

*На правах рукописи*

**АДАМУ Амину**

Построение вероятностных моделей и анализ показателей эффективности  
функционирования потоковых одноранговых сетей

05.13.17 – «Теоретические основы информатики»

**Автореферат**  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва – 2012

Работа выполнена на кафедре систем телекоммуникаций Российского университета дружбы народов.

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук,  
доцент  
**Гайдамака Юлия Васильевна**

Официальные оппоненты: доктор технических наук,  
профессор  
**Степанов Сергей Николаевич**

кандидат физико-математических наук  
**Ледовских Татьяна Владимировна**

Ведущая организация: **Институт проблем информатики  
Российской академии наук  
(ИПИ РАН)**

Защита диссертации состоится « 24 » февраля 2012 г. в 17 час. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.203.28 при Российском университете дружбы народов по адресу: г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, ауд. 110.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Российского университета дружбы народов по адресу: 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6. (Отзывы на автореферат просьба направлять по указанному адресу.)

Автореферат разослан « 23 » января 2012 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета



М.Б. Фомин

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. Современная одноранговая сеть (от англ. peer-to-peer, P2P – «равный к равному») объединяет пользователей, которые без централизованного управления делают свои ресурсы (вычислительная мощность, объем памяти и др.) доступными друг другу, и не только загружают, но и раздают загруженные данные другим пользователям, что снижает нагрузку на серверы-источники информации. Различают файлообменные и потоковые одноранговые сети. Первоначально одноранговые сети использовались для обмена файлами, такими как видеоролики, фильмы, электронные книги и др. Такие сети называют файлообменными P2P-сетями. Только недавно технология P2P начала использоваться для передачи потокового трафика, например, при предоставлении услуги телевидения. Несколько потоковых систем были успешно созданы для предоставления услуги потокового видео по требованию и услуги видео в режиме реального времени через Интернет и сейчас обслуживают сотни тысяч пользователей одновременно, которые смотрят телевизионные каналы со скоростью от 300 кбит/с до 1 Мбит/с. Примерами таких систем являются PPLive, PPStream, UUSee, SopCast, CoolStreaming, TVants и многие другие. В ближайшие годы эти системы будут использоваться при трансляции большого числа телевизионных каналов со всего мира для огромного количества пользователей и могут составить серьезную конкуренцию традиционным подходам к предоставлению услуг IPTV, таким как традиционное IP-мультивещание. Дальнейший рост объемов трафика потокового вещания через Интернет с использованием P2P архитектуры ожидается также за счет видео, произведенного самими пользователями и транслируемого с их веб-камер и беспроводных устройств. Привлекательность технологии P2P обусловлена в том числе низкой стоимостью развертывания P2P-сети, поскольку сеть является наложенной и для ее организации не требуется дополнительного сетевого оборудования.

Для анализа показателей эффективности функционирования файлообменных сетей применяются так называемые жидкостные модели, а для анализа показателей эффективности потоковых сетей - дискретные модели. Существенный вклад в развитие данной области внесли в основном зарубежные ученые: L. Kleinrock, K.W. Ross, E. Setton, B. Girod, B. Hajek, R. Srikant, D. Qiu, F. Clévenot, Ph. Nain, J. Virtamo и др. При анализе моделей P2P-сетей используют методы исследований, разработанные известными

российскими учеными: Г. П. Башариным, В. М. Вишневым,  
Б. С. Гольдштейном, А. Е. Кучерявым, А. В. Печинкиным,  
А. П. Пшеничниковым, К. Е. Самуйловым, С. Н. Степановым,  
А. Д. Харкевичем, И. И. Цитовичем, М. А. Шнепс-Шнеппе, С. А. Шоргиным.

Для каждого пользователя сети максимально возможные скорости входящего трафика (так называемая скорость загрузки) и исходящего трафика (так называемая скорость раздачи) обусловлены особенностями технологии подключения к сети Интернет, причем часто скорость загрузки значительно превышает скорость раздачи, например, при подключении через ADSL-модем. Как правило, скорости воспроизведения телеканалов, транслирующихся в потоковых одноранговых сетях вещательного телевидения (P2PTV-сетях), ниже скоростей загрузки пользователей, поэтому проблемы с качеством предоставления услуги телевидения в P2PTV-сети возникают в ситуации, когда скорости раздачи видеопотока телеканала сервером и пользователями – соседями по P2PTV-сети ниже скорости воспроизведения канала. Данная диссертационная работа посвящена анализу качества предоставления услуг именно потоковых одноранговых сетей. Кроме того, исследованию моделей файлообменных одноранговых сетей посвящено значительное количество публикаций, а модели потоковых одноранговых сетей являются менее исследованными.

Ввиду изложенного, актуальной является задача разработки дискретных математических моделей, предназначенных для анализа потоковых одноранговых сетей.

Целью диссертационной работы является построение и анализ математических моделей процесса обмена данными между пользователями потоковой P2P-сети, включая модель воспроизведения телевизионного канала и модель заполнения буфера оборудования пользователя при воспроизведении видеопотока.

Методы исследования. В работе использованы методы теории вероятностей, теории марковских случайных процессов, теории массового обслуживания, математической теории телетрафика и статистического моделирования.

Достоверность научных результатов диссертационной работы подтверждается использованием строгих и апробированных математических

методов исследования, вычислительным экспериментом и имитационным моделированием, проведенными на близких к реальным исходных данных.

Научная новизна диссертации состоит в следующем.

