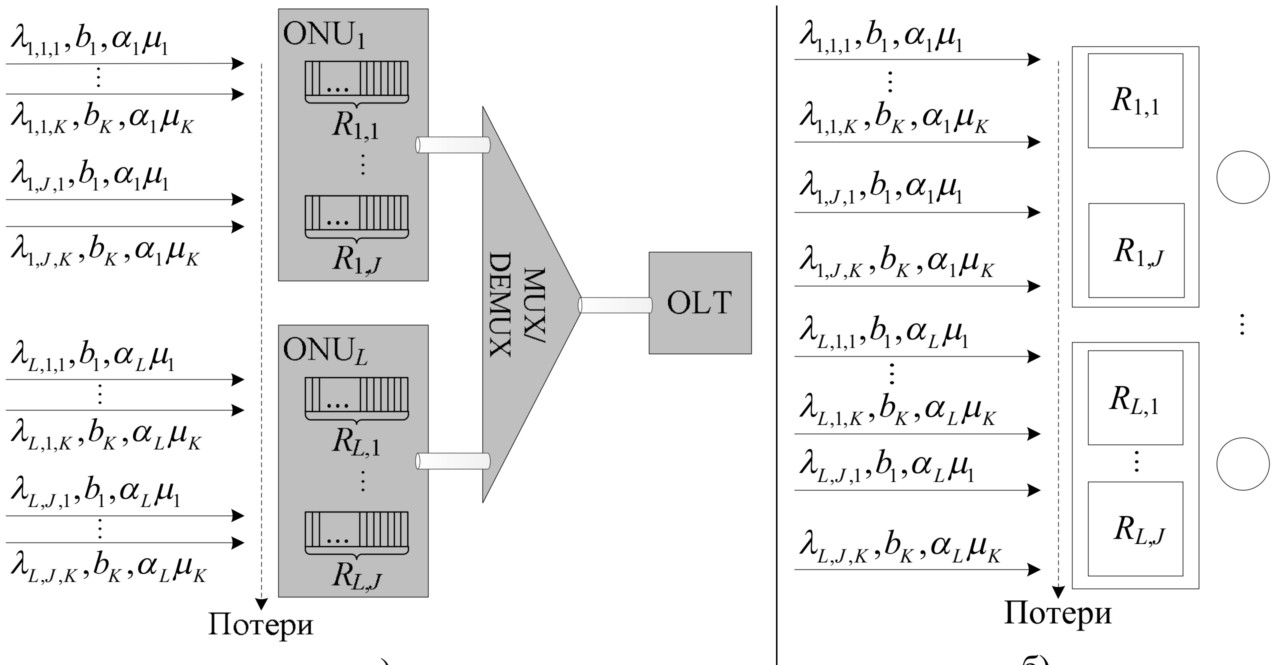

Рис. 5 – а) Модель фрагмента PON с приоритетным трафиком;
б) Схема СМО

В **разделе 3.3** приведен численный анализ ВВХ модели, представленной в разделе 3.1 диссертации.

В **заключении** диссертации представлены основные результаты работы.

1. Построена модель совместного функционирования абонентских узлов пассивной оптической сети в виде многолинейной мультисервисной системы массового обслуживания и получена формула для расчета вероятности блокировки передачи данных на абонентском узле из-за отсутствия свободной длины волны.
2. Построены бесприоритетная и приоритетная модели передачи трафика нескольких типов от одного абонентского узла с учетом блокировки передачи данных из-за отсутствия свободной длины волны. Для бесприоритетной модели получено в мультипликативном виде стационарное распределение, а для приоритетной модели показано, что стационарное распределение не имеет мультипликативного представления.
3. Для бесприоритетной модели получены формулы для расчета вероятности блокировки передачи данных на абонентском узле из-за ограниченной емкости буферного накопителя, а для приоритетной модели получены формулы для расчета вероятности блокировки потока с наивысшим приоритетом. Для бесприоритетной модели и для потока с наивысшим приоритетом в приоритетной модели получен метод расчета нормирующей константы стационарного распределения.
4. Для бесприоритетной и приоритетной моделей с трафиком от нескольких абонентских узлов подтвержден результат о мультипликативности, полученный для модели с одним абонентским узлом. Для бесприоритетной модели получен метод расчета нормирующей константы и формулы для вероятности блокировки из-за ограниченной емкости буферного накопителя для потока трафика каждого типа. Для приоритетной модели выписана система уравнений равновесия и получена в общем виде формула для вероятности блокировки из-за ограниченной емкости буферного накопителя для потоков каждого приоритета и трафика каждого типа.

Основные результаты диссертации отражены в следующих опубликованных работах:

Статьи в изданиях, рекомендованных ВАК РФ:

1. Башарин Г.П., Русина Н.В. Математическая модель функционирования мультисервисной PON при передаче восходящего потока трафика // T-Comm. - Телекоммуникации и транспорт. – М.: ООО «ИД Медиа Паблишер», 2013. - № 11. - С. 37-39.

