На правах рукописи

Лыков Константин Владимирович

ТЕОРИЯ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ ДЛЯ ШКАЛ ТИПА ЛЕБЕГА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Специальность 01.01.01 — вещественный, комплексный
и функциональный анализ

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени

доктора физико-математических наук

Москва — 2018

Работа выполнена в Институте систем обработки изображений РАН — филиале Федерального государственного учреждения "Федеральный научно-исследовательский центр "Кристаллография и фотоника" Российской академии наук"

Научный консультант:
Асташкин Сергей Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой функционального анализа и теории функций Самарского национального исследовательского университета имени академика С. П. Королева

Официальные оппоненты:
Семенов Евгений Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории функций и геометрии Воронежского государственного университета

Хелемский Александр Яковлевич, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теории функций и функционального анализа Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

Шульман Виктор Семенович, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры высшей математики Вологодского государственного университета

Ведущая организация:
Санкт-Петербургское отделение математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук

Защита состоится 25 декабря 2018 г. в 15 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.203.27 при ФГАОУ ВО "Российский университет дружбы народов" по адресу: г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, ауд. 495^a.

С диссертацией можно ознакомиться в Учебно-научном информационном библиотечном центре (Научной библиотеке Российского университета дружбы народов) по адресу: 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6 и на сайте "Диссертационные советы РУДН" в сети интернет (http://dissovet.rudn.ru).

Автореферат разослан __ ________ 2018 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.203.27
д.ф.-м.н. Савин А.Ю.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Диссертация посвящена теории экстраполяции пространств и операторов. В работе исследуются экстраполяционные свойства некоторых шкал банаховых пространств и приложения этих свойств к различным проблемам анализа. В большей части работы используется шкала пространств $L_p[0,1]$. Кроме этой шкалы рассматриваются шкалы пространств $L_{p,q}[0,1]$, ℓ_p, классов Шаттена-фон Неймана S_p, а также абстрактных пространств Лионса-Петре $\vec{A}_{\theta,q}$. В работе представлены экстраполяционные описания предельных для рассматриваемых шкал пространств, приведены доказательства полученных автором новых экстраполяционных теорем для линейных, сублинейных и произвольных операторов, а также описаны применения построенной теории в некоторых разделах анализа.

Отправной точкой теории экстраполяции принято считать работу японского математика Шигеки Яно[1], опубликованную в 1951 году. В этой работе была доказана следующая экстраполяционная теорема, связывающая L_p-оценки на оператор при $p > 1$ с оценками в более широких пространствах (специальный случай этого результата рассматривался ранее Титчмаршем и Марцинкевичем[2,3]).

Теорема Яно. *Предположим, что оператор T определен на пространстве $L_1[0,1]$ и принимает значения в множестве измеримых функций на $[0,1]$, и пусть T удовлетворяет условию сублинейности: для некоторого $B > 0$ и любых $x_j \in L_1[0,1]$ таких, что ряд $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ сходится в $L_1[0,1]$ справедливо неравенство*

$$\Big|T\Big(\sum_{j=1}^{\infty} x_j\Big)(t)\Big| \leqslant B \sum_{j=1}^{\infty} |Tx_j(t)| \quad \textit{почти всюду на } [0,1].$$

Предположим также, что оператор T ограничен в $L_p[0,1]$ для каждого $p \in (1,p_0)$, $p_0 > 1$, и

$$\|T\|_{L_p \to L_p} \leqslant C(p-1)^{-\beta}, \;\; p \in (1,p_0), \tag{1}$$

для некоторых $\beta > 0$ и $C > 0$, не зависящих от p. Тогда

$$T: \; L(\log L)^{\beta} \to L_1,$$

[1]Yano S. Notes on Fourier Analysis (XXIX): An extrapolation theorem // J. Math. Soc. Japan. – 1951. – V. 3. – No. 2. – P. 296–305.

[2]Titchmarsh E. C. Additional note on conjugate functions // J. London Math. Soc. – 1929. – V. 4. – No. 3 – P. 204–206.

[3]Marcinkiewicz J. Sur l’interpolation II // Studia Mathematica. – 1936. – V. 6. – No. 1. – P. 67–81.

где пространство $L(\log L)^\beta$ *состоит из всех измеримых на* $[0,1]$ *функций* $x(t)$ *таких, что*

$$\|x\|_{L(\log L)^\beta} = \int_0^1 \log^\beta(e/t) x^*(t)\, dt < \infty$$

($x^*(t)$ *означает непрерывную слева невозрастающую перестановку функции* $|x(t)|$*).*

В своей работе Яно показал, что оценки для многих важных операторов анализа (таких, как максимальный оператор Харди-Литлвуда, оператор перехода к сопряженной функции в гармоническом анализе и др., см. примеры операторов в [4]) в пространствах, близких к L_1 (логарифмических пространствах Лоренца) могут быть получены из L_p-неравенств для этих операторов, в то время как до работы Яно оценки в шкале $\{L_p\}$ и в пространствах $L(\log L)^\beta$ получались независимо. Теорема Яно может также рассматриваться как обратное утверждение к хорошо теперь известным интерполяционным теоремам: оценки на нормы оператора в пространствах L_p влекут оценки в соответствующих предельных для этой шкалы пространствах. Поэтому теорема Яно называется *экстраполяционной теоремой*. В классической монографии А. Зигмунда[5] представлена как теорема Яно, так и двойственный к ней результат, также иногда называмый теоремой Яно.

Теорема Зигмунда. *Если оператор* T *ограничен в* $L_p[0,1]$ *для всех* $p > p_0$ *и*

$$\|T\|_{L_p \to L_p} \leqslant C p^{1/\beta}, \quad p \in (p_0, \infty), \tag{2}$$

для некоторого $\beta > 0$ *с константой* $C > 0$*, не зависящей от* p*, то*

$$T:\, L_\infty \to \operatorname{Exp} L^\beta,$$

где пространство $\operatorname{Exp} L^\beta$ *состоит из всех измеримых функций* $x(t)$ *таких, что*

$$\|x\|_{\operatorname{Exp} L^\beta} = \sup_{0<t\leqslant 1} \log^{-1/\beta}(e/t) x^*(t) < \infty.$$

Позже эти результаты неоднократно переоткрывались (см., например, работы И.Б. Симоненко[6] и В.И. Юдовича[7]), доказывались некоторые обоб-

[4] Hardy G. H., Littlewood J. E. A maximal theorem with function-theoretic applications // Acta Mathematica. – 1930. – V. 48. – P. 81–116.

[5] Зигмунд А. Тригонометрические ряды, т. 2. – М.: Мир, 1965. – 538 с.

[6] Симоненко И. Б. Интерполяция и экстраполяция линейных операторов в пространствах Орлича // Матем. сб. – 1964. – Т. 63. – № 4. – С. 536–553.

[7] Юдович В. И. О некоторых оценках, связанных с интегральными операторами и решениями эллиптических уравнений // ДАН СССР. – 1961. – Т.138. – № 4. – С. 805–803.

щения и уточнения (см., например, [8,9]), но общей теории не было (ср. с развитием теории интерполяции от теорем Рисса-Торина и Марцинкевича до абстрактной теории). В конце 80-х – начале 90-х годов в серии работ Б. Яверса и М. Мильмана были заложены основы общей (абстрактной) теории экстраполяции[10,11,12,13,14,15], которая изучает естественные предельные пространства, ассоциированные с различными интерполяционными шкалами, и допускающие распространение оценок на нормы соответствующих операторов. В этих работах было представлено много новых идей, перспективных связей с другими разделами анализа и интересных приложений. Следует сказать, что работы эти, имея фундаментальный характер, написаны "широкими мазками" и являются скорее программой для действий, чем законченным исследованием. В связи с этим "потребители" экстраполяционной теории зачастую вынуждены сами получать нужные им конкретные результаты. Отметим здесь результаты новосибирского математика А.Е. Мамонтова[16,17,18,19,20,21], построившего на основе интегральных преобразований теорию экстраполяции пространств Орлича относительно шкалы L_p для нужд дифференциальных уравнений

[8] Flett T. M. A note on some inequalities // Glasgow Mathematical Journal. – 1958. – V. 4. – No. 1. – P. 7–15.

[9] Kerman R. A. An integral extrapolation theorem with applications // Studia Mathematica. – 1983. – V. 76. – No. 3. – P. 183–195.

[10] Jawerth B. Extrapolation theory and applications // in Conference at Special Year in Harmonic Analysis, MSRI, Berkeley, 1987.

[11] Jawerth B., Milman M. A theory of extrapolation spaces. First applications // C. R. Acad. Sci. Paris, Series I. – 1989. – V. 308. – P. 175–179.

[12] Jawerth B., Milman M. A theory of extrapolation spaces. Further applications // C. R. Acad. Sci. Paris, Series I. – 1989. – V. 309. – P. 225–229.

[13] Jawerth B., Milman M. Extrapolation Spaces with applications // Mem. of the Amer. Math. Soc. – 1991. – V. 89. – No. 440. – IV+82 pp.

[14] Jawerth B., Milman M. New Results and Applications of Extrapolation Theory // Interpolation spaces and related topics, Haifa, 1990. Israel Math. Conference Proc., 5. – 1992. – P. 81–105.

[15] Milman M. Extrapolation and Optimal Decompositions with Applications to Analysis. – Berlin: Springer-Verlag, 1994. – 162 pp. (Lecture Notes in Math., V. 1580)

[16] Мамонтов А. Е. Экстраполяция линейных операторов из L_p в пространства Орлича, порожденные быстро или медленно растущими N-функциями // Актуальные проблемы современной математики, Новосибирск, НГУ, 2. – 1996. – С. 95–103.

[17] Мамонтов А. Е. Шкалы пространств L_p и их связь с пространствами Орлича // Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ. – 2006. – Т. 6. – В. 2. – С. 33–56.

[18] Мамонтов А. Е. Интегральные представления и преобразования N–функций, I // Сиб. матем. ж. – 2006. – Т. 47. – № 1. – С. 123–145.

[19] Мамонтов А. Е. Интегральные представления и преобразования N–функций, II // Сиб. матем. ж. – 2006. – Т. 47. – № 4. – С. 811–830.

[20] Mamontov A. E. Extrapolation from L_p into Orlicz spaces via integral transforms of Young functions // Journal of Analysis and Applications. – 2006. – V. 4. – No. 42. – P. 77–118.

[21] Мамонтов А. Е. Глобальная разрешимость многомерных уравнений сжимаемой неньютоновской жидкости, транспортное уравнение и пространства Орлича // Сиб. электрон. матем. изв. – 2009. – Т. 6. – С. 120–165.

