На правах рукописи

Хасанов Илдус Шевкетович

Коллективная алгебраическая динамика тождественных частиц на единой мировой линии

Специальность 01.04.02 —
«Теоретическая физика»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2015

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Российский университет дружбы народов» (РУДН) на кафедре учебно-научного института гравитации и космологии

Научный руководитель:	кандидат физико-математических наук, доцент **Кассандров Владимир Всеволодович**
Официальные оппоненты:	**Буринский Александр Янович,** доктор физико-математических наук, Институт проблем безопасного развития атомной энергетики, старший научный сотрудник
	Круглый Алексей Львович, кандидат физико-математических наук, Институт системных исследований РАН, сотрудник
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Ульяновский государственный педагогический университет им. И. Н. Ульянова»

Защита состоится «___» _________ 2015 г. в _____ на заседании диссертационного совета Д 212.203.34 на базе Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Российский университет дружбы народов» по адресу: г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Российского университета дружбы народов (РУДН) по адресу: 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6.

Автореферат разослан «___» _________ 2015 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 212.203.34, к.ф.-м.н. Попова Вера Анатольевна

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Несмотря на все успехи современной теоретической физики, создание общей, основанной лишь на фундаментальных принципах теории движения и взаимодействия частиц остается неприступной задачей как на квантовом, так и на классическом уровне. Имеющиеся на данный момент попытки построения принципиально новых, или даже просто свободных от расходимостей теорий встречают неразрешимые трудности. В частности, квантовая теория поля, по мнению многих физиков (Дирака, Салама, т'Хофта и др.), может рассматриваться не более чем *приближение*, обусловленное непониманием подлинной природы механизма взаимодействия частиц. Поэтому всегда **актуальными** остаются попытки разработать принципиально новые подходы к проблеме физических взаимодействий, в том числе к задаче построения теории, не использующей методов перенормировок, или, более радикально, предлагающей альтернативу парадигме классической и квантовой теориям поля.

В попытке сформулировать такой подход, в настоящей работе мы исследуем внутренние свойства некоторых алгебраических структур (в первую очередь *систем полиномиальных уравнений*) и, на их основе, предлагаем чисто алгебраическое, не использующее дифференциальных уравнений описание коллективной динамики системы частиц. С физической точки зрения, развиваемый подход близок к концепции *единой Мировой линии* («одноэлектронной Вселенной»), предлагавшейся ранее Штюкельбергом, Уилером и Фейнманом, а также к *теории прямого межчастичного взаимодействия*.

Основной целью дисссертационной работы является построение *самосогласованной динамики тождественных частиц*, индуцированной только внутренними алгебраическими свойствами уравнения единой Мировой линии.

Научная новизна работы состоит прежде всего в том, что впервые предложена новая алгебраическая схема задания мировых линий и установлены фундаментальные связи формул Виета для корней полиномиальной системы уравнений с законами сохранения в индуцированной динамике системы частиц на единой Мировой линии. Все результаты, выносимые автором на защиту, являются вполне оригинальными и ранее не рассматривались.

Практическая и теоретическая значимость диссертационной работы определяется тем, что полученные в ней новые и подчас неожиданные связи между алгебраическими структурами и физическими законами (в том числе между формулами Виета для корней полиномиальных уравнений и законами сохранения) могут способствовать более глубокому пониманию механизма взаимодействия элементарных частиц и структуры динамики в системах многих частиц. Указанные связи имеют по существу универсальный, не зависящий от конкретного типа взаимодействия характер, и потому могут быть использованы для построения более простых и эффективных моделей описания коллективной динамики в плазме, молекулярных комплексах и в других системах большого числа частиц нескольких видов.

Достоверность представленных результатов гарантировалась использованием хорошо разработанного аппарата нелинейной алгебры и систем компьютерного счета, а обоснованность физической интерпретации обеспечивалась её сопоставлением с канонической структурой классической механики и релятивистской динамики частиц.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 8 научных работах [1–8], три (3) из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК или в зарубежных рецензируемых изданиях из списков Web of Science и Scopus [1–3], пять (5) — в материалах и тезисах докладов международных и всероссийских конференций [4–8].

Апробация работы. Основные результаты по теме диссертационной работы докладывались и обсуждались на международных конференциях и научных семинарах, в частности на:

- XLVII, IL и L Всероссийской научной конференции по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники в г. Москва в 2012, 2013 и 2014 г.;

- международной конференции по полиномиальной компьютерной алгебре в г. Санкт-Петербург в 2014 г.;

- 17-ом и 18-ом международном совещании по компьютерной алгебре в г. Дубна в 2014 и 2015 г.;

- международной конференции по гравитации, космологии и астрофизике (RUSGRAV-15) в г. Казани в 2014 г.;

- 4-ой международной конференции по теоретической физике «Теоретическая физика и её приложения» в г. Москва в 2015 г.;

- международной научной конференции «Физические интерпретации теории относительности» (PIRT-2015) в г. Москва в 2015 г.

Личный вклад автора состоял в развитии алгебраической реализации концепции единой Мировой линии. Он детально проанализировал, с использованием аналитических и численных вычислений, свойства динамики, индуцированной системами полиномиальных уравнений, а также представил наглядную визуализацию такой коллективной динамики и предложил физическую интерпретацию полученных результатов.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и трёх приложений. Полный объем диссертации составляет 132 страницы с 27 рисунками. Список литературы содержит 118 наименований.

Содержание работы

Во **введении** дан краткий обзор задач и проблем, связанных с рассматриваемой концепцией единой Мировой линии, сформулированы цели и задачи исследования, методы исследования, отмечена научная новизна исследования, обоснована актуальность, теоретическая и практическая значимость представляемой работы, перечислены конференции и семинары, на которых проводилась апробация и обсуждение представляемой работы, приведены основные результаты работы и основные положения, выносимые на защиту.

