На правах рукописи

Беляева Юлия Олеговна

СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВЛАСОВА-ПУАССОНА

01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Москва - 2019

Работа выполнена в Математическом институте им. С.М. Никольского факультета физико-математических и естественных наук Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования "Российский университет дружбы народов".

Научный руководитель:

Скубачевский Александр Леонидович, доктор физико-математических наук, профессор, Российский университет дружбы народов, директор Математического института им. С.М. Никольского.

Официальные оппоненты:

Веденяпин Виктор Валентинович, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института прикладной математики имени М.В.Келдыша Российской академии наук (специальность 01.01.03);

Чечкин Григорий Александрович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова (специальность 01.01.02).

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики имени С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Защита состоится 18 июня 2019 г. в 15 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.203.27 при Российском университете дружбы народов по адресу: г. Москва, ул. Орджоникидзе, 3, ауд. 495а.

С диссертацией можно ознакомиться в Учебно-научном информационном библиотечном центре (Научной библиотеке Российского университета дружбы народов) по адресу: 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6 и на сайте «Диссертационные советы РУДН» в сети интернет (http://dissovet.rudn.ru).

Автореферат разослан   2019 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
д.ф.-м.н.   Савин Антон Юрьевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. В работе рассматривается первая смешанная задача для системы уравнений Власова-Пуассона в бесконечном цилиндре

$$-\Delta\varphi(x,t) = 4\pi e \int\limits_{\mathbb{R}^3} \sum_\beta \beta f^\beta(x,v,t)\,dv \qquad (x \in Q,\ 0 < t < T), \tag{1}$$

$$\frac{\partial f^\beta}{\partial t} + (v, \nabla_x f^\beta) + \frac{\beta e}{m_\beta}\left(-\nabla_x\varphi + \frac{1}{c}\,[v,B], \nabla_v f^\beta\right) = 0 \tag{2}$$

$$(x \in Q,\ v \in \mathbb{R}^3,\ 0 < t < T,\ \beta = \pm 1),$$

с начальными условиями

$$f^\beta(x,v,t)\big|_{t=0} = f_0^\beta(x,v) \qquad (x \in \bar{Q},\ v \in \mathbb{R}^3,\ \beta = \pm 1) \tag{3}$$

и краевым условием Дирихле

$$\varphi(x,t) = 0 \qquad (x \in \partial Q,\ 0 \le t < T). \tag{4}$$

Здесь $Q = G\times\mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с границей $\partial G \in C^\infty$, $\partial Q = \partial G\times\mathbb{R}$, $f^\beta = f^\beta(x,v,t)$ — функция плотности распределения положительно заряженных ионов, если $\beta = +1$, и электронов, если $\beta = -1$, в точке x со скоростью v в момент времени t; $\varphi = \varphi(x,t)$ — потенциал самосогласованного электрического поля; ∇_x и ∇_v — градиенты по x и v, соответственно; m_{+1} и m_{-1} — массы иона и электрона; e — заряд электрона; c — скорость света; B — индукция внешнего магнитного поля; $(\,\cdot,\cdot\,)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$; $[\,\cdot,\cdot\,]$ — векторное произведение в $\mathbb{R}^3$.

В последние несколько десятилетий уравнениям Власова уделяется достаточно большое внимание. Это связано с их многочисленными приложениями в физике плазмы (уравнения Власова-Пуассона, уравнения Власова-Максвелла), астрофизике (уравнения Власова-Пуассона с гравитационным потенциалом) и др. Изучение уравнений Власова позволило теоретически предсказать эффект бесстолкновительного затухания волн в плазме - эффект затухания Ландау. В зависимости от различных физических постановок выделяют уравнения Власова-Пуассона, Власова-Максвелла, Власова–Эйнштейна и др. Уравнения Власова-Пуассона в областях с границей описывают кинетику заряженных частиц высокотемпературной плазмы в установках, осуществляющих управляемый термоядерный синтез. Смешанные задачи для системы уравнений Власова-Пуассона в бесконечном цилиндре являются моделью кинетики заряженных частиц плазмы в пробочной ловушке. На рисунке 1 представлено ее упрощенное схематическое изображение.

Далее будет приведен краткий обзор работ, посвященых исследованию уравнений Власова. Можно выделить несколько направлений в исследовании уравнений Власова. Одно из них связано со следующим подходом исследования задачи Коши для уравнений Власова-Пуассона в координатном пространстве $x \in \mathbb{R}^3$ и пространстве скоростей $v \in \mathbb{R}^3$. При $x \in \mathbb{R}^3$ и $0 < t < T$ уравнение Пуассона может быть разрешено с помощью ньютоновского потенциала. Подставляя его в уравнение Власова, мы получим интегро-дифференциальное уравнение, содержащее ядро со слабой особенностью. Глобальная

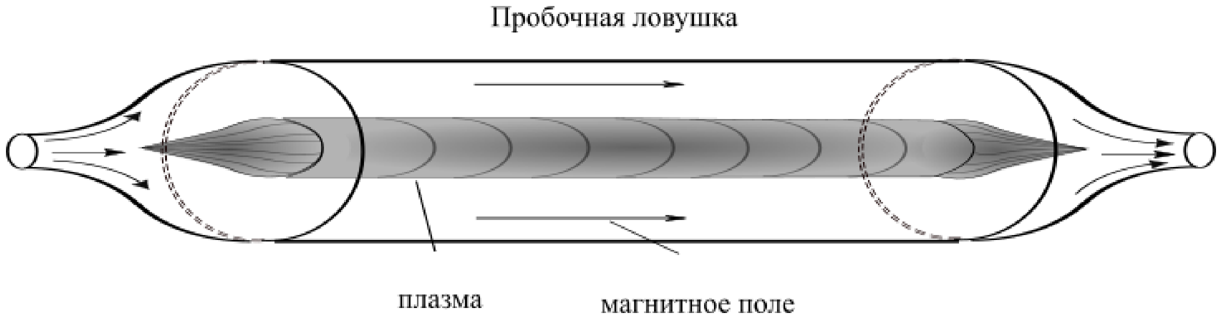

Рис. 1.

разрешимость таких уравнений со "сглаженным" ядром в условиях отсутствия внешнего магнитного поля изучалась в работах У. Брауна и К. Хеппа [1] , В. П. Маслова [2] и Р. Л. Добрушина [3]. Существование глобального обобщенного решения задачи Коши для уравнений Власова–Пуассона было доказано А. А. Арсеньевым[4]. Далее уравнения с сингулярным ядром и существование глобального обобщенного решения в случае задачи Коши изучались Р. Дж. ДиПерна и П. Л. Лионсом [5], Э. Хорстом и Р. Хюнце [6] и др.

Глобальным классическим решениям задачи Коши для системы уравнений Власова-Пуассона посвящены работы Ю. Батта [7], Э. Хорста [8], К. Пфаффельмозера [9] и Дж. Шеффера [10].

Стационарные решения имеют большое значение в изучении уравнений Власова. Стационарные решения уравнений Власова рассматривались в работах Ю. Батта, В. Фальтенбахера и Э. Хорста [11] , П. Браша [12], В. В. Веденяпина[13] [14], Ю. Батта и К.

[1] *Braun W., Hepp K.*, The Vlasov dynamics and its fluctuations in the 1/N limit of interacting classical particles// Comm. Math. Phys. — 1977. — 56, №2. — С. 101–113.

