на правах рукописи

Фуфаев Владимир Владимирович

Метод фазовых интегралов в одной задаче асимптотической теории возмущений

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва - 2017

Работа выполнена на кафедре математического анализа
механико-математического факультета ФГБОУ ВО
«Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова».

Научный руководитель	доктор физико-математических наук, профессор **Степин Станислав Анатольевич**, профессор МГУ имени М. В. Ломоносова
Официальные оппоненты	доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН **Назайкинский Владимир Евгеньевич**, ведущий научный сотрудник ИПМех РАН
	кандидат физико-математических наук **Титов Василий Александрович** заместитель генерального директора по прикладным исследованиям, испытаниям и экспериментальной базе ФГУП ЦНИИМАШ
Ведущая организация	**Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук (ИППИ РАН)**

Защита состоится “10” октября 2017 г. в 15 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.203.27 в Российском университете дружбы народов по адресу: 115419, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, ауд. 495 а.

С диссертацией можно ознакомиться в Учебно-научном информационном библиотечном центре (Научной библиотеке Российского университета дружбы народов) по адресу: 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6 и на сайте “Диссертационные советы РУДН” в сети интернет (http://dissovet.rudn.ru).

Автореферат разослан “____” ____________ 2017 г.

Ученый серетарь
диссертационного совета Д 212.203.27,
доктор физико-математических наук Савин Антон Юрьевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Асимптотическая (сингулярная) теория возмущений линейных операторов находит применение в различных вопросах функционального анализа и характеризуется использованием топологии резольвентной сходимости по параметру возмущения [1], [2]. Одной из важных проблем здесь является изучение спектральных асимптотик краевых задач для дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной. В случае обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка для построения приближений Лиувилля-Грина решений и квазиклассической локализации спектра широко используется метод фазовых интегралов или метод ВКБ (см., например, [3], [4]). Настоящая диссертация посвящена развитию метода фазовых интегралов применительно к модельной несамосопряженной краевой задаче Штурма-Лиувилля. Вопросам, связанным с асимптотическими спектральными характеристиками краевых задач, посвящено значительное количество работ (см., например, [5] – [7]), которые наряду с теоретическим имеют и прикладное значение ([8], [9]).

Ключевым объектом используемого в диссертации аналитического подхода является фазовый интеграл, входящий в асимптотические формулы ВКБ. Для возникающих в задачах квантовой механики обыкновенных дифференциальных уравнений Дж. Биркгоф (см. [10]) разработал метод построения решений, допускающих приближения Лиувилля-Грина на канонических путях – кривых, на которых вещественная часть фазового интеграла изменяется монотонно,

---

[1] Маслов В.П. О предельном поведении некоторых квантово-механических величин // ДАН СССР, 1954. – Т.94, №4. – С.623-626.

[2] Newburgh J. D. The variation of spectra // Duke Math. J., 1951. – V.18, N1. – P. 165-176.

[3] Хединг Дж. Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ) – М.: Мир, 1965. 237 с.

[4] Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений – М.: Наука, 1983. 352 с.

[5] Дородницын А. А. Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка // УМН, 1952. – Т.7, В. 6. – С. 3-96.

[6] Днестровский Ю. Н., Костомаров Д. П. Об асимптотике собственных значений для несамосопряженных краевых задач // ЖВМ и МФ, 1964. – Т.4, В. 2. – С. 267-277.

[7] Федорюк М.В. Асимптотика собственных значений и собственных функций оператора Штурма-Лиувилля с комплекснозначным потенциалом-полиномом // Дифференц. уравнения, 1972. – Т.8, №5. – С. 811-816.

[8] Дикий Л. А. Гидродинамическая устойчивость и динамика атмосферы – Л: Гидрометеоиздат, 1976. 108 с.

[9] Fröman N., Fröman P. O. Physical Problems Solved by the Phase-Integral Method – Cambridge: Cambridge University press, 2002. 230 p.

[10] Birkhoff G. D. Quantum mechanics and asymptotic series // Bull. Amer. Math. Soc., 1933. – V. 39, N10. – P. 681-700.

а рассматриваемое уравнение эквивалентно интегральному уравнению вольтерровского типа с ограниченным ядром.

Особое значение в этом контексте имеют точки поворота дифференциального уравнения второго порядка, в которых матрица соответствующей системы первого порядка имеет кратное собственное значение. Известно, что в различных частях окрестности точки поворота одно и то же решение рассматриваемого уравнения может иметь различные асимптотические представления (явление Стокса). Основная аналитическая трудность, таким образом, состоит в построении формул связи между асимптотическими представлениями решений в различных областях изменения аргумента. Границы этих областей оказываются связанными с траекториями определяемого фазовым интегралом квадратичного дифференциала (линиями Стокса). Использование фундаментальных свойств траекторий квадратичных дифференциалов (см. [11]) позволяет в рамках подхода Биркгофа преодолеть трудности, обусловленные явлением Стокса, и установить формулы связи для решений с ВКБ-представлениями.

Для краевых задач на собственные значения исследование асимптотической локализации точек спектра сводится к изучению нулей соответствующего характеристического определителя (см., например, [12]). Формулы связи, установленные в рамках развиваемого в диссертации подхода, позволяют построить приближения характеристического определителя с равномерными по спектральному параметру оценками остатков, и получать информацию о распределении его нулей.

Известно, что для самосопряженных сингулярно возмущенных операторов имеет место нижняя полунепрерывность спектра (см. [13]). В несамосопряженном случае это свойство предельного (в смысле резольвентной сходимости) оператора, как правило, нарушается. Изучаемая в настоящей диссертации задача Штурма-Лиувилля может рассматриваться как модель перехода от дискретного спектра к непрерывному в несамосопряженном случае. При этом особенности и закономерности асимптотического распределения собственных значений определяются геометрией римановой поверхности (рассматриваемой как область наложения) многозначной функции, обратной к потенциалу.

---

[11] Strebel K. Quadratic Differentials– Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1984. 194 p.
[12] Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы – М: Наука, 1969. 528 с.
[13] Като Т. Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. 740 с.