В **первой главе** представлен обзор основных подходов к проблеме описания *коллективной динамики* системы частиц, основанных на концепции единой мировой линии. Описана концепция «одноэлектронной Вселенной» Уилера—Фейнмана[1], послужившая одной из основных мотиваций данного исследования, и связанные с ней представления о «позитроне как движущемся вспять по времени электроне».

Близкие идеи высказывалась ранее в работах Э. Штюкельберга[2]. Он допустил существование мировых линий (запрещенных в канонической специальной теории относительности (СТО)) с участками, соответствующими движению частиц со сверхсветовыми скоростями. При этом (гипер-)плоскость равных значений времени-подобной координаты t пересекает мировую линию в (общем случае большом) конечном числе точек. Физически, эта конструкция формирует коллектив тождественных частиц, расположенных на единой Мировой линии. При монотонном возрастании координаты t какие-то две частицы могут возникнуть в некоторый момент $t = t_1$ (или исчезнуть в момент $t = t_3$) (см. рис. 1). Согласно Штюкельбергу, такие события могут служить моделью процессов рождения (уничтожения) пары «частица-античастица».

Данное исследование может рассматриваться как алгебраическая реализация идей Штюкельберга—Уилера—Фейнмана. Следует отметить, что простая и красивая иллюстрация возможных связей между механикой и алгеброй, исполь-

[1]Фейнман Р. Ф. Развитие пространственно-временной трактовки квантовой электродинамики (Нобелевские лекции по физике 1965 г.) // УФН. — 1967. — Т. 91, No 1. — С. 29—48.

[2]Stueckelberg E. C. G. Remarque á propos de la crèation de paires de particules en théorie de relativitè// Helv. Phys. Acta. — 1941. — Vol. 14. — Pp. 588–594.

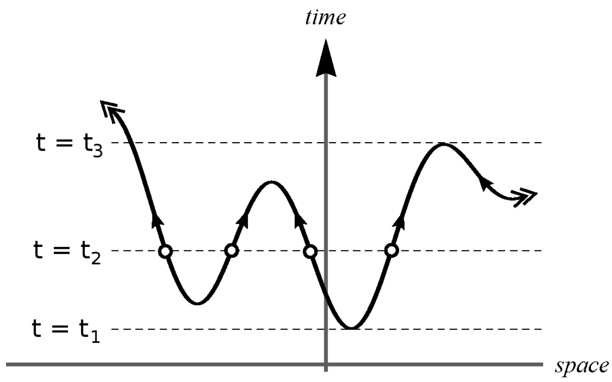

Рис. 1: Единая Мировая линия, множество точечных «частиц» (при $t = t_2$) и события рождения (при $t = t_1$) и аннигиляции (при $t = t_3$) пары «частиц»

зующая исключительные свойства комплексных чисел, предложена еще в 1836 г. К. Ф. Гауссом. Более реалистичной реализацией концепции многих частиц на единой Мировой линии стало естественное возникновение такой системы в контексте т.н. *алгебродинамики*[3], реализованной на основе комплексного расширения алгебры кватернионов — алгебре *бикватернионов* $\mathbb{B}$. В этой теории роль первичных физических полей выполняют т.н. «$\mathbb{B}$-дифференцируемые функции», являющиеся некоммутативным аналогом аналитических функций комплексного переменного, а их *особенности* рассматриваются в качестве частицеподобных структур. В ситуации *общего вида* особенности представляют собой 2-мерные поверхности (“worldsheet”) в $\mathbb{M}$, определяющие совокупность движущихся во времени одномерных кривых – *струн*. При этом важно, что эти поверхности задаются *неявным образом*, а именно, индуцированной первичными уравнениями $\mathbb{B}$-дифференцируемости (и связанными с ними твисторными структурами) алгебраической системой уравнений для точек $\mathbb{M}$.

Математическое исследование индуцированной такой системой уравнений *самосогласованной струнной динамики* представляет собой весьма непростую задачу. Однако для некоторых частных случаев вместо системы струн получаем систему движущихся во времени точечных образований, т.е. ни что иное, как систему тождественных частиц, локализованных на единой, *неявно заданной* Мировой линии. Именно такая ситуация и изучается в диссертации.

Другой способ «размножения» частиц на единой Мировой линии связан с рассмотрением светоподобных сигналов от ее точек, одновременно достигающих точки наблюдения и определяющих тем самым количество детектируемых «копий-частиц», локализованных на ней. Это количество равно числу корней фундаментального в СТО *уравнения запаздывания*.

[3] Kassandrov V. V. Algebrodynamics over complex space and phase extension of the Minkowski geometry. // Phys. Atom. Nuclei. — 2009. — Vol. 72. — Pp. 813–827

Известно, что для обычной, чисто *брадионной* (т.е. не содержащей сверхсветовых участков) мировой линии уравнение запаздывания всегда имеет лишь один физический корень (плюс одно «нефизическое» опережающее решение). Однако для *тахионной* мировой линии[4], как и при рассмотрении комплексного расширения пространства-времени[5], в ситуации общего вида, имеется целый набор решений уравнения запаздывания, определяющий множество тождественных частиц на единственной Мировой линии. Этот «эффект размножения» используется при релятивистском обобщении алгбраической динамики в четвертой главе диссертации.

Во **второй главе** излагаются главные идеи и методы, позволяющие чисто алгебраически, без привлечения лагранжевых структур или дифференциальных уравнений движения, описать динамику коллектива точечных частиц на единой Мировой линии. Основой этого описания служит метод *неявного задания* мировой линии с помощью системы алгебраических, а конкретно, *полиномиальных* уравнений, включающих также (монотонно возрастающий) параметр времени t:

$$F_a(x_1,...,x_D,t) = 0, \quad a = 1..D, \tag{1}$$

где $D = 2, 3$ — размерность пространства. Во второй главе мы ограничиваемся случаем плоского движения ($D = 2$), а для зависимости от временнóй переменной, напротив, допускаем произвольный аналитический вид.