гидродинамики, а также моментные пространства израильского математика Е.И. Островского[22,23,24], используемые им и другими авторами[25] в задачах случайных полей и математической статистики. Кроме того, работы Б. Яверса и М. Мильмана написаны на языке абстрактной теории интерполяции, доказательства не всегда полны, интерпретация для конкретных шкал представлена только в редких случаях. Последнее обстоятельство побудило некоторых математиков дать независимые формулировки и доказательства результатов Яверса и Мильмана для специальных шкал, в основном для шкалы пространств L_p. Здесь следует отметить работы ярославского математика Е.И. Бережного[26,27,28,29], получившего простые доказательства точных экстраполяционных теорем для классических пространств Лоренца и Марцинкевича. Наконец, в работах Яверса и Мильмана исследованы только самые простые экстраполяционные функторы суммы и пересечения, предложенные ранее Н. Ароншайном и Э. Гальярдо в теории интерполяции[30]. Эти функторы, а также их прямые обобщения, появившиеся в абстрактном виде в работе[31], а в одном частном случае ранее в[32,33], не исчерпывают все экстраполяционные конструкции и не всегда удобны. Они легко вычисляются на крайних интерполяционных шкалах степенного типа, но обладают устойчивостью к замене шкалы только при некоторых ограничительных условиях на веса конструкции. С.В. Асташкиным было введено новое семейство экстра-

[22] Козаченко Ю. В., Островский Е. И. Банаховы пространства случайных величин типа субгауссовских // Теория вероятн. и матем. стат. (Киев). – 1985. – Т. 32. – С. 42–53.

[23] Островский Е. И. Экспоненциальные оценки для случайных полей и их применения. – Обнинск: Обнинский институт атомной энергетики, 1999. – 350 с.

[24] Ostrovsky E., Sirota L. Moment Banach spaces: Theory and applications // HAIT Journal of Science and Engineering C. – 2007. – V. 4. – No. 1-2. – P. 233–262.

[25] Kozachenko Yu. V., Mlavets' Yu. Yu. The Banach spaces $\mathrm{F}_\psi(\Omega)$ of random variables // Theor. Probability and Math.Statist. – 2013. – No. 86. – P. 105–121.

[26] Бережной Е. И., Перфильев А. А. Точная теорема экстраполяции для операторов // Функц. анализ и его прил. – 2000. – Т. 34. – No. 3. – С. 66–68.

[27] Бережной Е. И. Простое доказательсво теоремы экстраполяции для пространств Марцинкевича // Матем. заметки. – 2013. – Т. 93. – No. 6. – С. 939–943.

[28] Бережной Е. И. Точная теорема экстраполяции для пространств Лоренца // Сиб. матем. журн. – 2013. – Т. 54. – No. 3. – С. 520–535.

[29] Бережной Е. И. Можно ли усилить экстраполяционную теорему Яно? // Функц. анализ и его прил. – 2015. – Т. 49. – No. 2. – С. 82–85.

[30] Aronszajn N., Gagliardo E. Interpolation spaces and interpolation methods // Ann. Mat. Pura Appl. – 1965. – V. 68. – No. 1. – P. 51–118.

[31] Karadzhov G., Milman M. Extrapolation theory: New results and applications // J. Approx. Theory. – 2005. – V. 133. – No. 1. – P. 38–99.

[32] Лукомский С. Ф. О сходимости рядов Уолша в пространствах, близких к L_∞ // Матем. заметки. – 2001. – Т. 70. – No. 6. – С. 882–889.

[33] Lukomskii S. F. Convergence of Fourier series in Lorentz spaces // East J. on Approx. – 2003. – V. 9. – No. 2. – P. 229–238.

поляционных функторов, названных позже $\mathbf{F}$-методом[34,35,36], и совместно с автором настоящей работы начато их детальное изучение[37,38,39,40]. В настоящей диссертации теория экстраполяции развивается преимущественно на основе этих функторов.

Опишем кратко некоторые идеи и конструкции Б. Яверса и М. Мильмана. В теории экстраполяции рассматривается семейство банаховых пространств $\mathbf{A} = \{A_\theta\}_{\theta\in\Theta}$, индексированное с помощью некоторого множества индексов Θ. Эти пространства предполагаются *совместимыми*, т.е. предполагается наличие некоторого хаусдорфова топологического векторного пространства $\mathcal{T}_{\mathbf{A}}$ такого, что имеют место непрерывные вложения $A_\theta \subset \mathcal{T}_{\mathbf{A}}$, $\theta \in \Theta$. Пусть $\mathbf{B} = \{B_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ — другое семейство банаховых пространств, индексированное тем же множеством Θ, и $B_\theta \subset \mathcal{T}_{\mathbf{B}}$, $\theta \in \Theta$. Будем писать $T : \{A_\theta\}_{\theta\in\Theta} \xrightarrow{1} \{B_\theta\}_{\theta\in\Theta}$, если T — непрерывный линейный оператор из $\mathcal{T}_{\mathbf{A}}$ в $\mathcal{T}_{\mathbf{B}}$, а его сужения на A_θ отображают A_θ в B_θ с нормой $\leqslant 1$ для каждого $\theta \in \Theta$. Будем говорить, что банаховы пространства A и B являются *экстраполяционными пространствами* по отношению к семействам $\{A_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ и $\{B_\theta\}_{\theta\in\Theta}$, если из условия $T : \{A_\theta\}_{\theta\in\Theta} \xrightarrow{1} \{B_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ следует, что $T : A \to B$. *Экстраполяционный метод* $\mathbf{E}$ означает функтор, определенный на наборе $\mathrm{Dom}(\mathbf{E})$ семейств совместимых пространств, и такой, что $\mathbf{E}(\{A_\theta\}_{\theta\in\Theta})$ и $\mathbf{E}(\{B_\theta\}_{\theta\in\Theta})$ будут экстраполяционными пространствами для любых $\{A_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ и $\{B_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ из $\mathrm{Dom}(\mathbf{E})$.

Простейшими, но, в то же время, достаточно важными экстраполяционными методами являются функторы суммы и пересечения семейства банаховых пространств. Предположим, что $\{A_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ — такое семейство совместимых пространств, что для некоторого банахова пространства Σ имеют место непрерывные вложения $A_\theta \subset \Sigma$, $\theta \in \Theta$, с равномерно ограниченными норма-

[34] Асташкин С. В. Новые экстраполяционные соотношения в шкале L_p-пространств // Функцион. анализ и его прил. – 2003. – Т. 37. – No. 3. – С. 73–77.

[35] Асташкин С. В. Об экстраполяционных свойствах шкалы L_p-пространств // Матем. сборник. – 2003. – Т. 194. – No. 6. – С. 23–42.

[36] Асташкин С. В. Экстраполяционные функторы на семействе шкал, порожденных вещественным методом интерполяции // Сиб. матем. журн. – 2005. – Т. 46. – No. 2. – С. 264–289.

[37] Асташкин С. В., Лыков К. В. Экстраполяционное описание пространств Лоренца и Марцинкевича, близких к L_∞ // Сиб. матем. журн. – 2006. – Т. 47. – № 5. – С. 974–992.

[38] Асташкин С. В., Лыков К. В. Сильно экстраполяционные пространства и интерполяция // Сиб. матем. журн. – 2009. – Т. 50. – № 2. – С. 250–266.

[39] Astashkin S., Lykov K. Extrapolation description of rearrangement invariant spaces and related problems // Banach and function spaces III (ISBFS 2009) (Kitakyushu, Japan, 2009). – Yokohama: Yokohama Publisher, 2011. – P. 1–52.

[40] Astashkin S. V., Lykov K. V. Jawerth-Milman extrapolation theory: some recent developments with applications // Functional Analysis, Harmonic Analysis, and Image Processing: A Collection of Papers in Honor of Björn Jawerth, Contemporary Mathematics, 693, eds. Michael Cwikel, Mario Milman. – Providence, Rhode Island: AMS, 2017. – P. 7–53.

ми. Тогда множество

$$\Sigma(A_\theta) = \Big\{a \in \Sigma :\ a = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \text{ и } \sum_{j=1}^{\infty} \|a_j\|_{A_{\theta_j}} < \infty \,(\text{для каких-то } \theta_j \in \Theta)\Big\},$$

с нормой $\|a\|_{\Sigma(A_\theta)} = \inf \sum_j \|a_j\|_{A_{\theta_j}}$, где инфимум берется по всем представлениям $a \in \Sigma(A_\theta)$ в виде $a = \sum_j a_j$ (со сходимостью в Σ), является банаховым пространством (при этом пространство $\Sigma(A_\theta)$ не зависит от объемлющего пространства Σ). Аналогично, если имеют место равномерно ограниченные вложения $\Delta \subset A_\theta$, $\theta \in \Theta$, для некоторого банахова пространства Δ, мы можем определить пересечение $\Delta(A_\theta)$ семейства $\{A_\theta\}_{\theta\in\Theta}$, которое состоит из всех $a \in \bigcap_{\theta\in\Theta} A_\theta$ таких, что

$$\|a\|_{\Delta(A_\theta)} = \sup_{\theta\in\Theta} \|a\|_{A_\theta} < \infty.$$

Пусть теперь $\{A_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ и $\{B_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ — два семейства банаховых пространств такие, что для некоторых банаховых пространств $\Sigma_{\mathbf{A}}$ и $\Sigma_{\mathbf{B}}$ имеют место равномерные вложения $A_\theta \subset \Sigma_{\mathbf{A}}$ и $B_\theta \subset \Sigma_{\mathbf{B}}$, и, следовательно, корректно определены пространства $\Sigma(A_\theta)$ и $\Sigma(B_\theta)$. Если T — непрерывный линейный оператор из $\mathcal{T}_{\mathbf{A}}$ в $\mathcal{T}_{\mathbf{B}}$ такой, что $T :\ \{A_\theta\}_{\theta\in\Theta} \xrightarrow{1} \{B_\theta\}_{\theta\in\Theta}$, то из определения конструкции суммы Σ следует, что T ограничен из $\Sigma(A_\theta)$ в $\Sigma(B_\theta)$. Таким образом функтор Σ действительно является экстраполяционным методом. Аналогичное утверждение верно для функтора Δ, при этом линейность оператора T уже не нужна, так как

$$\|Ta\|_{\Delta(B_\theta)} = \sup_{\theta\in\Theta} \|Ta\|_{B_\theta} \leqslant \sup_{\theta\in\Theta} \|a\|_{A_\theta} = \|a\|_{\Delta(A_\theta)}.$$

В частности, используя шкалу пространств $\{L_p\}$ на отрезке $[0,1]$, несложно получить следующие соотношения:

$$\Sigma_{1<p<p_0}\big((p-1)^{-\beta} L_p\big) = L(\log L)^\beta, \quad \Sigma_{1<p<p_0}(L_p) = L_1,$$

и

$$\Delta_{p>p_0}(L_p) = L_\infty, \quad \Delta_{p>p_0}\big(p^{-1/\beta} L_p\big) = \operatorname{Exp} L^\beta.$$

Поэтому теоремы Яно и Зигмунда являются простым следствием общего подхода Яверса и Мильмана. Привлечение новых экстраполяционных функторов дает, естественно, больше возможностей. В работе [31] подробно рассмотрены функторы $\Delta^{(r)}$ и $\Sigma^{(r)}$, являющиеся обобщением функторов Δ и Σ. Авторы рассматривают совместимую пару квазибанаховых пространств (A_0, A_1) и шкалу пространств $A_{\theta,r}$ вещественного метода интерполяции с фиксированным r. Пространство, получаемое в результате применения функтора $\Delta^{(r)}$ к шкале $\{(M(\theta)A_{\theta,r})\}_{\theta\in(\theta_0,\theta_1)}$, где $M(\theta)$ — положительная непрерывная функция на (θ_0,θ_1), определяется нормой:

$$\|f\|_{\Delta^{(r)}(M(\theta)A_{\theta,r})} = \left(\int_{\theta_0}^{\theta_1} \left(M(\theta)\|f\|_{A_{\theta,r}}\right)^r d\theta\right)^{1/r}.$$

В частном случае $r=\infty$ получаем функтор Δ. В статье Караджова и Мильмана рассмотрены также различные приложения описанных конструкций, в частности, позволяющие получать экстраполяционные утверждения типа теоремы Яно. Еще больше возможностей возникает, если L_r-норму в рассмотренной конструкции заменить произвольным банаховым пространством F. Соответствующий экстраполяционный функтор, называемый по аналогии с теорией интерполяции **F**-методом, был впервые предложен С.В. Асташкиным [35]. Опишем **F**-метод точнее.