Цель работы

Развитие метода квазиклассической локализации собственных значений несамосопряженной задачи Штурма-Лиувилля, с использованием разработанной техники аппроксимации характеристического определителя. Изучение асимптотического расположения спектра задачи Штурма-Лиувилля для уравнения с модельными полиномиальными потенциалами и малым чисто мнимым параметром при второй производной. Исследование геометрических свойств предельного спектрального множества.

Научная новизна

Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром при второй производной и полиномиальным потенциалом $Q(z)$ разработан метод локализации спектра краевой задачи Штурма-Лиувилля на основе формул связи решений с ВКБ-асимптотиками и равномерными по спектральному параметру оценками остатков соответствующих приближений.

2. В случае монотонного на $[-1, 1]$ потенциала $Q(z) = z^3 + z$ в правой полуплоскости найдена область, асимптотически свободная от точек спектра рассматриваемой задачи. Локализована кривая, которая служит предельным спектральным множеством, и для соответствующих собственных значений получены правила квантования типа Бора-Зоммерфельда-Маслова.

3. В случае потенциала $Q(z) = z^3 - z$ в правой полуплоскости выделена монотонная ветвь предельного спектрального комплекса, концевой вершиной которой является точка ветвления функции $Q^{-1}(\lambda)$. Для собственных значений, концентрирующихся вблизи найденной кривой, получены локализационные формулы типа правил квантования с квалифицированной оценкой погрешности.

Методы исследования

В работе использованы асимптотические методы, аппарат комплексного анализа и техника аналитической теории дифференциальных уравнений.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в спектральной теории операторов, при изучении краевых задач в теории дифференциальных уравнений и гидродинамике.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих научных семинарах:

- Научный семинар “Дифференциальная геометрия и приложения” механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова под руководством профессора А. Т. Фоменко;
- Научный семинар “Тригонометрические и ортогональные ряды” механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова под руководством профессора М. К. Потапова, профессора В. А. Скворцова, профессора Т. П. Лукашенко и профессора М. И. Дьяченко;
- Научный семинар лаборатории механики природных катастроф института проблем механики им. А. Ю. Ишлинского “Асимптотические методы в математической физике” под руководством профессора С. Ю. Доброхотова;
- Научный семинар математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук “Комплексные задачи математической физики” под руководством профессора А. Г. Сергеева и доцента А. В. Домрина;
- Научный семинар“Задачи дифференциальных уравнений, анализа и управления:теория и приложения”механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова под руководством профессора А. В. Фурсикова, профессора В. М. Тихомирова, профессора М. И. Зеликина и профессора В. Ю. Протасова;
- Научный семинар “Актуальные проблемы геометрии и механики” механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова под руководством профессора Д. В. Георгиевского и профессора М. В. Шамолина;
- Научный семинар “Теория рассеяния” механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова под руководством профессора Р. А. Минлоса;
- Научный семинар “Динамические системы и дифференциальные уравнения” механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова под руководством профессора А. А. Давыдова и профессора А. М. Степина;
- Научный семинар Добрушинской лаборатории ИППИ РАН под руководством профессора Р. А. Минлоса и старшего научного сотрудника М. Л. Бланка.

Содержащиеся в диссертации результаты докладывались на следующих конференциях:

- Международная конференция по функциональным пространствам и теории приближения функций, посвященная 110-летию со дня рождения академика С. М. Никольского (Москва, 2015);
- Международная конференция по математической теории управления и механике (Суздаль, 2015);
- Международная конференция 5th International Workshop on Pseudo-Hermitian Hamiltonians in Quantum Physics (Palermo, 2015);
- Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2016);
- Международная конференция "Системы Аносова и современная динамика", посвященная 80-летию со дня рождения Дмитрия Викторовича Аносова (Москва, 2016).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в семи работах, три из них опубликованы в изданиях, включенных в перечень ВАК. Их список приведен в конце автореферата.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Диссертация содержит 8 иллюстраций. Объем диссертации составляет 100 страниц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** сделан обзор публикаций, связанных с темой исследования, приводятся постановки задач и формулируются основные полученные результаты. Предметом исследования является модельная задача Штурма-Лиувилля

$$i\varepsilon\, y''(z) \;+\; Q(z,\lambda)\, y(z) \;=\; 0\,, \qquad (1)$$

$$y(A) \;=\; y(B) \;=\; 0\,, \qquad (2)$$

где $\varepsilon > 0$ – малый, а λ – спектральный параметры. Рассматривается случай линейной зависимости $Q(z,\lambda) = Q(z) - \lambda$ от спектрального параметра, функция $Q(z)$ предполагается аналитической и вещественнозначной на отрезке $[A, B]$, при этом спектр задачи расположен в полуполосе

$$\Pi := \{\operatorname{Re}\lambda \in Q([A,B]),\ \operatorname{Im}\lambda < 0\}.$$

В **первой главе** изложена общая схема метода локализации собственных значений задачи (1)-(2). **§1.1** содержит конструкцию ВКБ-приближений применительно к уравнению (1). Кусочно-гладкий путь

$\gamma = \gamma(\lambda) \subset \mathbb{C}_z$ называется каноническим для ветви $S(z_0, z;\ \lambda)$ многозначной функции

$$e^{i\pi/4} \int_{z_0}^{z} \sqrt{Q(\zeta, \lambda)}\, d\zeta\,, \tag{3}$$

играющей роль фазового интеграла, если величина $\operatorname{Re} S(z_0, z;\ \lambda)$ изменяется монотонно вдоль γ. Если при каждом λ из ограниченной области Ω для $S(z_0, z;\ \lambda)$ существует канонический путь $\gamma = \gamma(\lambda)$, удовлетворяющий условию

$$\rho(\Omega) \ := \ \sup_{\lambda \in \Omega} \int_\gamma \left(\frac{|Q''(z, \lambda)|}{|Q(z, \lambda)|^{3/2}} \ + \ \frac{|Q'(z, \lambda)|^2}{|Q(z, \lambda)|^{5/2}} \right) |\, dz| \ < \ \infty\,,$$

