РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

На правах рукописи
УДК 517.95

Савин Антон Юрьевич

ТЕОРИЯ ИНДЕКСА НЕЛОКАЛЬНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

Диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Москва - 2012

Работа выполнена на кафедре высшей математики Российского университета дружбы народов.

Научный консультант:	доктор физико-математических наук, профессор Б.Ю. Стернин.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор А.Б. Антоневич, Белорусский государственный университет
	доктор физико-математических наук, доцент Ю.А. Кордюков, Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН
	доктор физико-математических наук, доцент В.М. Мануйлов, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Ведущая организация:	Воронежский государственный университет

Защита диссертации состоится 24 апреля 2012 г. в 15 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.203.27 в Российском университете дружбы народов по адресу: 117419, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, ауд. 495а.

С диссертацией можно ознакомиться в Учебно-научном информационном библиотечном центре (Научной библиотеке Российского университета дружбы народов) по адресу: 117198, г. Москва, ул. Миклухо–Маклая, д. 6.

Автореферат разослан 16 марта 2012 г.
Автореферат диссертации размещен на сайте РУДН: www.rad.pfu.edu.ru

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук, доцент Росс Л.Е. Россовский

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Диссертация посвящена построению теории индекса для нелокальных эллиптических задач на гладких многообразиях. Напомним, что построение теории индекса включает в себя следующие основные шаги:

1) (теорема фредгольмовости) даются условия, называемые условиями эллиптичности, при выполнении которых рассматриваемые операторы являются фредгольмовыми в подходящих функциональных пространствах;

2) (теорема об индексе) находится формула индекса, т.е. выражение для индекса эллиптического оператора в терминах *топологических* инвариантов символа оператора и многообразия, на котором он задан.

1. Первой теоремой об индексе в многомерном случае была знаменитая теорема Атьи–Зингера[1] об индексе эллиптических псевдодифференциальных операторов (далее ПДО) на гладком замкнутом многообразии, полученная в 1962 году как ответ на вопрос, поставленный Гельфандом[2] в 1960 году. Отметим, что установление формулы индекса потребовало применения самых современных методов анализа и топологии и стимулировало взаимодействие этих дисциплин.

Позднее теоремы об индексе были получены и для многих других классов операторов. Ниже мы будем рассматривать класс нелокальных операторов, более точно, операторов, ассоциированных с диффеоморфизмами гладкого замкнутого многообразия. Одной из привлекательных черт этой теории является то, что, помимо указанного выше взаимодействия анализа и топологии, в случае нелокальных операторов важную роль играет связь с теорией динамических систем.

2. Теория нелокальных эллиптических операторов и теория краевых задач с нелокальными краевыми условиями восходят к работе Карлемана[3] 1932 г., который рассматривал задачу о нахождении голоморфной функции в ограниченной области Ω, удовлетворяющей нелокальному краевому условию, связывающему значение функции в точке $x \in \partial\Omega$ границы со значением в точке $g(x) \in \partial\Omega$, где $g : \partial\Omega \to \partial\Omega$ — гладкое отображение периода два: $g^2 = Id$. При сведении такой задачи на границу области возникло не сингулярное интегральное уравнение, как это было бы в случае локального краевого условия, а *сингулярное интегральное уравнение со сдвигом*. Эта работа мотивировала изучение операторов со сдвигами на гладких замкнутых многообразиях. Дадим определение таких операторов.

На гладком замкнутом многообразии M рассматриваются операторы вида

$$D = \sum_{g \in G} D_g T_g : C^\infty(M) \to C^\infty(M), \tag{1}$$

---

[1] Atiyah M. F., Singer I. M. The index of elliptic operators on compact manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **69**, 1963, 422–433.

[2] Гельфанд И. М. Об эллиптических уравнениях. *Успехи матем. наук*, **15**, № 3, 1960, 121–132.

[3] Carleman T. Sur la théorie des équations intégrales et ses applications. Verh. Internat. Math.-Kongr. 1., 1932.

где G — некоторая дискретная группа диффеоморфизмов многообразия, $(T_g u)(x) = u(g^{-1}(x))$ — оператор сдвига, отвечающий диффеоморфизму g, $\{D_g\}$ — набор псевдодифференциальных операторов (ПДО) порядка $\le m$. Операторы вида (1), которые далее будем называть нелокальными операторами, интенсивно исследовались (см. основополагающие работы Антоневича[4,5], а также работы Антоневича и Лебедева[6,7] и цитированную в этих работах литературу). В частности, была установлена теорема фредгольмовости. Более точно, для операторов вида (1) было дано два определения символа. Во-первых, символ можно определить как функцию на кокасательном расслоении T^*M многообразия, принимающую значения в операторах, действующих в пространстве $l^2(G)$ квадратично суммируемых функций на группе. Во-вторых, символ можно определить как элемент скрещенного произведения[8] алгебры непрерывных функций на косферическом расслоении S^*M многообразия и группы G. Условие эллиптичности в этой ситуации состоит в требовании обратимости символа оператора (1). При весьма общих предположениях было установлено, что условия эллиптичности, отвечающие двум различным определениям символа, являются эквивалентными. Из эллиптичности следует фредгольмовость оператора в подходящих пространствах Соболева.

Отметим здесь одно существенное отличие эллиптической теории нелокальных операторов от аналогичной теории для обычных ПДО. А именно, примеры[9,10] показывают, что эллиптичность (и фредгольмовость) оператора (1) в соответствующих пространствах Соболева H^s существенно зависит от показателя гладкости s. В частности, выражение для символа оператора (1) также зависит от s. Однако, до настоящего времени не было известно описание возможных областей значений параметра s, для которых оператор является эллиптическим. Также не было известно, зависит ли индекс от s? Одной из причин, сдерживающих продвижение в ответе на эти вопросы, было то, что имеющиеся формулы для символа были достаточно громоздкими и, в частности, включали в себя риманову метрику на многообразии. В диссертации исследована разрешимость в шкале пространств Соболева операторов, ассоциированных с диффеоморфизмом растяжения (глава 1).

3. Перейдем теперь к проблеме вычисления индекса нелокальных операторов. Первая формула индекса нелокальных операторов была получена[11] для случая *конечной* группы G диффеоморфизмов. В этом случае индекс нелокального оператора выра-

[4] Антоневич А. Б. Краевые задачи с сильной нелокальностью для эллиптических уравнений. *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **53**, No. 1, 1989, 3–24.

[5] Антоневич А. Б. Линейные функциональные уравнения: Операторный подход. Минск. Университетское. 1988.

[6] Antonevich A., Lebedev A. Functional-Differential Equations. I. C^*-theory. Longman, Harlow, 1994.

[7] Антоневич А.Б., Лебедев А.В., "Функциональные и функционально-операторные уравнения. C^*-алгебраический подход". *Тр. С.-Петерб. мат. о-ва*, **6**, 1998, 34–140.

[8] Zeller-Meier G. Produits croisés d'une C^*-algèbre par un groupe d'automorphismes, *J. Math. Pures Appl. (9)*, **47**, 1968, 101–239.

[9] Antonevich A., Belousov M., Lebedev A. Functional differential equations. II. C^*-applications. Parts 1, 2, Longman, Harlow. 1998.

[10] Россовский Л.Е. Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений с растяжением и сжатием аргументов. *Тр. Моск. мат. о-ва*. **62**. 2000. 198-228.

[11] Антоневич А. Б. Эллиптические псевдодифференциальные операторы с конечной группой сдвигов. *Изв. АН СССР, сер. мат.*, **37**, № 3, 1973, 663–675.

жается через числа Лефшеца некоторого вспомогательного эллиптического ПДО на многообразии M. Для чисел Лефшеца имеется формула аналогичная формуле Атьи–Зингера[12] и поэтому проблему индекса в случае конечной группы можно считать решенной.