Пусть F — банахово идеальное пространство на множестве индексов Θ (которое предполагается измеримым пространством). Для заданного семейства совместимых банаховых пространств $\{A_\theta\}_{\theta\in\Theta}$, индексированного множеством Θ, определим банахово пространство $\mathbf{F}(\{A_\theta\}_{\theta\in\Theta})$ всех таких $a\in\mathcal{T}_A$, что функция $\theta\in\Theta\mapsto\|a\|_{A_\theta}$ принадлежит F, и снабдим это пространство нормой

$$\|a\|_{\mathbf{F}(\{A_\theta\}_{\theta\in\Theta})} := \big\|\|a\|_{A_\theta}\big\|_F.$$

Ясно, что **F**-метод обобщает экстраполяционный функтор Δ, который получается при $F=L_\infty$. В диссертации **F**-метод применяется к шкалам $\{L_p[0,1]\}_{p<\infty}$, $\{L_{p,q}[0,1]\}_{p<\infty}$, $\{L_{p,\infty}[0,1]\}_{p<\infty}$, в которых роль θ играет параметр p, а $\Theta=[1,\infty)$, а также к шкалам $\{\ell_p\}_{p>1}$, $\{S_p\}_{p>1}$ и $\{\vec{A}_{\theta,q}\}_{\theta\in(0,1)}$. Мы описываем результирующие пространства (которые мы называем $\mathcal{F}$-экстраполяционными), решая как прямые, так и обратные задачи экстраполяционного представления, формулируем и доказываем соответствующие экстраполяционные теоремы для операторов, а также применяем полученные результаты к некоторым классическим проблемам анализа.

Закладывая фундамент абстрактной теории экстраполяции в конце 80-х годов прошлого века, Б. Яверс и М. Мильман, по-видимому, предполагали, что их идеи привлекут новые молодые силы, и вскоре на этой основе будет построено полноценное здание. Однако известный кризис математической науки, спад интереса к абстрактной математике, компьютерная революция и соответствующее смещение приоритетов в сторону дискретной математики, не позволили осуществиться их планам. Автор настоящей диссертационной работы рассчитывает, что его исследования позволят придать теории экстраполяции новый импульс. Следует отметить также, что наибольший спрос у потребителей теории экстраполяции имеет именно шкала пространств L_p, экстраполяционные свойства которой преимущественно и рассматриваются в настоящей работе, в то время как абстрактная теория не во всех вопросах позволяет продвинуться достаточно глубоко при изучении специальных вопросов. Автор считает, что ему удалось придать некоторым разделам теории экстраполяции в шкале пространств L_p и в близких шкалах завершенную форму. Кроме того, результаты диссертации делают теорию более ясной и, одновременно, более доступной специалистам из других областей математики. Анализ работ по дифференциальным уравнениям, математической физике, теории вероятностей и др. разделам математики, в которых используются различные варианты экстраполяционных теорем,показывает, что имеется назревшая необходимость в более точных и более конкретных результатах, чем имеющиеся в абстрактной теории. Все отмеченное, несомненно, доказывает актуальность выбранного в работе направления исследований и полученных результатов.

Отметим также, что работа автора по теме диссертации была поддержана в разные годы грантами РФФИ 07-01-96603-р_поволжье_а, 10-01-00077-а, 12-01-00198-а, 14-01-31452-мол-а, 16-41-630676-р_а, 17-01-00138-а, 18-01-00414-а, а также Министерством образования и науки РФ (проект 5-100).

Цели и задачи диссертационной работы. Основной целью диссертационной работы является построение теории экстраполяции для шкалы пространств $\{L_p[0,1]\}_{p<\infty}$ и близких шкал, учитывающей особенности этих шкал, и получение как специальных для этих шкал результатов, не вытекающих из общей теории экстраполяции, так и результатов, которые могут быть полезны и для развития общей теории. Под теорией экстраполяции мы понимаем структурированный набор понятий, определений, строго доказанных утверждений и свойств изучаемых объектов, каковыми являются экстраполяционные функторы и экстраполяционные пространства, с обозначенными внутренними связями, позволяющий эффективно использовать свои компоненты для приложений в различных разделах математики. Для достижения этой цели в диссертации рассматриваются следующие основные задачи.

1. Изучить свойства $\mathcal{F}$-экстраполяционных пространств.

2. Описать симметричные пространства, которые можно получить **F**-методом экстраполяции.

3. Получить соотношения, позволяющие по симметричному пространству восстанавливать параметр экстраполяции.

4. Установить связь между экстраполяционным и интерполяционным описанием симметричного пространства.

5. Охарактеризовать $\mathcal{F}$-экстраполяционные пространства из специальных классов симметричных пространств с помощью условий на параметры, идентифицирующие конкретное пространство в классе.

6. Исследовать свойство устойчивости $\mathbf{F}$-метода по отношению к замене шкалы $\{L_p[0,1]\}_{p<\infty}$ на шкалу $\{L_{p,q}[0,1]\}_{p<\infty, q=q(p)}$.

7. Получить экстраполяционные теоремы для линейных и сублинейных операторов.

8. Получить эффективные приложения построенной теории к некоторым классическим задачам анализа.

Следует отметить также, что некоторые специальные конструкции, первоначально использованные автором для работы со шкалой пространств $\{L_p[0,1]\}_{p<\infty}$, удалось перенести и на общие интерполяционные шкалы, что также отражено в настоящей работе.

Методы исследования. В работе используются методы теории интерполяции пространств и операторов, теории симметричных пространств, теории банаховых решеток, а также общие методы функционального анализа и теории функций. В отдельных местах работы применяются комбинаторные и вероятностные методы. Важным инструментарием в доказательствах основных теорем является также разработанный автором метод оценок норм интерполяционных пространств через суммы значений $\mathcal{K}$-функционалов в специальных точках, определяемых оператором степенного растяжения.

Основные положения, выносимые на защиту. В работе получены следующие основные результаты, которые выносятся на защиту.

1. Доказана теорема о характеризации сильно экстраполяционных симметричных пространств на отрезке $[0,1]$. В теореме доказана равносильность различных условий, среди которых сильная экстраполяционность, а также условия на параметр интерполяции, на параметр экстраполяции и на само симметричное пространство, сформулированные в терминах ограниченности специальных операторов. Как следствие получена характеризация сильно экстраполяционных пространств Орлича, Лоренца, Марцинкевича, Орлича-Лоренца в терминах условий на параметры этих пространств.

2. Понятие сильно экстраполяционного пространства перенесено на симметричные пространства последовательностей. Как следствие получено экстраполяционное описание предельных для шкалы классов Шаттена-фон Неймана симметрично-нормированных идеалов. Доказана теорема о

принадлежности действительной и мнимой компоненты вольтеррова оператора определенным предельным симметрично-нормированным идеалам, аналогичная теореме Мацаева для классов Шаттена-фон Неймана.

3. Понятие сильно экстраполяционного пространства перенесено на абстрактные интерполяционные шкалы. Доказана теорема, характеризующая абстрактные сильно экстраполяционные пространства в терминах параметра интерполяции.

4. Доказаны теоремы об устойчивости экстраполяционных конструкций по отношению к замене шкалы пространств $\{L_p\}$ на шкалу пространств $L_{p,q}$, позволяющие во многих случаях вычислять явно значения специальных экстраполяционных функторов.

5. Доказаны новые экстраполяционные теоремы для операторов, действующих в пространствах L_p при $p \in (p_0, \infty)$.

6. Доказаны экстраполяционные теоремы о линейных и сублинейных операторах, действующих из шкалы $\{L_p\}$ в фиксированное квазинормированное полное пространство с операторной нормой, растущей при $p \to 1$.

7. На основе экстраполяционного описания симметричных пространств получены новые условия единственности в классических степенных проблемах моментов Стильтьеса и Гамбургера.

8. С привлечением экстраполяционной техники доказана теорема, характеризующая симметричные пространства, в которых разреженный хаос Радемахера образует безусловную базисную последовательность.

Научная новизна. Все выносимые на защиту диссертации результаты являются новыми. Автором впервые выделена явная и простая связь между параметрами интерполяции и экстраполяции, которая позволила дать новые экстраполяционные представления для важных в анализе пространств, а также объединить под единой конструкцией известные разрозненные результаты других авторов и объяснить общее происхождение возникавших ранее отдельных экстраполяционных соотношений.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Теория экстраполяции имеет многочисленные приложения к классическим проблемам анализа, теории вероятностей и дифференциальных уравнений [13–25,32,33]. В диссертации получила существенное развитие теория экстраполяции для шкалы пространств L_p на отрезке, что нашло отражение в эффективных приложениях теории, найденных автором, и также представленных в работе. Среди этих приложений особенно отметим новые условия определенности в классической проблеме моментов, важные для теории вероятностей и математической статистики. Ожидается, что результаты работы найдут и другие полезные применения в теории вероятностей, так как позволяют получать из моментных оценок случайных величин более важные оценки для распределений. Доказанные в работе теоремы об описании пространств и экстраполяции операторов могут быть использованы также в теории функций, гармоническом анализе, математической физике, дифференциальных уравнениях, так как в этих разделах анализа традиционно использование L_p-оценок на нормы функций и специальных операторов. Следует отметить также, что построенные в работе разделы теории экстраполяции хорошо дополняют теорию интерполяции, предоставляют последней новые методы и позволяют обозначить границы применения и обратимости соответствующих интерполяционных конструкций.

Степень достоверности результатов. Все результаты работы представлены в виде математических утверждений (леммы, теоремы, предложения и следствия из них) вместе со строгими математическими доказательствами. Используемые в доказательствах методы и вспомогательные утверждения взяты автором из известных книг или авторитетных математических журналов. Все выносимые на защиту результаты опубликованы в рецензируемых научных изданиях.

Апробация результатов.