то (см. [7]) при достаточно малых $\varepsilon > 0$ и всех $\lambda \in \Omega$ у уравнения (1) существуют решения $Y_\pm(z, \lambda)$, имеющие на γ вид

$$Y_\pm(z, \lambda) \ = \ Q(z, \lambda)^{-1/4} \exp\big(\pm \varepsilon^{-1/2} S(z_0, z;\ \lambda)\big) \Big(1 + r_\pm(z, \lambda) \Big)\,, \tag{4}$$

$$Y'_\pm(z, \lambda) = \pm Q(z, \lambda)^{1/4} \exp\big(\pm \varepsilon^{-1/2} S(z_0, z;\ \lambda)\big) \Big(e^{i\pi/4} \varepsilon^{-1/2} + \widehat{r}_\pm(z, \lambda) \Big), \tag{5}$$

где $|\, r_\pm(z, \lambda)| \ \leqslant \ 2 \big(\exp(2\varepsilon^{1/2} \rho(\Omega)) - 1 \big)$ и, кроме того,

$$\left| \widehat{r}_\pm(z, \lambda) \pm \frac{Q'(z, \lambda)}{4Q^{3/2}(z, \lambda)} (1 + r_\pm(z, \lambda)) \right| \ \leqslant \ 2 \big(\exp(2\varepsilon^{1/2} \rho(\Omega)) - 1 \big).$$

При построении канонического пути $\gamma = \gamma(\lambda)$ будут выполняться условия равномерной отделенности γ от нулей функции $Q(z, \lambda)$ и ограниченности длин $|\gamma(\lambda)|$, что обеспечивает равномерные по λ асимптотические оценки $r_\pm(z, \lambda) = O(\varepsilon^{1/2})$ и $\widehat{r}_\pm(z, \lambda) = O(1)$, когда $\varepsilon \downarrow 0$.

В **§1.2** и **§1.3** выводятся формулы связи для фундаментальных систем решений (ФСР), имеющих ВКБ-приближения в различных частях окрестности простого нуля функции $Q(z, \lambda)$. Пусть при $\lambda \in \Omega$ существуют такие канонические пути $\gamma, \widehat{\gamma}$ и $\widetilde{\gamma}$, образующие простой замкнутый положительно ориентированный контур, что каждый из них удовлетворяет условию $\rho(\Omega) < \infty$, область ими ограниченная содержит единственный (однократный) нуль $z = \alpha(\lambda)$ функции $Q(z, \lambda)$, причем $\operatorname{Re} S(z_0, \alpha(\lambda); \lambda) > 0$, где $z_0 \in \gamma \cap \widehat{\gamma}$.

Тогда при достаточно малых $\varepsilon > 0$ для $\lambda \in \Omega$ уравнение (1) имеет две ФСР $Y_\pm(z, \lambda)$ и $\widehat{Y}_\pm(z, \lambda)$ с асимптотиками (4)-(5) на γ и $\widehat{\gamma}$ соответственно и при $z \in \gamma \cup \widehat{\gamma}$ справедливы формулы связи (ср.

[14])
$$\widehat{Y}_+(z,\lambda) = Y_+(z,\lambda)\bigl(1+\Theta_1(\lambda)\bigr) + Y_-(z,\lambda)\Theta_2(\lambda)\,,$$
$$\widehat{Y}_-(z,\lambda) = -iY_+(z,\lambda)\exp\bigl(2\varepsilon^{-1/2}S(\alpha(\lambda),z_0;\lambda)\bigr)\bigl(1+\Theta_3(\lambda)\bigr) + \\ +Y_-(z,\lambda)\bigl(1+\Theta_4(\lambda)\bigr)\,,$$
где $|\,\Theta_j(\lambda)| \leqslant C(\Omega)\varepsilon^{1/2}$.

Общая схема применения описанной выше конструкции в ходе локализации спектра задачи (1)-(2) состоит в следующем. При $\lambda \in \Omega$ для фазового интеграла (3) строится соединяющая точки A и B цепочка замкнутых и состоящих из канонических путей контуров, каждый из которых содержит внутри в точности одну из точек поворота уравнения (1), и такая, что два соседних контура включают в себя общий канонический путь. Применительно к каждому из контуров строятся ФСР с асимптотиками (4)-(5) на соответствующих канонических путях и с необходимой точностью вычисляются матрицы Стокса перехода от одной ФСР к другой. Перемножение найденных матриц Стокса соответствует продолжению решений $Y_\pm(z,\lambda)$ уравнения (1) вдоль построенной цепочки, что позволяет получить для них асимптотические формулы, одновременно пригодные в точках A и B. Подстановка полученных таким образом формул в соответствующий условиям (2) характеристический определитель $\Delta(\lambda)$, нулями которого являются искомые собственные значения, дает его эффективное асимптотическое (для малых $\varepsilon > 0$) представление. При надлежащем выборе Ω это представление удается редуцировать к виду
$$\exp\bigl\{-\varepsilon^{-1/2}\varphi(\lambda)+ic\bigr\}\bigl(1+\widetilde{\Phi}_1(\lambda)\bigr) + \exp\bigl\{\varepsilon^{-1/2}\varphi(\lambda)-ic\bigr\}\bigl(1+\widetilde{\Phi}_2(\lambda)\bigr)\,, \quad (6)$$
где $c \in \mathbb{R}$. Здесь функция $\varphi(\lambda)$ аналитична в определенной области $D \subset \mathbb{C}_\lambda$, причем $\partial \mathrm{Re}\,\varphi(a+ib)/\partial b > 0$ и $\mathrm{Re}\,\varphi(\lambda) = 0$ на некоторой кривой Γ, являющейся графиком функции $b = f(a)$. При этом для λ, принадлежащих однопараметрическому семейству множеств
$$\Omega(\delta) := \bigl\{a+ib\colon\, g_1(\delta) < a < g_2(\delta),\, |\,b - f(a)| < g_3(\delta)\bigr\} \subset D\,, \delta > 0,$$
где $g_1(\delta)$ и $g_3(\delta)$ возрастают, а $g_2(\delta)$ убывает по параметру δ, выполнены оценки $|\widetilde{\Phi}_j(\lambda)| \leqslant C(\delta)\varepsilon^{1/2}$. В **§1.4** установлено существование $\widetilde{C}(\delta) > 0$ такого, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ нули $\Delta(\lambda)$ в $\Omega(\delta)$ однократны и расположены в $\widetilde{C}(\delta)\varepsilon$-окрестностях точек $\lambda_n \in \Gamma$, заданных условием
$$\varphi(\lambda_n) = i\varepsilon^{1/2}(\pi n - \pi/2 + c),\; n \in \mathbb{Z}.$$

[14] Степин С.А., Аржанов А.А. Квазиклассические спектральные асимптотики и явление Стокса для уравнения Вебера // ДАН, 2001. – Т.378, №1. – С.18-21.