Для бесконечных групп проблема индекса оказалась намного более сложной и потребовала привлечения новых методов, связанных с некоммутативной геометрией. Первое продвижение на этом пути было получено в знаменитой работе Конна[13]. В этой работе была предъявлена формула индекса для операторов

$$D = \sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} x^\alpha (d/dx)^\beta \tag{2}$$

на прямой, где коэффициенты $a_{\alpha\beta}$ являются многочленами Лорана от операторов $(Uf)(x) = e^{ix}f(x)$, $(Vf)(x) = f(x-\theta)$, а θ — фиксированное число. Теорема об индексе таких дифференциально-разностных операторов, полученная Конном, естественно формулируется в терминах некоммутативной геометрии[14]. Операторы вида (2), называемые также операторами на некоммутативном торе (по той причине, что алгебра, порожденная операторами U и V, является некоммутативной деформацией алгебры функций на торе $\mathbb{T}^2$), были использованы для математического объяснения квантового эффекта Холла[14]. После цитированных работ Конна стало ясно, что аппарат некоммутативной геометрии является не только полезным, но и естественным в задаче об индексе нелокальных операторов. Так, методы некоммутативной геометрии нашли применение в задаче нахождения формул индекса в случае деформаций алгебр функций на торических многообразиях Ланди и ван Суйлекомом (Landi, van Suijlekom), Конном и Дюбуа-Виолеттом (Connes, Dubois-Violette).

Дальнейшее продвижение в решении проблемы индекса нелокальных операторов было сделано в 2008 году Назайкинским, Стерниным и диссертантом[15]. Именно, была получена формула индекса операторов вида (1) в случае, когда действие группы является изометрическим, т.е. сохраняет некоторую метрику на многообразии. Отметим, что эта формула содержит все уже упомянутые формулы индекса в качестве частных случаев.

В ситуации общего (т.е. *неизометрического*) действия формулы индекса в многомерном случае до настоящего времени отсутствовали. Были известны только весьма частные результаты. А именно, оператор (1) в случае группы, порожденной одним диффеоморфизмом $g: M \to M$, сводился[6,16] с контролируемым изменением индекса к виду *специального двучленного оператора*

$$\widetilde{D} = AT_gP + B(1-P), \tag{3}$$

[12]Atiyah M. F., Singer I. M. The index of elliptic operators III. *Ann. Math.*, **87**, 1968, 546–604.

[13]Connes A. C^* algèbres et géométrie différentielle. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, **290**, No. 13, 1980, A599–A604.

[14]Connes A. Noncommutative geometry. Academic Press Inc., San Diego, CA, 1994.

[15]Nazaikinskii V. E., Savin A. Yu., Sternin B. Yu. Elliptic theory and noncommutative geometry. Birkhäuser Verlag, Basel, 2008.

[16]Pimsner M., Voiculescu D. Exact sequences for K-groups and Ext-groups of certain cross-product C^*-algebras. *J. Oper. Theory*. 4. 1980. 93–118.

где A, B, P — псевдодифференциальные операторы, причем P — проектор ($P^2 = P$). Проблема вычисления индекса операторов, ассоциированных с неизометрическими диффеоморфизмами, была долгое время открытой даже для оператора (3). Эта проблема решена в главе 1 диссертации.

4. Уравнения, отвечающие рассмотренным выше операторам со сдвигами, связывают значения функции в конечном (или счетном) числе точек многообразия. В литературе также рассматривались нелокальные уравнения, в которых связывались значения функций на подмногообразиях положительной размерности. Например, Стерниным и Шаталовым[17] рассматривалась алгебра нелокальных операторов на тотальном пространстве гладкого расслоения $\pi : M \to X$, порожденная ПДО на многообразии M и семействами, параметризованными точками базы, интегральных операторов с гладким ядром на слоях расслоения. Позднее Кордюков[18] рассматривал алгебру, порожденную ПДО на M и семействами ПДО в слоях расслоения π. Эта алгебра, называемая алгеброй трансверсальных псевдодифференциальных операторов, оказалась полезной при получении некоторых результатов об асимптотике спектра в адиабатическом пределе. Однако, для элементов этой алгебры условие эллиптичности и теорема фредгольмовости до последнего времени получены не были.

Другой способ определения нелокальных операторов, связывающих значения функций на подмногообразиях положительной размерности, состоит в том, чтобы рассматривать операторы вида

$$D = \int_G D_g T_g dg : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M) \tag{4}$$

(ср. с (1)), ассоциированные с действием компактной группы Ли G на многообразии M. Здесь dg — мера Хаара. Такие операторы изучались Стерниным[19]. В цитированной работе оператор, ассоциированный с компактной группой Ли, представлялся как классический псевдодифференциальный оператор, действующий в сечениях бесконечномерных расслоений [20], слоем которых является пространство функций на группе G. Этот метод восходит к работам Бэббиджа [21] и для конечной группы преобразований приводит к конечной системе уравнений[11]. Кроме этого, получаемый оператор, который мы обозначим через $\mathcal{D}$, является G-инвариантным, а его сужение $\mathcal{D}^G$ на подпространство G-инвариантный функций оказывается изоморфным исходному оператору D. Теперь, если оператор $\widehat{\mathcal{D}} = 1 + \mathcal{D}$ является трансверсально-эллиптическим по отношению к действию группы G (Это понятие было введено Атьёй и Зингером[22],

[17]Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е. Расширение алгебры псевдодифференциальных операторов и некоторые нелокальные задачи. *Матем. сборник*, **185**, No. 3, 1994, 117–159.

[18]Kordyukov Yu. A. Noncommutative spectral geometry of Riemannian foliations. *Manuscripta Math.*, **94**, No. 1, 1997, 45–73.

[19]Sternin B. Yu. On a class of nonlocal elliptic operators for compact Lie groups. Uniformization and finiteness theorem. *Cent. Eur. J. Math.*, **9**, No. 4, 2011, 814–832.

[20]Luke G. Pseudodifferential operators on Hilbert bundles. *J. Diff. Equations*, **12**, 1972, 566–589.

[21]Babbage Ch. An assay towards the calculus of functions. Part II. *Philos. Trans. of the Royal Society*, 1816, **106**, 179–256.

[22]Atiyah M. F. Elliptic operators and compact groups. Lecture Notes in Math., Vol. 401. Springer-Verlag, Berlin, 1974.

и затем активно исследовалось, см. в особенности работы[23,24] и цитированную в них литературу), то отсюда следует фредгольмовость, т.е. индекс оператора $\widehat{D} = 1 + D$ конечен. Надо отметить, что формула индекса и соответствующие топологические инварианты символа эллиптических операторов, ассоциированных с группой Ли, до настоящего времени не рассматривались. В диссертации (глава 2) получена формула индекса в этом случае.

5. Современная теория эллиптических краевых задач имеет дело с задачами двух типов. Во-первых, это классические краевые задачи, которые мы будем иногда называть задачами типа Атьи–Ботта. Эти задачи допускают реализацию в виде фредгольмовых операторов в пространствах Соболева. Во-вторых, — краевые задачи, которые можно назвать задачами типа Атьи–Патоди–Зингера[25,26], которые могут быть реализованы как фредгольмовы операторы в некоторых *подпространствах* пространств Соболева. При этом подпространства, о которых идет речь в этих задачах, являются образами некоторых псевдодифференциальных проекторов, действующих в соболевских пространствах. Отметим, что краевые задачи типа Атьи–Патоди–Зингера являются *нелокальными* в силу нелокальности проектора, определяющего подпространство правых частей. Эти два класса задач имеют принципиальное различие. Именно, первый из них определен *не для любого* эллиптического оператора (действующего на многообразии с краем). Соответствующее препятствие известно как препятствие Атьи–Ботта[27]. Второй класс задач свободен от этого ограничения: фредгольмовы краевые задачи указанного типа могут быть поставлены для любого эллиптического оператора. С другой стороны, эта постановка налагает существенное ограничение на "правые части" краевой задачи. Именно, предполагается, что, как уже указывалось выше, правые части берутся из некоторого подпространства пространства Соболева, вообще говоря, *бесконечной коразмерности*. Возникает естественный вопрос: нельзя ли построить эллиптическую теорию, которая является "деформацией" этих двух теорий таким образом, чтобы на одном ее конце была классическая теория краевых задач, а на другом — задачи типа Атьи–Патоди–Зингера. Другими словами, проблема состоит в том, чтобы построить серию промежуточных теорий эллиптических краевых задач, которая бы в качестве частных (и полярных) случаев включала в себя как классические краевые задачи, так и задачи с проекторами. Такие промежуточные теории краевых задач до настоящего времени не были известны. Они построены в главе 3 диссертации.