Основные результаты диссертационной работы докладывались автором на всероссийских и международных конференциях и математических школах: Воронежской зимней математической школе С.Г. Крейна (2006 г.), Воронежской зимней математической школе "Современные методы теории функций и смежные проблемы" (2015, 2017 гг.), Казанской летней научной школе-конференции "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы" (2005, 2007, 2011, 2015 гг.), Крымской осенней математической школе-симпозиуме по спектральным и эволюционным задачам (2014, 2015 гг.), Международной конференций "Математическая физика и ее приложения" в г.Самара (2008, 2010 гг.), Всероссийской конференции "Дифференциальные уравнения и их приложения" в г. Самара (2009, 2011 гг.), Международной конференции "Harmonic Analysis and Approximations" в г. Цахкадзор, Армения (2008 г.), Международной конференции "The Jozef Marcinkiewicz Centenary Conference" в г. Познань, Польша (2010 г.), Международной конференции "Banach Spaces Geometry" в г. Санкт-Петербург (2010 г.), Международной конференции "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения" в г. Ростов-на-Дону (2015 г.), Международной конференции Саратовская зимняя школа "Современные проблемы теории функций и их приложения"(2018 г.). Основные положения теории представлялись автором на семинаре по теории функций многих действительных переменных и ее приложениям к задачам математической физики в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН (Семинар С.М. Никольского, руководитель семинара чл.-корр. РАН О.В. Бесов, 2007, 2016 гг.), на Санкт-Петербургском семинаре по теории операторов и теории функций (руководитель семинара академик С.В. Кисляков, 2017, 2018 гг.), на семинаре по теории функций действительного переменного МГУ (руководитель семинара академик Б.С. Кашин, 2017 г.). О приложениях к проблеме моментов автор рассказывал на семинаре Лаборатории Чебышева СПбГУ "Теория вероятностей"(2015 г.) и на Большом семинаре кафедры Теории вероятностей МГУ им М.В. Ломоносова (руководитель семинара академик РАН А.Н. Ширяев, 2017 г.). Кроме того, результаты работы неоднократно докладывались на семинаре кафедры Функционального анализа и теории функций Самарского университета (руководитель семинара профессор С.В. Асташкин).

Личный вклад автора. Научные результаты, выносимые на защиту и составляющие основное содержание диссертационной работы, получены автором самостоятельно. Для полноты изложения и лучшей иллюстрации важных положений работы в текст диссертации включены некоторые результаты, полученные С.В. Асташкиным в совместных работах, а также результаты, в которых точно выделить роль каждого из соавторов не представляется возможным. Во всех таких местах автором сделаны соответствующие пояснения.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 15 публикациях — это статьи в журналах, соответствующих требованиям ВАК. Все эти работы опубликованы в изданиях, входящих в международные реферативные базы данных и системы цитирования. При этом работы [3,6-12,14,15] (или их переводы) включены в базу данных Web of Science Core Collection. Отметим еще, что работы [13,15] являются обзорными статьями в книгах, и написаны по заказу редколлегий соответствующих изданий.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Главы разбиты на параграфы, параграфы глав 3, 4 и 5 разбиты над подпараграфы (разделы). Результаты автора изложены в главах 3, 4 и 5. Общий объем диссертации составляет 404 страницы. Библиография включает 213 наименований.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному консультанту, профессору, д.ф.-м.н., Асташкину Сергею Владимировичу и декану факультета математики Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева д.ф.-м.н. Новикову Сергею Яковлевичу за постоянное внимание к работе и советы при подготовке настоящего текста, а также руководителю Института систем обработки изображений РАН (ИСОИ РАН) — филиала Федерального государственного учреждения "Федеральный научно-исследовательский центр "Кристаллография и фотоника" Российской академии наук" д.ф.-м.н. Казанскому Николаю Львовичу и научному руководителю ИСОИ РАН академику РАН Сойферу Виктору Александровичу за поддержку во время работы над диссертацией.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель и ставятся задачи. Здесь же сформулированы основные результаты диссертации (без доказательства), обоснована их новизна и значимость.

В **первой главе** собраны основные обозначения, определения и общие сведения о симметричных пространствах и теории интерполяции.

Во **второй главе** изложены результаты теории экстраполяции, полученные Бьёрном Яверсом, Марио Мильманом и С.В. Асташкиным.

В **третьей главе** диссертации излагаются результаты автора об экстраполяционных свойствах шкалы пространств $\{L_p[0,1]\}_{p<\infty}$ и близких шкал. В этой главе с помощью различных подходов найдено экстраполяционное описание широкого класса симметричных пространств. Напомним, что банахово пространство X измеримых функций на $[0,1]$ называется симметричным, если из неравенства $y^*(t) \leqslant x^*(t)$ для всех $t \in (0,1]$ и условия $x \in X$ вытекает $y \in X$ и $\|y\|_X \leqslant \|x\|_X$ (как и в теореме Яно выше, здесь и везде далее x^* означает невозрастающую функцию на $(0,1]$, равноизмеримую с $|x|$).

Определение 1. Пусть F — банахово идеальное пространство функций, определенных на $[1,+\infty)$, и $L_\infty \subset F$. Рассмотрим симметричное пространство $\mathcal{L}_F$, состоящее из функций $x(t)$ на $[0,1]$ таких, что

$$\xi = \xi(p) := \|x\|_p \in F, \quad \text{и наделенное нормой} \quad \|x\|_{\mathcal{L}_F} := \|\xi\|_F.$$

Симметричное пространство X будем назвать *$\mathcal{F}$-экстраполяционным*, если $X = \mathcal{L}_F$ для некоторого банахова идеального пространства F.

В параграфе 3.1 исследуются общие свойства $\mathcal{F}$-экстраполяционных симметричных пространств, а также изучаются вопросы соответствия свойств сепарабельности и максимальности симметричного пространства специальным свойствам параметра экстраполяции F. Эти результаты, в основном, были получены еще в кандидатской диссертации автора[41] и приводятся в настоящей работе с целью полноты изложения и удобства ссылок.

Параграф 3.2 посвящен сильно экстраполяционным пространствам: их свойствам и характеризации. Понятие сильно экстраполяционного пространства введено автором в работе [1]. Для симметричного пространства X на $[0,1]$ через $\tilde{X}$ обозначим банахово пространство всех измеримых на $[1,\infty)$ функций f таких, что $f(\log(e/t)) \in X$ и

$$\|f\|_{\tilde{X}} := \|f\big(\log(e/t)\big)\|_X.$$

Определение 2 (3.2.2). Будем говорить, что симметричное пространство X *сильно экстраполяционно по отношению к шкале пространств* L_p ($X \in \mathcal{SE}$), если $X = \mathcal{L}_{\tilde{X}}$ (с эквивалентностью норм).

Таким образом, норма каждой функции в любом сильно экстраполяционном симметричном пространстве X эквивалентна норме в X функции $t \in [0,1] \mapsto \|x\|_{\log(e/t)}$, т.е. $\|x\|_X \asymp \big\| \|x\|_{\log(e/t)} \big\|_X$.

Сразу отметим, что класс $\mathcal{SE}$ достаточно широк. В частности, пространства $\operatorname{Exp} L^\beta$, $\beta > 0$, фигурирующие в представленной выше экстраполяционной теореме Зигмунда, принадлежат классу $\mathcal{SE}$.

Для формулировки основной теоремы параграфа 3.2 нам понадобится следующее определение, обобщающее понятие умеренного веса, использованного Б. Яверсом и М. Мильманом при изучении функторов Σ и Δ.

Определение 3 (3.2.3). Банахова идеальное пространство F на $[1,\infty)$ называется *умеренным*, если оператор $Df(p) := f(2p)$ ограничен в F.

В контексте $\mathbf{F}$-метода экстраполяции мы будем говорить об *умеренном параметре экстраполяции.* Свойство умеренности отвечает за устойчивость $\mathbf{F}$-метода по отношению к определенной смене интерполяционной шкалы, что хорошо иллюстрируется следующей теоремой.

Теорема 1 (3.2.4). *Для любого умеренного параметра экстраполяции F и любых двух измеримых функций $q_1 = q_1(p)$ и $q_2 = q_2(p)$ таких, что $q_i(p) \in [1,\infty]$ при всех $i \in \{0,1\}$ и $p \in [1,\infty)$, справедливо*

$$\Big\| \|x\|_{p,\,q_1(p)} \Big\|_F \asymp \Big\| \|x\|_{p,\,q_2(p)} \Big\|_F.$$

В терминах $\mathbf{F}$-метода это означает, что

$$\mathbf{F}\left(\{L_{p,q_1(p)}\}\right) = \mathbf{F}\left(\{L_{p,q_2(p)}\}\right).$$

[41] Лыков К. В. Симметричные пространства, экстраполяционные относительно L_p-шкалы. Диссертация канд. физ.-мат. наук, Самара, 2006. – 107 с.

Следующая теорема, являющаяся одной из самых важных в работе, характеризует сильно экстраполяционные пространства с различных точек зрения.

Теорема 2 (3.2.5). *Для любого симметричного пространства X на $[0,1]$ следующие условия эквивалентны:*
1) $X \in \mathcal{SE}$;
2) оператор $Sx(t) = x(t^2)$ ограничен в X;
3) $X = \mathcal{L}_F$ с некоторым умеренным параметром экстраполяции F;
4) с константами, не зависящими от $x \in X$ и $t > 0$ выполняется соотношение

$$\mathcal{K}(t, x; X, L_\infty) \asymp \mathcal{K}(t, \|x\|_{\log(e/\cdot)}; X, L_\infty),$$

где $\|x\|_{\log(e/s)}$ обозначает L_p-норму функции x с $p = \log(e/s)$, $s \in (0,1]$;
5) существуют $1 \leqslant p \neq q < \infty$ и банахово идеальное пространство G на $[0,\infty)$, промежуточное между L_∞ и $L_\infty(1/t)$ такие, что

$$X = (L_p, L_\infty)^{\mathcal{K}}_G = (L_q, L_\infty)^{\mathcal{K}}_G;$$

6) существует банахово идеальное пространство G на $[0,\infty)$, промежуточное между L_∞ и $L_\infty(1/t)$ такое, что для каждого $p \geqslant 1$

$$X = (L_p, L_\infty)^{\mathcal{K}}_G;$$

7) существует банахово идеальное пространство G на $[0,\infty)$, промежуточное между L_∞ и $L_\infty(1/t)$ такое, что оператор $Tf(t) := f(t^2)/t$ ограничен в G и

$$X = (L_1, L_\infty)^{\mathcal{K}}_G;$$

8) с константами, не зависящими от x, имеет место следующая эквивалентность (дискретный вариант экстраполяционного соотношения)

$$\|x\|_X \asymp \Big\| \sum_{k=1}^{\infty} \|x\|_k \chi_{(e^{-k}, e^{-k+1}]} \Big\|_X;$$

9) для некоторого $C > 0$ и всех $x \in X$

$$\Big\| \sum_{k=1}^{\infty} \|x^* \chi_{(e^{-2k}, e^{-2k+1})}\|_k \chi_{(e^{-k}, e^{-k+1})} \Big\|_X \leqslant C\|x\|_X;$$

10) для любого $q \in [1,\infty]$

$$\|x\|_X \asymp \big\| \, \|x\|_{\log(e/\cdot),\, q} \big\|_X \, ,$$

где через $\|x\|_{\log(e/t),\, q}$ обозначена норма функции x в пространстве $L_{p,q}$ при $p = \log(e/t)$, и эта $L_{p,q}$-норма рассматривается как функция от t;
11) существует такое $q \in [1,\infty]$, что

$$\|x\|_X \asymp \big\| \, \|x\|_{\log(e/\cdot),\, q} \big\|_X \, .$$

Для некоторых конкретных классов симметричных пространств можно получить более удобные критерии сильной экстраполяционности.

Определение 4 (3.2.14). Для квазивогнутой функции $\varphi = \varphi(t)$ на отрезке $[0,1]$ будем говорить, что она удовлетворяет Δ^2-условию и писать $\varphi \in \Delta^2$, если для некоторой константы $C > 0$ и всех $t \in [0,1]$ выполняется неравенство $\varphi(t) \leqslant C\varphi(t^2)$.