Глава 2 посвящена изучению задачи (1)-(2) в случае модельного монотонного на $[-1,1]$ потенциала $Q(z) = z^3 + z$. Ввиду нечетности потенциала достаточно исследовать предельное расположение спектра в правой полуплоскости $\mathbb{C}_+$ и вблизи мнимой оси. В **§2.1** устанавливаются необходимые в дальнейшем свойства многозначной функции $\alpha(\lambda) = Q^{-1}(\lambda)$. Риманова поверхность $\alpha(\lambda)$, рассматриваемая как область наложения, состоит из трех листов с двумя точками ветвления $\pm 2i/3\sqrt{3}$. Ветвь $\alpha_1^+(\lambda)$ функции $Q^{-1}(\lambda)$ однолистно отображает плоскость $\mathbb{C}_\lambda$ с разрезом $2i/3\sqrt{3} + i\mathbb{R}_+$ на область $\sqrt{3}\,\mathrm{Im}\, z > \sqrt{(\mathrm{Re}\, z)^2 + 1}$, а ветви $\alpha_0^+(\lambda)$ и $\alpha_{-1}^+(\lambda)$ однолистно отображают плоскость $\mathbb{C}_\lambda$ с разрезом $-2i/3\sqrt{3} + i\mathbb{R}_+$ на части области $\sqrt{3}\,\mathrm{Im}\, z < \sqrt{(\mathrm{Re}\, z)^2 + 1}$, отвечающие условиям $\mathrm{Re}\, z > 0$ и $\mathrm{Re}\, z < 0$.

Для $\lambda \in \Pi \setminus [0, -2i/3\sqrt{3}]$, строится набор канонических путей $\widetilde{\gamma}_1$, $\widehat{\gamma}_1$, $\gamma_1 = \widehat{\gamma}_2$, γ_2 и $\widetilde{\gamma}_2$, образующих два замкнутых контура, ограничивающих области, содержащие $\alpha_{-1}^+(\lambda)$ и $\alpha_0^+(\lambda)$ соответственно. В **§2.2** вводятся фазовые интегралы

$$\xi^+(\lambda) \ := \ S(\alpha_0^+(\lambda), 1; \lambda) \ = \ e^{i\pi/4} \int_{\alpha_0^+(\lambda)}^{1} \sqrt{Q(z,\lambda)}\, dz,$$

$$\eta^+(\lambda) \ := \ S(\alpha_0^+(\lambda), \alpha_{-1}^+(\lambda); \lambda) \ = \ e^{i\pi/4} \int_{\alpha_0^+(\lambda)}^{\alpha_{-1}^+(\lambda)} \sqrt{Q(z,\lambda)}\, dz,$$

$$\zeta^+(\lambda) \ := \ S(1, -1; \lambda) \ = \ e^{i\pi/4} \int_{1}^{-1} \sqrt{Q(z,\lambda)}\, dz,$$

и применяется описанная в §**1.4** схема для получения асимптотического представления характеристического определителя $\Delta^+(\lambda)$ соответствующего задаче (1)-(2).

Предложение 1. *Для произвольной ограниченной области Ω, лежащей вместе со своим замыканием $\overline{\Omega}$ в $\Pi \setminus [0, -2i/3\sqrt{3}]$, существует $\widehat{\varepsilon} = \widehat{\varepsilon}(\Omega) > 0$ такое, что при $\varepsilon \in (0, \widehat{\varepsilon})$ аналитический в Ω характеристический определитель $\Delta^+(\lambda)$ имеет вид*

$$\begin{aligned} &\exp\big\{\varepsilon^{-1/2}\zeta^+(\lambda)\big\}\big(1 + \Phi_1(\lambda)\big) \ - \ \exp\big\{ -\varepsilon^{-1/2}\zeta^+(\lambda)\big\}\big(1 + \Phi_2(\lambda)\big) - \\ &\qquad - \ i\, \exp\big\{\varepsilon^{-1/2}\big(2\xi^+(\lambda) - \eta^+(\lambda) + \zeta^+(\lambda)\big)\big\} \times \\ &\times \big[\exp\big\{\varepsilon^{-1/2}\eta^+(\lambda)\big\}\big(1 + \Phi_3(\lambda)\big) + \exp\big\{ -\varepsilon^{-1/2}\eta^+(\lambda)\big\}\big(1 + \Phi_4(\lambda)\big)\big]. \end{aligned}$$

где $|\Phi_j(\lambda)| \leqslant C(\Omega)\varepsilon^{1/2}$.

В **§2.3** изучены аналитические свойства эллиптических интегралов $\xi^+(\lambda)$, $\eta^+(\lambda)$ и $\zeta^+(\lambda)$, которые используются в ходе локализации нулей характеристического определителя задачи (1)-(2).

Утверждение 1. *Функции* $\operatorname{Re}\eta^+(\lambda)$, $\operatorname{Re}\zeta^+(\lambda)$, $\lambda = a+ib \in \Pi$, *доопределенные на отрезке* $[0, -2i/3\sqrt{3}]$ *по непрерывности, возрастают по* a *при фиксированном* b *так, что* $\partial \operatorname{Re}\eta^+(a+ib)/\partial a > 0$ *для* $b < -2/3\sqrt{3}$ *и* $\operatorname{Re}\eta^+(\lambda) = \operatorname{Re}\zeta^+(\lambda) = 0$ *на луче* $i\mathbb{R}_-$. *Величина* $\operatorname{Re}\xi^+(a+ib)$, *продолженная по непрерывности на замыкание множества* $\Pi_+ = \Pi \cap \mathbb{C}_+$, *возрастает по* b *при фиксированном* $a \in [0,2]$ *и* $\partial \operatorname{Re}\xi^+(a+ib)/\partial b > 0$ *для* $a+ib \in \Pi_+$. *Линия уровня*

$$\Gamma := \left\{\lambda = a+ib \in \overline{\Pi}_+ : \operatorname{Re}\xi^+(\lambda) = 0\right\}$$

представляет собой график гладкой функции $b = f(a)$ *с производной* $f'(a) < 1/\sqrt{3}$, $a \in (0,2)$. *Кривая* Γ *пересекает действительную ось под углом* $\pi/6$ *и лежит в треугольнике с вершинами* $2, -2i/\sqrt{3}$, $-2i(2-\sqrt{3})$. *Для точки пересечения* $\Gamma \cap i\mathbb{R} = i\mu$ *справедливо неравенство* $\left|\mu + 2/3\right| < 1/20$.