Ограничение функций F_a полиномами связано с тем, что при этом можно гарантированно получить *полный и конечный* набор решений. Более того, эти решения — корни системы полиномиальных уравнений, связаны алгебраическими соотношениями, явно определяющими корреляции между их положениями и движениями, – *формулами Виета*. Эти формулы играют основопологающую роль в дальнейшем исследовании.

Далее во второй главе рассмотрены общие свойства плоской *полиномиальной динамики*. 2-мерная траектория частиц, уравнение которой следует непосредственно из (1), в общем случае состоит из нескольких (как правило, несвязных) «ветвей», на каждой из которых в некоторый момент времени может находиться ноль, одна, две или несколько частиц (т.н. R-частицы).

При возрастании t, в определенные дискретные моменты $t = t_0$ некоторые два вещественных корня (1) сливаются в один *кратный*, после чего превращаются в пару *комплексно-сопряженных* корней. Соответственно, координаты отвечающей им пары R-частиц становятся равными, так что частицы «сливают-

[4]Болотовский Б.М., Быков В.П. Излучение при сверхсветовом движении зарядов // УФН. — 1990. — Т.160. — С. 141-161

[5]Burinskii A.Ya. The Kerr geometry, complex world lines and hyperbolic strings // Phys. Lett. A. — Vol. 185. — Pp. 441-445

ся» (сталкиваются) при $t = t_0$ в некоторой точке. Вместо них возникает пара частиц *другого* типа (т.н. С-частиц), локализованных в *комплексном расширении* вещественного пространства. Именно такое «событие» может служить моделью для процесса *аннигиляции*. И обратно, в некоторый другой момент времени два *возникающих* вещественных корня могут моделировать процесс *рождения пары* R-частиц.

Условие для *событий*, отвечающих моментам аннигиляции/рождения пары частиц, может быть легко получено как условие *кратности* корней системы (1) и имеет форму

$$\det \| \frac{\partial F_A}{\partial x_B} \| = 0, \quad A,B,... = 1,2. \tag{2}$$

Отметим, что частицеподобные образования (С-частицы), отвечающие комплексно-сопряженным корням (1) следует рассматривать равноправно с вещественными (R-) корнями-частицами. Действительно, их характеристики входят, как мы увидим, в *законы сохранения* для рассматриваемой системы. А поскольку каждая пара таких частиц отвечает корням с одинаковой вещественной частью, она может рассматриваться в качестве единственной составной («композитной») частицы, локализованной в $\mathbb{R}^2$ в соответствии с равной вещественной частью, однако *расположенной вне основной траектории*. Таким образом, система полиномиальных уравнений общего вида (1) индуцирует коллективную коррелированную динамику двух типов (R- и С-) частицеподобных образований, включающую их взаимопревращения.

При этом, как правило, возникающая при аннигиляции двух R-частиц составная С-частица *перемещается между двумя несвязными ветвями вещественной траектории и, достигая второй ветви, дает там начало паре R-частиц (рождение пары)* (см. рис. 2). Важно, что в отличие от конструкции Штюкельберга, в данной схеме в процессах аннигиляции «материя не исчезает», а переходит в другую форму. Более того, как мы увидим ниже, во всех таких процессах имеет место строгое выполнение полной системы законов сохранения.

Далее во второй главе изложены основные методы решения систем полиномиальных уравнений. А именно, для системы полиномиальных уравнений (1) *общего вида*

$$\begin{cases} F_1(x,y,t) = [a_{n,0}(t)x^n + a_{n-1,1}(t)x^{n-1}y + ... + a_{0,n}(t)y^n] + ... + a_{0,0}(t) = 0, \\ F_2(x,y,t) = [b_{m,0}(t)x^m + b_{m-1,1}(t)x^{m-1}y + ... + b_{0,m}(t)y^m] + ... + b_{0,0}(t) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

основным методом решения является ее сведение к одномерному уравнению путем исключения второй переменной. Эта задача составляет основу т.н. *теории*

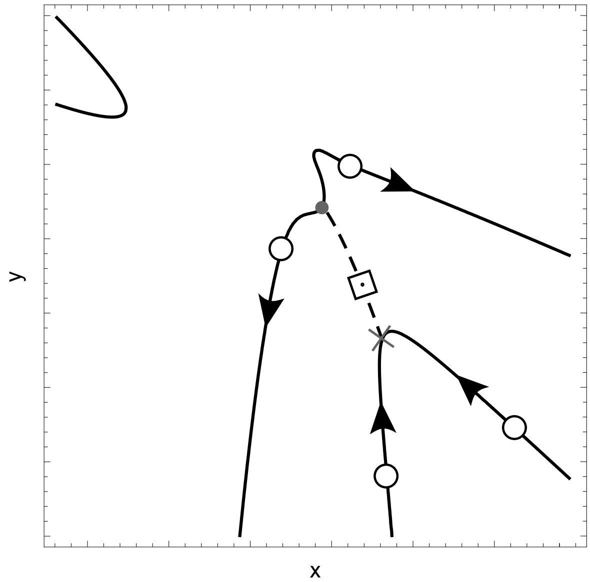

Рис. 2: Три ветви траектории R-частиц и типичная последовательность событий (аннигиляция (обозначена крестом) — распространение С-частицы (пунктирная линия) — рождение пары (жирная точка))

исключения [6]. Наиболее часто используемый способ исключения известен как *метод результантов*. А именно, пусть при некотором значении параметра t пара $\{x_0,y_0\}$ является решением системы (3); тогда при фиксированном $y = y_0$ оба уравнения (3), рассматриваемые по отношению к одной неизвестной x, должны иметь *общий корень* $x = x_0$. Необходимое и достаточное условие для существования общего корня двух полиномов хорошо известно и выглядит следующим образом:

$$R_x(y) = g_N(t)y^N + g_{N-1}(t)y^{N-1} + ... + g_0(t) = 0, \tag{4}$$

где $Res[F_1(x),F_2(x),x] \equiv R_x(y)$ – т.н. *результант* двух полиномов F_1,F_2 по x, вычисленный в данном случае при фиксированном значении y.