Определение 5 [42]**.** Симметричное пространство X называется *ультрасимметричным*, если оно является интерполяционным относительно банаховой пары $(\Lambda(\varphi), \mathcal{M}(\varphi))$ (здесь и далее $\Lambda(\varphi)$ и $\mathcal{M}(\varphi)$ — пространства Лоренца и Марцинкевича соответственно с фундаментальной функцией φ).

Теорема 3 (3.2.25). *Ультрасимметричное пространство X сильно экстраполяционно тогда и только тогда, когда его фундаментальная функция удовлетворяет Δ^2-условию.*

Следующая теорема описывает сильно экстраполяционные пространства Орлича-Лоренца.

Теорема 4 (3.2.36). *(i) Если $\varphi \in \Delta^2$, то $\Lambda_M(\varphi) \in \mathcal{SE}$ и $\Lambda_M(\varphi) = \mathcal{L}_F$, где F — пространство Орлича $L_M(dm)$ на полуоси $[1,\infty)$ с мерой $dm = \varphi'(e^{-p})e^{-p}dp$.*

(ii) Если же функция M удовлетворяет Δ_2-условию $M(2u) \leqslant CM(u)$ для всех $u > u_0$, то верно и обратное: из $\Lambda_M(\varphi) \in \mathcal{SE}$ следует $\varphi \in \Delta^2$.

Конструкция сильно экстраполяционного пространства включает широкий класс симметричных пространств, часто встречающихся в приложениях. Она также охватывает пространства из работ Яверса и Мильмана, получаемые функтором пересечения Δ с умеренным весом.

Понятие сильно экстраполяционного пространства переносится и на другие шкалы пространств. В диссертации доказаны соответствующие теоремы для шкалы пространств числовых последовательностей $\{\ell_p\}_{1<p<\infty}$, шкалы классов Шаттена-фон Неймана $\{S_p\}_{1<p<\infty}$ и абстрактной шкалы пространств $\{\vec{A}_{\theta,q}\}_{\theta\in(0,1)}$ вещественного метода интерполяции относительно вложенной банаховой пары (A_0, A_1), $A_0 \subset A_1$.

Теорема 5 (3.2.43). *Пусть X — симметричное пространство односторонних числовых последовательностей, и норма в X имеет следующее интерполяционное представление:*

$$\|x\|_X \asymp \left\| \left\{ \sum_{j=1}^{n} x_j^* \right\}_{n=1}^{\infty} \right\|_F,$$

[42]Pustylnic E. Ultrasymmetric spaces // Journal of the London Mathematical Society. – 2003. – V. 68. – No. 1. – P. 165–182.

где F — некоторое банахово идеальное пространство последовательностей. Предположим также, что в F действует ограниченно оператор $S : \{f_n\} \to \{f_{n^2}\}$. Тогда, если $p(n) = \frac{\log n}{\log n-1}$ при $n \geqslant 3$, и $p(1) = p(2) = \infty$, то

$$\|x\|_X \asymp \left\| \left\{ \|x\|_{\ell_{p(n)}} \right\}_{n=1}^{\infty} \right\|_F.$$

Пусть теперь $\mathcal{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство. Напомним, что класс Шаттена-фон Неймана S_p состоит из компактных операторов $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, для которых конечна норма $\|T\|_p := \left(\sum_{j=1}^{\infty} s_j^p\right)^{1/p}$, где $\{s_j\}_{j=1}^{\infty}$ — невозрастающая последовательность s-чисел оператора T, определяемая разложением Шмидта. С помощью теоремы 5 (3.2.43) в диссертации получен следующий результат об экстраполяционном описании симметрично-нормированных идеалов компактных операторов, действующих в $\mathcal{H}$.

Теорема 6 (3.2.46). *Предположим, что банахово пространство F удовлетворяет условию теоремы 5 (3.2.43), а $\mathcal{X}$ — симметрично-нормированный идеал компактных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, определяемый условием конечности нормы*

$$\|T\|_{\mathcal{X}} := \left\| \left\{ \sum_{j=1}^{n} s_j \right\}_{n=1}^{\infty} \right\|_F,$$

где $\{s_j\}_{j=1}^{\infty}$ — невозрастающая последовательность s-чисел оператора T.

Тогда

$$\|T\|_{\mathcal{X}} \asymp \left\| \left\{ \|T\|_{p(n)} \right\}_{n=1}^{\infty} \right\|_F,$$

где $\|T\|_{p(n)}$ — норма Шаттена-фон Неймана оператора T в $S_{p(n)}$ при $p(n) = \frac{\log n}{\log n-1}$, $n \geqslant 3$, и $\|T\|_{p(1)} = \|T\|_{p(2)} := \|T\|_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}}$.

В качестве примера приложения теоремы 6 (3.2.46) получен результат о связи между попаданием действительной и мнимой компоненты вольтеррова оператора в определенные симметрично-нормированные идеалы. Напомним, что компактный оператор называется вольтерровым, если его спектр состоит из одной точки $\{0\}$. Обозначим через

$$T_{\mathcal{R}} := \frac{1}{2}(T + T^*) \quad \text{и} \quad T_{\mathcal{J}} := \frac{1}{2i}(T - T^*),$$

соответственно, действительную и мнимую компоненту оператора T. Напомним, что согласно результату В.И. Мацаева[43], для вольтеррова оператора T из условия $T_{\mathcal{J}} \in S_p$, $1 < p < \infty$, следует $T_{\mathcal{R}} \in S_p$. Кроме того, если $A_{\mathcal{J}} \in S_1$,

[43]Мацаев В. И. О вольтерровых операторах, получаемых возмущением самосопряженных // Доклады АН СССР. – 1961. – Т. 138. – № 4. – С. 810–813.

то $A_{\mathcal{R}} \in S_\Omega$ [44], где симметрично-нормированный идеал $\mathcal{S}_\Omega$ состоит из операторов, для которых конечна норма

$$\|A\|_\Omega := \sup_n \frac{\sum_{j=1}^n s_j(A)}{\log(en)}.$$

Обобщением последнего результата является следующая теорема.

Теорема 7 (3.2.48). *Предположим, что симметрично-нормированный идеал $\mathcal{X}$ удовлетворяет условиям теоремы 6 (3.2.46), T — вольтерров оператор, и $T_{\mathcal{J}} \in \mathcal{X}$. Тогда $T_{\mathcal{R}} \in \mathcal{X}(\log^{-1})$, где идеал $\mathcal{X}(\log^{-1})$ определяется условием конечности нормы*

$$\|T\|_{\mathcal{X}(\log^{-1})} := \left\| \left\{ \frac{1}{\log(en)} \sum_{j=1}^n s_j \right\}_{n=1}^\infty \right\|_F.$$

Завершает параграф 3.2 раздел 3.2.4, посвященный пространствам, интерполяционным относительно вложенной банаховой пары (A_0, A_1). В этом разделе доказана следующая теорема.

Теорема 8 (3.2.50). *Пусть $\vec{A} = (A_0, A_1)$ — банахова пара, $A_0 \subset A_1$, а X — пространство $\mathcal{K}$-метода вещественной интреполяции:*

$$\|x\|_X := \|\mathcal{K}(\cdot, x; \vec{A})\|_F.$$

Предположим, что в банаховом идеальном пространстве F ограничен оператор

$$S: \ f(t) \to f(t^2).$$

Тогда для любого $q \in [1, +\infty]$

$$\|x\|_X \asymp \left\| \|x\|_{\theta(\cdot),q} \cdot \chi_{(e,+\infty)}(\cdot) \right\|_F,$$

где $\theta(t) = \log^{-1} t$, а

$$\|x\|_{\theta,q} := (q\theta(1-\theta))^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^\infty \left(s^{-\theta} \mathcal{K}(s, x; \vec{A}) \right)^q \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Следующие параграфы главы 3 посвящены экстраполяционному описанию широких классов пространств Орлича L_M и Марцинкевича $\mathcal{M}(\varphi)$, включающих сильно экстраполяционные пространства Орлича и Марцинкевича как относительно узкий подкласс.

[44] Гохберг И. Ц, Крейн М. Г. К теории треугольных представлений несамосопряженных операторов // Доклады АН СССР. – 1961. – Т. 137. – № 5. – С. 1034–1037.

Теорема 9 (3.3.7). *Пусть функция M при достаточно больших u имеет вид $M(u) = e^{N(\log u)}$, где $N(t)$ — выпуклая функция, удовлетворяющая условию $\lim_{t\to\infty} N(t)/t = \infty$. Если для некоторого C справедливо*

$$e^{N(t)} \leqslant \int_1^\infty e^{pt - N^*(p) + Cp}\, dp \quad \text{при} \quad t \geqslant t_0,$$

где $N^*(p) = \sup_{t>0}\{pt - N(t)\}$, то $L_M = \mathcal{L}_{L_\infty(\omega)}$ при $\omega = \omega(p) = e^{-\frac{N^*(p)}{p}}$.

Эта теорема позволяет дать простое экстраполяционное описание для широкого класса пространств Орлича, являющихся сильно экстраполяционными лишь в случае, когда $2N(t) \leqslant N(a+t)$ для некоторого $a > 0$ и всех $t > 0$. В параграфе 3.3 приведены различные конкретные примеры, а также доказаны теоремы об экстраполяционном описании пространств Орлича с другими условиями. Там же дана следующая экстраполяционная характеризация пространств Орлича, порожденных аналитическими функциями.

Теорема 10 (3.3.22). *Пусть*

$$M(u) = \sum_{k=1}^\infty a_k |u|^k, \quad a_k \geqslant 0.$$

Тогда

$$x \in L_M \quad \Leftrightarrow \quad \sup_{p\in\mathbb{N}} \|x\|_p a_p^{1/p} < \infty.$$

Параграф 3.4 посвящен вопросу устойчивости **F**-метода по отношению к замене базовой шкалы $\{L_p\}_{1\leqslant p<\infty}$ на шкалу $\{L_{p,\infty}\}_{1\leqslant p<\infty}$. Из абстрактной теории экстраполяции Яверса и Мильмана следует, что значения Δ-функтора на шкалах $\{\omega(p)L_{p,q}\}_{1\leqslant p<\infty}$ при различных фиксированных значениях q совпадают, если только положительный вес $\omega(p)$ обладает свойством умеренности: $\omega(2p) \leqslant C\omega(p)$. Оказывается, **F**-метод обладает также следующим свойством устойчивости, являющимся специфическим для шкалы пространств L_p на отрезке.

Теорема 11 (3.4.1). *Предположим, что в банаховом идеальном пространстве F ограниченно действует оператор $T: \ f(p) \to f(p + e^{-p})$. Тогда*

$$\big\|\|x\|_p\big\|_F \asymp \big\|\|x\|_{p,\infty}\big\|_F.$$

Эта теорема показывает, что для описания $\mathcal{F}$-экстраполяционных пространств по отношению к шкале $\{L_p\}_{1\leqslant p<\infty}$ можно вычислять значения **F**-функтора на шкале $\{L_{p,\infty}\}_{1\leqslant p<\infty}$. В случае, когда параметр экстраполяции F совпадает с пространством $L_\infty(\omega(p))$, этот способ оказывается особенно эффективным. Простое достаточное условие на вес функтора пересечения, при котором получается пространство Марцинкевича, дает следующая теорема.