Утверждение 1 позволяет в различных частях Ω полосы Π получать редуцированные формулы вида (6) для характеристического определителя $\Delta^+(\lambda)$ и с использованием техники, развитой в §**1.4**, провести в **§2.4** локализацию спектра в правой полуплоскости.

Теорема 1. *В случае* $Q(z) = z^3 + z$ *при фиксированном* $M < 0$ *для произвольного* $\delta > 0$ *найдется* $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\delta) > 0$ *такое, что множество*

$$\left\{\lambda \in \Pi : \operatorname{Re}\lambda > \delta, \operatorname{dist}(\lambda, \Gamma) \geqslant \delta, \operatorname{Im}\lambda > M\right\}$$

при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ *не содержит точек спектра задачи* (1)-(2), *а в области*

$$\left\{\lambda \in \Pi : \operatorname{Re}\lambda > \delta, \operatorname{dist}(\lambda, \Gamma) < \delta, |\lambda - Q(1)| > \delta\right\}$$

спектр задачи состоит из однократных собственных значений, причем для некоторой константы $C^{(1)}(\delta) > 0$ *все они находятся в* $C^{(1)}(\delta)\varepsilon$*-окрестностях корней* $\lambda_n^{(1)} \in \Gamma$ *уравнения*

$$\cos\left(i\varepsilon^{-1/2}\xi^+(\lambda) + \pi/4\right) = 0.$$

Соответствующие локализационные формулы задаются соотношениями

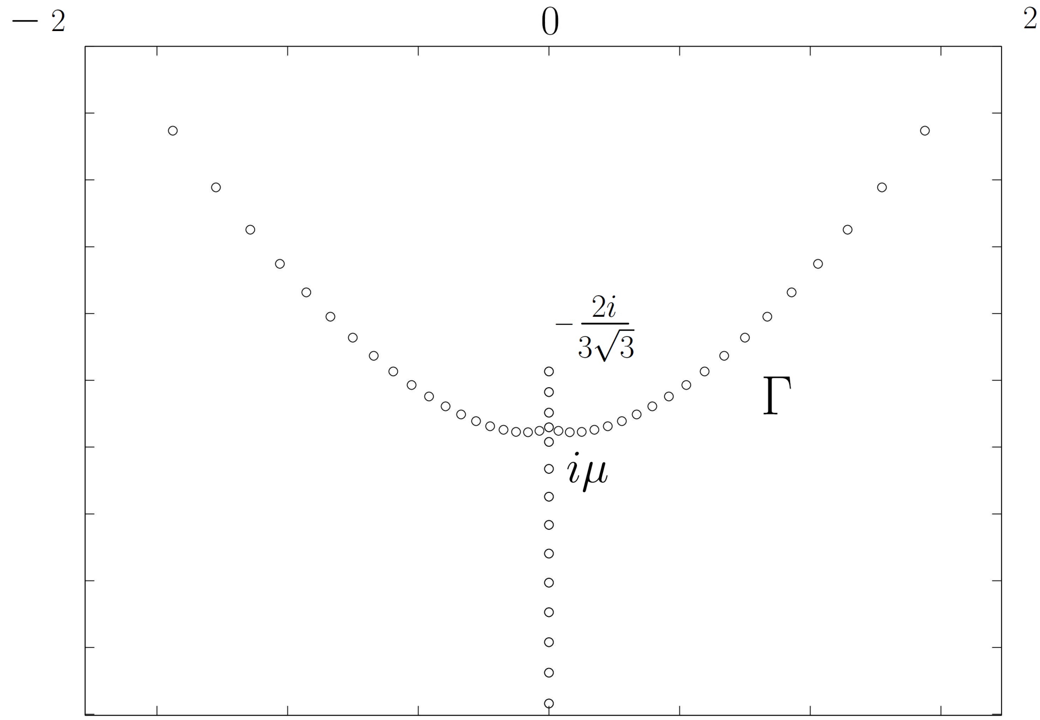
$$\xi^+(\lambda_n^{(1)}) = i\varepsilon^{1/2}\pi\Big(n - 1/4\Big), \quad n \in \mathbb{Z},$$

асимптотически эквивалентными правилам квантования, указанным в [15] и [16].

---

[15] Степин С.А. Несамосопряженные сингулярные возмущения: модель перехода от дискретного спектра к непрерывному // УМН, 1995. – Т.50, вып. 6. – С. 219-220.

[16] Степин С.А., Титов В.А. О концентрации спектра в модельной задаче сингулярной теории возмущений // ДАН, 2007. – Т.413, №1. – С.27-30.



Наряду с найденной в теореме 1 спектральной серией имеется симметричная ей относительно оси $i\mathbb{R}$ серия собственных значений, которые концентрируются вблизи кривой $-\overline{\Gamma}$. Предложение 1 играет существенную роль, при исследовании асимптотического распределения собственных значений задачи (1)-(2) вблизи мнимой оси при этом в области, ограниченной отрезком $[-2, 2]$ и ребрами Γ и $-\overline{\Gamma}$, спектр рассматриваемой задачи при малых $\varepsilon > 0$ оказывается непустым и концентрируется вблизи вертикального отрезка, соединяющего точки $i\mu$ и $-2i/3\sqrt{3}$.