[2] *Маслов В.П.*, Уравнения самосогласованного поля// Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. матем. — ВИНИТИ, М. — 1978.— 11. — С. 153–234.

[3] *Добрушин Р. Л.*, Уравнения Власова// Функц. анализ и его прил.—1979. — 13, №2. — 48–58.

[4] *Арсеньев А.А.*, Существование в целом слабого решения системы уравнений Власова// Журн. вычисл. матем. и матем. физ. —1975.— 15, №1.— С. 136–147.

[5] *DiPerna R. J., Lions P. L.,* Solutions globales d'ŕequations du type Vlasov–Poisson// C. R. Acad. Sci. Paris Sŕer. I Math. — 1988. — 307, №12. — С. 655–658.

[6] *Horst E., Hunze R.,* Weak solutions of the initial value problem for the unmodified non-linear Vlasov equation//Math. Methods Appl. Sci. — 1984. — 6, №1. — С. 262–279.

[7] *Batt J.*, Global symmetric solutions of the initial value problem of stellar dynamics// J. Differential Equations. — 1977. — 25, №3. — С. 342-364.

[8] *Horst E.*, On the classical solutions of the initial value problem for the unmodified non-linear Vlasov equation// I. General theory, Math. Methods Appl. Sci. — 1981. — 3, №1. — С. 229–248.

[9] *Pfaffelmoser K.*, Global classical solutions of the Vlasov-Poisson system in three dimensions for general initial data// J. Differential Equations. — 1992. — 95, №2. — С. 281-303.

[10] *Schäffer J.*, Global existence of smooth solutions to the Vlasov-Poisson system in three dimensions// Comm. Partial Differential Equations. — 1991. — 16, №8-9. — С. 1313-1335.

[11] *Batt J., Faltenbacher W., Horst E.,* Stationary spherically symmetric models in stellar dynamics// Arch. Ration. Mech. Anal. — 1986. — 93, №2. — С. 159-183.

[12] *Braasch P.*,Semilineare elliptische Differentialgleichungen und das Vlasov-Maxwell-System// Dissertation, München. — 1997.

[13] *Веденяпин В. В.,* Краевая задача для стационарных уравнений Власова// Докл. АН СССР. — 1986. — 290, №4. — С. 777–780.

[14] *Веденяпин В. В.,* О классификации стационарных решений уравнения Власова на торе и граничная задача// Докл. РАН. — 1992. — 323, №6. — 1004–1006.

Фабиана [15], К. Грингарда и П. А. Равьяра [16], Г. Райна [17], С. И. Похожаева [18] и др.

В областях с границей уравнения Власова исследованы значительно меньше. Глобальные классические решения в случае полупространства изучались Я. Гуо [19] и Х. Дж. Хуангом, Х. Х. Л. Веласкесом [20].

В общем случае вопрос о существовании классических решений смешанных задач для системы уравнений Власова-Пуассона является нерешенной проблемой [21].

Исходя из физического смысла, при исследовании различных задач для уравнений Власова-Пуассона следует учитывать следующие факторы. В силу зарядовой нейтральности высокотемпературной плазмы, необходимо рассматривать именно двукомпонентную модель. В установках, осуществляющих управляемый термоядерный синтез (токамаки, пробочные ловушки), для удержания плазмы строго внутри реактора используется достаточно большое внешнее магнитное поле. Если частицы плазмы попадают на стенки реактора, то происходит либо остывание плазмы, либо разрушение реактора. Поэтому важно рассматривать модель плазмы под действием ненулевого магнитного поля и исследовать такие решение, носители которых лежат на некотором расстоянии от границы рассматриваемых областей. Однако, в большинстве исследований по уравнениям Власова допускается ряд упрощений: рассматривается однокомпонентная плазма, магнитное поле B полагается равным нулю, а также допускается пересечение траекторий заряженных частиц с границей. Смешанные задачи для уравнений Власова-Пуассона, описывающих двукомпонентную модель плазмы под действием внешнего магнитного поля, в случае полупространства и бесконечного цилиндра впервые исследовались в работах А.Л. Скубачевского [22] [23] [24] [25] [26].

В диссертации рассматривается вопрос о разрешимости первой смешанной задачи для системы уравнений Власова-Пуассона для двукомпонентной плазмы в бесконечном цилиндре, исследованы существование и единственность классических решений и построены новые классы классических стационарных решений с носителями, лежащими строго во внутреннем цилиндре.

Цель работы. Целью работы является исследование разрешимости первой смешанной задачи для системы уравнений Власова-Пуассона в бесконечном цилиндре, а также построение стационарных решений системы уравнений Власова-Пуассона в бесконечном

[15] *Batt J., Fabian K.,* Stationary solutions of the relativistic Vlasov–Maxwell system of plasma physics// Chinese Ann. Math. Ser. B. — 1993. — 14, №3. — С. 253-278.

[16] *Greengard C., Raviart P.-A.,* A boundary value problem for the stationary Vlasov–Poisson equations: the plane diode// Comm. Pure Appl. Math. — 1990. — 43, №4. — С. 473–507.

[17] *Rein G.,* Existence of stationary, collisionless plasmas in bounded domains// Math. Methods Appl. Sci. — 1992. — 15, №5. — С. 365–374.

[18] *Похожаев С. И.,* О стационарных решениях уравнений Власова–Пуассона// Дифференц. уравнения. — 2010. — 46, №4. — С. 527–534.

[19] *Guo Y.,* Regularity for the Vlasov equations in a half space// Indiana Univ. Math. J. — 1994. — 43, №1. — С. 255-320.

[20] *Hwang H.J., Velazquez J.J.L.,* On global existence for the Vlasov-Poisson system in a half space//J. Differential Equations. — 2009. — 247, №6. — С. 1915-1948.

[21] *Козлов В. В.,* Обобщенное кинетическое уравнение Власова// УМН. — 2008. — 63, №4(382). — С. 93–130.

[22] *Скубачевский А. Л.,* Об однозначной разрешимости смешанных задач для системы уравнений Власова–Пуассона в полупространстве// Доклады Академии Наук — 2012. — 443, № 4. — С. 431–434.

[23] *Скубачевский А.Л.,* Смешанные задачи для уравнений Власова–Пуассона в полупространстве// Теория функций и уравнения математической физики, Сборник статей. К 90-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН Льва Дмитриевича Кудрявцева, Тр. МИАН.— МАИК, М. —2013. — 283. — С. 204–232.

[24] *Скубачевский А.Л.,* Уравнения Власова–Пуассона для двукомпонентной плазмы в однородном магнитном поле// УМН. — 2014. — 69, №2. — С. 107-148.

[25] *Скубачевский А.Л., Tsuzuki Y.,* Уравнения Власова-Пуассона для двухкомпонетной плазмы в полупространстве// Доклады Академии Наук. — 2016. — 471, №5. — С. 528-530.

[26] *Скубачевский А.Л., Tsuzuki Y.,* Классические решения уравнений Власова-Пуассона с внешним магнитным полем в полупространстве// ЖВМ и МФ. — 2017. — 57, №3. — С. 536-552.