Таким образом, любая система двух полиномиальных уравнений типа (3) может быть сведена к паре дуальных уравнений для т.н. *элиминантов* – полиномов, каждый по одной переменной (x или y, соответственно), с коэффициентами, зависящими от t. При условии, что все старшие коэффициенты системы $a_{n,0}$, $a_{0,n}$, $b_{m,0}$, $b_{0,m}$ *ненулевые*, старшие коэффициенты в элиминантах также не обращаются в нуль, так что оба элиминанта имеют порядок $N = nm$, определяя (при соотвествующем сопоставлении их корней) все N решений исходной системы (т.н. «теорема Безу»). Рассмотрением именно такого *невырожденного* класса систем полиномиальных уравнений (когда число ее решений максимально и равно $N = nm$) мы и ограничиваемся в диссертации.

[6] Калинина Е. А., Утешев А. Ю. Теория исключения. — СПб.: СПбГУ. — 2002. — 72 с.

Мы видим, что известные в случае одного полиномиального уравнения *формулы Виета*, определяющие связи между его корнями, естественно возникают также и в двумерном случае. При этом первая и самая простая (линейная по корням) формула Виета выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} NX(t) := x_1(t) + x_2(t) + ... + x_N(t) = -f_{N-1}(t)/f_N(t), \\ NY(t) := y_1(t) + y_2(t) + ... + y_N(t) = -g_{N-1}(t)/g_N(t), \end{cases} \tag{5}$$

где $\{f_k, g_k\}$ – соответствующие коэффициенты в элиминантах.

Очевидно, что величины $\{X(t),Y(t)\}$ можно рассматривать как координаты *центра масс* замкнутой системы N тождественных (и поэтому равных по массе, $m_1 = m_2 = ... = m_N$) точечных частиц с координатами, представленными корнями $\{x_k(t),y_k(t)\}, k = 1,2,\ldots N$ системы (3) и изменяющимися во времени t.

Правая часть (5) (зависящая, вообще говоря, сложным образом от t) показывает, что центр масс *замкнутой* «механической» системы R-C-частиц в общем случае движется неравномерно и непрямолинейно. Мы, однако, можем трактовать это явное несоответствие с механикой Ньютона, как проявление *неинерциальной природы* изначально фиксированной самой структурой генерирующих полиномов *системы отсчета* (СО). В таком случае, следует выполнить *преобразование координат*, отвечающее переходу к другой СО, моделирующей *инерциальную*. Оказывается, что это всегда возможно и сводится к преобразованию вида

$$x = \tilde{x} - (N-1)f_{N-1}(t)/f_N(t), \quad y = \tilde{y} - (N-1)g_{N-1}(t)/g_N(t), \tag{6}$$

«зануляющему» члены $N-1$ степени в элиминантах и, соответственно, в правой части соотношений (5). Преобразованная СО, таким образом, является именно *системой центра масс*. *Преобразованием Галилея* можно затем перейти и к любой другой инерциальной СО, в которой координаты центра масс линейно зависят от времени.

Далее, дифференцируя по t (преобразованную) систему уравнений (5) получим закон сохранения проекций P_x,P_y полного импульса для замкнутой системы N тождественных «взаимодействующих» частиц:

$$\begin{cases} P_x := \dot{x}_1(t) + \dot{x}_2(t) + ... + \dot{x}_N(t) = 0, \\ P_y := \dot{y}_1(t) + \dot{y}_2(t) + ... + \dot{y}_N(t) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Повторяя процедуру дифференцирования, получим из (7) универсальную связь между мгновенными ускорениями частиц системы:

$$\ddot{x}_1(t) + \ddot{x}_2(t) + ... + \ddot{x}_N(t) = 0, \quad \ddot{y}_1(t) + \ddot{y}_2(t) + ... + \ddot{y}_N(t) = 0, \tag{8}$$

которая, при отождествлении мгновенного ускорения с полной *силой*, действующей на частицу со стороны остальных (с учетом их равных единичных масс $m_1 = \cdots = m_N = 1$) приводит к *ослабленной версии третьего закона Ньютона*: в замкнутой системе сумма всех результирующих сил, действующих на все частицы системы, тождественно равна нулю.

Вышеизложенные общие свойства полиномиальной динамики подробно изучаются и иллюстрируются графически на примере системы 9 частиц двух типов (R- и C-), определяемой двумя полиномиальными уравнениями 3-ей степени, с достаточно простой зависимостью от времени. В частности, рассмотрен переход в систему их центра масс и их множественные взаимопревращения.

В завершении главы проводится сравнительный анализ общих свойств развиваемой полиномиальной динамики с канонической механикой Ньютона, в том числе структура дифференциальных соотношений, являющихся следствием алгебраической системы уравнений (1).

Третья глава посвящена общему анализу связей формул Виета и набора соответствующих им законов сохранения в системе R-C частиц, локализованных на произвольной неявно заданной мировой линии. При этом, в отличие от второй главы, рассматривается случай полиномиальной зависимости коэффициентов от временно́го параметра. Оказывается, что при этом, помимо закона сохранения импульса, как правило выполняются и остальные вращательно-инвариантные законы сохранения.

А именно, рассматривается система двух полиномиальных уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} F_1(x,y,t) = \sum_{k=0}^{k=n} \sum_{i,\ j,\ s}^{i+j+s=k} A_{ijs} x^i y^j t^s = 0, \\ F_2(x,y,t) = \sum_{k=0}^{k=m} \sum_{i,\ j,\ s}^{i+j+s=k} B_{ijs} x^i y^j t^s = 0, \end{cases} \tag{9}$$

где A_{ijs} и B_{ijs} – вещественные коэффициенты. При этом (принимаемое в дальнейшем) условие *невырожденности* системы сводится к требованию, чтобы старшие коэффициенты при пространственных переменных A_{n00}, A_{0n0}, B_{m00} и B_{0m0} были отличны от нуля.