Теорема 2. *Для* $Q(z) = z^3 + z$ *и произвольного* $\delta > 0$ *существуют* $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\delta) > 0$ *и* $C^{(2)}(\delta) > 0$ *такие, что при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$ *множество*

$$\left\{\lambda \in \Pi :\ |\mathrm{Re}\,\lambda| < \delta,\ \mathrm{Im}\,\lambda > -2/3\sqrt{3} + \delta\,\right\}$$

не содержит собственных значений задачи (1)-(2), *а в области*

$$\left\{\lambda \in \Pi :\ |\mathrm{Re}\,\lambda| < \delta,\ \mu + \delta < \mathrm{Im}\,\lambda < -2/3\sqrt{3} - \delta\,\right\}$$

спектр задачи (1)-(2) *исчерпывается однократными собственными значениями, расположенными в* $C^{(2)}(\delta)\varepsilon$*-окрестностях нулей* $\lambda_n^{(2)} \in [i\mu, -2i/3\sqrt{3}]$ *функции* $\cos\left(i\varepsilon^{-1/2}\eta^+(\lambda)\right)$, *занумерованных согласно правилу квантования*

$$\eta^+(\lambda_n^{(2)}) = i\varepsilon^{1/2}\pi\Big(n + 1/2\Big),\ \ n \in \mathbb{Z}.$$

Спектральная серия, аналогичная серии собственных значений, указанной в теореме 2, обнаружена и описана в случае уравнения Вебера в работе [14], где впервые был сформулирован и применен подход к исследованию квазиклассической асимптотики спектра, не требующий априорной информации о расположении линий Стокса.

В **Главе 3** рассматривается случай потенциала $Q(z) = z^3 - z$, имеющего две критические точки на отрезке $[-1, 1]$. В §**3.1** устанавливаются необходимые в дальнейшем свойства функции $\alpha(\lambda) = Q^{-1}(\lambda)$, риманова поверхность которой состоит из трех листов с двумя точками ветвления $\pm 2/3\sqrt{3}$. Ветвь $\alpha_0^-(\lambda)$ функции $Q^{-1}(\lambda)$ однолистно отображает плоскость $\mathbb{C}_\lambda$ с разрезами $\pm 2/3\sqrt{3} + \mathbb{R}_\pm$ на область $3(\mathrm{Re}\, z)^2 < (\mathrm{Im}\, z)^2 + 1$, а ветви $\alpha_{\pm 1}^-(\lambda)$ однолистно отображают плоскость $\mathbb{C}_\lambda$ с разрезом $\mp 2/3\sqrt{3} + \mathbb{R}_\mp$ на компоненты связности множества $3(\mathrm{Re}\, z)^2 > (\mathrm{Im}\, z)^2 + 1$, отвечающие случаям $\mathrm{Re}\, z \gtrless 0$.

В качестве первого этапа схемы из главы 1 в §**3.2** для $\lambda \in \Pi_+$ строится система канонических путей $\widetilde{\gamma}_1$, $\widehat{\gamma}_1$, $\gamma_1 = \gamma_2$, $\widehat{\gamma}_2$ и $\widetilde{\gamma}_2$, образующих два замкнутых контура, ограничивающих области, содержащие $\alpha_{-1}^-(\lambda)$ и $\alpha_0^-(\lambda)$ соответственно. Дальнейшая реализация указанной схемы позволяет получить асимптотическое представление характеристического определителя $\Delta^-(\lambda)$ соответствующей задачи (1)-(2), в котором фигурируют фазовые интегралы

$$\xi^-(\lambda) := e^{i\pi/4} \int_{\alpha_{-1}^-(\lambda)}^{-1} \sqrt{Q(z,\lambda)}\, dz\,,$$

$$\eta^-(\lambda) := e^{i\pi/4} \int_{\alpha_{-1}^-(\lambda)}^{\alpha_0^-(\lambda)} \sqrt{Q(z,\lambda)}\, dz\,,$$

$$\zeta^-(\lambda) := e^{i\pi/4} \int_{1}^{-1} \sqrt{Q(z,\lambda)}\, dz\,.$$

Предложение 2. *Если ограниченная область Ω содержится в $\Pi_+ := \Pi \cap \mathbb{C}_+$, $\partial\Omega \cap \mathbb{R}_+ \subset (0, 2/3\sqrt{3})$ и $\partial\Omega \cap i\mathbb{R}_- \subset (0, i\nu)$, то существует $\widetilde{\varepsilon} = \widetilde{\varepsilon}(\Omega) > 0$ такое, что при $\varepsilon \in (0, \widetilde{\varepsilon})$ аналитический в Ω характеристический определитель $\Delta^-(\lambda)$ для $\lambda \in \overline{\Omega}$ имеет вид*

$$\exp\big\{\varepsilon^{-1/2}\zeta^-(\lambda)\big\}\big(1 + \Psi_1(\lambda)\big) - \exp\big\{-\varepsilon^{-1/2}\zeta^-(\lambda)\big\}\big(1 + \Psi_2(\lambda)\big) -$$

$$-i \exp\big\{\varepsilon^{-1/2}\big(2\xi^-(\lambda) - \zeta^-(\lambda)\big)\big\}\big(1 + \Psi_3(\lambda)\big) -$$

$$-i \exp\big\{\varepsilon^{-1/2}\big(\zeta^-(\lambda) - 2\xi^-(\lambda) + 2\eta^-(\lambda)\big)\big\}\big(1 + \Psi_4(\lambda)\big) +$$

$$+\exp\left\{\varepsilon^{-1/2}\big(\zeta^-(\lambda)+2\eta^-(\lambda)\big)\right\}\big(1+\Psi_5(\lambda)\big),$$

где $|\Psi_j(\lambda)|\leqslant C(\Omega)\varepsilon^{1/2}$.

В §**3.3** устанавливаются свойства эллиптических интегралов $\xi^-(\lambda)$, $\eta^-(\lambda)$ и $\zeta^-(\lambda)$, используемые при изучении распределения нулей характеристического определителя $\Delta^-(\lambda)$.