цилиндре с нулевым потенциалом самосогласованного электрического поля. В обоих случаях нас интересуют решения, носители которых лежат на некотором расстоянии от границы цилиндра, что достигается за счет действия достаточно большого внешнего магнитного поля, направленного вдоль оси цилиндра.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми. Отметим, что влияние внешнего магнитного поля на решения смешанных задач для системы уравнений Власова-Пуассона в областях с границей впервые рассматривалось в работах А.Л. Скубачевского. Результаты, полученные в диссертации основываются на его работах, однако, имеют ряд принципиальных отличий. Среди представленных результатов выделим следующие.

1. Построен новый класс стационарных решений системы уравнений Власова-Пуассона в бесконечном цилиндре с внешним магнитным полем и нулевым потенциалом самосогласованного электрического поля, с носителями функций плотностей распределения, лежащими на некотором расстоянии от границы цилиндра.

2. Построен новый класс стационарных решений системы уравнений Власова-Пуассона в бесконечном цилиндре с внешним магнитным полем и нулевым потенциалом самосогласованного электрического поля, с компактными носителями функций плотностей распределения заряженных частиц.

3. Показано, что характеристики уравнений Власова с фиксированным потенциалом самосогласованного электрического поля и под действием достаточно большого внешнего магнитного поля не достигают границы рассматриваемой области.

4. Доказана разрешимость первой смешанной задачи для системы уравнений Власова-Пуассона в бесконечном цилиндре. Получены новые достаточные условия существования и единственности классического решения такой задачи, с носителями плотностей распределения ионов и электронов, лежащими строго во внутреннем цилиндре.

Теоретическая значимость. Диссертация имеет теоретический характер, а ее результаты применимы к исследованию смешанных задач для уравнений Власова-Пуассона в областях с границей.

Апробация. Результаты, представленные в диссертационной работе, излагались в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН: на семинаре под руководством О.В. Бесова, на семинаре под руководством В.П. Лексина; в Институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН на семинаре под руководством Г.В. Демиденко; на семинарах механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова: под руководством В.В. Власова, под руководством Г.А. Чечкина; в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН на семинаре по математической физике им. М.В. Масленникова под руководством В.В. Веденяпина и В.А. Дородницына; в Институте проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН на семинаре под руководством С. Ю. Доброхотова; в Российском университете дружбы народов на семинаре под руководством А.Л. Скубачевского; на Международной конференции "Распределенные компьютерные и коммуникационные сети: управление, вычисление, связь." (Москва, 2016); Восьмой международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям (Москва, 2017); на XXVIII Крымской Осенней Математической Школе-симпозиуме по спектральным и эволюционным задачам (Севастополь, 2017); на Шестидесятой Всероссийской научной конференции Московского физико-технического института (Москва, 2017); на XXV Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых - Ломоносов-2018, (Москва, 2018); на Международной конференции, посвященной 90-летию Владимира Александровича Ильина, Понтрягинские Чтения XXIX (Москва, 2018); на Пятой Международной конференции "Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования посвящённой 95-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л.Д. Кудрявцева (Москва, 2018); на Международной школе-конференции "Соболевские Чтения посвященной 110-летию со дня рождения С.Л. Соболева (Новосибирск, 2018).

Результаты диссертации были представлены в стендовом докладе и презентации PosterFlash на The Heidelberg Laureate Forum (2018, г. Хайдельберг, Германия) — встрече лауреатов Абелевской премии, Филдсовской медали, премий Неванлинны и Тьюринга с молодым поколением ученых.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 11 печатных изданиях, 4 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [1–4], 7 — в тезисах докладов международных и всероссийских конференций [5–11]. В совместных работах [2], [4] научному руководителю Скубачевскому А.Л. принадлежат постановка задачи и формулировка основного результата (Теоремы 2.1); доказательства всех результатов и формулировки вспомогательных утверждений принадлежат автору диссертации.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав и списка литературы. Полный объем диссертации составляет 80 страниц с 2 рисунками. Список литературы содержит 60 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** приводится краткий обзор работ, посвященных исследованию уравнений Власова, формулируются основные результаты, полученные в диссертации.

Глава 1 состоит из трех параграфов. В **параграфе 1.1** вводятся функциональные пространства, используемые в диссертации. Основные результаты этой главы сформулированы и доказаны в **параграфах 1.2** и **1.3** — это **Теорема 1.2** и **Теорема 1.3.**

В **Главе 1** рассматривается стационарная система уравнений Власова-Пуассона в бесконечном цилиндре

$$-\Delta\varphi(x) = 4\pi e \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{\beta} \beta f^{\beta}(x, v)\, dv, \tag{5}$$

$$(v, \nabla_x f^{\beta}) + \frac{\beta e}{m_{\beta}} \left(-\nabla_x \varphi + \frac{1}{c}\, [v, B(x)], \nabla_v f^{\beta} \right) = 0 \tag{6}$$

$$(x \in Q,\ v \in \mathbb{R}^3,\ \beta = \pm 1),$$

с краевым условием Дирихле

$$\varphi(x) = 0 \qquad (x \in \partial Q). \tag{7}$$

Пусть $s = k + \sigma$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$, $0 < \sigma < 1$. Обозначим через $C^s(\bar{Q})$ пространство Гельдера всех непрерывных функций в $\bar{Q}$, имеющих все непрерывные производные в $\bar{Q}$ вплоть до порядка k, с конечной нормой

$$\|u\|_s = \|u\|_k + \max_{|\alpha|=k} \sup_{x\neq y} |x-y|^{-\sigma} |\mathcal{D}^\alpha u(x) - \mathcal{D}^\alpha u(y)|,$$

где

$$\|u\|_k = \max_{|\alpha|\leq k} \sup_x |\mathcal{D}^\alpha u(x)|,$$

$\mathcal{D}^\alpha = \Big(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\Big)^{\alpha_1} \dots \Big(\dfrac{\partial}{\partial x_n}\Big)^{\alpha_n}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Обозначим через $C_0^s(\bar{Q})$, $s \geq 0$, замыкание множества функций из $C^s(\bar{Q})$ с компактными в $\bar{Q}$ носителями.

Решением задачи (5)-(7) называется вектор-функция $\{\mathring{\varphi}, \mathring{f}^\beta\}$, удовлетворяющая уравнениям (5), (6) и краевому условию (7), такая, что $\mathring{\varphi} \in C_0^{2+\sigma}(\bar{Q})$, $\mathring{f}^\beta \in C^1(\bar{Q}\times\mathbb{R}^3)$. Здесь $C^1(\overline{Q}\times\mathbb{R}^3)$ — пространство ограниченных непрерывных функций в $\overline{Q}\times\mathbb{R}^3$, имеющих в $\overline{Q}\times\mathbb{R}^3$ все производные первого порядка ограниченные и непрерывные в $\overline{Q}\times\mathbb{R}^3$.

В работе используются следующие обозначения:

$$B_\rho = \{x \in \mathbb{R}^3 \colon |x| < \rho\},\ G_\delta = \{x' \in G : dist(x', \partial G) > \delta\},\ Q_\delta = \{x \in Q \colon \operatorname{dist}(x, \partial Q) > \delta\},$$

где $x' = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\delta > 0$. Предполагая, что $G_{2\delta} \neq \varnothing$, через $\delta_0 = \delta_0(\delta) > 0$ обозначаем наибольший радиус круга, вписанного в $G_{2\delta}$. В дальнейшем полагается, что $\delta_0 > \delta$.