1. В разработке математической модели предоставления услуги цифрового вещательного телевидения в одноранговой сети. Отличия разработанной модели и метода расчета ее характеристик от известных моделей и методов состоят в следующем.
  - Построенная модель предоставления услуги вещательного телевидения основана на модели поведения отдельного пользователя, в то время как ранее не учитывались особенности поведения отдельных пользователей при переключении телевизионных каналов.
  - Разработана аппроксимация нормальным законом основного показателя эффективности функционирования P2P-сети – вероятности состояния всеобщей передачи. По сравнению с известными методами аппроксимация позволяет более эффективно проводить вычисления этой вероятностной характеристики.
2. В разработке модели воспроизведения видеопотока в P2P-сети, отличия которой от известных моделей состоят в следующем.
  - Модель с учетом вероятностей появления пользователя в P2P-сети и его ухода из сети ранее не исследовалась.
  - Отсутствовала аналитическая формула для расчета вероятности того, что в сети имеется порция данных для загрузки на заданное место в буфер пользователя. Ранее данный показатель эффективности вычислялся приближенно по рекуррентным формулам.

Практическая ценность. Модели, методы и алгоритмы, разработанные в диссертационной работе, предназначены для расчета показателей эффективности потоковых одноранговых сетей – вероятности состояния всеобщей передачи транслируемых в сети каналов, вероятности просмотра видео без перерывов воспроизведения и задержки начала воспроизведения видеопотока. Эти показатели могут быть применены проектными организациями и операторами сетей при планировании сетевых ресурсов, требуемых для обеспечения надлежащего уровня качества обслуживания пользователей. Результаты диссертации использованы в учебном процессе на кафедре систем телекоммуникаций РУДН для студентов, обучающихся по направлению «Прикладная математика и информатика», при подготовке

магистерских диссертаций, а также в рамках исследований по гранту РФФИ №10-07-00487-а «Задача управления доступом в широкополосной сети и анализ марковской модели с мультипликативным распределением вероятностей состояний» и НИР 020612-1-173 «Разработка математических моделей и методов анализа информационно-телекоммуникационных сетей».

Апробация работы. Результаты, полученные в ходе выполнения работы, были представлены на IV отраслевой научной конференции-форуме «Технологии информационного общества» 5-7 апреля 2010 г. (Москва, МТУСИ); XLVI Всероссийской научной конференции факультета физико-математических наук РУДН, 19-23 апреля 2010 г. (Москва, РУДН); 2-d International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems (IEEE ICUMT 2010), Oct. 18-20, 2010 (Moscow, Russia); V отраслевой научной конференции-форуме «Технологии информационного общества», 9-10 февраля 2011 г. (Москва, МТУСИ); XLVII Всероссийской конференции с международным участием «Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем», 18-22 апреля 2011 г. (Москва, РУДН); 11th International Conference on Next Generation Wired/Wireless Networking, NEW2AN, Aug 23-25, 2011 (St. Petersburg, Russia).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 6 работ, из которых [1-4] - в ведущих рецензируемых научных журналах и содержат выносимые на защиту результаты, а [5,6] - в рецензируемых трудах международных конференций.

В работах, выполненных в соавторстве, соискателю принадлежит: в [1] – метод анализа модели воспроизведения каналов телевидения; в [2] – метод анализа состояния буфера; в [3] – утверждения об аппроксимации нормальным законом вероятности состояния всеобщей передачи; в [4] – метод анализа и расчета вероятности просмотра видео без перерывов воспроизведения. Все результаты, выносимые автором на защиту, получены автором лично.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и библиографии из 107 наименований. Диссертация изложена на 114 страницах текста, содержит 35 рисунков, 5 таблиц.

## **СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ**

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, сформулированы цели и задачи исследований, представлено содержание основных результатов

диссертации, дана характеристика результатов по главам, изложена их научная новизна и практическая ценность.

Глава 1 посвящена особенностями построения моделей одноранговых сетей.

В *разделе 1.1* исследованы принципы построения и классификации одноранговых сетей. Для каждого класса P2P-сети кратко описан процесс его функционирования и четко определены показатели эффективности для каждого класса. Основным показателем эффективности функционирования файлообменных сетей является время загрузки файла (англ. Latency), а в потоковых сетях основными показателями эффективности функционирования являются задержка начала воспроизведения (англ. Startup Delay), вероятность просмотра видео без перерывов воспроизведения (англ. Playback Continuity) и вероятность состояния всеобщей передачи (англ. Universal Streaming).

В *разделе 1.2* исследована жидкостная модель, предназначенная для анализа времени загрузки файла в файлообменной P2P-сети. Параметрами модели являются скорости загрузки и раздачи данных пользователем, а также интенсивность ухода пользователей из сети. Получены условия существования стационарного режима и показано, что в стационарном режиме время загрузки файла не зависит от интенсивности появления новых пользователей в сети, что обеспечивает масштабируемость файлообменной P2P-сети.

В *разделе 1.3* также исследованы модели для анализа в файлообменной P2P-сети. В отличие от модели раздела 1.2 при построении моделей раздела 1.3 учитывается расстояние между пользователями: предполагается, что пользователи в сети загружают требуемые данные от соседних пользователей со скоростью, которая уменьшается с увеличением расстояния. Исследованы три режима функционирования файлообменной P2P-сети, а именно, жидкостной, жесткий и стационарный режимы.

Глава 2 посвящена построению и анализу модели одноранговой сети вещательного телевидения, далее – P2PTV-сети.

В *разделе 2.1* исследованы принципы функционирования одноранговой сети вещательного телевидения.

В *разделе 2.2* исследован метод построения одноранговой сети с потоковым трафиком в виде экспоненциальной однородной сети массового обслуживания и построены модели P2PTV-сети с конечным и бесконечным числом пользователей, основанные на модели поведения отдельного пользователя.