В этом случае результирующие уравнения для элиминантов будут иметь следующий общий вид

$$\begin{cases} R_y(x,t) = \sum_{k=0}^{k=nm=N} \sum_{i,\ j}^{i+j=k} P_{ij} x^i t^j = 0, \\ R_x(y,t) = \sum_{k=0}^{k=nm=N} \sum_{i,\ j}^{i+j=k} Q_{ij} y^i t^j = 0, \end{cases} \tag{10}$$

где коэффициенты P_{ij},Q_{ij} являются функциями исходных коэффициентов в системе (9), причем вследствие невырожденности последней старшие коэффициенты всегда отличны от нуля.

Тогда с учетом известных «тождеств Ньютона» справедливы следующие *модифицированные формулы Виета* для сумм степеней корней, устанавливающие новую форму динамических связей в системе частиц, генерируемой уравнениями (9):

$$\begin{cases} \sum x_k &= A_1(t), \;\; \sum y_k &= B_1(t), \\ \sum x_k^2 &= A_2(t), \;\; \sum y_k^2 &= B_2(t), \\ \ldots\ldots \\ \sum x_k^N &= A_N(t), \;\; \sum y_k^N &= B_N(t), \end{cases} \tag{11}$$

где $A_k(t)$, $B_k(t)$ – некоторые *полиномы по t степени не выше k*, конкретный вид которых следует из тождеств Ньютона. После k-го дифференцирования соответствующего соотношения из (11) в правой части имеем константу. Таким образом, всегда *существует целый набор независимых от времени связей (корреляций) между положениями, скоростями, ускорениями различных частиц-корней и их производными по времени высших порядков*.

Нетрудно теперь показать, что линейные и квадратичные по корням соотношения (11) приводят к вращательно- (в рассматриваемом случае к $SO(2)$-) инвариантным законам сохранения. А именно, линейные соотношения ведут, как и ранее в главе 1, к закону сохранения полного импульса. Что касается квадратичных по корням формул Виета из (11), то после образования $SO(2)$-инвариантной их комбинации и двойного дифференцирования по t они обеспечивают выполнение «усиленной» *теоремы вириала*, известной из классической механики и выступающей здесь в роли аналога *закона сохранения энергии*:

$$\sum v_k(t)^2 + \sum \vec{r}_k(t)\vec{a}_k(t) = const. \tag{12}$$

Продемонстрировано также выполнение закона сохранения *полного момента импульса* в произвольной системе R-C частиц, определяемой системой уравнений (1). Очевидно, что в рассматриваемом случае движения на плоскости вектор полного момента импульса системы частиц $\vec{M} = \sum \vec{M}_k = \sum \vec{r}_k \times \vec{v}_k$ имеет лишь одну (z-) компоненту. Заметим теперь, что дифференцируя по t уравнения для элиминантов $R_y(x,t)$ и $R_x(y,t)$, можно *рационально* выразить мгновенные скорости v_x,v_y через координаты x, y и t. Составляя теперь вспомогательную функцию вида

$$H(M,x,y,t) := M - (xv_y - yv_x), \tag{13}$$

приводя её к общему знаменателю и приравнивая числитель к нулю, приходим уже к *полиномиальному* уравнению $\tilde{H}(M,x,y,t) = 0$, которое вместе с исходными уравнениями (9) составляет полную систему трех полиномиальных уравнений для определения значений момента импульса и их временнóй зависимости для каждой из частиц-корней.

Прибегая последовательно к методу результантов для исключения теперь уже двух неизвестных x и y, приходим к полиномиальному по M уравнению вида $F(M,t) = 0$ степени N, неявно определяющей зависимость $M_k(t)$. Используя снова линейную по корням M_k формулу Виета, находим (через старшие коэффициенты) точные (рациональные) выражения для полного момента импульса M.

Такая процедура была реализована, с помощью системы компьютерной алгебры «Mathematica 9», на большом количестве модельных примеров с различными, в том числе большими, значениями степеней n и m генерирующих полиномов (1). Во всех случаях полный момент M оказывается независимым от времени (рациональным) числом. Для некоторых значений n,m были даже подобраны «феноменологические» формулы, связывающие значения M с коэффициентами генерирующих полиномов (1). Это позволяет, несмотря на отсутствие общего доказательства [7], с большой долей уверенности утверждать, что закон сохранения полного момента импульса, как и другие $SO(2)$-инвариантные законы сохранения, выполняется для любой (невырожденной) системы полиномиальных уравнений (1).

В завершение, в третьей главе рассмотрено 3D-обобщение описанной выше конструкции, в том числе на примере системы из 12 (R-C) частиц, определяемой системой трех полиномиальных уравнений степеней 2, 2, 3, соответственно. При этом установлено, что все основные законы сохранения по-прежнему остаются справедливыми.

В **четвертой главе** предложено релятивистское обобщение конструкции, описанной во второй и третьей главах. При этом единая Мировая линия для простоты задается привычным *параметрическим* образом (с полиномами в роли параметризующих функций) и, вообще говоря, описывает кинематику одной *единственной* частицы. В дополнение, однако, рассматривается процесс ее «детектирования» наблюдателем посредством его локального светового конуса, т.е. с помощью светоподобных сигналов от точек на мировой линии. В таком случае, как отмечалось выше, будет наблюдаться множество копий-частиц (R-C видов) на мировой линии, отвечающих вещественным или комплексно-сопряженным корням *уравнения светового конуса* наблюдателя («уравнения запаздывания»).