Предполагается, что магнитное поле B направлено вдоль оси цилиндра и является достаточно большим. Это описывается следующим условием.

Условие 1.1 Пусть $B = (0, 0, h)$ для $x \in \bar{Q}$, где $h > 0$ не зависит от x и выполняется неравенство

$$32\, \frac{c\rho m_{+1}}{e\delta} < h.$$

В **Главе 1** рассматривается вопрос о построении решений системы (5)-(7), при $\mathring{\varphi} \equiv 0$, таким образом, чтобы носители функций плотностей распределения заряженных частиц $\mathring{f}^\beta(x, v)$ находились на некотором расстоянии от границы ∂Q цилиндра Q. Впервые обладающие таким свойством решения были построены А.Л. Скубачевским в работе[24]. Функции плотностей распределения построенного решения имели вид произведения двух срезающих функций, аргументы которых - первые интегралы уравнений (6) при $\mathring{\varphi} \equiv 0$, имеющие вид квадратичных функций. При построении решений такого вида сначала искались решения уравнений (6) при $\mathring{\varphi} \equiv 0$ в виде квадратичной формы с неопределенными коэффициентами. Ниже этот результат приведен в виде теоремы.

Теорема 1.1 *Пусть Условие 1.1 выполняется для некоторых $\delta, h, \rho > 0$, где $\delta > 0$ таково, что $G_{2\delta} \neq \varnothing$ и $\delta_0 > \delta$. Тогда для любого заданного $\alpha > 0$ существует решение стационарной системы уравнений (5),(6) с краевым условием (7) вида*

$$\{0, \mathring{f}^\beta\} = \Big\{0, \psi_1^\beta(|v|^2) \cdot \psi_2^\beta\Big(\Big(\frac{eh}{m_\beta c}\, x_1 + \beta v_2\Big)^2 + \Big(\frac{eh}{m_\beta c}\, x_2 - \beta v_1\Big)^2\Big)\Big\}$$

обладающее свойствами:

$$\mathring{f}^\beta \in C^\infty(\bar{Q}\times\mathbb{R}^3),\ \operatorname{supp} \mathring{f}^\beta \subset Q_{2\delta}\times B_{\rho/4} \ \text{и} \sup_{x,v} \mathring{f}^\beta(x, v) > \alpha.$$

Здесь $\psi_1^\beta(\cdot)$ и $\psi_2^\beta(\cdot)$ - четные, неотрицательные функции, удовлетворяющие условиям:

$$\psi_1^\beta(0) = 2\alpha > 0, \psi_2^\beta(0) = 1,$$

$$\operatorname{supp}\psi_1^{-1} \subset (-\rho_1^2/16, \rho_1^2/16),\ \operatorname{supp}\psi_2^{-1} \subset (-\rho_0^2, \rho_0^2), \text{ где } 0 < \rho_1 < \rho, \rho_0 = \frac{15\rho\delta_0}{\delta},$$

$$\frac{1}{m_{+1}^{3/2}}\,\psi_i^{+1}\Big(\frac{\tau}{m_{+1}^2}\Big) = \frac{1}{m_{-1}^{3/2}}\,\psi_i^{-1}\Big(\frac{\tau}{m_{-1}^2}\Big),\ i = 1, 2.$$

Леммы 1.1. и **1.2** посвящены следующим свойствам решений линейных уравнений в частных роизводных первого порядка (именно такими уравнениями являются стационарные уравнения Власова при $\varphi \equiv 0$): если некоторая функция класса $C^1(\bar{Q} \times R)$ удовлетворяет стационарному уравнению Власова с нулевым потенциалом, то функция, являющаяся композицией этой и некоторой непрерывно дифференцируемой функции, также удовлетворяет стационарному уравнению Власова с нулевым потенциалом; произведение функций, удовлетворяющих стационарному уравнению Власова с нулевым потенциалом, также является решением этого уравнения. Эти свойства используются при построении решений, описанных в **Теоремах 1.1-1.3**.

В **Теореме 1.2** построены новые классы решений стационарной системы (5)-(7) при $\mathring{\varphi}(x) \equiv 0$ таким образом, чтобы носители функций плотностей распределения заряженных частиц лежали строго во внутреннем цилиндре. В отличие от решения, построенного в **Теореме 1.1**, аргументами срезающих функций являются формы 4-го порядка и порядка $2m$. Далее будет приведена формулировка **Теоремы 1.2** .

Зафиксируем $\alpha > 0$. Пусть $\psi_1^\beta(\cdot), \psi_2^\beta(\cdot), \psi_m^\beta(\cdot) \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R})$ - неотрицательные, четные функции, такие, что

$$\psi_1^{-1}(0) = 2\alpha > 0, \psi_2^{-1}(0) = \psi_m^{-1}(0) = 1,$$

$$\frac{1}{m_{+1}^{3/2}}\psi_j^{+1}\Big(\frac{\tau}{m_{+1}^{2j}}\Big) = \frac{1}{m_{-1}^{3/2}}\psi_j^{-1}\Big(\frac{\tau}{m_{-1}^{2j}}\Big),\ j = 1, 2, ..., m,\ \tau \in \mathbb{R},$$

и носители функций $\psi_1^\beta(\cdot), \psi_2^\beta(\cdot), \psi_m^\beta(\cdot)$ содержатся в соответствующих множествах

$$\operatorname{supp}\psi_1^{-1} \subset (-\rho_1^2/16, \rho_1^2/16), 0 < \rho_1 < \rho,$$

$$\operatorname{supp}\psi_2^{-1} \subset (\frac{-\rho_0^4}{2}, \frac{\rho_0^4}{2}), \rho_0 = \frac{15\rho\delta_0}{\delta},\ \operatorname{supp}\psi_m^{-1} \subset (\frac{-\rho_0^{2m}}{2^{m-1}}, \frac{\rho_0^{2m}}{2^{m-1}}).$$

Теорема 1.2 *Пусть выполнены условия Теоремы 1.1, тогда построенные по заданному $\alpha > 0$ функции*

$$\{0, \mathring{f}_1^{\ \beta} \cdot \mathring{f}_2^{\ \beta}\} \tag{8}$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\{0, \mathring{f}_1^{\ \beta} \cdot \mathring{f}_m^{\ \beta}\} \tag{9}$$

где

$$\mathring{f}_1^{\ \beta} = \psi_1^\beta(|v|^2),$$

$$\mathring{f}_2^{\ \beta} = \psi_2^\beta\left(\left(\frac{eh}{cm_\beta}x_1+\beta v_2\right)^4+\left(\frac{eh}{cm_\beta}x_2-\beta v_1\right)^4\right),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\mathring{f}_m^{\ \beta} = \psi_m^\beta\left(\left(\frac{eh}{cm_\beta}x_1+\beta v_2\right)^{2m}+\left(\frac{eh}{cm_\beta}x_2-\beta v_1\right)^{2m}\right),$$

являются решениями стационарной системы уравнений (5)-(6)*, удовлетворяющими условию* (7) *и обладают свойствами:*

$$\mathring{f}^\beta \in C^\infty(\bar{Q}\times\mathbb{R}^3),\ supp\mathring{f}^\beta \subset Q_{2\delta}\times B_{\rho/4},\ \sup_{x,v}\mathring{f}^\beta > \alpha.$$

Результаты, описанные в параграфе 1.2, опубликованы в работе [1] из списка публикаций автора по теме диссертации.