Предполагается, что в рассматриваемой сети транслируется  $|\mathcal{M}| = M$  ТВ-каналов, и в сети находятся  $|\mathcal{N}| = N$  пользователей, каждый из которых просматривает один из каналов сети. Для каждого канала определена  $\rho_m$  - популярность  $m$ -канала,  $\sum_{m=1}^M \rho_m = 1$ , а также  $\mu_m^{-1}$  - среднее время просмотра  $m$ -канала пользователем. Видеопоток, доступный пользователям, просматривающим  $m$ -канал, формируется из потока, раздаваемого видеосервером, и потоков, раздаваемых всеми пользователями  $m$ -канала. Пусть  $s_m$  - скорость раздачи видеопотока  $m$ -канала сервером,  $u_n$  - скорость раздачи  $n$ -пользователя,  $R_m$  - скорость воспроизведения  $m$ -канала, т.е. скорость, требуемая для воспроизведения канала без пауз, без рассинхронизации звука и изображения, а также других явлений, свидетельствующих о низком качестве предоставления услуги телевидения по P2PTV-сети. Введено определение вероятности состояния всеобщей передачи  $m$ -канала, как вероятности того, что все пользователи, просматривающие  $m$ -канал, получают биты видеоданных данного канала со скоростью не ниже скорости воспроизведения канала  $R_m$ . Получена формула для расчета вероятности  $\pi_m$  состояния всеобщей передачи  $m$ -канала P2PTV-сети в зависимости от популярности канала.

В разделе 2.3 рассмотрены частные случаи исследованных в разделе 2.2 моделей для анализа сети с двумя классами пользователей – пользователи с высокой скоростью раздачи и пользователи с низкой скоростью раздачи данных. Предполагается, что часть пользователей в сети имеет одинаковую высокую скорость раздачи, равную  $u^h$ , а другая часть имеет одинаковую низкую скорость раздачи, равную  $u^l$ , т.е.  $u^l < u^h$ . Соответствующие подмножества пользователей обозначены  $\mathcal{N}^h$  и  $\mathcal{N}^l$  ( $N^h = |\mathcal{N}^h|, N^l = |\mathcal{N}^l|$ ),  $\mathcal{N} = \mathcal{N}^h \cup \mathcal{N}^l$ , тогда  $u_n \in \{u^h, u^l\}$ ,  $n \in \mathcal{N}$ .

Событие, соответствующее состоянию, когда все пользователи на  $m$ -канале просматривают его с требуемой скоростью  $R_m$ , т.е. состоянию всеобщей передачи, определено следующим образом:

$$\mathcal{A}_m = \left\{ (x_m^h, x_m^l) : 0 \leq x_m^h \leq N^h, 0 \leq x_m^l \leq N^l, s_m + x_m^h u^h + x_m^l u^l \geq x_m R_m \right\},$$

где  $x_m^h$  и  $x_m^l$  - число пользователей с высокой и с низкой скоростью раздачи на  $m$ -канале, а  $x_m = x_m^h + x_m^l$  - общее число пользователей на  $m$ -канале. Вероятность

$\pi_m := P(\mathcal{A}_m)$  события  $\mathcal{A}_m$  представляет собой вероятность состояния всеобщей передачи для  $m$ -канала. Справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1. Вероятность всеобщей передачи  $m$ -канала R2PTV-сети с конечным числом пользователей с высокой и с низкой скоростью имеет вид

$$\pi_m = P(\mathcal{A}_m) = \sum_{x_m^h=0}^{N^h} \sum_{x_m^l=0}^{N^l} \mathbf{I}(\mathcal{A}_m) p_m(x_m^h) p_m(x_m^l), \quad m \in \mathcal{M}, \quad (1)$$

где маргинальные распределения  $p(x_m^s)$  числа пользователей класса  $s \in \{h, l\}$  на  $m$ -канале имеют вид

$$p_m(x_m^s) = \binom{N^s}{x_m^s} \rho_m^{x_m^s} (N^s) (1 - \rho_m(N^s))^{N^s - x_m^s}, \quad x_m^s = \overline{0, N^s}, \quad m \in \mathcal{M}, s \in \{h, l\},$$

$\mathbf{I}(\mathcal{A}_m)$  - функция-индикатор.

Утверждение 2. Вероятность всеобщей передачи  $m$ -канала R2PTV-сети с бесконечным числом пользователей с высокой и с низкой скоростью определяется формулой

$$\pi_m = P(\mathcal{A}_m) = \sum_{x_m^h=0}^{\infty} \sum_{x_m^l=0}^{\infty} \mathbf{I}(\mathcal{A}_m) p_m(x_m^h) p_m(x_m^l), \quad m \in \mathcal{M}, \quad (2)$$

где маргинальные распределения  $p(x_m^s)$  числа пользователей класса  $s \in \{h, l\}$  на  $m$ -канале имеют вид

$$p(x_m^s) = e^{-\gamma_m^s} \cdot \frac{(\gamma_m^s)^{x_m^s}}{x_m^s!}, \quad m \in \mathcal{M}, \quad s \in \{h, l\},$$

где  $\gamma_m^s = \lim_{N^s \rightarrow \infty} N^s \rho_m(N^s)$ ,  $m \in \mathcal{M}, s \in \{h, l\}$ ,  $\mathbf{I}(\mathcal{A}_m)$  - функция-индикатор.

В качестве примера численного анализа вероятности состояния всеобщей передачи телевизионных каналов с различными популярностями рассмотрен фрагмент R2PTV-сети, в которой транслируются  $M = 100$  телевизионных каналов. В сети присутствуют  $N = 2000$  пользователей, каждый из которых просматривает один из каналов. Предполагается, что популярность каналов

распределена по закону Ципфа с параметром  $z=1$ , т.е.  $\rho_m = \left( m^z \sum_{i=1}^M \frac{1}{m^z} \right)^{-1}$ ,  $m \in \mathcal{M}$

таким образом, все каналы упорядочены в порядке убывания популярности. Все каналы в сети имеют одинаковые требования к скорости передачи данных, т.е.

$R_m = R = 500$  кбит/с,  $m \in \mathcal{M}$ . Предположим, что  $N^l = 0,5N$  пользователей в сети

имеют низкую скорость раздачи, а остальные имеют высокую скорость раздачи. Пользователи с высокой скоростью раздают видеопоток со скоростью  $u^h = 1500$  кбит/с, пользователи с низкой скоростью - с скоростью  $u^l = 100$  кбит/с.