Утверждение 2. *Для* $\lambda=a+ib\in\Pi_+$ *выполнены неравенства* $\partial\mathrm{Re}\,\xi^-(\lambda)/\partial a>\partial\mathrm{Re}\,\eta^-(\lambda)/\partial a$, $\partial\mathrm{Re}\,\xi^-(\lambda)/\partial b>0$, $\partial\mathrm{Re}\,\eta^-(\lambda)/\partial b>0$ *и* $\partial\mathrm{Re}\,\zeta^-(\lambda)/\partial a>0$, *величина* $\mathrm{Re}\,\zeta^-(\lambda)$ *обращается в нуль на луче* $i\mathbb{R}_-$, *а боковые ребра предельного комплекса*

$$\Gamma_1:=\left\{\lambda\in\overline{\Pi}_+:\mathrm{Re}\,\eta^-(\lambda)=0,\ \mathrm{Re}\,\xi^-(\lambda)>0\right\},$$

$$\Gamma_2:=\left\{\lambda\in\overline{\Pi}_+:\mathrm{Re}\,\xi^-(\lambda)=\mathrm{Re}\,\eta^-(\lambda)<0\right\},$$

$$\Gamma_3:=\left\{\lambda\in\overline{\Pi}_+:\mathrm{Re}\,\xi^-(\lambda)=0,\ \mathrm{Re}\,\eta^-(\lambda)>0\right\},$$

являющиеся графиками монотонных функций $b=b(a)$, *соединяют узел их сочленения* $\Lambda=\rho+i\mu$ *с точками* 0, $2/3\sqrt{3}$ *и* $i\nu$ *соответственно, где* $|\,\Lambda-1/4+i/8\,|<1/25$ *и* $|\nu+9/20|<1/40$.

Формула для $\Delta^-(\lambda)$ из предложения 2 допускает в Π_+ упрощение

$$\Delta^-(\lambda)=\exp\left\{\varepsilon^{-1/2}\zeta^-(\lambda)\right\}\Big(\big(1+O(\sqrt{\varepsilon})\big)+\exp\left\{2\varepsilon^{-1/2}\eta^-(\lambda)\right\}\times$$
$$\times\Big[\big(1+O(\sqrt{\varepsilon})\big)-i\exp\left\{-2\varepsilon^{-1/2}\xi^-(\lambda)\right\}\big(1+O(\sqrt{\varepsilon})\big)\Big]\Big),$$

и в различных частях Π_+ приводится к виду (6).

В §**3.4** с использованием развитой в §**1.4** методики проводится локализация спектра рассматриваемой задачи (1)-(2). Асимптотическое распределение собственных значений задачи в окрестности $\Gamma_1\cup\Gamma_2$ описывает

Теорема 3. *Для* $Q(z)=z^3-z$ *и произвольного* $\delta>0$ *существуют* $\varepsilon_3=\varepsilon_3(\delta)>0$ *и* $C^{(3)}(\delta)>0$ *такие, что при* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_3)$ *в области*

$$\left\{\lambda\in\Pi_+:\ \mathrm{dist}(\lambda,\Gamma_1)<\delta,\ \mathrm{dist}(\lambda,\Gamma_2\cup\Gamma_3)>\delta,\ |\,\lambda-2/3\sqrt{3}|>\delta\right\}$$

спектр задачи (1)-(2) *представляет собой серию простых собственных значений, лежащих в* $C^{(3)}(\delta)\varepsilon$*-окрестностях нулей* $\lambda_n^{(3)}\in\Gamma_1$ *функции* $\cos\big(i\varepsilon^{-1/2}\eta^-(\lambda)\big)$, *занумерованных согласно правилу квантования*

$$\eta^-(\lambda_n^{(3)})=i\varepsilon^{1/2}\pi\Big(n+1/2\Big),\ \ n\in\mathbb{Z},$$

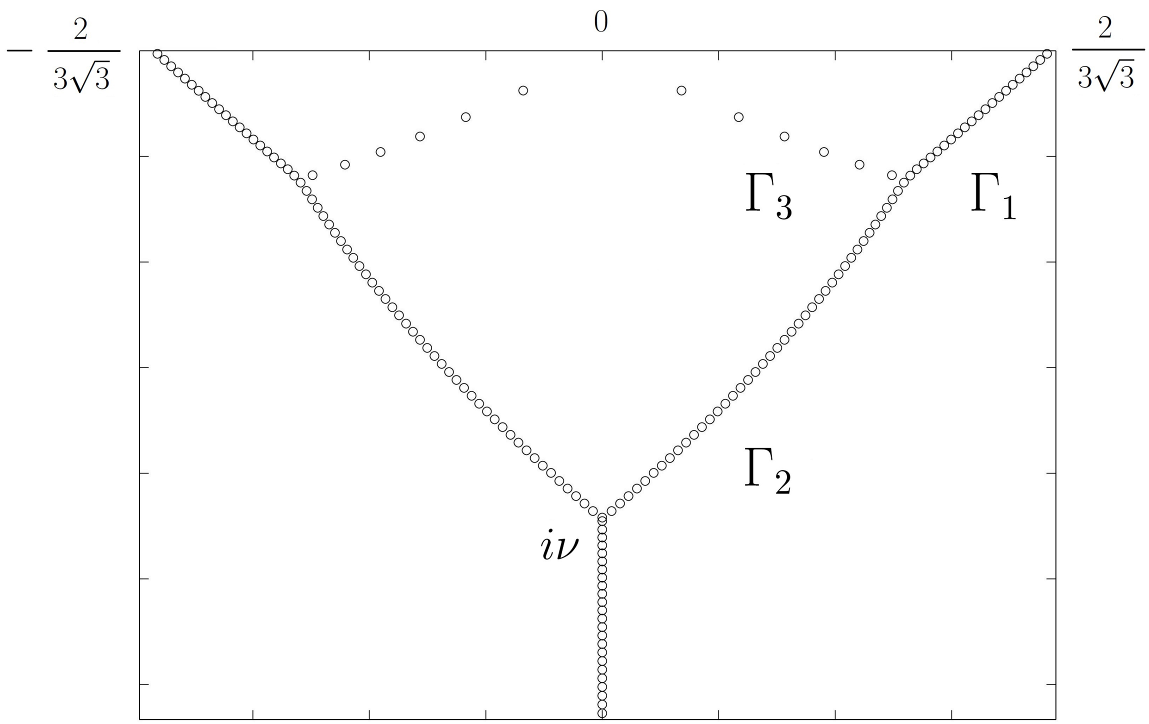
а часть спектра задачи (1)-(2), *принадлежащая области*

$$\{\lambda \in \Pi_+ : \operatorname{dist}(\lambda, \Gamma_2) < \delta,\ \operatorname{dist}(\lambda, \Gamma_1 \cup \Gamma_3) > \delta,\ |\lambda - i\nu| > \delta\},$$