Теорема 12 (3.4.10). *Пусть $\omega(p) = \psi(e^{-p})$ или $\omega(p) = \psi(e^{-e^p})$ для некоторой возрастающей функции ψ на $[0,1]$ со свойством $\psi(et) \leqslant C\psi(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1/e$, и пусть функция φ определена по формуле*

$$\varphi(t) \asymp \sup_{p\geqslant 1} \omega(p)\, t^{1/p}, \qquad 0 < t \leqslant 1.$$

Тогда имеет место экстраполяционное соотношение

$$\Delta_{1\leqslant p<\infty}\left(\omega(p)L_p\right) = \Delta_{1\leqslant p<\infty}\left(\omega(p)L_{p,\infty}\right) = \mathcal{M}(\varphi).$$

Кроме того, пространство Марцинкевича $\mathcal{M}(\varphi)$ совпадает с пространством Орлича L_Φ, построенном по функции M, определяемой как

$$\Phi(u) = \sup_{p\geqslant 1} \omega(p)^p u^p \quad \text{для всех } u \geqslant 0.$$

Представляет интерес и обратная задача: по заданному симметричному пространству понять, описывается ли оно как $\mathcal{F}$-экстраполяционное по отношению к шкале $\{L_p\}$ и/или по отношению к шкале $\{L_{p,\infty}\}$, и когда соответствующие параметры экстраполяции совпадают. В параграфе 3.4 вводится класс $\mathcal{E}'_{\mathcal{F}}$ пространств, получаемых с помощью **F**-метода, примененного к шкале $\{L_{p,\infty}\}$, и доказывается теорема, описывающая все $\mathcal{F}$-экстраполяционные по отношению к этой шкале пространства Марцинкевича. В частности, показано, что $\mathcal{M}(\varphi) \in \mathcal{E}'_{\mathcal{F}}$ тогда и только тогда, когда $\varphi(t) \asymp e^{\psi(\log t)}$, где $\psi(s)$ — выпуклая функция на $(-\infty, 0]$. При этом оказывается, что как в случае шкалы $\{L_{p,\infty}\}$, так и в случае шкалы $\{L_p\}$ все $\mathcal{F}$-экстраполяционные пространства Марцинкевича могут быть описаны и с помощью функтора пересечения Δ.

Четвертая глава диссертации посвящена вопросам экстраполяции операторов, которые как раз и являлись основным мотивом для создания экстраполяционных функторов и конструкций.

Конструкция сильно экстраполяционного пространства позволяет получать точные экстраполяционные теоремы для операторов с определенным ростом норм в шкале $\{L_p\}$. Пусть пространство $X(\log^{-\alpha})$ состоит из всех таких измеримых функций $x(t)$, что $x^{**}(t)\log^{-\alpha}(e/t) \in X$, и снабжено нормой $\|x\|_{X(\log^{-\alpha})} = \|x^{**}(t)\log^{-\alpha}(e/t)\|_X$, где, как обычно, $x^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t x^*(s)\,ds$.

Теорема 13 (4.1.4). *Пусть оператор T действует ограниченно в пространствах L_p для всех $p \geqslant p_0 \geqslant 1$, и для некоторых $\alpha > 0$ и $C > 0$*

$$\|T\|_{L_p\to L_p} \leqslant Cp^\alpha \ \ (p \geqslant p_0). \qquad (*)$$

Тогда для произвольного сильно экстраполяционного симметричного пространства X оператор T действует ограниченно из X в $X(\log^{-\alpha})$.

Кроме того, существует удовлетворяющий условию $(*)$ линейный оператор T_0 со следующим свойством: если T_0 ограничен из $X \in \mathcal{SE}$ в симметричное пространство Y, то

$$X(\log^{-\alpha}) \subset Y.$$

В теореме 13 (4.1.4) предполагалось, что оператор имеет степенной рост норм в шкале $\{L_p\}_{p<\infty}$. Результаты параграфа 3.2 позволяют сформулировать аналогичные экстраполяционные теоремы для шкал $\{L_{p,q}\}$, $\{\ell_p\}$, $\{S_p\}$ и $\vec{A}_{\theta,q}$. Кроме того, результаты параграфов 3.3 и 3.4 позволяют сформулировать и доказать подобные теоремы не только для сильно экстраполяционных пространств. При этом рост норм операторов может быть произвольный, а не только степенной. В качестве иллюстрации приведем следующее утверждение.

Теорема 14 (4.1.10). *Предположим, что оператор T ограничен в $L_p[0,1]$ для всех $p \in (p_0, \infty)$, и*

$$\|T\|_{L_p \to L_p} = b(p), \quad p \in (p_0, \infty), \quad b(p) \uparrow +\infty \ \text{ при } p \to +\infty.$$

Пусть, кроме того, $N_0(t)$ — выпуклая функция, $\lim_{t\to+\infty} N_0(t)/t = +\infty$, а пространство Орлича L_M, построенное по функции $M(u) = e^{N(\log u)}$, где

$$N(t) = \left(N_0^*(p) + p \log b(p)\right)^*,$$

совпадает с пространством Марцинкевича.

Тогда оператор T ограничен из L_{M_0} в L_M, где $M_0(u) = e^{N_0(\log u)}$.

В параграфе 4.2 исследуется вопрос о распространении свойства ограниченности сублинейного оператора со значениями в фиксированном квазибанаховом пространстве, со шкалы пространств $\{L_p\}_{p>1}$ на более широкие пространства. Фактически, речь идет о прямом обобщении классической теоремы Яно на случай квазинормированного образа. Через $\mathcal{S}$ (соответственно $\overline{\mathcal{S}}$, $\overline{\mathcal{S}}_+$) обозначим множество всех измеримых почти всюду конечных (соответственно принимающих значения $\pm\infty$, неотрицательных с возможными значениями $+\infty$) функций на $[0,1]$.

Напомним, что векторное пространство Y называется квазибанаховым с константой $K \geqslant 1$, если оно полно относительно топологии квазинормы — функционала на Y, обладающего свойствами:
1) $\|y\|_Y > 0$ при $y \neq 0$, 2) $\|\lambda y\|_Y = |\lambda| \|y\|_Y$, 3) $\|y+z\|_Y \leqslant K(\|y\|_Y + \|z\|_Y)$.
Если $K = 1$, то мы имеем дело с банаховым пространством. В этом случае при наличии условия поточечной оценки на оператор T как в теореме Яно и оценок вида $\|T\|_{L_p \to Y} \leqslant \tau(p)$ с помощью экстраполяционного функтора

суммы Σ получаем, что оператор T ограничен из $\sum_{p>1}\tau(p)L_p$ в Y. Если же $K>1$, то в общем случае можно говорить лишь о более узком пространстве $\sum_{j=1}^{\infty}\tau(p_j)K^jL_{p_j}$. С помощью оптимизации выбора последовательности $\{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ и свойства устойчивости, двойственного свойству устойчивости из параграфа 3.4, в случае специального роста $\tau(p)$ при $p\to 1$, результирующее пространство можно вычислить явно.

Теорема 15 (4.2.14). *Пусть Y — квазибанахово пространство, непрерывно вложенное в отделимое топологическое векторное пространство $\mathcal{B}$. Предположим, что линейный оператор T для каждого $p>1$ ограниченно действует из $L_p[0,1]$ в Y,*

$$\|T\|_{L_p\to Y}\leqslant C\Big(\frac{p}{p-1}\Big)^{\alpha},\ \text{где } C,\ \alpha>0 \text{ не зависят от } p,$$

и, кроме того, T непрерывно действует из пространства Лоренца $\Lambda(\psi)$ в $\mathcal{B}$, где

$$\psi(t):=t\log^{\alpha}(b/t)\exp\big(A\sqrt{\log\log(b/t)}\,\big)$$

с некоторыми $A>2\sqrt{\alpha\log K}$ и $b>e^{A+\alpha+1}$.

Тогда T ограниченно действует из пространства Лоренца $\Lambda(\psi)$ в Y.

Аналогичный результат имеет место и для сублинейного оператора, принимающего значения в квазибанаховом идеальном пространстве (теорема 4.2.17 диссертации). В некоторых случаях эти теоремы допускают уточнения.

Определение 6 [45]**.** Квазибанахово пространство называется *логарифмически выпуклым*, если при некотором $C>0$ в нем выполняется неравенство:

$$\Big\|\sum_{j=1}^{\infty}x_j\Big\|_Y\leqslant C\sum_{j=1}^{\infty}(1+\log j)\|x_j\|_Y.$$

Например, пространство $L_{1,\infty}$ с квазинормой

$$\|x\|_{1,\infty}:=\sup_{t\in(0,1]}tx^*(t)=\sup_{y>0}y\mu\{t:|x(t)|>y\}$$

является логарифмически выпуклым[46].

Для логарифмически выпуклого пространства-образа в разделе 4.2.5 доказано следующее утверждение.

Теорема 16 (4.2.23). *Пусть Y — логарифмически выпуклое идеальное пространство, $Y\subset\mathcal{S}$, а T — сублинейный оператор, определенный на $\Lambda(\psi)$, $\psi(t)\asymp t\log^{\alpha}(b/t)\ \log\log\log(b/t)$, $b>e^e$, и принимающий значения в $\overline{\mathcal{S}}$.*

[45] Kalton N. J. Convexity, type and the three space problem // Studia Mathematica. – 1981. – V. 69. – No. 3. – P. 247–287.

[46] Stein E. M., Weiss E. M. On the Convergence of Poisson Integrals // Transactions of the AMS. – 1969. – V. 140. – P. 35–54.

Тогда, если при всех $p > 1$ оператор T действует из L_p в Y с нормой

$$\|T\|_{L_p \to Y} \leqslant C\Big(\frac{p}{p-1}\Big)^{\alpha},$$

то T действует ограниченно из $\Lambda(\psi)$ в Y.

В разделе 4.2.6 рассматриваются примеры, иллюстрирующие необходимость различных условий в сформулированных выше теоремах. В частности, доказан следующий результат, проявляющий некоторые трудности, возникающие при работе с ненормируемыми пространствами.

Теорема 17 (4.2.25). *Пусть $\psi(t)$ возрастающая непрерывная вогнутая функция на $[0,1]$, $\psi(0) = 0$, пространство Лоренца $\Lambda(\psi)$ не совпадает с L_1, а Y — квазибанахово ненормируемое идеальное пространство, $Y \subset \mathcal{S}$. Тогда существует оператор, определенный на L_1, принимающий значения в $\overline{\mathcal{S}}_+$, и удовлетворяющий следующим свойствам:*
1) если $|x| \leqslant |y| \in L_1$, то $Tx \leqslant Ty$;
2) $T(\lambda x) = |\lambda| Tx$ для произвольных $\lambda \in \mathbb{R}$ и $x \in L_1$
3)

$$\text{если } \ x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \ \text{ в } L_1, \ \text{ то } Tx \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} Tx_i;$$

4)

$$\sup_{A \subset [0,1]} \frac{\|T\chi_A\|_Y}{\psi(\mu A)} < \infty, \quad \text{где } \ \chi_A \ \text{ — индикатор множества } A, \ \mu A \text{— мера } A;$$

5)

$$\sup_{x \in \mathcal{P}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_{\Lambda(\psi)}} = \infty, \quad \text{где } \ \mathcal{P} \ \text{ — множество всех конечнозначных функций.}$$

Пятая глава посвящена приложениям построенной в третьей главе теории и полученных в четвертой главе теорем об операторах к некоторым классическим проблемам анализа. В частности, с помощью теории экстраполяции найдены новые условия определенности в вероятностной проблеме моментов и критерии безусловности разреженных хаосов Радемахера в симметричных пространствах.