Исследована зависимость вероятности состояния всеобщей передачи для каналов с различной популярностью от числа пользователей с низкой и с высокой скоростями раздачи. На рисунках 1 и 2 изображены графики зависимости вероятности  $\pi_m$  от числа пользователей  $N^h$  и  $N^l$  для 1-го и 100-го канала соответственно, т.е. для канала с самой высокой популярностью и канала с самой низкой популярностью.

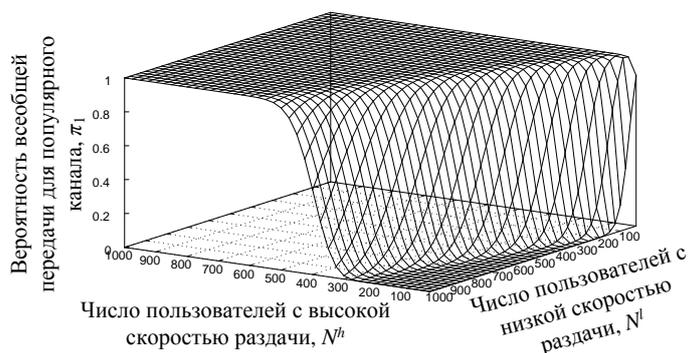


Рис.1. Вероятность состояния всеобщей передачи для 1-го канала

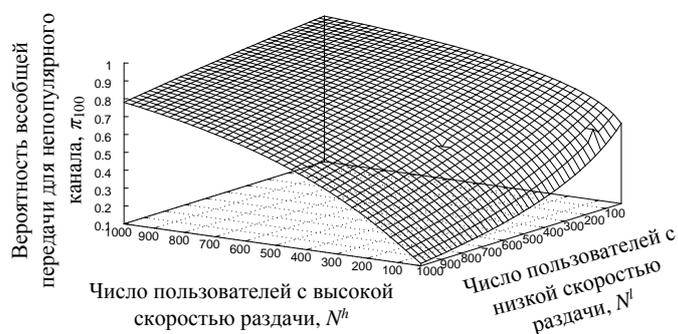


Рис.2. Вероятность состояния всеобщей передачи для 100-го канала

Из графика на рисунке 1 видно, что вероятность состояния всеобщей передачи для самого популярного 1-канала быстро достигает значения 1 даже при небольшом числе пользователей с высокой скоростью раздачи. И наоборот, на рисунке 2 для наименее популярного 100-канала вероятность состояния всеобщей передачи растет медленно и достигает значения 1 только при большом числе пользователей с высокой скоростью раздачи и небольшом числе пользователей с низкой скоростью раздачи. Для достижения состояния всеобщей передачи на каналах с низкой популярностью требуется присутствие в сети гораздо большего числа пользователей с высокой скоростью раздачи, чем для достижения состояния всеобщей передачи на популярных каналах.

В разделе 2.4 получена аппроксимация для упрощения расчета вероятности состояния всеобщей передачи канала R2PTV-сети для случая сети с бесконечным числом пользователей.

Утверждение 3. Вероятность  $\pi_m$  всеобщей передачи  $m$ -канала в R2PTV-сети с бесконечным числом пользователей с высокой и с низкой скоростью раздачи

аппроксимируется нормальным законом  $N\left(0, \frac{\gamma_m^h}{\gamma_m^l} + \varepsilon_m^2\right)$  т.е.  $\pi_m = \Phi\left(\frac{d_m}{\sqrt{K + \varepsilon_m^2}}\right)$ ,

где  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy$  - стандартное нормальное распределение и

$$d_m = \frac{(K - \varepsilon_m)\gamma_m^l + \delta_m}{\sqrt{\gamma_m^l}}, \quad K = \frac{\gamma_m^h}{\gamma_m^l}, \quad \delta_m = \frac{s_m}{u^h - R_m} \quad \text{и} \quad \varepsilon_m = \frac{R_m - u^l}{u^h - R_m}. \quad (3)$$

Для оценки относительной погрешности аппроксимации проведен численный анализ, результаты которого представлены на рисунке 3.

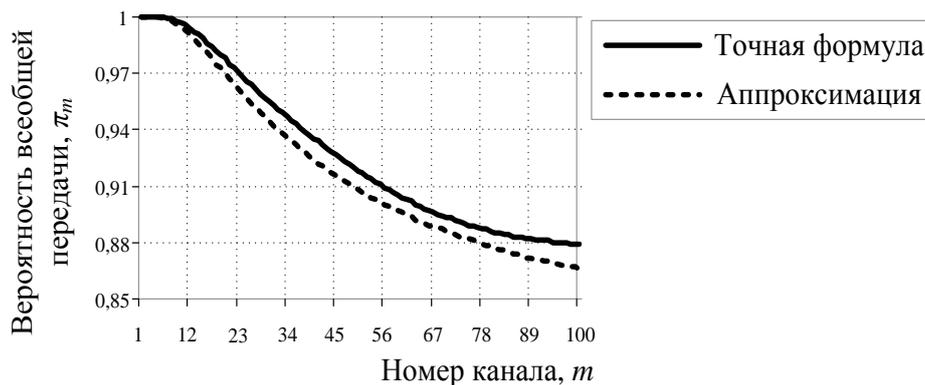


Рис. 3. Вероятность состояния всеобщей передачи для каналов R2PTV-сети

На рисунке 3 каналы пронумерованы в порядке убывания популярности, т.е. 1-канал является наиболее популярным, а 100-канал имеет самую низкую популярность. Можно заметить, что вероятность состояния всеобщей передачи  $\pi_m$  падает с уменьшением популярности канала. Сравнение значений показывает, что относительная погрешность приближения (3) для каналов с большой популярностью (каналы 1-7) равна нулю. Самая большая относительная погрешность приближения наблюдается для наименее популярного канала (канал 100), она составляет порядка  $10^{-2}$ . Следовательно, аппроксимацию (3) можно использовать для оценки значения вероятности  $\pi_m$  состояния всеобщей передачи R2PTV-сети, причем с ростом популярности канала точность оценки повышается.