Стационарные решения, построенные в Теореме 1.1, так же как и решения вида (8), (9), не зависят от переменной x_3. В таком случае с физической точки зрения допустима следующая интерпретация: плазма может иметь бесконечную массу. Поэтому возник вопрос о построении стационарного решения с компактным носителем. В **параграфе 1.3** построено стационарное решение системы уравнений Власова-Пуассона в бесконечном цилиндре с нулевым потенциалом самосогласованного электрического поля и компактными носителями функций плотностей распределения, лежащими строго во внутреннем цилиндре. В отличие от решений, построенных в **Теоремах 1.1** и **1.2**, здесь функции плотностей распределения имеют вид произведения пяти неотрицательных срезающих функций, аргументами которых являются первые интегралы стационарных уравнений Власова с нулевым потенциалом, которые выписываются в явном виде. Далее будет приведена формулировка основного результата **параграфа 1.3 — Теоремы 1.3**.

Пусть $\Psi_1^\beta, \Psi_2^\beta, \Psi_3^\beta, \Psi_4^\beta, \Psi_5^\beta \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R})$ — четные неотрицательные срезающие функции, удовлетворяющие условиям:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3}\Psi_i^{+1}(\tau)d\tau = \int\limits_{\mathbb{R}^3}\Psi_i^{-1}(\tau)d\tau\ (i=1,2,3,4,5),$$

$$\Psi_1^\beta(0)=0,\ \Psi_i^{-1}(0)=1, \text{для } i=2,3,4,\ \Psi_5^{-1}(0)=2\alpha>0,$$

а носители функций Ψ_i^β содержатся в соответствующих множествах:

$$\operatorname{supp}\Psi_1^\beta\subset\left(-\frac{\rho_1^2}{16},\frac{\rho_1^2}{16}\right),\ \operatorname{supp}\Psi_2^\beta\subset\left(-\frac{\rho_1^2}{16},\frac{\rho_1^2}{16}\right),$$

$$\operatorname{supp}\Psi_3^\beta\subset(-\mu_1\rho,\mu_1\rho),\ \text{где } \mu_1=\left(\frac{32\delta_1}{\delta}-\frac{1}{4}\right),$$

$$\operatorname{supp}\Psi_4^\beta\subset(-\mu_2\rho,\mu_2\rho),\ \text{где } \mu_2=\left(\frac{32\delta_2}{\delta}-\frac{1}{4}\right),$$

$$\operatorname{supp}\Psi_5^\beta\subset(-\varkappa_1,\varkappa_1),\ \varkappa_1=\rho\left(\frac{32\varkappa}{\delta}-\frac{\pi}{8}\right),\ \varkappa<\frac{\delta\pi}{256}.$$

Здесь δ_0 — наибольший радиус круга, вписанного в $G_{2\delta}$, а δ_1 и δ_2 выбраны так, что: $0<\delta_1^2+\delta_2^2<\delta_0^2$, $\delta_i>\frac{\delta_0}{128}$, $|x_i|\le\delta_i$, $i=1,2$.

Будем обозначать $Q_{\delta,\varkappa}=\{x\in\mathbb{R}^3:(x_1,x_2)\in G_{2\delta},|x_3|\le\varkappa\}$.

Теорема 1.3 *Пусть $\delta>0$ такое, что $\delta_0<\delta$. Предположим, что условие 1.1 выполняется для таких δ и некоторых $h,\rho>0$. Тогда для любого заданного $\alpha>0$ вектор-функция $\{0,\mathring{f}^\beta\}$, где*

$$\mathring{f}^\beta(x,v)=\Psi_1^\beta\big(v_1^2+v_2^2\big)\,\Psi_2^\beta\big(v_3^2\big)\,\Psi_3^\beta\bigg(\frac{\beta eh}{m_\beta c}x_1+v_2\bigg)\,\Psi_4^\beta\bigg(\frac{\beta eh}{m_\beta c}x_2-v_1\bigg)\times$$
$$\times\Psi_5^\beta\Bigg(\frac{\beta eh}{m_\beta c}x_3-v_3\arcsin\frac{v_1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}\Bigg),\tag{10}$$

является решением стационарной системы (5)- (7), *и удовлетворяет свойствам:*

$$\mathring{f}^\beta\in\dot{C}^\infty(Q_{2\delta}\times\mathbb{R}^3),\ \operatorname{supp}\mathring{f}^\beta\subset Q_{2\delta,\varkappa}\times B_{\rho/4}\ \text{и}\ \sup_{x,v}\mathring{f}^\beta(x,v)>\alpha.$$

Результаты, описанные в параграфе 1.3, опубликованы в работе [3] из списка публикаций автора по теме диссертации.

Глава 2 состоит из пяти параграфов. В **параграфе 2.1** дается формулировка первой смешанной задачи для системы уравнений Власова-Пуассона в бесконечном цилиндре.

Классическим решением задачи (1)-(4) мы называем вектор-функцию $\{\varphi,f^\beta\}$, для которой $\varphi\in C([0,T],C_0^{2+\sigma}(\overline{Q}))$, $f^\beta\in C^1(\overline{Q}\times\mathbb{R}^3\times[0,T])$, и выполняются соотношения (1)-(4).

Здесь $C\big([0,T],C_0^s(\overline{Q})\big)$ — банахово пространство непрерывных функций $[0,T]\in t\mapsto\varphi(\cdot,t)\in C_0^s(\overline{Q})$ с нормой

$$\|\varphi\|_{s,T}=\sup_{0\le t\le T}\big\|\varphi(\cdot,t)\big\|_s.$$

В этом же параграфе сформулированы следующие условия на внешнее магнитное поле и начальные функции плотностей распределения заряженных частиц.

Условие 2.1 Пусть $B\in\hat{C}^{1+\sigma}(\overline{Q})$ и $B(x)=(0,0,h)$ для $x\in\overline{Q}_{\delta/4}$, где

$$\frac{16c}{e\delta}\,\psi(T)\bigg(\rho+\frac{\sqrt{3}eR}{m_{-1}}\bigg)<h,$$

$\delta,\rho,R,h>0$ не зависят от x, а $\psi\in C\big([0,\infty)\big)$ — неубывающая функция, заданная по формуле

$$\psi(t)=\begin{cases}2^{-\frac12}\left(1-\cos\left(\dfrac{eh}{cm_{-1}}\,t\right)\right)^{\frac12}, & t\in\left[0,\dfrac{m_{-1}c\pi}{eh}\right],\\ 1, & t\in\left[\dfrac{m_{-1}c\pi}{eh},\infty\right).\end{cases}$$

Условие 2.2 Пусть $f_0^\beta\in\dot{C}^{1+\sigma}(\mathbb{R}^6)$ и $\operatorname{supp}f_0^\beta\subset\mathcal{D}_0$, где

$$\mathcal{D}_0=\big(Q_{\delta_0}\cap B_{\varkappa_0}\big)\times B_{\rho_0},$$

$\delta_0,\varkappa_0,\varkappa,\rho_0>0$ таковы, что $\delta<\delta_0<\varkappa_0<\varkappa-\delta/8$, $\rho_0<\rho$, и $Q_{\delta_0}\cap B_{\varkappa_0}\ne\varnothing$.