[7]Трудность доказательства связана с отсутствием в математической литературе обобщения «одномерных» формул Виета на решения системы двух (и более) полиномиальных уравнений

Для «полиномиальной» мировой линии $X_\mu(\tau)$ общего вида

$$\begin{cases} X_0 \equiv S(\tau) = a_s\tau^p + b_s\tau^{p-1} + \cdots + e_s, \\ X_1 \equiv X(\tau) = a_x\tau^n + b_x\tau^{n-1} + \cdots + e_x, \\ X_2 \equiv Y(\tau) = a_y\tau^n + b_y\tau^{n-1} + \cdots + e_y, \\ X_3 \equiv Z(\tau) = a_z\tau^n + b_z\tau^{n-1} + \cdots + e_z, \end{cases} \tag{14}$$

где $p \geq 1$, $n \geq 1$ – степени полиномов, параметризующих временну́ю и пространственные координаты соответственно, и наблюдателя, покоящегося в начале координат, уравнение светового конуса (УСК) имеет вид

$$F := (T - S(\tau))^2 - X(\tau)^2 - Y(\tau)^2 - Z(\tau)^2 = 0, \tag{15}$$

где T – собственное время наблюдателя. При преобразованиях Лоренца к СО произвольного *инерциального* наблюдателя параметры τ и T инвариантны, а координаты мировой линии и наблюдателя преобразуются каноническим образом. Тогда, если в качестве физических характеристик рассматривать лишь $SO(3{,}1)$-ковариантные величины (предполагающиеся функциями собственного времени наблюдателя T), то вся конструкция автоматически оказывается *лоренц-инвариантной*.

С использованием описанного ранее метода результантов, процедуры элиминации параметра τ и формул Виета показано, что для *инерциального* наблюдателя (и только для него) *индуцированная динамика возникающей системы R-C частиц подчиняется полной системе лоренц-инвариантных законов сохранения*.

В дальнейшем следует различать два класса полиномиальных мировых линий: *асимптотически* пространственно-подобных (АПП), при $n > p$, и времени-подобных (АВП), с $n < p$, в соответствии с поведением R-частиц при больших T (см. ниже). Для первого класса (АПП) возможна простейшая «естественная» параметризация $S(\tau) = \tau$, а УСК (15) имеет $2n$ корней, определяющих положение нескольких R-частиц на мировой линии и C-частиц, локализованных, вообще говоря, вне ее.

Из структуры соответствующих результантов и линейных по корням формул Виета следует, что для рассматриваемого АПП-случая все компоненты *4-вектора полной энергии-импульса* P_μ равны нулю,

$$P_\mu := \sum (\dot{X}_\mu)_i \equiv \sum (X'_\mu)_i \dot{\tau}_i = 0, \quad \mu = 0{,}1{,}2{,}3, \tag{16}$$

где точка и штрих $'$ обозначают производные по T и τ соответственно.

С другой стороны, показано, что величина инварианта W, отвечающего квадратичным по корням формуле Виета (и являющегося аналогом «нерелятивистской» энергии), не просто отлична от нуля и сохраняется, но *может принимать лишь целочисленные значения*:

$$\begin{array}{l} W_0 := \sum(\dot{X}_0)_i(\dot{X}_0)_i + \sum(\ddot{X}_0)_i(X_0)_i = 0, \\ W_a := \sum(\dot{X}_a)_i(\dot{X}_a)_i + \sum(\ddot{X}_a)_i(X_a)_i = constant, \quad a = 1{,}2{,}3, \\ W := W_0 - W_1 - W_2 - W_3 = \sum(\dot{X}_\mu)_i(\dot{X}^\mu)_i + \sum(\ddot{X}_\mu)_i(X^\mu)_i = inv = -2n, \end{array} \quad (17)$$

т.е. равна по модулю полному числу R-C частиц $2n$. Строго получена также явная формула для значений вектора полного момента импульса $\vec{L}$ через соответствующие старшие коэффициенты генерирующих полиномов (14):

$$\vec{L} = 2\frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}|^2} = const. \quad (18)$$

Тем не менее, поскольку 4-вектор энергии-импульса (16) в рассматриваемом случае АПП мировой линии равен нулю, физическая интерпретация ансамбля R-C частиц затруднена. Во многих отношениях более реалистичным оказывается случай АВП мировых линий, для которых степени параметризующих полиномов (14) связаны противоположным неравенством $p > n$.

В этом случае оба $SO(3{,}1)$-инварианта M^2 и M, отвечающие как линейным, так и квадратичным формулам Виета, оказываются сохраняющимися, целочисленными и, более того, равными между собой. А именно, в системе покоя наблюдателя (центра масс) имеют место следующие универсальные и лоренц-инвариантные законы сохранения:

$$\begin{array}{l} E := P_0 = const = 2p, \quad P_a = 0, \\ W_0 = E = 2p, \quad W_a = 0, \end{array} \quad (19)$$

так что для инвариантов имеем

$$M^2 := P_\mu P^\mu = E^2 - \vec{P}^2 = (2p)^2, \quad W = 2p \equiv M, \quad (20)$$

и оба они определяют по существу одну и ту же сохраняющуюся положительную величину – полную *массу покоя* (энергию покоя) M системы R-C частиц.

Наконец, многочисленные компьютерные эксперименты приводят к заключению, что все шесть компонент антисимметричного тензора полного момента импульса

$$L_{[\mu\nu]} = \sum(X_{[\mu})_i(\dot{X}_{\nu]})_i \quad (21)$$

также сохраняются для случая произвольной АВП мировой линии (хотя ни общего доказательства этого утверждения, ни явных формул, аналогичных (18), в этом случае получить не удается).

Далее изучалось поведение системы R-C частиц на АВП мировой линии при больших T. На соответствующих временны́х интервалах в (15) доминируют члены старших степеней по τ, так что оно м.б. приближено как

$$\begin{array}{l} (T - S(\tau))^2 \simeq 0, \quad T_1 < T < T_0, \\ (T - a_s \tau^p)^2 \simeq 0, \quad T >> T_0, \end{array} \tag{22}$$

с некоторыми критическими значениями T_1 и $T_0 >> T_1$. Асимптотическая структура УСК (22) приводит, в частности, к следующим выводам.