В параграфе 5.2 исследуется связь между теорией экстраполяции и классической проблемой моментов. Напомним, что моментом порядка n измеримой функции на $[0,1]$ называется величина

$$\mu_n = \int_0^1 x(t)^n \, dt.$$

Аналогично определяются моменты случайной величины X, заданной на произвольном вероятностном пространстве. Обозначим через $\mathcal{E}$ линейное пространство $\bigcap_{p<\infty} L_p$. Говорят, что функция $x \in \mathcal{E}$ имеет определенную проблему моментов Гамбургера (в этом случае мы пишем $x \in \mathcal{D}$), если из условий $y \in \mathcal{E}$ и

$$\int_0^1 y(t)^n\,dt = \int_0^1 x(t)^n\,dt, \quad \text{для всех } \ n \in \mathbb{N},$$

следует, что распределения у x и y совпадают, т.е.

$$\mu\{t \in [0,1] : x(t) > \tau\} = \mu\{t \in [0,1] : y(t) > \tau\} \quad \text{для всех } \tau \in \mathbb{R}.$$

Если же такого свойства нет, то говорят, что проблема моментов Гамбургера *неопределенная*. Хорошо известно, что множества $\mathcal{D}$ и $\mathcal{E}\backslash\mathcal{D}$ не пусты. Так, если x стандартная гауссовская случайная величина, то $x, x^2, x^4 \in \mathcal{D}$, но $x^3 \in \mathcal{E}\backslash\mathcal{D}$ [47]. Известно, что проблема моментов Гамбургера является определенной для каждой функции x, удовлетворяющей *условию Крамера*: $x \in \mathrm{Exp}L$, или более точному *условию Карлемана*: $\sum_{p\in\mathbb{N}} 1/\|x\|_p = \infty$, пишем $x \in \mathcal{C}$. Следовательно, имеют место следующие строгие включения

$$L_\infty \subset \mathrm{Exp}L \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{E}.$$

Существенная часть параграфа 5.2 посвящена характеризации симметричных пространств, вложенных в $\mathcal{C}$ или $\mathcal{D}$. Отметим сразу, что аппроксимация классов $\mathcal{C}$ или $\mathcal{D}$ симметричными пространствами сверху не имеет смысла, это следует из следующего утверждения, доказанного автором в диссертации. Через $\mathsf{E}X$ мы обозначаем математическое ожидание случайной величины X.

Теорема 18 (5.2.12). *Пусть $X \in \mathcal{E}$, т.е. X — случайная величина на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ такая, что $\mathsf{E}|X|^n < \infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда существуют случайные величины Y и Z на том же вероятностном пространстве такие, что:*
1) $X = Y + Z$;
2) Y и Z имеют дизъюнктные носители на Ω;
3) $Y(\Omega) \cap Z(\Omega) \subset \{0\}$;
4) для Y и Z также конечны все моменты, и, кроме того, выполнено условие Карлемана определенности проблемы моментов Гамбургера.

В работе доказаны теоремы о симметричных пространствах с определенной проблемой моментов Гамбургера. Приведем здесь результат для пространств Орлича. Напомним, что класс Орлича $\tilde{L}_M$ состоит из таких функций $x(t)$ на отрезке $[0,1]$, для которых $\int_0^1 M(|x(t)|)\,dt < \infty$. Через L_M^0 мы обозначаем сепарабельную часть пространства Орлича L_M.

[47] Berg C. The Cube of a Normal Distribution is Indeterminate // Annals of Probability. – 1988. – V. 16. – No. 2. – P. 910–913.

Теорема 19 (5.2.22). *Пусть функция Орлича $M(u)$ удовлетворяет условию: $M(u)^2 \leqslant M(Cu)$ при некотором $C > 0$ и достаточно больших u. Тогда каждое из следующих включений*

$$1)\ L_M \subset \mathcal{C},\ \ 2)\ L_M \subset \mathcal{D},\ \ 3)\ L^0_M \subset \mathcal{C},\ \ 4)\ L^0_M \subset \mathcal{D},\ \ 5)\ \tilde{L}_M \subset \mathcal{C},\ \ 6)\ \tilde{L}_M \subset \mathcal{D}$$

равносильно условию

$$7) \quad \int_1^\infty \frac{M'(u)}{M(u)}\,\frac{du}{u} = \infty.$$

Следствие 1 (5.2.24). *Предположим, что случайная величина ξ такова, что при достаточно большом $C > 0$ случайная величина*

$$\eta = \frac{\xi}{\log(|\xi| + C) \cdot \log\log(|\xi| + C) \cdot \ldots \cdot \log\log\ldots\log(|\xi| + C)}$$

удовлетворяет условию Крамера: $\mathsf{E}\exp(\varepsilon|\eta|) < \infty$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда проблема моментов Гамбургера определенная для ξ.

Следующий результат уточняет результат работы К.Берга[47] о проблеме моментов для степеней стандартной гауссовской случайной величины $\mathfrak{g}$.

Следствие 2 (5.2.25). *Пусть $a > 0$, $b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и пусть $C \in \mathbb{R}$ такое, что n-кратный логарифм $\log\log\ldots\log C$ корректно определен и положителен. Тогда проблема моментов Гамбургера для случайной величины*

$$\eta = \operatorname{sign}(\mathfrak{g})\cdot|\mathfrak{g}|^a\cdot(\log(|\mathfrak{g}|+C))^{b_1}\cdot(\log\log(|\mathfrak{g}|+C))^{b_2}\ldots(\log\log\ldots\log(|\mathfrak{g}|+C))^{b_n}$$

определенная тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих $n + 1$ условий:
1) $a \in (0, 2)$; 2) $a = 2$, $b_1 < 1$; … n) $a = 2$, $b_1 = \ldots = b_{n-2} = 1$, $b_{n-1} < 1$;
n+1) $a = 2$, $b_1 = \ldots = b_{n-1} = 1$, $b_n \leqslant 1$.

В работе доказаны аналогичные утверждения и для классов $\mathcal{C}_+$ и $\mathcal{D}_+$, соответствующих проблеме моментов Стилтьеса. Мы пишем $x \in \mathcal{D}_+$, если из условий $y \in \mathcal{E}$ и

$$\int_0^1 |y(t)|^n\,dt = \int_0^1 |x(t)|^n\,dt, \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N},$$

следует, что распределения функций $|x|$ и $|y|$ совпадают. Например, если x стандартная гауссовская случайная величина, то x, x^2, x^3, $x^4 \in \mathcal{D}_+$, но $x^5 \in \mathcal{E}\backslash\mathcal{D}_+$ [48]. Класс функций $x \in \mathcal{E}$, удовлетворяющих следующему условию

$$\sum_{p\in\mathbb{N}} \|x\|_p^{-1/2} = \infty,$$

[48] Stoyanov J. M. Counterexamples in Probability, Third edition. – New York: Dover Publications, 2013.

будем обозначать через $\mathcal{C}_+$. Известно, что $\mathcal{C}_+ \subset \mathcal{D}_+$. В работе доказаны теоремы о вложениях симметричных пространств в классы $\mathcal{C}_+$ и $\mathcal{D}_+$. Сформулируем здесь только результат о пространствах Орлича.

Теорема 20 (5.2.31). *Пусть функция Орлича $M(u)$ удовлетворяет условию: $M(u)^2 \leqslant M(Cu)$ при некотором $C > 0$ и достаточно больших u. Тогда каждое из следующих включений*

$$1)\ L_M \subset \mathcal{C}_+\,,\ \ 2)\ L_M \subset \mathcal{D}_+\,,\ \ 3)\ L_M^0 \subset \mathcal{C}_+\,,$$

$$4)\ L_M^0 \subset \mathcal{D}_+\,,\ \ 5)\ \tilde{L}_M \subset \mathcal{C}_+\,,\ \ 6)\ \tilde{L}_M \subset \mathcal{D}_+\,,$$

равносильно условию

$$7)\qquad \int_1^\infty \frac{M'(u)}{M(u)}\,\frac{du}{\sqrt{u}} = \infty.$$

В параграфе 5.2 доказаны и другие утверждения, связанные с проблемой моментов. Например, в разделе 5.2.2 показано что совпадение всех целых моментов не гарантирует неравенства $\|\xi\|_p \leqslant C\|\eta\|_p$ ни с какой константой C даже при фиксированном нецелом p, и, кроме того, отношение $\|\xi\|_p/\|\eta\|_p$ может быть неограниченным.

Предложение 1 (5.2.1). *Для любой последовательности $\{C_j\}_{j=1}^\infty$ положительных чисел существуют неотрицательные случайные величины ξ и η такие, что:*
1) $\mathsf{E}\xi^n = \mathsf{E}\eta^n < \infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$;
2) для всех натуральных j

$$\frac{\mathsf{E}\xi^{j+1/2}}{\mathsf{E}\eta^{j+1/2}} \geqslant C_j.$$

В разделе 5.2.5 показано, что важное для теории интерполяции свойство $\mathcal{K}$-делимости не имеет прямого аналога для рассматриваемых экстраполяционных конструкций.

Предложение 2 (5.2.11). *Для каждого $p \geqslant 1$ существует невозрастающие неотрицательные функции x и y_k, $k \in \mathbb{N}$, такие, что:*
1) $y_k \in L_\infty$ для всех $k \in \mathbb{N}$;
2) $\|x\|_q \leqslant \|\sum_{k=1}^\infty y_k\|_q \leqslant \sum_{k=1}^\infty \|y_k\|_q < \infty$ для всех $q \in [1,\infty)$;
3) для произвольного представления $x = \sum_{k=1}^\infty x_k$ (со сходимостью по мере)

$$\sup_{k\in\mathbb{N},q\in[p,\infty)} \frac{\|x_k\|_q}{\|y_k\|_q} = \infty.$$

В параграфе 5.3 исследуется проблема поведения последовательности хаосов Радемахера в симметричных пространствах. Изучаются те свойства этой последовательности, которые важны в геометрии банаховых пространств. В частности, рассматриваются вопросы, связанные с безусловной базисностью этой последовательности.

Как обычно, функции Радемахера определяются следующим образом: если $0 \leqslant t \leqslant 1$, то $r_n(t) := \operatorname{sign}(\sin(2^n \pi t))$, $n = 1, 2, \ldots$ Они стохастически независимы, симметрично распределены, и образуют неполную ортонормированную последовательность на $[0, 1]$. Согласно классическому неравенству Хинчина[49], для любого $p \geqslant 1$ и произвольных $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots$,

$$\Big\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \Big\|_{L_p[0,1]} \leqslant \sqrt{p} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \Big)^{1/2}.$$

Неравенство Хинчина вызвало большое количество исследований и обобщений, оно нашло многочисленные применения в различных разделах анализа. В частности, по известной теореме Родина-Семенова[50] последовательность $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ эквивалентна в симметричном функциональном пространстве X каноническому базису в ℓ_2 тогда и только тогда, когда $X \supset G_2$, где G_2 — сепарабельная часть пространства Орлича $\mathrm{Exp}L^2$.