6. В теории нелокальных краевых задач рассматривались задачи, в которых, как и в задаче Карлемана, условия связывают значения функции в разных точках границы

[23] Kordyukov Yu. A. Transversally elliptic operators on G-manifolds of bounded geometry. Parts I and II. *Russian J. Math. Phys.* 1994. **2.** №2. 175–198, 1995. **3.** №1. 41–64.

[24] Кордюков Ю.А. Теория индекса и некоммутативная геометрия на многообразиях со слоением. 2009. *УМН*, **64**, №2, 73-202.

[25] Atiyah M., Patodi V., Singer I. Spectral asymmetry and Riemannian geometry. I. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 1975. **77.** 43–69.

[26] Стернин Б.Ю., Шаталов В.Е., Шульце Б.-В. Об общих краевых задачах для эллиптических уравнений. *Матем. сб.* 1998, **189**, № 10, 145–160.

[27] Atiyah M. F., Bott R. The index problem for manifolds with boundary. In *Bombay Colloquium on Differential Analysis*, 1964, 175–186, Oxford. Oxford University Press.

(см. монографию Антоневича, Белоусова и Лебедева[9] и цитированную в ней литературу). Однако, формул, выражающих индекс через топологические инварианты, до настоящего времени практически не было. Формула индекс такого типа устанавливается в главе 3. Отметим также, что в ряде работ рассматривались нелокальные краевые задачи [28,29,30], в которых краевое условие связывает значения функции на границе области со значениями на подмногообразиях, лежащих внутри области. В диссертации такие задачи не рассматриваются.

7. При решении проблемы индекса важную роль играет задача о гомотопической классификации эллиптических операторов. Эта задача состоит в вычислении группы эллиптических операторов на фиксированном многообразии M, рассматриваемых с точностью до стабильных гомотопий. Обозначим эту группу через $\mathrm{Ell}(M)$. В случае псевдодифференциальных операторов на гладком замкнутом многообразии Атья и Зингер[31] получили изоморфизм

$$\mathrm{Ell}(M) \simeq K(T^*M), \tag{5}$$

при котором эллиптическому оператору сопоставляется класс его символа в топологической K-группе кокасательного расслоения с компактными носителями. Для нелокальных операторов имеет место изоморфизм аналогичный (5). А именно, показано[15], что группа стабильных гомотопических классов эллиптических операторов на M, ассоциированных с группой диффеоморфизмов G, изоморфна K-группе скрещенного произведения алгебры непрерывных функций на кокасательном расслоении T^*M, обращающихся в нуль на бесконечности, и группы G. Далее, K-группа скрещенного произведения выражается в топологических терминах для широкого класса групп G в соответствии с так-называемой гипотезой Баума–Конна[32]. Эти два результата дают выражение для группы стабильных гомотопических классов эллиптических операторов в топологических терминах, т.е. дают гомотопическую классификацию на многообразии без края. Однако, результатов по гомотопической классификации нелокальных эллиптических краевых задач до настоящего времени практически не было. В диссертации в главе 4 устанавливается такая классификация для одного важного класса нелокальных краевых задач.

8. Важное расширение понятия фредгольмова индекса было дано в работе Мищенко и Фоменко[33] (эта теория затем интенсивно исследовалась многими авторами, см. мо-

[28]Бицадзе А. В., Самарский А. А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических задач. *Докл. АН СССР*, **185**, № 4, 1969, 739–740.

[29]Skubachevskii A.L. Elliptic functional differential equations and applications. Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin, 1997.

[30]Скубачевский А. Л. Неклассические краевые задачи. I, II. *Современная математика. Фундаментальные направления*, **26**, 2007, 3–132. **33**, 2009, 3–179.

[31]Atiyah M. F., Singer I. M. The index of elliptic operators I. *Ann. of Math.*, **87**, 1968, 484–530.

[32]Baum P., Connes A. Geometric K-theory for Lie groups and foliations. *Enseign. Math. (2)*, **46**, № 1-2, 2000, 3–42.

[33] Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Индекс эллиптических операторов над C^*-алгебрами. *Изв. АН СССР*, **43**, 1979, 831–859.

нографии[34,35] и цитированную в них литературу). Фиксируется некоторая C^*-алгебра A (называемая алгеброй скаляров) и рассматриваются операторы F, действующие в пространствах, которые являются модулями над этой алгеброй. Индекс фредгольмова оператора в этом случае, называемый также индексом Мищенко–Фоменко, является элементом

$$\operatorname{ind}_A F \in K_0(A) \tag{6}$$

K-группы алгебры A. Если в качестве алгебры A взять поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, то индекс (6) сводится к обычному фредгольмову индексу (т.к. $K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$). Также в цитированной работе было дано определение псевдодифференциальных операторов над C^*-алгебрами. Символы таких операторов являются A-значными функциями на кокасательном расслоении многообразия. Для соответствующих эллиптических операторов была получена формула для индекса (6). Для приложений бывает удобно иметь не только индекс (6), но и числовые инварианты. Такие инварианты можно строить, пользуясь подходом некоммутативной геометрии Конна[14], спариванием индекса (6) с циклическими коциклами над алгеброй A. Соответствующие числовые инварианты были определены и вычислены в терминах символа оператора в работах Лотта (J. Lott), Шика (Th. Schick), Вал (Ch. Wahl) и др. Нелокальные операторы над C^*-алгебрами были определены Назайкинским, Стерниным и диссертантом[15]. Было дано определение символа и установлена теорема фредгольмовости. Однако, формула индекса была установлена только для некоторых специальных операторов. Задача получения формулы индекса для общих нелокальных операторов над C^*-алгебрами до сих пор не рассматривалась. Эта задача решена в диссертации в главе 5.

Цель работы

Целью работы является изучение следующих взаимосвязанных вопросов:

1. Исследование разрешимости в шкале пространств Соболева операторов, ассоциированных с диффеоморфизмами многообразия. Получение формул индекса.

2. Получение формулы индекса эллиптических операторов, ассоциированных с действием компактной группы Ли.

3. Построение теории краевых задач, являющейся деформацией между классическими краевыми задачами и задачами типа Атьи–Патоди–Зингера с проекторами.

4. Получение гомотопической классификации нелокальных эллиптических задач.

5. Вычисление числовых инвариантов индекса Мищенко–Фоменко нелокальных эллиптических операторов над C^*-алгебрами в терминах топологических инвариантов символа.

Методы исследования

Основным методом исследования нелокальных задач, применяемым в диссертации, является метод *униформизации*, который состоит в редукции рассматриваемой нелокальной проблемы к некоторой *локальной* (псевдодифференциальной) задаче, индекс которой совпадает с индексом первоначальной (нелокальной) задачи. Полученная в результате редукции задача исследуется современными аналитическими и

[34] Соловьев Ю.П., Троицкий Е.В. C^*-алгебры и эллиптические операторы в дифференциальной топологии. М.: Факториал, 1996.

[35] Мануйлов В.М., Троицкий Е.В. C^*-гильбертовы модули. М. Факториал пресс. 2001.

топологическими методами, что приводит к естественному определению её эллиптичности, установлению теоремы конечности и предъявлению формулы индекса.

В работе также используются методы теории уравнений с частными производными (псевдодифференциальные операторы, эллиптические краевые задачи), функционального анализа (C^*-алгебры, скрещенные произведения), алгебраической топологии (когомологии, K-теория, K-гомологии), а также некоммутативной геометрии (некоммутативное дифференциальное исчисление, K-теория алгебр).