Здесь $\hat{C}^{1+\sigma}(\overline{Q})$ — пространство вектор-функций $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$ с координатами Y_i из $C^{1+\sigma}(\overline{Q})$. Будем обозначать $\langle Y\rangle_1^2 = \sum_{i=1}^3 \max\limits_{|\alpha|=1} \left\|\mathcal{D}^\alpha Y_i\right\|_0^2$.

В **параграфе 2.2** рассматриваются уравнения характеристик для уравнений Власова с фиксированным потенциалом электрического поля $\varphi \in M_{2+\sigma,R}$, здесь $M_{2+\sigma,R}$ — множество функций из пространства $C([0,T], C_0^{2+\sigma}(\overline{Q}))$, ограниченных положительной константой R по норме пространства $L_1((0,T), C_0^{2+\sigma}(\overline{Q}))$, где

$$\|\varphi\|_{L_1((0,T),C_0^{2+\sigma}(\overline{Q}))} = \int\limits_0^T \left\|\varphi(\cdot,t)\right\|_{2+\sigma} dt.$$

Множество $M_{2+\sigma,R}$ является полным метрическим пространством с метрикой, индуцированной нормой в $C([0,T], C_0^{2+\sigma}(\overline{Q}))$. Рассматриваются соответствующие уравнения характеристик:

$$\frac{dX_\varphi^\beta}{d\tau} = V_\varphi^\beta,\ \frac{dV_\varphi^\beta}{d\tau} = -\frac{\beta e}{m_\beta}\nabla_x\varphi\big(X_\varphi^\beta,\tau\big) + \frac{\beta e}{m_\beta c}\big[V_\varphi^\beta, B(X_\varphi^\beta)\big],$$

с начальными условиями

$$X_\varphi^\beta\big|_{\tau=0} = x,\ V_\varphi^\beta\big|_{\tau=0} = v,$$

для $\beta = \pm 1$, $0 < \tau < T$, $x \in Q$ и $v \in \mathbb{R}^3$. На полуинтервале $\big[0, T_\varphi^\beta(x,v)\big)$, $T_\varphi^\beta(x,v) \le T$, такая задача имеет единственное непродолжаемое решение. Это решение мы обозначаем

$$\big(X_\varphi^\beta(x,v,\tau), V_\varphi^\beta(x,v,\tau)\big).$$

В **Лемме 2.1** показано, что для всех $x \in Q$, $0 < t < T_\varphi^\beta(x,v)$ и $|v\,| < \rho$, характеристики $V_\varphi^\beta(x,v,\tau)$ ограничены:

$$\left|V_\varphi^\beta(x,v,t)\right| < \rho_1,\ \text{где } \rho_1 = \rho + \frac{\sqrt{3}e}{m_{-1}}R.$$

Далее, в **Лемме 2.3** показано, что при выполнении **Условия 2.1** решение $\big(X_\varphi^\beta(x,v,\tau),\, V_\varphi^\beta(x,v,\tau)\big)$ на полуинтервале $\big[0, T_\varphi^\beta(x,v)\big)$, где $T_\varphi^\beta(x,v) \le T$, обладает следующими свойствами: если $x' \in G_{\delta'}$, $v \in B_\rho$, то

$$T_\varphi^\beta(x,v) = T,\ \left|X_\varphi^{\beta\prime}(x,v,\tau) - x'\right| < \delta/8,\ \text{а } V_\varphi^\beta(x,v,\tau) \in B_{\rho_1}$$

для всех $\tau \in [0,T)$. Здесь δ', таково, что $G_{2\delta'} \ne \varnothing$, $\delta' \ge \delta/2$.

Из **Леммы 2.3** следует, что характеристики уравнений Власова с фиксированным потенциалом не достигают границы цилиндра: для любых $\varphi \in M_{2+\sigma,R}$, $x \in Q_{7\delta/8}$ и $v \in B_\rho$, мы имеем

$$T_\varphi^\beta(x,v) = \infty,\ X_\varphi^\beta(x,v,\tau) \in Q_{3\delta/4},\ V_\varphi^\beta(x,v,\tau) \in B_{\rho_1},\ \tau \in [0,\infty).$$

Далее уравнения характеристик рассматриваются на интервале $(0,t)$, $0 < t \le T$, с начальными условиями

$$X_\varphi^\beta\big|_{\tau=t} = y,\ V_\varphi^\beta\big|_{\tau=t} = q,\ \beta = \pm 1.$$

Такая задача имеет единственное непродолжаемое решение на полуинтервале $\big(T^\beta_\varphi(y,q,t),t\big]$, где $0 \le T^\beta_\varphi(x,v) < t$. Обозначим это решение через

$$\big(X^\beta_\varphi(y,q,t,\tau),V^\beta_\varphi(y,q,t,\tau)\big).$$

Аналогично **Лемме 2.3.** показано, что при выполнении **Условия 2.1**, на некотором интервале $\big(T^\beta_\varphi(y,q,t),t\big]$, где $0 \le T^\beta_\varphi(y,q,t)$, решение $\big(X^\beta_\varphi(y,q,t,\tau),V^\beta_\varphi(y,q,t,\tau)\big)$ обладает следующими свойствами: если $y' \in G_{\delta'}$, $q \in B_{\rho_1}$, то

$$T^\beta_\varphi(y,q,t)=0,\ \big|X^\beta_\varphi(y,q,t,\tau)-y'\big| < \delta/8,\ V^\beta_\varphi(y,q,t,\tau) \in B_{\rho_2},$$

для всех $\tau \in (0,t]$, где $\rho_2 = \rho_1 + \frac{\sqrt{3}e}{m_{-1}}R$. Здесь δ', таково, что $G_{2\delta'} \ne \varnothing$, $\delta' \ge \delta/2$. Это утверждение сформулировано в **Лемме 2.4**.

Из **Леммы 2.4** будет следовать, что для $\varphi \in M_{2+\sigma,R}$, $y \in Q_{7\delta/8}$, $q \in B_{\rho_1}$ и $0 < t \le T$ мы имеем

$$T^\beta_\varphi(y,q,t) = 0,\ X^\beta_\varphi(y,q,t,\tau) \in Q_{3\delta/4},\ V^\beta_\varphi(y,q,t,\tau) \in B_{\rho_2}.$$

В **параграфе 2.3** описано построение взаимнообратных отображений движения вдоль характеристик уравнения Власова с фиксированным φ из пространства $M_{2+\sigma,R}$. Продолжая функции $X^\beta_\varphi(y,q,t,\tau)$, $V^\beta_\varphi(y,q,t,\tau)$ по непрерывности в $\tau = 0$, мы будем полагать

$$\hat{X}^\beta_\varphi(y,q,t) = X^\beta_\varphi(y,q,t,0), \hat{V}^\beta_\varphi(y,q,t) = V^\beta_\varphi(y,q,t,0).$$

Для произвольно заданного $0 < t \le T$ рассматривается отображение

$$\hat{S}^\beta_{\varphi,t}(y,q)\colon \Omega_0 \to \Omega^\beta_{\varphi,t},$$

заданное по формуле

$$\hat{S}^\beta_{\varphi,t}(y,q) = \big(\hat{X}^\beta_\varphi(y,q,t),\hat{V}^\beta_\varphi(y,q,t)\big).$$