Определение 7. Хаосом Радемахера порядка $d \in \mathbb{N}$ будем называть множество всех функций вида $r_{i_1 i_2 \ldots i_d}(t) := r_{i_1}(t) \cdot r_{i_2}(t) \cdot \ldots \cdot r_{i_d}(t)$, где $i_1 > i_2 > \ldots > i_d \geqslant 1$.

Напомним, что последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ элементов банахова пространства X называется *базисной*, если она является базисом в замыкании своей линейной оболочки. Если же для любой биекции $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ последовательность $\{x_{\pi(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ также будет базисной, то $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется *безусловной базисной последовательностью.*

Теорема 21 (5.3.9). *Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность независимых симметрично распределенных функций (случайных величин) на $[0, 1]$, $x_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots$, такая, что все функции вида*

$$x_{i_1 i_2 \ldots i_d} = x_{i_1 i_2 \ldots i_d}(t) := x_{i_1}(t) x_{i_2}(t) \ldots x_{i_d}(t), \; t \in [0, 1],$$

принадлежат симметричному пространству X. Тогда последовательность $\{x_{i_1 i_2 \ldots i_k}\}_{i_1 > i_2 > \ldots > i_k,\, k \leqslant d}$, рассматриваемая в лексикографическом порядке, является базисной в X.

[49] Khintchine A. Über dyadische Brüche // Mathematische Zeitschrift. – 1923. – V. 18. – P. 109–116.

[50] Rodin V. A., Semyonov E. M. Rademacher series in symmetric spaces // Anal. Math. – 1975. – V. 1. – No. 3. – P. 207–222.

Следствие (5.3.11). *Для произвольного натурального d хаос Радемахера $\{r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_d}\}_{i_1 > i_2 > \dots i_d}$, рассматриваемый как подсистема системы Уолша в нумерации Пэли, является базисной последовательностью в любом симметричном пространстве X.*

Раздел 5.3.4 посвящен вопросам безусловности хаоса Радемахера дробной комбинаторной размерности[51]. Через $|Z|$ мы обозначаем количество элементов конечного множества Z, а $\mathbb{N}^d := \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}$ (d множителей), где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел.

Определение 8. Будем говорить, что множество $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}^d$ *имеет комбинаторную размерность* α, если
1) существует $C > 0$ такое, что для любого набора множеств $A_1, A_2, \dots, A_d \subset \mathbb{N}$, $|A_1| = |A_2| = \dots = |A_d| = m$,

$$|\mathcal{A} \cap (A_1 \times A_2 \times \dots \times A_d)| < Cm^\alpha;$$

2) существует $c > 0$ такое, что для любого $m \in \mathbb{N}$ найдутся множества $A_1, A_2, \dots, A_d \subset \mathbb{N}$, $|A_1| = |A_2| = \dots = |A_d| = m$, для которых

$$|\mathcal{A} \cap (A_1 \times A_2 \times \dots \times A_d)| > cm^\alpha.$$

Известно, что для каждого вещественного $\alpha \in [1, d]$ существует множество размерности α [52]. В книге также показывается, что свойства многих объектов, параметрически зависящих от подмножеств декартовых произведений счетных множеств, определяются не конкретной структурой этих подмножеств, а именно их комбинаторной размерностью. Отметим, что в самом тексте диссертации мы используем и другие, менее требовательные к множеству $\mathcal{A}$, определения размерности.

Через $\triangle^d$, $d \in \mathbb{N}$, будем обозначать "нижнетреугольную" часть $\mathbb{N}^d$, т.е.

$$\triangle^d := \{(i_1, i_2, \dots, i_d) \in \mathbb{N}^d : \ i_1 > i_2 > \dots > i_d\}.$$

Напомним также, что базисная последовательность $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ в банаховом пространстве X называется RUD последовательностью[53], если для некоторого $D > 0$, любых $n \in \mathbb{N}$ и $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \dots, n$, выполняется неравенство

$$\left\| \sum_{j=1}^n a_j x_j \right\|_X \leqslant D \int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^n r_j(u) a_j x_j \right\|_X du.$$

[51] Blei R. Combinatorial dimension and certain norms in harmonic analysis // Amer. J. of Math. – 1984. – V. 106. – No. 4. – P. 847–887.

[52] Blei R. Analysis in Integer and Fractional Dimensions. – Cambridge Studies in Advanced Mathematics 71, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 2001.

[53] Lopez-Abad J., Tradacete P. Bases of random unconditional convergence in Banach spaces // Transactions of the AMS. – 2016. – V. 368. – No. 12. – P. 9001–9032.

В разделе 5.3.4 доказан, в частности, такой результат. При его доказательстве использовалось экстраполяционное описание пространств Орлича.

Теорема 22 (5.3.18). *Пусть X — пространство Орлича. Предположим также, что множество $\mathcal{A} \subset \triangle^d$ имеет комбинаторную размерность $\alpha > 1$. Тогда следующие условия эквивалентны:*
1) $\{r_{i_1 i_2 \dots i_d}\}_{(i_1, i_2, \dots, i_d) \in \mathcal{A}}$ — безусловная базисная последовательность в X;
2) $\{r_{i_1 i_2 \dots i_d}\}_{(i_1, i_2, \dots, i_d) \in \mathcal{A}}$ — RUD последовательность в X;
3) последовательность $\{r_{i_1 i_2 \dots i_d}\}_{(i_1, i_2, \dots, i_d) \in \mathcal{A}}$ эквивалентна в X стандартному базису ℓ_2, т.е. для некоторой константы C_X и всех последовательностей $\{a_{i_1 i_2 \dots i_d}\}_{(i_1, i_2, \dots, i_d) \in \mathcal{A}}$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} C_X^{-1} \left\| \{a_{i_1 i_2 \dots i_d}\}_{(i_1, i_2, \dots, i_d) \in \mathcal{A}} \right\|_{\ell_2(\mathcal{A})} &\leqslant \left\| \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_d) \in \mathcal{A}} a_{i_1 i_2 \dots i_d} r_{i_1 i_2 \dots i_d} \right\|_X \\ &\leqslant C_X \left\| \{a_{i_1 i_2 \dots i_d}\}_{(i_1, i_2, \dots, i_d) \in \mathcal{A}} \right\|_{\ell_2(\mathcal{A})}; \end{aligned}$$

4) $X \supset \mathrm{Exp} L^{2/\alpha}$.

В **Заключении** сделаны выводы об основных итогах работы, обозначены важнейшие теоретические результаты и наиболее эффектные приложения.

Публикации автора по теме диссертации

1. Лыков К. В. Экстраполяция в шкале L_p-пространств и сходимость ортогональных рядов в пространствах Марцинкевича // Вестник СамГУ. – 2006. – № 2 (42). – С. 28–43.

2. Лыков К. В. Критерий сепарабельности экстраполяционного пространства // Вестник СамГУ. – 2006. – № 4 (44). – С. 5–12.

3. Асташкин С. В., Лыков К. В. Экстраполяционное описание пространств Лоренца и Марцинкевича, близких к L_∞ // Сиб. матем. журн. – 2006. – Т. 47. – № 5. – С. 974–992.

4. Лыков К. В. О дополняемости подпространств симметричного пространства, порожденных сжатиями и трансляциями // Вестник СамГУ. – 2006. – № 6/1 (46). – С. 47–63.

5. Лыков К. В., Морозова Т. А., Суханов Р. С. Структура непрерывных функций в линейной оболочке хаосов Радемахера // Вестник СамГУ. – 2008. – № 6. – С. 123–138.

6. Асташкин С. В., Лыков К. В. Сильно экстраполяционные пространства и интерполяция // Сиб. матем. журн. – 2009. – Т. 50. – № 2. – С. 250–266.

7. Лыков К. В. Некоторые замечания к проблеме моментов и ее связи с теорией экстраполяции пространств // Матем. заметки. – 2012. – Т. 91. – No. 1. – С. 79–92.

8. Лыков К. В. Новые условия единственности в классической проблеме моментов // Матем. заметки. – 2012. – Т. 92. – No. 6. – 893–903.

9. Лыков К. В. Экстраполяция операторов, действующих в квазибанаховы пространства // Матем. сборник. – 2016. – Т. 207. – No. 1. – С. 93–122.

10. Асташкин С. В., Лыков К. В. Разреженный хаос Радемахера в симметричных пространствах // Алгебра и Анализ. – 2016. – Т. 28. – No. 1. – С. 3–31.

11. Лыков К. В. Любая случайная величина с конечными моментами есть сумма двух величин с определенной проблемой моментов // Теория вероятностей и её применения. – 2017. – Т. 62. – No. 4. – С. 787–797.

12. Лыков К. В. Об экстраполяционных свойствах классов Шаттена-фон Неймана // Функц. анализ и его прил. – 2018. – Т. 52. – No. 1. – С. 70–75.

13. Astashkin S., Lykov K. Extrapolation description of rearrangement invariant spaces and related problems // Banach and function spaces III (ISBFS 2009) (Kitakyushu, 2009). – Yokohama: Yokohama Publisher, 2011. – P. 1–52.

14. Astashkin S. V., Lykov K. V., Mastyło M. On extrapolation of rearrangement invariant spaces // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. – 2012. – V. 45. – No. 5. – P. 2735–2749.

15. Astashkin S. V., Lykov K. V. Jawerth-Milman extrapolation theory: some recent developments with applications // Functional Analysis, Harmonic Analysis, and Image Processing: A Collection of Papers in Honor of Björn Jawerth, Contemporary Mathematics, 693, eds. Michael Cwikel, Mario Milman. – Providence, Rhode Island: AMS, 2017. – P. 7–53.

Теория экстраполяции для шкал типа Лебега и ее приложения.

Лыков К. В.

Аннотация

В диссертации изложены полученные автором новые результаты об экстраполяции пространств и операторов. Подробно исследованы симметричные пространства (как функций, так и последовательностей), экстраполяционные относительно шкалы пространств Лебега, найдены точные экстраполяционные соотношения для норм таких пространств. Полученные соотношения были использованы автором для формулировки и доказательства новых точных экстраполяционных теорем для линейных и сублинейных операторов. На основе экстраполяционных соотношений для норм получены новые условия определенности в классической степенной проблеме моментов, а также критерий безусловности для хаоса Радемахера с разреженным множеством индексов.

Extrapolation theory of Lebesgue type scales and its applications.

Lykov K. V.

Annotation

In the thesis, the author presents new results on the extrapolation of spaces and operators. We investigate in detail the symmetric spaces (both function spaces and sequence spaces), which are extrapolation with respect to the scale of Lebesgue spaces. We found the exact extrapolation relations for the norms of these spaces. The obtained relations were used to formulate and prove new exact extrapolation theorems for linear and sublinear operators. Using the extrapolation relations for norms, we obtained new conditions of determinateness in the classical power moment problem, and also the criterion of unconditioness for the Rademacher chaos with a sparse set of indices.