Основные результаты. Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем.

1. Исследована разрешимость в шкале пространств Соболева нелокальных операторов, ассоциированных с диффеоморфизмом растяжения. Один из основных результатов состоит в том, что для данного показателя гладкости s оператор эллиптичен на (явно указываемом) открытом и связном множестве s. В частности, индекс не зависит от s.

2. Получена теорема об индексе для эллиптических операторов, отвечающих общему диффеоморфизму многообразия. А именно, для нелокального эллиптического оператора на многообразии M построена эллиптическая краевая задача на цилиндре $M \times [0, 1]$ с тем же индексом. Формула индекса для последней задачи предъявляется. Для нелокальных операторов, ассоциированных с диффеоморфизмом растяжения, дана когомологическая формула индекса.

3. Получена теорема об индексе нелокальных операторов, ассоциированных с компактными группами Ли. Здесь дано определение символа таких операторов и построен характер Черна эллиптических символов как элемент когомологий множеств неподвижных точек действия.

4. Построена теория краевых задач, которая является деформацией между теорией классических краевых задач и задач Атьи–Патоди–Зингера. Краевые задачи в этой теория являются нелокальными и ставятся на многообразиях, край которых представляет собой расслоение над некоторой компактной базой с компактным же слоем. Получена теорема фредгольмовости для таких краевых задач и в случае накрытий даётся формула индекса.

5. Получена гомотопическая классификация нелокальных эллиптических операторов на многообразиях, окрестность края которых является тотальным пространством гладкого расслоения. Более точно, установлен изоморфизм группы стабильных гомотопических классов эллиптических операторов и группы K-гомологий специального многообразия с особенностями. В качестве приложений классификации вычислено препятствие типа Атьи–Ботта к существованию нелокальных эллиптических краевых условий; вычислены K-группы алгебры символов и алгебры псевдодифференциальных операторов; построен аналог двойственности и изоморфизма Пуанкаре в K-теории для многообразий с накрытием на крае.

6. Получена теорема об индексе для эллиптических операторов над C^*-алгебрами, ассоциированных с изометрическим действием дискретной группы на гладком замкнутом многообразии. Соответствующая формула индекса выражает аналитические числовые инварианты индекса Мищенко–Фоменко оператора в терминах топологических инвариантов символа. Для классических геометрических операторов (операторов Эйлера, сигнатуры, Дирака) указаны явные выражения для индекса.

Теоретическая и практическая ценность

Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в исследованиях по теории уравнений с частными производными, алгебраической топологии и некоммутативной геометрии. Результаты диссертации могут быть использованы в специальных курсах для студентов и аспирантов, обучающихся по специальности математика.

Апробация результатов

Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах:

1. Семинар по топологии и анализу в МГУ (руководитель проф. А.С. Мищенко). Доклады 25.10.2001, 31.01.2002, 4.12.2008, 25.03.2010.

2. Семинар по анализу в университете г.Лион (Франция) (руков. проф. Т. Фак). Доклад 22.06.2005.

3. Заседание московского математического общества 22.04.2008.

4. Семинар по дифференциальным уравнениям и математической физике. Руководители проф. Л.А. Калякин и проф. В.Ю. Новокшенов (Уфа, ИМВЦ УНЦ РАН). Доклад 25.03.2008.

5. Семинар кафедры дифференциальной геометрии и топологии МГУ. Руководитель акад. А.Т. Фоменко. Доклады 25.03.2008, 20.10.2008.

6. Семинар по геометрическому анализу университета г. Ганновер (ФРГ). Руководитель проф. Э. Шроэ. Доклады 11.08.2008, 28.07.2009.

7. Семинар по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям. Руководитель проф. А.Л. Скубачевский. Доклад 20.10.2009.

Также результаты диссертации докладывались на следующих российских и международных конференциях.

1. Международный математический конгресс, 20-28 августа 2002. Пекин (КНР).

2. Международная конференция "Колмогоров и современная математика", 16-21 июня 2003. Москва.

3. Международная конференция "Workshop: Index problems", 26-28 апреля 2004. Париж (Франция).

4. Совместное заседание американского, немецкого и австрийского математических обществ (AMS, DMV, OMG). 16-19 июня 2005. Майнц (ФРГ).

5. Четвертая международная конференция по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям, 14-21 августа 2005, Москва.

6. Международный математический конгресс, 22-30 августа 2006. Мадрид (Испания).

7. Международная конференция "Spectral theory and global analysis", 14-18 августа 2006. Ольденбург (ФРГ).

8. Международная конференция "Groupoids in operator algebras and noncommutative geometry", 26 февраля - 2 марта 2007, Париж (Франция).

9. Международная конференция "Дифференциальные уравнения и топология", посвященная 100-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина. 17-22 июня 2008, Москва.

10. Международная конференция по некоммутативной геометрии, 28 июля-1 августа 2008. Бонн (ФРГ).

11. Международная конференция "C^*-algebras and Elliptic theory III", 26-31 января 2009. Бедлево (Польша).

12. Международная конференция "K-theory, C^*-algebras and topology of manifolds", 1-5 июня 2009. Тяньцзин (КНР).

13. Международная конференция "Noncommutative geometric methods in global analysis", June 29-July 4, 2009. Бонн (ФРГ).

14. XLVI всероссийская конференция по проблемам математики, информатики, физики и химии, апрель 2010. Москва.

15. Международная конференция "K-theory, C^*-algebras and index theory". 1-5 ноября 2010. Гёттинген (ФРГ).

16. Международная конференция "Differential and Functional Differential Equations", 14-21 августа 2011. Москва.

17. Международная конгресс "ISAAC 2011", 22-27 августа 2011. Москва.

Развитый в диссертации метод получения гомотопической классификации эллиптических операторов позже применялся для получения гомотопической классификации в других ситуациях[36,37]. Трансверсальные псевдодифференциальные операторы также применялись[38] для построения двойственности Пуанкаре в K-теории на многообразиях с ребрами, а также при доказательстве[19] фредгольмовости для операторов, ассоциированных с компактной группой Ли. На основе части результатов диссертации были разработаны исследовательские проекты, поддержанные грантом Президента РФ МК-1713.2005.1 и премией 2007 г. фонда Пьера Делиня для молодых российских математиков.

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в 16 статьях в ведущих научных журналах и сборниках. Все результаты совместных работ с Б.Ю. Стерниным, включенные в диссертацию, принадлежат диссертанту.

[36]Назайкинский В. Е., Савин А.Ю., Стернин Б. Ю. О гомотопической классификации эллиптических операторов на стратифицированных многообразиях. *Известия РАН, сер. матем.*, **71**, № 6, 2007, 91–118.

[37]Nazaikinskii V., Savin A., Sternin B. Elliptic theory on manifolds with corners. II. Homotopy classification and K-homology. In *C^*-algebras and Elliptic Theory II*, 2008, 207–226. Birkhäuser, Basel.

[38]Назайкинский В. Е., Савин А.Ю., Стернин Б. Ю. Об изоморфизме Пуанкаре в K-теории на многообразиях с рёбрами. *Современная математика. Фунд. направления*, **34**, 2009, 109–120.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, пяти глав и списка литературы (121 наименование). Общий объем диссертации составляет 212 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Глава 1. Операторы, ассоциированные с дискретной группой преобразований. Глава посвящена исследованию операторов, ассоциированных с диффеоморфизмом гладкого замкнутого многообразия M.