Глава 3 посвящена разработке модели для анализа вероятности просмотра видео без перерывов воспроизведения в P2PTV-сети.

В *разделе 3.1* детально исследован процесс обмена данными между пользователями потоковой P2PTV-сети на основе механизма буферизации, который применяется для обеспечения непрерывного воспроизведения потокового видео. Видеопоток разбивается на порции данных, например, длиной около одной секунды, а в оконечном оборудовании пользователя предусмотрен буфер для хранения  $M$  порций видеоданных. Процесс воспроизведения видеопотока разбит на такты  $t_l, l > 0$ , длина каждого такта соответствует времени воспроизведения одной порции данных. При подключении нового пользователя к видеопотоку сначала заполняется буфер в оборудовании этого пользователя в соответствии с применяемой в сети стратегией выбора места буфера для загрузки (далее – стратегией загрузки), а затем порции видеоданных из буфера начинают поступать в видеоплеер. Наиболее распространенными стратегиями загрузки являются стратегия Rarest First (RF), при которой пользователь на каждом такте пытается загрузить наиболее «свежую», реже всего встречающуюся в сети порцию данных, и стратегия Greedy (Gr), при которой выбирается самая «старая», т.е. наиболее близкая к воспроизведению порция данных.

В *разделе 3.2* построена модель процесса заполнения буфера оборудования пользователя в виде цепи Маркова. Предполагается, что в сети с одним сервером (источник видеопотока) присутствуют  $N$  пользователей, просматривающих один и тот же видеопоток. Состояние каждого пользователя ( $n$ -пользователя) представлено парой  $\mathbf{z}(n) = (a(n), \mathbf{x}(n))$ , где  $a(n)$  - индикатор присутствия пользователя в сети, т.е.  $a(n) = 1$ , если пользователь находится в сети, и  $a(n) = 0$  в противном случае, и  $\mathbf{x}(n) = (x_0(n), x_1(n), \dots, x_M(n))$  - состояние буфера  $n$ -пользователя (рисунок 4).

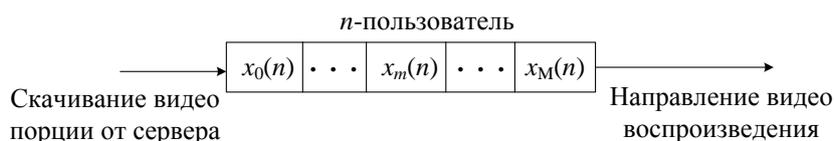


Рис. 4. Состояние буфера  $n$ -пользователя

При этом  $x_m(n)$  - состояние  $m$ -места буфера  $n$ -пользователя, т.е.  $x_m(n) = 1$ , если  $m$ -место буфера занято порцией данных и  $x_m(n) = 0$  в противном случае,

$m = \overline{0, M}$ . Места с первого ( $m=1$ ) до последнего ( $m=M$ ) предназначены для загрузки порций данных от других пользователей, а  $0$ -место ( $m=0$ ) - для загрузки порций данных от сервера. Таким образом, наиболее «старая» порция данных, которая будет отправлена на воспроизведение на ближайшем такте, находится на  $M$ -месте, а порция данных, находящаяся на  $m$ -месте, отправится на воспроизведение через  $M - m$  тактов. Если на каждом такте  $M$ -место буфера  $n$ -пользователя, присутствующего в сети, заполнено, то  $n$ -пользователь будет просматривать видео без пауз в воспроизведении.

Матрица  $\mathbf{X} = (\mathbf{x}(n))_{n=\overline{1, N}}$  описывает состояние буферов всех пользователей, и вектор-индикатор  $\mathbf{a} = (a(n))_{n=\overline{1, N}}$  определяет состояние всех пользователей в сети, следовательно, состояние модели можно представить в виде пары  $\mathbf{Z} = (\mathbf{z}(n)) = (\mathbf{a}, \mathbf{X}) = (a(n), \mathbf{x}(n))_{n=\overline{1, N}}$ , причем строка  $n$  матрицы  $\mathbf{X}$  соответствует состоянию буфера присутствующего в сети  $n$ -пользователя и  $\dim \mathbf{X} = N(M+1)$ . Таким образом, пространство состояний модели определяется формулой  $\mathcal{X} = \{0,1\}^N \times \{0,1\}^{N(M+1)}$  и  $|\mathcal{X}| = 2^{N(M+2)}$ .

Обозначим  $M^0(\mathbf{x}(n))$  и  $M^1(\mathbf{x}(n))$  множества номеров пустых и заполненных данными мест в буфере  $n$ -пользователя, т.е.  $M^0(\mathbf{x}(n)) = \{m: x_m(n) = 0, m = \overline{1, M}\}$ ,  $M^1(\mathbf{x}(n)) = \{m: x_m(n) = 1, m = \overline{1, M}\}$ , причем  $M^0(\mathbf{x}(n)) \cup M^1(\mathbf{x}(n)) = \{1, 2, \dots, M\}$ .