Здесь Ω_0 и $\Omega^\beta_{\varphi,t}$ определены следующим образом:

$$\Omega_0 = \big(Q_{3\delta/4} \cap B_{\varkappa_1}\big) \times B_{\rho_1},$$

$$\Omega^\beta_{\varphi,t} = \{(x,v)\colon (x,v)=\hat{S}_{\varphi,t}(y,q),\ (y,q) \in \Omega_0\},\ 0 < \delta < \varkappa - \delta/8,\ \varkappa_1 = \varkappa + T\rho_1.$$

Для любого $0 \le t < T$ отображение $S^\beta_{\varphi,t}\colon \Omega^\beta_{\varphi,t} \to \Omega_0$, заданное по формуле

$$S^\beta_{\varphi,t}(x,v) = \big(X^\beta_\varphi(x,v,t),V^\beta_\varphi(x,v,t)\big)$$

является обратным к $\hat{S}^\beta_{\varphi,t}$. Продолжим отображение $S^\beta_{\varphi,t}$ по непрерывности в $t = T$. Показано, что функция $S_{\varphi,t}(x,v)$ является непрерывно дифференцируемой по переменным x, v и t для любых $t \in [0,T]$ и $(x,v) \in \Omega^\beta_{\varphi,t}$, а функция $\hat{S}^\beta_{\varphi,t}(y,q)$ непрерывно дифференцируема по y, q и t на множестве Ω_0. Отображения $S_{\varphi,t}(x,v)$ и $\hat{S}^\beta_{\varphi,t}(y,q)$ схематически изображены на рисунке 2.

Предполагая, что выполнено **Условие 2.1**, в **Лемме 2.5** показано, что при достаточно большом магнитном поле и фиксированном $\varphi \in M_{2+\sigma,R}$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{\partial \hat{X}^\beta_\varphi(x,v,t)}{\partial x_j}\right| + \left|\frac{\partial \hat{V}^\beta_\varphi(x,v,t)}{\partial x_j}\right| \le c_0 \quad ((x,v) \in \Omega_0, 0 < t < T, j = 1,2,3),$$

Движение вдоль характеристик

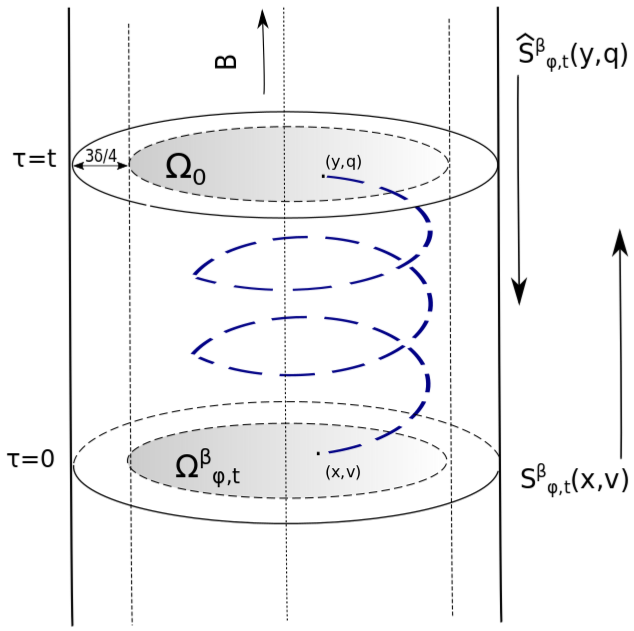

Рис. 2.

где $c_0 = \exp\left(\max\left\{\frac{3eR}{m_{-1}} + \frac{\sqrt{3}\,e\rho_2}{cm_{-1}}\,\langle B\rangle_1 T,\; T\right\}\right)$.

В **Лемме 2.6** доказано, что при выполнении условий на магнитное поле и начальные функции плотностей распределения, функция $f_0^\beta\big(\hat{S}^\beta_{\varphi,t}(x,v)\big)$ имеет компактный носитель.

Далее в **параграфе 2.3** определено решение $f^\beta_\varphi(x,v,t)$ задачи Коши для уравнения Власова с фиксированным потенциалом в виде

$$f^\beta_\varphi(x,v,t) = \begin{cases} f_0^\beta\big(\hat{S}^\beta_{\varphi,t}(x,v)\big) & ((x,v) \in \mathcal{D}^1_0,\ 0 \le t \le T),\\ 0 & ((x,v) \in \big(Q \times \mathbb{R}^3\big) \setminus \mathcal{D}^1_0,\ 0 \le t \le T),\end{cases}$$

где $\mathcal{D}^1_0 = \big(Q_{7\delta/8} \cap B_{\varkappa_1-\delta/8}\big) \times B_{\rho_1}$, где $\delta < \varkappa - \delta/8$, $\varkappa_1 = \varkappa + T\rho_1$.

Будем обозначать $m_s = \max\limits_\beta \|f_0^\beta\|_s$.

В **параграфе 2.4** установлены гёльдеровские оценки для функции

$$F_\varphi(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \sum_{\beta=\pm1} \beta f^\beta_\varphi(x,v,t)\,dv \qquad (x \in \overline{Q},\ 0 \le t \le T).$$

Если условия на магнитное поле и начальные функции распределения выполняются, то для любого $\varphi \in M_{2+\sigma,R}$ функция $F_\varphi \in C([0,T], C^\sigma_0(\bar{Q}))$. Это доказано в **Лемме 2.7**.

В **Лемме 2.8** показано, что для любой функции $\varphi \in M_{2+\sigma,R}$ мы имеем

$$\|F_\varphi\|_{L_1((0,T),C^\sigma(\overline{Q}))} \le c_1 m_\sigma,$$

где $c_1 = 2|B_{\rho_1}|\big(1 + 3^{\sigma/2}c_0^\sigma\big)T$, $c_0 > 0$ — постоянная из **Леммы 2.5**.

Далее, в **Лемме 2.9** показано, что для любых $\varphi_1,\ \varphi_2 \in M_{2+\sigma,R}$ и $0 \le t \le T$ мы имеем

$$\left\|F_{\varphi_1}(\cdot,t) - F_{\varphi_2}(\cdot,t)\right\|_\sigma \le c_2 m_{1+\sigma} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L_1((0,t),C^2(\overline{Q}))},$$

где $c_2 > 0$ не зависит от φ_1 и φ_2.

В **параграфе 2.5** доказана однозначная разрешимость первой смешанной задачи для системы уравнений Власова-Пуассона в бесконечном цилиндре.

В **Лемме 2.10** приведен результат, посвященный разрешимости вспомогательной задачи Дирихле для уравнения Пуассона в бесконечном цилиндре: для любой функции $f \in C_0^\sigma(\bar{Q})$ существует единственное решение u вспомогательной задачи

$$-\Delta u(x) = f(x) \qquad (x \in Q),$$
$$u(x) = 0 \qquad (x \in \partial Q).$$

При этом решение $u \in C_0^{2+\sigma}(\bar{Q})$ и $\|u\|_{C_0^{2+\sigma}(\bar{Q})} \le c_3 \|f\|_{C_0^\sigma(\bar{Q})}$, где $c_3 > 0$ не зависит от f.

Далее в **Теореме 2.1** доказаны существование и единственность классического решения первой смешанной задачи для системы уравнений Власова-Пуассона в бесконечном цилиндре.