В параграфе 1.1 рассматриваются операторы вида

$$D = \sum_k D_k T^k : H^s(M) \longrightarrow H^{s-m}(M), \tag{7}$$

где оператор сдвига $Tu(x) = u(g(x))$ отвечает фиксированному диффеоморфизму $g : M \to M$; $\{D_k\}$ — такой набор ПДО порядков $\leq m$ на M, что только конечное число его элементов отлично от нуля. Основным результатом параграфа является определение символа $\sigma(D)$ как оператор-функции, заданной на кокасательном расслоении многообразия M, значение которой в точке (x, ξ) является оператором

$$\sigma(D)(x,\xi) : l^2(\mathbb{Z}, \mu_{x,\xi,s}) \longrightarrow l^2(\mathbb{Z}, \mu_{x,\xi,s-m}), \tag{8}$$

действующим в пространстве последовательностей квадратично суммируемых по некоторой мере $\mu_{x,\xi,s}$. Эта мера явно выписывается как в инвариантных терминах, так и в локальных координатах. Оператор (7) называется *эллиптическим*, если его символ (8) является обратимым при всех x, ξ, таких что $\xi \neq 0$. Эллиптический оператор является фредгольмовым.

Параграф 1.2 посвящен исследованию эллиптичности оператора (7) в зависимости от значений показателя гладкости s. А именно, в этом параграфе рассматриваются операторы на сфере $\mathbb{S}^m$, ассоциированные с диффеоморфизмом растяжения

$$g : \mathbb{S}^m \longrightarrow \mathbb{S}^m, \quad g(x) = qx, \tag{9}$$

где через $x \in \mathbb{R}^m$ обозначена координата, получаемая при помощи стереографической проекции сферы без Северного полюса на пространство $\mathbb{R}^m$ с координатами x. Положительное число q в (9) предполагается фиксированным. Соответствующие нелокальные операторы называются операторами с растяжениями[10]. Используя определение символа (8), получается основной результат этого параграфа — следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть D — оператор с растяжениями, который эллиптичен при хотя бы одном значении показателя гладкости s. Тогда множество значений s, при которых этот оператор является эллиптическим, является открытым интервалом (допускаются конечные и (полу)бесконечные интервалы). При этом, границы указанного интервала явно вычисляются в терминах значений символа оператора в неподвижных точках диффеоморфизма g.*

Следствие 2. *Индекс оператора с растяжениями не зависит от* s.

В параграфе 1.3 устанавливается теорема об индексе для операторов (7) в случае диффеоморфизма g произвольного многообразия M. Именно, эллиптическому оператору D сопоставляется некоторая эллиптическая краевая задача, обозначаемая через $(\mathcal{D}, \mathcal{B})$, на цилиндре $M \times [0,1]$. При этом, краевое условие задачи связывает значения неизвестной функции в точках оснований $M \times \{0\}$ и $M \times \{1\}$ цилиндра. Например, в важном частном случае специальных двучленных операторов (см. (3))

$$D = AT_gP + B(1-P)$$

краевая задача $(\mathcal{D}, \mathcal{B})$ имеет вид

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + (2P-1)\sqrt{\Delta_M}\right) u = f_1, \\ AT_g u|_{t=0} + Bu|_{t=1} = f_2. \end{cases}$$

Здесь Δ_M — неотрицательный оператор Лапласа на M, правая часть f_1 и неизвестная u являются функциями на цилиндре $M \times [0,1]$ с координатами (x,t), а граничное значение f_2 — функция на M. Сформулируем основной результат этого параграфа.

Теорема 3. *Имеет место равенство* $\operatorname{ind} D = \operatorname{ind}(\mathcal{D}, \mathcal{B})$.

Отметим, что индекс последней краевой задачи можно вычислить, если воспользоваться теоремой об индексе из параграфа 3.3.

В параграфах 1.4 и 1.5 рассматриваются примеры. Сначала на двумерном римановом многообразии M^2 рассматривается касательный оператор Эйлера

$$d + d^* : \Lambda(M^2) \to \Lambda(M^2),$$

действующий на пространстве дифференциальных форм всех степеней. Здесь d — оператор внешнего дифференцирования, а d^* — сопряженный оператор. Через P обозначим спектральный проектор этого оператора, отвечающий неотрицательным собственным значениям. Показывается, что специальный двучленный оператор

$$D_0 = T_gP + (1-P)$$

фредгольмов индекса нуль для любого диффеоморфизма $g : M^2 \to M^2$ и любой метрики. Это позволяет свести вычисление индекса произвольного специального двучленного оператора $D = AT_gP + B(1-P)$ к индексу псевдодифференциального оператора DD_0^{-1}.

Затем получена формула индекса для операторов с растяжениями из параграфа 1.2. Через Y обозначим пространство орбит действия группы растяжений $x \mapsto q^n x$ на сфере без полюсов:

$$Y = (\mathbb{R}^m \setminus 0)/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{S}^{m-1} \times \mathbb{S}^1.$$

Через S^*Y обозначим косферическое расслоение. Тогда символ $\sigma(D)$ (см. (8)) вне полюсов сферы определяет гладкий эндоморфизм

$$\sigma(D) \in C^\infty(S^*Y, \operatorname{End} \mathcal{E}) \tag{10}$$

некоторого бесконечномерного расслоения $\mathcal{E}$ над S^*Y. При этом, слой расслоения $\mathcal{E}$ есть пространство $l^2(\mathbb{Z}, \mu_s)$ (в этом случае мера в (8) с точностью до эквивалентности не зависит от точек x и ξ, которые мы опускаем). Основной результат параграфа — следующая теорема.

Теорема 4. *Для эллиптического оператора D с растяжениями имеет место формула индекса*

$$\operatorname{ind} D = \frac{(m-1)!}{(2\pi i)^m (2m-1)!} \int\limits_{S^*Y} \operatorname{tr}\left[\sigma^{-1}(D) d\sigma(D)\right]^{2m-1}, \tag{11}$$

где tr *обозначает след оператора в пространстве* $l^2(\mathbb{Z})$.

Здесь надо отметить, что операторно-значный символ (10) не удовлетворяет стандартным условиям типа компактной послойной вариации[20,39]. Поэтому корректность определения правой части в формуле (11) необходимо специально обосновывать.

Глава 2. Операторы, ассоциированные с компактной группой Ли преобразований. Глава посвящена построению эллиптической теории для операторов, ассоциированных с действием некоторой компактной группы Ли на гладком замкнутом многообразии M. А именно, в параграфе 2.1 рассматриваются операторы вида

$$D = \int\limits_G T_g D_g dg : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M), \tag{12}$$

которые определяются гладкими семействами псевдодифференциальных операторов $\{D_g\}$, $g \in G$ нулевого порядка на M и операторами сдвига $T_g u(x) = u(g^{-1}(x))$.

Оказывается, что операторы (12) являются сглаживающими вдоль орбит действия группы G. По этой причине символ операторов рассматривается не на всём кокасательном расслоении T^*M, а только на подпространстве

$$T^*_G M = \Big\{ (x,\xi) \in T^*M \;\mid\; \text{ковектор } \xi \text{ ортогонален орбите } Gx \Big\}. \tag{13}$$

Через $S^*_G M \subset T^*_G M$ обозначим подпространство ковекторов единичной длины. Мы определяем символ оператора D как элемент

$$\sigma(D) \in C(S^*_G M) \rtimes G \tag{14}$$

скрещенного произведения алгебры непрерывных функций на пространстве $S^*_G M$ и группы Ли G. Оператор $\widehat{D} = 1 + D$ называется *эллиптическим*, если его символ $\sigma(\widehat{D}) = 1 + \sigma(D)$ обратим в алгебре $C(S^*_G M) \rtimes G$ с добавленной единицей.

Теорема 5. *Пусть оператор $\widehat{D} = 1 + D : H^s(M) \to H^s(M)$ является эллиптическим. Тогда он фредгольмов при всех s.*

[39] Rozenblum G. On some analytical index formulas related to operator-valued symbols. *Electron. J. Differential Equations*. 2002. № 17. 1–31.