состоит из однократных собственных значений, находящихся в $C^{(3)}(\delta)\varepsilon$*-окрестностях корней* $\lambda_n^{(4)} \in \Gamma_2$ *уравнения*

$$\operatorname{tg}\left(i\varepsilon^{-1/2}(\eta^-(\lambda) - \xi^-(\lambda))\right) = 1.$$

Появление спектральной серии, локализованной вблизи Γ_1, обусловлено существованием конечной линии Стокса, соединяющей точки поворота. Подобные эффекты возникают в случае уравнения Шредингера с периодическим потенциалом [17] и в случае уравнения магнитной индукции на поверхности вращения [18], где устанавливается связь с методом канонического оператора Маслова (см. [19]).



Помимо Γ_1 и Γ_2 предельный спектральный комплекс также содержит в Π_+ ребро, соединяющее узел сочленения Λ со сдвоенной концевой вершиной – точкой $Q(\pm 1) = 0$. Локализация соответствующих собственных значений использует асимптотическое представление $\Delta^-(\lambda)$ из предложения 2.

[17] Есина А.И., Шафаревич А.И. Условия квантования на римановых поверхностях и квазиклассический спектр оператора Шредингера с комплексным потенциалом // Матем. заметки, 2010. – Т.88, №2. – С.229-248.

[18] Esina A.I., Shafarevich A.I. Analogs of Bohr-Sommerfeld-Maslov quantization conditions on Riemann surfaces and spectral series of nonself-adjoint operators // Russ. J. Math. Phys., 2013. – V.20, №2. – P.172-181.

[19] Маслов В. П. Асимптотические методы и теория возмущений. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 312 с.

Теорема 4. *В случае* $Q(z) = z^3 - z$ *для произвольного* $\delta > 0$ *существуют* $\varepsilon_4 = \varepsilon_4(\delta) > 0$ *и* $C^{(4)}(\delta) > 0$ *такие, что при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_4)$ *часть спектра задачи* (1)-(2), *принадлежащая множеству*

$$\left\{\lambda \in \overline{\Pi}_+ :\ \mathrm{Im}\,\lambda \geqslant \nu,\ |\,\lambda| > \delta,\ \mathrm{dist}(\lambda, \Gamma_1 \cup \Gamma_2) > \delta\right\},$$

состоит из простых собственных значений, находящихся в $C^{(4)}(\delta)\varepsilon$*-окрестностях нулей* $\lambda_n^{(5)} \in \Gamma_3$ *функции* $\cos\left(i\varepsilon^{-1/2}\xi^-(\lambda) - \pi/4\right)$, *которые определяются из соотношений*

$$\xi^-(\lambda_n^{(5)}) \ = \ i\varepsilon^{1/2}\pi\Big(n + 1/4\Big),\ \ n \in \mathbb{Z}.$$

Автор глубоко благодарен своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Станиславу Анатольевичу Степину за постановку задач, плодотворные обсуждения, научные дискуссии и постоянное внимание к представленной работе.

Работа была частично поддержана грантом РФФИ №16-01-00117-а.

Список работ автора по теме диссертации

В журналах из перечня ВАК:

1. Степин С. А., Фуфаев В. В. Метод фазовых интегралов в задаче квазиклассической локализации спектра // Докл. РАН, 2015. – Т.462, №3. – С. 283-287.

2. Фуфаев В. В. О линиях уровня гармонических функций, связанных с некоторыми абелевыми интегралами // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. Мех., 2017. – №1. – С. 16-25.

3. Степин С. А., Фуфаев В. В. Метод фазовых интегралов в одной задаче сингулярной теории возмущений // Изв. РАН. Сер. матем., 2017. – Т.81, №2. – С. 129-160.

Прочие публикации:

4. Степин С. А., Фуфаев В. В. Асимптотические оценки точности приближений в одной задаче теории возмущений // Международная конференция "Функциональные пространства и теория приближения функций", посвященная 110-летию со дня рождения академика С. М. Никольского (25–29 мая 2015 г., МИАН, г. Москва): Тезисы докладов. – М.: МИАН, 2015. – С. 228.

5. Фуфаев В. В. Об одной модельной задаче Штурма-Лиувилля // Международная конференция по математической теории управления и механике, Суздаль, 3-7 июля 2015 г.: Тезисы докладов. – М.: МИАН, 2015. – С. 135-136.

6. Фуфаев В. В. Квазиклассическая локализация спектра в модельной задаче сингулярной теории возмущений // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль, 8-12 июля 2016 г.: Тезисы докладов. – М.: МИАН, 2016. – С. 217.

7. Фуфаев В. В. Асимптотический анализ в одной задаче сингулярной теории возмущений // Международная конференция “Системы Аносова и современная динамика”, посвященная 80-летию со дня рождения Дмитрия Викторовича Аносова, Москва, 19-23 декабря 2016 г.: Тезисы докладов. – М.: Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, 2016. – С. 43.

Фуфаев В. В.
Метод фазовых интегралов в одной задаче асимптотической теории возмущений

Аннотация

В диссертации изучается несамосопряженная краевая задача Штурма-Лиувилля для уравнения с малым чисто мнимым параметром при второй производной. В случае двух модельных полиномиальных потенциалов третьей степени исследована квазиклассическая асимптотика собственных значений, и получены локализационные формулы типа правил квантования. Установлено, что соответствующие предельные спектральные конфигурации представляют собой одномерные комплексы, геометрические свойства которых изучены.

Fufaev V. V.
Phase-integral method in a problem of asymptotic perturbation theory

Abstract

The thesis deals with nonselfadjoint boundary Sturm-Liouville problem for equation with small purely imaginary parameter at the second derivative. In two cases of model cubic polynomial potentials we investigate quasiclassical asymptotics for eigenvalues and derive localization formulae of quantization type. The corresponding limit spectral configurations prove to be one-dimensional complexes whose geometric properties are studied.