1. При $T > T_1$ имеет место процесс образования R-C пар, определяемый структурой полного квадрата в левой части уравнений (22). Расстояния между частицами в паре монотонно уменьшаются.

2. При $T > T_0$ начинается процесс взаимного «разбегания» R-C пар частиц с *замедлением*. Для кратных p и n имеет место эффект формирования многочастичных групп – *кластеров*. Этот эффект объясняется множественным вырождением корней (22).

3. На поздних этапах эволюции скорости всех частиц малы и не могут превышать скорость света. Все «события» рождения/аннигиляции пар заканчиваются, и число как R-, так и C-частиц в дальнейшем уже не меняется.

Первые два этапа эволюции системы R-C частиц, для случая кратных $p = 24, n = 20$, изображены на рис. 3, 4.

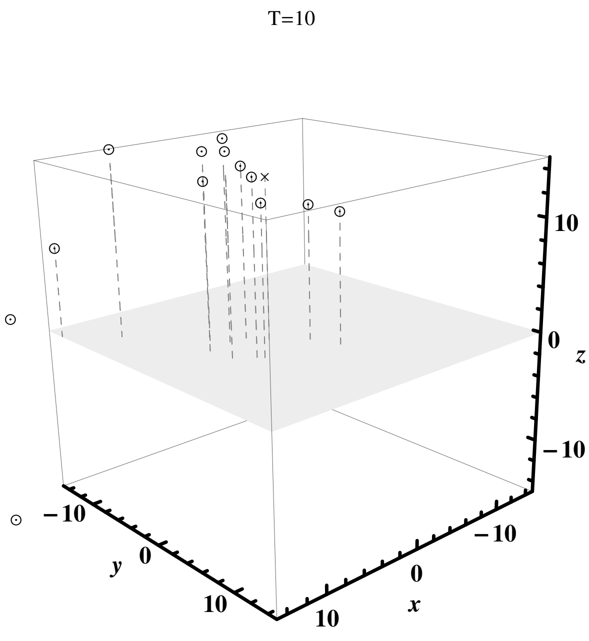

Рис. 3: Первый этап эволюции , $T < T_1$: пары ещё не сформированы

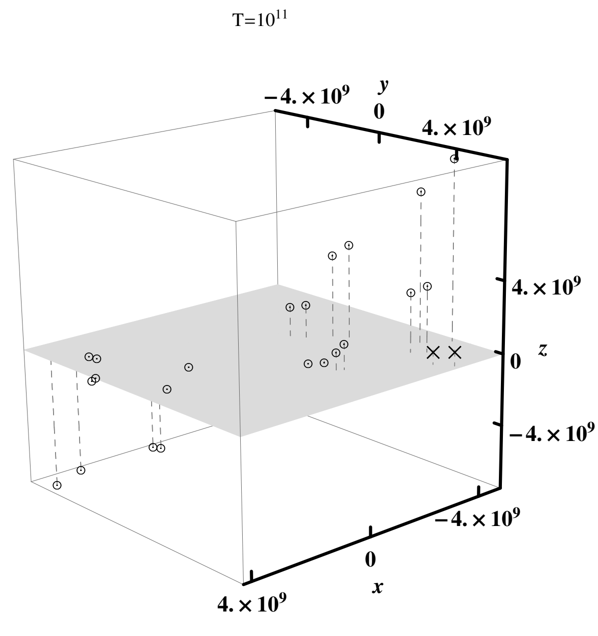

Рис. 4: Второй этап эволюции, $T_0 > T > T_1$: пары хорошо различимы и начинают собираться в кластеры

В заключительной части главы 4 обсуждается роль релятивистских полей (в первую очередь электромагнитного), генерируемых точечными R-C источниками и вполне определяемыми самим уравнением мировой линии и связанной с последней *твисторной структурой*. Отмечено, в частности, что в момент слияния пары корней-частиц структура полей образует сингулярную изотропную прямую – *каустику*, которая соединяет точки слияния и наблюдения и может, в некотором смысле, рассматриваться как модель светового сигнала – кванта. С другой стороны, энергия и импульс самих полей явно не присутствуют в структуре законов сохранения. Обсуждаются общие свойства и различия между представленной в диссертации коллективной лоренц-инвариантной динамикой и канонической релятивистской механикой на основе СТО.

В **заключении** подведены итоги, представлены основные результаты, полученные в диссертации и перспективы дальнейших исследований. В **приложениях A, B, C** подробно рассмотрен пример коллективной полиномиальной динамики на неявно заданной мировой линии (A), приведены основные сведения о формулах Виета и тождествах Ньютона (B), а также проведен анализ структуры характеризующих результанты *матриц Сильвестра* и, на его основе, доказаны (C) формулы для полной энергии и углового момента, используемые в главе 4.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Предложен неявный способ задания мировой линии системой алгебраических (полиномиальных) уравнений с действительными коэффициентами, зависящими от времени. Показано, что на такой единой Мировой линии возникает система двух типов (R- и C-) тождественных точечных частиц, отвечающих вещественным и комплексно-сопряженным корням исходной системы, с нетривиальной коллективной динамикой и взаимными превращениями, моделирующими процессы рождения или аннигиляции пар.

2. Показано, что для любой неявно заданной «полиномиальной» Мировой линии индуцированная алгебраическая динамика системы R-C частиц подчиняется, при соответствующем выборе системы отсчета, закону сохранения полного импульса и воспроизводит общую структуру ньютоновской механики.