В параграфе 2.2 получены формулы индекса. Предполагается, что действие группы G на M является *локально-свободным*, т.е. некоторая окрестность единичного элемента $e \in G$ действует на M свободно (без неподвижных точек). При этом предположении пространство $T^*_G M$ является расслоением над M и эллиптический символ $\sigma(\widehat{D})$ определяет элемент в K-теории

$$[\sigma(\widehat{D})] \in K_0(C_0^\infty(T^*_G M) \rtimes G).$$

Здесь $C_0^\infty(T^*_G M)$ — алгебра гладких функций с компактными носителями. Для последней K-группы строится характер Черна, который представляет собой гомоморфизм групп

$$\mathrm{ch} : K_0(C_0^\infty(T^*_G M) \rtimes G) \longrightarrow \bigoplus_{\langle g \rangle \subset G} H^{ev}_{G^g,c}(T^* M^g). \tag{15}$$

Здесь $M^g \subset M$ — подмногообразие неподвижных точек, $G^g = \{h \in G \mid gh = hg\}$ — централизатор элемента g. Суммирование производится по классам сопряженности в группе G, для которых соответствующее множество неподвижных точек M^g не пусто. При этом сумма является конечной. Наконец, через $H^{ev}_{G,c}(Y)$ обозначены четномерные базисные когомологии[40] с компактными носителями для G-пространства Y.

Основная сложность при построении отображения (15) состоит в том, что надо построить представитель класса когомологий в виде явной дифференциальной формы. Этого удается добиться, выбирая (даже в случае скалярного оператора) специальную некоммутативная связность. В терминах отображения (15) получается следующая теорема об индексе.

Теорема 6. *Пусть $\widehat{D} = 1 + D : H^s(M, \mathbb{C}^N) \longrightarrow H^s(M, \mathbb{C}^N)$ — эллиптический оператор. Тогда для индекса этого оператора имеет место формула*

$$\operatorname{ind} \widehat{D} = \sum_{\substack{\langle g \rangle, \\ M^g \neq \emptyset}} \int_{F^g/G^g} |S^{M^g}_{G^g}|^{-1} \operatorname{ch}_g[\sigma(\widehat{D})] \operatorname{Td}_g(T^*_G M \otimes \mathbb{C}), \tag{16}$$

где $F^g = (T^*_G M)^g$ — множество неподвижных точек, $\operatorname{Td}_g(T^*_G M \otimes \mathbb{C})$ — некоторый класс когомологий, через $|S^{M^g}_{G^g}|$ обозначено количество элементов в стабилизаторе общего положения связной компоненты подмногообразия M^g, а интегралы в правой части формулы (16) суть трансверсальные интегралы[22].

Глава 3. Задачи на многообразиях с расслоенным краем. Глава посвящена построению теории эллиптических краевых задач на многообразиях, край которых является тотальным пространством расслоения.

Параграф 3.1 носит вспомогательный характер. Здесь рассматривается расслоение $\pi : Y \to X$ гладких замкнутых многообразий. На тотальном пространстве Y строится алгебра *трансверсально-псевдодифференциальных операторов*, обозначаемая через $\Psi(Y, \pi)$, которая порождена ПДО на Y и гладкими семействами ПДО в

[40] Koszul J. L. Sur certains groupes de transformations de Lie. In Géométrie différentielle. Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, Strasbourg, 1953. 137–141. Centre National de la Recherche Scientifique, 1953.

слоях расслоения π, параметризованными точками базы X. Показывается, что символ оператора $D \in \Psi(Y, \pi)$ имеет две компоненты. Первая компонента $\sigma_Y(D)$ — обычный символ оператора D — является функцией на T^*Y. Эта функция, вообще говоря, имеет разрыв первого рода на горизонтальном подпространстве $\pi^*T^*X \subset T^*Y$ и гладкая вне этого подпространства. Вторая компонента $\sigma_X(D)$ является гладкой операторно-значной функцией на $T_0^*X = T^*X \setminus 0$, принимающей значения в ПДО на слоях расслоения π. Основной результат параграфа — следующая теорема фредгольмовости.

Теорема 7. *Оператор $D \in \Psi(Y, \pi)$ фредгольмов тогда и только тогда, когда он эллиптичен, т.е. обе компоненты его символа $\sigma_Y(D)$ и $\sigma_X(D)$ обратимы.*

Параграф 3.2 является центральным в настоящей главе. Здест строится новый класс нелокальных краевых задач, являющийся деформацией между теорией классических краевых задач и теорией краевых задач типа Атьи–Патоди–Зингера[25,26]. Рассматривается гладкое многообразие M с краем ∂M, который расслоен над базой X (такие многообразия будем называть многообразиями с расслоенным краем). Соответствующую проекцию обозначим через $\pi : \partial M \to X$. Для эллиптического дифференциального оператора порядка d

$$D : C^\infty(M, E) \longrightarrow C^\infty(M, F),$$

действующего в сечениях расслоений E, F на M, рассматриваются краевые задачи вида:

$$\begin{cases} Du = f, & u \in C^\infty(M, E), \qquad f \in C^\infty(M, F), \\ B(ju) = g \in \operatorname{Im} P, & \operatorname{Im} P \subset C^\infty(\partial M, G). \end{cases} \tag{17}$$

Здесь $j : C^\infty(M, E) \longrightarrow C^\infty(\partial M, E\big|^d_{\partial M})$ — оператор, сопоставляющий функции сужение на край её джета порядка $d-1$ в нормальном к краю направлении; G — векторное расслоение на крае ∂M; подпространство $\operatorname{Im} P$ определяется семейством $P = P(x)$ псевдодифференциальных проекторов, действующих на функциях на слоях расслоения π; наконец, компоненты краевого условия B — элементы алгебры $\Psi(\partial M, \pi)$. В случае, когда слой расслоения π есть точка, задача (17) является классической краевой задачей, а в случае, когда база X есть точка, является краевой задачей типа Атьи–Патоди–Зингера.

Чтобы сформулировать теорему фредгольмовости, обозначим через Q проектор Кальдерона[41] для оператора D.

Теорема 8. *Краевая задача* (17)

$$\begin{pmatrix} D \\ B \circ j \end{pmatrix} : H^s(M, E) \longrightarrow \begin{matrix} H^{s-d}(M, F) \\ \oplus \\ P\, H^{s-1/2}(\partial M), \end{matrix} \qquad s > d/2,$$

фредгольмова тогда и только тогда, когда выполнены два условия:

[41] Calderon A. Outlines of the joint Soviet American symposium on partial differential equations. Новосибирск. 1963. 303–304.

1) символ $\sigma_{\partial M}(B)$ на пространстве $T^*\partial M \setminus \pi^* T^* X$ осуществляет изоморфизм

$$\sigma_{\partial M}(B) : \operatorname{Im} \sigma_{\partial M}(Q) \longrightarrow \operatorname{Im} \sigma_{\partial M}(P);$$

2) символ $\sigma_X(B)$ на пространстве $T^*X \setminus 0$ осуществляет изоморфизм

$$\sigma_X(B) : \operatorname{Im} \sigma_X(Q) \longrightarrow \operatorname{Im} P.$$

В качестве примера строится новая краевая задача для оператора сигнатуры[12].

В параграфе 3.3 устанавливается формула индекса для эллиптических краевых задач из предыдущего параграфа в частном случае, когда проекция π является накрытием, т.е. слой состоит из конечного числа точек. Такая нелокальная краевая задача сводится к оператору нулевого порядка на замкнутом многообразии стандартной для теории краевых задач редукцией порядка. Полученный оператор является оператором следующего типа.

Пусть дано некоторое гладкое замкнутое многообразие N, которое покрыто двумя областями U, V, и в области U задано накрытие $\pi : U \to U_0$. Тогда на N рассмотрим оператор $D : C^\infty(N) \longrightarrow C^\infty(N)$, который в области V является обычным ПДО с символом $\sigma_N(D)$, а в области U представляется как ПДО на U_0 с символом $\sigma_{U_0}(D)$ (здесь функции на U интерпретируются как сечения некоторого конечномерного расслоения над U_0). Для таких операторов D естественно определяется понятие символа. Основной результат параграфа 3.3 — следующая теорема об индексе.