В момент  $t_l + 0$ , т.е. в начале такта, сервер равновероятно выбирает любого из присутствующих ( $a^l(n) = 1$ ) в сети пользователей и начинает загружать ему порцию данных на  $0$ -место его буфера. Если выбран  $i$ -пользователь, то  $x_0(i) = 1$  в момент  $t_{l+1} - 0$ . Каждый из присутствующих ( $a^l(n) = 1, n \neq i$ ) в сети пользователей, который не выбран сервером для загрузки, выполняет следующие действия. Если в буфере есть пустые места, т.е.  $M^0(\mathbf{x}(n)) \neq \emptyset$ , то  $n$ -пользователь выбирает случайным образом из присутствующих в сети пользователей  $h$ -пользователя,  $h \neq n, a^l(h) = 1$ . Пусть  $M^1(\mathbf{x}(h))$  - множество заполненных данными мест в буфере  $h$ -пользователя. Тогда  $M^0(\mathbf{x}(n)) \cap M^1(\mathbf{x}(h))$  - множество номеров мест в буфере  $n$ -пользователя, на которые возможна загрузка порций данных от  $h$ -пользователя,  $n \neq h$ . Если  $M^0(\mathbf{x}(n)) \cap M^1(\mathbf{x}(h)) \neq \emptyset$ , то  $n$ -пользователь выбирает в соответствии со стратегией загрузки  $\delta \in \{\text{RF}, \text{Gr}\}$

место  $m_\delta(\mathbf{x}(n), \mathbf{x}(h))$  в своем буфере, на которое он будет загружать порцию данных от  $h$ -пользователя, т.е.

$$m_\delta(\mathbf{x}(n), \mathbf{x}(h)) = \begin{cases} \min\{m: m \in M^0(\mathbf{x}(n)) \cap M^1(\mathbf{x}(h))\}, & \text{при стратегии RF,} \\ \max\{m: m \in M^0(\mathbf{x}(n)) \cap M^1(\mathbf{x}(h))\}, & \text{при стратегии Gr.} \end{cases}$$

Загрузки для  $n$ -пользователя не будет на данном такте, если  $M^0(\mathbf{x}(n)) \cap M^1(\mathbf{x}(h)) = \emptyset$ , или в буфере  $n$ -пользователя нет пустых мест ( $M^0(\mathbf{x}(n)) = \emptyset$ ). В конце такта  $l$  в момент  $t_{l+1}$  для всех пользователей происходит сдвиг буфера: порция данных, находившаяся в буфере пользователя на  $M$ -месте, отправляется на воспроизведение; все остальные порции данных в буфере сдвигаются на одну позицию вправо к концу буфера;  $0$ -место в буфере пользователя освобождается для принятия порции данных от сервера на следующем такте.

Обозначим  $\alpha(n)$  вероятность появления пользователя в сети и  $\beta(n)$  вероятность ухода пользователя из сети. Для простоты предположим, что для всех пользователей вероятности появления в сети одинаковы и вероятности ухода из сети одинаковы, т.е.  $\alpha(n) = \alpha$ ,  $\beta(n) = \beta$ ,  $n = \overline{1, N}$ .

Обозначим  $\mathbf{Z}^l = (\mathbf{a}^l, \mathbf{X}^l)$  состояние сети в момент  $t_l - 0$ . Нетрудно убедиться, что последовательность  $\{\mathbf{Z}^l\} := \{\mathbf{Z}^l, l \geq 0\}$  образует цепь Маркова над пространством состояний  $\mathcal{X} = \{0,1\}^N \times \{0,1\}^{N(M+1)}$ , разложимую, с одним классом  $\mathcal{X}$  существенных состояний,  $\mathcal{X} \subset \mathcal{X}$ . Введем обозначения:  $\pi^l(\mathbf{Z})$  - абсолютная вероятность ЦМ  $\{\mathbf{Z}^l\}_{l \geq 0}$  на шаге  $l$ , т.е.  $\pi^l(\mathbf{Z}) = P\{\mathbf{Z}^l = \mathbf{Z}\}$  и  $\Pi^{l,l+1}(\mathbf{Z}, \mathbf{Y})$  - переходная вероятность ЦМ на шаге  $l$ . Заметим, что переходные вероятности  $\Pi^{l,l+1}(\mathbf{Z}, \mathbf{Y})$  зависят от номера места в буфере  $m_\delta(\mathbf{x}(n), \mathbf{x}(h))$  и от вероятностей  $\alpha$  появления и  $\beta$  ухода пользователя из сети. Таким образом, переходные вероятности зависят от стратегии загрузки  $\delta$ , а абсолютные вероятности  $\pi^l(\mathbf{Z})$  удовлетворяют системе уравнений  $\pi^{l+1}(\mathbf{Y}) = \sum_{\mathbf{Z} \in \mathcal{X}} \pi^l(\mathbf{Z}) \Pi^{l,l+1}(\mathbf{Z}, \mathbf{Y})$ ,  $\mathbf{Y} \in \mathcal{X}, l \geq 0$ .

Основной характеристикой рассматриваемой модели является вероятность  $V(n)$  того, что  $n$ -пользователь в конце такта на  $M$ -месте буфера имеет порцию данных для воспроизведения видеопотока. Для нахождения этой вероятности введена функция  $h_n^m(\mathbf{Z})$ , соответствующая числу пользователей, у которых на

$m$ -месте есть порция данных для загрузки  $n$ -пользователю согласно стратегии загрузки  $\delta$ , когда сеть находится в состоянии  $\mathbf{Z}$ :

$$h_n^m(\mathbf{Z}) = \sum_{h=1, \overline{N}: h \neq n, a'(h)=1} \delta_{m\delta(\mathbf{x}(n), \mathbf{x}(h)), m}, \quad \mathbf{Z} \in \mathcal{X}, \text{ где } \delta_{j,i} = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i. \end{cases}$$

Определена вероятность  $Q_n^l(m)$  того, что на такте  $l$  у одного или нескольких находящихся в сети пользователей имеется порция данных для загрузки  $n$ -пользователю на  $m$ -место в его буфере в соответствии со стратегией загрузки. Обозначим  $N(\mathbf{a}^l) = \sum_{j=1, \overline{N}} a^l(j)$  число присутствующих в сети пользователей, когда сеть находится в состоянии  $\mathbf{Z}^l = (\mathbf{a}^l, \mathbf{X}^l)$ . Если число пользователей  $N(\mathbf{a}^l) \geq 2$ , тогда

$$Q_n^l(m) = \sum_{\mathbf{Z} \in \mathcal{X}} \pi^l(\mathbf{Z}) \cdot \frac{h_n^m(\mathbf{Z})}{N(\mathbf{a}^l) - 1}, \quad Q_n^l(0) = 0, \quad m = \overline{1, M}. \quad (4)$$

Обозначим  $p_0^l(n, m)$  и  $p_1^l(n, m)$  вероятность того, что на такте  $l$   $m$ -место буфера  $n$ -пользователя пусто и заполнено соответственно.