2. Башарин Г.П., Русина Н.В. Анализ вероятностно-временных характеристик математической модели передачи восходящего потока трафика в TDMA PON // T-Comm. - Телекоммуникации и транспорт. – М.: ООО «ИД Медиа Паблишер», 2014. – Том 8, № 8. - С. 4-7.

3. Башарин Г.П., Русина Н.В. Анализ восходящего потока трафика в пассивных оптических сетях // Вестник РУДН. «Математика. Информатика. Физика». – 2014. - № 2. – С. 27-35.

4. Башарин Г.П., Гайдамака Ю.В., Русина Н.В. Алгоритм расчета вероятностных характеристик функционирования оптических абонентских узлов в пассивной оптической сети // Вестник РУДН. «Математика. Информатика. Физика». – 2015. - № 2. – С. 28-32.

Научные публикации в иных изданиях:

5. Basharin G., Rusina N. Multirate Loss Model for Optical Network Unit in Passive Optical Networks // Distributed Computer and Communication Networks: Communications in Computer and Information Networks. - Cham.: Springer, 2014. - Pp. 219-228.

Материалы международных, всероссийских научных конференций:

6. Башарин Г.П., Русина Н.В. Математическая модель функционирования ONU в мультисервисной PON при передаче восходящего потока трафика // VII отрасл. научн. конф. «Технологии информационного общества». – Москва: 20-21 февраля 2013. – С. 15.

7. Башарин Г.П., Русина Н.В. ON-OFF Модель функционирования сетевых устройств в пассивной оптической сети // Всеросс. конф. с межд. уч. «Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем». – Москва: 22-26 апреля 2013. – С. 7-9.

8. Башарин Г.П., Русина Н.В. Модель передачи восходящего потока трафика в пассивной оптической сети // Всеросс. конф. с межд. уч. «Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем». – Москва: 22-26 апреля 2013. – С. 10-12.

9. Башарин Г.П., Русина Н.В. Модель функционирования абонентского сетевого устройства в мультисервисной пассивной оптической сети // 17-я межд. конф. «Распределенные компьютерные и коммуникационные сети: управление, вычисление, связь». – Москва: 7-10 октября 2013. – С. 273-275.

10. Башарин Г.П., Русина Н.В. Анализ вероятностно-временных характеристик математической модели передачи восходящего потока трафика в TDMA PON // VIII отрасл. научн. конф. «Технологии информационного общества». – Москва: 20-21 февраля 2014. – С. 9.

11. Башарин Г.П., Русина Н.В. Моносервисная модель передачи приоритетного трафика в PON // Всеросс. конф. с межд. уч. «Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем».– Москва: 22-25 апреля 2014. – С. 8-10.

12. Русина Н.В. Алгоритм расчета вероятно-временных характеристик модели передачи трафика в фрагменте WDM-TDMA PON // Всеросс. конф. с межд. уч. «Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем». – Москва: 20-24 апреля 2015. – С. 53-55.

Русина Н.В. (Россия)

Методы анализа вероятностно-временных характеристик моделей функционирования пассивной оптической сети

В диссертационной работе исследуются фрагменты WDM-TDMA PON с динамическим распределением длин волн. Разработаны математические модели функционирования данных фрагментов: совместное функционирование абонентских узлов, передача трафика от одного абонентского узла, совместная передача трафика от нескольких абонентских узлов, передача приоритетного трафика от одного абонентского узла, совместная передача приоритетного трафика от нескольких абонентских узлов.

Получены прямые формулы расчета ВВХ всех моделей. Разработаны эффективные и оптимальные сверточные алгоритмы типа алгоритма Бузена для расчета ВВХ, применимые к моделям совместного функционирования абонентских узлов, передачи трафика от одного абонентского узла, совместной передачи трафика от нескольких абонентских узлов. Для маргинального распределения $(1,k)$-заявок модели передачи приоритетного трафика от одного абонентского узла так же получены точные формулы и разработан сверточный алгоритм типа алгоритма Бузена для расчета ВВХ.

Rusina N.V. (Russia)

Methods for performance analysis of passive optical network models

This thesis deals with introduction of WDM-TDMA PON segments with dynamic wavelengths allocation. The several mathematical functional models of the segments are constructed: optical network units confunction, traffic carrying from one and several optical network units, priority traffic carrying from one and several optical network units.

The explicit formulas for performance analysis of the models are obtained. Profitable and effective convolution algorithms like Busen algorithm for performance analysis of the models of optical network units confunction, of traffic carrying from one and several optical network units are constructed. The explicit formulas and convolution algorithm like Busen algorithm for performance analysis of $(1,k)$-requests marginal distribution for the model of priority traffic carrying from one optical network unit are constructed too.