Теорема 9. *Имеет место равенство*

$$\operatorname{ind} D = \int\limits_{T^*(N\setminus U)} \operatorname{ch} \sigma_N(D) \cdot \operatorname{Td}(T^*N \otimes \mathbb{C}) + \int\limits_{T^*U_0} \operatorname{ch} \sigma_{U_0}(D) \cdot \operatorname{Td}(T^*U_0 \otimes \mathbb{C}),$$

где дифференциальные формы $\operatorname{Td}(T^*N \otimes \mathbb{C})$ и $\operatorname{Td}(T^*U_0 \otimes \mathbb{C})$, представляющие соответствующие классы Тодда, вычисляются по римановым метрикам, которые согласованы на пересечении областей U и V.

Глава 4. Гомотопическая классификация эллиптических операторов и ее приложения. Глава посвящена проблеме классификации эллиптических операторов с точностью до стабильных гомотопий.

Параграф 4.1 носит вспомогательный характер. Здесь даётся определение стабильных гомотопий как отношения эквивалентности на множестве эллиптических операторов. Далее формулируется проблема гомотопической классификации как задача вычисления группы, образованной эллиптическими операторами по модулю стабильных гомотопий. Основной результат параграфа: установлена эквивалентность задачи о классификации и задачи вычисления K-группы некоторой операторной алгебры. Более точно, показывается, что группа стабильных гомотопических классов эллиптических операторов изоморфна группе $K_0(\operatorname{Cone}(A \to \Sigma))$, где Σ — алгебра символов рассматриваемых операторов, $A \subset \Sigma$ — подалгебра, проекторы над которой определяют пространства, в которых действуют эллиптические операторы, а Cone — конус гомоморфизма алгебр. Результаты этого пункта позволяют применять к исследованию проблемы индекса методы алгебраической топологии и некоммутативной геометрии, и используются на протяжении всей диссертации.

Параграф 4.2 посвящен гомотопической классификации эллиптических операторов на многообразии с расслоенным краем. Более подробно, рассматривается многообразие M с краем, в воротниковой окрестности которого задано расслоение $\pi : \partial M \times [0,1) \to X \times [0,1)$. Рассматривается алгебра операторов, которые вне воротниковой окрестности края являются обычными ПДО, в окрестности края являются трансверсальными ПДО в смысле главы 3 для расслоения π, а в еще меньшей окрестности края являются операторами умножения. Обозначим эту алгебру через $\Psi(M,\pi)$. Группу стабильных гомотопических классов эллиптических операторов из этой алгебры обозначим через $\mathrm{Ell}(M,\pi)$. Основной результат параграфа — следующая теорема, которая выражает эту группу в терминах группы K-гомологий[42] специального многообразия с особенностями.

Теорема 10. *Имеет место изоморфизм групп*

$$\mathrm{Ell}(M,\pi) \simeq K_0(\overline{M}^\pi), \tag{18}$$

где $\overline{M}^\pi$ — многообразие с особенностями, получаемое из M отождествлением точек в слоях проекции π, а $K_0(\overline{M}^\pi)$ — группа K-гомологий пространства $\overline{M}^\pi$.

Отметим, что изоморфизм (18) определяется явной формулой, если реализовать группу K-гомологий в терминах абстрактных эллиптических операторов[42].

В параграфе 4.3 приводятся следствия гомотопической классификации. Сначала вычисляется в топологических терминах препятствие типа Атьи–Ботта[27] к построению эллиптического оператора с заданным внутренним символом:

Следствие 11. *Пусть $[D] \in K_0(\overline{M}^\pi \setminus X)$ — элемент, определяемый эллиптическим оператором D на внутренности многообразия M. Тогда этот элемент можно поднять до элемента из группы $\mathrm{Ell}(M,\pi)$, определяемого некоторым оператором, эллиптическим на всём многообразии $\overline{M}^\pi$, тогда и только тогда, когда выполнено равенство*

$$\partial[D] = 0,$$

где $\partial : K_0(\overline{M}^\pi \setminus X) \longrightarrow K_1(X)$ — граничное отображение в точной последовательности пары $X \subset \overline{M}^\pi$ в K-гомологиях.

Далее, решена задача о вычислении K-групп алгебр ПДО.

Следствие 12. *Имеет место изоморфизм групп ($i = 0$ или 1)*

$$K_i(\Psi(M,\pi)) \simeq K^i(M) \oplus \widetilde{K}_{i+1}(\overline{M}^\pi),$$

где $\widetilde{K}_*$ — приведенная группа K-гомологий.

---

[42]Atiyah M. F. Global theory of elliptic operators. In Proc. of the Int. Symposium on Functional Analysis. 21–30. 1969. Tokyo.

Наконец, в случае, когда π — накрытие, в терминах нелокальных операторов строится аналог изоморфизмов Пуанкаре. А именно, многообразию M и его кокасательному расслоению сопоставляются некоторые C^*-алгебры $\mathcal{A}_{M,\pi}$ и $\mathcal{A}_{T^*M,\pi}$, для которых доказывается следующая теорема.

Теорема 13. *Для многообразия (M, π) с накрытием на крае имеют место изоморфизмы Пуанкаре ($i = 0$ или 1)*

$$K_i\left(\mathcal{A}_{T^*M,\pi}\right) \simeq K_i\left(\overline{M}^\pi\right), \quad K^i\left(\overline{T^*M}^\pi\right) \simeq K^i\left(\mathcal{A}_{M,\pi}\right),$$

где $\overline{M}^\pi$ и $\overline{T^*M}^\pi$ — многообразия с особенностями, получаемые из M и T^*M отождествлением точек в слоях проекций $\pi : \partial M \to X$ и $\partial T^*M \to T^*X \times \mathbb{R}$.

Глава 5. Операторы над C^*-алгебрами для дискретной группы изометрических преобразований. В этой главе рассматривается эллиптическая теория для нелокальных операторов над C^*-алгебрами. При этом, операторы ассоциированы с изометрическим действием дискретной группы.

В параграфе 5.1 определяются рассматриваемые нелокальные операторы и дается теорема фредгольмовости для них. Фиксируем некоторую C^*-алгебру A с единицей (алгебру скаляров) и конечно-порожденную группу Γ, действующую на гладком замкнутом многообразии M. Предполагается, что задано вложение $\Gamma \subset G$ в некоторую компактную группу Ли диффеоморфизмов многообразия. Рассматривается класс операторов вида

$$D = \sum_{g\in\Gamma} D_g T_g : C^\infty(M, A) \longrightarrow C^\infty(M, A), \tag{19}$$

где $C^\infty(M, A)$ — пространство гладких A-значных функций на M; $\{D_g\}$ — такой набор псевдодифференциальных операторов над алгеброй A в смысле Мищенко–Фоменко, что только конечное число его элементов отлично от нуля. Символ оператора (19) определяется как элемент

$$\sigma(D) \in C(S^*M, A) \rtimes \Gamma$$

скрещенного произведения $C(S^*M, A) \rtimes \Gamma$ алгебры непрерывных A-значных функций на косферическом расслоении и группы Γ. Оператор (19) называется *эллиптическим*, если его символ обратим в указанной алгебре. Показывается, что эллиптический оператор определяет фредгольмов оператор в смысле Мищенко–Фоменко[33] в замыканиях пространств $C^\infty(M, A)$ до гильбертовых A-модулей и определен его индекс

$$\operatorname{ind}_A D \in K_0(A) \tag{20}$$

со значениями в K-группе алгебры A.

В параграфе 5.2 определяются (аналитические) числовые инварианты, отвечающие индексу (20). Пусть $\tau : \Lambda(A) \longrightarrow \mathbb{C}$ — замкнутый градуированный след на алгебре $\Lambda(A)$ некоммутативных дифференциальных форм в смысле Каруби[43] для алгебры A. След τ определяет функционал

$$\operatorname{ch}_\tau : K_*(A) \longrightarrow \mathbb{C} \tag{21}$$

[43]Karoubi M. Homologie cyclique et K-théorie. *Astérisque*. **149**. 1987. 1–147.

на K-группе алгебры скаляров. Это позволяет определять числовые инварианты оператора D как образ индекса (20) при отображении (21).