Для каждой функции $\varphi \in M_{2+\sigma,R}$ классическое решение вспомогательной задачи с правой частью вида $f = 4\pi e F_\varphi(x,t)$, мы обозначим через u_φ. Показано, что $u_\varphi \in C\big([0,T], C_0^{2+\sigma}(\overline{Q})\big)$. Вводя оператор A по формуле $A\varphi = u_\varphi$, убеждаемся, что оператор A отображает пространство $M_{2+\sigma,R}$ в себя. Дальнейшие рассуждения опираются на введение в метрическом пространстве $M_{2+\sigma,R}$ эквивалентной метрики

$$\rho'_{2+\sigma,R}(\varphi_1,\varphi_2) = \sup_{0<t<T} \big(\|\varphi_1(\cdot,t) - \varphi_2(\cdot,t)\|_{2+\sigma} \exp(-kt)\big),$$

где $k > 0$ достаточно велико, $\varphi_1, \varphi_2 \in M_{2+\sigma,R}$. Показано, что в такой метрике оператор A является сжимающим. Это доказывает, что первая смешанная задача для системы уравнений Власова-Пуассона в бесконечном цилиндре имеет единственное классическое решение, при этом его носитель лежит строго во внутреннем цилиндре. Описанный результат далее сформулирован в **Теореме 2.1**.

Теорема 2.1 *Пусть выполняются Условия 2.1 и 2.2. Предположим также, что выполняется следующее неравенство*:

$$4\pi e c_1 c_3 m_\sigma < R, \tag{11}$$

где $c_1, c_3 > 0$ — константы из Лемм 2.8, 2.10,

$$c_1 = 2|B_{\rho_1}|\big(1 + 3^{\sigma/2} c_0^\sigma\big)T,$$

$$c_0 = \exp\left(\max\left\{\frac{3eR}{m_{-1}} + \frac{\sqrt{3}\, e\rho_2}{cm_{-1}} \langle B\rangle_1 T,\ T\right\}\right).$$

Тогда существует единственное классическое решение задачи (1)-(4) такое, что $\varphi \in M_{2+\sigma,R}$ и $\operatorname{supp} f^\beta(\cdot,\cdot,t) \subset \mathcal{D}_0^1$ для всех $t \in [0,T]$.

Отметим, что выполнение неравенства (11) может быть достигнуто за счет выбора m_σ достаточно малым.

Основные результаты, полученные в **Главе 2**, опубликованы в работах [2], [4] из списка публикаций автора по теме диссертации.

Публикации автора по теме диссертации

[1] *Беляева Ю.О.*, Стационарные решения уравнений Власова для высокотемпературной двукомпонентной плазмы// Современная математика. Фундаментальные направления.—2016. —62. — С. 19 - 31.

[2] *Беляева Ю.О., Скубачевский А.Л.*, Об однозначной разрешимости первой смешанной задачи для системы уравнений Власова-Пуассона в бесконечном цилиндре// Записки научных семинаров ПОМИ — 2018. —477. — С. 12-34.

[3] *Belyaeva Yu.O.*, Stationary solutions of the Vlasov-Poisson system for two-component plasma under an external magnetic field in a half-space// Mathematical Modelling of Natural Phenomena. — 2017. — 12, №6. — С. 37-50.

[4] *Belyaeva Yu. O., Skubachevskii A. L.*, On Classical Solutions to the First Mixed Problem for the Vlasov–Poisson System in an Infinite Cylinder// Doklady Mathematics. — 2019. — 99, №1. — С. 87–90.

[5] *Belyaeva Yu. O., Skubachevskii A.L.,* Stationary solutions of the Vlasov equations for high temperature plasma, Материалы Девятнадцатой международной конференции "Распределенные компьютерные и коммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2016), РУДН, М., 2016, т. 3, с. 60 - 64.

[6] *Belyaeva Yu.,* Stationary Solutions of the Vlasov System under External Magnetic Field in the Half-Space, Восьмая международная конференция по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям. Москва, Россия, 13-20 августа 2017 г. Международный семинар "Дифференциальные уравнения и междисциплинарные исследования". Москва, Россия, 17-19 августа 2017 г.: тезисы докладов, РУДН, М., 2017, с. 22-23.

[7] *Belyaeva Yu.,* Stationary solutions of the Vlasov-Poisson system for two-component plasma in a half-space, Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2017, XXVIII Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам, Симферополь: ДИАЙПИ, 2017, с. 119- 121.

[8] *Беляева Ю.О.,* О стационарных решениях системы уравнений Власова-Пуассона в полупространстве, Материалы Международного молодежного научного форума "ЛОМОНОСОВ-2018"/ Отв. ред. И.А. Алешковский, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов. [Электронный ресурс] - М.: МАКС Пресс, 2018.

[9] *Belyaeva Yu.O.,* Classical solutions of the Vlasov-Poisson equations with external magnetic field in an infinite cylinder, Современные методы теории краевых задач : материалы международной конференции Понтрягинские чтения XXIX, посвященной 90-летию Владимира Александровича Ильина (2-6 мая 2018 г.), Москва: Издательство МАКС-Пресс, 2018, с. 247-248.

[10] *Беляева Ю.О.,* Об однозначной разрешимости системы уравнений Власова-Пуассона в бесконечном цилиндре, Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования: тезисы Пятой Международной конференции, посвящённой 95-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л.Д. Кудрявцева. Москва, РУДН, 26-29 ноября 2018 г., Москва: РУДН, 2018, с.117-118.

[11] *Belyaeva Yu.O.,* On the classical solutions of the Vlasov-Poisson system in an infinite cylinder, Соболевские Чтения, Международная Школа-Конференция посвященная 110-летию со дня рождения С.Л. Соболева, Новосибирск, Россия, 10-16 декабря, 2018, тезисы докладов, с.62.

Ю. О. Беляева

Смешанные задачи для системы уравнений Власова-Пуассона

Аннотация

В диссертации рассматривается первая смешанная задача для системы уравнений Власова-Пуассона в бесконечном цилиндре. Эта задача описывает кинетику заряженных частиц в высокотемпературной плазме в установках, осуществляющих управляемый термоядерый синтез. Показано, что под действием достаточно большого внешнего магнитного поля характеристики уравнений Власова не пересекают границу цилиндра. Получены новые достаточные условия существования и единственности классического решения системы уравнений Власова-Пуассона с носителями функций плотностей распределения ионов и электронов, лежащими на некотором расстоянии от границы цилиндра. Построены новые классы стационарных решений системы уравнений Власова-Пуассона в бесконечном цилиндре с нулевым потенциалом самосогласованного электрического поля и достаточно большим внешним магнитным полем, с носителями функций плотностей распределения, лежащими строго во внутреннем цилиндре, в том числе и компактными носителями.

Yu. O. Belyaeva

The mixed problems for the Vlasov-Poisson system of equations

Abstract

The first mixed problem for the Vlasov-Poisson system in an infinite cylinder is considered. This problem describes the kinetics of charged particles of high-temperature plasma in the controlled thermonuclear fusion device. We show that the characteristics of the Vlasov equations do not reach the boundary of the cylinder if the external magnetic field is sufficiently large. Sufficient conditions are obtained for existence and uniqueness of the classical solution of the Vlasov-Poisson system with ions and electrons density distribution functions supported at some distance from the boundary of the cylinder. For the trivial electric field potential and sufficiently large induction of the external magnetic field there are constructed new stationary solutions supported strictly in inner cylinder including compactly supported solutions.