Предположим, что существует финальное распределение ЦМ  $\{\mathbf{Z}^l\}$ . Обозначим  $p_1(n, m) = \lim_{l \rightarrow \infty} p_1^l(n, m)$  и  $p_0(n, m) = \lim_{l \rightarrow \infty} p_0^l(n, m)$ . Тогда вероятность занятости  $m$ -места буфера  $n$ -пользователя  $p_1(n, m)$  определяется по следующему рекуррентному соотношению.

Утверждение 4.

$$p_1(n, 0) = \frac{1}{N}, \quad p_1(n, m+1) = p_1(n, m) \cdot (1 - \beta) + p_0(n, m) \cdot (1 - \beta) \cdot Q_n(m) + \alpha \cdot Q_n(m), \\ m = \overline{0, M-1}. \quad (6)$$

Заметим, что рекуррентное соотношение (6) дает метод для расчета вероятности  $p_1(n, M)$  того, что  $M$ -место буфера  $n$ -пользователя заполнено. Отсюда вероятность  $V(n)$  просмотра  $n$ -пользователем видео без перерывов воспроизведения имеет вид

$$V(n) = p_1(n, M). \quad (7)$$

В разделе 3.3 проведен анализ нескольких стратегий загрузки и их сравнение с точки зрения двух показателей эффективности функционирования потоковых сетей – вероятности  $V$  просмотра видео без перерывов воспроизведения и задержки  $\tau$  начала воспроизведения. В построенной модели

задержка начала воспроизведения представляет собой интервал времени с момента появления пользователя в сети, через который на  $M$ -месте буфера пользователя появится порция видеоданных, т.е. число тактов, через которые пользователь начнет просматривать видеопоток. Анализ стратегий выполнен с помощью разработанной имитационной модели для следующих исходных данных, близких к реальным: в сети находятся  $N=1000$  пользователей, каждый из которых имеет буфер с  $M=40$  местами для хранения порций данных. На первом этапе анализ проведен для случая, когда все пользователи постоянно находятся в сети и не покидают ее ( $\alpha=0$  и  $\beta=0$ ). Результаты анализа показали, что при использовании стратегии RF вероятность просмотра видео без перерывов воспроизведения выше, чем при использовании стратегии Gr, т.е.  $V^{RF} > V^{Gr}$ , что показано на графиках рисунка 5 в точке  $m=39$ .

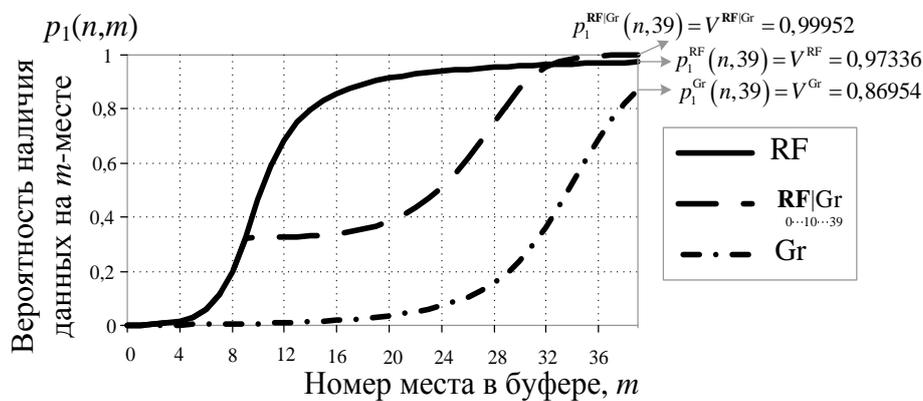


Рис. 5. Вероятность  $p_1(n, m)$  наличия данных на  $m$ -месте в буфере ( $\alpha = 0$  и  $\beta = 0$ )

На втором этапе анализ проведен для случая, когда пользователи могут появляться в сети с вероятностью  $\alpha > 0$  и покидать ее с вероятностью  $\beta > 0$ . Результаты анализа показали, что с точки зрения просмотра видео без перерывов воспроизведения не всегда стратегия RF работает лучше стратегии Gr. При больших значениях вероятности  $\beta$  ухода пользователей из сети, т.е. когда пользователи в большом количестве покидают сеть или переключаются на другой телеканал, например, во время рекламы, вероятность просмотра видео без перерывов воспроизведения выше при использовании стратегии Gr, чем при использовании стратегии RF, т.е.  $V^{Gr} > V^{RF}$ , а при небольших значениях вероятности  $\beta$  ухода пользователей из сети вероятность просмотра видео без перерывов воспроизведения выше при использовании стратегии RF, чем при использовании стратегии Gr, т.е.  $V^{RF} > V^{Gr}$ .

Кроме того, результаты второго этапа анализа показали, что  $\tau^{\text{RF}} > \tau^{\text{Gr}}$  при любых значениях  $\alpha$  и  $\beta$ , т.е. задержка начала воспроизведения при использовании стратегии Gr меньше, чем при использовании стратегии RF, например, при  $\alpha = 0,5$  и  $\beta = 0,1$  имеем  $\tau^{\text{RF}} = 27$  тактов и  $\tau^{\text{Gr}} = 2$  такта. Это объясняется тем, что при стратегии Gr приоритет при загрузке отдается последним местам буфера, а при стратегии RF - первым местам буфера.