Полученные числовые инварианты определяются символом $\sigma(D)$ оператора, и, чтобы их вычислить, строятся когомологические инварианты символа. С этой целью след τ продолжается до дифференциального следа на алгебре некоммутативных форм, отвечающих скрещенному произведению $C_0(T^*M, A) \rtimes \Gamma$, что позволяет определить характер Черна на K-группе этого скрещенного произведения как гомоморфизм групп

$$\mathrm{ch}_\tau : K_*(C_0(T^*M, A) \rtimes \Gamma) \longrightarrow \bigoplus_{\langle g\rangle\subset\Gamma} H_c^*(T^*M^g), \tag{22}$$

где суммирование производится по классам сопряженности $\langle g\rangle$, для которых множество неподвижных точек M^g непусто, а через H_c^* обозначены когомологии с компактными носителями.

В параграфе 5.3 устанавливается основной результат главы — теорема об индексе, вычисляющая числовой инвариант $\mathrm{ch}_\tau(\mathrm{ind}_A D)$ в терминах символа оператора.

Теорема 14. *Пусть Γ — конечно-порожденная группа степенного роста. Тогда имеет место равенство*

$$\mathrm{ch}_\tau(\mathrm{ind}_A D) = \sum_{\langle g\rangle\subset\Gamma} \int_{T^*M^g} \mathrm{ch}_{\tau,g}[\sigma(D)] \cdot \mathrm{Td}_g(T^*M \otimes \mathbb{C}), \tag{23}$$

где $\mathrm{ch}_{\tau,g}$ обозначает g-компоненту в (22); $[\sigma(D)] \in K_0(C_0(T^*M, A) \rtimes \Gamma)$ — класс эллиптического символа в K-группе; $\mathrm{Td}_g(T^*M \otimes \mathbb{C}) \in H^*(M^g)$ — некоторый класс когомологий, определяемый многообразием. При этом, ряд в (23) сходится абсолютно.

Также в параграфе 5.3 рассмотрено применение формулы (23) к вычислению так-называемых высших индексов для эллиптических операторов над алгеброй $A = \mathbb{C}$.

В параграфе 5.4 вычисляется индекс для важнейших операторов — оператора Эйлера, оператора сигнатуры и оператора Дирака. Также показывается, что для групп Γ, не содержащих элементов конечного порядка, формула индекса (23) состоит только из одного слагаемого, отвечающего единице группы.

Публикации по теме диссертации

1. Савин А. Ю., Стернин Б. Ю. Дефект индекса в теории нелокальных краевых задач и η-инвариант. *Матем. сб.*, **195**, № 9, 2004, 85–126.

2. Savin A., Sternin B. Index defects in the theory of spectral boundary value problems. In *Aspects of Boundary Problems in Analysis and Geometry*, V. 151 of *Oper. Theory Adv. Appl. Advances in Partial Differential Equations*, 2004, 170–238, Basel–Boston–Berlin. Birkhäuser.

3. Савин А. Ю., Стернин Б. Ю. Индекс для одного класса нелокальных эллиптических операторов. In *Spectral and Evolution problems: Proceedings of the Fourteenth Crimean Autumn Mathematical School-Symposium*, V. 14, 2004, 35–41.

4. Savin A. Elliptic operators on manifolds with singularities and K-homology. *K-theory*, **34**, № 1, 2005, 71–98.

5. Savin A., Sternin B. Boundary value problems on manifolds with fibered boundary. *Math. Nachr.*, **278**, № 11, 2005, 1297–1317.

6. Савин А. Ю., Стернин Б. Ю. Индекс нелокальных эллиптических операторов над C^*-алгебрами. *Доклады академии наук*, **426**, № 3, 2009, 314–317.

7. Савин А. Ю., Стернин Б. Ю. Некоммутативная эллиптическая теория. Примеры. *Труды МИАН*, **271**, 2010, 204–223.

8. Савин А. Ю., Стернин Б. Ю. Об индексе некоммутативных эллиптических операторов над C^*-алгебрами. *Матем. сб.*, **201**, № 3, 2010, 63–106.

9. Савин А. Ю., Стернин Б. Ю. Об индексе нелокальных эллиптических операторов для группы растяжений. *Доклады академии наук*, **433**, № 1, 2010, 21–24.

10. Савин А. Ю., Стернин Б. Ю. Нелокальные эллиптические операторы для компактных групп Ли. *Доклады академии наук*, **431**, № 4, 2010, 457–460.

11. Савин А. Ю. Об индексе эллиптических операторов, ассоциированных с диффеоморфизмом многообразия. *Доклады академии наук*, **435**, № 2, 2010, 170–172.

12. Savin A.Yu. On the index of nonlocal elliptic operators for compact Lie groups. *Central European Journal of Mathematics*, 2011. **9**, № 4, 833–850.

13. Савин А. Ю., Стернин Б. Ю. Формула индекса нелокальных операторов для диффеоморфизма многообразия. *Доклады академии наук*, 2011, **438**, № 4, 444–447.

14. Савин А. Ю. О символе нелокальных операторов в пространствах Соболева. *Дифференц. уравнения*, **47**, № 6, 2011, 890–893.

15. Савин А. Ю., Стернин Б. Ю. Об индексе эллиптических операторов для группы растяжений. *Матем. сб.*, **202**, № 10, 2011, 99–130.

16. Савин А. Ю. Об индексе нелокальных эллиптических операторов, отвечающих неизометрическому диффеоморфизму. *Матем. заметки*, **90**, № 5, 2011, 712–726.

Савин А.Ю.

Теория индекса нелокальных эллиптических задач

Исследуется теория индекса для нелокальных эллиптических задач, содержащих операторы сдвига вдоль траекторий диффеоморфизмов (или групп диффеоморфизмов) гладкого многообразия. Получена теорема об индексе для эллиптических операторов, отвечающих общему диффеоморфизму. Для нелокальных операторов, ассоциированных с диффеоморфизмом растяжения, дана когомологическая формула индекса и исследована разрешимость таких операторов в шкале пространств Соболева. Получена теорема об индексе нелокальных операторов, ассоциированных с действиями компактных групп Ли. Построена теория краевых задач, которая является деформацией между теорией классических краевых задач и задач Атьи–Патоди–Зингера. Краевые задачи в этой теория являются нелокальными и ставятся на многообразиях, край которых представляет собой расслоение над некоторой компактной базой с компактным же слоем. Получена гомотопическая классификация нелокальных эллиптических операторов на многообразиях, окрестность края которых является тотальным пространством гладкого расслоения. Получена теорема об индексе для нелокальных эллиптических операторов над C^*-алгебрами, ассоциированных с изометрическим действием дискретной группы на гладком замкнутом многообразии.

Savin A.Yu.

Index theory for nonlocal elliptic problems

We study index theory for nonlocal elliptic problems with shift operators along the trajectories of a diffeomorphism (or a group of diffeomorphisms) of a smooth manifold. We obtain an index theorem for elliptic operators associated with a general diffeomorphism. For nonlocal operators associated with dilation diffeomorphism, we give an index formula in cohomology and study solvability of such operators in the scale of Sobolev spaces. An index theorem for nonlocal elliptic operators associated with compact Lie group actions is obtained. We construct a theory of boundary value problems that is a deformation between the theory of classical boundary value problems and the Atiyah–Patodi–Singer boundary value problems. The boundary value problems in this theory are nonlocal and are defined on manifolds, whose boundary is fibered over a compact base with a compact fiber. We obtain a homotopy classification of nonlocal elliptic operators on manifolds, whose boundary is the total space of a smooth fibration. An index theorem is obtained for nonlocal elliptic operators over C^*-algebras, where the operators are associated with an isometric action of a discrete group on a smooth closed manifold.

20

Подписано в печать 12.03.12. Формат 60x84/16.
Тираж 100 экз. Усл. печ. л. 1,5. Заказ 98

Типография Издательства РУДН
117923, ГСП-1, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д.3