3. Для случая полиномиальной зависимости коэффициентов исходной алгебраической системы от времени установлено, что в индуцируемой ей динамике системы R-C частиц всегда выполняются законы сохранения полного импульса, момента импульса и аналога полной механической энергии. Выявлена универсальная связь этих законов сохранения с *формулами Виета*

для системы корней генерирующей системы алгебраических уравнений, а с физической точки зрения – с *теоремой вириала* в классической механике.

4. Рассмотрена лоренц-инвариантная динамическая модель, индуцированная параметрически заданной «полиномиальной» Мировой линией, дополненной структурой «уравнения запаздывания» (уравнения светового конуса) инерциального наблюдателя. Показано, что для любой такой Мировой линии выполняются все канонические $SO(3,1)$-инвариантные законы сохранения для ансамбля R-C частиц. Эти законы возникают как прямое следствие формул Виета для корней уравнения светового конуса наблюдателя, отвечающих совокупности точек-частиц на рассматриваемой Мировой линии (или на ее комплексном расширении, при рассмотрении комплексно-сопряженных решений уравнения светового конуса).

5. Для вышепредставленной лоренц-инвариантной модели найдены *явные формулы* для значений полного момента импульса и (аналога) полной «энергии покоя» системы R-C частиц. При этом значения последней оказываются с необходимостью *целочисленными*, равными по модулю удвоенной старшей степени параметризующих полиномов.

6. В той же модели, обнаружено нетривиальное универсальное поведение R-C частиц при больших значениях собственного времени наблюдателя T. А именно, показано, что в некотором интервале значений T происходит *процесс образования пар* частиц обоих видов. При этом отдельные пары удаляются друг от друга, причем процесс разбегания идет с постепенно уменьшающимися скоростями («с замедлением»). Более того, в случае взаимно кратных степеней параметризующих Мировую линию полиномов, имеет место *процесс формирования кластеров*, т.е. групп частиц, содержащих большое число C- и некоторое количество R-частиц. Математически, все эти процессы связаны с нетривиальной «динамической» структурой уравнения светового конуса, а физически – качественно напоминают процессы упругого/неупругого рассеяния.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Kassandrov V. V., Khasanov I. Sh.* Algebraic roots of Newtonian mechanics: correlated dynamics of particles on a unique worldline // *J. Phys. A: Math. Theor.* — 2013. — Vol. 46. — Pp. 175–206.

2. *Кассандров В. В., Хасанов И. Ш., Маркова Н. В.* Algebraic dynamics on a single worldline: Vieta formulas and conservation laws // *Вестник РУДН: Мат. Инф. Физ.* — 2014. — Т. 2. — С. 169–180.

3. *Kassandrov V. V., Khasanov I. Sh., V. Markova N.* Collective Lorentz invariant dynamics on a single “polynomial” worldline // *J. Phys. A: Math. Theor.* — 2015. — Vol. 48.

4. *Kassandrov V. V., Khasanov I. Sh.* Modelling of “polynomial” dynamics of an ensemble of identical particles on a unique worldline // International Conference Polynomial Computer Algebra. — 2014. — Апрель. — С. 32–36.

5. *Kassandrov V. V., Khasanov I. Sh.* Twistor algebraic dynamics on a unique worldline // Мат-лы XV-й Росс. Гравитац. конфер. — 2014. — Июль. — С. 47–48.

6. *Kassandrov V. V., Khasanov I. Sh.* Self-consistent kinematics of identical particles on a unique worldline // Мат-лы XLVII Всеросс. научной конфер. по проблемам физики частиц, физики плазмы, конденсированных сред и оптоэлектроники. — 2012. — Май. — С. 120–124.

7. *Хасанов И.Ш.* Формулы Виета и алгебраическая динамика // Мат-лы IL Всеросс. научной конфер. по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и конденсированных сред и оптоэлектроники. — 2013. — Май. — С. 94–98.

8. *Кассандров В. В., Хасанов И. Ш.* Алгебраические основания механики Ньютона: законы сохранения, индуцированные полиномиальными связями // Мат-лы L Всеросс. научной конфер. по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и конденсированных сред и оптоэлектроники. — 2014. — Май. — С. 37–40.

Аннотация

Хасанов Илдус Шевкетович

Коллективная алгебраическая динамика тождественных частиц на единой мировой линии

Представлена алгебраическая реализация концепции «одноэлектронной Вселенной» Уилера–Фейнмана. «Размножение» точечных частиц-копий на единственной мировой линии достигается ее заданием неявным способом с помощью системы алгебраических уравнений. В случае «полиномиальной» мировой линии, индуцированная коллективная динамика двух типов частиц (R- и C-), отвечающих вещественным и комплексно-сопряженным корням генерирующей системы, всегда оказывается консервативной. При этом выполнение основных законов сохранения (полного импульса, момента импульса и аналога полной энергии) прямо следует из формул Виета для системы R-C корней.

Также для динамики, индуцированной решениями уравнения светового конуса инерциального наблюдателя, в случае произвольной «полиномиальной» мировой линии получена полная система лоренц-инвариантных законов сохранения. При больших значениях собственного времени наблюдателя имеют место эффекты «разбегания» R-C частиц, их объединения в пары и формирования многочастичных кластеров.

Annotation

Khasanov Ildus Shevketovich

Collective algebraic dynamics of identical particles on a single worldline

The algebraic realization of the Wheeler–Feynman concept of “one-electron Universe” was presented. Duplication of point particles-copies on the single worldline achieved by its implicit definition by the system of algebraic equations. In the case of “polynomial” worldline, induced collective dynamics of the two types of particles (R- and C-), corresponding to the real and complex-conjugate roots of the generating system, is always conservative. The satisfaction of basic conservation laws (the total momentum, angular momentum and analog of total energy) directly follows from Vieta formulas for R-C roots system. Also, for the dynamics induced by the solutions of the light cone of inertial observer, in the case of an arbitrary “polynomial” worldline the complete system of Lorentz-invariant conservation laws was derived. For large values of observer’s time the effects of “recession” of R-C particles, their gathering in pairs and formation of clusters take place.