Для максимизации вероятности просмотра видео без перерывов воспроизведения и минимизации задержки начала воспроизведения в разделе 3.3 работы исследованы смешанные стратегии загрузки, представляющие собой различные комбинации стратегий RF и Gr. В результате анализа предложена смешанная стратегия, при использовании которой для любых значений  $\alpha$  и  $\beta$  вероятность просмотра видео без перерывов воспроизведения высока при небольшом времени ожидания начала просмотра.

В заключении сформулированы основные результаты, полученные в диссертации.

## **ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ**

1. Построена модель поведения пользователя услуги вещательного телевидения в виде замкнутой однородной сети массового обслуживания с одной заявкой. На ее основе разработана общая модель потоковой одноранговой сети с несколькими пользователями, в которой число узлов соответствует числу телевизионных каналов, а число заявок – числу пользователей сети. Показано, что блуждание заявки по узлам сети соответствует переключению пользователем каналов с учетом их популярности.

2. Определен основной показатель эффективности функционирования модели потоковой одноранговой сети – вероятность состояния всеобщей передачи, т.е. вероятность того, что все пользователи загружают видеопоток на скорости не ниже требуемой для его воспроизведения. Для модели сети с двумя типами пользователей – с высокой и с низкой скоростями раздачи видеопотока – получена аналитическая формула для расчета вероятности состояния всеобщей передачи, а также ее аппроксимация нормальным законом для случая бесконечного числа пользователей.

3. В виде цепи Маркова разработана модель процесса заполнения буфера оборудования пользователя при воспроизведении видеопотока в одноранговой

сети с учетом вероятностей появления пользователя в сети и его ухода из сети. В модели номер места в буфере для загрузки порции данных определяется в соответствии с заданной стратегией загрузки.

4. Для модели воспроизведения видеопотока в одноранговой сети получены формулы для расчета числа пользователей, у которых на заданном месте в буфере имеется порция данных; вероятности того, что в сети имеется порция данных для загрузки на заданное место в буфер пользователя; вероятности просмотра видео без перерывов воспроизведения. Разработана имитационная модель и проведен численный эксперимент с целью анализа эффективности стратегий загрузки порций данных.

Основные результаты диссертации отражены в следующих опубликованных работах:

1. Адаму А., Гайдамака Ю.В., Самуйлов А.К. Построение и анализ модели воспроизведения каналов вещательного телевидения в P2P сети // «Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». – М.: Изд-во РУДН. – 2010. – №3(1). С. 47-53.
2. Адаму А., Гайдамака Ю.В., Самуйлов А.К. К анализу состояния буфера пользователя одноранговой сети с потоковым трафиком // Т-Comm - Телекоммуникации и Транспорт. №7, 2011. С. 8-12.
3. Адаму А., Гайдамака Ю.В. Аппроксимация нормальным законом вероятностных характеристик модели сети P2P // «Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». – М.: Изд-во РУДН. – 2011. – №3. С. 63-68.
4. Адаму А., Гайдамака Ю.В. Анализ вероятности непрерывного воспроизведения видеопотока в P2P-сети // «Вестник РУДН. Серия «Математика. Физика». – М.: Изд-во РУДН. – 2011. – №4. С. 38-46.
5. Adamu A., Gaidamaka Yu., Samuylov A. Analytical Modeling of P2PTV Network // Proc. of the 2d International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems (IEEE ICUMT 2010), Oct. 18-20, 2010. - Moscow, Russia. – P. 1115-1120.
6. Adamu A., Gaidamaka Yu., Samuylov A. Discreet Markov Chain Model for the Analysis of P2P Streaming Network Probability Measures // Proc. of the IEEE 11th International Conference on Next Generation Wired/Wireless Networking NEW2AN 2011, St. Petersburg, Russia, August 23-25, 2011. - St. Petersburg, Russia. – 2011. P. 428-439.

## **Адаму Амину (Нигерия)**

### **ПОСТРОЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МОДЕЛЕЙ И АНАЛИЗ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ПОТОКОВЫХ ОДНОРАНГОВЫХ СЕТЕЙ**

В виде замкнутой однородной сети массового обслуживания (СМО) с одной заявкой построена модель поведения пользователя услуги цифрового вещательного телевидения, на основе которой разработана общая модель потоковой одноранговой сети с несколькими пользователями.

Для модели сети с двумя типами пользователей – с высокой и с низкой скоростями раздачи видео потока – получена аналитическая формула для вероятности состояния всеобщей передачи, а также ее аппроксимация нормальным законом для случая бесконечного числа пользователей.

В виде цепи Маркова разработана модель процесса заполнения буфера оборудования пользователя при воспроизведении видео потока в одноранговой сети с учетом вероятностей появления пользователя в сети и его ухода из сети. В модели номер места в буфере для загрузки порции данных определяется в соответствии с заданной стратегией выбора. Получена формула для вероятности просмотра видео без перерывов воспроизведения.

## **Adamu Aminu (Nigeria)**

### **PROBABILISTIC MODELS CONSTRUCTION AND ANALYSIS OF PERFORMANCE EFFICIENCY MEASURES OF P2P STREAMING NETWORKS**

In the form of homogeneous closed queuing network with one call (request), a model of user behavior for a broadcast digital television service was developed, based on which a general model of P2P streaming network with finite number of users was developed.

For the network model with high and low uploading users, an analytical formula for the probability of universal streaming was obtained, and an approximation formula for the probability of universal streaming for the case of network with infinite users was obtained using the normal law.

A Markov chain model of buffer filling process by a user while playing a video stream in P2P network was developed, taking into account the probability of user appearance into the network and the probability of his departure out of the network. In the model, a user downloads a video chunk in accordance with the chunk selection strategy. The formula for the probability of playback continuity was obtained.

Подписано в печать : \_\_.01.2012

Заказ № 5963

Тираж: 100 экз.

Копицентр «ЧЕРТЕЖ.ру»

ИНН 7701723201

107023, Москва, ул.Б.Семеновская 11, стр.12

(495) 542-7389

[www.chertez.ru](http://www.chertez.ru)